

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

PARABOLİK DENKLEMLERİN REZİDÜ YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLHAMİ BATUR TALUKAN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL 2007

ÖNSÖZ

Öncelikle en içten teşekkürlerimi aileme sunmak istiyorum. Onların desteği ve sağladıkları motivasyon olmadan bu çalışmanın üstesinden gelemeyeceğimi biliyordum. Bugüne kadar olan eğitimim konusundaki müthiş hassasiyetlerine şükranlarımı sunuyorum.

Tüm içtenliğimle başta tez danışmanım Prof. Dr. Mahir Resulov olmak üzere Prof. Dr. Mehmet Erdoğan ve Yrd. Doç. Dr. Bahaddin Sinsoysal'a tezimin değişik aşamalarında bana sağlamış oldukları değerli katkılarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak da bir kez daha, bana tezimin her aşamasında karşılaştığım zorluklarda yakinen ilgilenen ve değerli zamanlarını esirgemeyen, değerli hocam Sn.Prof. Dr. Mahir Resulov'a, gerek teorik gerekse de uygulamaya dönük yorum ve tavsiyelerinden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İSTANBUL 2007

İlhami Batur TALUKAN

İÇİNDEKİLER	Sayfa
ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
2. FOURIER SERİLERİ ve UYGULAMALARI	2
2.1. Temel Kavramlar	2
2.2. Fourier Serileri	6
2.3. Fourier Serisinin Isı Denklemine Uygulanması.....	11
3. GREEN FONKSİYONU, ADI DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİ	14
3.1. Green Fonksiyonunun Tanımı	14
3.2. Sabitinin Varyasyon Yöntemi İle Green Fonksiyonunun Bulunması.....	20
4. REZİDÜ METODU. PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ	26
4.1 Genel Kavramlar	26
4.2 Rezidü Teoremi.....	28
5. PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ METODU İLE ÇÖZÜMÜ	30
5.1 Isı Denklemi İçin Birinci Sınır Değer Probleminin Çözümü	30
5.2. Parabolik Tür Denklem İçin Birinci Başlangıç Sınır Değer Problemi.....	34
5.3 İkinci Başlangıç – Sınır Değer Problemi.....	38
6. İKİ BOYUTLU PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN REZİDÜ ÇÖZÜMLERİ	40
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	45
8. KAYNAKÇA	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ÖZET

Parabolik Denklemlerin Rezidü Yöntemiyle Çözümü

Tezde bir ve iki boyutlu ısı dağılım denklemi için yazılmış birinci başlangıç – sınır değer probleminin gerçek çözümünü elde etmek için rezidü yöntemi uygulanmıştır. Rezidü yönteminin gerçekleştirilmesi için gereken ve önemli olan keyfi fonksiyonun uygun özdeğer probleminin çözümünün rezidüleri üzerine ayrılış formülü gösterilmiş ve söz konusu ayrılış formülü kullanılarak esas problemin çözümü için analitik ifade elde edilmiştir.

ABSTRACT

Residue Method of the Solution of Parabolic Equations

In this thesis the Residue method for solving the 1. type initial – boundary value problem for one and two dimensional heat equations has been applied.

In order to realize the residue method the important and necessary expansion formula of any continuous function over complete residue of the solution of the corresponding boundary value problem is found. Using this formula the analytical solution of the main problem is obtained.

Key Words: Residue representation, Expansion formula, Green's function

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere Fourier yöntemi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü için kullanılan en önemli yöntemlerden biridir. Lakin, Fourier yöntemi göz önüne aldığımız problem kendi kendine adjoint (self adjoint) olduğu ve probleme karşılık gelen özdeğer probleminin özfonksiyonları tam ve ortonormal olduğu durumlarda uygulanabilir.

Fakat, pratikte birçok problemlerle karşılaşmaktayız ki, söz konusu problemin özdeğerleri katlı kökler oluşturur ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların tamlık problemleri açık kalmaktadır.

Bu nedenle tezde rezidü yöntemi incelenmiştir ve rezidü yöntemi sırasıyla bir ve iki boyutlu parabolik tür denklemler için yazılmış 1. ve 2. başlangıç – sınır değer problemlerinin çözümüne uygulanmıştır.

Rezidü yöntemini uygulamak için gereken Fourier serileri ile birlikte kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden temel kavramlar ve rezidü teorisinin temel teoremi de irdelenmiştir.

Rezidü yönteminin uygulanması için bilinmesi gereken önemli kavramlardan biri de Green fonksiyonudur. Bu nedenle tezin 3. bölümünde Green fonksiyonunun tanımı verilmiş ve Green fonksiyonunun ele alınması için sabitin varyasyonu yöntemi de incelenmiştir. 2. basamaktan adi diferansiyel denklem için yazılmış sınır değer probleminin çözümü Green fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin 4. bölümünde lineer ısı denklemi için yazılmış 1. başlangıç – sınır değer probleminin çözümü için rezidü yönteminin genel prensipleri ortaya koyulmuş, ayrılış formülü incelenmiş ve bu formül kullanılarak problemin çözümü için analitik bir ifade elde edilmiştir. Sonrasında rezidü yöntemi daha genel şekilde yazılmış parabolik tür denklemin çözümüne uygulanmıştır.

Nihayet tezin son bölümünde iki boyutlu ısı denklemi için 1. başlangıç – sınır değer probleminin rezidü çözümü de elde edilmiştir.

2. FOURİER SERİLERİ ve UYGULAMALARI

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 1. Bir f fonksiyonunun bir z_0 noktasında sürekli olması için şu üç koşulun tümünün sağlanması gerekli ve yeterlidir:

$$1. f(z_0) \text{ mevcuttur,} \quad (2.1)$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ vardır,} \quad (2.2)$$

ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \text{ dır.} \quad (2.3)$$

Bu koşullar $f(z)$ nin, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olduğunu gösterir. Bir fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki bir noktada bu fonksiyonun sürekliliğini tanımlamak için, yukarıdaki tanımda doğal olarak bir değişiklik yapılması gereklidir. Bir C eğrisine kadar uzanıp bu eğriyi içeren ama C yi geçmeyen bir bölge üzerindeki bir z_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, f nin (2.2) ve (2.3) koşullarını sağlamasıdır ki bu durumda limit, bölgenin iç noktası olan bir limittir; yani, limiti tanımlamada kullanılan $|z - z_0| < \delta$ komşuluğunun yerine bu komşuluğun, verilen bölgede bulunan parçası konulacaktır.

Limitler üzerine olan teoremlerin bir sonucu olarak, eğer rasgele iki fonksiyon sürekli ise, bunların toplamları, çarpımları ve paydayı sıfır yapan z değerleri hariç, bölümleri de sürekli dir.

z ye göre her çokterimli her noktada sürekli dir. İki çokterimlinin bölümü de, paydayı sıfırdan farklı kılan z ye karşılık gelen her değer için sürekli dir.

Tanım 2. Bir f fonksiyonunun tanım bölgesindeki herhangi bir z_0 noktasının bir komşuluğunda alınan keyfi bir noktayı z ile gösterelim. $\Delta z = z - z_0$ yazalım ve Δz yi karmaşık değişken olarak düşünelim. Böyle olunca f nin z_0 daki f' ya da df/dz türevi eğer limit varsa,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu demektir ki; eğer $f'(z_0)$ karmaşık sayısı, yani türev varsa bu takdirde her bir pozitif ε sayısına karşılık bir δ sayısı karşılık gelir, öyle ki

$$0 < |\Delta z| < \delta \text{ olduğunda daima } \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (2.5)$$

kalır. Gerçekten de, eğer $f'(z_0)$ mevcutsa,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = 0,$$

yani

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.6)$$

elde edilir. Buradan çıkan sonuç, türevinin var olduğu rasgele bir z_0 noktasında f aynı zamanda süreklidir. Yani türevin var olması için önce sürekli olması gereklidir.

Eğer, sözgelimi, $f(z) = z^2$ ise rasgele bir z_0 noktasında $f'(z_0) = 2z_0$ dır. Çünkü, $2z_0 + \Delta z$, Δz ye göre bir çokterimli olduğundan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$$

bulunur.

Tanım 3. Bir f fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ da türevi mevcut

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.7)$$

olsun. Bu fonksiyonun türevinin

$$f'(z_0) = a + ib$$

biçimimde yazıldığını varsayalım ve a ile b sayılarının gerçekleşmesi gereken kuralı bulalım.

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

deyip $v(x, y)$ ye karşılık gelen değişiklikler için de Δv yazalım. Bu takdirde

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib$$

denirse,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = a, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = b \quad (2.8)$$

çıkar. Özel olarak, $\Delta y = 0$ ise yani $\Delta z = \Delta x$ olduğunda, bu limitler bir tek Δx değişkenli fonksiyonun limitine indirgenir ve

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = a,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = b,$$

olur; yani (x_0, y_0) noktasında $\partial u / \partial x$ ve $\partial v / \partial x$ türevleri vardır ve (x_0, y_0) noktasında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad (2.9)$$

dir.

Aynı şekilde, $\Delta x = 0$ ($\Delta z = i\Delta y$) olduğunda (2.8) eşitliklerinden

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = a,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} = b$$

buluruz; demek ki y ye göre kısmi türevler vardır, ve (x_0, y_0) noktasında

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad (2.10)$$

dir. Bu durumda ise (2.9) ve (2.10) eşitliklerine göre z_0 noktasında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.11)$$

olur. Bu eşitlikler Cauchy – Riemann koşullarıdır ve bunları bulup kullanan Fransız Matematikçisi A.L.Cauchy (1789 – 1857) ile, analitik fonksiyonlar kuramının gelişiminde bunları temel kılan Alman Matematikçisi G.F.B.Riemann'ın (1826 – 1866) onurlarına böyle adlandırılmışlardır.

Tanım 4. z karmaşık değişkeninin bir f fonksiyonunun $f'(z)$ türevi, yalnız z_0 da değil de z_0 in bir komşuluğundaki her z noktasında varsa, bu f fonksiyonuna z_0 noktasında analittir denir. z düzlemindeki bağlantılı bir bölgenin her noktasında analitik olan bir fonksiyon o bağlantılı bölgede analittir.

Örneğin, $|z|^2$ fonksiyonu hiçbir noktada analitik değildir, çünkü bu fonksiyonun türevi hiçbir komşulukta bulunmayıp yalnız $z = 0$ noktasında vardır.

Bir tam fonksiyon diye, z düzleminin her noktasında, yani düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona denir. z ye göre her çokterimlinin türevi her noktada var olduğundan,

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklindeki her çok terimli bir tam fonksiyondur.

2.2. Fourier Serileri

Tanım 5. (Ortogonal fonksiyon dizisi) Bir $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonların bir $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ dizisi verilsin. Eğer $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ için

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = 0$$

oluyorsa $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisine $[a,b]$ de ortogonaldir denir.

Örnek 1. $(1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi, \pi]$ de ortogonaldir.

Gerçekten, $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ olduğundan, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$

için

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} [(0-0) + (0-0)] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $(1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi, \pi]$ de ortogonaldir.

Örnek 2. $(\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi, \pi]$ de ortogonaldir.

Gerçekten; $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ olduğundan, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \neq m$

için

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} (0-0) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi, \pi]$ de ortogonaldır.

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{\sin(a-b) - \sin(a+b)}{2}$$

olduğundan her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \neq m$ için

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m-n)x - \sin(m+n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{-\cos(m+n)x}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} (0-0) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 6. (ortonormal fonksiyon dizisi) Bir ortogonal (f_n) fonksiyon dizisi için eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^b (f_n(x))^2 \, dx = 1$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisine $[a, b]$ de ortonormaldir denir.

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\int_a^b (f_n(x))^2 \, dx = \alpha_n \neq 0$ özelliğini sağlayan her (f_n)

ortogonal fonksiyon dizisinden ortonormal bir $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} f_n \right)$ fonksiyon dizisi elde edilebilir.

Örneğin, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0, 2\pi]$ için

$$f_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad f_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

ve $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ şeklinde tanımlanan $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisi $[0, 2\pi]$ de ortonormaldir.

Tanım 7. u_1, u_2, \dots, u_n ortonormal fonksiyonlar sistemi ve $f(x) \in L_2(a, b)$ olsun.

$$\alpha_k = (f, u_k) = \int_a^b f(x) u_k(x) \, dx$$

sayılarına $f(x)$ fonksiyonunun

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(x)$$

Fourier serisinin katsayıları denir.

Tanım 8. $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ $L_2[a, b]$ de tanımlı ortonormal fonksiyonlar sistemi olsun. Eğer $L_2[a, b]$ den olan keyfi $u(x)$ fonksiyonun Fourier serisi L_2 anlamında $u(x)$ 'e yaklaşırsa, $\{u_n(x)\}$ fonksiyonlar sistemine tam sistem denir.

Örnek 4. $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \dots, \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2k-1)x, \dots$

fonksiyonlar sistemi $L_2(0, \pi)$ ' de ortonormaldir. $u(x) = \sin 2x$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun tüm Fourier katsayıları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ sifıra eşittir.

Yani $\sin 2x$ fonksiyonu $\varphi_k(x)$ fonksiyonlarına ortogonal olmaktadır.

Lakin $0 \cdot \sin x + 0 \cdot \sin 3x + \dots + 0 \cdot \sin(2k-1)x + \dots$ serisi L_2 'de sifıra yaklaşıyor. Bu seri $\sin 2x$ ' e yaklaşıyor. Yani, $\{\varphi_k(x)\}$ fonksiyonlar sistemi tam değildir.

$f(x)$, $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (2.12)$$

serisine, $f(x)$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki tam Fourier serisi denir. a_0, a_m, b_m serinin katsayıları olmaktadır.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Eğer x_0 noktası $f(x)$ fonksiyonu için 1. tür süreksizlik noktası ise, x_0 noktası dışında (2.12) serisi, $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaktır. $x = x_0$ noktasında ise $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ olarak alınır.

Farzedelim ki $f(x)$ fonksiyonu $[-\ell, \ell]$ aralığında tanımlı ve Dirichlet koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. O zaman $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki Fourier serisi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin \frac{m\pi x}{\ell} \right) \quad (2.15)$$

$$a_m = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

$$b_m = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

yazılabilir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[-\ell, \ell]$ aralığında çift fonksiyon ise (2.15) serisindeki $b_m = 0$ olur. O zaman,

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{\ell} \quad (2.18)$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında tek fonksiyon ise, bu durumda (2.12)

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{\ell} \quad (2.19)$$

serisine dönüşür.

Örnek 5. $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı $f(x) = \pi + x$ fonksiyonu verilsin. $S(x)$ Fourier serisinin toplamı olmak üzere $f(x)$ 'in sürekli olduğu noktalarda $f(x) \equiv S(x)$ dir. $f(x)$ 'in 1. tür süreksizliğe sahip olduğu noktalarda yani kesilme noktalarında ise

$S(x) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ dir. $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisi şeklinde yazalım.

$$\pi + x = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Burada,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 2\pi$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos mx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx = \frac{2}{m} \sin m\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin mx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx \\ &= \frac{-2}{m} \cos m\pi = \frac{2}{m} (-1)^{m+1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece Fourier serisi,

$$\pi + x = \pi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx = \pi + 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

olmaktadır.

2.3. Fourier Serisinin Isı Denklemine Uygulanması

Şimdi Fourier serisini bir boyutlu ısı dağılım denklemi için yazılmış birinci başlangıç – sınır değer probleminin çözümüne uygulayalım. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0 \quad (2.20)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (2.21)$$

$$\ell_1 u \equiv u(0,t) = 0, \quad \ell_2 u \equiv u(\ell,t) = 0. \quad (2.22)$$

Bu probleminin çözümünü

$$u(x,t) = y(x)T(t) \quad (2.23)$$

şeklinde arayalım. (2.23) ifadesini (2.20)' de yerine yazarak

$$y(x)T'(t) = T(t)y''(x)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan da

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

veya

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (2.24)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (2.25)$$

elde edilir.

Aşağıdaki durumları inceleyelim.

I. $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda (2.24)'den

$$y''(x) = 0 \Rightarrow y = c_1x + c_2$$

olduğunu buluruz. Burada, c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

$$y(0) = y(\ell) = 0$$

koşulları çerçevesinde $y(x) \equiv 0$ olduğu görülür. Yani problemin yalnız trivial çözümü vardır.

II. $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda (2.24) denklemi

$$y'' - \lambda y = 0$$

gibi olur. Sonuncu denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

olmaktadır. c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarından, yani aşağıdaki denklemler sisteminden

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

elde ederiz. Buradan,

$$c_1 = -c_2$$

ve

$$c_1 (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0$$

olarak elde ederiz.

$$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \text{ olamaz.}$$

Bu taktirde $c_1 = 0$ ve $y \equiv 0$ olduğunu elde ederiz.

III. Son olarak da $\lambda < 0$ olsun. Bu durumda

$$y'' - \lambda y = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$$

şeklinde olmaktadır. c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarından elde ederiz. Yani,

$$0 = c_2 \cos 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$0 = c_1 \sin \sqrt{\lambda}$$

Bizi trivial olmayan çözüm ilgilendirdiğinden sonuncu ifadeden

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

alırız.

$\lambda_n = \pi^2 n^2$ sayılarına problemin özdeğerleri denir. Bu özdeğerlere karşılık

gelen

$$y_n(x) = c_1 \sin \pi_n x \quad (2.26)$$

çözümlerine ise özfonksiyonlar denir.

Şimdi, (2.25) denkleminin çözümünü ele alalım. Kolayca görmek mümkündür ki, (2.25) denkleminin genel çözümü

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad (2.27)$$

olmaktadır.

(2.26) ve (2.27)'i kullanarak (2.20) – (2.22) problemin çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(\pi n)^2 t} \sin \pi n x \quad (2.28)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.28) ifadesindeki A_n sabiti başlangıç koşulundan elde edilir.

Şimdi varsayalım ki, $\varphi(x)$ fonksiyonunun $\{\sin \pi n x\}$ fonksiyonlar sistemi üzerinde Fourier ayrılışını yazmak mümkün olsun, yani

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \pi n x$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \pi n x dx \quad (2.29)$$

olmaktadır ve φ_n 'lere $\varphi(x)$ 'in Fourier katsayıları denir.

(2.28) ve (2.29) ifadelerinden $A_n = \varphi_n$ olarak elde ederiz. Böylelikle, (2.20) – (2.22) probleminin gerçek çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-(\pi n)^2 t} \sin \pi n x$$

veya

$$u(x, t) = \frac{1}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 t} \int_0^{\ell} \sin \pi n \xi \varphi(\xi) d\xi$$

olur.

3. GREEN FONKSİYONU, ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİ

3.1. Green Fonksiyonunun Tanımı

Diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminden farklı olarak, sınır değer probleminde bilinmeyen fonksiyon veya onun türevlerinin tanım bölgesinin en az iki noktasındaki değerlerinin lineer toplamının karışımının verilmesi gerekmektedir. Böyle bir sınır değer problemini göz önüne alalım,

$$l(y) \equiv a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \quad (3.2)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

Burada α , β , γ ve δ bilinen sabitler olmaktadır.

Bu problemi Green fonksiyonu yardımı ile çözelim. Bundan dolayı önce Green fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

(3.1), (3.2) probleminin Green fonksiyonu öyle $G(x,s)$, $x \in [a,b]$, $s \in (a,b)$ fonksiyonuna denir ki, bu fonksiyon $\forall s \in (a,b)$ için aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

- 1) $x \neq s$ olduğunda $G(x,s)$ homojen denklemi korur, yani

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0; \quad (3.3)$$

- 2) $x = a$ ve $x = b$ olduğu durumda $G(x,s)$ (3.2) sınır koşulunu korur;

- 3) $x = s$ olduğu durumda $G(x,s)$ x 'e göre sürekli, onun türevi ise 1. tür sıçrayışa sahip olur, ayrıca da sıçrayışın değeri $1/a(x)$ 'e eşit olur, yani

$$G(s+0,s) = G(s-0,s),$$
$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a(s)}. \quad (3.4)$$

Green fonksiyonunu bulmak için (3.1) denklemini koruyan trivial olmayan ve sırasıyla birinci ve ikinci sınır değer koşullarını koruyan $y_1(x)$, $y_2(x)$ çözümlerini ele almak gerekir.

Eğer $y_1(x)$ aynı zamanda her iki sınır koşulunu sağlamasa bile bu durumda dahi $G(x,s)$ fonksiyonu mevcuttur ve onu bu şekilde arayacağız,

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x), & a \leq x \leq s \\ \psi(s)y_2(x), & s \leq x \leq b \end{cases}, \quad (3.5)$$

burada, $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını öyle seçmek gerekir ki (3.5) ifadesi (3.4) koşullarını korusun; yani,

$$\psi(s).y_2(s) = \varphi(s).y_1(s),$$

$$\psi(s).y_2'(s) - \varphi(s).y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$$

olsun. Buradan $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde

$$\varphi(s) \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{y_2(s)} = \frac{1}{a_0(s)}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{a_0(s)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{y_2(s)},$$

$$= \frac{y_2(s)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} a_0(s)},$$

$$\psi(s) = \frac{y_2(s)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} a_0(s)} \cdot \frac{y_1(s)}{y_2(s)} = \frac{y_1(s)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} a_0(s)}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz ifadeleri (3.5)'de yerine yazarak Green fonksiyonunu

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} a_0(s)} \cdot y_1(x), & a \leq x \leq s \\ \frac{y_1(s)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} a_0(s)} \cdot y_2(x), & s \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.6)$$

biçiminde alırız. Ele aldığımız Green fonksiyonu yardımı ile (3.1), (3.2) probleminin çözümünü

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek 6. $y'' - y = 0$

$$y(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 1$$

probleminin çözümünü bulalım.

Probleminin çözümünü önce normal yolla elde edelim. $y'' - y = 0$ denkleminin karşılık gelen karakteristik denklemi $k^2 - 1 = 0$ olur ve buradan da $y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ elde edilir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Söz konusu sabitleri sınır koşullarından

$$c_1 + c_2 = 3,$$

$$c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{-1} - c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{-1} = 1.$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 2c_2 \cdot e^{-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{e}{2}, \quad \Rightarrow c_1 = 3 - \frac{e}{2} = \frac{6-e}{2}$$

olarak buluruz. Elde ettiğimiz sabitler yerine konursa

$$y(x) = \frac{6-e}{2} \cdot e^x + \frac{e}{2} \cdot e^{-x} \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

Örnek 7. Aşağıdaki problemin çözümünü bulalım

$$y'' - y' = 0$$

$$y(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 1.$$

$y'' - y' = 0$ denkleminin karakteristik denklemi $k^2 - k = 0$ olduğundan, onun kökleri $k_1 = 0, k_2 = 1$ olur ve buradan da $y(x) = c_1 + c_2.e^x$ elde edilir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Keyfi sabitler sınır koşullarından

$$c_1 + c_2 = 3$$

$$c_1 + c_2.e - c_2.e = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \text{ ve dolayısıyla } c_2 = 2$$

olarak bulunur. Buradan $y = 1 + 2.e^x$ sonucu elde edilir.

Örnek 8. Aşağıdaki probleminin çözümünü Green fonksiyonu yardımı ile bulalım

$$y'' = f(x)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Açıktır ki homojen denklemin genel çözümü $y = c_1 + c_2.x$ olmaktadır. Birinci koşulu koruyan çözüm $y_1 = x$, ikinci koşulu koruyan çözüm $y_2 = 1 - x$ olur. Bu durumda Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s).x, & 0 \leq x \leq s \\ \psi(s).(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

arayalım. Buradan,

$$G_x(x, s) = \begin{cases} \varphi(s), & 0 \leq x \leq s \\ -\psi(s), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olur. $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ aşağıdaki

$$\begin{cases} \psi(s).(1-s) - \varphi(s).s = 0 \\ -\psi(s) - \varphi(s) = 1 \end{cases},$$

koşullarını sağlaması gerektiğinden

$$\varphi(s) = s - 1$$

$$\psi(s) = -(1 + s - 1) = -s$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler yerine konursa problemin Green fonksiyonu olarak

$$G(x, s) = \begin{cases} x.(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ -s.(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

veya

$$G(x, s) = \begin{cases} x.(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s.(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Sonuçta problemin çözümü

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi).f(\xi) d\xi$$

olarak bulunur.

Örnek 9. Aşağıdaki probleminin çözümünü Green fonksiyonu yardımı ile bulalım

$$x^2 y'' - 2xy' = f(x)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

$x^2 y'' - 2xy' = 0$ denkleminin çözümü $y = x^k$ cinsinden arayalım

$$x^2 .x^{k-2} (k.(k-1)) + 2x.k.x^{k-1} = 0$$

$$x^k (k.(k-1)) + 2.k.x^k = 0$$

Buradan,

$$k^2 - k + 2k = 0$$

veya

$$k^2 + k = 0$$

olmaktadır. Karakteristik denklemin kökleri $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ oluyor. Problemin genel

çözümü ise $y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x}$ olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

1. sınır koşulunu koruyan çözüm $y_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ve 2. sınır koşulunu koruyan çözüm

$y_2 = 1$ olsun. Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right), & 1 \leq x \leq s \\ \psi(s) \cdot 1, & s \leq x \leq 3 \end{cases}$$

arayalım.

$\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde

$$\begin{cases} \psi(s) - \varphi(s) \cdot \left(\frac{1}{s} - 1\right) = 0, \\ -\varphi(s) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}, \end{cases}$$

$$\varphi(s) = 1,$$

$$\psi(s) = \frac{1}{s} - 1$$

bulunur. Bunlar Green fonksiyonunun ifadesinde yerine konursa sonuç olarak Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 1 \leq x \leq s \\ \frac{1}{s} - 1, & s \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ifade edilir. Sonuçta problemin çözümü

$$y(x) = \int_1^3 G(x, \xi) \cdot f(\xi) d\xi$$

olarak bulunur.

3.2 Sabitin Varyasyon Yöntemi İle Green Fonksiyonunun Bulunması

Bu bölümde Green fonksiyonunu başka bir yolla bulacağız. Bunun için aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = h(x), & (3.7) \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. & (3.8) \end{cases}$$

(3.7) denkleminin karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x \quad (3.9)$$

olmaktadır. (3.9) ifadesindeki c_1 ve c_2 keyfi sabitlerini öyle bir seçelim ki, (3.9) ifadesi (3.7)'nin de çözümü olsun. Bunun için

$$\begin{aligned} y' &= c_1' \sin \lambda x + \lambda c_1 \cos \lambda x + c_2' \cos \lambda x - \lambda c_2 \sin \lambda x \\ c_1' \sin \lambda x + c_2' \cos \lambda x &= 0 \end{aligned}$$

denkleminin korunduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$y' = \lambda c_1 \cos \lambda x - \lambda c_2 \sin \lambda x$$

olup, buradan

$$y'' = \lambda c_1' \sin \lambda x - \lambda^2 c_1 \sin \lambda x - \lambda c_2' \sin \lambda x - \lambda^2 c_2 \cos \lambda x$$

dır. Elde ettiğimiz ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\lambda c_1' \cos \lambda x - \lambda^2 c_1 \sin \lambda x - \lambda c_2' \sin \lambda x - \lambda^2 c_2 \cos \lambda x + \lambda^2 c_1 \sin \lambda x + \lambda^2 c_2 \cos \lambda x = h(x)$$

olur ve c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için

$$\begin{cases} c_1' \sin \lambda x + c_2' \cos \lambda x = 0 \\ \lambda c_1' \cos \lambda x - \lambda c_2' \sin \lambda x = h(x) \end{cases} \quad (3.10)$$

cebirsel denklemler sistemini göz önüne alırız.

(3.10) denklemler sistemini Kramer yöntemi ile çözersek

$$\Delta(x, \lambda) = \begin{vmatrix} \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \lambda \cos \lambda x & -\lambda \sin \lambda x \end{vmatrix} = -\lambda(\sin^2 \lambda x + \cos^2 \lambda x) = -\lambda \neq 0,$$

$$c_1' = \frac{-1}{\lambda} \begin{vmatrix} 0 & \cos \lambda x \\ h(x) & -\lambda \sin \lambda x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} (-\cos \lambda x h(x)) = \frac{\cos \lambda x}{\lambda} h(x),$$

$$c_1' = \frac{\cos \lambda x}{\lambda} h(x), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} c_2' &= \frac{-1}{\lambda} \begin{vmatrix} \sin \lambda x & 0 \\ \lambda \cos \lambda x & h(x) \end{vmatrix}, \\ &= -\frac{\sin \lambda x}{\lambda} h(x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde ederiz. Buradan

$$c_1(x) = c_1(0) + \int_0^x \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi, \quad (3.13)$$

$$c_2(x) = c_2(0) - \int_0^x \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi \quad (3.14)$$

olarak bulunur. (3.13), (3.14) ifadeleri (3.9)'da yerine konulursa

$$y(x, \lambda) = \sin \lambda x \left[c_1(0) + \int_0^x \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi \right] + \cos \lambda x \left[c_2(0) - \int_0^x \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi \right]$$

$$= c_1(0) \sin \lambda x + c_2(0) \cos \lambda x + \int_0^x \frac{\sin \lambda x \cos \lambda \xi - \cos \lambda x \sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi$$

veya

$$y(x, \lambda) = c_1(0) \sin \lambda x + c_2(0) \cos \lambda x + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x - \xi)}{\lambda} h(\xi) d\xi \quad (3.15)$$

bulunur. Şimdi (3.11) ve (3.12) ifadelerini 1'den x'e kadar integralleyelim. Benzer yolla

$$y(x, \lambda) = c_1(1) \sin \lambda x + c_2(1) \cos \lambda x + \int_1^x \frac{\sin \lambda(x - \xi)}{\lambda} h(\xi) d\xi \quad (3.16)$$

elde ederiz. (3.15) ve (3.16) ifadelerini toplayıp ikiye bölersek genel çözüm

$$y(x, \lambda) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + \int_0^1 g(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

olarak bulunur. Burada

$$g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda(x - \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \lambda(x - \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

olmaktadır.

(3.17) deki c_1 ve c_2 sabitlerini sınır koşullarından bulalım, yani

$$\ell_1 y \equiv y(0, \lambda) \Rightarrow c_2 + \int_0^1 \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi = 0,$$

ve

$$y(\ell, \lambda) = 0 \Rightarrow c_1 \sin \lambda + c_2 \cos \lambda + \int_0^1 \frac{\sin \lambda(1 - \xi)}{\lambda} h(\xi) d\xi = 0$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Bu iki eşitlikten c_1 ve c_2 sabitleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur

$$c_1 = \int_0^1 \left[\frac{\cos \lambda \sin \lambda \xi}{\lambda \sin \lambda} - \frac{\sin \lambda (1-\xi)}{\lambda \sin \lambda} \right] h(\xi) d\xi,$$

$$c_2 = - \int_0^1 \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi.$$

Elde ettiğimiz ifadeler (3.17)'de yerine konursa

$$\begin{aligned} y &= c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + \int_0^1 gh(\xi) d\xi \\ &= \sin \lambda x \int_0^1 \left[\frac{\cos \lambda \sin \lambda \xi}{\lambda \sin \lambda} - \frac{\sin \lambda (1-\xi)}{\lambda \sin \lambda} \right] h(\xi) d\xi - \cos \lambda x \int_0^1 \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} h(\xi) d\xi + \int_0^1 gh(\xi) d\xi \end{aligned}$$

olur. Son ifadeyi

$$y(x, \lambda, h) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \quad (3.18)$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (3.19)$$

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \ell_1(g(x, \xi, \lambda)) & \ell_1(\sin \lambda x) & \ell_1(\cos \lambda x) \\ \ell_2(g(x, \xi, \lambda)) & \ell_2(\sin \lambda x) & \ell_2(\cos \lambda x) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \ell_1(\sin \lambda x) &= 0, & \ell_2(\sin \lambda x) &= \sin \lambda \\ \ell_1(\cos \lambda x) &= 1, & \ell_2(\cos \lambda x) &= \cos \lambda \end{aligned}$$

olmaktadır. (3.18) ifadesini açık şekilde yazmak için önce (3.19)'u açık şekilde yazalım. Bunun için aşağıdaki hesaplamalar sonucu

$$\ell_1(g(x, \xi, \lambda)) = \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda}, \quad \ell_2(g(x, \xi, \lambda)) = \frac{\sin \lambda (1 - \xi)}{\lambda},$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \ell_1(\sin \lambda x) & \ell_1(\cos \lambda x) \\ \ell_2(\sin \lambda x) & \ell_2(\cos \lambda x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} = -\sin \lambda, \quad (3.20)$$

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \ell_1(g(x, \xi, \lambda)) & \ell_1(\sin \lambda x) & \ell_1(\cos \lambda x) \\ \ell_2(g(x, \xi, \lambda)) & \ell_2(\sin \lambda x) & \ell_2(\cos \lambda x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \xi & 0 & 1 \\ \frac{1}{\lambda} \sin \lambda (1 - \xi) & \sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix}$$

$$= g(x, \xi, \Delta) \Delta(\lambda) - \sin \lambda x \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \xi & 1 \\ \frac{1}{\lambda} \sin \lambda (1 - \xi) & \cos \lambda \end{vmatrix} + \cos \lambda x \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \xi & 0 \\ \frac{1}{\lambda} \sin \lambda (1 - \xi) & \sin \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -g(x, \xi, \Delta) \sin \lambda - \sin \lambda x \left[\cos \lambda \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \xi - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda (1 - \xi) \right] + \cos \lambda x \left[\sin \lambda \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \xi \right]$$

$$= -g(x, \xi, \Delta) \sin \lambda - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cos \lambda \sin \lambda \xi + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \sin \lambda (1 - \xi) + \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \sin \lambda \sin \lambda \xi,$$

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \left[g(x, \xi, \lambda) + \frac{\cos \lambda}{\lambda \sin \lambda} \sin \lambda x \sin \lambda \xi - \frac{1}{\lambda \sin \lambda} \sin \lambda x \sin \lambda (1 - \xi) - \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \sin \lambda \xi \right]$$

olduğunu buluruz. Son olarak, (3.7), (3.8) probleminin çözümünü

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 \left[g(x, \xi, \lambda) + \frac{\cos \lambda}{\lambda \sin \lambda} \sin \lambda x \sin \lambda \xi - \frac{1}{\lambda \sin \lambda} \sin \lambda x \sin \lambda (1 - \xi) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \sin \lambda \xi \right] h(\xi) d\xi \quad (3.21)$$

şeklinde elde ederiz.

4. REZİDÜ METODU. PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1 Genel Kavramlar

Bir f fonksiyonu ile bunun bir z_0 tekil noktası verilsin. Eğer z_0 'ın, bu nokta hariç her yerinde f 'nin analitik olduğu bir komşuluğu varsa, z_0 a f 'nin bir ayrık tekil noktası denir.

$1/z$ fonksiyonu bu özelliğe sahip bir örnektir. Bu fonksiyon $z=0$ hariç her yerde analiktir; demek ki başlangıç noktası, fonksiyonun bir ayrık tekil noktasıdır.

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

fonksiyonunun $z=0$ ve $z=\pm i$ olmak üzere üç ayrık tekil noktası vardır.

z_0 noktası f 'nin bir ayrık tekil noktası olduğunda, $0 < |z - z_0| < r_1$ eşitsizliğini sağlayan her z noktasında fonksiyon analitik olacak şekilde pozitif bir r_1 sayısı vardır. Bu bağlantılı bölgede fonksiyon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (4.1)$$

Laurent serisiyle gösterilir. Buradaki katsayılardan b_1 özel olarak,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (4.2)$$

dir. Burada C , z_0 dolayında olup pozitif yönde yönlendirilmiş ve hem üzerinde hem de, z_0 hariç, içinde analitik olacak şekilde rasgele bir kapalı çevredir.

f fonksiyonunu veren (4.1) gösterimimizin, $0 < |z - z_0| < r_1$ olduğunda geçerli olan, z_0 dolayındaki özel Laurent açılımı olduğunu göz önüne alınız. z noktası z_0 a istenildiği kadar yakın olabilir. Yukarıdaki açılımda $(z - z_0)^{-l}$ in katsayısı olan b_l e, f nin z_0 ayrık tekil noktasındaki rezidüsü denir ve $b_l = \text{Res}(f, z_0)$ ile gösterilir.

Her fonksiyonun, ayrık tekil noktalarının her birinde bir rezidüsü vardır, çünkü bu nokta dolayındaki Laurent serisi noktanın, kendisi hariç, bir komşuluğu üzerinde fonksiyonu temsil eder. Bununla birlikte rezidünün değeri sıfır olabilir. (4.2) formülüne göre, f 'nin z_0 daki rezidüsü $(2\pi i)^{-1} \int_C f(z) dz$ nin, z_0 ı çeviren ve hem üzerinde hem de, z_0 hariç, içinde f analitik olacak şekilde alınan kapalı bir C çevresi boyunca ve pozitif yönde alınan entegralinin değeridir.

Şimdi, kapalı çevreler boyunca alınan belli integralleri değerlendirmede kuvvetli bir yöntemimiz var. Örneğin, $e^{-z}(z-1)^{-2}$ fonksiyonunun $C_0: |z|=2$ çemberi boyunca ve pozitif yönde çevre integralini değerlendirelim. Fonksiyonun tekil noktası olan $z=1$ çemberin içindedir.

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} - \frac{e^{-1}}{(z-1)} + e^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \quad (|z-1|>0) \quad (4.3)$$

yazmak için e^{-z} 'nin $z=1$ noktası civarında Taylor serisini kullanabiliriz. Bu Laurent açılımından, fonksiyonumuzun $z=1$ deki rezidüsünün $-e^{-1}$ olduğunu görürüz ve buradan da

$$\int_{C_0} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = -\frac{2\pi i}{e} \quad (4.4)$$

olduğu hemen görülür.

Diğer bir örnek olarak, yukarıdaki C_0 çemberi için

$$\int_{C_0} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0 \quad (4.5)$$

olduğunu gösterelim. $1/z^2$ başlangıç hariç her yerde analitik olduğundan, buradaki integral altı da aynı özelliktedir. Tekil nokta C_0 in içindedir. Üstel fonksiyonun Maclaurin serisinden yararlanarak,

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} + \dots \quad (|z|>0)$$

Laurent açılımını yazabiliriz. Dolayısıyla integral altının $z=0$ tekil noktasında rezidüsü sıfırdır ($b_1=0$) ve böylece (4.5) integralinin sıfır olduğu gösterilmiş olur.

4.2 Rezidü Teoremi

Eğer bir fonksiyonun bir bağlantılı bölgede yalnız sonlu sayıda tekil noktası varsa, rezidü teoremi gereğince bu tekil noktalar ister istemez ayrılırlar.

C kapalı bir çevre olsun ve bir f fonksiyonu, C içindeki sonlu sayıda z_1, z_2, \dots, z_n tekil noktaları hariç, C'nin hem üzerinde hem de içinde analitik olsun. Eğer bu noktadaki rezidüler K_1, K_2, \dots, K_n ile gösterilirse, integral saat yönünün tersinde alınmak üzere

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i(K_1 + K_2 + \dots + K_n) \quad (4.6)$$

dir.

Bir örnek olarak, $|z| = 2$ çemberi olan C saatin tersi yönünde yönlendirildiğinde

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

entegralinin değerini bulalım. İntegral altındaki ifadenin tekil noktaları olan $z = 0$ ve $z = 1$ C'nin içinde bulunurlar.

$z = 0$ daki K_1 rezidüsünü bulmak için

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(5 - \frac{2}{z}\right) \left(\frac{-1}{1-z}\right) = \left(-5 + \frac{2}{z}\right) (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \dots \quad (0 < |z| < 1) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Demek ki $K_1 = 2$ dir.

$z = 1$ deki K_2 rezidüsünü bulmak için, entegral altının $z = 1$ noktası dolayında yapılan uygun Laurent açılımının katsayılarını belirlerken

$$\frac{1}{z} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots \quad (|z-1| < 1)$$

Taylor serisini kullanabiliriz. O halde $0 < |z-1| < 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) \cdot \frac{1}{z} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] \end{aligned}$$

olur. Bu çarpımda $(z-1)^{-1}$ in katsayısı 3 tür dolayısıyla $K_2 = 3$ tür. Bunun için

$$\int_c \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (K_1 + K_2) = 10\pi i$$

sonucuna varılır.

5. PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ – SINIR DEĞER PROBLEMİNİN REZİDÜ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

5.1 Isı Denklemi İçin Birinci Sınır Değer Probleminin Çözümü

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (5.2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \quad (5.3)$$

Burada, $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonu, x yer değişkenini, t ise zaman değişkenini göstermektedir. (5.1) – (5.3) karışık problemine karşılık gelen spektral problem

$$y'' - \lambda^2 y = f(x), \quad (5.4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (5.5)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki bölümde gösterdiğimiz gibi (5,4), (5,5) probleminin çözümü

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

olarak ifade edilmektedir.

Rezidü yönteminin genel yapısına uygun olarak (5.4), (5.5) spektral problemden başka birde

$$\frac{\partial T(x, \lambda, t)}{\partial t} + \lambda^2 T(x, \lambda, t) = 0, \quad (5.6)$$

$$T(x, \lambda, 0) = \varphi(x). \quad (5.7)$$

Cauchy problemini karşılık getirmemiz gerekmektedir. (5.6), (5.7) probleminin çözümü

$$T(x, t, \lambda) = \varphi(x)e^{-\lambda t} \quad (5.8)$$

olmaktadır.

[2], takip ederek $[0, I]$ de tanımlı ve I . basamaktan türevlenebilen her $h(x)$ için

$$A_\nu h \equiv h_\nu^{(j)} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^{2j+1} y(x, \lambda, h) d\lambda \quad (5.9)$$

operatörünü göz önüne alalım. (5.9) notasyonunda

$$\begin{aligned} h_\nu^{(0)} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda y(x, \lambda, h) d\lambda = -\sum_\nu \int_0^1 \operatorname{Re} s \frac{\lambda \Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h(\xi) d\xi = \\ &= -\sum_\nu h_\nu^{(0)}(x) \end{aligned} \quad (5.10)$$

olmaktadır. (5.9) operatörünü (5.1) – (5.3) problemine uygularsak

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^{2j+1} y\left(x, \lambda, \frac{\partial u}{\partial t}\right) d\lambda = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^{2j+1} y\left(x, \lambda, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) d\lambda \quad (5.11)$$

elde ederiz.

(5.9) formülüne göre $y(x, \lambda, h)$ operatörü üçüncü argümana göre lineer olmaktadır.

(3.18) formülünü dikkate alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\nu^{(j)}}{\partial t} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^{2j+1} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \\ &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^{2j+1} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki eşitlik çerçevesinde

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u(\xi, t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} G(x, \xi) u d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_v^{(j)} = u_v^{(j+1)} \quad (5.12)$$

olduğunu elde ederiz.

(5.9) operatörünü (5.2) başlangıç koşuluna da uygularsak,

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y(x, \lambda, u(x, 0)) d\lambda = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y(x, \varphi(x)) d\lambda$$

veya

$$u_v^{(j)}(x, 0) = \varphi_v^{(j)}(x) \quad (5.13)$$

olarak alırız.

Gösterelim ki, (5.12), (5.13) ün çözümü

$$u_v^{(j)}(x, t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y(x, \lambda, T) d\lambda$$

olmaktadır. Gerçektende,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_v^{(j)}}{\partial t} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y\left(x, \lambda, \frac{\partial T}{\partial t}\right) d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y(x, \lambda, -\lambda^2 T(x, \lambda, t)) d\lambda \\ &= u_v^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Benzer yolla

$$u_v^{(j)}(x, 0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_v} \lambda^{2j+1} y(x, \lambda, \varphi(x)) d\lambda = \varphi_v^{(j)}(x)$$

olduğunu da görmek zor değildir. O halde (5.1) – (5.3) probleminin çözümünü (5.10) a göre

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{\nu} u_{\nu}^{(0)}(x, t) \\
&= \sum_{\nu} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1} c_{\nu}} \int \lambda y(x, \lambda, T(x, \lambda, t)) d\lambda \\
&= \sum_{\nu} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1} c_{\nu}} \int \lambda d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) e^{-\lambda^2 t} d\xi \\
&= \sum_{\nu} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1} c_{\nu}} \int \lambda e^{-\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \varphi(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

veya

$$u(x, t) = -\sum_{\nu} \int_0^1 \frac{\lambda_{\nu} e^{-\lambda_{\nu}^2 t} \Delta(x, \xi, \lambda_{\nu})}{\Delta'(\lambda_{\nu})} \varphi(\xi) d\xi$$

şeklinde elde ederiz. Sonuncu ifadedeki rezidüleri

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1} c_{\nu}} \int \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)} dz = \frac{\varphi(z_0)}{\Psi'(z_0)}$$

formülüne göre hesaplırsak

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{\nu} e^{-\lambda_{\nu}^2 t} \Delta(x, \xi, \lambda_{\nu})}{\Delta'(\lambda_{\nu})} &= \frac{\lambda_{\nu} e^{-\lambda_{\nu}^2 t}}{\Delta'(\lambda_{\nu})} \left[-g(x, \xi, \lambda_{\nu}) \sin \lambda_{\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu}} \cos \lambda_{\nu} \sin \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} \xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda_{\nu}} \sin \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} (1 - \xi) + \frac{1}{\lambda_{\nu}} \cos \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} \sin \lambda_{\nu} \xi \right] \\
&= \frac{\lambda_{\nu} e^{-\lambda_{\nu}^2 t}}{-\cos \lambda_{\nu}} \left[-g(x, \xi, \lambda_{\nu}) \sin \lambda_{\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu}} \cos \lambda_{\nu} \sin \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} \xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda_{\nu}} \sin \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} (1 - \xi) + \frac{1}{\lambda_{\nu}} \cos \lambda_{\nu} x \sin \lambda_{\nu} \sin \lambda_{\nu} \xi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_\nu e^{-\lambda_\nu^2 t} g(x, \xi, \lambda_\nu) \frac{\sin \lambda_\nu}{\cos \lambda_\nu} + e^{-\lambda_\nu^2 t} \sin \lambda_\nu x \sin \lambda_\nu \xi + \\
&\quad - e^{-\lambda_\nu^2 t} \frac{\sin \lambda_\nu x \sin \lambda_\nu (1 - \xi)}{\cos \lambda_\nu} - e^{-\lambda_\nu^2 t} \frac{\cos \lambda_\nu x \sin \lambda_\nu \sin \lambda_\nu \xi}{\cos \lambda_\nu} \\
&= e^{-(\pi\nu)^2 t} \sin(\pi\nu)x \sin \lambda_\nu \xi - e^{-(\pi\nu)^2 t} \frac{\sin \pi\nu x \sin \pi\nu(1 - \xi)}{\cos \pi\nu} \\
&= e^{-(\pi\nu)^2 t} \sin(\pi\nu)x \sin \lambda_\nu \xi + e^{-(\pi\nu)^2 t} \sin \pi\nu \xi \sin(\pi\nu)x] \\
&= 2e^{-(\pi\nu)^2 t} \sin(\pi\nu)x \sin \pi\nu \xi .
\end{aligned}$$

elde ederiz. (5.1) – (5.3) probleminin çözümü olarak aşağıdaki ifadeyi

$$u(x, t) = 2 \sum \sin(\pi\nu x) \int_0^1 e^{-(\pi\nu)^2 t} \sin(\pi\nu \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

elde ederiz.

5.2. Parabolik Tür Denklem İçin Birinci Başlangıç – Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki şekilde verilmiş 2. basamaktan sabit katsayılı parabolik tür denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + c(P - P_0). \quad (5.14)$$

Burada, $P(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon, x yer koordinatı, t zaman değişkeni olmaktadır. a , b , c bilinen sabitlerdir. (5.14) denkleminin tek bir çözümünü elde etmek için aşağıdaki başlangıç değer ve sınır koşullarını

$$\begin{aligned}
P(x, 0) &= P_0(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\
P(0, t) &= P_1(t), & P(\ell, t) = P_2(t), & t > 0
\end{aligned} \quad (5.15)$$

ekleyelim. Burada $P_0(x)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ bilinen fonksiyonlar, ℓ ise bir sabittir. Kolaylık için

$$P(x,t) = e^{-\alpha x - \beta t} v(x,t) \quad (5.16)$$

değişken dönüşümü uygulayalım. Bu değişken dönüşümünden sonra (5.14) denklemi aşağıdaki gibi

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \varphi(x,t) \quad (5.17)$$

olur. Burada,

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{b^2}{4a} - c, \quad \varphi(x,t) = -cP_0(x),$$

olmaktadır. (5.17)'e karşılık gelen başlangıç ve sınır koşulları ise

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v(0,t) = v_1(t), \quad v(\ell,t) = v_2(t) \quad (5.18)$$

şeklinde olur. Burada

$$v_0(x) = e^{\alpha x} \cdot P_0(x), \\ v_1(t) = e^{\beta t} \cdot P_1(t), \quad v_2(t) = e^{\alpha \ell + \beta t} \cdot P_2(t)$$

dir.

Şimdi homojen olmayan sınır koşullarını homojen sınır koşullarına dönüştürelim.

Bundan dolayı

$$v(x,t) = Ax + B$$

değişken dönüşümü yapalım. Bilinmeyen A ve B sabitleri

$$\begin{cases} B = v_1(t) \\ A\ell + B = v_2(t) \end{cases}$$

cebirsel denklemler sisteminden bulunur. Kolaylık için bu işlemlerin yapıldığını varsayalım, yani $v_1(t) = v_2(t) \equiv 0$ olarak ele alalım.

Ayrıca $\varphi(x,t)$ kaynak fonksiyonunun sıfır olduğunu varsayalım. (5.17), (5.18) problemine aşağıdaki özdeğer problemini

$$\frac{d^2 \bar{v}(x, \lambda)}{dx^2} - \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a}} \right)^2 \bar{v}(x, \lambda) = -\frac{v_0(x)}{a}, \quad (5.19)$$

$$\bar{v}(0, \lambda) = \bar{v}(\ell, \lambda) = 0, \quad (5.20)$$

karşılık getirelim. Burada, $\bar{v}(x, \lambda)$, $v(x,t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmaktadır ve λ kompleks parametredir.

(5.19), (5.20) probleminin çözümünü yukarıda gösterildiği gibi Green fonksiyonu yardımıyla

$$\bar{v}(x, \lambda) = -\int_0^\ell G(x, \xi, \lambda) v_0(\xi) d\xi \quad (5.21)$$

gibi elde ederiz. Buradaki

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

(5.19), (5.20) probleminin Green fonksiyonu olmaktadır ve

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g_0(x, \xi, \lambda) & e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}x} & e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}x} \\ g_0(0, \xi, \lambda) & 1 & 1 \\ g_0(\ell, \xi, \lambda) & e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell} & e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell} \end{vmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell}} & \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell}} \\ e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell} & e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\ell} \end{vmatrix}, \quad (5.23)$$

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{a}\lambda} [e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(x-\xi)} - e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(x-\xi)}], & 0 \leq \xi \leq x \leq \ell \\ \frac{-1}{4\sqrt{a}\lambda} [e^{\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(x-\xi)} - e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(x-\xi)}], & 0 \leq x \leq \xi \leq \ell \end{cases}$$

[2]'i takip ederek (5.17), (5.18) probleminin çözümünü

$$v(x, t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{C_k} \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^\ell \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} v_0(\xi) d\xi \quad (5.24)$$

şeklinde elde ederiz. Burada C_k , $\Delta(\lambda)$ 'nın yalnız bir λ_k kutup noktasını içerisine alan kapalı bir eğri olmaktadır.

Şimdi (5.24) formülü ile verilen ifadenin hesaplanması ile uğraşalım. Açık ki,

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{a}\pi k \sqrt{-1}}{\ell} \quad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

sayıları $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin sade kökleri olmaktadır. Bu takdirde rezidü teorisinin esas formülünü kullanarak, (5.24) ifadesi için aşağıdaki

$$v(x, \lambda) = - \sum_k \int_0^\ell \frac{\lambda_k e^{\lambda_k^2 t}}{\Delta'(\lambda_k)} \Delta(x, \xi, \lambda_k) v_0(\xi) d\xi \quad (5.25)$$

formülünü elde ederiz. Kolaylıkla görmek mümkündür ki,

$$\Delta'(\lambda_k) = -\frac{2\ell}{\sqrt{a}} \cos \pi k, \quad (5.26)$$

olur ve

$$\Delta(x, \xi, \lambda_k) = -\frac{2}{\sqrt{a}\lambda_k} \sin \frac{\pi k}{\ell} (\ell - \xi) \cdot \sin \frac{\pi k}{\ell} x \quad (5.27)$$

dir. (5.26) ve (5.27) ifadelerini (5.25)'de yerine yazarsak ve bir kaç işlemlerden sonra $v(x,t)$ fonksiyonu için aşağıdaki formülü elde ederiz

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} e^{-\frac{a\pi^2 k^2}{\ell^2} t} \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi \sin \frac{\pi k x}{\ell} v_0(\xi) d\xi. \quad (5.28)$$

Nihayet, (5.14) formülü dikkate alınarak bilinmeyen $P(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde

$$P(x,t) = e^{-\frac{\alpha}{2a}x + (B - \frac{\alpha^2}{4a})t} v(x,t) + g(x,t) \quad (5.29)$$

elde ederiz.

5.3 İkinci Başlangıç – Sınır Değer Problemi

Bu bölümde yukarıdakinden farklı olarak sınır koşulunu aşağıdaki şekilde verelim

$$\frac{\partial P(0,t)}{\partial x} = g(t), \quad \frac{\partial P(\ell,t)}{\partial x} = g_1(t). \quad (5.30)$$

Burada $g(t)$ ve $g_1(t)$ bilinen fonksiyonlardır.

Yine kolaylık için $\alpha = 0$ olarak alalım. Bu taktirde $P(x,t)$ fonksiyonunu

$$P(x,t) = e^{\beta t} \cdot (v_1(x,t) + g_1(x,t)), \quad (5.31)$$

şeklinde arayalım. Burada

$$g_1(x,t) = e^{-\beta t} \left[(g_1(t) - \frac{g(t)}{a_1}) \frac{x^2}{2\ell} + \frac{g(t)}{a_1} x \right] \quad (5.32)$$

olmaktadır. $v_1(x,t)$ fonksiyonunun korunduğu denklem aşağıdaki gibidir

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} + \varphi_1(x,t), \quad (5.33)$$

$$v_1(x,0) = \mu_0(x), \quad \frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v_1(\ell,t)}{\partial x} = 0. \quad (5.34)$$

Burada

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,t) &= -\beta P_0(x)e^{\beta t} - \frac{\partial g_1(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 g_1(x,t)}{\partial x^2}, \\ \mu_0(x) &= e^{\alpha x} \cdot P_0(x) - g_1(x,0) \end{aligned} \quad (5.35)$$

dır. Yukarıdaki paragrafta olduğu gibi gereken işlemler yapılarak, $v_1(x,t)$ çözümü için sonuç olarak

$$v_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-\delta_0^k}}{\ell} e^{-\frac{a\pi^2 k^2}{\ell^2} t} \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi k}{\ell} x \cdot \cos \frac{\pi k}{\ell} \xi [\mu_0(\xi) + \int_0^t e^{-\frac{a\pi^2 k^2}{\ell^2} \tau} \varphi_1(\xi, \tau) d\tau] d\xi \quad (5.36)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Burada δ_i^k Kroneker sembolünü göstermektedir.

Kolayca görülmektedir ki (5.28) ve (5.36) serileri hızlı yakınsak seriler olmaktadır. Bu da bize aradığımız problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için önemli bir enstrüman sunmaktadır.

Ayrıca da elde edilen yaklaşık formülleri PC yardımıyla da kolayca hesaplayabiliriz. (5.28) ve (5.36) serilerinden görüldüğü gibi bu ifadeleri Fourier yöntemiyle de ele almak mümkündür. Lakin bilindiği gibi Fourier yöntemi $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin kökleri sade olduğu durumda sonuç vermektedir. Bizim ele aldığımız (5.28) ve (5.36) çözümlerinde ise $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin köklerinin katlı olduğu durumlarda da çözüm için analitik ifade almak mümkündür. Bu da rezidü yönteminin daha geniş sınıflarda uygulanabilmesini göstermektedir. Fourier yönteminin diğer bir özelliği de başlangıç sınır değer probleminin kendi kendine adjoint olmasıdır. Rezidü yönteminde ise bu özelliğin korunması gerekmemektedir.

6. İKİ BOYUTLU PARABOLİK TÜR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN REZİDÜ ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde 2 boyutlu parabolik tür denklem için sınır değer problemlerini inceleyeceğiz.

Bu nedenle aşağıdaki problemi $D_T = D \times [0, T]$, $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ bölgesinde,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = x^2 \Delta P - d_1(P - P_0) \quad (6.1)$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (6.2)$$

$$p(x, y, t) = p_1(x, y, t) > 0, \quad x, y \in \Gamma \quad (6.3)$$

göz önüne alalım. Burada, $p = p(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyon, $p_0(x, y)$ ve $p_1(x, y, t)$ bilinen fonksiyonlardır ve

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace operatörü olmaktadır.

Aşağıdaki gibi

$$p(x, y, t) = e^{-d_1 t} u(x, y, t) + p_1(x, y, t) \quad (6.4)$$

değişken dönüşümü uygualım. Bu dönüşümden sonra (6.1) – (6.3) problemi aşağıdaki

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = x^2 \Delta u(x, y, t) + \phi(x, y, t), \quad (6.5)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (6.6)$$

$$u(x, y, t)/_{\Gamma} = 0 \quad (6.7)$$

gibi olmaktadır, burada

$$\phi(x, y, t) = e^{-d_1 t} (x^2 \Delta P_1(x, y, t) - \frac{\partial p_1(x, y, t)}{\partial t} + d_1 (p_0(x, y) - p_1(x, y, t))) \quad (6.8)$$

ve

$$u_0(x, y) = p_0(x, y) - p_1(x, y, 0) \quad (6.9)$$

dir.

Aşağıdaki gibi tanımlanan iki özel yardımcı problemleri

$$-x^2 \frac{\partial^2 g_1(x, y, t)}{\partial x^2} - \lambda^2 g_1(x, y, t) = h(x), \quad (6.10)$$

$$g_1(a, y, t) = g_1(b, y, t) = 0; \quad (6.11)$$

$$-\frac{\partial V(\xi, y, t)}{\partial t} - x^2 \frac{\partial^2 V(\xi, y, t)}{\partial y^2} - \lambda^2 V(\xi, y, t) = \phi(\xi, y, t), \quad (6.12)$$

$$V(\xi, y, 0) = \mu_0(\xi, y), \quad (6.13)$$

$$V(\xi, c, t) = V(\xi, d, t) = 0 \quad (6.14)$$

göz önüne alalım. (6.10), (6.11) problemine spektral problem denir.

[2] deki rezidü yönteminin yapısına göre (6.5) – (6.7) probleminin çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{c_k} \lambda d\lambda \int_a^b G(x, \xi, \lambda) V(y, \xi, t, \lambda) d\xi \quad (6.15)$$

şeklinde olmaktadır.

Burada $G(x, \xi, \lambda)$ (6.10) – (6.11) probleminin Green fonksiyonu, $g_2(y, \xi, t, \lambda)$ ise (6.12) – (6.14) karışık probleminin çözümü olmaktadır. C_k Green fonksiyonunun her bir kutup noktalarını içerisine alan kapalı eğriyi göstermektedir. Toplama işlemi ise tüm kutup noktaları için gerçekleşmektedir.

(6.10), (6.11) probleminin Green fonksiyonu kolayca bulunabilir ve bu fonksiyon

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (6.16)$$

şeklindedir.

Burada,

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g_0(x, \xi, \lambda) & e^{\frac{\lambda}{x}} & e^{\frac{\lambda}{x}} \\ g_0(0, \xi, \lambda) & e^{\frac{\lambda}{a}} & e^{\frac{\lambda}{a}} \\ g_0(l, \xi, \lambda) & e^{\frac{\lambda}{b}} & e^{\frac{\lambda}{b}} \end{vmatrix}, \quad (6.17)$$

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{4x\lambda} [e^{\frac{\lambda}{x(x-\xi)}} - e^{\frac{\lambda}{x(x-\xi)}}], & a \leq \xi \leq x \leq b, \\ \frac{-1}{4x\lambda} [e^{\frac{\lambda}{x(x-\xi)}} - e^{\frac{\lambda}{x(x-\xi)}}], & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases} \quad (6.18)$$

$$\Delta(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{x(b-a)}} - e^{\frac{\lambda}{x(b-a)}} \quad (6.19)$$

dır. Kolayca görmek mümkündür ki,

$$\lambda_k = \frac{x\pi k \sqrt{-1}}{b-a}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sayıları (6.19) denkleminin sade kökleridir. Basit hesaplamalardan sonra

$$\Delta(x, \xi, \lambda_k) = \frac{2}{x\lambda_k} \sin \frac{\pi k}{b-a} (\xi - a) \sin \frac{\pi k}{b-a} (x - a) \cos \pi k, \quad (6.20)$$

ve

$$\Delta'(\lambda_k) = -\frac{2}{x} (b-a) \cos \pi k, \quad (6.21)$$

olduğunu elde ederiz.

Şimdi (6.12) – (6.14) probleminin çözümünü ele alalım. Bunun için bu problemi uygun şekilde

$$\frac{\partial v(\xi, y, t)}{\partial t} = x^2 \frac{\partial^2 v(\xi, y, t)}{\partial y^2} + F(\xi, y, t), \quad (6.22)$$

$$v(\xi, y, 0) = \mu_0(\xi, y) \quad (6.23)$$

$$v(\xi, c, t) = v(\xi, d, t) = 0 \quad (6.24)$$

indirgeyelim. Burada,

$$v(\xi, y, t) = g_2(\xi, y, t) e^{-\lambda^2 t}, \quad F(\xi, y, t) = \phi(\xi, y, t) e^{-\lambda^2 t} \quad (6.25)$$

olmaktadır. (6.22) – (6.24) probleminin çözümü yukarıdaki bölümde gösterdiğimiz gibi

$$v(\xi, y, t) = \frac{2}{d-c} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{x^2 \pi^2 m^2}{(d-c)^2} t} \int_c^d \sin \frac{\pi m}{d-c} (\eta - c) \sin \frac{\pi m}{d-c} (y - c) [\mu_0(\xi, \eta) + \int_0^t e^{-\frac{x^2 \pi^2 m^2}{(d-c)^2} \tau} F(\xi, \eta, \tau) d\tau] d\eta \quad (6.26)$$

şeklindedir. (6.15)'i dikkate alarak, (6.5) – (6.7) probleminin çözümünü

$$u(x, y, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_a^b \frac{\Delta(x, \xi, \lambda_n)}{\Delta'(\lambda_n)} V(y, \xi, t, \lambda_n) d\xi \quad (6.27)$$

şeklinde gösterebiliriz.

(6.20), (6.21) ve (6.4) ü de dikkate alarak aradığımız $p(x,y,t)$ için:

$$\begin{aligned}
 p(x,y,t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4}{(b-a)(d-c)} e^{-[x^2\pi^2(\frac{n^2}{(b-a)^2} + \frac{m^2}{(d-c)^2}) + d_1]t} \\
 &\int_a^b \int_c^d \sin \frac{\pi n}{b-a}(x-a) \sin \frac{\pi m}{d-c}(y-c) \sin \frac{\pi n}{b-a}(\xi-a) \sin \frac{\pi m}{d-c}(\eta-c) \\
 &[p_0(\xi,\eta) - p_1(\xi,\eta,0) + \int_0^t e^{-[x^2\pi^2(\frac{n^2}{(b-a)^2} + \frac{m^2}{(d-c)^2}) + d_1]\tau} \\
 &(x^2\Delta p_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{\partial p_1(\xi,\eta,\tau)}{\partial t} + d_1(p_0(\xi,\eta) - p_1(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta + p_1(x,y,t)].
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

elde ederiz.

(6.28) ifadesinden görüldüğü gibi ele aldığımız iki kat serilerde

$e^{-[x^2\pi^2(\frac{n^2}{(b-a)^2} + \frac{m^2}{(d-c)^2}) + d_1]t}$ hızıyla yakınsaktır. Bu da bize elde ettiğimiz (6.28) çözümünden pratik amaçlar için kullanma imkanı sağlamaktadır.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezde genel olarak, bir ve iki boyutlu lineer ısı denklemi için yazılmış birinci ve ikinci başlangıç – sınır değer problemlerinin gerçek çözümlerinin elde edilmesi için rezidü yöntemi incelenmiştir. Alınan sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

- Bir boyutlu lineer ısı denklemi için 1. başlangıç – sınır değer probleminin çözümü uygun spektral problemin kutup noktalarının rezidüleri üzerine hızlı yakınsak bir seri şeklinde elde edilmiştir.
- Rezidü yöntemi 2. basamaktan genel şekilde yazılmış parabolik tür denklem için 1. başlangıç sınır değer probleminin çözümüne uygulanmış ve problemin gerçek çözümü için pratik amaçlar için kullanışlı bir formül elde edilmiştir.
- İki boyutlu ısı denkleminin 1. başlangıç – sınır değer probleminin de rezidü yöntemi ile çözümü elde edilmiştir.

Elde ettiğimiz çözümler, pratikte ısı dağılımı ile ilgili problemlerin optimal çözülmesinde kullanılabilir.

8. KAYNAKÇA

[1] Murray R. Spiegel, Complex Variables, Mc Graw – Hill, Singapore, 1964.

[2] M. L Rasulov, Method of Countour Integration, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

ÖZGEÇMİŞ

12.08.1973 yılında İstanbul'da doğdum. İlk öğrenimimi Hamdullah Suphi Tanrıöver okulunda, orta ve lise öğrenimimi Kültür Kolejin'de tamamladım. 1992 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 1997 yılında mezun oldum. Bir süre özel sektörde dış ticaretle uğraştıktan sonra 1998 de İstanbul da M.E.B'e bağlı bir kurumda matematik öğretmeni olarak göreve başladım. Kasım 1999'da vatani görevime Tuzla Piyade Okulu akabinde Foça Komanda Okulunda başladım ve Kütahya Er Eğitim Taburunda Jandarma Asteğmen olarak tamamladım. 2001 – 2004 yılları arasında Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsünde Sigortacılık Anabilim Dalında yüksek lisans yaptım. 2005 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar – Matematik Ana Bilim Dalında Uygulamalı Matematik yüksek lisansa başladım. Halen matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olup İngilizce'yi iyi Almanca'yı orta düzeyde kullanmaktayım.