

T.C.
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAKLAŞIMLI GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜSLÜM DÜNDAR

DANIŞMAN
DOÇ. DR. EBUBEKİR İNAN

ADYAMAN, 2022

ÖZET

YAKLAŞIMLI GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

Müslüm DÜNDAR

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Kasım/2022

Danışman: Doç. Dr., Ebubekir İNAN

Bu tezin birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilerek literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde, proksimal relator uzayları ve proksimal relator uzayında yaklaşımlı yarı-gruplar incelenmiştir. Yaklaşımlı yarı-grup örnekleri verilmiş ve yaklaşımlı yarı-grupların bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, yaklaşımlı gruplar ve yaklaşımlı grup homomorfizmalarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, yaklaşımlı grupların direkt çarpımları tanımlanmış ve bir örnek verilmiştir. Ayrıca yaklaşımlı grupların direkt çarpımları ile ilgili bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Proksimiti uzay; Relator uzay; Tanımsal yaklaşımlar; Yaklaşımlı gruplar; Direkt çarpımlar.

ABSTRACT

DIRECT PRODUCTS OF APPROXIMATELY GROUPS

Müslüm DÜNDAR

Department of Mathematics

Adiyaman University, Graduate Education School, November/2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr., Ebubekir İNAN

In the first part of this thesis, the purpose and importance of the research is mentioned and a summary of the literature is presented. In the second part, proximal relator spaces and approximately semi-groups in proximal relator space are examined. Examples of approximately semi-groups are given and some basic properties of approximate semi-groups are examined.

In the third chapter, approximately groups and approximately group homomorphisms are mentioned.

In the fourth chapter, direct products of approximately groups are defined and an example is given. In addition, some original results about direct products of approximately groups are presented.

Keywords: Proximity space; Relator space; Descriptive approximations; Approximately groups; Direct products.

TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında emeğini ve desteğini esirgemeyen başta danışmanım Sayın Doç. Dr. Ebubekir İNAN ve her dersinde bize farklı bakış açıları kazandıran Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Müslüm DÜNDAR

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
TABLolar DİZİNİ.....	viii
GÖRSELLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Proksimal Relator Uzay	3
2.2. Yaklaşımlı Yarı-Gruplar	9
3. YAKLAŞIMLI GRUPLAR.....	19
3.1. Yaklaşımlı Gruplar	19
3.2 Yaklaşımlı Grup Homomorfizmaları	30
4. YAKLAŞIMLI GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI	33
4.1. Yaklaşımlı Grupların Direkt Çarpımları	33
KAYNAKÇA	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 2.1. X deki piksellerin RGB kodları	10
Tablo 2.2. X deki piksellerin RGB kodları	12
Tablo 2.3. X deki piksellerin RGB kodları	14
Tablo 2.4. İşlem tablosu	16
Tablo 3.1. X deki piksellerin RGB kodları	20
Tablo 4.1. Laboratuvar örneklerin aldığı parametre değerleri	41

GÖRSELLER DİZİNİ

	Sayfa
Görsel 2.1. Dijital görüntü	10
Görsel 2.2. Dijital görüntü	11
Görsel 2.3. A nın tanımsal üst yaklaşımı.....	13
Görsel 2.4. Dijital görüntü	14
Görsel 2.5. S nin tanımsal üst yaklaşımı.....	15
Görsel 3.1. Dijital görüntü	19



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{R}$	: Relator
$(X, \mathcal{R})$	: Relator uzay
δ	: Proksimiti bağıntısı
φ	: Çıkarım fonksiyonu
$(X, \mathcal{R}_\delta)$	: Proksimal relator uzayı
Φ	: Nesne tanımlaması
δ_Φ	: Tanımsal proksimiti bağıntısı
$Q(A)$	: A nın küme tanımlaması
$\bigcap_\Phi$	: Tanımsal arakesit
Φ^*A	: A nın tanımsal üst yaklaşımı
ρ_l	: Sol zayıf eşdeğerlik bağıntısı
ρ_r	: Sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısı

1. GİRİŞ

Boştan farklı iki kümenin kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesine *bağıntı* denir. Bağntı kavramı, üzerinde tanımlı olduğu kümenin elemanları arasında bir bağ kurar. Bağntı kullanılarak birbiri ile ilişkili olan elemanların özellikleri çok daha kolay bir şekilde incelenebilir. Bir küme üzerinde birden fazla bağntı tanımlanabilir. $X \neq \emptyset$ olmak üzere, X üzerinde tanımlanan bağntıların kümesine bir *relator* denir.

Proksimiti bağntıları ilk olarak 1952 yılında Efremovič tarafından daha çok geometrik ve topolojik bazı kavramların oluşturulması için tanımlanmıştır [1]. Proksimiti bağntılarında temel düşünce iki kümenin veya elemanın yakınlığının belli özellikler dikkate alınarak incelenmesidir. Bu düşünce doğrultusunda yakın (proksimal) kümeler üzerinde birçok topolojik araştırmalar yapılmıştır [2-4].

X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağntıların kümesi $\mathcal{R}_\delta$ olmak üzere, $(X, \mathcal{R}_\delta)$ ikilisi bir *proksimal relator uzayı* olarak adlandırılır [5]. Efremovič proksimiti [1], Lodato proksimiti [3] gibi farklı proksimiti bağntıları tanımlanmıştır.

2013 te Naimpally ve Peters tarafından tanımsal Efremovič proksimiti, tanımsal Lodato proksimiti bağntıları tanımlanmıştır [4]. Tanımsal proksimiti bağntıları, konumu ve özellikleri olan algılanabilir soyut olmayan noktalardan oluşan kümeler üzerinde tanımlanmıştır. Mesela dijital görüntüler piksellerden oluşmaktadır. Her bir piksel, konumu ve renk koduna karşılık gelen çıkarım fonksiyonları ile birlikte soyut olmayan bir nokta olarak dikkate alınabilir. Soyut olmayan her bir elemanın özelliklerini temsil eden reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak nesnelerin bilişsel olarak algılanması gerçekleşmiş olur. Böylece elemanların ortak özellikleri gözönünde tutularak tanımsal anlamda yakınlıklarından bahsedilebilir. Tanımsal proksimiti bağntıları dikkate alınarak bazı araştırmalar yapılmıştır [5-7]. X kümesi üzerinde tanımlanan proksimiti bağntıları yerine tanımsal proksimiti bağntıları ele alınırsa $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ ikilisine bir *tanımsal proksimal relator uzayı* denir.

Proksimiti bağntılar kullanılarak oluşturulan cebirsel yapılar ile ilgili çalışmalar 2017 yılında başlamıştır [8]. Proksimal relator uzayında cebirsel yapılar, temel olarak bu uzay üzerinde tanımlanan ikili işlem ve alt kümelerin proksimiti bağntısı ile belirlenen

tanımsal üst yaklaşımları dikkate alınarak oluşturulur. 2017 de İnan tarafından tanımsal üst yaklaşımın bazı özellikleri, yaklaşımlı (approximately) yarı-gruplar ve yaklaşımlı yarı-gruplarda yaklaşımlı idealler verilmiştir [8]. 2018 ve 2019 da yaklaşımlı gruplar, yaklaşımlı alt gruplar ve yaklaşımlı grup homomorfizmaları İnan tarafından tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili örnekler incelenmiştir [9-10]. 2019 yılında yaklaşımlı gamma yarı-gruplar Uçkun ve İnan tarafından verilmiştir [11]. Ayrıca yaklaşımlı halkaların, yaklaşımlı halkanın yaklaşımlı ideallerinin, yaklaşımlı halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri incelenmiş ve bu kavramlara örnekler verilmiştir [12]. Yaklaşımlı cebirsel yapıların, görüntü analizi veya sınıflandırma problemleri gibi diğer araştırma konuları için etkili çalışma imkânı sağlaması beklenmektedir.

Bu tezin dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde, araştırmanın amacı ve öneminden bahsedilerek kısa bir literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde, proksimal relator uzayları ve proksimal relator uzayında yaklaşımlı yarı-gruplar incelenmiştir. Yaklaşımlı yarı-grup örnekleri verilmiş ve yaklaşımlı yarı-grupların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, yaklaşımlı gruplar ve yaklaşımlı grup homomorfizmalarından bahsedilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise yaklaşımlı grupların direkt çarpımları tanımlanmış ve bu kavrama bir örnek verilmiştir. Ayrıca yaklaşımlı grupların direkt çarpımları ile ilgili bazı özgün sonuçlar sunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Proksimal Relator Uzay

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ olmak üzere X üzerinde tanımlanan bağıntıların ailesine bir relator denir ve $\mathcal{R}$ notasyonu ile gösterilir. $(X, \mathcal{R})$ (veya $X(\mathcal{R})$) ikilisine de bir relator uzay denir.

Bu çalışma boyunca, Efremovič proksimiti δ ve tanımsal proksimiti δ_Φ bağıntıları dikkate alınmıştır [1].

Tanım 2.1.2. δ , $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa δ bağıntısına Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

- (1) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$
- (2) $A\delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$
- (3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\delta B$
- (4) $A\delta(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta B$ veya $A\delta C$
- (5) $\{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x = y$
- (6) $A\delta B \Rightarrow \exists E \subseteq X$ öyle ki $A\delta E$ ve $E^c \delta B$. (Efremovič aksiyomu)

Tanım 2.1.3. δ , $P(X)$ üzerinde tanımlanan bir bağıntı olsun. δ , Tanım 2.1.2. deki (1)–(5) özellikleri ile birlikte

$A\delta B$ ve $\forall b \in B, \{b\}\delta C \Rightarrow A\delta C$ (Lodato Aksiyomu)

özellikliğini sağlıyorsa ise δ ya Lodato proksimiti bağıntısı denir ve δ_L ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. X üzerinde tanımlanan proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_\delta$ olmak üzere, $(X, \mathcal{R}_\delta)$ ikilisine proksimal relator uzay denir.

Bu çalışmada soyut noktalar yerine konumu ve özelliği olan soyut olmayan noktalar kullanılmıştır [2].

Tanım 2.1.5. $X \neq \emptyset$ soyut olmayan noktaların bir kümesi olsun. Soyut olmayan noktaların özelliğini temsil eden

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna çıkarım fonksiyonu denir. $x \in X$ olmak üzere $\varphi(x)$, x elemanının ayırt edici özelliğini temsil eder.

Tanım 2.1.6. $x \in X$ olsun. φ_i fonksiyonları X deki elemanların ayırt edici özelliklerini temsil eden fonksiyonlar olmak üzere

$$\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ ($n \in \mathbb{N}$) şeklinde tanımlanan Φ fonksiyonuna x elemanının bir nesne tanımlaması denir.

Çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi belirlendikten sonra bir δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı tanımlanabilir

Tanım 2.1.7. $X \neq \emptyset$ soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A \subseteq X$ olsun.

$$Q(A) = \{\Phi(a) \mid a \in A\}$$

kümesine A nın küme tanımlaması denir.

Tanım 2.1.8. $X \neq \emptyset$ soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A, B \subseteq X$ olsun.

$$A \cap_\Phi B = \{x \in A \cup B \mid \Phi(x) \in Q(A) \text{ ve } \Phi(x) \in Q(B)\}$$

kümesine A ile B kümelerinin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 2.1.9. $X \neq \emptyset$ ve δ_Φ , X üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. $A, B, C \subseteq X$ olmak üzere δ_Φ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise δ_Φ bağıntısına tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısı denir:

$$(1) A\delta_\Phi B \Rightarrow B\delta_\Phi A$$

$$(2) A\delta_\Phi B \Rightarrow A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset \text{ (veya } \emptyset \delta_\Phi A)$$

$$(3) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\delta_\Phi B$$

$$(4) A\delta_{\Phi}(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta_{\Phi}B \text{ veya } A\delta_{\Phi}C$$

$$(5) \{x\}\delta_{\Phi}\{y\} \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(y)$$

$$(6) A\delta_{\Phi}B \Rightarrow \exists E \subseteq X \text{ öyle ki } A\delta_{\Phi}E \text{ ve } E^c\delta_{\Phi}B \text{ (Efremovič aksiyomu)}$$

Tanım 2.1.10. X üzerinde tanımlanan tanımsal proksimiti bağıntılarının bir ailesi $\mathcal{R}_{\delta_{\Phi}}$ olmak üzere $(X, \mathcal{R}_{\delta_{\Phi}})$ ikilisine tanımsal proksimal relator uzay denir.

Teorem 2.1.11. $X \neq \emptyset$ ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere $A\delta_{\Phi}B \Leftrightarrow Q(A) \cap Q(B) \neq \emptyset$ ile tanımlı δ_{Φ} bağıntısı bir tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısıdır.

İspat (1), (2) ve (3) kolayca görülür.

(4) Lemma 2.1.17 den

$$\begin{aligned} A\delta_{\Phi}(B \cup C) &\Rightarrow Q(A) \cap Q(B \cup C) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow Q(A) \cap (Q(B) \cup Q(C)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (Q(A) \cap Q(B)) \cup (Q(A) \cap Q(C)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow Q(A) \cap Q(B) \neq \emptyset \text{ veya } Q(A) \cap Q(C) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow A\delta_{\Phi}B \text{ veya } A\delta_{\Phi}C \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} (5) \{x\}\delta_{\Phi}\{y\} &\Rightarrow Q(\{x\}) \cap Q(\{y\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \Phi(x) = \Phi(y) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} (6) A\delta_{\Phi}B &\Rightarrow Q(A) \cap Q(B) = \emptyset \text{ dir. } E = \{x \mid x\delta_{\Phi}B\} \text{ olacak şekilde } \exists E \subseteq X \text{ kümesi vardır} \\ &\text{öyle ki } Q(E) \subseteq Q(B) \text{ den } Q(A) \cap Q(E) = \emptyset, \quad A\delta_{\Phi}E \text{ ve } E^c = \{x \in X \mid x\delta_{\Phi}B\} \\ &\text{olduğundan } E^c\delta_{\Phi}B \text{ olur.} \end{aligned}$$

Tanım 2.1.12. X boştan farklı soyut olmayan noktaların bir kümesi ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- $Q(A) \cap Q(B) \neq \emptyset$ ise A, B ye tanımsal yakındır denir ve $A\delta_{\Phi}B$ ile gösterilir.
- $Q(A) \cap Q(B) = \emptyset$ ise A, B ye tanımsal uzaktır denir ve $A\delta_{\Phi}B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. X boştan farklı bir küme, $A \subseteq X$ ve $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir nesne tanımlaması olsun.

$$cI_{\Phi}(a) = \{x \in X \mid \Phi(a) = \Phi(x)\}$$

kümesine $a \in A$ noktasının tanımsal kapanışı denir.

Tanım 2.1.14. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$\Phi^* A = \{x \in X \mid x \delta_\Phi A\}$$

kümesine A nın tanımsal üst yaklaşımı denir.

Tanım 2.1.15. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$\Phi_* A = \{a \in A \mid cI_\Phi(a) \subseteq A\}$$

kümesine A nın tanımsal alt yaklaşımı denir.

Tanım 2.1.16. X boştan farklı soyut olmayan noktalardan oluşan bir küme ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\xi_\Phi(A) = \{B \in P(X) \mid A \delta_\Phi B\}$$

kümesine A nın tanımsal yakınlık ailesi denir.

Lemma 2.1.17. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ tanımsal proksimal relator uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$(i) \quad Q(A \cap B) = Q(A) \cap Q(B)$$

$$(ii) \quad Q(A \cup B) = Q(A) \cup Q(B)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} (i) \quad Q(A \cap B) &= \{\Phi(a) \mid a \in A \cap B\} \\ &= \{\Phi(a) \mid a \in A \wedge a \in B\} \\ &= \{\Phi(a) \mid a \in A\} \cap \{\Phi(a) \mid a \in B\} \\ &= Q(A) \cap Q(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad Q(A \cup B) &= \{\Phi(a) \mid a \in A \cup B\} \\ &= \{\Phi(a) \mid a \in A \vee a \in B\} \\ &= \{\Phi(a) \mid a \in A\} \cup \{\Phi(a) \mid a \in B\} \\ &= Q(A) \cup Q(B). \end{aligned}$$

Teorem 2.1.18. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$(i) \quad (\Phi_* A) \subseteq A \subseteq (\Phi^* A)$$

$$(ii) \quad \Phi^*(A \cup B) = (\Phi^* A) \cup (\Phi^* B)$$

$$(iii) \quad \Phi_*(A \cap B) = (\Phi_* A) \cap (\Phi_* B)$$

$$(iv) \quad A \subseteq B \text{ ise } (\Phi_* A) \subseteq (\Phi_* B)$$

$$(v) \quad A \subseteq B \text{ ise } (\Phi^* A) \subseteq (\Phi^* B)$$

$$(vi) \quad \Phi_*(A \cup B) \supseteq (\Phi_* A) \cup (\Phi_* B)$$

$$(vii) \quad \Phi^*(A \cap B) \subseteq (\Phi^* A) \cap (\Phi^* B)$$

İspat (i) $a \in \Phi_* A$ olsun. Bu durumda $a \in A$ olduğundan $cl_\Phi(a) \subseteq Q(A)$ dır. Böylelikle $(\Phi_* A) \subseteq A$ olur. $a \in A$ olduğundan $\Phi(a) \in Q(A)$ dır, yani $Q(\{a\}) \cap Q(A) \neq \emptyset$ dır. O halde $a \in \Phi^* A$ olur. Böylece $A \subseteq \Phi^* A$ dır.

$$(ii) \quad \Phi^*(A \cup B) = \{x \in X \mid x\delta_\Phi(A \cup B)\}$$

$$x \in \Phi^*(A \cup B) \Leftrightarrow \Phi(x) \in Q(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) \in Q(A) \cup Q(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \Phi^*(A) \text{ veya } x \in \Phi^*(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \Phi^*(A) \cup \Phi^*(B) \text{ olur.}$$

$$(iii) \quad \Phi_*(A \cap B) = \{x \in A \cap B \mid cl_\Phi(x) \subseteq A \cap B\}$$

$$= \{x \in A \mid cl_\Phi(x) \subseteq A\} \cap \{x \in B \mid cl_\Phi(x) \subseteq B\}$$

$$= \Phi_*(A) \cap \Phi_*(B) \text{ dir.}$$

(iv) $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda $A \cap B = A$ dir. (iii) özelliği dikkate alınırsa $\Phi_* A = \Phi_*(A \cap B) = (\Phi_* A) \cap (\Phi_* B)$ olur. Böylece $\Phi_* A \subseteq \Phi_* B$ sonucuna ulaşılır.

(v) $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda $A \cup B = B$ dir. (ii) özelliği dikkate alınırsa

$$\Phi^* B = \Phi^*(A \cup B) = (\Phi^* A) \cup (\Phi^* B)$$

olur. Böylece $\Phi^* A \subseteq \Phi^* B$ elde edilir.

(vi) $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan (iv) özelliği dikkate alınırsa, $\Phi_* A \subseteq \Phi_*(A \cup B)$ ve benzer şekilde $\Phi_* B \subseteq \Phi_*(A \cup B)$ elde edilir. Böylece $(\Phi_* A) \cup (\Phi_* B) \subseteq \Phi_*(A \cup B)$ olur.

(vii) $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan (vi) özelliği kullanılırsa $\Phi^*(A \cap B) \subseteq \Phi^* A$ ve benzer şekilde $\Phi^*(A \cap B) \subseteq \Phi^* B$ olur. Buradan $\Phi^*(A \cap B) \subseteq (\Phi^* A) \cap (\Phi^* B)$ elde edilir.

Tanım 2.1.19. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $(A, \cdot)$ ve $(Q(A), \cdot)$ birer grupoid ve Φ bir nesne tanımlaması olmak üzere, her $a, b \in A$ için $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$ ise Φ ya A dan $Q(A)$ ya bir tanımsal homomorfizma denir.

Lemma 2.1.20. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. A ve B , X üzerinde tanımlanan “.” ikili işlemi ile birer grupoid ve $Q(A), Q(B)$ de $Q(X)$ de tanımlanan “.” ikili işlemi ile birer grupoid olsun. Bu durumda $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir tanımsal homomorfizma ise

$$Q(A)Q(B) = Q(AB)$$

dir.

İspat Hipotezden Φ tanımsal homomorfizma olduğundan $\Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ab)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} Q(A)Q(B) &= \{\Phi(a)\Phi(b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \{\Phi(ab) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= Q(AB) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.1.21. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir tanımsal homomorfizma ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$(i) \quad (\Phi^* A)(\Phi^* B) = \Phi^*(AB)$$

$$(ii) \quad (\Phi_* A)(\Phi_* B) \subseteq \Phi_*(AB)$$

İspat (i) $x \in (\Phi^* A)(\Phi^* B)$ olsun. $a \in \Phi^* A$ ve $b \in \Phi^* B$ elemanlarını aldığımızda $x = ab$ olur. Böylece $\Phi(a) \in Q(A)$ ve $\Phi(b) \in Q(B)$ dir. Φ tanımsal homomorfizma olduğundan $\Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ab) \in Q(A)Q(B)$ ve Lemma 2.1.20 den $\Phi(x) \in Q(AB)$ dir, yani $x \in \Phi^*(AB)$ olur. Böylece $(\Phi^* A)(\Phi^* B) \subseteq \Phi^*(AB)$ dir. Benzer şekilde $\Phi^*(AB) \subseteq (\Phi^* A)(\Phi^* B)$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda $(\Phi^* A)(\Phi^* B) = \Phi^*(AB)$ elde edilir.

(ii) $x \in (\Phi_* A)(\Phi_* B)$ ise $a \in \Phi_* A$ ve $b \in \Phi_* B$ olmak üzere $x = ab$ alınabilir. Böylece $cl_\Phi(a) \subseteq A$ ve $cl_\Phi(b) \subseteq B$ olur. Buradan $y \in X$ için $\Phi(a) = \Phi(y) \in Q(A)$ ve $\Phi(b) = \Phi(y) \in Q(B)$ dir. Φ bir tanımsal homomorfizma olduğundan $\Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ab) = \Phi(x) \in Q(A)Q(B)$ ve Lemma 2.1.20 den $\Phi(ab) = \Phi(x) \in Q(AB)$ dir. O zaman $cl_\Phi(ab) \subseteq AB$, yani $x = ab \in \Phi_*(AB)$ dir. Sonuç olarak $(\Phi_* A)(\Phi_* B) \subseteq \Phi_*(AB)$ dir.

2.2. Yaklaşımlı Yarı-Gruplar

Bu bölüm boyunca yaklaşımlı yarı-gruplar ve idealler başlıklı makaleden yararlanılmıştır [8].

Tanım 2.2.1. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzayı, “.”, X de bir ikili işlem ve $G \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in G$ için $x, y \in \Phi^* G$ ise G ye proksimal relator uzayında yaklaşımlı grupoid denir.

$G, (X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ de “.” ikili işlemi ile bir yaklaşımlı grupoid, $g \in G$ ve $A, B \subseteq G$ alalım. $Q(A), Q(B) \subseteq Q(G)$ kümeleri de $Q(X)$ deki “.” ikili işlemi ile birer yaklaşımlı grupoid olsun. $g \cdot A, A \cdot g, A \cdot B \subseteq \Phi^* G \subseteq X$ ve $Q(A) \cdot Q(B)$ alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$g \cdot A = gA = \{ga \mid a \in A\},$$

$$A \cdot g = Ag = \{ag \mid a \in A\},$$

$$A \cdot B = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$

$$Q(A) \cdot Q(B) = Q(A)Q(B) = \{ \Phi(a)\Phi(b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

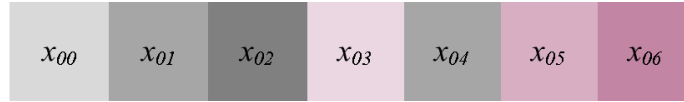
Tanım 2.2.2. $(X, \mathcal{R}_\delta)$ bir tanımsal proksimal relator uzayı ve “.”, X üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $S \subseteq X$ ye proksimal relator uzayında bir yaklaşımlı yarı-grup denir:

(AY_1) Her $x \cdot y \in S$ için $x \cdot y \in \Phi^*S$ dir.

(AY_2) Her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ eşitliği Φ^*S de sağlanır.

Bir yaklaşımlı yarı-grup birimli (yani her $x \in S$ için $x \cdot e_s = e_s \cdot x = x$ olacak şekilde $e_s \in \Phi^*S$ varsa) ise S ye bir yaklaşımlı monoid denir.

Örnek 2.2.3. X, δ_ϕ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte Görsel 2.1 de olduğu gibi 7 pikselden oluşan bir görüntü olsun.



Görsel 2.1. *Dijital görüntü*

Tablo 2.1. X deki piksellerin RGB kodları

	x_{00}	x_{01}	x_{02}	x_{03}	x_{04}	x_{05}	x_{06}
<i>Red</i>	217	166	128	235	166	215	194
<i>Green</i>	217	166	128	215	166	174	133
<i>Blue</i>	217	166	128	225	166	194	163

x_{ij} , X dijital görüntüsünde (i, j) i. satır j . sütun konumuna sahip bir pikseldir. ϕ , RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere ϕ nin aldığı değerler Tablo 2.1 deki gibidir.

$0 \leq i, j, k, l \leq 6$, $i \cdot k = p(\text{mod } 7)$ ve $j \cdot l = r(\text{mod } 7)$ olmak üzere,

$$\cdot : X \times X \rightarrow X$$

$$(x_{ij}, x_{kl}) \mapsto x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{pr}$$

X üzerinde bir “ $\cdot$ ” ikili işlem ve $B = \{x_{00}, x_{01}, x_{02}\} \subseteq X$ bir alt küme olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(B) &= \{\varphi(x_{00}), \varphi(x_{01}), \varphi(x_{02})\} \\ &= \{(217, 217, 217), (166, 166, 166), (128, 128, 128)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned} \Phi^* B &= \{x_{ij} \in X \mid x \delta_\Phi B\} \\ &= \{x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{04}\} \end{aligned}$$

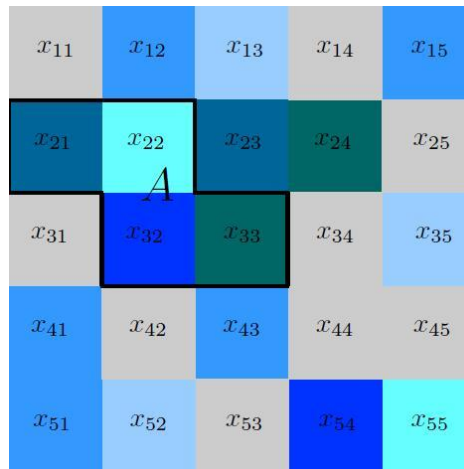
elde edilir.

(AY₁) Her $x_{ij}, x_{ij} \in B$ için $x_{ij} \cdot x_{ij} \in \Phi^* B$ olduğundan kapalılık vardır.

(AY₂) Her $x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in B$ için $(x_{ij} \cdot x_{kl}) \cdot x_{mn} = x_{ij} \cdot (x_{kl} \cdot x_{mn})$ eşitliği $\Phi^* B$ de sağlanır.

Bununla birlikte her $x_{ij} \in B$ için $x_{ij} \cdot x_{01} = x_{01} \cdot x_{ij} = x_{ij}$ olacak şekilde $\Phi^* B$ de x_{01} birim elemanı vardır. Böylece B yaklaşımlı monoid olur.

Örnek 2.2.4. X , δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Görsel 2.2 de olduğu gibi 25 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.



Görsel 2.2. *Dijital görüntü*

x_{ij} , X dijital görüntüsünde i . satır j . sütun konumuna sahip bir pikseldir. φ , RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere φ nin aldığı değerler Tablo 2.2 deki gibidir.

Tablo 2.2. X deki piksellerin RGB kodları

	Red	Green	Blue
x_{11}	204	204	204
x_{12}	51	153	255
x_{13}	204	255	255
x_{14}	204	204	204
x_{15}	51	153	255
x_{21}	0	102	153
x_{22}	102	255	255
x_{23}	0	102	153
x_{24}	0	102	102
x_{25}	204	204	204
x_{31}	204	204	204
x_{32}	0	51	255
x_{33}	0	102	102

	Red	Green	Blue
x_{34}	204	204	204
x_{35}	204	255	255
x_{41}	51	153	255
x_{42}	204	204	204
x_{43}	51	153	255
x_{44}	204	204	204
x_{45}	204	204	204
x_{51}	51	153	255
x_{52}	204	255	255
x_{53}	204	204	204
x_{54}	0	51	255
x_{55}	102	255	255

$1 \leq i, j, k, l, p, r \leq 5$, $p = \min\{i, k\}$ ve $r = \min\{j, l\}$ olmak üzere,

$$\cdot : X \times X \rightarrow X$$

$$(x_{ij}, x_{kl}) \mapsto x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{pr}$$

X üzerinde bir ikili işlem ve $A = \{x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\} \subseteq X$ bir alt küme olsun.

Tablo 2.2 den

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(A) &= \{\varphi(x_{21}), \varphi(x_{22}), \varphi(x_{32}), \varphi(x_{33})\} \\ &= \{(0, 102, 153), (102, 255, 255), (0, 51, 255), (0, 102, 102)\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Tanım 2.1.14 den A nın tanımsal üst yaklaşımı $\Phi^*A = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{54}, x_{55}\}$ bulunur. Bu durumda A nın tanımsal üst yaklaşımı Görsel 2.3 deki gibidir.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}
x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}

Görsel 2.3. A nın tanımsal üst yaklaşımı

Böylece,

(AY₁) Her $x_{ij}, x_{kl} \in A$ için $x_{ij} \cdot x_{kl} \in \Phi^*A$,

(AY₂) Her $x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in A$ için $(x_{ij} \cdot x_{kl}) \cdot x_{mn} = x_{ij} \cdot (x_{kl} \cdot x_{mn})$ özelliği Φ^*A da sağlanır, özellikleri sağlandığından $A \subseteq X$ bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

Ayrıca her $x_{ij}, x_{kl} \in A$ için $x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{kl} \cdot x_{ij}$ özelliği Φ^*A sağlandığından A bir değişmeli yaklaşımlı yarı-gruptur. Örnek 2.2.4 de görüldüğü gibi yaklaşımlı birim eleman rolünde birden fazla eleman bulunabilir. $x_{33}, x_{55} \in \Phi^*A$ elemanların ikisi de yaklaşımlı birim eleman özelliğini sağlar. Bu durumda A nın tek bir birim elemanı olmadığından A bir yaklaşımlı monoid değildir.

Örnek 2.2.5. X, δ_ϕ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Görsel 2.4 de olduğu gibi 16 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

Görsel 2.4. *Dijital görüntü*

x_{ij} , X dijital görüntüsünde i . satır j . sütun konumuna sahip bir pikseldir. φ , RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere φ nin aldığı değerler Tablo 2.3 deki gibidir.

Tablo 2.3. X deki piksellerin RGB kodları

	Red	Green	Blue
x_{11}	0	151	255
x_{12}	0	151	255
x_{13}	130	255	255
x_{14}	200	204	255
x_{21}	170	170	170
x_{22}	103	183	255
x_{23}	224	208	187
x_{24}	103	192	255

	Red	Green	Blue
x_{31}	0	151	255
x_{32}	103	183	255
x_{33}	121	212	211
x_{34}	205	205	216
x_{41}	130	205	255
x_{42}	202	210	187
x_{43}	121	212	211
x_{44}	200	230	255

$1 \leq i, j, k, l, p, r \leq 4$, $p = \min\{i, k\}$ ve $r = \min\{j, l\}$ olmak üzere,

$$\cdot: X \times X \rightarrow X$$

$$(x_{ij}, x_{kl}) \mapsto x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{pr}$$

X üzerinde bir ikili işlem ve $S = \{x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\}$ X in bir alt görüntüsü olsun.

Tablo 2.3 den

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(S) &= \{\varphi(x_{21}), \varphi(x_{23}), \varphi(x_{24}), \varphi(x_{32}), \varphi(x_{34}), \varphi(x_{42}), \varphi(x_{43})\} \\ &= \{(170, 170, 170), (224, 208, 187), (103, 192, 255) \\ &= (103, 183, 255), (205, 205, 216), (202, 210, 187), (121, 212, 211)\}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Buna göre, Görsel 2.5 de görüldüğü gibi, Tanım 2.1.14 den S nin tanımsal üst yaklaşımı

$$\Phi^*S = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\} \text{ olur.}$$

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

Görsel 2.5. S nin tanımsal üst yaklaşımı

Böylece Tanım 2.2.2 ye göre,

$$(AY_1) \text{ Her } x_{ij}, x_{kl} \in S \text{ için } x_{ij} \cdot x_{kl} \in \Phi^*S,$$

$$(AY_2) \text{ Her } x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in S \text{ için } (x_{ij} \cdot x_{kl}) \cdot x_{mn} = x_{ij} \cdot (x_{kl} \cdot x_{mn}) \text{ özelliği } \Phi^*S \text{ sağlanır,}$$

özellikleri sağlandığından $S \subseteq X$ bir yaklaşımlı yarı-gruptur. Ayrıca her $x_{ij}, x_{kl} \in S$ için

$$x_{ij} \cdot x_{kl} = x_{kl} \cdot x_{ij} \text{ özelliği } \Phi^*S \text{ sağlandığından } S \text{ bir değişmeli yaklaşımlı yarı-gruptur.}$$

Tanım 2.2.6. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $S \subseteq X$ yaklaşımlı yarı-grup ve

$T \subseteq S$ olsun. O zaman $TT \subseteq \Phi^*T$ ise T ye S nin bir alt yaklaşımlı yarı-grubu denir.

Örnek 2.2.7. Örnek 2.2.5 ten $S = \{x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\}$ yaklaşımlı yarı-grubunu

dikkate alalım. $T = \{x_{21}, x_{23}, x_{32}\} \subseteq S \subseteq X$ olsun. X üzerindeki ikili işleme göre T nin

işlem tablosu Tablo 2.4 deki gibidir. Buradan $x_{22} \notin T$ olduğu görülür.

Tablo 2.4. İşlem tablosu

.	x_{21}	x_{23}	x_{32}
x_{21}	x_{21}	x_{21}	x_{21}
x_{23}	x_{21}	x_{23}	x_{22}
x_{32}	x_{21}	x_{22}	x_{32}

Tablo 2.3 den

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(T) &= \{\varphi(x_{21}), \varphi(x_{23}), \varphi(x_{32})\} \\ &= \{(170, 170, 170), (224, 208, 187), (103, 183, 255)\} \end{aligned}$$

olur. Tanım 2.1.14 den T nin üst yaklaşımı $\Phi^*T = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{32}\}$ bulunur.

Tanım 2.2.6 dan $TT \subseteq \Phi^*T$ olduğundan $S \subseteq X$ dijital görüntü kümesinin bir alt görüntü kümesi olan T , "." ikili işlemi ile birlikte bir alt yaklaşımlı yarı-gruptur.

Tanım 2.2.8. (X, δ_Φ) tanımsal proksimal relator uzayı, S yaklaşımlı yarı-grup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun.

(1) Φ^*I , S nin bir sol ideali, yani $S(\Phi^*I) \subseteq \Phi^*I$ şartını sağlıyor ise I ya S nin yaklaşımlı sol ideali denir.

(2) Φ^*I , S nin bir sağ ideali, yani $(\Phi^*I)S \subseteq \Phi^*I$ şartını sağlıyor ise I ya S nin yaklaşımlı sağ ideali denir.

Örnek 2.2.9. Örnek 2.2.5 ten $S = \{x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\}$ yaklaşımlı yarı-grubunu dikkate alalım. $I = \{x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{42}\} \subseteq S \subseteq X$ olsun. Tablo 2.3 den

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(I) &= \{\varphi(x_{21}), \varphi(x_{23}), \varphi(x_{24}), \varphi(x_{32}), \varphi(x_{42})\} \\ &= \{(170, 170, 170), (224, 208, 187), (103, 192, 255), (103, 183, 255), (202, 210, 187)\} \end{aligned}$$

olur. Buradan Tanım 2.1.14 kullanılırsa $\Phi^*I = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{42}\}$ bulunur.

Tanım 2.2.8 (1) den $S(\Phi^*I) \subseteq \Phi^*I$ olduğundan I alt görüntüsü “.” ikili işlemi ile birlikte bir yaklaşımlı sol idealdir. Ayrıca, S değişmeli yaklaşımlı yarı-grup olduğundan I alt görüntüsü aynı zamanda yaklaşımlı sağ idealdir.

Örnek 2.2.10. Örnek 2.2.5 ve Örnek 2.2.7 den $T = \{x_{21}, x_{23}, x_{32}\} \subseteq S$ yaklaşımlı alt yarı-grubunu dikkate alalım. Örnek 2.2.7 de T nin tanımsal üst yaklaşımı $\Phi^*T = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{32}\}$ dir. Tanım 2.2.8 (1) den $S(\Phi^*T) \subseteq \Phi^*T$ olduğundan T yaklaşımlı alt yarı-grubu S dijital görüntüsünün yaklaşımlı sol idealidir. S değişimli yaklaşımlı yarı-grup olduğundan T aynı zamanda S nin yaklaşımlı sağ idealidir.

Örnek 2.2.11. Örnek 2.2.5 ten $S = \{x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\}$ yaklaşımlı yarı-grubunu ele alalım. $K = \{x_{34}, x_{43}\}$ kümesi $S \subseteq X$ in alt görüntüsü olsun.

Tablo 2.3 den

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(K) &= \{\varphi(x_{34}), \varphi(x_{43})\} \\ &= \{(205, 205, 216), (121, 212, 211)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Tanım 2.1.14 kullanılırsa $\Phi^*K = \{x_{34}, x_{33}, x_{43}\}$ bulunur.

Tanım 2.2.6 dan $KK \subseteq \Phi^*K$ olduğundan $S \subseteq X$ dijital görüntüsün alt görüntüsü K , (X, δ_Φ) uzayında “.” ikili işlemiyle birlikte alt yaklaşımlı yarı-gruptur.

$$S(\Phi^*K) = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{42}, x_{43}\} \not\subseteq \Phi^*K$$

oldüğundan K alt görüntüsü S nin bir yaklaşımlı sol ideali (sağ ideali) değildir.

Ayrıca, $J = \{x_{24}, x_{42}\} \subseteq S \subseteq X$ aynı zamanda alt yaklaşımlı yarı-gruptur. Ancak J , S nin bir yaklaşımlı sol ideali (sağ ideali) değildir.

Teorem 2.2.12. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ tanımsal proksimal relator uzay ve $\emptyset \neq S \subseteq X$ olsun. Bu durumda S , X üzerinde bir yarı-grup ise S bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

İspat $S \subseteq X$ bir yarı-grup olmak üzere Teorem 2.1.18 (i) dikkate alınırsa $\emptyset \neq S \subseteq \Phi^*S$ olur. Dolayısıyla her $x, y \in S$ için $x \cdot y \in \Phi^*S$ ve her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ birleşme özelliği Φ^*S de sağlanır. Sonuç olarak, S bir yaklaşımlı yarı-gruptur.

Teorem 2.2.13. I, S yaklaşımlı yarı-grubunun sol (sağ) ideali ise Φ tanımsal homomorfizma olmak üzere I, S nin yaklaşımlı sol (sağ) idealidir.

İspat I, S yaklaşımlı yarı-grubunun sol ideali ise $SI \subseteq I$ olur. $S \subseteq \Phi^*S$ olduğunu biliyoruz. Teorem 2.1.18 (5) ve Teorem 2.1.21 (1) den $S(\Phi^*I) \subseteq (\Phi^*S)(\Phi^*I) = \Phi^*(SI) \subseteq \Phi^*I$ dir. Buradan Φ^*I, S yaklaşımlı yarı-grubun sol ideali olduğundan I, S nin yaklaşımlı sol idealidir. Benzer şekilde I nin S nin yaklaşımlı sağ ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 2.2.13 gösteriyor ki yaklaşımlı yarı-grup (yaklaşımlı sol, sağ ideal), yarı grubun (sol, sağ idealin) genelleştirilmiş halidir.

3. YAKLAŞIMLI GRUPLAR

3.1. Yaklaşımli Gruplar

Bu bölüm boyunca proksimal relator uzaylarında yaklaşımli gruplar ve yaklaşımli alt gruplar başlıklı makaleler dikkate alınmıştır [9,10].

Tanım 3.1.1. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve “.” X de bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $G \subseteq X$ ye proksimal relator uzayında bir yaklaşımli grup denir:

(AG_1) Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in \Phi^*G$,

(AG_2) Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ eşitliği Φ^*G de sağlanır,

(AG_3) Her $e_G \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak şekilde bir $e_G \in \Phi^*G$ vardır (e_G ye G nin yaklaşımli birim elemanı denir),

(AG_4) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır (y ye x in tersi denir ve x^{-1} ile gösterilir).

Örnek 3.1.2. X, δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı ile birlikte, Görsel 3.1 de olduğu gibi 36 pikselden oluşan bir dijital görüntü olsun.

x_{00}	x_{01}	x_{02}	x_{03}	x_{04}	x_{05}
x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
x_{40}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}
x_{50}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}

Görsel 3.1. Dijital görüntü

X deki x_{ij} pikseli, X dijital görüntüsündeki (i, j) (sıra ve sütun) konumundaki pikseldir. φ , RGB kodunu temsil eden bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere φ nin aldığı değerler Tablo 3.1 deki gibidir.

Tablo 3.1. X deki piksellerin RGB kodları

	Red	Green	Blue
x_{00}	174	117	255
x_{01}	145	205	230
x_{02}	120	222	255
x_{03}	98	134	172
x_{04}	100	168	255
x_{05}	145	205	230
x_{10}	98	134	172
x_{11}	80	130	230
x_{12}	100	168	255
x_{13}	170	255	255
x_{14}	145	145	230
x_{15}	120	222	255

	Red	Green	Blue
x_{20}	145	205	230
x_{21}	100	168	255
x_{22}	145	205	230
x_{23}	174	117	255
x_{24}	170	255	255
x_{25}	80	130	230
x_{30}	120	222	255
x_{31}	170	255	255
x_{32}	145	145	230
x_{33}	98	134	172
x_{34}	120	222	255
x_{35}	100	168	255

	Red	Green	Blue
x_{40}	170	255	255
x_{41}	174	117	255
x_{42}	170	255	255
x_{43}	80	130	230
x_{44}	100	168	255
x_{45}	145	205	230
x_{50}	80	130	230
x_{51}	120	222	255
x_{52}	100	168	255
x_{53}	145	205	230
x_{54}	80	130	230
x_{55}	98	134	172

$0 \leq i, j, k, l, p, r \leq 5$, $i + k = p \pmod{5}$ ve $j + l = r \pmod{5}$ olmak üzere

$$\odot: X \times X \rightarrow X$$

$$(x_{ij}, x_{kl}) \mapsto x_{ij} \odot x_{kl} = x_{pr}$$

X üzerinde bir ikili işlem ve $B = \{x_{23}, x_{32}\} \subseteq X$ bir alt dijital görüntü olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} Q(B) &= \{\varphi(x_{23}), \varphi(x_{32})\} \\ &= \{(174, 117, 255), (145, 145, 230)\} \end{aligned}$$

dir. Tanım 2.1.14 ten B kümesinin tanımsal üst yaklaşımı

$$\begin{aligned}
\Phi^* B &= \{x_{ij} \in X \mid x_{ij} \delta_\Phi B\} \\
&= \{x_{ij} \in X \mid Q(\{x_{ij}\}) \cap Q(B) \neq \emptyset\} \\
&= \{x_{23}, x_{41}, x_{00}, x_{32}, x_{14}\}
\end{aligned}$$

bulunur.

(AG₁) Her $x_{ij}, x_{kl} \in B$ için $x_{ij} \odot x_{kl} \in \Phi^* B$ dir.

(AG₂) Her $x_{ij}, x_{kl}, x_{mn} \in B$ için $(x_{ij} \odot x_{kl}) \odot x_{mn} = x_{ij} \odot (x_{kl} \odot x_{mn})$ özelliği $\Phi^* B$ sağlanır.

(AG₃) Her $x_{ij} \in B$ için $x_{ij} \odot x_{00} = x_{00} \odot x_{ij} = x_{ij}$. Dolayısıyla $x_{00} \in \Phi^* B$, B nin bir proksimal birim elemanıdır.

(AG₄) $x_{32} \odot x_{23} = x_{23} \odot x_{32} = x_{00}$ olduğundan $x_{32}^{-1} = x_{23}$ ve $x_{23}^{-1} = x_{32}$ dir.

Sonuç olarak, X in B alt görüntüsü bir yaklaşımlı gruptur. Ayrıca, her $x_{ij}, x_{kl} \in B$ için $x_{ij} \odot x_{kl} = x_{kl} \odot x_{ij}$ özelliği $\Phi^* B$ de sağlandığından bir değişmeli yaklaşımlı gruptur.

Lemma 3.1.3. $(X, \mathcal{R}_{S_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup olsun. O halde,

(i) G nin bir ve yalnız bir yaklaşımlı birim elemanı vardır.

(ii) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e_G$ olacak şekilde bir ve bir tek $y \in G$ vardır (y ye x in G deki yaklaşımlı tersi denir ve x^{-1} ile gösterilir).

(iii) Her $x \in G$ için $(x^{-1})^{-1} = x$ dir.

(iv) Her $x, y \in G$ için $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

Teorem 3.1.4. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay ve $G \subseteq X$ bir toplamsal yaklaşımli grup olsun. Bu durumda her $x, y, z \in G$ için $x + z = y + z$ veya $z + x = z + y$ ise $x = y$ dir.

İspat $x, y, z \in G$ ve $-z \in G$, z nin yaklaşımli ters elemanı olsun. $x + z = y + z$ eşitliğinde her iki taraf sağdan $-z$ ile toplamsal işleme tabi tutulursa

$$\begin{aligned}(x + z) + (-z) &= (y + z) + (-z) \\ x + (z + (-z)) &= y + (z + (-z)) \\ x + e_G &= y + e_G \\ x &= y\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $z + x = z + y$ eşitliğinde her iki taraf soldan $-z$ ile toplamsal işleme tabi tutulursa

$$\begin{aligned}(-z) + (z + x) &= (-z) + (z + y) \\ (-z + z) + x &= (-z + z) + y \\ e_G + x &= e_G + y \\ x &= y\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.1.5. G bir yaklaşımli grup ve $H \subseteq G$ olsun. H, G nin işlemi ile birlikte bir yaklaşımli grup ise H ye G nin alt yaklaşımli grubu denir.

G yaklaşımli grubunun aşikâr alt yaklaşımli grubu bir tane olup, o da G dir. Ayrıca $\{e_G\}$, G nin bir aşikâr alt yaklaşımli grubudur, ancak ve ancak $e_G \in G$ dir.

Teorem 3.1.6. G bir yaklaşımli grup, $H \subseteq G$ ve Φ^*H bir grupoid olsun. H, G yaklaşımli grubunun bir alt yaklaşımli grubudur ancak ve ancak her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir.

İspat H, G nin alt yaklaşımli grubu ise o zaman H yaklaşımli grup olduğundan her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olur. Karşıt olarak, her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olsun. Hipotezden, Φ^*H bir grupoid ve $H \subseteq G$ olduğu dikkate alınır, bu durumda kapalılık ve birleşme özellikleri

Φ^*H de sağlanır. Bundan başka $x \cdot x^{-1} = e_G \in \Phi^*H$ olur. Bu nedenle H, G nin bir alt yaklaşımli grubudur.

Teorem 3.1.7. G bir yaklaşımli grup, H_1 ile H_2 , G nin iki alt yaklaşımli grubu ve Φ^*H_1 , Φ^*H_2 birer grupoid olsun. O zaman

$$(\Phi^*H_1) \cap (\Phi^*H_2) = \Phi^*(H_1 \cap H_2)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yaklaşımli grubudur.

İspat H_1 ve H_2 , G nin iki alt yaklaşımli grubu olsun. $H_1 \cap H_2 \subseteq G$ olduğu açıktır. Φ^*H_1 , Φ^*H_2 birer grupoid ve $(\Phi^*H_1) \cap (\Phi^*H_2) = \Phi^*(H_1 \cap H_2)$ olduğundan, $\Phi^*(H_1 \cap H_2)$ grupoiddir. $x \in H_1 \cap H_2$ olsun. H_1 in ve H_2 nin iki alt yaklaşımli grup olduğu dikkate alınırsa $x^{-1} \in H_1$ ve $x^{-1} \in H_2$ olup, yani $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ dir. Sonuç olarak, Teorem 3.1.6 dan $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yaklaşımli grubudur.

Sonuç 3.1.8. Tanımsal proksimal relator uzayında, her grup bir yaklaşımli gruptur.

Tanım 3.1.9. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay olmak üzere X üzerinde tanımlanan bir bağıntı, yansıma ve simetrik özelliklerini sağlıyor ise bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.

$(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımli grup ve H , G nin alt yaklaşımli grubu olsun. $x, y \in G$ ve e_G , G nin birimi olsun. G üzerinde “ ρ_ℓ ” bağıntısı

$$x\rho_\ell y :\Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H \cup \{e_G\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.1.10. G bir yaklaşımli grup olmak üzere

$$x\rho_\ell y :\Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H \cup \{e_G\}$$

ile tanımlı “ ρ_ℓ ” bağıntısı G de bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Keyfi bir $x \in G$ için “ ρ_ℓ ” sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımli grubunda belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \{y \in G \mid y \rho_\ell x\} \\
 &= \{y \in G \mid y^{-1} \cdot x \in H \cup \{e_G\}\} \\
 &= \{y \in G \mid y^{-1} \cdot x \in H \text{ veya } y^{-1} \cdot x \in \{e_G\}\} \\
 &= \{y \in G \mid x \in y \cdot H \text{ veya } y^{-1} \cdot x = e_G\} \\
 &= \{y \in G \mid x \in y \cdot H \text{ veya } x = y\} \\
 &= \{x \cdot h^{-1} \mid h^{-1} \in H, x \in G, x \cdot h^{-1} \in G\} \cup \{x\} \quad (h^{-1} = h') \\
 &= \{x \cdot h' \mid h' \in H, x \in G, x \cdot h' \in G\} \cup \{x\}
 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.11. “ ρ_ℓ ” sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımli grubunda belirttiği sınıflara yaklaşımli sol zayıf kalan sınıfı denir. Keyfi bir x için bir yaklaşımli sol kalan sınıfı $x \cdot H$ notasyonu ile gösterilir ve

$$x \cdot H = \{x \cdot h \mid h \in H, x \in G, x \cdot h \in G\} \cup \{x\}$$

dir.

$(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımli bir grup ve H , G nin alt yaklaşımli grubu olsun. $x, y \in G$ ve e_G , G nin yaklaşımli birim elemanı olmak üzere G nin elemanları arasında “ ρ_r ” bağıntısı

$$x \rho_r y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H \cup \{e_G\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.1.12. G bir yaklaşımli grup olsun. “ ρ_r ”, G de bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat G bir yaklaşımli grup olduğundan her $x \in G$ için $x^{-1} \in G$ dir. Bu durumda her $x \in G$ için $x \cdot x^{-1} = e_G \in H \cup \{e\}$ olduğundan $x \rho_r x$ olur. Ayrıca, $x \rho_r y$ ise $x \cdot y^{-1} \in H \cup \{e_G\}$, yani her $x, y \in G$ için $x \cdot y^{-1} \in H$ veya $x \cdot y^{-1} \in \{e_G\}$ dir. O zaman $x \cdot y^{-1} \in H$ ise H , G nin

bir alt yaklaşımli grubu olduğundan $(x \cdot y^{-1})^{-1} = y \cdot x^{-1} \in H$ dir. Dolayısıyla $y \rho_r x$ dir. Bundan başka $x \cdot y^{-1} \in \{e_G\}$ ise $x \cdot y^{-1} = e_G$ olur. Böylece $y \cdot x^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} = e_G^{-1} = e_G$ olur ve buradan $y \rho_r x$ dir. Sonuç olarak, “ ρ_r ” bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.

Keyfi bir $x \in G$ için “ ρ_r ” sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımli grubunda belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \{y \in G \mid y \rho_r x\} \\
 &= \{y \in G \mid y \cdot x^{-1} \in H \cup \{e_G\}\} \\
 &= \{y \in G \mid y \cdot x^{-1} \in H \text{ veya } y \cdot x^{-1} \in \{e_G\}\} \\
 &= \{y \in G \mid y \in H \cdot x \text{ veya } y \cdot x^{-1} = e_G\} \\
 &= \{y \in G \mid y \in H \cdot x \text{ veya } x = y\} \\
 &= \{h \cdot x \mid h \in H, x \in G, h \cdot x \in G\} \cup \{x\}
 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.13. “ ρ_r ” sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yaklaşımli grubunda belirttiği sınıflara yaklaşımli sağ zayıf kalan sınıf denir. Keyfi bir x elemanı için bir yaklaşımli sağ kalan sınıfı $H \cdot x$ ile gösterilir ve

$$H \cdot x = \{h \cdot x \mid h \in H, x \in G, h \cdot x \in G\} \cup \{x\}$$

dir.

Genel olarak, yaklaşımli grubun ikili işlemi değişme özelliğini sağlamaz. Bu nedenle “ ρ_r ” ve “ ρ_l ” zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklı olabilir. Bu nedenle, yaklaşımli sağ zayıf ve yaklaşımli sol zayıf kalan sınıfları da birbirlerinden farklı olabilirler.

$x \in G$ olmak üzere, tezin kalan kısımlarında G nin H ile belirlenen tüm yaklaşımlı sağ (sol) zayıf kalan sınıfları için $H \cdot x (x \cdot H)$ gösterimi yerine $Hx (xH)$ kullanılmıştır.

Teorem 3.1.14. Yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfları ile yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının sayıları aynıdır.

İspat S_1, S_2 sırasıyla yaklaşımlı sağ zayıf ve yaklaşımlı sol zayıf sınıflarının birer ailesi olsun. $\psi : S_1 \rightarrow S_2$, dönüşümü $\psi(Hx) = x^{-1}H$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu durumda ψ dönüşümünün birebir ve örten olduğu gösterilebilir.

$x, y \in G$ için, $Hx = Hy (x \neq y)$ ise $x \cdot y^{-1} \in H$ olur. H bir alt yaklaşımlı grup olduğundan $y \cdot x^{-1} \in H$ dir. Dolayısıyla $x^{-1} \in y^{-1}H$, yani $x^{-1}H = y^{-1}H$ olur. Böylece ψ iyi tanımlıdır.

S_2 nin herhangi bir xH elemanı için $\psi(Hx^{-1}) = (x^{-1})^{-1}H = xH$ olacak biçimde $Hx^{-1} \in S_1$ elemanı vardır. Bu nedenle ψ örtendir.

Hx ve Hy S_1 in herhangi iki elemanı olmak üzere $Hx \neq Hy$ olsun. O zaman $x \cdot y^{-1} \notin H$, yani $x^{-1}H \neq y^{-1}H$ dir. Böylece ψ birebirdir.

Sonuç olarak, yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfların sayısı, yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların sayısına eşittir.

Tanım 3.1.15. G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin alt yaklaşımlı grubu olsun. Yaklaşımlı sağ zayıf kalan sınıfların sayısına (veya yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların sayısına) H nin G deki indeksi denir. Bu indeks $[G : H]$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.1.16 $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $x, y \in G$ için xH ve yH , sırasıyla x ve y nin belirlendiği iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfı olmak üzere, $x \cdot y \in \Phi^*G$ elemanı tarafından belirlenen, iki yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfının çarpımı

$$(x \cdot y)H = \{(x \cdot y) \cdot h \mid h \in H, x \cdot y \in \Phi^*G, (x \cdot y) \cdot h \in G\} \cup \{x \cdot y\}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$xH \circ yH = (x \cdot y)H$$

ile gösterilir.

$G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup, H de G nin alt yaklaşımlı grubu olsun. O zaman

$$G /_{\rho_\ell} = \{xH \mid x \in G\}$$

H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesidir. Bu durumda, G nin yerine Φ^*G dikkate alınırsa

$$(\Phi^*G) /_{\rho_\ell} = \{xH \mid x \in \Phi^*G\}$$

dir.

O zaman $xH = \{x \cdot h \mid h \in H, x \in \Phi^*G, x \cdot h \in G\} \cup \{x\}$ olur.

Tanım 3.1.17. $(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ bir tanımsal proksimal relator uzay, $G \subseteq X$ bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. $G /_{\rho_\ell}$, H tarafından belirlenen G nin bütün yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi, $A \in P(X)$ ve $\xi_\Phi(A)$, A nın bir proksimal ailesi olsun. Bu durumda

$$\Phi^*(G /_{\rho_\ell}) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \cap G /_{\rho_\ell} \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine, $G /_{\rho_\ell}$ kümesinin tanımsal üst yaklaşımı denir.

Teorem 3.1.18. G bir yaklaşımlı grup, H , G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve $G /_{\rho_\ell}$ de H tarafından belirlenen G nin tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. O halde $(\Phi^*G) /_{\rho_\ell} \subseteq \Phi^*(G /_{\rho_\ell})$ ise $G /_{\rho_\ell}$, her $x, y \in G$ için $xH \circ yH = (x \cdot y)H$ şeklinde tanımlanan “ $\circ$ ” ikili işlemine göre yaklaşımlı gruptur.

İspat (AG_1) G bir yaklaşımlı grup olduğundan $x \cdot y \in \Phi^*G$ ve her $xH, yH \in G/\rho_\ell$ için $xH \circ yH = (x \cdot y)H \in (\Phi^*G)/\rho_\ell$ dir. Hipotezden her $xH, yH \in G/\rho_\ell$ için $xH \circ yH = (x \cdot y)H \in \Phi^*(G/\rho_\ell)$ dir.

(AG_2) G bir yaklaşımlı grup olduğundan birleşme özeliği Φ^*G de sağlanır. Buradan, her $xH, yH, zH \in G/\rho_\ell$ için

$$(xH \circ yH) \circ zH = xH \circ (yH \circ zH)$$

özeliği $(\Phi^*G)/\rho_\ell$ de sağlanır. Bu nedenle, hipotezden, birleşme özeliği $\Phi^*(G/\rho_\ell)$ de sağlanır.

(AG_3) G bir yaklaşımlı grup olduğundan her $x \in G$ için $x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$ olacak şekilde $e_G \in \Phi^*G$ vardır. Dolayısıyla her için $xH \in G/\rho_\ell$

$$xH \circ e_G H = (x \cdot e_G)H = xH$$

ve

$$e_G H \circ xH = (e_G \cdot x)H = xH$$

dir. Böylece $e_G H \in (\Phi^*G)/\rho_\ell \subseteq \Phi^*(G/\rho_\ell)$, G/ρ_ℓ nin yaklaşımlı birim elemanıdır.

(AG_4) G bir yaklaşımlı grup olduğundan her $x \in G$ için $x \cdot x' = x' \cdot x = e_G$ olacak şekilde $x' \in G$ vardır. Bu durumda, her $xH \in G/\rho_\ell$ için

$$xH \circ x'H = (x \cdot x')H = e_G H$$

ve

$$x'H \circ xH = (x' \cdot x)H = e_G H$$

dir. Dolayısıyla $x'H$, xH nin G/ρ_ℓ deki tersidir. Sonuç olarak, G/ρ_ℓ bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 3.1.19. G bir yaklaşımlı grup ve H de G nin bir alt yaklaşımlı grubu olsun. G/ρ_ℓ , yaklaşımlı grubuna H tarafından belirlenen G nin bütün yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıflarının yaklaşımlı grubu denir ve $G/\rho_\ell H$ ile gösterilir.

Sonuç 3.1.20. G bir toplamsal yaklaşımlı grup, H , G nin bir alt yaklaşımlı grubu ve G/ρ_ℓ de G nin H tarafından belirlenen tüm yaklaşımlı sol zayıf kalan sınıfların kümesi olsun. O halde $(\Phi^*G)/\rho_\ell \subseteq \Phi^*(G/\rho_\ell)$ ise o zaman G/ρ_ℓ , her $x, y \in G$ için

$$xH \oplus yH = (x + y)H$$

şeklinde tanımlanan “ $\oplus$ ” ikili işlemine göre bir toplamsal yaklaşımlı gruptur.

İspat (AG_1) G bir yaklaşımlı grup olduğundan $x + y \in \Phi^*G$ ve her $xH, yH \in G/\rho_\ell$ için

$$xH \oplus yH = (x + y)H \in (\Phi^*G)/\rho_\ell$$

dir. Hipotezden her $xH, yH \in G/\rho_\ell$ için

$$xH \oplus yH = (x + y)H \in \Phi^*(G/\rho_\ell) \text{ dir.}$$

(AG_2) G bir yaklaşımlı grup olduğundan birleşme özeliği Φ^*G de sağlanır.

Buradan, her $xH, yH, zH \in G/\rho_\ell$ için

$$(xH \oplus yH) \oplus zH = xH \oplus (yH \oplus zH)$$

özeliği $(\Phi^*G)/\rho_\ell$ de sağlanır. Bu nedenle, hipotezden, birleşme özeliği $\Phi^*(G/\rho_\ell)$ de sağlanır.

(AG_3) G bir yaklaşımlı grup olduğundan her $x \in G$ için $x + e_G = e_G + x = x$ olacak

şekilde $e_G \in \Phi^*G$ vardır. Dolayısıyla her $xH \in G/\rho_\ell$ için

$$xH \oplus e_G H = (x + e_G)H = xH$$

ve

$$e_G H \oplus xH = (e_G + x)H = xH$$

dir. Böylece $e_G H \in (\Phi^*G)/\rho_\ell \subseteq \Phi^*(G/\rho_\ell)$, G/ρ_ℓ nin yaklaşımlı birim elemanıdır.

(AG_4) G bir yaklaşımlı grup olduğundan her $x \in G$ için $x + x' = x' + x = e_G$ olacak

biçimde $x' \in G$ vardır. Bu durumda, her için $xH \in G/\rho_l$

$$xH \oplus x'H = (x + x')H = e_G H$$

ve

$$x'H \oplus xH = (x' + x)H = e_G H$$

dir. Dolayısıyla $x'H$, xH nin G/ρ_l deki tersidir. Sonuç olarak, G/ρ_l bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 3.1.21. G bir yaklaşımlı grup ve N de G nin alt yaklaşımlı grubu olsun. Bu durumda her $g \in G$ için $gN = Ng$ ise N ye G nin bir normal alt yaklaşımlı grubu denir.

3.2 Yaklaşımlı Grup Homomorfizmaları

$(X, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ ve $(Y, \mathcal{R}_{\delta_\Phi})$ tanımsal proksimal relator uzayları ve “.”, “ $\circ$ ” sırasıyla X ve Y üzerindeki ikili işlemler olsun.

Tanım 3.2.1. $G \subseteq X$, $H \subseteq Y$ yaklaşımlı gruplar ve Φ^*G , Φ^*H birer grupoid olmak üzere χ , Φ^*G den Φ^*H üzerine dönüşüm olsun. Her $x, y \in G$ için $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \circ \chi(y)$ eşitliği sağlanıyor ise χ ye bir yaklaşımlı grup epimorfizması denir ve ayrıca, G , H ye yaklaşımlı homomorfiktir denir ve $G \simeq H$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, yaklaşımlı yarı-grup veya yaklaşımlı monoid homomorfizmalarından bahsedilebilir. Bu bölümde χ , Φ^*G den Φ^*H ye bir yaklaşımlı epimorfizma olarak dikkate alınacaktır.

Teorem 3.2.2. G ve H , yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olmak üzere $(G, \cdot)$ değişmeli ise $(H, \cdot)$ de değişmelidir.

İspat χ bir yaklaşımlı epimorfizma olduğundan, her $\chi(x), \chi(y) \in H$ olacak biçimde $x, y \in G$ vardır. Ayrıca, χ bir yaklaşımlı homomorfizma olduğundan $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \circ \chi(y)$ ve $\chi(y \cdot x) = \chi(y) \circ \chi(x)$ dir. Böylece hipotezden $x \cdot y = y \cdot x$ ile $\chi(x) \circ \chi(y) = \chi(y) \circ \chi(x)$ elde edilir.

Teorem 3.2.3. $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar, Φ^*G bir grupoid ve $\Phi^*(\chi(G)) = \Phi^*H$ olsun. O halde $\chi(G)$ de bir yaklaşımlı gruptur.

İspat (AG_1) χ nin örten olduğu dikkate alınır, her $x', y' \in \chi(G)$ için $\chi(x) = x'$ ve $\chi(y) = y'$ olacak şekilde $x, y \in G$ vardır. O zaman $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \circ \chi(y) \in \Phi^*H = \Phi^*(\chi(G))$ olur ki yani $x' \circ y' \in \Phi^*(\chi(G))$ dir.

(AG_2) G nin bir yaklaşımlı grup olduğu kullanılırsa her $x, y, z \in G$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ eşitliği sağlanır. Buradan her $\chi(x), \chi(y), \chi(z) \in \chi(G)$ için

$$\chi(x) \circ (\chi(y) \circ \chi(z)) = (\chi(x) \circ \chi(y)) \circ \chi(z)$$

olduğu kolayca görülür.

(AG_3) $e_G \in \Phi^*G$ olduğundan $\chi(e_G) \in \Phi^*H$ dir. Buradan her $\chi(x) \in \chi(G)$ için $\chi(e_G) \circ \chi(x) = \chi(e_G \cdot x) = \chi(x)$ ve $\chi(x) \circ \chi(e_G) = \chi(x \cdot e_G) = \chi(x)$ dir.

(AG_4) χ nin örtenliğinden, her $x' \circ y' \in \chi(G)$ için $\chi(x) = x'$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. G nin yaklaşımlı grup olduğu dikkate alınır, $x^{-1} \in G$ dir. Buradan $\chi(x^{-1}) \in \chi(G)$ olup, $\chi(x) \circ \chi(x^{-1}) = \chi(x^{-1}) \circ \chi(x) = \chi(e_G)$ dir. Buradan $(x')^{-1} = (\chi(x))^{-1} = \chi(x^{-1})$ elde edilir. Böylece $\chi(G)$ bir yaklaşımlı gruptur.

Teorem 3.2.4. $G \subseteq X$ ve $H \subseteq Y$ yaklaşımlı homomorfik olacak biçimde yaklaşımlı gruplar olsun. e ve e' sırasıyla G ve H nin yaklaşımlı birim elemanı olsun. O halde her $x \in \Phi^*G$ için $\chi(e) = e'$ ve $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$ dir.

İspat χ, Φ^*G den Φ^*H ye bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in G$ için $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \circ \chi(y)$ olmak üzere χ yaklaşımlı grup epimorfizmadır. $e' \in \Phi^*H$ ve her $x \in G, e \in \Phi^*G$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ tir. Buradan

$$\begin{aligned}\chi(x \cdot e) &= \chi(x) \circ \chi(e) \\ \chi(x) &= \chi(x) \circ \chi(e)\end{aligned}$$

ve

$$\chi(e \cdot x) = \chi(e) \circ \chi(x)$$

$$\chi(x) = \chi(e) \circ \chi(x)$$

olur ki $\chi(e) = e'$ elde edilir. Her $x, x^{-1} \in G$ için $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \in \Phi^*G$ dir. Buradan

$$\chi(x \cdot x^{-1}) = \chi(x) \circ \chi(x^{-1})$$

$$\chi(e) = \chi(x) \circ \chi(x^{-1})$$

$$e' = \chi(x) \circ \chi(x^{-1})$$

ve

$$\chi(x^{-1} \cdot x) = \chi(x^{-1}) \circ \chi(x)$$

$$\chi(e) = \chi(x^{-1}) \circ \chi(x)$$

$$e' = \chi(x^{-1}) \circ \chi(x)$$

dir. Sonuç olarak $\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1}$ olur.

4. YAKLAŞIMLI GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

4.1. Yaklaşımli Grupların Direkt Çarpımları

$X \neq \emptyset$ ve $X_1, X_2 \subseteq X$ olsun. Φ, X de nesne tanımlaması olmak üzere $X_1 \times X_2$ de nesne tanımlaması

$$\begin{aligned}\Phi_{\times} : X_1 \times X_2 &\rightarrow (R^n)^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \Phi_{\times}((x_1, x_2)) = (\Phi(x_1), \Phi(x_2))\end{aligned}$$

ile belirlidir.

Teorem 4.1.1. (X, δ_{Φ}) tanımsal proksimiti uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{Q}(A \times B) = \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{Q}(B)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(A \times B) &= \{ \Phi_{\times}((a, b)) \mid (a, b) \in A \times B \} \\ &= \{ (\Phi(a), \Phi(b)) \mid a \in A, b \in B \} \\ &= \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{Q}(B)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.2. (X, δ_{Φ}) tanımsal proksimiti uzay ve $A_i \subseteq X$ ($i=1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$) olsun. Bu durumda $\mathcal{Q}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mathcal{Q}(A_1) \times \mathcal{Q}(A_2) \times \dots \times \mathcal{Q}(A_n)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) &= \{ \Phi_{\times}(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \} \\ &= \{ (\Phi(a_1), \Phi(a_2), \dots, \Phi(a_n)) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n \} \\ &= \mathcal{Q}(A_1) \times \mathcal{Q}(A_2) \times \dots \times \mathcal{Q}(A_n)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.3. (X, δ_{Φ}^X) ve (Y, δ_{Φ}^Y) tanımsal proksimiti uzaylar, $X_1, X_2 \subseteq X$ ve $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ olmak üzere $(X_1 \times Y_1) \delta_{\Phi}^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) : \Leftrightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset$ ile tanımlı $\delta_{\Phi}^{X \times Y}$ bağıntısı bir tanımsal Efremovič proksimiti bağıntısıdır.

İspat Her $X_1, X_2, X_3 \subseteq X$ ve $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq Y$ için

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \cap \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow (X_2 \times Y_2) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_1 \times Y_1)
 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \neq \emptyset \text{ ve } \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow X_1 \times Y_1 \neq \emptyset \text{ ve } X_2 \times Y_2 \neq \emptyset
 \end{aligned}$$

olur.

$$(3) \quad \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \Rightarrow (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) \text{ dir.}$$

(4) Lemma 2.1.17 (ii) den

$$\begin{aligned}
 &(X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} ((X_2 \times Y_2) \cup (X_3 \times Y_3)) \\
 &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}((X_2 \times Y_2) \cup (X_3 \times Y_3)) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap (\mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \cup \mathcal{Q}(X_3 \times Y_3)) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow (\mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2)) \cup (\mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_3 \times Y_3)) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \text{ veya } \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_3 \times Y_3) \neq \emptyset \\
 &\Rightarrow (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) \text{ veya } (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_3 \times Y_3)
 \end{aligned}$$

olur.

(5) Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ elemanları için

$$\begin{aligned}
 \{(x_1, y_1)\} \delta_\Phi^{X \times Y} \{(x_2, y_2)\} &\Leftrightarrow \mathcal{Q}\{(x_1, y_1)\} \cap \mathcal{Q}\{(x_2, y_2)\} \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow \Phi((x_1, y_1)) = \Phi((x_2, y_2))
 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) &\Rightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) = \emptyset \\
 &\Rightarrow X_1 \delta_\Phi^X X_2 \text{ veya } Y_1 \delta_\Phi^Y Y_2
 \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.1.11 (6) dan $X_1 \underline{\delta}_\Phi^X X_2$ ise $\exists E_1 \subseteq X$ öyle ki $X_1 \underline{\delta}_\Phi^X E_1$ ve $E_1^c \underline{\delta}_\Phi^X X_2$ dir. O zaman her $E \subseteq Y$ için $(X_1 \times Y_1) \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2)$ ise $\exists E_1 \times E \subseteq X \times Y$ öyle ki $(X_1 \times Y_1) \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (E_1 \times E)$ ve $(E_1 \times E)^c \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2)$ dir. Diğer durumda $Y_1 \underline{\delta}_\Phi^Y Y_2$ ise $\exists E_2 \subseteq Y$ öyle ki $Y_1 \underline{\delta}_\Phi^Y E_2$ ve $E_2^c \underline{\delta}_\Phi^Y Y_2$ olur. O zaman her $E \subseteq X$ için $(X_1 \times Y_1) \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2)$ ise $\exists E \times E_2 \subseteq X \times Y$ öyle ki $(X_1 \times Y_1) \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (E \times E_2)$ ve $(E \times E_2)^c \underline{\delta}_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2)$ dir.

Tanım 4.1.4. (X, δ_Φ^X) ve (Y, δ_Φ^Y) tanımsal proksimiti uzaylar, $X_1, X_2 \subseteq X$ ve $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ olmak üzere $(X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) : \Leftrightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset$ ile tanımlı $\delta_\Phi^{X \times Y}$ bağıntısına $X \times Y$ üzerinde bir tanımsal proksimiti bağıntısı denir.

Teorem 4.1.5. (X, δ_Φ^X) ve (Y, δ_Φ^Y) tanımsal proksimiti uzaylar, $X_1, X_2 \subseteq X$ ve $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ olmak üzere $(X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) \Leftrightarrow X_1 \delta_\Phi^X X_2$ ve $Y_1 \delta_\Phi^Y Y_2$ dir.

İspat Teorem 4.1.1 den

$$\begin{aligned} (X_1 \times Y_1) \delta_\Phi^{X \times Y} (X_2 \times Y_2) &\Leftrightarrow \mathcal{Q}(X_1 \times Y_1) \cap \mathcal{Q}(X_2 \times Y_2) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{Q}(X_1) \times \mathcal{Q}(Y_1)) \cap (\mathcal{Q}(X_2) \times \mathcal{Q}(Y_2)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathcal{Q}(X_1) \cap \mathcal{Q}(X_2) \neq \emptyset \text{ ve } \mathcal{Q}(Y_1) \cap \mathcal{Q}(Y_2) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow X_1 \delta_\Phi^X X_2 \text{ ve } Y_1 \delta_\Phi^Y Y_2 \end{aligned}$$

olur.

(X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere $A \times B$ nin tanımsal üst yaklaşımı $\Phi^*(A \times B) = \{(x, y) \mid \{(x, y)\} \delta_\Phi A \times B\}$ ile belirlidir.

Teorem 4.1.6. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere $\Phi^*(A \times B) = \Phi^*(A) \times \Phi^*(B)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}
\Phi^*(A \times B) &= \{(x, y) \mid \{(x, y)\} \delta_\Phi A \times B\} \\
&= \{(x, y) \mid \mathcal{Q}(\{(x, y)\}) \cap \mathcal{Q}(A \times B) \neq \emptyset\} \\
&= \{(x, y) \mid \mathcal{Q}(\{x\}) \cap \mathcal{Q}(A) \neq \emptyset \text{ ve } \mathcal{Q}(\{y\}) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset\} \\
&= \{x \mid \mathcal{Q}(\{x\}) \cap \mathcal{Q}(A) \neq \emptyset\} \times \{y \mid \mathcal{Q}(\{y\}) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset\} \\
&= \{x \mid x \delta_\Phi A\} \times \{y \mid y \delta_\Phi B\} \\
&= \Phi^*(A) \times \Phi^*(B).
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.7. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay ve $A_i \subseteq X$ ($i=1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$) olsun. Bu durumda $\Phi^*(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \Phi^*(A_1) \times \Phi^*(A_2) \times \dots \times \Phi^*(A_n)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}
&\Phi^*(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \\
&= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \delta_\Phi (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \mathcal{Q}(\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}) \cap \mathcal{Q}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \neq \emptyset\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (\mathcal{Q}(\{x_1\}), \mathcal{Q}(\{x_2\}), \dots, \mathcal{Q}(\{x_n\})) \cap (\mathcal{Q}(A_1), \mathcal{Q}(A_2), \dots, \mathcal{Q}(A_n)) \neq \emptyset\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \mathcal{Q}(\{x_1\}) \cap \mathcal{Q}(A_1) \neq \emptyset \text{ ve } \mathcal{Q}(\{x_2\}) \cap \mathcal{Q}(A_2) \neq \emptyset \text{ ve } \dots \\
&\quad \text{ve } \mathcal{Q}(\{x_n\}) \cap \mathcal{Q}(A_n) \neq \emptyset\} \\
&= \{x_1 \mid \mathcal{Q}(\{x_1\}) \cap \mathcal{Q}(A_1) \neq \emptyset\} \times \{x_2 \mid \mathcal{Q}(\{x_2\}) \cap \mathcal{Q}(A_2) \neq \emptyset\} \times \dots \\
&\quad \times \{x_n \mid \mathcal{Q}(\{x_n\}) \cap \mathcal{Q}(A_n) \neq \emptyset\} \\
&= \{x_1 \mid \{x_1\} \delta_\Phi A_1\} \times \{x_2 \mid \{x_2\} \delta_\Phi A_2\} \times \dots \times \{x_n \mid \{x_n\} \delta_\Phi A_n\} \\
&= \Phi^*(A_1) \times \Phi^*(A_2) \times \dots \times \Phi^*(A_n)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.8. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay, $G_1, G_2 \subseteq X$ yaklaşımlı gruplar ve $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\odot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\rightarrow \Phi^*(G_1 \times G_2) \\
(a, b) &\mapsto a \odot b = (a_1 b_1, a_2 b_2)
\end{aligned}$$

işlemi ile birlikte $G_1 \times G_2$ bir yaklaşımlı gruptur.

İspat Teorem 4.1.7 den $\Phi^*G_1 \times \Phi^*G_2 = \Phi^*(G_1 \times G_2)$ dir.

(YG₁) Her $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ için

$$a \odot b = (a_1b_1, a_2b_2) \in \Phi^*G_1 \times \Phi^*G_2 = \Phi^*(G_1 \times G_2)$$

olduğundan kapalılık özelliği sağlanır.

(YG₂) G_1 ve G_2 birer yaklaşık grup olduğundan, her $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2) \in G_1 \times G_2$ için

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= (a_1, a_2) \odot ((b_1, b_2) \odot (c_1, c_2)) \\ &= (a_1, a_2) \odot (b_1c_1, b_2c_2) \\ &= (a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)) \\ &= ((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2) \\ &= (a_1b_1, a_2b_2) \odot (c_1, c_2) \\ &= ((a_1, a_2) \odot (b_1, b_2)) \odot (c_1, c_2) \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

olur.

(YG₃) G_1 ve G_2 birer yaklaşık grup olduğundan $e_1 \in \Phi^*G_1$ ve $e_2 \in \Phi^*G_2$ sırasıyla G_1 ve G_2 nin yaklaşık birim elemanları olsun. $e = (e_1, e_2) \in \Phi^*(G_1 \times G_2)$ olmak üzere her $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ için $(a_1, a_2) \odot (e_1, e_2) = (a_1e_1, a_2e_2) = (a_1, a_2)$ olduğundan $e = (e_1, e_2)$, $G_1 \times G_2$ nin yaklaşık sağ birim elemanıdır. Benzer olarak $e = (e_1, e_2)$, $G_1 \times G_2$ nin yaklaşık sol birim eleman olduğundan $e = (e_1, e_2)$, $G_1 \times G_2$ nin yaklaşık birim elemanıdır.

(YG₄) G_1 ve G_2 birer yaklaşık grup ve $e = (e_1, e_2)$, $G_1 \times G_2$ nin yaklaşık birim elemanı olmak üzere, her $a \in G_1$ ve $b \in G_2$ için $a^{-1} \in G_1$ ve $b^{-1} \in G_2$ yaklaşık ters elemanlar vardır. Bu durumda her $(a, b) \in G_1 \times G_2$ için

$$(a, b) \odot (a^{-1}, b^{-1}) = (aa^{-1}, bb^{-1}) = (e_1, e_2)$$

ve

$$(a^{-1}, b^{-1}) \odot (a, b) = (a^{-1}a, b^{-1}b) = (e_1, e_2)$$

olacak şekilde $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}) \in G_1 \times G_2$ yaklaşımlı ters eleman vardır.

Teorem 4.1.8 de verilen $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı grubuna, G_1 ve G_2 yaklaşımlı gruplarının direkt çarpımı veya kısaca yaklaşımlı çarpım grubu denir.

Tanım 4.1.9. $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubu olsun. $H \subseteq G_1$ ve $K \subseteq G_2$ iken $H \times K$, $G_1 \times G_2$ deki işleme göre yaklaşımlı çarpım grubu ise $H \times K$ ye $G_1 \times G_2$ nin alt yaklaşımlı çarpım grubu denir.

Teorem 4.1.10. $H \subseteq G_1$ ve $K \subseteq G_2$ alt yaklaşımlı gruplar, $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubu ve $\Phi^*(H \times K)$ bir grupoid olsun. Her $(h, k) \in H \times K$ için $(h, k)^{-1} \in H \times K$ dır ancak ve ancak $H \times K$, $G_1 \times G_2$ nin alt yaklaşımlı çarpım grubudur.

İspat $H \times K$ alt yaklaşımlı çarpım grup ise her $(h, k) \in H \times K$ için $(h, k)^{-1} \in H \times K$ dir. Karşıt olarak; her $(h, k) \in H \times K$ için $(h, k)^{-1} \in H \times K$ olsun. $H \times K \subseteq G_1 \times G_2$ ve $\Phi^*(H \times K)$ grupoid olduğundan $\Phi^*(H \times K)$ da kapalılık ve birleşme özellikleri sağlanır. Buradan her $(h, k) \in H \times K$ için

$$\begin{aligned} (h, k) \odot (h, k)^{-1} &= (h, k) \odot (h^{-1}, k^{-1}) = (hh^{-1}, kk^{-1}) = (e_H, e_K) = e, \\ (h, k)^{-1} \odot (h, k) &= (h^{-1}, k^{-1}) \odot (h, k) = (h^{-1}h, k^{-1}k) = (e_H, e_K) = e \end{aligned}$$

eşitliklerinden $e \in \Phi^*(H \times K)$ yaklaşımlı birim elemanı vardır.

Sonuç 4.1.11. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay, $G_i \subseteq X$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$) yaklaşımlı

gruplar ve $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \odot : \prod_{i=1}^n G_i \times \prod_{i=1}^n G_i &\rightarrow \Phi^*\left(\prod_{i=1}^n G_i\right) \\ (a, b) &\mapsto (a \odot b) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \end{aligned}$$

işlemi ile birlikte $\prod_{i=1}^n G_i$ bir yaklaşımlı gruptur.

Tanım 4.1.12. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay, $G_i \subseteq X$ ($i=1,2,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$) yaklaşımlı gruplar olmak üzere $(\prod_{i=1}^n G_i, \odot)$ yaklaşımlı grubuna yaklaşımlı grupların direkt çarpımı veya kısaca yaklaşımlı çarpım grubu denir.

$e_{G_i} \in \Phi^* G_i$ ler G_i yaklaşımlı gruplarının yaklaşımlı birim elemanları olmak üzere $(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_n}) \in \Phi^*(\prod_{i=1}^n G_i)$, $(\prod_{i=1}^n G_i, \odot)$ yaklaşımlı grubunun yaklaşımlı birim elemanıdır.

Ayrıca $a_i^{-1} \in G_i$ ler $a_i \in G_i$ lerin tersi olmak üzere $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$ elemanın tersi

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) \in \prod_{i=1}^n G_i \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

(X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay, $G_1, G_2 \subseteq X$ yaklaşımlı gruplar olmak üzere ne G_1 ne de G_2 , $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubunun alt yaklaşımlı gruplarıdır. Ancak $G_1 \times \{e_{G_2}\}$ ve $\{e_{G_1}\} \times G_2$ ler $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubunun alt yaklaşımlı gruplarıdır.

Teorem 4.1.13. (X, δ_Φ) tanımsal proksimiti uzay, $G_1, G_2 \subseteq X$ yaklaşımlı gruplar olmak üzere $G_1 \times \{e_{G_2}\}$ ve $\{e_{G_1}\} \times G_2$ çarpımları $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubunun alt yaklaşımlı gruplarıdır.

İspat $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubu olsun. $G_1 \times \{e_{G_2}\} \subseteq G_1 \times G_2$ alt kümesidir.

(YG₁) Her $a = (a_1, e_{G_2})$, $b = (b_1, e_{G_2}) \in G_1 \times \{e_{G_2}\}$ için

$$a \odot b = (a_1 b_1, e_{G_2} e_{G_2}) = (a_1 b_1, e_{G_2}) \in \Phi^* G_1 \times \Phi^* \{e_{G_2}\} = \Phi^*(G_1 \times \{e_{G_2}\}).$$

(YG₂) G_1 ve $\{e_{G_2}\}$ birer yaklaşımlı grup olduğundan, her $a = (a_1, e_{G_2})$, $b = (b_1, e_{G_2})$,

$c = (c_1, e_{G_2}) \in G_1 \times \{e_{G_2}\}$ için

$$\begin{aligned}
a \odot (b \odot c) &= (a_1, e_{G_2}) \odot ((b_1, e_{G_2}) \odot (c_1, e_{G_2})) \\
&= (a_1, e_{G_2}) \odot ((b_1 c_1, e_{G_2} e_{G_2})) \\
&= (a_1 (b_1 c_1), e_{G_2} (e_{G_2} e_{G_2})) \\
&= ((a_1 b_1) c_1, (e_{G_2} e_{G_2}) e_{G_2}) \\
&= ((a_1 b_1), (e_{G_2} e_{G_2})) \odot (c_1, e_{G_2}) \\
&= ((a_1, e_{G_2}) \odot (b_1, e_{G_2})) \odot (c_1, e_{G_2}) \\
&= (a \odot b) \odot c \in \Phi^* G_1 \times \Phi^* \{e_{G_2}\} = \Phi^* (G_1 \times \{e_{G_2}\})
\end{aligned}$$

bulunur.

(YG₃) G_1 ve $\{e_{G_2}\}$ birer yaklaşımlı grup, $e_{G_1} \in \Phi^* G_1$ ve $e_{G_2} \in \Phi^* \{e_{G_2}\}$ sırasıyla G_1 ve $\{e_{G_2}\}$ nin yaklaşımlı birim elemanları olmak üzere her $(a, e_{G_2}) \in G_1 \times \{e_{G_2}\}$ için

$$\begin{aligned}
(a, e_{G_2}) \odot (e_{G_1}, e_{G_2}) &= (ae_{G_1}, e_{G_2} e_{G_2}) = (a, e_{G_2}), \\
(e_{G_1}, e_{G_2}) \odot (a, e_{G_2}) &= (e_{G_1} a, e_{G_2} e_{G_2}) = (a, e_{G_2})
\end{aligned}$$

eşitliklerinden (e_{G_1}, e_{G_2}) , $G_1 \times \{e_{G_2}\}$ nin yaklaşımlı birim elemanıdır.

(YG₄) G_1 ve $\{e_{G_2}\}$ birer yaklaşımlı grup ve $e = (e_{G_1}, e_{G_2})$, $G_1 \times \{e_{G_2}\}$ nin yaklaşımlı birim elemanı olsun. Her $a \in G_1$ için $a^{-1} \in G_1$ elemanı vardır. Bu durumda her $(a, e_{G_2}) \in G_1 \times \{e_{G_2}\}$ için

$$\begin{aligned}
(a, e_{G_2}) \odot (a^{-1}, e_{G_2}) &= (aa^{-1}, e_{G_2} e_{G_2}) = (e_{G_1}, e_{G_2}), \\
(a^{-1}, e_{G_2}) \odot (a, e_{G_2}) &= (a^{-1}a, e_{G_2} e_{G_2}) = (e_{G_1}, e_{G_2})
\end{aligned}$$

olacak şekilde her elemanın $G_1 \times \{e_{G_2}\}$ de tersi vardır.

Benzer şekilde $\{e_{G_1}\} \times G_2$ nin de $G_1 \times G_2$ yaklaşımlı çarpım grubunun alt yaklaşımlı grubu olduğu gösterilebilir.

Örnek 4.1.14. $X = \{x_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq 5, \ i, j \in \mathbb{N}\}$ ve $Y = \{y_{kl} \mid 0 \leq k, l \leq 5, \ k, l \in \mathbb{N}\}$ kümeleri iki hasta grubuna ilişkin toplanan laboratuvar örnekleri olsun.

$$\begin{aligned} \varphi_X : X &\rightarrow \mathbb{R} & \varphi_Y : Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_{ij} &\mapsto \varphi_X(x_{ij}) \in \mathbb{R} & y_{kl} &\mapsto \varphi_Y(y_{kl}) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \text{ve}$$

çıkarm fonksiyonları da laboratuvar örnekleri ile ilgili parametre değerlerini temsil etsin. Laboratuvar örneklerinin aldığı parametre değerleri Tablo 4.1 deki gibi verilsin.

Tablo 4.1. Laboratuvar örneklerinin aldığı parametre değerleri

	x_{00}	x_{01}	x_{02}	x_{03}	x_{04}	x_{05}	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
φ_X	0,7	0,4	0,1	0,12	0,09	0,8	0,8	0,6	0,02	0,41	0,3	0,12

	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
φ_X	0,71	0,6	0,13	0,7	0,44	0,6	0,51	0,13	0,3	0,02	0,43	0,54

	x_{40}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{50}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}
φ_X	0,16	0,7	0,42	0,91	0,8	0,13	0,02	0,91	0,81	0,42	0,16	0,48

	y_{00}	y_{01}	y_{02}	y_{03}	y_{04}	y_{05}	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
φ_Y	0,5	0,8	0,4	0,8	0,05	0,56	0,77	0,19	0,29	0,11	0,85	0,76

	y_{20}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{30}	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}
φ_Y	0,98	0,51	0,5	0,81	0,42	0,56	0,77	0,79	0,03	0,19	0,53	0,54

	y_{40}	y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{50}	y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	y_{55}
φ_Y	0,55	0,58	0,04	0,25	0,5	0,37	0,07	0,43	0,16	0,01	0,08	0,78

$0 \leq i, j, k, l, m, n, p, r, s, t, u, v \leq 5$ ve

$$\begin{aligned} i + m &= s(\text{mod } 5) & k + p &= u(\text{mod } 5) \\ j + n &= t(\text{mod } 5) & l + r &= v(\text{mod } 5), \end{aligned} \quad \text{ve}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \therefore X \times X &\rightarrow X & \therefore Y \times Y &\rightarrow Y \\ (x_{ij}, x_{mn}) &\mapsto x_{ij} \cdot x_{mn} = x_{st} & (y_{kl}, y_{pr}) &\mapsto y_{kl} \cdot y_{pr} = y_{uv} \end{aligned} \quad \text{ve}$$

sırasıyla X ve Y üzerinde ikili işlemler, $G_1 = \{x_{23}, x_{32}\} \subseteq X$ ve $G_2 = \{y_{22}, y_{33}\} \subseteq Y$ olsun.

Bu durumda Tanım 2.1.7 den

$$\mathcal{Q}(G_1) = \{\varphi_X(x_{23}) = 0.7, \varphi_X(x_{32}) = 0.3\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{Q}(G_2) = \{\varphi_Y(y_{22}) = 0.5, \varphi_Y(y_{33}) = 0.17\}$$

olur. Buradan Tanım 2.1.14 dikkate alınır

$$\Phi^*(G_1) = \{x_{00}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}\} \quad \text{ve} \quad \Phi^*(G_2) = \{y_{00}, y_{11}, y_{22}, y_{33}, y_{44}\}$$

bulunur.

Böylece Tanım 3.1.1 den, verilen ikili işlemlerle birlikte G_1 ve G_2 nin sırasıyla X ve Y üzerinde yaklaşımlı grup olduğu görülür.

Şimdi $X \times Y = \{(x_{ij}, y_{kl}) | 0 \leq i, j, k, l \leq 5, i, j, k, l \in \mathbb{N}\}$ üzerinde

$0 \leq i, j, k, l, m, n, p, r, s, t, u, v \leq 5$ için $a = (x_{ij}, y_{kl}), b = (x_{mn}, y_{pr}) \in X \times Y$,

$$\begin{array}{ll} i + m = s(\text{mod } 5) & k + p = u(\text{mod } 5) \\ j + n = t(\text{mod } 5) & l + r = v(\text{mod } 5) \end{array} \quad \text{ve}$$

olmak üzere

$$\odot : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow X \times Y$$

$$\begin{aligned} (a, b) &\mapsto a \odot b = (x_{ij}x_{mn}, y_{kl}y_{pr}) \\ &= (x_{st}, y_{uv}) \end{aligned}$$

ikili işlemini tanımlayalım. $G_1 = \{x_{23}, x_{32}\} \subseteq X$ ve $G_2 = \{y_{22}, y_{33}\} \subseteq Y$ için

$G_1 \times G_2 = \{(x_{23}, y_{22}), (x_{23}, y_{33}), (x_{32}, y_{22}), (x_{32}, y_{33})\}$ olur.

$X \times Y$ de nesne tanımlaması $\Phi_{\times}(x_{ij}, y_{kl}) = (\varphi_X(x_{ij}), \varphi_Y(y_{kl}))$, $(0 \leq i, j, k, l \leq 5)$ dir. Buradan

$\mathcal{Q}(G_1 \times G_2) = \{(0.7, 0.5), (0.7, 0.17), (0.3, 0.5), (0.3, 0.17)\}$ dir.

Teorem 4.1.6 dan $\Phi^*(G_1 \times G_2) = \Phi^*(G_1) \times \Phi^*(G_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi^*(G_1 \times G_2) = \{ & (x_{23}, y_{22}), (x_{23}, y_{33}), (x_{23}, y_{00}), (x_{23}, y_{11}), (x_{23}, y_{44}), \\ & (x_{32}, y_{22}), (x_{32}, y_{33}), (x_{32}, y_{00}), (x_{32}, y_{11}), (x_{32}, y_{44}), \\ & (x_{41}, y_{22}), (x_{41}, y_{33}), (x_{41}, y_{00}), (x_{41}, y_{11}), (x_{41}, y_{44}), \\ & (x_{00}, y_{22}), (x_{00}, y_{33}), (x_{00}, y_{00}), (x_{00}, y_{11}), (x_{00}, y_{44}), \\ & (x_{14}, y_{22}), (x_{14}, y_{33}), (x_{14}, y_{00}), (x_{14}, y_{11}), (x_{14}, y_{44}) \}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak Teorem 4.1.8 den $G_1 \times G_2$, $X \times Y$ üzerinde “ $\odot$ ” ikili işlemi ile birlikte yaklaşımlı çarpım grubudur.

Burada her $a = (x_{ij}, y_{kl}) \in G_1 \times G_2$ için $a \odot e = e \odot a$ olacak şekilde $e = (x_{00}, y_{00}) \in \Phi^*(G_1 \times G_2)$ yaklaşımlı birim elemandır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}(x_{23}, y_{22}) \odot (x_{32}, y_{33}) &= (x_{32}, y_{33}) \odot (x_{23}, y_{22}) = (x_{00}, y_{00}), \\ (x_{23}, y_{33}) \odot (x_{32}, y_{22}) &= (x_{32}, y_{22}) \odot (x_{23}, y_{33}) = (x_{00}, y_{00}), \\ (x_{32}, y_{22}) \odot (x_{23}, y_{33}) &= (x_{23}, y_{33}) \odot (x_{32}, y_{22}) = (x_{00}, y_{00}), \\ (x_{32}, y_{33}) \odot (x_{23}, y_{22}) &= (x_{23}, y_{22}) \odot (x_{32}, y_{33}) = (x_{00}, y_{00})\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(x_{23}, y_{22})^{-1} &= (x_{32}, y_{33}) \in G_1 \times G_2, \\ (x_{23}, y_{33})^{-1} &= (x_{32}, y_{22}) \in G_1 \times G_2, \\ (x_{32}, y_{22})^{-1} &= (x_{23}, y_{33}) \in G_1 \times G_2, \\ (x_{32}, y_{33})^{-1} &= (x_{23}, y_{22}) \in G_1 \times G_2\end{aligned}$$

dir.

KAYNAKÇA

- [1] Efremovič, V.A. (1952). “The geometry of proximity I”. *Matematicheski Sbornik* (N.S.), 31 (73) (1), 189-200.
- [2] Kovār, M.M. (2011). “A new causal topology and why the universe is co-compact”, *arXiv:1112.0817 [math-ph]*, 1-15.
- [3] Lodato, M. (1962). On topologically induced generalized proximity relations. Ph.D. Thesis, Rutgers University.
- [4] Naimpally, S.A., & Peters, J.F., (2013). *Topology with applications: Topological spaces via near and far*, World Scientific.
- [5] Peters, J.F. (2016). “Proximal relator spaces”. *Filomat*, 30 (2), 469-472.
- [6] Peters, J.F., Öztürk, M.A., & Uçkun, M. (2015). “Exactness of proximal groupoid homomorphisms”. *Adıyaman University Journal of Science*, 5 (1), 1-13.
- [7] Peters, J.F., İnan, E., & Öztürk, M.A. (2014). “Spatial and descriptive isometries in proximity spaces”. *General Mathematics Notes*, 21 (2), 125-134.
- [8] İnan, E. (2017). “Approximately semigroups and ideals: An algebraic view of digital images”. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, 17, 479-487.
- [9] İnan, E. (2019). “Approximately groups in proximal relator spaces”. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68 (1), 572-582.
- [10] İnan, E. (2018). “Approximately subgroups in proximal relator spaces”. *Adıyaman University Journal of Science*, 8 (1), 24-41.

- [11] Uçkun, M., & İnan, E. (2019). “Approximately gamma-semigroups in proximal relator spaces”. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 30 (4), 299-311.
- [12] İnan, E. (2019). “Approximately rings in proximal relator spaces”. *Turkish Journal of Mathematics*, 43 (6), 2941-2953.

