

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**İKİNCİ MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI**

**Hazırlayan
Tuğba YILMAZ**

**Danışman
Doç. Dr. Pakize TEMTEK**

Yüksek Lisans Tezi

**Ocak 2024
KAYSERİ**

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI
(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Tuğba YILMAZ

Danışman
Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Ocak 2024
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Tuğba YILMAZ



"İkinci Mertebeden Belirli Tipteki Diferensiyel Denklemlerin Salınımı" başlıklı Yüksek Lisans Tezi, 'Erciyes Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Lisansüstü Tez Yazım Yönergesine uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Tuğba YILMAZ

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın planlaması, yürütülmesi, yazılmasında, sonuçlandırılmasında ve değerlendirilmesinde hiçbir zaman yardımlarını ve anlayışını eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek aldığım saygı değer hocam Doç. Dr. Sayın Pakize TEMTEK hocama manevi desteklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu çalıştığımız konumuzdaki bilgilerimin temelini oluşturan saygı değer Prof. Dr. M. Tamer ŞENEL hocama çok teşekkür ediyorum. Ayrıca bu süreçte manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan aileme teşekkürü borç bilirim.

Tuğba YILMAZ
Ocak 2024, KAYSERİ

İKİNCİ MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

Tuğba YILMAZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2024
Danışman: Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

Bu çalışmada, ikinci mertebeden belli tipteki diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı davranışları incelenecektir. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel tanım ve kavramlara yer verilecektir. İkinci bölümde, ikinci mertebeden nötral diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı verilecektir. Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden nötral gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımı incelenecektir. Dördüncü bölümde, ikinci mertebeden nötral nonpozitif katsayılı diferensiyel denklemlerin salınımına yer verilecektir. Beşinci bölümde, ikinci mertebeden yarı lineer nötral diferensiyel denklemler için salınım kriterleri verilecektir. Altıncı bölümde ise, ikinci mertebeden lineer olmayan nötral diferensiyel denklemlerin salınımı kanonik form altında incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel Denklemler, Yarı Lineer Neutral Diferensiyel
Denklem, Salınımlılık, Salınımsızlık

OSCILLATION OF CERTAIN TYPES OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tuğba YILMAZ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master Thesis, January 2024

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

In this study, the oscillatory behavior of solutions to certain types of second-order differential equations will be examined. The thesis consists of six chapters. In the first chapter, basic definitions and concepts will be included. In the second chapter, the oscillation of second-order neutral differential equations will be given. In the third chapter, the oscillation of second-order neutral delayed differential equations will be examined. In the fourth chapter, the oscillation of second-order differential equations with neutral nonpositive coefficients will be discussed. In the fifth chapter, the oscillatory criteria for second-order quasi-linear neutral differential equations will be examined in canonical form. In the sixth chapter, the oscillations of second-order nonlinear neutral differential equations will be examined in canonical form.

Keywords: Differential Equations, Quasi - Linear Neutral Differential Equation, Oscillation, Non-Oscillation.

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
-------------------------------	---

2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN YARI LİNEER NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

2.1. Giriş	9
2.2. Temel Sonuçlar	12

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL NONPOZİTİF KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

3.1. Giriş	29
3.2. Salınım Sonuçları	31

4. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

4.1. Giriş	38
4.2. Salınım Sonuçları	40

5. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

5.1. Giriş	49
5.2. Ön Hazırlık	54
5.3. Temel Sonuçlar	55

6. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

6.1. Giriş	70
6.2. Temel Sonuçlar	73
KAYNAKÇA	103
ÖZGEÇMİŞ	112

GİRİŞ

Fen bilimleri ve mühendislikte, birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel formüller veya modeller geliştirmiştir. Bu modeller bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkmıştır. Böyle bir denkleme diferensiyel denklem denir.

Diferensiyel denklemlerin geniş uygulama alanına sahip olduğu bilinmektedir. Bu nedenle her denklemin çözümünün bilinmesinin istenmesi doğaldır. Ancak çok az sayıdaki denklem tiplerinin elementer çözümleri elde edilmektedir. Bu da araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerin özelliklerini incelemeye yöneltmiştir. Bu anlamda çözümlerin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve kararsızlığı gibi incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olmuştur. İkinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılık ve salınımsızlık problemi son yıllarda merak konusu olmuştur ve bu nedenle yapılan bilimsel çalışmalarla oldukça geniş literatür meydana gelmiştir. Bu teorinin önemli bir konusu da salınım teorisidir. Salınım teorisinin temeli 1836'da Sturm tarafından yayınlanan, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili bilinen sonuçlara dayanmaktadır. Sturm'un yaptığı çalışmaları takiben, farklı tipteki lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmıştır. Yapılan bu araştırmalarda salınımlılık ve salınımsızlık teorisi ile ilgili ilk sonuçlar

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (E_1)$$

lineer diferensiyel denklemi için elde edilmiştir. Bu denklem modeli için ilk integral tipi salınımlılık kriterini 1918 yılında Fite vermiştir. Fite bu çalışmasında $q(t) \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s) ds = \infty \quad (E_2)$$

olması halinde (E_1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu ispatlamıştır. 1949 yılında Wintner, Fite'nin kriterinin $q(t) < 0$ olması durumunda da geçerli olduğunu göstermiştir.

Ayrıca Wintner

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u) du ds = \infty \quad (E_3)$$

olması durumunda (E_1) diferensiyel denkleminde salınımlı olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra (E_3) şartı Fite-Wintner-Leighton kriteri olarak genişletilip (E_1) diferensiyel denkleminin salınımlılığı ispatlanmıştır. Leighton'da $p(t)$ pozitif sürekli bir fonksiyon olmak üzere daha genel olan

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0 \quad (E_4)$$

lineer diferensiyel denklemi için çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalardan itibaren diferensiyel denklemlerin salınım veya salınımsızlık davranışları ile ilgili çalışmalar yapılmaya devam etmiştir ve günümüzde de çalışmalar sürdürülmektedir. Biz bu tez çalışmamızda ikinci mertebeden farklı tipteki adi (ordinary) diferensiyel denklemlerinin özel durumları olan (delay, advanced, neutral, mixed, ...) gibi lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemler için salınım kriteri üzerinde durup bunlarla ilgili mevcut çalışmalar incelenecektir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanılacak olan gerekli tanım ve kavramları verilecektir.

Tanım 1.1. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini kapsayan denklemlere diferensiyel denklemler denir. Genel olarak t bağımsız, x bağımlı değişken olan n . inci mertebeden bir diferensiyel denklem

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

veya

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

biçiminde yazılır.

Tanım 1.2. Eğer bir diferensiyel denklemde bir tek bağımsız değişken varsa denkleme adi diferensiyel denklem adı verilir, birden fazla bağımsız değişken varsa, bu tür diferensiyel denklemlere de kısmi diferensiyel denklem denir.

Tanım 1.3. Bir diferensiyel denklemde görülen en yüksek türevin basamağına diferensiyel denklemin mertebesi adı verilir. Bir diferensiyel denklem bağımlı değişkenin türevlerine göre bir polinom denklemi biçiminde ise, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevinin kuvvetine diferensiyel denklemin derecesi adı verilir.

Tanım 1.4. Bir diferensiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri birinci dereceden ve bunların katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenin fonksiyonu ise, diferensiyel denkleme lineer diferensiyel denklem, aksi halde lineer olmayan

diferensiyel denklem adı verilir. Bu tanıma göre n . inci mertebeden en genel lineer diferensiyel denklem

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ler denklemin katsayılarıdır.

Tanım 1.5. Bir diferensiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeden türeve göre lineer ise, yarı lineer (quasi lineer) olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle en yüksek mertebeden türevin derecesi bir olmalıdır. Belirtelim ki yarı lineer bir diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden türevin katsayıları bağımsız değişkenden başka bağımlı değişken ve daha düşük mertebeden türevlerini içerebilir. n . mertebeden yarı lineer kısmi diferensiyel denklem

$$p(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})x^{(n)} + q(t, x, x', \dots, x^{(n-2)})x^{(n-1)} = 0$$

şeklindeydir. Lineer kısmi diferensiyel denklem, aynı zamanda yarı lineerdir.

Tanım 1.6. Bilinmeyen fonksiyonun farklı argümentlerini içeren denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler denir. Örneğin

$$x''(t-5) + x(t+3) - x^2(2t) = 0$$

verilebilir.

Tanım 1.7. Bir bilinmeyen fonksiyonun ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerinin bir ya da daha çok gecikme değişkenlerine bağlı olan diferensiyel denklemlere gecikmeli diferensiyel denklemler denir. Yani $\tau \geq 0$, $\tau(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$x''(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))$$

şeklindeki diferensiyel denklemler gecikmeli(delay) diferensiyel denklemler olarak adlandırılır. Örneğin

$$x''(t) + 3x'(t) - 2x\left(t - \frac{5}{3}\right) = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Gecikmeli terim içeren diferensiyel denklemler; otomatik kontrol teorisi, salınım teorisi, roket hareketindeki ateşlemeyle bağıntılı problemlere ilişkin incelemelerde, elektrodinamik sistemlerin çalışmalarında, ekonomide uzun vadeli planlamayla ilgili problemlerde ve teknolojiye olduğu gibi bilimin birçok sahasında uygulama alanına sahiptir. (El'sgol'ts 1973). Bu nedenle bu tip diferensiyel denklem üzerinde birçok çalışma yapılmıştır.

Tanım 1.8. $\tau(t) \geq 0$ reel değerli bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) > t$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$x''(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))$$

şeklindeki diferensiyel denklemlere ileri(advanced) diferensiyel denklem denir. Örneğin

$$x'(t) = -x(t+1) + x(t) - t + 1$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer ileri diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.9. Hem gecikmeli(delay) hem ileri(advance) terimlerin bulunduğu denklemlere karma(mixed) diferensiyel denklemler denir. Örneğin

$$x''(t) - 3x'(t+4) + 2x\left(t - \frac{5}{3}\right) = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer karma diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.10. En yüksek mertebeden türevi sadece t ye bağlı olmayıp aynı zamanda sapma argümentlerine de bağlı olan terimlerin bulunduğu fonksiyonel diferensiyel denklemlere nötral (neutral) diferensiyel denklemler denir. Örneğin

$$x'(t) = \frac{-t}{t+1}x'(t-1) + x(t-3) + 2\sin t$$

diferensiyel denklemleri nötral tipli diferensiyel denklemlerdir.

Şimdi ikinci mertebeden en genel

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \quad (1.1)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferensiyel denklem için çözüm tanımını, çözümün ve diferensiyel denklemin salınım ve salınımsızlığı tanımlarını verelim. Belirtelim ki verilen bu tanımlar fonksiyonel diferensiyel denklem (ileri, gecikmeli, karma, nötral) yapıları için de benzer şekilde ifade edilebilir.

Tanım 1.11. $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve (1.1) diferensiyel denklemini sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonuna, (1.1) diferensiyel denkleminin çözümü denir. Ayrıca $t_x \geq t_0 \geq 0$ sayısı $x(t)$ çözümüne bağlı bir değerdir.

Tanım 1.12. $x(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında verilen bir diferensiyel denklemin bir çözümü olsun. Eğer en az bir $t \in [t_0, \infty)$ için $x(t) \neq 0$ ise, bu çözüme aşikar olmayan çözüm denir.

Tanım 1.13. $x(t)$, (1.1) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t)$ çözümü sonsuz sayıda sıfırlara sahipse, bu $x(t)$ çözümü salınımlıdır denir. Bu tanıma göre salınımlı bir $x(t)$ çözümü için $\lim_{t \rightarrow \infty} t_n = \infty$ ve $x(t_n) = 0$ olacak şekilde bir (t_n) dizisi vardır. Örneğin $x''(t) + 4x(t) = 0$ diferensiyel denklemi için $x(t) = \sin 2t$ (veya $x(t) = \cos 2t$) çözümü salınımlı bir çözümdür.

Tanım 1.14. (1.1) diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir $x(t)$ çözümü salınımlı değilse, salınımsızdır denir. Yani çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfıra sahipse, çözümün salınımsız olduğu söylenir. Örneğin $x''(t) - 4x(t) = 0$ diferensiyel denklemi için $x(t) = e^{2t}$ (veya $x(t) = e^{-2t}$) çözümü salınımsız bir çözümdür. Ayrıca, ikinci mertebeden $x''(t) - x(-t) = 0$ diferensiyel denklemi $x = e^t + e^{-t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme sahip ve $x''(t) + x(\pi - t) = 0$ delay diferensiyel denklemi de $x_1(t) = \sin t$ salınımlı ve $x_2(t) = e^t + e^{-t}$ salınımsız çözüme sahiptir.

Tanım 1.15. (1.1) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise, diferensiyel denkleme salınımlıdır, aksi halde salınımsızdır denir. Tanım 1.15 sadece ikinci mertebeden diferensiyel denklemler için geçerli olup daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için geçerli değildir. Bu durumda ikinci mertebeden daha

yüksek mertebeli diferensiyel denklem en az bir salınımlı çözüme sahipse, diferensiyel denkleme salınımlıdır denir. Aksi takdirde diferensiyel denklem salınımsızdır denir. Örneğin $x'''(t) - 4x'(t) = 0$ diferensiyel denklemi $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \sin 2t$, $x_3(t) = \cos 2t$ çözümlerine sahiptir. Bu diferensiyel denklemin $x_2(t) = \sin 2t$ gibi salınımlı çözümü olduğundan diferensiyel denkleme salınımlıdır denir. Ayrıca $x'''(t) - x'(t) = 0$ diferensiyel denklemi $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = e^t$, $x_3(t) = e^{-t}$ çözümlerine sahiptir. Bu çözümlerin hepsi salınımsız olduğundan diferensiyel denkleme salınımsızdır denir.

Birinci mertebeden adi diferensiyel denklemler genellikle salınımlı çözüme sahip değildir. Bunun yanı sıra birinci mertebeden diferensiyel denklemler delay, advanced, ... gibi terimleri içerdiğinde salınımlı çözümlere sahip olabilirler. Örneğin birinci mertebeden $x'(t) - x(t) = 0$ diferensiyel denklemi $x(t) = e^{-t}$ şeklinde salınımsız bir çözüme sahipken $x'(t) - x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ delay diferensiyel denklemi $x_1(t) = \sin t$ ve $x_2(t) = \cos t$ şeklindeki salınımlı çözümlere sahiptir.

Şimdi ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınım teorisinin temelini teşkil eden Sturm Karşılaştırma ve Ayırma Teoremlerini verelim.

Teorem 1.1(Sturm Karşılaştırma Teoremi).

ϕ ve ψ sırasıyla bir I aralığında

$$x'' + q_1(t)x = 0 \quad (1.2)$$

$$x'' + q_2(t)x = 0 \quad (1.3)$$

diferensiyel denklemlerinin aşıkâr olmayan çözümleri olsun, burada q_1 ve q_2 , I aralığı üzerinde $q_1(t) < q_2(t)$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlardır. Bu takdirde I aralığı üzerinde ϕ nin herhangi ardışık iki sıfırı t_1 ve t_2 arasında ψ nin en az bir sıfırı vardır. Örneğin

$$x'' + x = 0$$

$$x'' + 4x = 0$$

diferensiyel denklemlerinin lineer bağımsız iki çözümü sırasıyla, $\phi = \sin t$, $\psi = \sin 2t$ olmak üzere $\phi = \sin t$ nin t_1 ve t_2 üzerinde herhangi ardışık iki sıfırı arasında $\psi = \sin 2t$ nin en az bir sıfırı vardır.

Teorem 1.2(Sturm Ayırma Teoremi).

Kabul edelim ki ϕ ve ψ bir I aralığında

$$x'' + q(t)x = 0 \quad (1.4)$$

lineer diferensiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olsun. Bu takdirde, ϕ nin ardışık iki sıfırı olan t_1 ve t_2 arasında ψ nin yalnız ve yalnız bir sıfırı vardır. Örneğin

$$x'' + x = 0$$

diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü, $\phi = \sin t$, $\psi = \cos t$ olmak üzere ϕ nin iki sıfır yeri arasında ψ nin yalnız ve yalnız bir sıfır yeri vardır.

Şimdi de ileride teorem ispatlarında kullanacağımız eşitsizlikleri verelim.

Tanım 1.16 (Hölder Eşitsizliği). $\alpha \geq 1$ için

$$\alpha u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + w^{\alpha+1}(t) \geq (\alpha + 1)u(t) w(t)$$

şeklindedir.

Tanım 1.17 (Young Eşitsizliği). $p, q \in (1, \infty)$ ve her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

şeklindedir.

2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN YARI LİNEER NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde $0 < t_0 \leq t$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$(r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0 \quad (2.1)$$

yarı (quasi) lineer nötral gecikmeli diferensiyel denkleminin salınım kriterleri ile ilgilenilecektir. (2.1) diferensiyel denklemi için Luhong Ye vd.[1] çalışması göz önüne alınacaktır, burada $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ ve $\alpha > 0$ dır. Bu çalışma boyunca, aşağıdaki kabuller yapılacaktır.

(H₁) $I = [t_0, \infty)$ olmak üzere $t \in I$ için $r, p, q \in C(I, IR)$, $r(t) > 0$, $0 \leq p(t) \leq 1$ ve

$$q(t) \geq 0 \text{ dır.}$$

(H₂) $\psi, f \in C'(IR, IR)$, $\psi(x) > 0$, $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ ve

$$\psi(x) \leq \ell^{-1} \quad \text{ve} \quad \frac{f(x)}{|x|^{\alpha-1}x} \geq k$$

olacak şekilde k, ℓ gibi iki pozitif sabit vardır.

(H₃) $\tau \in C(I, IR)$, $t_0 \leq t$ için $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ dur.

(H₄) $\sigma \in C'(I, IR)$, $t_0 \leq t$ için $\sigma'(t) > 0$, $\sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ dur.

(2.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü ile $T_x \geq t_0$ olmak üzere $r\psi(x)|z'|^{\alpha-1}z' \in C'([T_x, \infty), IR)$ özelliğine sahip ve her $t \geq T_x$ için (2.1) diferensiyel denklemini sağlayan bir $x \in C'([T_x, \infty), IR)$ çözümünü kastediyoruz. Burada herhangi bir $T \geq t_x$ için $\sup \{|x(t)| : t \geq T\} > 0$ olmak üzere bazı $[t_x, \infty)$ yarı aralığı üzerinde mevcut olan (2.1) diferensiyel denkleminin $x(t)$ çözümlerini göz

önüne alınacaktır. Alışla geldiği üzere (2.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü keyfi çoklukta sıfırlara sahip ise, salınımlı aksi takdirde salınımsız olarak adlandırılır. (2.1) diferensiyel denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, salınımlıdır denir.

İkinci mertebeden nötral gecikmeli diferensiyel denklemin elastik bir çubuğa bağlı titreşimli kütlelerle ilgili problemlerde ve bazı varyasyon problemlerinde çeşitli uygulamaları olduğu biliniyor. Nötral gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili uygulamalar ve sorular için Hale [15] çalışmasına bakılabilir.

Son yıllarda, ikinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin Grammatikopoulos vd. [14] de, Travis [23] ve Waltman [24] ün sonuçlarını geliştirerek ikinci mertebeden

$$[x(t) + p(t)x(t - \tau)]'' + q(t)x(t - \sigma) = 0 \quad (2.2)$$

nötral gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı

$$\int_{\tau}^{\infty} q(s)(1 - p(s - \tau))ds = \infty$$

şartı altında ispatladılar. Daha sonra Grace ve Lalli [13], bazı $k > 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq k$ ve

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{r(t)} = \infty$$

olmak üzere

$$(r(t)[x(t) + p(t)x(t - \tau)]')' + q(t)x(t - \sigma) = 0 \quad (2.3)$$

şeklindeki diferensiyel denklemleri üzerinde çalıştılar ve eğer

$$\int_{\tau}^{\infty} \left[\rho(s)q(s)(1 - p(s - \sigma)) - \frac{(\rho'(s))^2 r(s - \sigma)}{4k\rho(s)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde bir $\rho \in C'(I, IR)$ fonksiyonu mevcut ise, (2.3) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu gösterdiler. Elde edilen sonuçların çoğu, (2.1) diferensiyel denkleminin özel bir formu olan (2.3) diferensiyel denklemi üzerinde yoğunlaşmıştır. (2.3) diferensiyel denkleminin salınımı hakkında daha fazla sonuç için [3,6,11,12] makalelere ve oradaki referanslara bakılabilir. Diğer yandan (2.1) diferensiyel denklemi aşağıdaki

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + p(t)|x(\tau(t))|^{\alpha-1}x(\tau(t)) = 0 \quad (2.4)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denkleminin doğal bir genellemesi olarak göz önüne alınabilir.

Son zamanlarda, Agarwal vd. [4], Chern vd. [5], Dzurina vd. [7], Elbert [9,10], Kusano vd. [16 – 18], Mirzov [19 – 21] ve Sun vd. [22], (2.4) diferensiyel denklemi ile bu denkleme karşılık gelen

$$(r(t)x'(t))' + q(t)y(t) = 0$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklem arasında bazı benzer özellikler gözlemlendiler. Ve (2.4) diferensiyel denklemi için bazı salınım kriterleri oluşturdular. Ayrıca (2.4) diferensiyel denkleminin salınımı hakkında daha fazla sonuç için [2,3,8] makaleleri ve bu makalelerdeki referanslar verilebilir.

Yakın zamanda Xu vd. [25] ikinci mertebeden nötral

$$(r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0 \quad (2.5)$$

diferensiyel denklemi için Dzurina vd. [7] ve Sun vd. [22] nın sonuçlarını geliştirdiler. Ve $y(t) = x(t) + p(t)x(t - \tau)$ olmak üzere (2.5) diferensiyel denklemini göz önüne aldılar. Daha açık olarak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} = \infty$$

ve

$$\int^{\infty} \left[kq(t)(1 - p(\sigma(t))R^{\alpha}(t) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \frac{\sigma'(t)}{R(\sigma(t))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} \right] dt = \infty$$

şartları altında (2.5) diferensiyel denkleminin salınımını ispatladılar. Bununla birlikte, $\int_{t_0}^{\infty} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds < \infty$ şartı altında (2.5) diferensiyel denkleminin her $x(t)$ çözümünün salınımlı veya $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olduğunu garanti eden yeterli şartı [25, Teorem 2.3] de elde ettiler. Bu durumda (2.5) diferensiyel denklemi için birkaç salınım sonucunu verdiler.

Bu bölümde (2.1) diferensiyel denkleminin salınım özellikleri $\int_{t_0}^{\infty} r^{\frac{1}{\alpha}}(s)ds = \infty$ veya $\int_{t_0}^{\infty} r^{\frac{1}{\alpha}}(s)ds < \infty$ şartları altında, Riccati tekniği ve bazı eşitsizlikler kullanılarak verilecektir. (2.1) diferensiyel denklemi için verilen salınım kriterleri [25, 7, 22] çalışmalarında elde edilen temel sonuçların daha gelişmiş ve iyileştirilmiş halidir.

2.2. Temel Sonuçlar

Bu kesimde bize kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım. Buna göre

$$R(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}, \quad \pi(t) = \int_t^{\infty} \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$$

ve

$$\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}, \quad Q(t) = q(t)(1 - p(\sigma(t)))^{\alpha}$$

şeklinde olsun.

Şimdi $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$ ve $\pi(t_0) < \infty$ durumlarını ayrı ayrı ele alalım.

(i) **$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$ Durumu.** İlk olarak (2.1) diferensiyel denkleminin salınımını

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty \quad (2.6)$$

şartı altında göz önüne alalım.

Teorem 2.1. (2.6) şartı sağlansın. Eğer

$$\int^{\infty} \left[\rho(t)Q(t) - \frac{1}{\ell k(\alpha + 1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho'_+(t))^{\alpha+1} r(\sigma(t))}{\rho^\alpha(t)(\sigma'(t))^\alpha} \right] dt = \infty \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir $\rho \in C'(I, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu var ise, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $\rho'_+(t) = \max\{0, \rho'(t)\}$ dir.

İspat. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin bir salınımsız çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $x(t)$ nin belli bir yerden sonra pozitif bir çözüm olduğunu kabul edelim. $x(t)$, belli bir yerden sonra negatif olduğunda ispat benzer şekilde yapılabilir. Bu takdirde her $t \geq T_0$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $T_0 \geq t_0$ vardır. (2.1) diferensiyel denklemi ve (H_2) den $t \geq T_0$ için $z(t) \geq x(t) > 0$ ve $t \geq T_0$ için

$$(r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t))' \leq 0 \quad (2.8)$$

olur. Böylece $r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t)$ azalan bir fonksiyondur. $t \geq T_0$ için

$z'(t) > 0$ olsun. Aksi takdirde $z'(t_1) < 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq T_0$ varsa, (2.8) eşitsizliğinden $t \geq t_1 \geq T_0$ için

$$r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \leq r(t_1)\psi(x(t_1))|z'(t_1)|^{\alpha-1} z'(t_1) := -\delta < 0$$

elde edilir. Öyle ki

$$z'(t) \leq -\left(\frac{\delta}{\psi(x(t))}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \leq -(\ell\delta)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik t_1 den t ye integre edilirse,

$$z(t) - z(t_1) \leq -(\ell\delta)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_1}^t \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$$

ve $t \rightarrow \infty$ için

$$z(t) \leq z(t_1) - (\ell\delta)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_1}^t \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} = -\infty$$

olur. Bu da $t \geq T_0$ için $z(t) > 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $t \geq T_0$ için $z'(t) > 0$ dır.

Belirtelim ki $t \geq T_0$ için

$$r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha \leq r(\sigma(t))\psi(x(\sigma(t)))[z'(\sigma(t))]^\alpha$$

yazılabilir. Buradan

$$z'(\sigma(t)) \geq z'(t) \left(\frac{r(t)\psi(x(t))}{r(\sigma(t))\psi(x(\sigma(t)))} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.9)$$

olur. Burada $x(t) \leq z(t)$ olduğundan $T_0 \leq t$ için

$$x(t) \geq [1 - p(t)]z(t) \quad (2.10)$$

olduğu görülür. Böylece (2.1) ve (H_2) den $T_0 \leq t$ için

$$(r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' + kq(t)x^\alpha(\sigma(t)) \leq 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.10) göz önüne alındığında (2.11) eşitsizliği $T_0 \leq t$ için

$$(r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' + kQ(t)z^\alpha(\sigma(t)) \leq 0 \quad (2.12)$$

şeklini alır. $T_0 \leq t$ için

$$w(t) = \rho(t) \frac{r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} \quad (2.13)$$

şeklinde alalım. Açıkça $w(t) > 0$ dır. (2.13) in türevi alınır

$$w'(t) = \rho'(t)r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} + \rho(t)(r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))}$$

$$- \alpha \rho(t) r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha z^{-\alpha-1}(\sigma(t)) \sigma'(t) z'(t)$$

ve aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa,

$$w'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \rho(t) r(t) \psi(x(t)) (z'(t))^\alpha \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} + \rho(t) (r(t) \psi(x(t)) (z'(t))^\alpha)' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} \\ - \alpha \rho(t) \frac{r(t) \psi(x(t)) (z'(t))^\alpha \sigma'(t) (\rho(t))^{\frac{1}{\alpha}} r(\sigma(t))^{\frac{1}{\alpha}} \psi(x(t))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t)}{z^{\alpha+1}(\sigma(t)) (\rho(t))^{\frac{1}{\alpha}} r(\sigma(t))^{\frac{1}{\alpha}} \psi(x(t))^{\frac{1}{\alpha}}}$$

elde edilir. (2.12) ve (2.9) kullanılarak

$$w'(t) \leq \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - k \rho(t) Q(t) - \frac{\alpha \sigma'(t)}{\rho(t) r(t) \psi(x(t))^\alpha} w(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ \leq \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - k \rho(t) Q(t) - \frac{\alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \sigma'(t)}{\rho(t) r(\sigma(t))^\alpha} w(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

bulunur. $V > 0$ için

$$F(V) := \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{\alpha \sigma'(t) \ell^{\frac{1}{\alpha}}}{\rho(t) r(\sigma(t))^\alpha} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

alalım. Basit bir hesaplama ile $F(V) = 0$ dan V çekilirse,

$$V = \frac{1}{\ell(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(t))^\alpha}{\rho^{\alpha-1}(t)} \frac{r(\sigma(t))}{(\sigma(t))^\alpha}$$

bulunur. Burada $F(V)$, V de maximum değerini alır, böylece

$$F(V) \leq F_{max} = \frac{1}{\ell(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho^{\alpha-1}(t)} \frac{r(\sigma(t))}{(\sigma(t))^\alpha}$$

dir. Buradan, F_{max} değeri $w'(t)$ de yerine yazılırsa,

$$w'(t) \leq -k \rho(t) Q(t) + \frac{1}{\ell(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(t)} \frac{r(\sigma(t))}{(\sigma(t))^\alpha}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliği T_0 dan t ye integre edilirse,

$$0 < w(t) \leq w(T_0) - k \int_{T_0}^t \left[\rho(s) Q(s) + \frac{1}{\ell k (\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(s))^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\sigma(s))}{(\sigma(s))^\alpha} \right] ds$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ alınrsa, (2.7) ile çelişki elde edilir. Bu ise, teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.1 de $\rho(t) = R^\alpha(\sigma(t))$ alınrsa, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.1. (2.6) şartı sağlansın. Eğer

$$\int^{\infty} \left[Q(t)R^\alpha(\sigma(t)) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))R(\sigma(t))} \right] dt = \infty \quad (2.14)$$

ise, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Sonuç 2.2. (2.6) şartı sağlansın. Eğer bazı $T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R(\sigma(t))} \int_T^t Q(s)R^\alpha(\sigma(s))ds > \frac{\varepsilon}{\ell k} \quad (2.15)$$

ise, (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. (2.15) eşitsizliğinde yeterince büyük her t için

$$\frac{1}{\ln R(\sigma(t))} \int_T^t Q(s)R^\alpha(\sigma(s))ds \geq \frac{\varepsilon}{\ell k} + \varepsilon_0$$

olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ var olduğu görülebilir. Böylece

$$\int_T^t \left[Q(s)R^\alpha(\sigma(s)) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{\sigma'(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))R(\sigma(s))} \right] ds \geq \varepsilon_0 \ln R(\sigma(t)) + \frac{\varepsilon}{\ell k} \ln R(\sigma(T))$$

şeklindedir. Bu da (2.14) ün sağlandığını gösterir. Buradan Sonuç 2.2, Sonuç 2.1 den görülür.

Sonuç 2.3. (2.6) şartı sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma'(t)} Q(t)R^{\alpha+1}(\sigma(t))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) > \frac{\varepsilon}{\ell k} \quad (2.16)$$

ise, (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat: Açıkça (2.16) nın yeterince büyük her t için

$$\frac{1}{\sigma'(t)} Q(t) R^{\alpha+1}(\sigma(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) \geq \frac{\varepsilon}{\ell k} + \varepsilon_0 \quad (2.17)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ değeri vardır. (2.17) nin her iki tarafı $\frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) R(\sigma(t))}$ ile çarpılırsa,

$$Q(t) R^{\alpha}(\sigma(t)) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) R(\sigma(t))} \geq \frac{\varepsilon_0 \sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) R(\sigma(t))}$$

elde edilir. Bu da (2.14) un sağlandığını gösterir. Bu nedenle Sonuç 2.1 den, (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Uyarı 2.1. (2.4) ve (2.5) diferensiyel denklemi için Sonuç 2.1, 2.2, 2.3, Xu vd. [25] ve Sun vd. [22] nin elde ettiği sonuçların iyileştirilmiş ve genelleştirilmiş halidir.

Uyarı 2.2. $r(t) \equiv 1$ olmak üzere (2.4) diferensiyel denklemi için Teorem 2.1, Dzurina vd. [7] deki Teorem 1-3 ün geliştirilmiş halidir.

Örnek 2.1. $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{t^{\alpha(1+x^2(t))}} |z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \right)' + t |x(t)|^{\alpha-1} x(t) = 0 \quad (2.18)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $\alpha > 0$, $p(t) = \frac{1}{2}$, $r(t) = t^{-\alpha}$,

$\tau(t) = t-1$, $q(t) = t$, $\psi(t) = \frac{1}{(1+x^2)}$, $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$ ve $\sigma(t) = t$ şeklindedir.

$k = \ell = 1$, $R(\sigma(t)) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $Q(t) = \frac{1}{2^{\alpha}} t$ elde etmek kolaydır. Buradan herhangi bir $T > t_0$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R(\sigma(t))} \int_T^t Q(s) R^{\alpha}(\sigma(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4^\alpha} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_T^t s(s^2 - 1)^\alpha}{\ln \frac{(s^2 - 1)}{2}} \\
&= \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \liminf_{t \rightarrow \infty} (t^2 - 1)^{\alpha+1} = \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece Sonuç 2.2 den, (2.18) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Teorem 2.2. (2.6) şartı sağlansın. Eğer

$$\int^\infty \left(Q(t) - \frac{\ell^{\frac{1}{\alpha}} \sigma'(t) h^{\alpha+1}(t)}{k r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} \right) \exp \left((\alpha + 1) \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int^t \frac{\sigma'(s) h(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} ds \right) dt = \infty \quad (2.19)$$

olacak şekilde bir $h \in C'(I, IR^+)$ varsa, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, Teorem 2.1 in ispatında olduğu gibi $t \geq T_0$ için $x(t) > 0$, $x(\sigma(t)) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olacak şekilde bir $T_0 \geq t_0$ değeri vardır. Ve $t \geq T_0$ için $z'(t) > 0$ dır. Üstelik (2.9) ve (2.12) şartları sağlanır. $t \geq T_0$ için

$$U := \frac{r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki, $U(t) > 0$ dır. (2.20) nin türevi alınır

$$U'(t) = (r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha \frac{z'(t)\sigma'(t)}{z^{\alpha+1}(\sigma(t))}$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
U'(t) &= (r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} \\
&\quad - \alpha r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha \frac{\sigma'(t)z'(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))}{z^{\alpha+1}(\sigma(t))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.9) ve (2.12) den

$$U'(t) \leq -kQ(t) - \alpha \frac{\sigma'(t)\psi_{\frac{1}{\alpha}}(x(t))}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} U^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}$ eklenilir ve çıkarılırsa,

$$U'(t) \leq - \left[kQ(t) - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right] - \left[\alpha \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} U^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right]$$

$$U'(t) \leq - \left[kQ(t) - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right] - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} \left[\alpha U^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + h^{\alpha+1}(t) \right]$$

olur. Hölder Eşitsizliğinden

$$\alpha U^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + h^{\alpha+1}(t) \geq (\alpha + 1)h(t)U(t)$$

yazılabilir. Böylece

$$U'(t) \leq - \left[kQ(t) - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right] - (\alpha + 1) \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h(t)U(t)$$

elde edilir. Veya

$$U'(t) + (\alpha + 1) \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h(t)U(t) \leq - \left[kQ(t) - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right]$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\exp\left((\alpha + 1)\ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^t \frac{\sigma'(s)h(s)}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} ds\right)$ ile çarpılır ve çarpımın türevi dikkate alınır,

$$\left(\exp\left((\alpha + 1)\ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_0}^t \frac{\sigma'(s)h(s)}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} ds\right) U(t) \right)' \leq - \left[kQ(t) - \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} h^{\alpha+1}(t) \right]$$

$$\exp \left((\alpha + 1) \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_1}^t \frac{\sigma'(s)h(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} ds \right) \quad (2.21)$$

olur. (2.21) nın T_0 dan t ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &< \exp \left((\alpha + 1) \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_0}^t \frac{\sigma'(s)h(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} ds \right) U(t) \\ &\leq U(T_0) - k \int_{T_0}^t \left(Q(s) - \frac{\ell^{\frac{1}{\alpha}} \sigma'(s)h^{\alpha+1}(s)}{k r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} \right) \\ &\quad \exp \left((\alpha + 1) \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_0}^s \frac{\sigma'(U)h(U)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(U))} du \right) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik $t \rightarrow \infty$ için (2.19) kabulü ile çelişir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.2 de $h(t) = \frac{1}{(\alpha+1)\ell^{\frac{1}{\alpha}}R(\sigma(t))}$ seçilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4. (2.9) şartı sağlansın. Eğer

$$\int \left[Q(t)R(\sigma(t)) - \frac{1}{\ell k(\alpha + 1)^{(\alpha+1)}} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))R^{\alpha}(\sigma(t))} \right] dt = \infty \quad (2.22)$$

ise, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Örnek 2.2. $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{1+x^2(t)} |z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \right)' + e^{\alpha \gamma t} |x(\gamma t)|^{\alpha-1} x(\gamma t) = 0 \quad (2.23)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$, $r(t) = 1$, $p(t) = 1 - e^{-t}$, $\rho(t) = 1$, $q(t) = e^{\alpha\gamma t}$, $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\tau(t) = t-1$, $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$ ve $\sigma(t) = \gamma t$ dir. Kolaylıkla $k = \ell = 1$, $R(\sigma(t)) = \gamma t - 1$, $Q(t) = 1$ olduğu görülebilir. Böylece

$$\begin{aligned} I &= \int_1^t \left[Q(s)R(\sigma(s)) - \frac{1}{\ell k(\alpha+1)^{(\alpha+1)}} \frac{\sigma'(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))R^\alpha(\sigma(s))} \right] ds \\ &= \int_1^t \left[\gamma s - 1 - \frac{\gamma}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}} \frac{1}{(\gamma s - 1)^\alpha} \right] ds \end{aligned}$$

ve $t \rightarrow \infty$ için

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}[(\gamma t - 1)^2 - (\gamma - 1)^2] + \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+1)} \left[\frac{1}{(\gamma t - 1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\gamma - 1)^{\alpha-1}} \right], & \alpha \neq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{2\gamma}[(\gamma t - 1)^2 - (\gamma - 1)^2] + \frac{1}{4} \ln \frac{|\gamma t - 1|}{\gamma - 1}, & \alpha = 1 \text{ ise} \end{cases} \rightarrow \infty$$

olur. Böylece Sonuç 2.9 dan, (2.23) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

(ii) $\pi(t_0) < \infty$ **Durumu.** Kabul edelim ki

$$\pi(t_0) < \infty \quad (2.24)$$

olsun. (2.24) şartı altında (2.1) diferensiyel denkleminin salınım problemini ele alalım.

Teorem 2.3. (2.24) şartı sağlansın. Eğer

$$\int_1^\infty \left[Q(t)\pi^\alpha(\sigma(t)) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{\sigma'(t)}{\pi(\sigma(t))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} \right] dt = \infty \quad (2.25)$$

ve

$$\int_1^\infty \left[Q(t)\pi^\alpha(t) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{r(\sigma(t))}{\pi(t)(\sigma'(t))^\alpha r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)} \right] dt = \infty \quad (2.26)$$

ise, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. (2.1) diferensiyel denkleminin bazı $T \geq t_0$ için $[T, \infty)$ üzerinde bir $x(t)$ salınımsız çözümünün olduğunu varsayalım. (2.1) diferensiyel denklemi $t \geq T$ için $r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)$ nin artmayan olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak, $z'(t)$ nin işaretinin iki durumunu göz önüne alalım. Yani $t \geq T_1 \geq T$ için $z'(t) > 0$ veya $z'(t) < 0$ dır.

Durum 1. $t \geq T$ için $z'(t) > 0$ dır. Bu taktirde $\rho(t) = \pi^\alpha(\sigma(t))$ alınarak, Teorem 2.1 ile benzerdir. Böylece Teorem 2.1 in ispatı kullanılarak (2.25) ile bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $t \geq T$ için $z'(t) > 0$ olamaz.

Durum 2. $t \geq T_1$ için $z'(t) < 0$ olsun. Burada

$$U(t) = \frac{r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)}{z^\alpha(\sigma(t))} \quad (2.27)$$

şeklinde alalım. Açıkça $[T_1, \infty)$ üzerinde $U(t) < 0$ dır. $r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)$ artmayan olduğundan $s \geq t \geq T_1$ için

$$(r(s)\psi(x(s)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(s) \leq (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t)$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik $(r(s)\psi(x(s)))^{\frac{1}{\alpha}}$ ile bölünürse,

$$z'(s) \leq (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \frac{1}{(r(s)\psi(x(s)))^{\frac{1}{\alpha}}}$$

olur. Ve $[t, \tau]$ üzerinde integre edilirse,

$$\int_t^\tau z'(s) ds \leq (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \int_t^\tau \frac{ds}{(r(s)\psi(x(s)))^{\frac{1}{\alpha}}}$$

veya

$$z(\tau) \leq z(t) + (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \int_t^\tau \frac{ds}{(r(s)\psi(x(s)))^{\frac{1}{\alpha}}}$$

elde edilir. $z'(t) < 0$ ve (H_2) den,

$$z(\tau) \leq z(t) + \ell^{\frac{1}{\alpha}} (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \int_t^{\tau} \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\tau \rightarrow \infty$ alınırsa ve $\pi(t) = \int \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$ olduğundan

$$0 \leq z(t) + \ell^{\frac{1}{\alpha}} (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \pi(t)$$

olur. Yani $t \geq T_1$ için

$$-z(t) \leq \ell^{\frac{1}{\alpha}} (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \pi(t)$$

veya

$$-\frac{z(t)}{\ell^{\frac{1}{\alpha}}} \leq (r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \pi(t)$$

elde edilir. $z'(t) < 0$ ve $z(\sigma(t)) \geq z(t)$ den $t \geq T_1$ için yukarıdaki eşitsizlik

$$\pi(t)(r(t)\psi(x(t)))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{z'(t)}{z(\sigma(t))} \geq -\frac{1}{\ell^{\frac{1}{\alpha}}}$$

bulunur. Böylece $t \geq T_1$ için

$$-\ell^{-1} \leq \pi^\alpha(t) U(t) \leq 0$$

dır. Diğer yandan Teorem 2.1 in ispatında olduğu gibi (2.9) ve (2.12) sağlanır. Böylece (2.27) nin türevini alırız

$$U'(t) = ((r(t)\psi(x(t)))z'(t))' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha r(t)\psi(x(t)) \frac{(z'(t))^\alpha \sigma'(t)}{z^{\alpha+1}(\sigma'(t))}$$

ve düzenlenirse,

$$U'(t) = (r(t)\psi(x(t))(z'(t))^\alpha)' \frac{1}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha r(t)\psi(x(t)) \frac{(z'(t))^\alpha \sigma'(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) \psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))}{z^{\alpha+1}(\sigma'(t)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)) \psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))}$$

elde edilir. (2.12) ve (2.9) kullanılarak $t \geq T_1$ için

$$U'(t) + kQ(t) + \frac{\alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \leq 0 \quad (2.28)$$

dır. (2.28) eşitsizliği $\pi^\alpha(t)$ ile çarpılırsa, $t \geq T_1$ için

$$\pi^\alpha(t)U'(t) + kQ(t)\pi^\alpha(t) + \alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \pi^{\alpha-1}(t) \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} \leq 0$$

olur. Ve yukarıdaki eşitsizliğin $[T_1, t]$ ye integrali alınır,

$$\begin{aligned} \pi^\alpha(t)U(t) - \pi^\alpha(T_1)U(T_1) + \alpha \int_{T_1}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) \pi^{\alpha-1}(s)U(s)ds + k \int_{T_1}^t Q(s)\pi^\alpha(s)ds \\ + \alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_1}^t \frac{\pi^\alpha(s)\sigma'(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} |U(s)|^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} ds \leq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.29) eşitsizliğindeki ilk integralin mutlak değeri Young eşitsizliğinden,

$$\alpha r^{-\frac{1}{\alpha}} \pi^{\alpha-1}(t) |U(t)| \leq \alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\pi^\alpha(t)\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} + \frac{\varepsilon}{\ell} \frac{r(\sigma(t))}{\pi(t)(\sigma'(t))^\alpha r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)}$$

yazılır. Böylece (2.29), yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak

$$\pi^\alpha(t)U(t) + k \int_{T_1}^t \left[Q(s)\pi^\alpha(s) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{r(\sigma(s))}{\pi(s)(\sigma'(s))^\alpha r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)} \right] ds \leq \pi^\alpha(T_1)|U(T_1)|$$

şeklini alır. (2.26) dan $t \rightarrow \infty$ iken $\pi^\alpha(t)U(t) \rightarrow -\infty$ olur. Bu ise, $\pi^\alpha(t)U(t) \geq -\ell^{-1}$ ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4. (2.24) ve (2.25) şartları sağlansın. Eğer

$$\int_{T_1}^{\infty} Q(t)\pi^{\alpha+1}(t) dt = \infty \quad (2.30)$$

ise, bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemini salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, $t \geq T_1 \geq T$ için $x(t) > 0$ olmak üzere salınımsız bir çözüm olsun. Teorem 2.3 teki (2.24) ve (2.25) kabulleri altında Teorem 2.3 ün ispatında olduğu gibi, $t \geq T_1$ için

$z'(t) > 0$ olamayağı görülebilir. Daha sonra Teorem 2.3 ün ikinci durumunun ispatına benzer şekilde devam edersek, (2.28) eşitsizliği sağlanır. Böylece (2.28) eşitsizliği $\pi^{\alpha+1}(t)$ ile çarpılırsa,

$$\pi^{\alpha+1}(t) U'(t) \leq -\pi^{\alpha+1} \frac{kQ(t)z^\alpha(\sigma(t))}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha\pi^{\alpha+1} \frac{\sigma'(t)\ell^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

elde edilir. Ve $\tau \geq T_1 \geq T$ için $[T_1, \tau]$ üzerinde integral alınır,

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{\tau} \pi^{\alpha+1}(t) U'(t) dt \\ & \leq \int_{T_1}^{\tau} \pi^{\alpha+1} \frac{kQ(t)z^\alpha(\sigma(t))}{z^\alpha(\sigma(t))} dt + (\alpha + 1) \int_{T_1}^{\tau} \frac{\pi^\alpha(t)U(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} dt \\ & + \alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_1}^{\tau} \frac{\sigma'(t)\pi^{\alpha+1}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \leq 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \pi^{\alpha+1}(\tau)U(\tau) - \pi^{\alpha+1}(T_1)U(T_1) + k \int_{T_1}^{\tau} Q(t)\pi^{\alpha+1}(t) dt + (\alpha + 1) \int_{T_1}^{\tau} \frac{\pi^\alpha(t)U(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} dt \\ & + \alpha \ell^{\frac{1}{\alpha}} \int_{T_1}^{\tau} \frac{\sigma'(t)\pi^{\alpha+1}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |U(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \leq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

dir. Ve Teorem 2.3 te $-\ell^{-1} \leq \pi^\alpha(t)U(t) \leq 0$ olduğu göz önüne alınarak $|\pi^\alpha(t)U(t)| \leq \ell^{-1}$ dir. Ayrıca $\tau \rightarrow \infty$ için

$$|\pi^{\alpha+1}(\tau)U(\tau)| = \pi(\tau)\pi^\alpha(\tau)|U(\tau)| < \infty$$

elde edilir. Ve (2.29) eşitsizliğinde $\tau \rightarrow \infty$ iken

$$\left| \int_{T_1}^{\infty} \frac{\pi^\alpha(t)U(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} dt \right| \leq \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} |\pi^\alpha(t)U(t)| dt \leq \ell^{-1} \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} dt < \infty$$

olur. Buradan (2.29) eşitsizliği yakınsaktır. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \int_{T_1}^{\infty} \frac{\sigma'(t) \pi^{\alpha+1}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} U^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) dt \right| &\leq \left| \int_{T_1}^{\infty} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} |\pi^{\alpha}(t) U(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) dt \right| \\ &\leq \ell^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \int_{T_1}^{\infty} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))} dt < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki üç eşitsizlik dikkate alınarak, $\tau \rightarrow \infty$ için (2.31) den

$$\int_{T_1}^{\infty} Q(t) \pi^{\alpha+1}(t) dt < \infty$$

bulunur. Bu (2.30) kabulü ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 2.3. $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{e^{\alpha t}}{1+x^2(t)} |z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \right)' + t |x(\gamma t)|^{\alpha-1} x(\gamma t) = 0 \quad (2.32)$$

denklemini göz önüne alalım, burada $\alpha > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $r(t) = e^{\alpha t}$, $p(t) = 1 - e^{-t}$,

$q(t) = e^{(2\alpha+1)\gamma t}$, $\psi(t) = \frac{1}{1+x^2}$, $\tau(t) = t-1$, $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$ ve $\sigma(t) = \gamma t$ dır. Ayrıca

$k = \ell = 1$, $\pi(t) = e^{-t}$, $Q(t) = e^{(\alpha+1)\gamma t}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Böylece $t \rightarrow \infty$ için

$$\int_1^t \left[Q(s) \pi^{\alpha}(\sigma(s)) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{\sigma'(s)}{\pi(\sigma(s)) r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} \right] ds = \int_1^t (e^{\gamma s} - \varepsilon \gamma) ds \rightarrow \infty$$

ve

$$\int_1^t Q(s) \pi^{\alpha+1}(s) ds = \int_1^t ds \rightarrow \infty$$

olur. Böylece Teorem 2.4 ün tüm şartları sağlandığından, (2.32) diferensiyel denklemi salınımlı olur.

Teorem 2.5. (2.24) ve (2.26) şartları sağlansın. Eğer

$$\int_1^t \left[Q(t)\pi(\sigma(t)) - \frac{1}{\ell k(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\sigma'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))\pi^\alpha(\sigma(t))} \right] ds = \infty \quad (2.33)$$

ise, (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözüm olsun. Genelliği bozmaksızın bazı $T \geq t_0$ için $x(t)$ nin $[T, \infty)$ üzerinde pozitif olduğunu kabul edelim. Böylece (2.1) diferensiyel denkleminden $t \geq T$ için $r(t)\psi(x(t))|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)$ artmayandır. Bu takdirde $t \geq T_1 \geq T$ için $z'(t) > 0$ veya $z'(t) < 0$ olur. Eğer $t \geq T$ için $z'(t) > 0$ durumunda $h(t) = \frac{1}{\pi(\sigma(t))(\alpha+1)L^{\frac{1}{\alpha}}}$ seçilirse, Teorem 2.2 deki duruma geri döneriz. Böylece ispat için Teorem 2.2 deki gibi hareket edilir ve (2.33) ile bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $t \geq T$ için $z'(t) > 0$ olamaz. Buradan $t \geq T_1$ için $z'(t) < 0$ dır. İspatın geri kalanı Teorem 2.3 e benzer şekilde yapılır. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 2.4 ve 2.5 in ispatı göz önüne alınarak, Teorem 2.6 verilebilir.

Teorem 2.6. (2.24), (2.30) ve (2.33) şartları sağlansın. Bu takdirde (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Uyarı 2.3. Teorem 2.3 - 2.6, (2.1) diferensiyel denklemi için salınım kriterleri olarak verilmiştir. Ancak Xu vd. [25] ve Sun vd. [22] salınım kriterlerini $\int_{t_0}^{\infty} r^{\frac{-1}{\alpha}} ds < \infty$ şartı altında verdiler, dolayısıyla burada verilen sonuçlar onların sonuçlarının daha iyileştirilmiş halidir.

Örnek 2.4. $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{t^{2\alpha}}{1+x^2(t)} |z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \right)' + t^\alpha |x(\gamma t)|^{\alpha-1} x(\gamma t) = 0 \quad (2.34)$$

denklemini göz önüne alalım, burada $\alpha > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $r(t) = t^{2\alpha}$, $p(t) = \frac{1}{2}$,

$q(t) = t^\alpha$, $\psi(t) = \frac{1}{1+x^2}$, $\tau(t) = \frac{t}{2}$, $f(x) = |x|^{\alpha-1}x$, $\sigma(t) = \gamma t$ dir. Ayrıca $k = \ell = 1$, $\pi(t) = \frac{1}{t}$, $Q(t) = \frac{1}{2^\alpha} t^\alpha$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece $t \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} I &= \int_1^t \left[Q(s)\pi(\sigma(s)) - \frac{1}{\ell k(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\sigma'(s)}{r^\frac{1}{\alpha}(\sigma(s))\pi^\alpha(\sigma(s))} \right] ds \\ &= \int_1^t \left[\frac{1}{2^\alpha \gamma} s^{\alpha-1} - \frac{\gamma^{\alpha-2}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} s^{\alpha-1} \right] ds \end{aligned}$$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2^\alpha \alpha \gamma} (t^\alpha - 1) - \frac{\gamma^{\alpha-1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\alpha-1)} (t^{\alpha-1} - 1) & , \quad \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2^\gamma} (t-1) - \frac{1}{4} \ln t & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \infty$$

dir. Daha sonra $t \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \int_1^t \left[Q(s)\pi^\alpha(s) - \frac{\varepsilon}{\ell k} \frac{r(\sigma(s))}{\pi(s)(\sigma'(s))^\alpha r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)} \right] ds &= \int_1^t \left[\frac{1}{2^\alpha} - \frac{\varepsilon \gamma^\alpha}{s} \right] ds \\ &= \frac{1}{2^\alpha} (t-1) - \varepsilon \gamma^\alpha \ln t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.5 in tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla (2.34) diferensiyel denklemini salınımlıdır.

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL NONPOZİTİF KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

3.1. Giriş

Bu bölümde lineer olmayan ikinci mertebeden $t \geq t_0 > 0$ için

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0 \quad (3.1)$$

nötral gecikmeli diferensiyel denklemin salınımı incelenecektir. Bunun için (3.1) diferensiyel denklemi üzerinde Qi Li vd. [26] tarafından çalışılmış olan makale göz önüne alınacaktır, burada $z := x(t) - p(t)x(\tau(t))$ ve α iki tek pozitif tamsayının oranıdır. Bölüm boyunca aşağıdaki hipotezlerin sağlandığı kabul edilecektir.

(H₁) $r, p, q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $r(t) > 0$, $0 \leq p(t) \leq p_0 < 1$, $q(t) \geq 0$ ve yeterince büyük t için q sıfırdan farklıdır.

(H₂) $\tau \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ için $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$.

(H₃) $\sigma \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\sigma'(t) > 0$, $\sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$.

(H₄) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, her $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $u \neq 0$ için,

$$\frac{f(u)}{u^\alpha} \geq k$$

olacak şekilde öyle bir k pozitif vardır.

$T_x \geq t_0$ için $[T_x, \infty)$ aralığında $r(t)(z'(t))^\alpha \in C'([T_x, \infty), \mathbb{R})$ özelliğine sahip (3.1) diferensiyel denklemini sağlayan $x \in C([T_x, \infty), \mathbb{R})$ çözümünü kastediyoruz. (3.1) diferensiyel denklemi $T \geq T_x$ için $\sup \{|x(t)|: t \geq T\}$ şartını sağlayan bu tür çözümlere sahip olan çözümlerini ele alalım. Alishıla geldiği gibi $[T_x, \infty)$ üzerinde sonsuz sıfırlara sahip ise, (3.1) diferensiyel denkleminin çözümüne salınımlı denir. Aksi takdirde salınımsızdır denir. (3.1) diferensiyel denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, salınımlıdır denir.

Son zamanlarda çözümlerin salınımını incelemeye artan bir ilgi vardır. Farklı diferensiyel denklem sınıfları, doğa bilimleri ve mühendislikte geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin Hale [15] ve Wong [27] çalışmalarına bakılabilir. Özellikle bir çok makale, ikinci ve üçüncü mertebeden gecikmeli diferensiyel denkleminin salınım davranışıyla ilgilenmiştir. Örneğin [7, 27 – 39] çalışmalar referans olarak gösterilebilir. Ayrıca ikinci mertebeden (3.1) diferensiyel denklemleri ve özel durumları için salınım kriterleri, [27 – 31, 33 – 36, 38, 39] çalışmalarında verilmiştir. Çeşitli araştırmacılar (3.1) diferensiyel denkleminin salınımını

$$-\infty < -p_0 \leq p(t) \leq 0$$

durumunda çalışmalara rağmen genellikle $-1 < p(t) \leq 0$ kabulü kullanmıştır. Özel olarak Wong [27] ve Yang vd. [39], (3.1) diferensiyel denklemi için

$$0 \leq p(t) \leq p_0 < 1 \quad (3.2)$$

ve

$$\tau(t) = t - \tau_0 \leq t \quad \text{ve} \quad \sigma(t) = t - \sigma_0 \leq t \quad (3.3)$$

şartları altında salınım teoremini elde ettiler. Ayrıca Qin Li vd. [38], [39] daki yanlışlıklara dikkat çektiler. Baculikova ve Dzurina [31] üçüncü mertebeden nötral,

$$\left(r(t) \left([x(t) \mp p(t)x(\delta(t))]'' \right)^\gamma \right)' + q(t)x^\gamma(\tau(t)) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımının

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{\frac{-1}{\alpha}}(t) dt = \infty$$

şartı altında asimtotik özelliklerini araştırdılar. Burada [31] çalışması baz alınarak (3.1) diferensiyel denklemi için salınım sonuçları incelenecektir. Belirtelim ki, tüm fonksiyonel eşitsizliklerin yeterince büyük her t için sağlandığı kabul edilecektir. Ayrıca genelliği bozmaksızın (3.1) diferensiyel denkleminin pozitif çözümleriyle ilgilenilecektir.

3.2. Salınım Sonuçları

Bu kesimde, (3.1) diferensiyel denkleminin salınım kriterlerini vermeden önce aşağıdaki yardımcı lemmaları verelim.

Lemma 3.1. $(H_1) - (H_4)$ şartları ve (3.4) şartı sağlasın ve x , (3.1) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde z , aşağıdaki iki durumu sağlar:

Burada $t_1 \geq t_0$ yeterince büyük olmak üzere $t \geq t_1$ için,

$$(C_1) \quad z(t) > 0, \quad z'(t) > 0, \quad (r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq 0 \quad \text{ve}$$

$$(C_2) \quad z(t) < 0, \quad z'(t) > 0, \quad (r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq 0$$

dır.

İspat. Kabul edelim ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. (3.1) diferensiyel denkleminde

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq -k q(t) x^\alpha(\sigma(t)) \leq 0 \tag{3.5}$$

olduğu görülür. Böylece $r(t)(z'(t))^\alpha$, tek işaretli ve artmayandır. Yani $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ veya $z'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ vardır. Eğer $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ ise, (C_1) veya (C_2) durumlarının biri sağlanır. Şimdi $z'(t) < 0$ olmayacağını ispat edelim. Eğer $t \geq t_2$ için $z'(t) < 0$ ise, bu takdirde $t \geq t_2$ için

$$r(t)(z'(t))^\alpha \leq -c < 0$$

dır, burada $c = -r(t_2)(z'(t_2))^\alpha > 0$ dır. Böylece

$$z'(t) \leq -c^{\frac{-1}{\alpha}} r^{\frac{-1}{\alpha}}(t)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlik t_2 den t ye integre edilirse,

$$\int_{t_2}^t z'(s) ds \leq \int_{t_2}^t -c^{\frac{-1}{\alpha}} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds$$

$$z(t) \leq z(t_2) - c^{\frac{-1}{\alpha}} \int_{t_2}^t r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds$$

olur. (3.4) şartından, $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$ dır. Şimdi aşağıdaki iki durumu ayrı ayrı ele alalım.

Durum 1. Eğer x sınırsız ise, bu takdirde $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = \infty$ olacak şekilde bir t_k dizisi vardır, burada $x(t_k) = \max \{x(s): t_0 \leq s \leq t_k\}$ dır.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ olduğundan yeterince büyük her k için $\tau(t_k) > t_0$ dır. $\tau(t) \leq t$ den

$$x(\tau(t_k)) = \max \{x(s): t_0 \leq s \leq \tau(t_k)\} \leq \max \{x(s): t_0 \leq s \leq t_k\} = x(t_k)$$

dır. Böylece yeterince büyük her k için

$$z(t_k) = x(t_k) - p(t_k)x(\tau(t_k)) \geq (1 - p(t_k))x(t_k) > 0$$

bulunur. Bu da $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$ ile çelişir.

Durum 2. Eğer x sınırlıysa, bu takdirde aynı zamanda z de sınırlıdır. Bu da $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$ ile çelişir. Böylece z , (C_1) ve (C_2) durumlarından birini sağlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2. Kabul edelim ki x , (3.1) diferensiyel denkleminin bir pozitif çözümü olsun ve z , (C_2) durumunu sağlasın. Bu takdirde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

dır.

İspat. $z < 0$ ve $z' > 0$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = l \leq 0$$

olabilir. Burada l sonlu bir sabittir. Yani z sınırlıdır. Lemma 3.1 deki Durum 1 in ispatında olduğu gibi, x de sınırlıdır. x sınırlı olduğundan $0 \leq a < \infty$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$$

dır. $a = 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Eğer $a > 0$ ise, bu takdirde $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty$ ve

$\lim_{m \rightarrow \infty} x(t_m) = a$ olacak şekilde bir $\{t_m\}$ dizisi vardır. Burada $\varepsilon = \frac{a(1-p_0)}{2p_0}$ olsun. Bu

durumda yeterince büyük her m için $x(\tau(t_m)) < a + \varepsilon$ ve böylece

$$0 \geq \lim_{m \rightarrow \infty} z(t_m) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} x(t_m) - p_0(a + \varepsilon) = \frac{a(1-p_0)}{2} > 0$$

olur. Ki bu bir çelişkidir. Böylece $a = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi yeterince büyük $t_1 \geq t_0$ için

$$\xi(t) = r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{t_1}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$$

şeklinde alalım.

Teorem 3.1. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları ve (3.4) şartı sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \geq t_0$ için

$$\int_{t_1}^{\infty} \left[k\rho(t)q(t) - \frac{\rho_+'(t)r(\sigma(t))}{\xi^\alpha(\sigma(t))} \right] dt = \infty \quad (3.6)$$

olacak şekilde pozitif bir $\rho \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var ise, (3.1) diferensiyel denkleminin her x çözümü ya sınımlıdır ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ dır, burada

$$\rho_+'(t) = \max\{0, \rho'(t)\} \text{ dir.}$$

İspat. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (3.5) eşitsizliği sağlanır. Lemma 3.1 den z , (C_1) ve (C_2) şartlarından birini sağlar. Bu iki durumu ayrı ayrı göz önüne alalım.

İlk önce (C_1) şartının sağlandığını kabul edelim. z nin tanımından

$$x(t) = z(t) + p(t)x(\tau(t)) \geq z(t) \quad (3.7)$$

olur. (3.5) ve $\sigma(t) \leq t$ şartı kullanılarak

$$r(t)(z'(t))^\alpha \leq r(\sigma(t))(z'(\sigma(t)))^\alpha \quad (3.8)$$

bulunur. Şimdi (3.5) den

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{(r(s)(z'(s))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds \geq z'(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{t_1}^t r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds = \xi(t)z'(t) \quad (3.9)$$

elde edilir. $t \geq t_1$ için bir w fonksiyonunu

$$w(t) := \rho(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ ve w nin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} w'(t) = \rho'(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} + \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(\sigma(t))} \\ - \rho(t) \frac{\alpha r(t)(z'(t))^\alpha z'(\sigma(t))\sigma'(t)}{z^{\alpha+1}(\sigma(t))} \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.5), (3.7) - (3.10) da kullanılarak

$$\begin{aligned}
w'(t) &\leq \rho'(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} - k\rho(t)q(t) \\
&\leq \rho_+'(t) \frac{r(\sigma(t))}{\xi^\alpha(\sigma(t))} - k\rho(t)q(t) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

dır. (3.11), t_2 den t ye integre edilirse ($t_2 > t_1$)

$$w(t) - w(t_2) \leq - \int_{t_2}^t \left[k\rho(s)q(s) - \frac{\rho_+'(s)r(\sigma(s))}{\xi^\alpha(\sigma(s))} \right] ds$$

veya

$$\int_{t_2}^t \left[k\rho(s)q(s) - \frac{\rho_+'(s)r(\sigma(s))}{\xi^\alpha(\sigma(s))} \right] ds \leq w(t_2)$$

olur. Bu da (3.6) kabulü ile çelişir. Eğer z , (C_2) durumunu sağlarsa, bu takdirde Lemma 3.2 den $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Özel olarak $\rho(t) = 1$ olsun. (3.1) diferensiyel denklemi için Teorem 3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. $(H_1) - (H_4)$ şartları ve (3.4) şartı sağlansın. Eğer

$$\int_0^\infty q(t)dt = \infty$$

ise, bu takdirde Teorem 3.1 in sonucu sağlanır.

Teorem 3.2. $\alpha \geq 1$ olsun ve $(H_1) - (H_4)$ şartları ve (3.4) şartı sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \geq t_0$ için

$$\int_0^\infty \left[k\rho(t)q(t) - \frac{(\rho_+'(t))^2 r(\sigma(t))}{4\alpha\rho(t)\sigma'(t)\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))} \right] dt = \infty \quad (3.12)$$

olacak şekilde pozitif bir $\rho \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var ise, bu takdirde Teorem 3.1 in sonucu aynen sağlanır, burada $\rho_+'(t) = \max\{0, \rho'(t)\}$ dir.

İspat. Yukarıdaki gibi x in, (3.1) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 den z , (C_1) ve (C_2) şartlarından birini sağlar. İki durumun her birini ayrı ayrı göz önüne alalım.

İlk olarak z nin (C_1) özelliğini sağladığını varsayalım. Böylece (3.8) ve (3.9) elde edilir. Şimdi w yı Teorem 3.1 in ispatında olduğu gibi tanımlayalım. Bu takdirde

$w > 0$ ve w nin türevi alınırsa,

$$w'(t) \leq -k\rho(t)q(t) + \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - \alpha\sigma'(t)\rho(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} \frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} \quad (3.13)$$

elde edilir. Diğer yandan (3.8) ve (3.9) dan

$$\frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} = \frac{1}{r(\sigma(t))} \frac{r(\sigma(t))(z'(\sigma(t)))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} \left(\frac{z(\sigma(t))}{z'(\sigma(t))} \right)^{\alpha-1} \leq \frac{\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))r(t)(z'(t))^\alpha}{r(\sigma(t))z^\alpha(\sigma(t))} \quad (3.14)$$

bulunur. (3.13), (3.14) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq -k\rho(t)q(t) + \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - \alpha\sigma'(t) \frac{\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))}{r(\sigma(t))\rho(t)} w^2(t) \\ &\leq -k\rho(t)q(t) + \frac{(\rho_+'(t))^2 r(\sigma(t))}{4\alpha\rho(t)\sigma'(t)\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))} \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15), $(t_2 > t)$ t_2 den t ye integre edilirse,

$$\int_{t_2}^t \left[k\rho(s)q(s) - \frac{(\rho_+'(s))^2 r(\sigma(s))}{4\alpha\rho(s)\sigma'(s)\xi^{\alpha-1}(\sigma(s))} \right] ds \leq w(t_2)$$

dır. Bu ise, (3.12) kabulü ile çelişir. Eğer z , (C_2) şartını sağlıyorsa, bu takdirde Lemma 3.2 kullanıldığında $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.1. $t \geq 1$ için

$$\left[x(t) - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right]'' + 8x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.16)$$

ikinci mertebeden bir nötral diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Sonuç 3.1 den, (3.16) diferansiyel denkleminin her x çözümü ya salınımlı yada $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ özelliğini sağladığı görülür. Örneğin $x(t) = \sin 4t$, bu denklemin salınımlı bir çözümüdür.

Örnek 3.2. $t \geq 1$ için

$$[t^2(z'(t))^3]' + \gamma t^{-2}x^3\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad (3.17)$$

ikinci mertebeden bir nötral diferansiyel denklemini göz önüne alalım, burada

$z(t) = x(t) - x(t/3)/2$ ve $\gamma > 0$ bir sabittir. Burada $\alpha = 3$, $r(t) = t^2$, $q(t) = t^{-2}$, $\sigma(t) = t/2$, $k = \gamma$ ve $\rho(t) = t$ ve belirtelim ki her $k_0 \in (0,1)$ için $\xi(t) \geq 3k_0 t$ olsun. Teorem 3.2 den (3.17) nin her x çözümü ya salınımlıdır yada bazı $k_0 \in (0,1)$ için $\gamma > 1/54k_0^2$ ise, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ dır. Bununla birlikte Teorem 3.1 den (3.17) nin her x çözümü ya salınımlıdır yada bazı $k_0 \in (0,1)$ için $\gamma > 2/27k_0^3$ ise, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ sağlanır.

Belirtelim ki her $k_0 \in (0,1)$ için $\frac{2}{27k_0^3} > \frac{1}{54k_0^2}$ vardır. Böylece Teorem 3.2 bazı durumlarda Teorem 3.1 i geliştirir. Ancak Teorem 3.1, $0 < \alpha < 1$ olduğu durumlarda (3.1) diferansiyel denklemine uygulanabilir. [27, 38, 39] da elde edilen sonuçlar, (3.3) şartı bu denklem için sağlanmadığından (3.17) diferansiyel denklemine uygulanamaz.

Uyarı 3.1. Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ile (3.1) diferansiyel denklemi, Sonuç 3.1 den her x çözümü ya salınımlı ya da $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ gibi farklı davranışlara sahiptir. Ayrıca z nin işareti bilinmediğinden, (3.1) diferansiyel denklemin tüm çözümlerinin sadece salınımlı olmasını ve $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$ olmasını sağlayan yeterli şartları elde etmek kolay değildir.

4. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

4.1. Giriş

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer olmayan nötral

$$(r(t)((x(t) + p(t)x(\tau(t)))')^\alpha)' + q(t)x^\alpha(\sigma(t)) = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki diferensiyel denklemin salınımı ile ilgilenilecektir. (4.1) diferensiyel denklemi için Ravi P. Agarwal vd. [40] tarafından yapılan çalışma göz önüne alınacaktır, burada $t \geq t_0 > 0$ ve $\alpha \geq 1$ pozitif tek tamsayıların oranıdır. Aynı zamanda $r, \sigma \in C'([t_0, \infty], (0, \infty))$, $p, q, \tau \in C([t_0, \infty], \mathbb{R})$ olacak şekilde fonksiyonlardır. Ayrıca $t \geq t_0$ için $\tau(t) \leq t$, $\sigma(t) \leq t$, $\sigma'(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$,

$0 \leq p(t) < 1$, $q(t) \geq 0$ ve q belli yerden sonra sıfır olmayan bir fonksiyon olsun, burada $z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t))$ dir. Ve kabul edelim ki (4.1) diferensiyel denkleminin x çözümleri mevcut ve süreklidir. (4.1) diferensiyel denklemin çözümü sonsuz sıfırlara sahip ise, salınımlı olarak adlandırılır, aksi takdirde salınımsızdır.

İkinci mertebeden nötral diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı davranışına artan ilgi, bunların doğa bilimleri ve mühendislikteki uygulamalarından kaynaklanmaktadır. Örneğin [1, 41 – 47] bakılabilir. Bunlar arasında Han vd. [42], Ye ve Xu [1], (4.1) diferensiyel denklemi için birkaç salınım sonucunu ispatladılar. Bu kriterlerden bazılarını aşağıda verelim. Burada kolaylık olması bakımından

$$\varepsilon := \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1}, \quad Q(t) := q(t) \left(1 - p(\sigma(t))\right)^\alpha, \quad \pi(t) := \int_t^\infty r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds$$

şeklinde alalım.

Teorem 4.1[1, **Teorem 2. 3**]. Kabul edelim ki

$$\pi(t_0) < \infty \quad (4.2)$$

ve

$$\int^{\infty} \left[Q(t)\pi^{\alpha}(\sigma(t)) - \frac{\varepsilon \sigma(t)'}{\pi(\sigma(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t)))} \right] dt = \infty$$

ve

$$\int^{\infty} \left[Q(t)\pi^{\alpha}(t) - \frac{\varepsilon r(\sigma(t))}{\pi(t)(\sigma(t)')^{\alpha} r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)} \right] dt = \infty$$

olsun. Bu takdirde (4.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.2 ([42, **Teorem 2. 1**]). Kabul edelim ki (4.2) şartı sağlansın ve $t \geq t_0$ için

$$p'(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sigma(t) \leq \tau(t) = t - \tau_0 \quad (4.3)$$

olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\rho(s)Q(s) - \frac{((\rho'(s))_+)^{\alpha+1} r(\sigma(s))}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \rho^{\alpha}(s)(\sigma'(s))^{\alpha}} \right] ds = \infty \quad (4.4)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{q(s)\pi^{\alpha}(s)}{(1+p(s))^{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\pi(s)r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde bir $\rho \in C'([t_0, \infty], (0, \infty))$ fonksiyonu var ise, (4.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $(\rho'(t))_+ = \max \{0, \rho'(t)\}$ dır. (4.3) ün kabulünde, Teorem 4.1 deki yanlışlıklar Teorem 4.2 de düzeltilmiştir. Özellikle Han vd. [42]

$$x(t) \geq (1 - p(t))z(t)$$

burada $x(t)$, (4.1) diferensiyel denkleminin çözümü olduğundan yukarıdaki eşitsizlik sağlanmaz. Bu çalışmada Han vd. [42] salınım sonuçlarının iyileştirilmiş hali verilecektir. Ayrıca Ye ve Xu [1] burada genelleştirilmiş Riccati dönüşümü kullanılarak, (4.1) diferensiyel denklemi için (4.3) şartını sağlamayan yeni bir salınım kriteri elde ettiler.

4.2. Salınım Sonuçları

Bu kesimde ele alınan tüm fonksiyonel eşitsizliklerin, yeterince büyük t ler için sağlandığı kabul edilecektir. Aşağıdaki eşitsizlikler sırasıyla Jiang ve Li [44], Zhang ve Wang [47] çalışmalarında bulunabilir.

Lemma 4.1. $\alpha \geq 1$ iki tek tamsayının oranı olsun. Bu takdirde $AB \geq 0$ için

$$A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - (A - B)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq \frac{\frac{1}{B\alpha}}{\alpha} [(1 + \alpha)A - B] \quad (4.5)$$

ve $C > 0$ için

$$-CV^{\frac{(\alpha+1)}{\alpha}} + DV \leq \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{D^{\alpha+1}}{C^\alpha} \quad (4.6)$$

dır.

Teorem 4.3. Kabul edelim ki (4.2) şartı sağlansın ve (4.4) diferensiyel denklemini sağlayacak şekilde bir $\rho \in C'([t_0, \infty](0, \infty))$ fonksiyonu mevcut olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\psi(s) - \frac{\delta(s)r(s)((\varphi(s))_+)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right] ds = \infty \quad (4.7)$$

olacak şekilde bir $\delta \in C'([t_0, \infty], (0, \infty))$ var ise, (4.1) diferensiyel denklemini salınımlıdır, burada

$$\psi(t) := \delta(t) \left[q(t) \left((1 - p(\sigma(t)))^{\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}} \right)^\alpha + \frac{1-\alpha}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi^{\alpha+1}(t)} \right],$$

$$p(t) < \frac{\pi(t)}{\pi(\tau(t))}, \quad \varphi(t) := \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + \frac{1+\alpha}{r^\alpha(t)\pi(t)}$$

ve $(\varphi(t))_+ := \max \{0, \varphi(t)\}$ şeklindedir.

İspat. Kabul edelim ki x , $[t_0, \infty)$ aralığında (4.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$, $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ değerinin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $z(t) \geq x(t) > 0$ ve

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' = -q(t)x^\alpha(\sigma(t)) \leq 0 \quad (4.8)$$

olduğundan $r(z')^\alpha$, her $t \geq t_1$ için artmayandır. Böylece z' nün, belli bir yerden sonra işareti değişmez. Yani her $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ veya $z'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ değeri vardır.

Durum 1. Her $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ olsun. Bölüm 2 de Teorem 2.1 in ispatına benzer şekilde (4.4) şartından çelişki elde edilir.

Durum 2. Kabul edelim ki her $t \geq t_2$ için $z'(t) < 0$ olsun. Buradan $(r(z'(t))^\alpha)' \leq 0$ dan her $t_2 \leq t \leq s$ için $(r(z'(t))^\alpha)'$ artmayan olduğundan

$$r(s)(z'(s))^\alpha \leq r(t)(z'(t))^\alpha$$

$$(z'(s))^\alpha \leq \frac{r(t)}{r(s)} (z'(t))^\alpha$$

veya

$$z'(s) \leq \left(\frac{r(t)}{r(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} z'(t)$$

bulunur. Bu eşitsizliği $t_2 \leq t \leq l$ olmak üzere t den l ye integre edilirse,

$$\int_t^l z'(s) ds \leq \int_t^l \left(\frac{r(t)}{r(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) ds$$

$$\leq r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \int_t^l \left(\frac{1}{r(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} ds$$

veya

$$z(l) \leq z(t) + r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \int_t^l r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$$

elde edilir. Böylece

$$-z(t) \leq r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \pi(t)$$

veya

$$z(t) \geq -\pi(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \quad (4.9)$$

bulunur.

$$\frac{z(t)}{\pi(t)} \geq -r^{-\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t)$$

olur. $-r^{-\frac{1}{\alpha}}(t) > 0$, $z'(t) < 0$ ve yukarıdaki eşitsizliğin türevi alınırsa,

$$\left(\frac{z(t)}{\pi(t)} \right)' = \frac{z'(t)}{\pi(t)} - \frac{z(t)}{\pi^2(t)} \pi'(t)$$

elde edilir. Burada $\pi(t) = \int_t^\infty r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$ olduğundan,

$$\pi'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_t^b r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds \right)'$$

veya

$$\pi'(t) = r^{-\frac{1}{\alpha}}(t)$$

bulunur. Yani $\left(\frac{z(t)}{\pi(t)} \right)' = \frac{z'(t)\pi(t) - z(t)\pi'(t)}{\pi^2(t)}$ ve $\pi'(t) = r^{-\frac{1}{\alpha}}(t)$ olduğundan (4.9)

kullanılarak,

$$\left(\frac{z(t)}{\pi(t)}\right)' = \frac{z'(t)\pi(t) + z(t)\frac{1}{\pi(t)}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}$$

$$\left(\frac{z(t)}{\pi(t)}\right)' = \frac{z'(t)\pi(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t) + z(t)}{\pi^2(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \geq 0$$

elde edilir. Böylece

$$z(t) = x(t) + p x(\tau(t))$$

tanımından,

$$x(t) = z(t) - p(t)x(\tau(t))$$

olur. Her $t \geq t_2$ için $(x(\tau(t)))$ yerine $z(\tau(t))$ yazılırsa,

$$x(t) \geq z(t) - p(t)z(\tau(t)) \quad (4.10)$$

olur. $\left(\frac{z(t)}{\pi(t)}\right)' \geq 0$ olduğundan $\frac{z(t)}{\pi(t)}$ azalmayandır. Dolayısıyla $\tau(t) < t$ için

$$\frac{z(\tau(t))}{\pi(\tau(t))} \geq \frac{z(t)}{\pi(t)}$$

veya

$$z(\tau(t)) \geq \frac{z(t)}{\pi(t)} \pi(\tau(t))$$

yazılabilir. Bu takdirde (4.10) eşitsizliği

$$x(t) \geq z(t) - p(t) \left(\frac{z(t)}{\pi(t)} \pi(\tau(t)) \right)$$

veya

$$x(t) \geq \left(1 - p(t) \frac{\pi(\tau(t))}{\pi(t)} \right) z(t) \quad (4.11)$$

yazılabilir. (4.8) ifadesinde (4.11) eşitsizliği kullanılırsa,

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq -q(t)\left(1 - p(\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))^\alpha}{\pi(\sigma(t))}\right)^\alpha z^\alpha(\sigma(t)) \quad (4.12)$$

bulunur. Şimdi $t_2 \leq t$ için,

$$w(t) := \delta(t) \left[\frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{1}{\pi^\alpha(t)} \right] \quad (4.13)$$

şeklinde genelleştirilmiş Riccati dönüşümü tanımlayalım. Ve (4.9) eşitliğinin her iki tarafın α ıncı kuvveti alındığında,

$$z^\alpha(t) \geq -\pi^\alpha r(t) z'(t)^\alpha$$

ve

$$z^\alpha(t) + \pi^\alpha r(t) z'(t)^\alpha \geq 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, her $t_2 \leq t$ için $w(t) \geq 0$ dir. (4.13) ün türevi alınır,

$$w'(t) = \delta'(t) \left(\frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{1}{\pi^\alpha(t)} \right) + \frac{\delta(t) (r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \frac{\delta(t) \alpha r(t)(z'(t))^\alpha z'(t)}{z^{\alpha+1}(t)} - \frac{\delta(t) \alpha \pi'(t)}{\pi^{\alpha+1}(t)}$$

elde edilir. Burada $\pi'(t) = -r^{\frac{1}{\alpha}}(t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} \delta(t) \left(\frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{1}{\pi^\alpha(t)} \right) + \frac{\delta(t) (r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \frac{\alpha \delta(t) r(t)(z'(t))^{\alpha+1}}{(z(t))^{\alpha+1}} \\ &\quad + \frac{\alpha \delta(t)}{\pi^{\alpha+1}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \end{aligned}$$

veya

$$w'(t) = \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) + \frac{\delta(t) (r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \alpha \delta(t) r(t) \frac{(z'(t))^{\alpha+1}}{(z(t))^{\alpha+1}} + \alpha \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha+1}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \quad (4.14)$$

bulunur. Burada (4.14) eşitliğinde $\frac{(z'(t))^{\alpha+1}}{(z(t))^{\alpha+1}}$ ifadesini elde etmek için w nin tanımından,

$$\frac{w(t)}{\delta(t)} = \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{1}{\pi^\alpha(t)}$$

$$\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} = \frac{(z'(t))^\alpha}{z(t)^\alpha} \quad (4.15)$$

ve

$$\left(\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{z'(t)}{z(t)} \quad (4.16)$$

yazılabilir. (4.15) ve (4.16) dan,

$$\frac{(z'(t))^{\alpha+1}}{(z(t))^{\alpha+1}} = \left(\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu (4.17) ifadesi w nin türevinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) + \frac{\delta(t) (r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \alpha \delta(t) r(t) \left[\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ &\quad + \frac{\alpha \delta(t)}{\pi^{\alpha+1}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki

$$A := \frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} \quad \text{ve} \quad B := \frac{1}{r(t)\pi^\alpha}$$

olsun. (4.5) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left(\frac{w(t)}{\delta(t)r(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \left[\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}+1} \leq \left[\frac{1}{\alpha r(t)\pi^\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[(1+\alpha) \frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right]$$

veya

$$\left[\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}+1} \geq \left(\frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \frac{1}{\alpha \pi(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \left[(1+\alpha) \frac{w(t)}{r(t)\delta(t)} - \frac{1}{r(t)\pi^\alpha} \right] \quad (4.18)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.12) den $z'(t) < 0$ ve $\sigma(t) \leq t$ olduğundan, yani z azalan ve $z(\sigma(t)) > z(t)$ olduğundan

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq -q(t)\left(1 - p(\sigma(t)) \frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^\alpha z^\alpha(t)$$

veya

$$\frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} \leq -q(t)\left(1 - p(\sigma(t)) \frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^\alpha \quad (4.19)$$

olur. Böylece (4.14) ifadesinde (4.18) ve (4.19) kullanılarak

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) - \delta(t)q(t) \left(1 - p(\sigma(t)) \frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^\alpha - \alpha \frac{\delta(t)r(t)w(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\delta^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)r^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)} - \frac{(1+\alpha)\alpha\delta(t)r(t)w(t)}{\alpha r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi(t)\delta(t)r(t)} \\ &\quad - \frac{\delta(t)r(t)}{\alpha \pi^{\alpha+1}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)r(t)} + \frac{\alpha\delta(t)}{\pi^{\alpha+1}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \\ &\leq -\delta(t) \left[q(t) \left(1 - p(\sigma(t)) \frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right)^\alpha + \frac{1-\alpha}{\pi^{\alpha+1}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \right] + w(t) \left[\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + \frac{1+\alpha}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)\pi(t)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin kabulünde verilen ψ ve φ fonksiyonları göz önüne alınarak, son eşitsizlik

$$w'(t) \leq -\psi(t) + (\varphi(t))_+ w(t) - \frac{\alpha}{(\delta(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}(t) \quad (4.20)$$

şeklini alır. Şimdi

$$C := \frac{\alpha}{(\delta(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad D := (\varphi(t))_+ \quad \text{ve} \quad V = w(t)$$

alalım. Bunlar (4.6) eşitsizliğinde uygulanırsa,

$$- \frac{\alpha}{(\delta(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}(t) + w(t)(\varphi(t))_+ \leq \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\varphi(t))_+^{\alpha+1} \delta(t)r(t)}{\alpha^\alpha}$$

veya

$$(\varphi(t))_+ w(t) - \frac{\alpha}{(\delta(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}(t) \leq \frac{\delta(t)r(t)(\varphi(t))_+^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) ve (4.21) den,

$$w'(t) \leq -\psi(t) - \delta(t)r(t) \frac{(\varphi(t))_+^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}$$

bulunur. Bu eşitsizlik t_2 den t ye integre edilirse,

$$\int_{t_2}^t w'(s) ds \leq \int_{t_2}^t \left[-\psi(s) - \delta(s)r(s) \frac{(\varphi(s))_+^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right] ds$$

veya

$$\int_{t_2}^t \left[\psi(s) - \delta(s)r(s) \frac{(\varphi(s))_+^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right] ds \leq -w(t) + w(t_2)$$

veya

$$\int_{t_2}^t \left[\psi(s) - \delta(s)r(s) \frac{(\varphi(s))_+^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right] ds \leq w(t_2)$$

elde edilir. Bu ise, (4.7) ile çelişir. Bu takdirde (4.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır. Buda ispatı tamamlar.

Örnek 4.1. $t \geq 1$ için

$$\left(\left(t^2(x(t) + p_0 x\left(\frac{t}{2}\right)) \right)' \right)' + q_0 x(t) = 0 \quad (4.22)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $p_0 \in [0, 1/2)$ ve $q_0 \in (0, \infty)$ dir. Ayrıca $\rho(t) = 1$ ve $\delta(t) = \frac{1}{t}$ olsun. Bu takdirde (4.4) şartı sağlanır.

$\varphi(t) = \frac{1}{t}$ ve $\psi(t) = \frac{q_0(1-2p_0)}{t}$ dir. Ayrıca $r(t) = t^2$, $p(t) = p_0$, $q(t) = q_0$ $\tau(t) = \frac{t}{2}$,

$\sigma(t) = t$, $\alpha = 1$ dir. Burada

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \int_{t_0}^t \left[\psi(s) - \frac{\delta(s)r(s)((\varphi(s))_+)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \right] ds \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \int_{t_0}^t \left[\frac{q_0(1-2p_0)}{s} - \frac{t^2}{t} \left(\frac{1}{t} \right)^2 \frac{1}{2^2} \right] ds \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{q_0(1-2p_0)}{s} - \frac{\varepsilon}{4s} \right] ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{s} \left[\frac{q_0(1-2p_0)}{1} - \frac{\varepsilon}{4} \right] ds = \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $q_0 > \frac{(1-2p_0)}{4}$ şartı altında (4.7) şartı sağlanır. Dolayısıyla Teorem 4.3 e göre $q_0 > \frac{(1-2p_0)}{4}$ şartından (4.22) diferensiyel denklemi salınımlı olur. Ancak, Teorem 4.1 ve 4.2, (4.22) denkleminde uygulanmaz. Ayrıca $p_0 = 0$, $q_0 > \frac{1}{4}$ için ikinci mertebeden

$$(t^2 x'(t))' + q_0 x(t) = 0$$

Euler diferensiyel denkleminin salınımı için kuvvetli bir şarttır.

Uyarı 4.1. Bu çalışmada (4.1) diferensiyel denklemi için oluşturulan salınım kriteri Baculikova ve Dzurina [41], Hasanbulli ve Rogouchenko [43], Jiang ve Li [44] ve Zhang ve Wang [47] tarafından verilen sonuçları tamamlayıcı niteliğe sahiptir. Çünkü $\pi(t_0) = \infty$ yerine $\pi(t_0) < \infty$ kullanıldı.

Özel olarak $p(t) < \frac{\pi(t)}{\pi(\tau(t))} \leq 1$ durumundada yukarıdaki teoreme uygulanabildiğinde Li vd. [46] çalışması içinde tamamlayıcı bir özelliğe sahiptir.

Uyarı 4.2. [1, 43, 46, 47] referanslarından farklı yöntemler kullanılarak Ye ve Xu [1] nin sonuçlarını değiştirdi. Ve Han vd. [42] ve Li vd. [1, 46] nin (4.22) şartını kaldırdı. $\sigma(t) \leq \tau(t)$, $\tau(t) \leq \sigma(t)$ ve dolayısıyla $\tau\sigma = \sigma\tau$ dır.

5. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

5.1. Giriş

Bu bölümde $t \geq t_0$ için ikinci mertebeden

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' + q(t)x^\alpha(\sigma(t)) = 0 \quad (E)$$

yarı lineer nötral gecikmeli diferensiyel denklem sınıfının salınım problemi incelenecektir, burada $z := x(t) + p(t)x(\tau(t))$ şeklindedir. (E) diferensiyel denklemi için Said R. Grace vd. [48] tarafından çalışılmış olan makale göz önüne alınacaktır. Bu bölüm boyunca aşağıdaki kabuller mevcut olsun.

(H₁) α pozitif tek tamsayıların bir oranıdır.

(H₂) $t_* \geq t_0$ için $[t_*, \infty)$ yarım aralığında $r \in C'([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p, q \in C[t_0, \infty), (0, \infty))$,

$0 \leq p(t) < 1$ ve $q(t)$, $t_* \geq t_0$ için herhangi bir $[t_*, \infty)$ aralığında sıfır olmasın.

(H₃) $\tau, \sigma \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ için $\tau(t) \leq t$, $\sigma(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty$ olsun.

Biz burada

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s) ds = \infty \quad (5.1)$$

olduğu durumu göz önüne alınacaktır. [49] numaralı makalede (E) diferensiyel denkleminin salınım davranışı

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1/\alpha}(s) ds < \infty$$

kabulü altında araştırılmıştır. (E) diferensiyel denkleminin bir çözümü ve $r(z'(t))^{\alpha} \in C'([t_0, \infty), IR)$ bir fonksiyon ve $[t_0, \infty)$ aralığında bazı $t_b \geq t_0$ için $t_a := \min \{\tau(t_b), \sigma(t_b)\}$ ile aşıkır olmayan reel değerli bir $x \in C([t_a, \infty), IR)$ fonksiyonu olsun. Biz sadece (E) diferensiyel denkleminin $[t_b, \infty)$ yarım aralığı üzerinde mevcut herhangi bir $t_c \geq t_b$ için $\sup\{|x(t)|: t_c \leq t < \infty\} > 0$ şartını sağlayan çözümlerini göz önüne alalım. Alışıla geldiği gibi, (E) diferensiyel denkleminin bir x çözümü, keyfi çoklukta sıfırlara sahip ise salınımlıdır denir.

Gecikme argümentli diferensiyel denklemlerin salınım teorisi, yirminci yüzyılın ilk çeyreğinde ortaya çıkan [50] Fite nin bir makalesinde başlatıldı. O zamandan beri, çeşitli diferensiyel ve fonksiyonel denklem sınıflarının çözümlerinin salınımı ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Bu konuya olan ilgi, makalelerdeki [2, 3, 11, 12, 51] ve bu makalelerdeki referanslarla belirtildi. Aynı zamanda, [52 - 54, 57 - 65] makalelerine bakılabilir ve referanslar (E) diferensiyel denklemin ve (E) diferensiyel denkleminin özel durumları için göz önüne alınmıştır.

Nötral gecikmeli diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyonunun en yüksek mertebeli türevinin hem gecikmeli hemde gecikmesiz olarak görüldüğü bir diferensiyel denklemdir. Son otuz yılda nötral diferensiyel denklemlerin salınımı önemli bir araştırma alanı haline geldi. Örneğin [1, 25, 28, 30, 42, 47, 55, 56] çalışmalarına bakılabilir. Bunun nedeni, bu tür denklemlerin populasyon dinamiği, otomatik kontrol, sıvıları karıştırma ve elastik bir çubuğa bağlı titreşen kütleler dahil olmak üzere çeşitli uygulamalarda ortaya çıkmıştır Hale [66]. Özel olarak ikinci mertebeden nötral gecikmeli diferensiyel denklemler, insan vücudunun kendi kendini dengelemesini açıklamada ve iki ayaklı robotların yapımında robotikte, biyolojide büyük ilgi görmektedir [67]. (E) diferensiyel denkleminin özel durumları olan denklemlerin salınıminin incelenmesindeki metotlar, mertebenin indirilmesi ve birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımı ile karşılaştırılması esasına

dayanmaktadır. Özel olarak, Koplatadze 1986 [68] ve Wei 1988 [69] daki çalışmasında ikinci mertebeden

$$x''(t) + q(t)x(\sigma(t))=0 \quad (5.2)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alınarak ve σ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$K := \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t \sigma(s)q(s)ds > 1 \quad (1_a)$$

veya

$$k := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t \sigma(s)q(s)ds > \frac{1}{e} \quad (1_b)$$

şartları altında (5.2) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu ispatladılar. (1_a) ve (1_b) şartları sadece gecikmeli diferensiyel denklemler için sağlanan Ladas vd. [70] Koplatadze ve Chanturiya [71] çalışmalarında, birinci mertebeden

$$x'(t) + q(t)x(\sigma(t)) = 0 \quad (5.3)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi için sırasıyla

$$L := \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t q(s)ds > 1 \quad (2_a)$$

$$l := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t q(s)ds > \frac{1}{e} \quad (2_b)$$

şartları iyi bilinen salınım kriterlerine benzerdir. Eğer $k < K$ ($l < L$) ise, ((1_a)-(1_b)), ((2_a)-(2_b)) şartları arasında belirgin bir boşluk vardır. Birinci mertebeden diferensiyel denklemlerde bu boşluğu doldurmak son yıllarda ilginç bir araştırma konusu olmuştur. Örneğin [72] ve burada belirtilen referanslara bakılabilir. 2000 yılında Koplatadze vd. [73], (1_a) ve (1_b) yerine

$$M := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \int_{\sigma(t)}^t q(s) \left(\sigma(s) + \int_{t_0}^{\sigma(s)} \xi \sigma(\xi) q(\xi) d\xi \right) ds > 1 \quad (1_a')$$

burada σ azalmayandır veya

$$m := \lim_{t \rightarrow \infty} \inf \int_{\sigma(t)}^t q(s) \left(\sigma(s) + \int_{t_0}^{\sigma(s)} \xi \sigma(\xi) q(\xi) d\xi \right) ds > \frac{1}{e} \quad (1_b')$$

şartları altında (5.2) diferensiyel denklemi için $(1_a') - (1_b')$ şartlarını iyileştirerek salınım kriterlerini elde etmiştir. Belirtelim ki yukarıda belirtilen şartlar arasındaki benzerliklere rağmen $((1_a)-(1_b))$, $((1_a')-(1_b'))$ ve $((2_a)-(2_b))$ şartları arasında önemli bir fark vardır. [77] deki çalışmaya göre, eğer $L < 1/e$ ise, bu takdirde (5.3) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olduğu biliniyor. (5.3) diferensiyel denkleminin salınımı gecikmeden kaynaklanır. Bununla birlikte (5.2) diferensiyel denklemi $\sigma(t) = t$ olduğu durumda bile salınımlı olabilir.

Yukarıda bahsedilen durumdada uygulanabilen diğer çok geniş uygulama alanına sahip bir metotta Riccati dönüşüm tekniğidir. Bu metot (E) ikinci mertebeden diferensiyel denklemini birinci mertebeden Riccati eşitsizliğine indirgenmesi esasına dayanır.

2006 da Sun ve Meng [74] yeterince büyük $t_1 \geq t_0$ için

$$R(t) := \int_{t_1}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$$

ve

$$w(t) := R^\alpha(\sigma(t)) \frac{r(t)(x'(t))^\alpha}{x^\alpha(\sigma(t))}$$

olmak üzere Riccati dönüşümü kullanılarak Dzurina ve Stavroulakis [7] nin yaptığı salınım sonuçlarını iyileştirmiştir. Yani Sun ve Meng (E) diferensiyel denkleminin özel bir durumu olan

$$(r(t)(x'(t))^\alpha)' + q(t)x^\alpha(\sigma(t)) = 0 \quad (E')$$

diferensiyel denklemi için (5.1) şartı sağlanıyor ve $\sigma \in C'([t_0, \infty), IR)$, $\sigma'(t) > 0$ ve

$$\int^{\infty} \left(R^{\alpha}(\sigma(s))q(s) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\sigma'(s)}{R(\sigma(s))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} \right) ds = \infty \quad (5.4)$$

şartları altında (E') diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu göstermişlerdir.

Xu ve Meng [25], (E) diferensiyel denklemi için (3.4) şartını geliştirdi ve ispatladı, eğer (5.1) şartı sağlanıyor ve $\sigma \in C'([t_0, \infty), IR)$, $\sigma'(t) > 0$ ve

$$\int^{\infty} \left(R^{\alpha}(\sigma(s))q(s) \left(1 - p(\sigma(s)) \right)^{\alpha} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\sigma'(s)}{R(\sigma(s))r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(s))} \right) ds = \infty \quad (5.5)$$

şartı altında (E) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu ispat ettiler. Daha sonra

Erbe vd. [75], (5.1) şartının sağlandığını ve $\alpha \geq 1$, $r' \geq 0$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{\alpha}(s)q(s)ds = \infty$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left(\psi(s)q(s) \left(\frac{\sigma(s)}{s} \right)^{\alpha} - \frac{(\psi'_+(s))^{\alpha+1} r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \psi^{\alpha}(s)} \right) ds = \infty \quad (5.6)$$

şartları altında (E) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu gösterdiler, burada $\psi \in C'([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $\psi'_+(t) = \max \{0, \psi'(t)\}$ dır. Yukarıdakilere benzer çalışmalar bir çok makalede (E) ve (E) diferensiyel denkleminin çeşitli durumları için bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin [1, 28, 42, 47, 58, 61- 64, 75, 76,] makaleleri ve buradaki çalışmalara bakılabilir.

Bu bölümde, yukarıda bahsedilen salınım sonuçlarının daha geliştirilmiş ve iyileştirilmiş durumları, (E) diferensiyel denklemi için verilecektir. İlk olarak, [73] deki çalışmasından yola çıkarak (5.2) lineer diferensiyel denklemi için verilen $(1_a')$ ve $(1_b')$ şartlarını (E) yarı lineer nötral diferensiyel denkleminin uygulanabilmesi için

verilecektir. İkinci olarak, klasik Riccati dönüşüm tekniklerini ikinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemleri için literatürde bildirilen çok sayıda ilgili sonucu iyileştiren salınım kriterleri elde etmektir.

Aşağıda mevcut olan bütün fonksiyonel eşitsizlikler yani bu eşitsizlikler yeterince büyük her t için sağlanacaktır. Alışla geldiği gibi ve genelliği bozmaksızın sadece (E) diferensiyel denkleminin belli bir yerden sonra pozitif çözümleriyle ilgilenilecektir.

5.2. Ön Hazırlık

Şimdi ispatlarımızda kullanacağımız kabulleri yapalım. Burada $t_1 \geq t_0$ yeterince büyük olmak üzere $t \geq t_1$ için,

$$Q(t) := (1 - p(\sigma(t)))^\alpha q(t)$$

$$\bar{Q}(t) := \int_t^\infty Q(s) ds$$

$$R(t) := \int_{t_1}^t r^{\frac{-1}{\alpha}} ds$$

$$\hat{R}(t) := R(t) + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t R(s) R^\alpha(\sigma(s)) Q(s) ds$$

$$\check{R}(t) := \exp\left(-\alpha \int_{\sigma(t)}^t \frac{ds}{\hat{R}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\right)$$

olsun. Salınım kriterlerinin ispatında kullanmak için aşağıdaki yardımcı sonuçları verelim.

Lemma 5.1([28, Lemma 3]). (3.1) şartı sağlansın ve $x(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında (E) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu takdirde $t \geq t_1$ için

$$z(t) > 0, \quad z'(t) > 0, \quad (r(t)(z'(t)^\alpha)') \leq 0 \quad (5.7)$$

olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır.

Lemma 5.2([47, Lemma 2.3]). Kabul edelim ki, $g(U) = AU - BU^{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$ olsun, burada A ve $B > 0$ birer sabitler α ise, tek doğal sayıların oranıdır. Bu takdirde g nin türevi alınır,

$$g'(U) = AU' - B\frac{\alpha+1}{\alpha}U^{\frac{1}{\alpha}}U'$$

elde edilir. Ve $g'(U) = 0$ dan,

$$A = B\frac{\alpha+1}{\alpha}U^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha A}{(\alpha+1)B} = U^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$\left(\frac{\alpha A}{(\alpha+1)B}\right)^{\alpha} = U^*$$

elde edilir. Bu takdirde g , U^* da R üzerinde maximum değerine ulaşır ve

$$\max_{U \in IR} g = g(U^*) = \frac{A(\alpha A)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha}B^{\alpha}} - B\left[\left(\frac{\alpha A}{(\alpha+1)B}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

ve düzenlenirse,

$$\max_{U \in IR} g = g(U^*) = \frac{(\alpha+1)\alpha^{\alpha}A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}B^{\alpha}} - \frac{\alpha^{\alpha}A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}B^{\alpha}}$$

veya

$$\max_{U \in IR} g = g(U^*) = \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{A^{\alpha+1}}{B^{\alpha}} \quad (5.8)$$

olur.

5.3. Temel Sonuçlar

Bu kesimde ilk olarak Koplatadze vd. nin [73] numaralı çalışmalarında yer alan (5.2) lineer gecikmeli diferensiyel denklemi için elde edilen Teorem 3 ün, half lineer nötral gecikmeli (E) diferensiyel denklemi için genelleştirilmiş halini ifade edelim.

Teorem 5.1. Kabul edelim ki (5.1) şartı sağlansın. σ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t Q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds > 1 \quad (5.9)$$

veya

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t Q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds > \frac{1}{e} \quad (5.10)$$

ise, bu takdirde (E) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki (E) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığında salınımsız bir çözümü $x(t)$ olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$,

$x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Ayrıca $t \geq t_1$ için $z(t)$ nin tanımından

$$x(t) = z(t) - p(t)x(\tau(t))$$

yazılabilir. $x(t) \leq z(t)$ ve $\tau(t) \leq t$ olduğundan

$$x(t) \geq z(t) - p(t)z(\tau(t))$$

dır. Lemma 1 den $z(t)$ artan olduğundan, her durumda $z(t) \geq z(\tau(t))$ dır. Böylece

$x(\tau(t)) \leq z(\tau(t)) \leq z(t)$ olur. Dolayısıyla

$$x(t) \geq z(t) - p(t)z(t) = (1 - p(t)) z(t)$$

elde edilir. Buradan (E) diferensiyel denkleminde yani

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' = -q(t)x^\alpha(\sigma(t))$$

denkleminde $x^\alpha(\sigma(t)) \geq ((1 - p(t)) z(t))^\alpha$ olmak üzere

$$(r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq -Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \quad (5.11)$$

olur. Diğer yandan, $r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t)$ nin monotonluğundan

$$z'(t) = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} z'(t)$$

dır. Her iki taraf t den t_1 e integre edilirse,

$$\int_{t_1}^t z'(s) ds = \int_{t_1}^t \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) ds$$

$$z(t) - z(t_1) \geq r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) \int_{t_1}^t \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds$$

veya

$$z(t) \geq z(t_1) + R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \geq R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \quad (5.12)$$

olur. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} \left(z(t) - R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' &= z'(t) - R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) - R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' \\ &= z'(t) - \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) - R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' \end{aligned}$$

veya

$$\left(z(t) - R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' = -R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' \quad (5.13)$$

bulunur. Zincir kuralı uygulanırsa,

$$R(t) \left(\left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^\alpha \right)' = \alpha R(t) \left(\left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^{\alpha-1} \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right) \right)'$$

olduğu görülür. (5.11) eşitsizliğinden son eşitsizlik,

$$\begin{aligned}
& -R(t) Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \geq \alpha R(t) \left(\left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^{\alpha-1} \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right) \right)' \\
& -R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^{1-\alpha} Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \geq \alpha R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)'
\end{aligned}$$

veya

$$-\frac{1}{\alpha} R(t) (r(t) z'(t))^{1-\alpha} Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \geq R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)'$$

şeklinde olur. Buradan

$$-R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' \geq \frac{1}{\alpha} R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^{1-\alpha} Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \quad (5.14)$$

dır. (5.13) eşitsizliği ve (5.14) eşitsizliği birlikte göz önüne alınırsa,

$$\left(z(t) - R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)' \geq \frac{1}{\alpha} R(t) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \right)^{1-\alpha} Q(t) z^\alpha(\sigma(t)) \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15) eşitsizliği t_1 den t ye integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^t \left(z(s) - R(s) r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) \right)' ds \geq \int_{t_1}^t \frac{1}{\alpha} R(s) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) \right)^{1-\alpha} Q(s) z^\alpha(\sigma(s)) ds \\
& \left(z(t) - R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) - z(t_1) + R(t_1) r^{\frac{1}{\alpha}}(t_1) z'(t_1) \right) \\
& \geq \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t R(s) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) \right)^{1-\alpha} Q(s) z^\alpha(\sigma(s)) ds
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& z(t) - \left(z(t_1) + R(t_1) r^{\frac{1}{\alpha}}(t_1) z'(t_1) \right) \\
& \geq R(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t R(s) \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z'(s) \right)^{1-\alpha} Q(s) z^\alpha(\sigma(s)) ds
\end{aligned}$$

dır. Burada $z(t_1) + R(t_1)r^{\frac{1}{\alpha}}(t_1)z'(t_1) > 0$ olduğundan ihmal edilirse,

$$z(t) \geq R(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t) + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s)z'(s) \right)^{1-\alpha} R(s)Q(s)z^\alpha(\sigma(s))ds$$

elde edilir. Şimdi (5.12) eşitsizliği ve $r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t)$ monotonluğundan yani $r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))z'(\sigma(t)) \leq r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} z(t) &\geq R(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s)z'(s) \right)^{1-\alpha} R(s) R^\alpha(\sigma(s))Q(s)r(\sigma(s))(z'(\sigma(s)))^\alpha ds \\ z(t) &\geq R(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t) + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t \left(r^{\frac{1}{\alpha}}(s)z'(s) \right)^{1-\alpha} R(s) R^\alpha(\sigma(s))Q(s)r(s)(z'(s))^\alpha ds \end{aligned}$$

veya

$$z(t) \geq r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t) \left(R(t) + \frac{1}{\alpha} \int_{t_1}^t R(s)R^\alpha(\sigma(s))Q(s)ds \right) \quad (5.16)$$

elde edilir. Böylece

$$z(\sigma(t)) \geq r^{\frac{1}{\alpha}}(\sigma(t))z'(\sigma(t))\hat{R}^\alpha(\sigma(t)) \quad (5.17)$$

dir. (5.11) de (5.17) kullanıldığında (5.7) den dolayı $y(t) := r(t)(z'(t))^\alpha$ birinci mertebeden

$$y'(t) + Q(t)\hat{R}^\alpha(\sigma(t))y(\sigma(t)) \leq 0 \quad (5.18)$$

diferensiyel eşitsizliğinin bir pozitif çözüm olduğu görülür.

Aynı zamanda Philos, Ch. G. [77, Teorem 1] çalışmasında birinci mertebeden

$$y'(t) + Q(t)\hat{R}^\alpha(\sigma(t))y(\sigma(t)) = 0 \quad (5.19)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi pozitif bir çözüme sahiptir. Bununla birlikte, (5.9) veya (5.10) şartları (5.19) diferensiyel denklemin salınımlarını garantiler ve bu da (E) diferensiyel denkleminin pozitif çözümlere sahip olamayacağı anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

(E) diferensiyel denkleminde $p(t) = 0$ alındığında aşağıdaki sonuç kolaylıkla görülür.

Sonuç 5.1. Kabul edelim ki (5.1) şartı sağlansın. σ artmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds > 1 \quad (5.20)$$

veya

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma(t)}^t q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds > \frac{1}{e} \quad (5.21)$$

ise, bu takdirde (E') diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Uyarı 5.1. $\alpha = 1$, $r(t) = 1$ ve $p(t) = 0$ alınırsa, Teorem 5.1, [73, Teorem 3] e indirgenir.

Örnek 5.1. $t \geq l$ için

$$((z'(t))^\alpha)' + \frac{q_0}{t^{\alpha+1}} x^\alpha(\gamma t) = 0 \quad (E_x)$$

ikinci mertebeden nötral diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada

$z(t) := x(t) + p_0 x(\tau(t))$, α pozitif tek tamsayıların oranı $p_0 \in [0, 1)$, $\tau(t) \leq t$, $q_0 > 0$ ve

$\gamma \in (0, 1)$ dır. Teorem 3.1 e göre

$$\rho := (1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha \frac{(\alpha + (1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \ln \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{e} \quad (C_1)$$

var ise, E_x diferensiyel denklemi salınımlıdır. (E_x) diferensiyel denkleminin özel bir durumu için,

$$\left((x'(t))^{\frac{1}{3}}\right)' + \frac{q_0 x^{1/3}}{t^{4/3}} (0.9t) = 0 \quad (5.22)$$

diferensiyel denleminin tüm çözümlerinin salınımı

$$q_0 > 1.92916 \quad (5.23)$$

şartı ile garantilenir. (5.22) diferensiyel denklemi için bilinen ilgili kriter [30, Teorem 2] de verilen birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemiyle karşılaştırıldığında $q_0 > 3,61643$ değeri için salınımlı olduğundan burada elde edilen sonuçtan daha zayıf bir sonuçtur.

Diğer taraftan

$$\left((x'(t))^{\frac{1}{3}}\right)' + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{18}\right)^{1/6} t^{-4/3} x^{\frac{1}{3}}(0.9t) = 0 \quad (5.24)$$

denklemini için (5.23) şartı sağlanmaz ve $x(t) = t^{1/2}$, (5.24) diferensiyel denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür. Ayrıca

$$\int_{\sigma(t)}^t Q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds \leq \frac{1}{e} \quad (5.25)$$

ise, o zaman Teorem 5.1, (E) diferensiyel denklemine uygulanmaz. Bununla birlikte (5.25) sağlanırsa ve $y(t)$, (5.18) in pozitif bir çözümü ise, bu takdirde $y(\sigma(t))/y(t)$ oranının alt sınırlarını elde etmek mümkündür. Bu, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımının incelenmesinde yaygın olarak kullanılan klasik Riccati dönüşüm tekniklerini iyileştirmemizi sağlayacaktır. Zhang ve Zhou [78], şu şekilde tanımlanan bir $\{f_n(\rho)\}_{n=0}^\infty$ dizisi kullanılarak,

$$f_0(\rho) := 1, \quad f_{n+1}(\rho) := e^{\rho f_n(\rho)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \quad (5.26)$$

birinci mertebeden (5.19) gecikmeli diferensiyel denklemi için böyle sınırlar elde ettiler, burada $\rho, t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$\int_{\sigma(t)}^t Q(s) \hat{R}^\alpha(\sigma(s)) ds \geq \rho \quad (5.27)$$

şartını sağlayan bir pozitif sabittir. Zhang ve Zhau $\rho \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ için dizinin artan ve üstten sınırlı ve $\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(\rho) = f(\rho) \in [1, e]$ olduğunu gösterdiler, burada

$$f(\rho) = e^{\rho f(\rho)} \quad (5.28)$$

denklemin reel bir köküdür, onların sonucu aşağıdaki lemmayı ispatlarken önemli bir rol oynar.

Lemma 5.3. (5.1) şartı sağlansın. σ kesinlikle artandır ve (5.27) şartı bazı $\rho > 0$ için sağlansın. Ve kabul edelim ki (E) diferensiyel denklemi $[t_0, \infty)$ üzerinde bir pozitif $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Bu takdirde her $n \geq 0$ için $y := r(t)(z'(t))^\alpha$ ve yeterince büyük t için

$$\frac{y(\sigma(t))}{y(t)} \geq f_n(\rho) \quad (5.29)$$

sağlanır, burada $f_n(\rho)$, (5.26) daki gibi tanımlıdır.

İspat. (E) diferensiyel denklemi $[t_0, \infty)$ üzerinde tanımlı salınımsız bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Teorem 5.1 in ispatında olduğu gibi $y(t) := r(t)(z'(t))^\alpha$ ifadesi (5.18) birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu sonucunu çıkarıyoruz. [78, Lemma 1] deki çalışmasına benzer bir şekilde (5.29) eşitsizliği için sağlandığı gösterilebilir.

Aşağıda, (E) diferensiyel denkleminin salınım kriterini elde etmek için, klasik Riccati dönüşüm tekniğini kullanıyoruz. Özellikle Teorem 5.1 in, uygulanamadığı durumlarda kullanılan kriterleridir.

Teorem 5.2. (5.1) şartı sağlansın. Kabul edelim ki bir $\sigma \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $\sigma'(t) > 0$ olsun. Ayrıca (5.27) şartı bazı $\rho > 0$ için sağlansın. Eğer yeterince büyük bazı $T \geq t_1$ ve $n \geq 0$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\varphi(s)Q(s) - \frac{(\varphi'_+(s))^{\alpha+1} r(\sigma(s))}{(\alpha+1)^{\alpha+1} f_n(\rho) \varphi^\alpha(s)(\sigma'(s))^\alpha} \right) ds = \infty \quad (5.30)$$

olacak şekilde bir $\varphi \in C'([t_0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonu varsa, (E) diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $f_n(\rho)$, (5.26) daki gibi tanımlıdır ve $\varphi_+(t) = \max\{0, \varphi'(t)\}$ dır.

İspat. Kabul edelim ki (E) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ üzerinde salınımsız bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. $t \geq t_1$ için

$$w(t) := \varphi(t)r(t)\left(\frac{z'(t)}{z(\sigma(t))}\right)^\alpha \quad (5.31)$$

olacak şekilde Riccati dönüşümünü tanımlayalım. Burada, $w(t) > 0$ dır. (5.31) fonksiyonun türevi alınır

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\varphi'(t)r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} + \varphi(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha\varphi(t)r(t)\sigma'(t) \frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} \left(\frac{z'(t)}{z(\sigma(t))}\right)^\alpha \\ w'(t) &= \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \frac{\varphi(t)r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))} + \varphi(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(\sigma(t))} - \alpha\varphi(t)r(t)\sigma'(t) \frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} \left(\frac{z'(t)}{z(\sigma(t))}\right)^\alpha \end{aligned}$$

veya $w(t)$ tanımından

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} w(t) + \varphi(t) \frac{(\sigma(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(\sigma(t))} \\ &\quad - \alpha\varphi(t)\sigma'(t)r(t) \left(\frac{z'(t)}{z(\sigma(t))}\right)^\alpha \frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir. Lemma 5.3 ten görülür ki $t \geq T$ için

$$\frac{z'(\sigma(t))}{z'(t)} \geq \left(\frac{f_n(\rho)r(t)}{r(\sigma(t))}\right)^{1/\alpha} \quad (5.33)$$

olacak şekilde yeterince büyük bir $T \geq t_1$ vardır. (5.11) ve (5.33), (5.31) ve (5.32) de uygulanarak ve $\varphi_+(t) = \max\{0, \varphi'(t)\}$ olduğundan,

$$w'(t) \leq \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} w(t) + \varphi(t) \frac{Q(t)z^\alpha(\sigma(t))}{z^\alpha(\sigma(t))} \\ - \alpha \frac{\varphi(t)r(t)\sigma'(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(\sigma(t))\varphi^{1/\alpha}} \frac{\varphi^{1/\alpha}f_n^{1/\alpha}(\rho)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{r^{1/\alpha}(\sigma(t))}$$

veya

$$w'(t) \leq -\varphi(t)Q(t) + \frac{\varphi'_+(t)}{\varphi(t)} w(t) \\ - \alpha \frac{f_n^{\frac{1}{\alpha}}(\rho)\sigma'(t)}{(\varphi(t)r(\sigma(t)))^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \quad (5.34)$$

olur. (5.8) den,

$$A := \frac{\varphi'_+(t)}{\varphi(t)} \quad \text{ve} \quad B := \frac{\alpha f_n^{1/\alpha}(\rho)\sigma'(t)}{(\varphi(t)r(\sigma(t)))^{1/\alpha}}$$

alalım. Lemma 5.2 den,

$$\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\varphi'_+(t))^{\alpha+1}}{(\varphi(t))^{\alpha+1}} \frac{\varphi(t)r(\sigma(t))}{\alpha^\alpha f_n(\rho)(\sigma'(t))^\alpha} = \frac{\varphi'_+(t)^{\alpha+1}r(\sigma(t))}{(\alpha+1)^{\alpha+1}f_n(\rho)\varphi^\alpha(t)(\sigma'(t))^\alpha}$$

olur. Ve yukarıdaki ifade(5.34) te yerine yazılırsa,

$$w'(t) \leq -\varphi(t)Q(t) + \frac{(\varphi'_+(t))^{\alpha+1} r(\sigma(t))}{(\alpha+1)^{\alpha+1}f_n(\rho)\varphi^\alpha(\sigma'(t))^\alpha} \quad (5.35)$$

dir. (5.35) eşitsizliği T den t ye integre edilirse,

$$\int_T^t w'(t) \leq \int_T^t \left(-\varphi(s)Q(s) + \frac{(\varphi'_+(s))^{\alpha+1} r(\sigma(s))}{(\alpha+1)^{\alpha+1}f_n(\rho)\varphi^\alpha(s)(\sigma'(s))^\alpha} \right) ds$$

veya

$$\int_T^t \left(\varphi(s)Q(s) + \frac{(\varphi'_+(s))^{\alpha+1} r(\sigma(s))}{(\alpha+1)^{\alpha+1} f_n(\rho) \varphi^\alpha(s) (\sigma'(s))^\alpha} \right) ds \leq w(T) - w(t)$$

veya

$$\int_T^t \left(\varphi(s)Q(s) + \frac{(\varphi'_+(s))^{\alpha+1} r(\sigma(s))}{(\alpha+1)^{\alpha+1} f_n(\rho) \varphi^\alpha(s) (\sigma'(s))^\alpha} \right) ds \leq w(T)$$

olur. Bu durum (5.30) kabulü ile çelişir. Ve ispat tamamlanır.

Uyarı 5.1. Teorem 5.2 de (5.11) şartındaki $f_n(\rho)$, $n \geq 0$ için verilmiştir. [25, 42, 47, 58, 61- 63, 71, 74] çalışmalarının hepsinde elde edilen sonuçlar $n = 0$ için verilmiştir. Dolayısıyla $n > 0$ için verilen sonuçlar diğer sonuçların iyileştirilmiş halidir.

Ayrıca Teorem 5.2 deki (5.30) kabulünde $\varphi(t) = R^\alpha(\sigma(t))$ alındığında, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2. (5.1) şartı sağlansın ve $\sigma \in C'([t_0, \infty), IR)$ ve $\sigma'(t) > 0$ ve (5.27) şartının bazı $\rho > 0$ için sağlandığını kabul edelim. Eğer bazı yeterince büyük $T \geq t_1$ ve $n \geq 0$ için,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(R^\alpha(\sigma(s)) Q(s) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\sigma'(s)}{f_n(\rho) R(\sigma(s)) r^{1/\alpha}(\sigma(s))} \right) ds = \infty \quad (5.36)$$

ise, (E) diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $f_n(\rho)$, (5.26) daki gibi tanımlıdır.

Örnek 5.2. Örnek 5.1 deki gibi E_x diferensiyel deklemini göz önüne alalım. (C_1) de $\rho \leq 1/e$ olduğu kabul edilirse, bu takdirde (5.26) daki gibi tanımlanan $\{f_n(\rho)\}_{n=0}^\infty$ dizisi (5.28) deki gibi sonlu limite sahiptir. Ki bu

$$f(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\rho) = -\frac{w(-\rho)}{\rho}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada w standart olarak Lambert fonksiyonunun ana dalını gösterir [79]. Bu takdirde Sonuç 5.2 den eğer

$$(1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha f(\rho) > \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1} \quad (C_2)$$

ise, (E_x) diferensiyel denklemi salınımlıdır. Yukarıdaki kriterin önemini vurgulamak için, belirtelim ki Xu ve Meng [25] çalışmasında (5.5) şartının bir uygulaması olarak

$$(1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha > \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1} \quad (C_2')$$

şartı altında (E_x) diferensiyel denkleminin salınımını garantilediğini gösterir. (E_x) diferensiyel denkleminin özel bir durumu olan,

$$(x'(t))^3)' + \frac{0.3}{t^4} x^3 (0.9t) = 0 \quad (5.37)$$

diferensiyel denklemi için (C_2) şartı $3,5876 > 0,3164$ şeklini alır, ki bu da (5.37) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu gösterir. Bununla birlikte, (C_2') şartının birinci yanı $0,2187$ olur ki buda (C_2') şartının (5.37) diferensiyel denklemi için sağlanmadığını gösterir. Ayrıca Teorem 5.1 den elde edilen şartın (5.37) diferensiyel denkleminin uygulanamayacağı görülebilir.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 5.2 ye alternatif olarak verilebilir.

Teorem 5.3. (5.1) şartı sağlansın ve yeterince büyük bir $t_1 \leq T$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left(\psi(s)Q(s)\hat{R}(s) - \frac{(\psi'_+(s))^{\alpha+1} r(s)}{(\alpha + 1)^{\alpha+1} \psi^\alpha(s)} \right) ds = \infty \quad (5.38)$$

olacak şekilde bir $\psi \in C'([t_0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu takdirde (E) diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $\psi'_+(t) = \max\{0, \psi'(t)\}$ dır.

İspat. Kabul edelim ki (E) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ üzerinde salınımsız bir $x(t)$ çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın, $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. $t \geq t_1$ için

$$w(t) := \psi(t)r(t) \left(\frac{z'(t)}{z(t)} \right)^\alpha \quad (5.39)$$

olacak şekilde bir Riccati dönüşümünü tanımlayalım. Bu takdirde $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ dır. w nin türevi alınır

$$w'(t) = \psi'(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{\psi(t)(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \frac{\alpha\psi(t)r(t)z'(t)^\alpha z'(t)}{z^{\alpha+1}(t)}$$

ve düzenlenirse,

$$w'(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \frac{\psi(t)r(t)(z'(t))^\alpha}{z^\alpha(t)} + \frac{\psi(t)(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \frac{\alpha\psi(t)r(t)z'(t)^\alpha z'(t)}{z^{\alpha+1}(t)}$$

veya

$$w'(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} w(t) + \frac{\psi(t)(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha(t)} - \alpha\psi(t)r(t)\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{\alpha+1} \quad (5.40)$$

elde edilir. Teorem 5.1 in ispatında olduğu gibi (5.16) elde edilir, yani

$$z(t) \geq \hat{R}(t) r^{1/\alpha} z'(t)$$

veya

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \leq \frac{1}{\hat{R}(t)r^{1/\alpha}(t)}$$

şeklindedir. İkinci eşitsizlik $\sigma(t)$ den t ye integre edilirse,

$$\int_{\sigma(t)}^t \frac{z'(s)}{z(s)} ds \leq \int_{\sigma(t)}^t \frac{1}{\hat{R}(s)r^{1/\alpha}(s)} ds$$

veya

$$\int_{\sigma(t)}^t \ln z(s) ds \leq \int_{\sigma(t)}^t \frac{1}{\hat{R}(s)r^{1/\alpha}(s)} ds$$

olur. Ve buradan

$$\frac{z(\sigma(t))}{z(t)} \geq \exp\left(-\int_{\sigma(t)}^t \frac{ds}{\hat{R}(s)r^{1/\alpha}(s)}\right) \quad (5.41)$$

elde edilir. (5.11) ve (5.41) birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)' }{z^\alpha(t)} &\leq -Q(t)\left(\frac{z(\sigma(t))}{z(t)}\right)^\alpha \\ &\leq -Q(t)\exp\left(-\alpha\int_{\sigma(t)}^t \frac{ds}{\hat{R}(s)r^{1/\alpha}(s)}\right) = -Q(t)R(t) \end{aligned}$$

olur. Böylece (5.39) ve (5.40) ifadelerinden

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq \frac{\psi'_+(t)}{\psi(t)} w(t) - \psi(t)Q(t)\hat{R}(t) \\ &\quad - \frac{-\alpha}{(\psi(t)r(t))^{1/\alpha}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

elde edilir. (5.8) de

$$A := \frac{\psi'_+(t)}{\psi(t)} \quad \text{ve} \quad B := \frac{\alpha}{(\psi(t)r(t))^{1/\alpha}}$$

şeklinde alalım. Lemma 5.2 ve (5.42) den

$$w'(t) \leq -\psi(t)Q(t)\hat{R}(t) + \frac{(\psi'_+(t))^{\alpha+1} r(t)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \psi^\alpha(t)} \quad (5.43)$$

elde edilir. Yeterince büyük $t_1 \leq T$ için T den t ye integre edilirse,

$$\int_T^t w'(s)ds \leq \int_T^t \left(-\psi(s)Q(s)\hat{R}(t) + \frac{(\psi'_+(s))^{\alpha+1} r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \psi^\alpha(s)} \right) ds$$

veya

$$\int_T^t \left(\psi(s)Q(s)\hat{R}(t) - \frac{(\psi'_+(s))^{\alpha+1} r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \psi^\alpha(s)} \right) ds \leq w(T) - w(t)$$

olur. Burada $w(t) > 0$ olduğundan

$$\int_T^t \left(\psi(s)Q(s)\hat{R}(t) - \frac{(\psi'_+(s))^{\alpha+1} r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \psi^\alpha(s)} \right) ds \leq w(T)$$

elde edilir. Bu da (5.38) kabulü ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.3. Örnek 5.1 deki gibi, (E_x) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Teorem 5.3 den eğer

$$(1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^{\alpha\hat{r}} > \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \quad (C_3)$$

ise, E_x diferensiyel denklemi salınımlıdır, burada $\hat{r} := \left(\frac{\alpha}{(\alpha+(1-p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha)} \right)^\alpha$ dır. Erbe vd. [11] çalışmasındaki (5.6) şartının bir uygulaması olarak

$$(1 - p_0)^\alpha q_0 \gamma^\alpha > \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1}$$

şartı altında E_x diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu verir. $\hat{r} < 1$ olduğu görülebilir ve dolayısıyla (C_3) kriteri daha kesin bir sonuç verir.

6. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

6.1. Giriş

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer olmayan nötral diferensiyel denklem sınıfının salınım özellikleri göz önüne alınacaktır. Bu amaçla ikinci mertebeden

$$(r(t) | z'(t) |^{\alpha-1} z'(t))' + \int_a^b q(t, \xi) |x[g(t, \xi)]|^{\alpha-1} x[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) = 0 \quad (6.1)$$

lineer olmayan fonksiyonel diferensiyel denklemi için salınım kriterleri incelenecektir, burada $t \geq t_0 > 0$ ve $\alpha, \alpha \geq 1$ şeklinde bir sabit ve $z := x + p x \circ \tau$ dir. (6.1) diferensiyel denklemi için Tongxing Li vd. [80] tarafından çalışılmış olan makale göz önüne alınacaktır. Bu bölüm boyunca aşağıdaki kabuller mevcut olsun.

(H₁) $I: [t_0, \infty)$, $r, p \in C'(I, \mathbb{R})$, $r(t) > 0$ ve $p(t) \geq 0$ dır.

(H₂) $q \in C(I \times [a, b], [0, \infty))$ ve $q(t, \xi)$ herhangi bir $[t_\mu, \infty) \times [a, b]$ üzerinde belli bir yerden sonra sıfır değildir. $t_\mu \in I$ dır.

(H₃) $g \in C(I \times [a, b], [0, \infty))$, $\xi \in [a, b]$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf g(t, \xi) = \infty$ ve $g(t, a) \leq g(t, \xi)$ dir.

(H₄) $\tau \in C^2(I, \mathbb{R})$, $\tau'(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ ve $g(\tau(t), \xi) = \tau[g(t, \xi)]$.

(H₅) $\sigma \in C([a, b], \mathbb{R})$ azalmayan ve (6.1) diferensiyel denkleminin çözümü için

“Riemann - Stieltjes” kullanılarak alınır.

(6.1) diferensiyel denklemin çözümü ile $t_x \geq t_0$ için $z \in C'([t_x, \infty), IR)$,

$r|z'|^{\alpha-1}z' \in C'([t_x, \infty), IR)$, özelliklerine sahip ve $[t_x, \infty)$ üzerinde (6.1) diferensiyel denklemlerini sağlayan tüm $x \in C([t_x, \infty), IR)$ fonksiyonunu kastediyoruz. (6.1) diferensiyel denkleminin $[t_x, \infty)$ üzerinde mevcut herhangi bir $T \geq t_x$ için $\sup\{|x(t)|: t \geq T\} > 0$ şartını sağlayan x fonksiyonlarını göz önüne alacağız. (6.1) diferensiyel denkleminin bir x çözümü belli bir yerden sonra ne pozitif nede negatif değil ise, salınımlıdır. Aksi takdirde (6.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü salınımsızdır.

İyi bilindiği gibi, elektrik ağları nötral diferensiyel denklemler için çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin anahtarlama devrelerini birbirine bağlamak için bunlar yüksek hızlı bilgisayarlarda iletim hatlarını içeren dağıtılmış çalışmaların incelenmesinde sıklıkla kullanırlar [15]. Bu nedenle, nötral diferensiyel denklemlerin farklı sınıflarına yönelik çözümlerin salınımlı ve salınımlı olmayan davranışlarıyla çok fazla çalışma olmuştur. Burada [29, 30, 43, 51, 81-106] ya kadar olan referanslara bakılabilir. Aşağıda araştırmayı motive eden bazı diferensiyel denklemler verilecektir. Şimdi Li [80] çalışmasının temelini oluşturan bazı çalışmaları verelim. Bunlar arasında Baculikova ve Lackova [82], Dzurina ve Hudakova [88], Li vd. [90, 93] ve Sun vd. [97] referans olarak gösterilebilir. Belirtilen çalışmalarda $0 \leq p(t) < 1$ veya $p(t) > 1$ olmak üzere

$$(r(t) | z'(t) |^{\alpha-1} z'(t))' + q(t) | x(\delta(t)) |^{\alpha-1} x(\delta(t)) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebeden half lineer nötral diferensiyel denklemi için bazı salınım kriterleri elde edilmiştir, burada $z := x + p \circ \tau$ içindir.

Ayrıca Baculikova ve Dzurina [29, 30] ve Li vd. [92] ikinci mertebeden

$$0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty \quad \text{ve} \quad \tau'(t) \geq \tau_0 > 0 \quad (6.2)$$

olmak üzere ikinci mertebeden

$$(r(t)(x(t) + p(t)x[\tau(t)])' + q(t)x[\sigma(t)] = 0$$

nötral diferensiyel denkleminin salınım davranışını araştırdılar. Daha sonra Ye ve Xu [101], Yu ve Fu [102] ikinci mertebeden

$$(x(t) + p(t)x(t - \tau))'' + \int_a^b q(t, \xi)x(g(t, \xi))d\sigma(\xi) = 0$$

nötral diferensiyel denkleminin salınımlarını ele aldılar. Ayrıca $0 \leq p(t) < 1$ kabulü altında Thandapani ve Piramanantham [98], Wang [99], Xu ve Weng [100] ve Zhao ve Meng [105] ikinci mertebeden

$$(r(t)x(t) + p(t)x(t - \tau))' + \int_a^b q(t, \xi)f(x(g(t, \xi)))d\sigma(\xi) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımlarını incelediler.

Belirtelim ki (6.1) diferensiyel denklemi $p(t) \geq 1$ veya $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty$ şartları altında salınım özellikleri ile ilgili kayda değer çok az sonuç vardır. Burada Li ve Thandapani [94], (6.2) şartı ve $\sigma(\xi) = \xi$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} = \infty \quad (6.3)$$

şartları altında (6.1) diferensiyel denkleminin salınım sonuçlarını elde ettiler.

Bu kesimde (6.1) diferensiyel denklemi için çeşitli salınım kriteri oluşturmak için Riccati denklemi tekniği ve bazı eşitsizlikler kullanılacaktır. Ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} = \infty$$

veya

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} < \infty \quad (6.4)$$

şartları altında her fonksiyonel eşitsizliklerin belli bir yerden sonra sağladığı kabul edilecektir. Yani eşitsizliklerin yeterince büyük her t için sağlandığı kabul edilir.

6.2. Temel Sonuçlar

Bu çalışmada kolaylık olması için aşağıdaki kabuller kullanılacaktır. Burada h , ρ ve η daha sonra belirtilecektir.

$$\begin{aligned} Q(t, \xi) &:= \min\{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\}, & d_+(t) &:= \max\{0, d(t)\}, \\ \phi(t) &:= \frac{\alpha p'[h(t)]h'(t)}{p[h(t)]} - \frac{\tau''(t)}{\tau'(t)}, & \zeta(t) &:= \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} + \phi(t) \end{aligned}$$

ve

$$\varphi(t) := \left(\frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)}\right)^{\alpha+1} + \frac{p^\alpha[h(t)](\zeta_+(t))^{\alpha+1}}{\tau'(t)} \quad \text{ve} \quad \delta(t) := \int_{\eta(t)}^{\infty} \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$$

dir.

Teorem 6.1. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_5)$ şartları ve (6.3) şartı sağlansın ve $t \in I$ için $g(t, a) \in C'(I, \mathbb{R})$, $g'(t, a) > 0$, $g(t, a) \leq t$ ve $g(t, a) \leq \tau(t)$ olsun. Ayrıca $t \in I$,

$\xi \in [a, b]$ için $p[g(t, \xi)] \leq p[h(t)]$ olacak şekilde bir reel değerli $h \in C'(I, \mathbb{R})$ fonksiyonu mevcut olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \rho(s) \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{r[g(s, a)]\varphi(s)}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}(g'(s, a))^\alpha} \right] ds = \infty \quad (6.5)$$

olacak şekilde reel değerli bir $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ fonksiyonu var ise, bu takdirde (6.1) diferensiyel denklemi salınımıdır.

İspat. Kabul edelim ki x , (6.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x[\tau(t)] > 0$ ve $x[g(t, \xi)] > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in I$ değeri vardır. Bu takdirde $z(t) > 0$ dır. Yeterince büyük her t için (6.1) diferensiyel denklemi $p^\alpha[h(t)]$ ile çarpılır ve t yerine $\tau(t)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \\ & + \int_a^b q(\tau(t), \xi) \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} |x[g(\tau(t), \xi)]|^{\alpha-1}x[g(\tau(t), \xi)] d\sigma(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (6.1) diferensiyel denklemi ile yukarıdaki eşitsizlik toplanırsa,

$$\begin{aligned} & (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \int_a^b q(t, \xi) x^\alpha[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \\ & + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \\ & + \int_a^b q(\tau(t), \xi) p^\alpha[h(t)] x^\alpha[g(\tau(t), \xi)] d\sigma(\xi) = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \int_a^b q(t, \xi) x^\alpha[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \\ & + \int_a^b q(\tau(t), \xi) p^\alpha[h(t)] x^\alpha[g(\tau(t), \xi)] d\sigma(\xi) \\ & + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \int_a^b \min[q(t, \xi)q(\tau(t), \xi)] x^\alpha [g(t, \xi)] \\
& + p^\alpha [h(t)] x^\alpha [g(\tau(t), \xi)] d\sigma(\xi) \\
& + \frac{p^\alpha [h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \leq 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \int_a^b Q(t, \xi) x^\alpha [g(t, \xi)] + p^\alpha [h(t)] x^\alpha [g(\tau(t), \xi)] d\sigma(\xi) \\
& + \frac{p^\alpha [h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \leq 0
\end{aligned}$$

olur. [30] numaralı makaledeki Lemma 1 den $A \geq 0$, $B \geq 0$ ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere

$$(A + B)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(A^\alpha + B^\alpha)$$

eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \int_a^b Q(t, \xi) \frac{x^\alpha [g(t, \xi)] + p^\alpha [h(t)] x^\alpha [g(\tau(t), \xi)]}{2^{\alpha-1}} d\sigma(\xi) \\
& + \frac{p^\alpha [h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \leq 0
\end{aligned}$$

dir. z nin tanımından, $[g(\tau(t), \xi)] = \tau[g(t, \xi)]$ ve $p[g(t, \xi)] \leq p[h(t)]$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(t, \xi) x^\alpha [g(t, \xi)] + p^\alpha [h(t)] x^\alpha [g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \\
& + \frac{p^\alpha [h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \leq 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& (r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(t, \xi) z^\alpha[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \\
& + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^{\alpha-1}z'[\tau(t)])' \leq 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

elde edilir. (6.1) diferensiyel denkleminde, $t \geq t_1$ için

$$(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t))' \leq 0 \tag{6.7}$$

olur. Böylece $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'$ artmayandır. Şimdi z nin işareti için iki durum vardır.

i) Belli bir yerden sonra $z'(t) < 0$

ii) Belli bir yerden sonra $z'(t) > 0$ dır.

i) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ olsun. Bu takdirde (6.7) eşitsizliğinde $t_2 \leq t$ için

$$r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t) \leq (r(t_2)|z'(t_2)|^{\alpha-1}z'(t_2)) < 0$$

ve Mutlak Değer tanımından

$$r(t)(-z'(t))^{\alpha-1}z'(t) \leq (r(t_2)(-z'(t_2))^{\alpha-1}z'(t_2))$$

yazılabilir ve aynı zamanda eşitsizliğin her iki tarafı (-1) ile bir çarpılır bir bölünürse,

$$-r(t)(-z'(t))^{\alpha-1}z'(t) \leq -(r(t_2)(-z'(t_2))^{\alpha-1}z'(t_2))$$

şeklinde olur. Buradan

$$-r(t)(-z'(t))^\alpha \leq -(r(t_2)(-z'(t_2))^\alpha$$

dır ve her iki tarafı (-1) ile çarpılırsa,

$$r(t)(-z'(t))^\alpha \geq (r(t_2)(-z'(t_2))^\alpha$$

veya

$$(-z'(t))^\alpha \geq \frac{r(t_2)}{r(t)} (-z'(t_2))^\alpha$$

bulunur. Eşitsizliğin $\frac{1}{\alpha}$. inci kuvveti alınırrsa,

$$-z'(t) \geq \left(\frac{r(t_2)}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (-z'(t_2))$$

veya

$$-z'(t) \geq r^{\frac{1}{\alpha}}(t_2) |z'(t_2)| r(t)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Ve eşitsizlik t_2 den t ye integre edilirse,

$$-z(t) + z(t_2) \geq r(t_2)^{\frac{1}{\alpha}} |z'(t_2)| \int_{t_2}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$$

veya

$$z(t) \leq z(t_2) - r^{\frac{1}{\alpha}}(t_2) |z'(t_2)| \int_{t_2}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) ds$$

elde edilir. Bu takdirde (6.3) şartından $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$ olur. Böylece $z(t)$ nin pozitif olmasıyla çelişki elde ederiz.

(ii) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ olsun. Bu takdirde (6.6) eşitsizliğinden ve $g(t, \xi) \geq g(t, a)$ şartından,

$$\begin{aligned} & (r(t)(z'(t))^\alpha)' + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)]|z'[\tau(t)]|^\alpha)' + \frac{1}{2^{\alpha-1}} z^\alpha[g(t, a)] \int_a^b Q(t, \xi) d\sigma(\xi) \\ & \leq 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

olur. Her $t \geq t_2$ için bir Riccati dönüşümü

$$w(t) := \rho(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{(z[g(t, a)])^\alpha} \tag{6.9}$$

tanımlayalım. Bu takdirde $w(t) > 0$ dır. (6.7) eşitsizliğinden $(r(t)(z'(t))^\alpha)' \leq 0$ dır. Dolayısıyla $r(t)(z'(t))^\alpha$ artmayandır. Ayrıca (6.7) ve $g(t, a) \leq t$ olduğundan,

$$(r[g(t, a)])(z'[g(t, a)])^\alpha \geq r(t)(z'(t))^\alpha$$

yazılabilir. Buradan eşitsizliğin $\frac{1}{\alpha}$. inci kuvveti alınır,

$$z'[g(t, a)] \geq \frac{r(t)^{\frac{1}{\alpha}}}{r[g(t, a)]^{\frac{1}{\alpha}}} z'(t) \quad (6.10)$$

olduğundan yazılır. (6.9) ifadesinin türevi,

$$\begin{aligned} w'(t) = & \rho'(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha}{z[g(t, a)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha'}{z[g(t, a)]^\alpha} \\ & - \alpha \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha z[g(t, a)]^{\alpha-1} z'[g(t, a)] g'(t, a)}{(z[g(t, a)])^{2\alpha}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklindedir. Böylece (6.10) eşitsizliğinden

$$w'(t) \leq \rho'(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha}{z[g(t, a)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha'}{z[g(t, a)]^\alpha} - \alpha \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha z[g(t, a)]^{\alpha-1} r(t)^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) g'(t, a)}{(z[g(t, a)])^{2\alpha} (r[g(t, a)])^{\frac{1}{\alpha}}}$$

olur. Ve düzenlenirse,

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \frac{\rho(t)(r(t) z'(t))^\alpha}{z[g(t, a)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha'}{z[g(t, a)]^\alpha} - \frac{\alpha w g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) (r[g(t, a)])^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r(t)^{\frac{1}{\alpha}} z'(t)}{z[g(t, a)]}$$

elde edilir. Böylece (6.9), (6.10) ve (6.11) den görülür ki,

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) + \rho(t) \frac{(r(t) z'(t))^\alpha'}{z[g(t, a)]^\alpha} - \frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) (r[g(t, a)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \quad (6.12)$$

dir. Benzer şekilde $t \geq t_2$ için diğer bir

$$V(t) := \rho(t) \frac{r[\tau(t)] [z'(\tau(t))]^\alpha}{(z[g(t, a)])^\alpha} \quad (6.13)$$

olacak şekilde Riccati dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $V(t) > 0$ dır. (6.7) eşitsizliği ve $g(t, a) \leq \tau(t)$ den

$$r[g(t, a)](z'[g(t, a)])^\alpha \geq (r[\tau(t)])(z'[\tau(t)])^\alpha$$

veya

$$z'[g(t, a)] \geq (r[\tau(t)]) / r[g(t, a)]^{\frac{1}{\alpha}} z'[\tau(t)] \quad (6.14)$$

dır. (6.13) diferensiyel denkleminin türevi,

$$\begin{aligned} V'(t) = & \rho'(t) \frac{r[\tau(t)] z'[\tau(t)]^\alpha}{z[g(t, a)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)')}{z[g(t, a)]^\alpha} \\ & - \alpha \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)^\alpha z[g(t, a)]^{\alpha-1} z'[g(t, a)] g'(t, a)}{(z[g(t, a)]^{2\alpha}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

elde edilir. Böylece (6.13), (6.14) ve (6.15) ifadesinden görülür ki,

$$\begin{aligned} V'(t) \leq & \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] z'[\tau(t)]^\alpha)'}{z[g(t, a)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)')}{z[g(t, a)]^\alpha} \\ & - \frac{\alpha \rho(t) (r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)^\alpha z[g(t, a)]^{\alpha-1} (r[\tau(t)]^{\frac{1}{\alpha}} z'[\tau(t)] g'(t, a) \frac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)})}{(z[g(t, a)]^{2\alpha} (r[g(t, a)]^{\frac{1}{\alpha}})} \end{aligned}$$

veya

$$V'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)')}{z[g(t, a)]^\alpha} - \frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \quad (6.16)$$

dır. Buradan (6.12) ve (6.16) eşitsizlikleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} w'(t) + V'(t) \leq & \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) + \frac{\rho(t) (r(t) z'(t)^\alpha)'}{z[g(t, a)]^\alpha} - \frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) (r[g(t, a)]^{\frac{1}{\alpha}})} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) \\ & + \frac{\rho(t) (r[\tau(t)] (z'[\tau(t)]^\alpha)')}{z[g(t, a)]^\alpha} - \frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) (r[g(t, a)]^{\frac{1}{\alpha}})} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitsizlik,

$$w'(t) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) + \rho(t) \frac{(r(t)z'(t))^\alpha)' + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z[g(t,a)]^\alpha}$$

$$- \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)(r[g(t,a)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)(r[g(t,a)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

olur. Böylece (6.8) eşitsizliğinden

$$w'(t) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V'(t)$$

$$\leq \frac{-\rho(t)}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(t, \xi) d\sigma(\xi) + \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)(r[g(t,a)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

$$+ \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

yazılabilir. Burada $\int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} V'(s) ds$ kısmi integral uygulanırsa,

$$w'(t) + \int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} V'(s) ds$$

$$- \int_{t_2}^t \left[V(s) \left(\frac{\alpha p^{\alpha-1}[h(s)] p'(s) h'(s)}{\tau'(s)} - \frac{p^\alpha[h(s)] \tau''(s)}{(\tau'(s))^2} \right) \right] d\sigma(\xi)$$

$$\leq \frac{-\rho(t)}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(t, \xi) d\sigma(\xi) + \frac{\rho_+'(t) w(t)}{\rho(t)} - \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)(r[g(t,a)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

$$+ \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)(r[g(t,a)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

ve yukarıdaki eşitsizlik t_2 den t ye integre edilirse,

$$w(t) - w(t_2) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t_2)]}{\tau'(t_2)} V(t_2)$$

$$\leq - \int_{t_2}^t \frac{\rho(s)}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi) ds + \int_{t_2}^t \left[\frac{\rho_+'(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{\alpha g'(s,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(s)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(s,a)]} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) \right] ds$$

$$+ \int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} \left\{ \left[\frac{\rho_+'(s)}{\rho(s)} + \phi(s) \right]_+ V(s) - \frac{\alpha g'(s, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(s, a)]} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) \right\} ds \quad (6.17)$$

dır. $A \geq 0$, $B \geq 0$ için

$$A := \left[\frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t)$$

ve

$$B = \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} - A^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (6.18)$$

yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha g'(s, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(s, a)]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t) \left[\left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha g'(s, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(s, a)]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t) \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right] \\ &= \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) \end{aligned}$$

olur. Ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\alpha g'(t, a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t, a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[g(t,a)](\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{(\rho(t)g'(t,a))^\alpha}$$

dir. Dolayısıyla (6.18) eşitsizliği

$$\frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[g(t,a)](\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{(\rho(t)g'(t,a))^\alpha} \quad (i)$$

şeklini alır. Diğer taraftan

$$A := \left[\frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} V(t)$$

ve

$$B = \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha$$

şeklinde tanımlayalım. (6,18) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} V(t) \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right] \\ &= \zeta_+(t) V(t) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left[\left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[g(t,a)](\zeta_+(t))^{\alpha+1} \rho(t)}{(g'(t,a))^\alpha}$$

bulunur. Bu takdirde (6.18) eşitsizliği

$$\zeta_+(t)V(t) - \frac{\alpha g'(t,a)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}[g(t,a)]} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[g(t,a)](\zeta_+(t))^{\alpha+1}\rho(t)}{(g'(t,a))^\alpha} \quad (\text{ii})$$

elde edilir. Böylece (i) ve (ii) eşitsizlikleri (6.17) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} w(t) - w(t_2) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t_2)]}{\tau'(t_2)} V(t_2) \\ \leq - \int_{t_2}^t \rho(s) \left\{ \frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} \right. \\ \left. - \frac{r[g(s,a)]}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(g'(s,a))^\alpha} \left[\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)} \right)^{\alpha+1} + \frac{\rho^\alpha[h(s)](\zeta_+(s))^{\alpha+1}}{\tau'(s)} \right] \right\} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, (6.5) kabulü ile çelişir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Kabul edelim ki ρ_0 ve τ_0 sabit olmak üzere (6.2) şartı sağlansın. Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 6.2. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_5)$ şartları ve (6.2), (6.3) şartı sağlansın. Ayrıca $t \in I$ için $g(t, a) \in C'(I, IR)$, $g'(t,a) > 0$, $g(t, a) \leq t$ ve $g(t, a) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\rho(s) \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[g(s,a)](\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)g'(s,a))^\alpha} \right] ds \\ = \infty \end{aligned} \quad (6.19)$$

olacak şekilde bir reel değerli $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ fonksiyonu var ise, bu takdirde (6.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki (6.1) diferensiyel denkleminin belli bir yerden sonra pozitif bir çözümü olsun. Teorem 6.1 in ispatında olduğu gibi her yeterince büyük t için $z'(t) > 0$, (6.7) ve (6.8) eşitsizlikleri elde edilir. (6.2), (6.7) ve (6.8) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (r(t)(z'(t))^\alpha)' + \frac{p_0^\alpha}{\tau_0} (r[\tau(t)](z'[\tau(t)])^\alpha)' + \frac{1}{2^{\alpha-1}} z^\alpha[g(t, a)] \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi) \\
& \leq 0
\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 6. 1 deki ile benzer olduğu için verilmeyecektir.

Teorem 6.3. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_5)$ şartları ve (6.3) şartı mevcut olsun ve $t \in I$ için $\tau(t) \leq t$ ve $g(t, a) \geq \tau(t)$ olsun. Aynı zamanda kabul edelim ki $p[g(t, \xi)] \leq p[h(t)]$ olacak şekilde $h \in C'(I, R)$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \rho(s) \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{r[\tau(s)]\varphi(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\tau'(s))^\alpha} \right] ds = \infty \tag{6.21}$$

olacak şekilde bir reel değerli $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ fonksiyonu var ise, bu takdirde (6.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki x , (6.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x[\tau(t)] > 0$ ve $x[g(t, \xi)] > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in I$ mevcut olsun. Teorem 6. 1 in ispatında olduğu gibi (6.7) ve (6.8) eşitsizlikleri elde edilir. (6.7) den $r|z'|^{\alpha-1}z'$ artmayandır. Şimdi z' nin işareti için iki durum var.

i) Belli bir yerden sonra $z' < 0$

veya

ii) Belli bir yerden sonra $z' > 0$ dır.

i) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ olsun. Bu takdirde Teorem (6.1) in ispatına benzer şekilde bir çelişki elde edilir.

ii) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z' > 0$ olsun. $t \geq t_2$ için

$$w(t) := \rho(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{[z(\tau(t))]^\alpha} \tag{6.22}$$

şeklinde bir Riccati dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $w(t) > 0$ dır. $\tau(t) \leq t$ ve (6.7) eşitsizliğinden,

$$(z'[\tau(t)])^\alpha r(\tau(t)) \leq (z'(t))^\alpha r(t)$$

veya

$$z'[\tau(t)] \leq \left[\frac{r(t)}{r[\tau(t)]} \right]^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \quad (6.23)$$

elde edilir. (6.22) nin türevi,

$$w'(t) = \rho'(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)}{z[\tau(t)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z[\tau(t)]^\alpha} - \alpha \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha z[\tau(t)]^{\alpha-1} z'[\tau(t)] \tau'(t))}{(z[\tau(t)]^{2\alpha})} \quad (6.24)$$

olduğu görülür. Böylece (6.23) den,

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq \rho'(t) \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z[\tau(t)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z[\tau(t)]^\alpha} \\ &\quad - \alpha \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha z[\tau(t)]^{\alpha-1} (r(t))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \tau'(t))}{(z[\tau(t)]^\alpha (r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}})} \end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq \rho(t) \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \frac{r(t)(z'(t))^\alpha}{z[\tau(t)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z[\tau(t)]^\alpha} \\ &\quad - \alpha \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha z[\tau(t)]^{\alpha-1} (r(t))^{\frac{1}{\alpha}} z'(t) \tau'(t))}{(z[\tau(t)]^\alpha (r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}})} \frac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada w nin tanımından,

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) + \rho(t) \frac{(r(t)(z'(t))^\alpha)'}{z[\tau(t)]^\alpha} - \frac{\alpha \tau'(t)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t) r(\tau(t))^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \quad (6.25)$$

elde edilir. Benzer şekilde $t \geq t_2$ için diğer bir

$$V(t) := \rho(t) \frac{r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha}{(z[\tau(t)]^\alpha)} \quad (6.26)$$

şeklinde alalım. Bu takdirde $V(t) > 0$ dır. (6.26) nin türevi alınırsa,

$$V'(t) = \rho'(t) \frac{r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha}{z[\tau(t)]^\alpha} + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z[\tau(t)]^\alpha} - \alpha \rho(t) \frac{r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha z([\tau(t)])^{\alpha-1} z'[\tau(t)] \tau'(t)}{(z[\tau(t)])^{2\alpha}} \quad (6.27)$$

şeklinde bulunur. Bu türev düzenlenirse,

$$V'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \rho(t) \frac{r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha}{z^\alpha[\tau(t)]} + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z^\alpha[\tau(t)]} - \alpha \rho(t) \frac{r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha z([\tau(t)])^{\alpha-1} z'[\tau(t)] \tau'(t)}{(z[\tau(t)])^{2\alpha}} \frac{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)}$$

olmak üzere V nin tanımı ve (6.23) kullanılarak

$$V'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) + \rho(t) \frac{(r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha)'}{(z[\tau(t)])^\alpha} - \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t) r^\alpha[\tau(t)])} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \quad (6.28)$$

şeklinde yazılabilir. (6.25) ve (6.28) birlikte göz önüne alınırsa,

$$w'(t) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V'(t) \leq \rho(t) \frac{\left[(r(t) (z'(t))^\alpha)' + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} (r[\tau(t)] (z'[\tau(t)])^\alpha)' \right]}{z[\tau(t)]^\alpha} + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t) r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t) r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

elde edilir. (6.8) ve $g(t,a) \geq \tau(t)$ den,

$$\begin{aligned}
& w'(t) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V'(t) \\
& \leq -\frac{\rho(t)}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(\xi) d\sigma(\xi) + \frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \\
& + \frac{p^\alpha[h(t)] \rho'(t)}{\tau'(t) \rho(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlik t_2 den t ye integre edilir ve $\int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} V'(s) ds$ için kısmi integral uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& w(t) - w(t_2) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t_2)]}{\tau'(t_2)} V(t_2) \\
& \leq - \int_{t_2}^t \frac{\rho(s)}{2^{\alpha-1}} \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi) ds \\
& + \int_{t_2}^t \left[\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)} w(s) - \frac{\alpha \tau'(s)}{(\rho(s)r[\tau(s)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) \right] ds \\
& + \int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} \left\{ \left[\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)} + \phi(s) \right]_+ V(s) \right. \\
& \left. - \frac{\alpha \tau'(s)}{(\rho(s)r[\tau(s)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) \right\} ds \tag{6.29}
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$A := \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t)$$

ve

$$B = \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha$$

şeklinde tanımlansın. (6.18) eşitsizliğinde

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t) \left[\left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) AB^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t) \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left[\left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[\tau(t)](\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho(t)\tau'(t)^{\alpha}}$$

olmak üzere bu eşitsizlik

$$\frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[\tau(t)](\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho(t)(\tau'(t))^{\alpha}}$$

şeklinde elde edilir. Ve diğer taraftan

$$A := \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} V(t)$$

ve

$$B = \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha}$$

şeklinde tanımlansın. (6.18) de

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} V(t) \left[\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} V(t) \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right] \\ &= \zeta_+(t) V(t) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \zeta_+(t) \left[\frac{\alpha \tau'(t)}{[(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha \frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[\tau(t)](\zeta_+(t))^{\alpha+1} \rho(t)}{(\tau'(t))^{\alpha}}$$

dır. (6.18) den,

$$\zeta_+(t) V(t) - \frac{\alpha \tau'(t)}{(\rho(t)r[\tau(t)])^{\frac{1}{\alpha}}} V^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \leq \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{r[\tau(t)](\zeta_+(t))^{\alpha+1} \rho(t)}{(\tau'(t))^{\alpha}}$$

elde edilir. Böylece (6.29) dan,

$$\begin{aligned}
& w(t) - w(t_2) + \frac{p^\alpha[h(t)]}{\tau'(t)} V(t) - \frac{p^\alpha[h(t_2)]}{\tau'(t_2)} V(t_2) \\
& \leq - \int_{t_2}^t \rho(s) \left\{ \frac{\int_a^b Q(s, \xi) d(\sigma(\xi))}{2^{\alpha-1}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{r[\tau(s)]}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\tau'(s))^\alpha} \left[\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)} \right)^{\alpha+1} + \frac{p^\alpha[h(s)](\zeta_+(s))^{\alpha+1}}{\tau'(s)} \right] \right\} ds \\
& \leq \int_{t_2}^t \rho(s) \left\{ \frac{\int_a^b Q(s, \xi) d(\sigma(\xi))}{2^{\alpha-1}} - \frac{r[\tau(s)]}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\tau'(s))^\alpha} \varphi(s) \right\} ds
\end{aligned}$$

olur. Bu ise, (6.21) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Ayrıca kabul edelim ki ρ_0 ve τ_0 sabit olmak üzere (6.2) şartı sağlansın. Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 6.4. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_5)$ şartları ve (6.3) şartı mevcut olsun. Ayrıca $t \in I$ için $\tau(t) \leq t$ ve $g(t, a) \geq \tau(t)$ sağlansın. Eğer

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\rho(s) \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}} \left(1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \right) \frac{r[\tau(s)] (\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\tau_0 \rho(s))^\alpha} \right] ds \\
& = \infty
\end{aligned} \tag{6.30}$$

olacak şekilde bir $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ reel değerli bir fonksiyon varsa, (6.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki (6.1) diferensiyel denkleminin bir x pozitif çözümü olsun. Teorem 6. 1 in ispatında olduğu gibi $z'(t) > 0$ dır. Yeterince büyük t için (6.7) ve (6.8) mevcut olsun. Daha sonra (6.2), (6.3) ve (6.4) den (6.20) elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 6. 3 teki gibi olduğundan verilmemiştir.

Aşağıda (6.4) şartının mevcut olduğu durumlarda (6.1) diferensiyel denklemi için bazı salınım kriterleri verilecektir.

Teorem 6.5. Kabul edelim ki, $(H_1) - (H_5)$ şartları (6.2) ve (6.4) şartı sağlansın. Ayrıca $t \in I$ için $g(t, a) \in C'(I, IR)$, $g'(t, a) > 0$, $g(t, a) \leq \tau(t) \leq t$ ve $\xi \in [a, b]$ için

$g(t, \xi) \leq g(t, b)$ olsun. Ve kabul edelim ki (6.19) şartı sağlanacak şekilde bir

$\rho \in C'(I, (0, \infty))$ reel değerli fonksiyonu mevcut olsun. Eğer $t \in I$ için $\eta(t) \geq t$, $\eta(t) \geq g(t, b)$, $\eta'(t) > 0$ ve olacak şekilde bir reel değerli $\eta \in C'(I, R)$ fonksiyonu mevcut ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} \delta^\alpha(s) - \left(1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \frac{\eta'(s)}{\delta(s)r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]}\right] ds = \infty \quad (6.31)$$

ise, bu takdirde (6.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki x , (6.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın her $t \geq t_1$ ve $\xi \in [a, b]$ için $x(t) > 0$, $x[\tau(t)] > 0$ ve $x[g(t, \xi)] > 0$ olacak şekilde bir

$t_1 \in I$ mevcut olsun. Bu takdirde $z(t) > 0$ dır. Teorem 6.1 in ispatında olduğu gibi (6.6) elde edilir. (6.1) diferensiyel denkleminde (6.7) elde edilir. Böylece $r|z'|^{\alpha-1}z'$ artmayandır. Şimdi z' nin işareti için iki durumu göz önüne alalım.

(i) Belli bir yerden sonra $z' > 0$

veya

(ii) Belli bir yerden sonra $z' < 0$ dır.

(i) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ olsun. Bu takdirde (6.7) eşitsizliğinde $t \leq t_2$ için

$$r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t) \leq (r(t_2)|z'(t_2)|^{\alpha-1}z'(t_2)) < 0$$

ve Mutlak Değer tanımından

$$r(t)(z'(t))^{\alpha-1}z'(t) \leq (r(t_2)(z'(t_2))^{\alpha-1}z'(t_2))$$

yazılabilir. Ve

$$r(t)(z'(t))^\alpha \leq (r(t_2)(z'(t_2))^\alpha$$

şeklinde olur. Veya

$$(z'(t))^\alpha \leq \frac{r(t_2)}{r(t)} (z'(t_2))^\alpha$$

dır. Eşitsizliğin $\frac{1}{\alpha}$. ncı kuvveti alınır,

$$z'(t) \leq \left(\frac{r(t_2)}{r(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (z'(t_2))$$

veya

$$z'(t) \leq r^{\frac{1}{\alpha}}(t_2) |z'(t_2)| r(t)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Ve eşitsizlik t_1 den t ye integre edilirse,

$$z(t) - z(t_1) \geq r(t_2)^{\frac{1}{\alpha}} |z'(t_2)| \int_{t_1}^t r(s)^{-\frac{1}{\alpha}} ds$$

veya

$$z(t) \leq z(t_1) - r^{\frac{1}{\alpha}}(t_2) |z'(t_2)| \int_{t_1}^t r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds$$

elde edilir. Bu takdirde (6.3) şartından $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \infty$ olur. Bu da $z(t)$ nin pozitif olmasıyla çelişir. Ve ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki $t \geq t_2 \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ olsun. (6.6), (6.7) ve $g(t, \zeta) \leq g(t, b)$ den

$$\begin{aligned}
& (-r(t)(-z'(t)^\alpha)' + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0}(-r[\tau(t)](-z'[\tau(t)])^\alpha)' \\
& + \frac{1}{2^{\alpha-1}}z^\alpha[g(t,b)] \int_a^b Q(t,\xi)d\sigma(\xi) \leq 0
\end{aligned} \tag{6.32}$$

elde edilir. Buradan $t \geq t_2$ için $r(-z')^\alpha$ azalmayıdır. Yani (2.3) şartında $z'(t) < 0$ olduğu göz önüne alınarak $t \geq t_2$ için

$$[(-r(t) - z'(t))^{\alpha-1}z'(t)]' \leq 0$$

yazılabilir. Buradan

$$- [(-r(t) - z'(t))^{\alpha-1}z'(t)]' \leq 0$$

olmak üzere

$$[r(t)(-z'(t))^\alpha]' \geq 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $t \geq t_2$ için

$$U(t) := - \frac{r(t)(-z'(t))^\alpha}{z^\alpha[\eta(t)]} \tag{6.33}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $U(t) < 0$ dır. Belirtelim ki $r(-z')^\alpha$ azalmayan olduğundan $s \geq t \geq t_2$ için

$$(-r(t))(-z'(t))^\alpha \leq (-r(s))(-z'(s))^\alpha$$

ve buradan $s \geq t \geq t_2$ için

$$z'(s) \leq \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} z'(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\eta(t)$ den l ye integre edilirse,

$$z(l) \leq z[\eta(t)] + r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \int_{\eta(t)}^l \frac{ds}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin $l \rightarrow \infty$ alınırsa,

$$0 \leq z[\eta(t)] + r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t) \delta(t)$$

dır. Yani,

$$-\delta(t) \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z'(t)}{z[\eta(t)]} \leq 1$$

veya

$$-\delta^\alpha(t) \frac{r(t) [z'(t)]^\alpha}{(z[\eta(t)])^\alpha} \leq 1$$

olur. Böylece

$$-\delta^\alpha(t) \frac{r(t) [-z'(t)]^\alpha}{-(z[\eta(t)])^\alpha} \leq 1$$

olmak üzere (6.33) den,

$$-\delta^\alpha(t) u(t) \leq 1 \tag{6.34}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer bir V dönüşümünü $t \geq t_2$ için

$$V(t) := - \frac{r[\tau(t)] (-z'[\tau(t)])^\alpha}{z^\alpha[\eta(t)]} \tag{6.35}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $V(t) < 0$ dır. $r(-z')^\alpha$ azalmayandır ve $\tau(t) \leq t$ olduğundan

$$r(t) (-z'(t))^\alpha \geq r[\tau(t)] (-z'[\tau(t)])^\alpha$$

elde edilir. Böylece $0 < -V(t) \leq -U(t)$ dır. Daha sonra (6.33) den

$$-\delta^\alpha(t) V(t) \leq 1 \quad (6.36)$$

bulunur. (6.33) un türevinden,

$$U'(t) = \frac{(-r(t) (-z'(t))^\alpha)' z^\alpha[\eta(t)] + \alpha r(t) (-z'(t))^\alpha z^{\alpha-1}[\eta(t)] z'[\eta(t)] \eta'(t)}{z^{2\alpha}[\eta(t)]}$$

ve düzenlenirse,

$$U'(t) = \frac{(-r(t) (-z'(t))^\alpha)' z^\alpha[\eta(t)]}{z^{2\alpha}[\eta(t)]} + \frac{\alpha r(t) (-z'(t))^\alpha z^{\alpha-1}[\eta(t)] z'[\eta(t)] \eta'(t)}{z^{2\alpha}[\eta(t)] r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]$$

$$U'(t) = \frac{(-r(t) (-z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} + \frac{\alpha r(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \frac{(-z'(t))^\alpha}{z[\eta(t)]} \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)] [z'[\eta(t)]] \eta'(t)}{z^\alpha[\eta(t)]}$$

elde edilir. (6.7) ve $\eta(t) \geq t$ den $z'[\eta(t)] \leq \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}[t]}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} z'(t)$ ve

$$r[\eta(t)] (-z'[\eta(t)])^\alpha \leq r(t) (-z'(t))^\alpha$$

veya

$$-z'[\eta(t)] \leq \left(\frac{r(t)}{r[\eta(t)]} \right)^{\frac{1}{\alpha}} z'(t)$$

dir. Buradan

$$U'(t) \leq \frac{(-r(t) (-z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} - \alpha \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-U(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (6.37)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq \frac{(-r[\tau(t)] (-z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} \\ &\quad + \frac{\alpha r[\tau(t)] (-z'[\tau(t)])^\alpha z^{\alpha-1}[\eta(t)] z'[\eta(t)] \eta'(t)}{z^{2\alpha}[\eta(t)] r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)] \end{aligned}$$

veya

$$V'(t) \leq \frac{(-r[\tau(t)](-z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} - \frac{\alpha\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \frac{r[\tau(t)](-z'[\tau(t)])^\alpha}{z^\alpha[\eta(t)]} \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)][z'[\eta(t)]]}{z[\eta(t)]}$$

olur. Böylece

$$V'(t) \leq \frac{(-r[\tau(t)](-z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} - \alpha \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-V(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (6.38)$$

dir. (6.38) ve (6.37) birlikte göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} U'(t) + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} V'(t) &\leq \frac{(-r(t)(-z'(t))^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \frac{(-r[\tau(t)](-z'[\tau(t)])^\alpha)'}{z^\alpha[\eta(t)]} \\ &\quad - \alpha \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-U(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \frac{\alpha\rho_0^\alpha}{\tau_0} \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-V(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

elde edilir. (6.32), (6.39) ve $g(t, b) \leq \eta(t)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} U'(t) + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} V'(t) &\leq -\frac{\int_a^b Q(t, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \alpha \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-U(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ &\quad - \frac{\alpha\rho_0^\alpha}{\tau_0} \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-V(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

elde edilir. (6.40), $\delta^\alpha(t)$ ile çarpılıp elde edilen eşitsizlik t_2 den t ye integre edilir ve

$$\int_{t_2}^t \frac{p^\alpha[h(s)]}{\tau'(s)} V'(s) ds \text{ integrali için kısmi integral uygulanırsa,}$$

$$\begin{aligned}
& U(t)\delta^\alpha(t) - U(t_2)\delta^\alpha(t_2) + \alpha \int_{t_2}^t \frac{\delta^{\alpha-1}(s)\eta'(s)U(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} ds \\
& + \alpha \int_{t_2}^t \frac{\eta'(s)\delta^\alpha(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} (-U(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} ds + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} V(t)\delta^\alpha(t) - \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} V(t_2)\delta^\alpha(t_2) \\
& + \alpha \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \int_{t_2}^t \frac{\delta^{\alpha-1}(s)\eta'(s)V(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} ds + \alpha \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \int_{t_2}^t \frac{\eta'(s)\delta^\alpha(s)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} (-V(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} ds \\
& + \int_{t_2}^t \frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} \delta^\alpha(s) ds \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$A := - \left[\frac{\eta'(t) \delta^\alpha(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} U(t)$$

ve

$$B := \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t)\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \left[\frac{\eta'(t) \delta^\alpha(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha$$

şeklinde alalım. Böylece (6.18) kullanılarak

$$- \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \left[\frac{\eta'(t) \delta^\alpha(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} U(t) \left[\left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t)\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \left[\frac{\eta'(t) \delta^\alpha(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$- \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\delta^{\alpha-1}(t)\eta'(t)U(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{(\alpha+1)} \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)] \delta(t)}$$

olur. Bu takdirde (6.18) eşitsizliğinden,

$$\frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t) U(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} + \frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-U(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \geq -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{(\alpha+1)} \frac{\eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)] \delta(t)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$A := - \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} V(t)$$

ve

$$B := \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha}$$

şeklinde alalım. Böylece (6.18) den,

$$-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} V(t) \left[\left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

veya

$$-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) AB^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\eta'(t) \delta^{\alpha-1}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} V(t)$$

ve

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

veya

$$\frac{1}{\alpha} B^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{(\alpha+1)} \frac{\eta'(t)}{\delta(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]}$$

olur. Bu takdirde (6.18) eşitsizliğinden

$$\frac{\delta^{\alpha-1}(t) \eta'(t) V(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} + \frac{\eta'(t) \delta^{\alpha}(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]} (-V(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \geq -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{(\alpha+1)} \frac{\eta'(t)}{\delta(t) r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(t)]}$$

olur. Böylece (6.34) ve (6.36) dan,

$$\begin{aligned} & \int_{t_2}^t \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} \delta^{\alpha}(s) - \left(1 + \frac{\rho_0^{\alpha}}{\tau_0} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{(\alpha+1)} \frac{\eta'(s)}{\delta(s) r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} \right] ds \\ & \leq U(t_2) \delta^{\alpha}(t_2) + \frac{\rho_0^{\alpha}}{\tau_0} V(t_2) \delta^{\alpha}(t_2) + 1 + \frac{\rho_0^{\alpha}}{\tau_0} \end{aligned}$$

olur. Bu ise, (6.31) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 6. 4 ve 6.5 in ispatına benzer bir ispat ile aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 6.6. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_5)$ şartları ve (6.2), (6.4) şartı sağlansın. Ayrıca $t \in I$ için $\tau(t) \leq t$, $g(t, a) \geq \tau(t)$ ve $\xi \in [a, b]$ için $g(t, \xi) \leq g(t, b)$ olsun. Kabul edelim ki (6.30) sağlanacak şekilde bir reel değerli $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ fonksiyonu olsun. Eğer $t \in I$ için $\eta(t) \geq t$, $\eta(t) \geq g(t, b)$, $\eta'(t) > 0$ olacak şekilde bir reel değerli $\eta \in C'(I, \mathbb{R})$ var ve (6.31) şartı sağlanıyor ise, bu takdirde (6.1) diferensiyel denklemini salınımlıdır.

Örnek 6.1. $t \geq 10$ için

$$[x(t) + x(t - 2\pi)]'' + \int_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x[t + \xi] d\xi = 0 \quad (6.41)$$

ikinci mertebeden nötral fonksiyonel diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $\alpha = 1$, $a = \frac{-5\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $r(t) = 1$, $p(t) = 1$, $\tau(t) = t - 2\pi$, $q(t, \xi) = 1$, $g(t, \xi) = t + \xi$, $\sigma(\xi) = \xi$ ve $\rho(t) = 1$ dir. Bu takdirde $\xi \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için

$$Q(t, \xi) = \min \{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\} = 1, \quad g'(t, a) = 1, \quad g(t, a) = t - \frac{5\pi}{2} \leq t + \xi \text{ ve}$$

$g(t, a) \leq \tau(t) \leq t$ dir. Ayrıca $\tau_0 = 1$ olsun. Bu takdirde

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\rho(s) \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}} \left(1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \right) \frac{r[g(s, a)](\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)g'(s, a))^\alpha} \right] ds$$

veya

$$= 3\pi \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t ds = \infty$$

olur. Bu takdirde Teorem 6.3 den, (6.41) kabulü salınımlıdır. Aslında $x(t) = \sin t$, çözümlerinden biridir.

Örnek 6.2. $t \geq 1$ için

$$[x(t) + tx(t - \beta)]'' + \int_0^1 \frac{\xi + 1}{t} x[t + \xi] d\xi = 0 \quad (6.42)$$

ikinci mertebeden nötral fonksiyonel diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $\beta \geq 0$ bir sabittir. $\alpha = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $r(t) = 1$, $p(t) = t$, $\tau(t) = t - \beta$, $q(t, \xi) = \frac{(\xi+1)}{t}$, $g(t, \xi) = t + \xi$, $\sigma(\xi) = \xi$ ve $\rho(t) = 1$ dir. Bu takdirde $t \geq 1$ için

$Q(t, \xi) = \min \{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\} = \frac{(\xi+1)}{t}$, $g(t, a) = g(t, 0) = t \leq t + \zeta$, $\tau(t) = t - \beta \leq t$ ve $g(t, a) \geq \tau(t)$ dur. Böylece $h(t) = t+1$, $\phi(t) = \frac{1}{t+1}$, $\zeta(t) = \frac{1}{t+1}$ ve $\varphi(t) = \frac{1}{t+1}$ bulunur. Bu nedenle,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \rho(s) \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{r[\tau(s)]\varphi(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\tau'(s))^\alpha} \right] ds = \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left[\int_0^1 \frac{\xi+1}{s} d\xi - \frac{1}{4(s+1)} \right] ds$$

veya

$$= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left[\frac{3}{2s} - \frac{1}{4(s+1)} \right] ds = \infty$$

olur. Dolayısıyla (6.42) kabulü Teorem 6. 3 ten salınımlıdır.

Örnek 6.3. $t \geq 1$ için

$$[t^2(x(t) + p(t)x(t - \beta))']' + \int_0^1 (\xi + 1)x[t + \xi]d\xi = 0 \quad (6.43)$$

ikinci mertebeden nötral fonksiyonel diferensiyel denklemi göz önüne alalım, burada $0 \leq p(t) \leq p_0$, p_0 ve β birer pozitif sabitlerdir. $\alpha = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $r(t) = t^2$, $\tau(t) = t - \beta$, $q(t, \xi) = \xi + 1$, $g(t, \xi) = t + \xi$, $\sigma(\xi) = \xi$, $\rho(t) = 1$ ve $\eta(t) = t+1$ dur. Daha sonra $\xi \in [0,1]$ ve $t \geq 1$ için $Q(t, \xi) = \min \{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\} = 1 + \xi$ ve $t \geq 1$ için $g(t, a) = g(t, 0) = t \leq t + \xi$, $\tau(t) = t - \beta \leq t$ ve $g(t, a) \geq \tau(t)$ ve $\delta(t) = \frac{1}{t}$ olsun. Daha sonra

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\rho(s) \int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}} \left(1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0} \right) \frac{r[\tau(s)](\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\tau_0 \rho(s))^\alpha} \right] ds$$

veya

$$\frac{3}{2} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t ds = \infty$$

olur. Ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{\int_a^b Q(s, \xi) d\sigma(\xi)}{2^{\alpha-1}} \delta^\alpha(s) - \left(1 + \frac{\rho_0^\alpha}{\tau_0}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \frac{\eta'(s)}{\delta(s) r^{\frac{1}{\alpha}}[\eta(s)]} \right] ds$$

ve $p_0 < 5$ için

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1+p_0}{4}\right) \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{ds}{s+1} = \infty$$

olur. Bu nedenle $0 \leq p(t) \leq p_0 < 5$ için Teorem 6.6 ya göre (6.43) kabulü salınımlıdır.

Uyarı 6.1. Burada p sonlu veya sonsuz I aralığı üzerinde (6.1) diferensiyel denklemi için bazı yeni salınım teoremleri oluşturuldu. Ayrıca elde edilen kriterler [97] deki sonuçları geliştirir ve [94] daki sonuçları iyileştirir. Benzer şekilde $0 < \alpha \leq 1$ kabulü altında verilebilir. Bu durumda [30, Lemma2] çalışması kullanılarak, $Q(t, \xi) := \min \{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\}$ yerine $Q(t, \xi) := 2^{\alpha-1} \min \{q(t, \xi), q(\tau(t), \xi)\}$ alındığında yukarıdaki işlemler geçerlidir. $g(\tau(t), \xi) \not\equiv \tau[g(t, \xi)]$ alınırsa, (6.1) diferensiyel denklemini araştırmak için başka bir yöntem bulunabilir.

KAYNAKÇA

1. Luhong Ye, Zhiting Xu, 2009. Oscillation criteria for second order quasilinear neutral delay differential equations, **Appl. Math. Comput.** **207**, 388 - 396
2. Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan, D. 2002. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations. Kluwer Academic, Dordrecht.
3. Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan, D. 2003. Oscillation Theory for Second Order Dynamic Equations. Taylor & Francis, London.
4. R.P. Agarwal, S.-L. Shieh, C.-C. Yeh, 1997. Oscillation criteria for second order retarded differential equations, **Math. Comput. Model.** **26**, 1–11.
5. J.-L. Chern, w.-C. Lian, C.-C. Yeh, 1996. Oscillation criteria for second order half-linear differential equations with functional arguments, **Publ. Math. Debrecen.** **48**, (3–4) 209–216.
6. D.D. Bainov, D.P. Mishev, 1991. Oscillation Theory for Neutral Equations with Delay, Adam Hilger IOP Publishing Let,.
7. Džurina, J, Stavroulakis, IP: 2003. Oscillation criteria for second-order delay differential equations. **Appl. Math. Comput.** **140**, 445-453.
8. O. Dosly' , P. Rehak, 2005. Half-linear differential equations, **North-Holland Math. Stud., vol. 202**, Elsevier Science, Amsterdam.
9. A. Elbert, 1979. A half-linear second order differential equation, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, **Qualitat. Theor. Diff. Equat.** **30**, 153–180.
10. A. Elbert, 1982. Oscillation and nonoscillation theorems for some nonlinear ordinary differential equations, in: Ordinary and Partial Differential Equations, **Lecture Notes in Mathematics**, vol. **964**, pp. 187–212.
11. Erbe, L. H., Kong, Q.,Zhang, B.G. 1995. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Dekker, New York.
12. Gy'ori, I., Ladas,G. 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford University Press, New York.

13. S.R. Grace, B.S. Lalli, 1987. Oscillation of nonlinear second order neutral differential equations, **Rat. Math.** **3**, 77–84.
14. M.K. Grammatikopoulos, G. Ladas, A. Meimaridou, 1985. Oscillation of second order neutral delay differential equations, **Rat. Math.** **1**, 267–274.
15. Hale, JK. 1977. Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York.
16. T. Kusano, Y. Naito, 1997. Oscillation and nonoscillation criteria for second order quasilinear differential equations, **Acta Math. Hungar.** **76**, 81–99.
17. T.Kusano, Y.Naito, A.Ogata, 1994. Strong oscillation and nonoscillation of quasilinear differential equations of second order, **Diff. Equat. Dyn. Syst.** **2**, 1–10.
18. T. Kusano, Y. Yoshida, 1995. Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order, **J. Math. Anal. Appl.** **189**, 115–127.
19. D.D. Mirzov, 1973. On the oscillation of a system of nonlinear differential equations, **Diferencial'nye Uravnenija** **9**, 581–583.
20. D.D. Mirzov, 1976. On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems, **J. Math. Anal. Appl.** **53**, 418–425.
21. D.D. Mirzov, 1978. On the oscillation of solutions of a system of differential equations, **Mat. Zametki.** **23**, 401–404.
22. Y.G. Sun, F.w. Meng, 2006. Note on the paper of Dz'urina and Stavroulakis, **Appl. Math. Comput.** **174**, 1634–1641.
23. C.C. Travis, 1972. Oscillation theorems for second order differential equations with functional arguments, **Proc. Am. Math. Soc.** **31**, 199–202.
24. P. waltman, 1968. A note on an oscillation criterion for an equation with a functional arguments, **Can. Math. Bull.** **11**, 593–595.
25. Xu, R., Meng, F. 2006. Some new oscillation criteria for second order quasi-linear neutral delay differential equations. **Appl. Math. Comput.** **182(1)**, 797–803 .
26. Qi Li, 2015. Rui wang, Feng Chen and Tongxing Li, Oscillation of second – order nonlinear delay differential equations with nonpositive neutral coefficients, *Adv. Diff. Equ.* 2015 : 35.

27. Wong, JSw. 2000. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second order neutral differential equations. **J. Math. Anal. Appl.** **252**, 342-352.
28. Agarwal, R. P., Bohner, M., Li, T., Zhang, C. 2013. A new approach in the study of oscillatory behavior of even-order neutral delay differential equations. **Appl. Math. Comput.** **225**, 787–794 .
29. Baculíková, B, Džurina, J. 2011. Oscillation theorems for second order neutral differential equations. **Comput. Math. Appl.** **61**, 94-99.
30. Baculikova, B., Džurina, J. 2011. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral differential equations. **Comput. Math. Appl.** **62(12)**, 4472–4478.
31. Baculíková, B, Džurina, J. 2010. Oscillation of third-order neutral differential equations. **Math. Comput. Model.** **52**, 215-226.
32. Kamenev, IV. 1978. An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. **Mat. Zametki** **23**, 249-251.
33. Li, T, Rogovchenko, YuV. 2014. Asymptotic behavior of higher-order quasilinear neutral differential equations. *Abstr. Appl. Anal.* 2014, Article ID 395368. doi:10.1155/2014/395368
34. Li, T, Rogovchenko, YuV. 2014. Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral delay differential equations. *Abstr. Appl. Anal.* 2014, Article ID 594190. doi:10.1155/2014/594190
35. Li, T, Rogovchenko, YuV. 2014. Oscillatory behavior of second-order nonlinear neutral differential equations. *Abstr. Appl. Anal.* 2014, Article ID 143614. doi:10.1155/2014/143614
36. Li, T, Rogovchenko, YuV, Zhang, C. 2013. Oscillation results for second-order nonlinear neutral differential equations. *Adv. Differ. Equ.* 2013, 336.
37. Philos, ChG. 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. **Arch. Math.** **53**, 482-492.
38. Qin, H, Shang, N, Lu, Y. 2008. A note on oscillation criteria of second order nonlinear neutral delay differential equations. **Comput. Math. Appl.** **56**, 2987-2992.

39. Yang, Q, Yang, L, Zhu, S. 2003. Interval criteria for oscillation of second-order nonlinear neutral differential equations. **Comput. Math. Appl.** **46**, 903-918.
40. Ravi P. Agarwal, Chenghui Zhang, Tonxing Li, 2016. Some remarks on oscillation of secon order neutral differential equation, **Appl. Math. Comput.** **274**, 178 - 181
41. B. Baculíková, J. Džurina. 2012. Oscillation theorems for higher order neutral differential equations, **Appl. Math. Comput.** **219**, 3769–3778.
42. Z.Han, T. Li, S. Sun, Y. Sun, 2010. Remarks on the paper [**Appl. Math. Comput.** 207(2009)388–396], **Appl. Math. Comput.** **215**, 3998 – 4007.
43. M. Hasanbulli, Yu. V. Rogovchenko, 2010. Oscillation criteria for second order nonlinear neutral differential equations, **Appl. Math. Comput.** **215**, 4392 – 4399.
44. J. Jiang, X. Li, 2003. Oscillation of second order nonlinear neutral differential equations, **Appl. Math. Comput.** **135**, 531 – 540.
45. T. Li, R. P. Agarwal, M. Bohner, 2012. Some oscillation results for second order neutral differential equations, **J. IndianMath. Soc.** **79**, 97 – 106.
46. T. Li, Yu. V. Rogovchenko, C. Zhang, 2013. Oscillation of second order neutral differential equations, **Funkc. Ekvacioj** **56**, 111120.
47. S. Zhang, Q. wang, 2010. Oscillation of second order nonlinear neutral dynamic equations on times cales, **Appl. Math. Comput.** **216**, 2837 – 2848.
48. Said R. Grace, Jozef Dzurina, Irena Jadlovska and Tongxing Li, 2018. An improved approach for studying oscillation of second – order neutral delay differential equations Journal of Ineq. Appli. 2018:193.
49. Bohner, M., Grace, S.R., Jadlovska, I. 2017. Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations. Electron. **J. Qual. Theory Differ. Equ.**, **60** (2017)
50. Fite, w.B. 1918. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. **Trans. Am. Math. Soc.** **19(4)**, 341–352.
51. Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, w.-T. 2004. Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations. Dekker, New York
52. Alzabut, J., Bolat,Y. 2015. Oscillation criteria for nonlinear higher-order forced functional difference equations. **Vietnam J. Math.** **43(3)**, 583–594.

53. Bolat, Y., Alzabut, J.O. 2012. On the oscillation of higher-order half-linear delay difference equations. **Appl. Math. Inf. Sci.** **6(3)**, 423–427.
54. Bolat, Y., Alzabut, J. 2014. On the oscillation of even-order half-linear functional difference equations with damping term. *Int. J. Differ. Equ.* 2014, Article ID 791631.
55. Candan, T. 2015. Oscillatory behavior of second order nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Appl. Math. Comput.** **262**, 199–203.
56. Dong, J.-G. 2010. Oscillation behavior of second order nonlinear neutral differential equations with deviating arguments. **Comput. Math. Appl.** **59(12)**, 3710–3717.
57. Grace, S. R., Graef, J.R., Tunc, E. 2017. Oscillatory behavior of second order damped neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Miskolc Math. Notes** **18(2)**, 759–769.
58. Li, T., Thandapani, E., Graef, J.R., Tunc, E. 2013. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral differential equations. **Nonlinear Stud.** **20(1)**, 1–8.
59. Liu, L., Bai, Y. 2009. New oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay differential equations. **J. Comput. Appl. Math.** **231(2)**, 657–663.
60. Liu, L., Bai, Y. 2010. Erratum to: “New oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay differential equations” [**J. Comput. Appl. Math.** **231** (2009) 657–663]. **J. Comput. Appl. Math.** **233(10)**, 2755.
61. Liu, H., Meng, F., Liu, P. 2012. Oscillation and asymptotic analysis on a new generalized Emden–Fowler equation. **Appl. Math. Comput.** **219(5)**, 2739–2748.
62. Meng, F., Xu, R. 2007. Oscillation criteria for certain even order quasi-linear neutral differential equations with deviating arguments. **Appl. Math. Comput.** **190(1)**, 458–464.
63. Tunc, E., Grace, S.R. 2016. On oscillatory and asymptotic behavior of a second-order nonlinear damped neutral differential equation. *Int. J. Differ. Equ.* 2016, Article ID 3746368.

64. Xu, R., Meng, F. 2007. New Kamenev-type oscillation criteria for second order neutral nonlinear differential equations. **Appl. Math. Comput.** **188(2)**, 1364–1370.
65. Xu, R., Meng, F. 2007. Oscillation criteria for second order quasi-linear neutral delay differential equations. **Appl. Math. Comput.** **192(1)**, 216–222.
66. Hale, J. K. 1994. Partial neutral functional differential equations. **Rev. Roum. Math. Pures Appl.** **39(4)**, 339–344.
67. MacDonald, N. 1989. Biological Delay Systems: Linear Stability Theory. Cambridge University Press, Cambridge.
68. Koplatadze, R.G. 1986. Criteria for the oscillation of solutions of differential inequalities and second-order equations with retarded argument. **Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Mat. Tr.** **17**, 104–121.
69. Wei, J.J. 1988. Oscillation of second order delay differential equation. **Ann. Differ. Equ.** **4(4)**, 473–478.
70. Ladas, G., Lakshmikantham, V., Papadakis, J.S. 1972. Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument. In: Delay and Functional Differential Equations and Their Applications, pp. 219–231. Academic Press, New York.
71. Koplatadze, R.G., Chanturiya, T.A. 1982. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. **Differ. Uravn.** **18(8)**, 1463–1465, 1472.
72. Wang, Z.-C., Stavroulakis, I.P., Qian, X.-Z. 2002. A survey on the oscillation of solutions of first order linear differential equations with deviating arguments. **Appl. Math. E-Notes** **2**, 171–191.
73. Koplatadze, R., Kvinikadze, G., Stavroulakis, I.P. 2000. Oscillation of second order linear delay differential equations. **Funct. Differ. Equ.** **7(1–2)**, 121–145.
74. Sun, Y. G., Meng, F. W. 2006. Note on the paper of Džurina and Stavroulakis: “Oscillation criteria for second-order delay differential equations” [Appl. Math. Comput. 140 (2003) 445–453]. **Appl. Math. Comput.** **174(2)**, 1634–1641.

75. Erbe, L., Hassan, T.S., Peterson, A., Saker, S.H. 2009. Oscillation criteria for half-linear delay dynamic equations on time scales. **Nonlinear Dyn. Syst. Theory** **9(1)**, 51–68.
76. Wu, H., Erbe, L., Peterson, A. 2006. Oscillation of solution to second-order half-linear delay dynamic equations on time scales. **Electron. J. Differ. Equ.** **71**, (2016)
77. Philos, Ch. G. 1981. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays. **Arch. Math. (Basel)** **36(1)**, 168–178.
78. Zhang, B. G., Zhou, Y. 2001. The distribution of zeros of solutions of differential equations with a variable delay. **J. Math. Anal. Appl.** **256(1)**, 216–228.
79. Corless, R. M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E. 1996. On the Lambert w function. **Adv. Comput. Math.** **5(1)**, 329–359.
80. Tongxing Li, 2014. Blanka Baculikova and Jozef Dzurina, Oscillatory behavior of second nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments, Boun. Val. Prob. 2014: 68.
81. Agarwal, RP, Grace, SR, O'Regan, D. 2000. Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Kluwer Academic, Dordrecht.
82. Baculíková, B, Lacková, D. 2006. Oscillation criteria for second order retarded differential equations. **Stud. Univ. Zilina Math. Ser.** **20**, 11-18.
83. Baculíková, B, Li, T, Džurina, J. 2013. Oscillation theorems for second-order superlinear neutral differential equations. **Math. Slovaca** **63**, 123-134.
84. Candan, T. 2012. The existence of nonoscillatory solutions of higher order nonlinear neutral equations. **Appl. Math. Lett.** **25**, 412-416.
85. Candan, T, Dahiya, RS. 2013. Existence of nonoscillatory solutions of higher order neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Math. Slovaca** **63**, 183-190.
86. Candan, T, Karpuz, B, Öcalan, Ö. 2012. Oscillation of neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Nonlinear Oscil.** **15**, 65-76.

87. Dix, JG, Karpuz, B, Rath, R. 2011. Necessary and sufficient conditions for the oscillation of differential equations involving distributed arguments. **Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.**, 1-15.
88. Džurina, J, Hudáková, D. 2009. Oscillation of second order neutral delay differential equations. **Math. Bohem.** **134**, 31-38.
89. Karpuz, B, Öcalan, Ö, Öztürk, S. 2010. Comparison theorems on the oscillation and asymptotic behaviour of higher-order neutral differential equations. **Glasg. Math. J.** **52**, 107-114.
90. Li, T, Agarwal, RP, Bohner, M. 2012. Some oscillation results for second-order neutral differential equations. **J. Indian Math. Soc.** **79**, 97-106.
91. Li, T, Han, Z, Zhang, C, Li, H. 2011. Oscillation criteria for second-order superlinear neutral differential equations. **Abstr. Appl. Anal.** **2011**, 367541.
92. Li, T, Rogovchenko, YuV, Zhang, C. 2013. Oscillation of second-order neutral differential equations. **Funkc. Ekvacioj** **56**, 111-120.
93. Li, T, Sun, S, Han, Z, Han, B, Sun, Y. 2013. Oscillation results for second-order quasi-linear neutral delay differential equations. **Hacet. J. Math. Stat.** **42**, 131-138.
94. Li, T, Thandapani, E. 2011. Oscillation of second-order quasi-linear neutral functional dynamic equations with distributed deviating arguments. **J. Nonlinear Sci. Appl.** **4**, 180-192.
95. Li WN. 2000. Oscillation of higher order delay differential equations of neutral type. **Georgian Math. J.** **7**, 347-353.
96. Şenel, MT, Candan, T. 2012. Oscillation of second order nonlinear neutral differential equation. **J. Comput. Anal. Appl.** **14**, 1112-1117.
97. Sun, S, Li, T, Han, Z, Li, H. 2012. Oscillation theorems for second-order quasilinear neutral functional differential equations. **Abstr. Appl. Anal.** **2012**, 819342.
98. Thandapani, E, Piramanantham, V. 2010. Oscillation criteria of second order neutral delay dynamic equations with distributed deviating arguments. **Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.** 1-15.

99. Wang, P. 2004. Oscillation criteria for second order neutral equations with distributed deviating arguments. **Comput. Math. Appl.** **47**, 1935-1946.
100. Xu, Z, weng, P. 2007. Oscillation of second-order neutral equations with distributed deviating arguments. **J. Comput. Appl. Math.** **202**, 460-477.
101. Ye, L, Xu, Z. 2006. Interval oscillation of second order neutral equations with distributed deviating argument. **Adv. Dyn. Syst. Appl.** **1**, 219-233.
102. Yu, Y, Fu, X. 1991. Oscillation of second order neutral equation with continuous distributed deviating argument. **Rad. Mat.** **7**, 167-176.
103. Zhang, C, Agarwal, RP, Bohner, M, Li, T. 2014. Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations with noncanonical operators. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*
104. Zhang, C, Baculíková, B, Džurina, J, Li, T. 2014. Oscillation results for second-order mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Math. Slovaca.*
105. Zhao, J, Meng, F. 2008. Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating argument. **Appl. Math. Comput.** **206**, 485-493.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğba YILMAZ

Uyruğu : T.C.

Doğum Yeri ve Tarihi :

Telefon

e-mail

EĞİTİM:

Derece Adı	Kurum	Bitirme Yılı
Lise	Şehit Şirin Diril Anadolu Lisesi	Gaziantep - 2011
Üniversite	Erciyes Üniversitesi	2016
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi	2024

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum
2015	Final Dershanesi
2019	Ali Ulvi Kurucu Erkek AİHL(MEB) (KONYA)
2022	Av. Ahmet Ulucan Kız AİHL(MEB) (KAYSERİ)