

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAREKET GEOMETRİSİNDE DÖNME OPERATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Emek GÜNDÜZ
DANIŞMAN : Yrd.Doç.Dr.Şakir İŞLEYEN

VAN - 2007

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAREKET GEOMETRİSİNDE DÖNME OPERATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Emek GÜNDÜZ

VAN – 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd.Doç.Dr.Şakir İŞLEYEN danışmanlığında Emek GÜNDÜZ tarafından hazırlanan “*Hareket Geometrisinde Dönme operatörleri*” isimli bu çalışma 07/12/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof. Dr. Gabil AMNİRALİ

İmza:

Üye :Yard. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN

İmza:

Üye :Yard. Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 28/12/2007 gün ve 2007/28-VI sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr. Nahit AKTAŞ

Enstitü Müdürü

ÖZET

HAREKET GEOMETRİSİNDE DÖNME OPERATÖRLERİ

GÜNDÜZ, Emek

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd.Doç. Dr.Şakir İŞLEYEN

Aralık 2007, 30 sayfa

Bu çalışmada, sabit bir koordinat çatısıyla ilişkili olarak noktaların(veya vektörlerin) dönme hareketleri arasındaki fark ortaya konulacaktır.Eğer her iki durumda dönme açısı aynı ise dönme operatörlerinin birisinin, diğer operatörün transpozu olduğu gösterilecektir.

Anahtar kelimeler: Dönme hareketi, Kuaterniyon operatörü, Ortogonal matris

ABSTRACT

QUATERNION OPERATORS OF MOVEMENT GEOMETRY

GÜNDÜZ, Emek

Msc, Department of Mathematics

Supervisor: Assist.Prof. Dr. Şakir İŞLEYEN

December 2007, 30 pages

In this study the difference between the revolving movements of the points(or vectors) in connection with a constant coordinate frame will be examined. If the revolving angle is same in both situations,one of the revolving operators will be shown as the transpose of the other.

Key words: Rotation Movement, Orthogonal Matrix, Quaternion Operator.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, aynı koordinat eksenleri yönünde olmayan dönme hareketlerinin $A = R_1.R_2$ şeklinde iki dönme hareketinin bir dizisinde herhangi bir eksen yönünde ve herhangi bir açı boyunca bir dönme hareketi ve bu dönme hareketinin dönme operatörleri tanıtılacaktır. Böylece, bu dönme hareketini temsil edecek olan 3x3 ortogonal matrisi oluşturulacaktır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, danışmanım sayın Yrd.Doç.Dr.Şakir İŞLEYEN'e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Emek GÜNDÜZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. TEMEL TANIMLAR ve ÖNBİLGİLER	3
2.1 Koordinat Transformasyonları	3
2.2 Bir Ortogonal matrisin Karakteristik Vektörleri	4
2.3 Cayley Formülü	6
2.4 3x3 Anti Simetrik Matrisler	7
2.5 Rodriques Denklemi	8
2.6 Euler Parametreleri	10
3. DÖNME DİZİLERİ	12
3.1. Düzlemde Dönme Dizileri	12
3.2. R^3 te Koordinatlar	13
3.3. Ardarda Aynı Eksen Dönmeleri	15
3.4. Dönme Matrislerinde İşaretler	16
3.5. R^3 te Dönme Dizileri	17
3.5.1. Dönme geometrisi	17
3.5.2. Dönme özdeğerleri ve özvektörleri	19

3.5.3. Dönme hareketinin sabit eksen	20
3.5.4. Sabit eksen yönünde dönme açısı	21
4.UYGULAMALAR	23
4.1. Örnek	23
4.2. Örnek	24
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	28
KAYNAKLAR	29
ÖZ GEÇMİŞ	30

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. R^3 te dönme hareketi.	3
Şekil 2.2. Cayley denklemi.	6
Şekil 2.3. Dik düzleme izdüşümler.	9
Şekil 3.1. R^2 de dönme dizisi.	12

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

A	Ortogonal Matris
λ	Ortaogonal matrisin karekteristik değeri

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Geometri, belli bir dönüşüm grubu altındaki değişmezlerin teorisidir. Bu nedenledir ki geometrileri dönüşümlerle birleştirerek ele almak gerekir. Bu fikri ilk defa Felix Klein ‘Erlangen Programı’ ile ortaya koymuş ve geometrileri sınıflandırmıştır.

Geometrik özelliklerle noktaların koordinatlarının cebirsel özellikleri arasındaki bağıntıları bulmak her zaman kolay olmayabilir. Bu yüzden bazı metodlar kullanarak gerekli dönüşümler yapma ihtiyacı doğabilir. İşte bu konuda iki metoda başvurulur.

1-Elemanları sayı sistemleri olan uzay kavramı esas alınır ki buna analitik metod denir.

2-Bir diğer metod ise vektörler teorisinin baz alınarak yapılan yöntemdir.

Her iki yöntemin amacı da var olan bir cismin yapısını ve hareketini incelemeye yöneliktir.

Bu çalışmada, uzayda hareket halinde olan bir cismin dönme hareketi, dönme eksenini bulmak için bazı dönüşümler gerçekleştirilecek ve ard arda yapılan dönme hareketlerinin yapısı incelenecektir. Bunda başarıya ulaşmak için de çeşitli dönüşüm operatörlerinden faydalanılacaktır.

Ayrıca birinci ve ikinci bölümlerde ele alınacak uzayı tanımlayabilmek için vektörler teorisinden faydalanılacak ve ancak dönüşümleri bir uzaya uygularken birinci metoda başvurulacaktır.

Birinci bölümde R^2 denilen 2-boyutlu uzayda dönmelerden bahsedilecek ve tüm dönmelerin $SO(2)$ grubundaki (özel ortogonal 2×2 matrisleri) matrislerle nasıl gösterildiği anlatılacaktır. Özellikle bir sabit koordinat çatısıyla ilişkili olarak noktaların (veya vektörler) bir dönmesine karşın sabit noktalar (veya vektörler) la ilgili olarak koordinat çatısının bir dönme arasındaki fark ortaya konulacaktır. Aslında, eğer iki durumda da dönme açısı θ ise, dönme operatörü basitçe diğer durumun dönme operatör transpozudur. Burada bu fikirler 1-boyutlu durumda yani R^1 de devam ettirilecektir.

Burada nihai amaç ise kuaterniyonların R^3 ’de nasıl dönme operatörleri olarak kullanıldığını göstermektir. İlk önce R^2 ’de dönmelerin basit bir dizisinden bahsedilerek ve R^3 de dönme dizilerinin tüm matris cebiri açısından incelenecektir. Böylelikle bu sonuçlarla uzaydaki herhangi bir cismin hareketi analiz edilecektir.

Bu çalışmanın esas amaçlarından biri bir cismin birden fazla hareket ederek konum değiştirmesini matematiksel bir platformda formülize etmektir. Yani bir cisim aynı hareketi birden fazla şekilde yaparsa hareket denklemi ne olacak veya bu hareketler nasıl tanımlanacak sorularından yola çıkıldı. Kuipers'den (2002) yararlanılarak ardı ardına dönme hareketlerinin hareket denklemleri oluşturuldu. Daha sonra, kinematik geometrinin temel yapısından yola çıkılarak sorun geometrik bir platforma taşındı. Bu noktada Siminovitch'in (1995) yayınladığı "Comment on Rotation Operator Approach to Spin Dynamics and The Euler Geometric Equations" makalesi baz alındı. Bu çalışmada kuaterniyonlardan faydalanarak ortogonal matrisler ve dönme hareketleri arasındaki ilişki tanımlandı. Daha sonra bu ilişki bir üst uzayda kuaterniyonlar teorisi sayesinde tanımlanmaya çalışıldı. Hacısalıhoğlu (1983) "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" adlı çalışmasında konu daha da derinlemesine araştırılmıştır. Baydaş ve Karakaş, (2006) çalışmalarında sabit çatı değişimli $2 \times 3R$ robotik modellemede kuaterniyon operatörünü kullandılar.

2. TEMEL TANIM ve ÖN BİLGİLER

2.1. Koordinat Transformasyonları

Bir M üç boyutlu cisminin sabit bir F cismine bağlı dönmesi,

$$\vec{X} = [A] \vec{x} \quad (1.1)$$

denklemleriyle verilir; burada, $\vec{x} \in M$, $X \in F$. Dönüşümünün katı transformasyon olması için $[A]$ matrisi,

$$\vec{X}^T \vec{X} = \vec{x}^T [A^T][A] \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x}$$

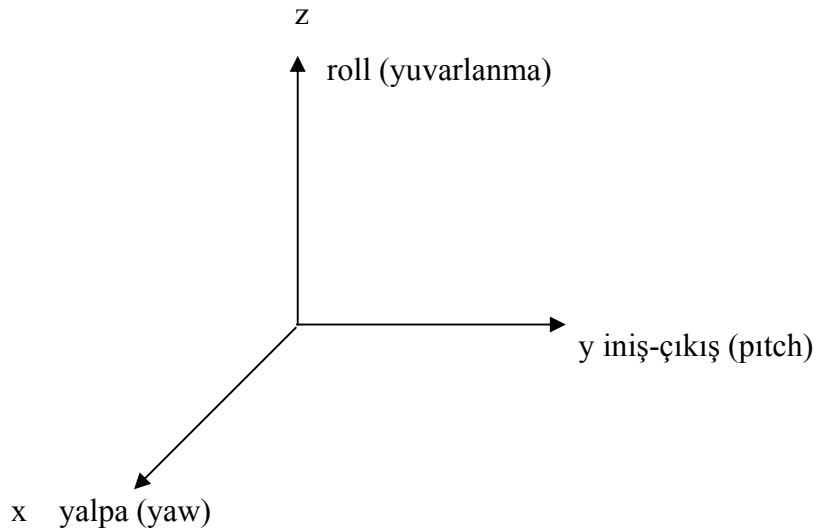
Eşitliğini sağlamalı yani,

$$[A^T][A] = [I]$$

Olmalıdır. Bu şart, bir matrisin “ortogonal matris” olması şartıdır. Döndürmeler, determinanı +1 olan ortogonal matrisler ile verilir. Bu matris cümlesi $SO(3)$ ile gösterilir ve matrislerin çarpım işlemine göre bir matris grubu yapısına sahiptirler. (Mc.Carthy, 1990)

(1.1) transformasyonu, başlangıçta F ile çakışan M çatısının bir yer değiştirmesi olarak ele alınabilir. Böyle ele alındığında, cisimdeki bir P noktasının başlangıç anındaki vektör konumu $\vec{x}$ ve sonuçtaki konum vektörü $\vec{X}$ dir. (1.1) ile belli olan dönüşüm küresel yer değiştirme olarak adlandırılır. (Mc.Carthy, 1990)

Dönme matrisinin alışa gelmiş formu, z- eksenini yuvarlanma (roll) eksenini, y- eksenini iniş-çıkış (pitch) eksenini ve x- eksenini yalpa (yaw) eksenini kabul eder.



Şekil 2.1. R^3 te dönme hareketi

x,y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler, sırasıyla R_x , R_y ve R_z ile gösterilirse

$$A:F \rightarrow M$$

Dönme transformasyonu,

$$[A] = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bellidir (Bottema ve Roth, 1979).

$$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantı -1 olan ortogonal matrisler yansıma olarak adlandırılırlar. Mesela, (1.1) ile belli olan transformasyon M deki bir noktayı $x = 0$ koordinat düzlemine göre yansıtır. Yansımalar için genel bir ifade, $[A]$ bir ortogonal matris olmak üzere,

$$[A] [X] [A]^T$$

İle verilebilir (Mc.Carthy, 1990).

2.2. Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri

$[A]$ nın etkisi altındaki hareketli cismin sabit uzaya göre pozisyon değiştirmeyen noktalarının cümlesi, $[A] \bar{x} = \bar{x}$ matris denkleminin çözümü olan cümledir. Bu denklem;

$$[A] \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (1.4)$$

karakteristik denklem problemine genişletilebilir. (1.4) sözle ifade edilirse; F deki $\bar{X}$ koordinatları, M deki $\bar{x}$ orijinal koordinatlarının bir λ sabit çarpanına eşittir. $\lambda = 1$ için mevcut olan çözümle ilgilenilecektir. (1.4) ün homojen formunun katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Buna göre,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

dır.

$$-\lambda^3 + \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda (M_{11} + M_{22} + M_{33}) + \det A = 0$$

ve bir ortogonal matris için $M_{ii} = a_{ii}$ olduğundan,

$$-\lambda^3 + \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1 = 0 \quad (1.5)$$

Elde edilir. $\lambda = 1$ in bir kök olduğu aşikârdır. Böylece sol tarafın çarpanlarından biri $\lambda - 1$ olup,

buna göre (1.5) eşitliği;

$$(\lambda-1) [\lambda^2 - \lambda (a_{11}+a_{22}+a_{33}-1) + 1] = 0 \quad (1.6)$$

Olarak yazılır. $a_1+a_{22}+a_{33}-1 = a$ ile gösterilsin

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad a = 2\cos\phi \quad (1.7)$$

$$= \frac{2\cos\phi \pm \sqrt{4\cos^2\phi - 4}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = \cos\phi \pm i\sin\phi$$

Elde edilir. O halde (1.5) eşitliğinin diğer iki kökü,

$$\lambda = \cos\phi + i\sin\phi = \exp(i\phi)$$

$$\lambda^* = \cos\phi - i\sin\phi = \exp(-i\phi)$$

dir. $\lambda = 1$ ile birleşen karakteristik vektör $\vec{b}$ olsun; $\vec{v} = t\vec{b}$ üzerindeki bütün noktalar cümlesi dönme esnasında sabittir. $\vec{v}$ ile belirli olan eksen hareketin dönme eksenidir. λ ve λ^* ile birleşen kompleks karakteristik vektörler $\vec{x}$ ve $\vec{x}^*$ olsunlar. Bu vektörler yardımıyla reel ortogonal $\vec{c}_1$ ve $\vec{c}_2$ vektörleri,

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{x} + \vec{x}^*}{2}, \quad \vec{c}_2 = \frac{i(\vec{x} - \vec{x}^*)}{2} \quad (1.8)$$

Olarak tanımlansın. Bu noktaların C_1 ve C_2 sabit sayı koordinatları, aşağıdaki hesaplamayla bulunur.

$$C_1 = [A] \vec{c}_1 = (\exp(i\phi) \vec{x} + \exp(-i\phi) \vec{x}^*) / 2$$

$$C_2 = [A] \vec{c}_2 = i (\exp(i\phi) \vec{x} - \exp(-i\phi) \vec{x}^*) / 2 \quad (1.9)$$

Veya

$$C_1 = \cos\phi \vec{c}_1 + \sin\phi \vec{c}_2$$

$$C_2 = -\sin\phi \vec{c}_1 + \cos\phi \vec{c}_2 \quad (1.10)$$

(1.10) den görüldüğü gibi, $\vec{b}$ ye dik olan $\vec{x}$ ve $\vec{x}^*$ karakteristik vektörleriyle tanımlı olan düzlemdeki ϕ açılı dönmedir. Bunu görmek için $\vec{c}_1$ ve $\vec{c}_2$ nin . Koordinatları, $\vec{e}_1=(1,0,0)$ ve $\vec{e}_2=(0,1,0)$ vektörleriyle çakışacak şekilde değiştirilir. Bu durumda $\vec{b} = (0,0,1)$ olur. O zaman (1.10) eşitliğinden,

$$C_1 = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$$

$$C_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

Elde edilir ki, yer değiştirme $\vec{b}$ ile belirli eksen etrafında, ϕ açılı bir dönmedir.

2.3. Cayley Formülü

Bir dönme, cismin noktaları arasındaki uzaklığı korur. Şöyle ki,

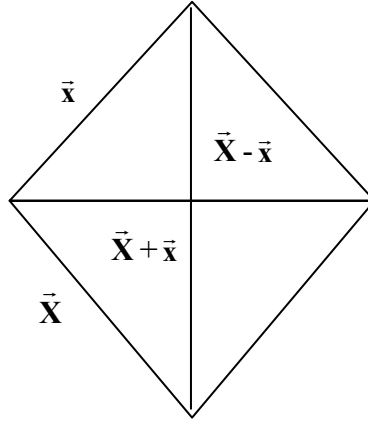
$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{X} \rangle = 0$$

Ve buradan,

$$(\vec{X} - \vec{x})^T (\vec{X} + \vec{x}) = 0 \quad (1.11)$$

Yazılabilir.



Şekil 2.2. Cayley denklemi

$$\vec{X} + \vec{x} = [A+I] \vec{x}$$

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I] \vec{x}$$

Değerleri (1.11) de yerine yazılırsa,

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I][A+I]^{-1} (\vec{X} + \vec{x}) \quad (1.12)$$

olur.

$[A-I] [A+I]$ matrisi B ile gösterilsin. Dikkat edilirse, B matrisi $\vec{X} + \vec{x}$ vektörünü kendisine dik olan $\vec{X} - \vec{x}$ vektörüne dönüştürmektedir. (1.12) eşitliği $\vec{x}$ ve $\vec{X}$ in seçiminden bağımsız olduğuna göre, temsilci bir $\vec{y}$ vektörü için,

$$\langle \vec{y}, [B] \vec{y} \rangle = 0$$

dır ve $B = [b_{ij}]$ açık bileşenleriyle yazılırsa;

$$\sum_{i \neq j} (b_{ij} + b_{ji}) \vec{y}_i \vec{y}_j + \sum_{i=j} b_{ii} \vec{y}_i^2 = 0 \quad (1.13)$$

Elde edilir. Bu eşitlik keyfi bir $\vec{y}$ vektörü için sağlandığından; her i, j için,

$$b_{ii} = 0$$

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

olmalıdır. Yani $[B] = -[B]^T$, bir başka ifadeyle B bir anti-simetrik matristir.

$$[B] = [A - I][A + I]^{-1}$$

Eşitliğinden A matrisi çözülürse,

$$[A] = [I - B]^{-1}[I + B] \quad (1.14)$$

elde edilir. Bu eşitlik ortogonal matrisler için Cayley formülü olarak adlandırılır. $[I-B]$ matrisi singüler değildir. Çünkü singüler olsaydı $\lambda=1$, B nin bir karakteristik değeri olurdu. Ayrıca, anti-simetrik olması $[B]$ nin pür imajiner karakteristik değerlere sahip olmasını gerektirir. Sonuç olarak $[I-B]^{-1}$ daima tanımlıdır. Ayrıca;

$$[I+B][I-B] = [I-B][I+B] = [I-B^2]$$

olduğundan $[I+B]$ ve $[I-B]$ matrisleri değişimlidir. Böylece Cayley formülü, denk olan;

$$[A] = [I+B][I-B]^{-1} \quad (1.15)$$

formunda da verilebilir. Bu şekilde elde edilen $[A]$ matrisi ortogonaldır. Gerçekten; (1.14) den;

$$\begin{aligned} [A^T] &= [I+B][I-B]^{-1} \\ &= [I+B^T][I-B^T]^{-1} \end{aligned}$$

$$[A^T] = [I-B][I+B]$$

$$[A^T A] = [I-B][I-B]^{-1}[I+B][I-B]^{-1} = I$$

$$[A][A^T] = [I+B][I-B]^{-1}[I-B][I+B]^{-1} = I.$$

olduğu görülür.

2.4. 3x3-Anti-simetrik matrisler

Bir 3x3 $[B]$ anti-simetrik matris,

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Şeklindedir. $[B]$ matrisi 3 bağımsız bileşene sahiptir. 3x3 mertebeden anti-simetrik matrisler cümlesi ile $\mathbb{R}^3$ uzayı arasında bir 1:1 eşleme kurulabilir. Eğer $b_{12} = -b_{31}$, $b_{13} = b_{21}$, $b_{23} = -b_{12}$ değişimi kullanılırsa;

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$A_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dönüşümü,

$$[B][\vec{y}] = \vec{b} \times \vec{y}, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.16)$$

özelliğine sahip bir 1:1 eşlemedir.

Önceki kesimden hatırlanacağı gibi, Cayley formülü yardımıyla [A] dönme matrisinden bir [B] anti-simetrik matrisi elde edilir. [B] den de yukarıda anlatılan

$(b_1, b_2, b_3) = \vec{b}$ vektörü elde edilir. $\vec{y}$ vektörü [A] dönme matrisinin $\lambda=1$ karakteristik değerine karşı gelen karakteristik vektördür.

3x3 mertebeden anti-simetrik [w] matrisinin karakteristik değerleri,

$$\det = \begin{vmatrix} -\lambda & -w_3 & w_2 \\ w_3 & -\lambda & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

denklemini sağlar. Hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \lambda &= 0 \\ \lambda (\lambda^2 + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)) &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Elde edilir. Yani 3x3 anti-simetrik matrisin karakteristik değerleri sıfır veya pür imaj inerdir.

2.5. Rodrigues Denklemi

Bir [A] ortogonal matrisi verildiğinde, (1.12) eşitliğiyle verilen,

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I] [A+I]^{-1} (\vec{X} + \vec{x})$$

İlgi ve $B = [A-I][A+I]^{-1}$ ile belli olan bir [B] anti-simetrik matris vardır. Böylece;

$$\vec{X} - \vec{x} = [B](\vec{X} + \vec{x}) \quad (1.19)$$

Yazılabilir. (1.19) eşitliği, dönen cismin noktalarının hareketli ve sabit çatıdaki koordinatları arasındaki ilgiyi verir. (1.19) eşitliği yerine, [B] ile belli olan vektör $\vec{b}$ olmak üzere;

$$\vec{X} - \vec{x} = \vec{b} \times (\vec{X} + \vec{x}) \quad (1.20)$$

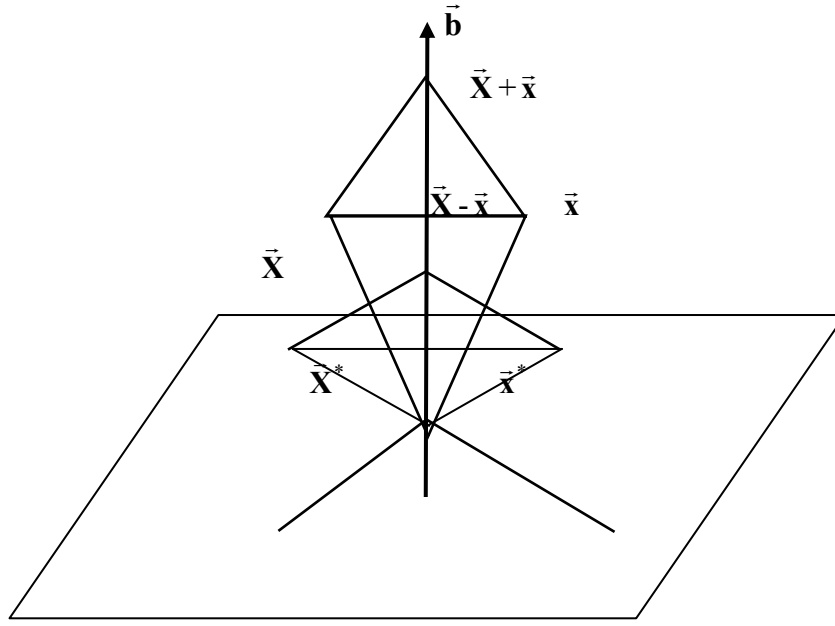
Yazılabilir. (1.20) eşitliği dönmeler için **Rodrigues denklemi** olarak adlandırılır. Bu

eşitlikteki $\vec{b}$ vektörüne de **Rodrigues vektörü** denir. (Bottema ve Roth, 1979)

(1.20) eşitliğindeki $\vec{X}$ ve $\vec{x}$ yerine, bu vektörlerin $\vec{b}$ ye dik düzleme izdüşümleri olan $\vec{X}^*$ ve $\vec{x}^*$ için de geçerlidir.

Gerçekten;

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \vec{X}^* + \lambda \vec{b} & \vec{x} &= \vec{x}^* + \lambda \vec{b}, \\ \vec{X}^* &= \vec{X} - \lambda \vec{b} & \vec{x}^* &= \vec{x} - \lambda \vec{b}\end{aligned}$$



Şekil 2.3

$$[A] \vec{x}^* = [A](\vec{x} - \lambda \vec{b}) = [A] \vec{x} - \lambda [A] \vec{b} = [A] \vec{x} - \lambda \vec{b} = \vec{X} - \lambda \vec{b} = \vec{x}^*$$

Yani $\vec{x}$ ve $\vec{X}$ arasındaki $\vec{X} = [A] \vec{x}$ eşitliği $\vec{x}^*$ ve $\vec{X}^*$ için de geçerlidir. Dolayısıyla,

$$\vec{X}^* - \vec{x}^* = \vec{b} (\vec{X}^* + \vec{x}^*)$$

Olup norm alınırsa;

$$\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{X}^* + \vec{x}^*\| \sin(b, \vec{X}^* + \vec{x}^*) \quad (1.21)$$

$$\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{X}^* + \vec{x}^*\|$$

$$\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\| = \langle \vec{X}^* - \vec{x}^*, \vec{X}^* - \vec{x}^* \rangle^{1/2}$$

$$= (\langle \vec{X}^*, \vec{x}^* \rangle - 2 \langle \vec{X}^*, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{X}^*, \vec{x}^* \rangle)^{1/2}$$

$$= (\|\vec{X}^*\|^2 - 2 \|\vec{X}^*\| \cdot \|\vec{x}^*\| \cos \phi + \|\vec{x}^*\|^2)^{1/2}, \|\vec{X}\| = \|\vec{x}^*\| = a, a > 0$$

$$= [2a^2 (1-\cos\phi)]^{1/2}$$

Benzer işlemlerle;

$$\|\vec{\mathbf{X}}^* + \vec{\mathbf{x}}^*\| = (2a^2 (1+\cos\phi))^{1/2}$$

Elde edilir. Ayrıca;

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\|\vec{\mathbf{X}}^* - \vec{\mathbf{x}}^*\|}{\|\vec{\mathbf{X}}^* + \vec{\mathbf{x}}^*\|} \quad (1.22)$$

$\vec{\mathbf{b}}$ nin normu olarak;

$$\|\vec{\mathbf{b}}\| = \tan \frac{\phi}{2}$$

Bulunur. $\vec{\mathbf{b}}$ nin bileşenleri;

$$\vec{\mathbf{b}} = \left(\tan \frac{\phi}{2} S_x, \tan \frac{\phi}{2} S_y, \tan \frac{\phi}{2} S_z \right) \quad (1.23)$$

dir. (S_x, S_y, S_z), $\vec{\mathbf{b}}$ boyunca belirli olan birim vektörlerdir ve “**Rodrigues Parametreleri**” olarak bilinirler(Bottema ve Roth, 1979).

2.6. Euler Parametreleri

[A] ortogonal matrisi için Cayley formülü, ϕ dönme açısı ve $[B] = \tan \phi/2[S]$

Den belli olan $\vec{\mathbf{s}}$ birim vektörünün bileşenleri cinsinden

$$[A] = [\cos\phi/2I - \sin\phi/2S]^{-1} [\cos\phi/2I + \sin\phi/2S] \quad (1.24)$$

Olarak yazılabilir.

$$C = [\cos\phi/2I + \sin\phi/2S]$$

Matrisindeki sabitlere A nın “**Euler Parametreleri**” denir. Bu parametreler dört tane olup şunlardır:

$$c_0 = \cos\phi/2, c_1 = \sin\phi/2 S_x, c_2 = \sin\phi/2 S_y, c_3 = \sin\phi/2 S_z \quad (1.25)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

(1.24) eşitliğindeki $[\cos\phi/2I - \sin\phi/2S]$ invers matrisi hesaplanır ve $x = \phi/2$ alınır,

$$[\cos\phi/2I - \sin\phi/2S] = D, \det D = \frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}
D^{-1} &= \left[\cos \frac{\phi}{2} I - \sin \frac{\phi}{2} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos x & -a \sin x & -b \sin x \\ a \sin x & \cos x & -c \sin x \\ b \sin x & c \sin x & \cos x \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\cos x} \begin{bmatrix} \cos^2 x + c^2 \sin^2 x & -a \sin x \cos x - bc \sin^2 x & ac \sin x - b \sin^2 x \cos x \\ a \sin x \cos x - bc \sin^2 x & \cos^2 x + b^2 \sin^2 x & -c \cos x \sin x - ab \sin^2 x \\ ac \sin^2 x + b \sin x \cos x & c \cos x \sin x - ab \sin^2 x & \cos^2 x + a^2 \sin^2 x \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos x + c^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -a \sin x - bc \frac{\sin^2 x}{\cos x} & ac \frac{\sin^2 x}{\cos x} - b \sin x \\ a \sin x - bc \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + b^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -c \sin x - ab \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ b \sin x + ac \frac{\sin^2 x}{\cos x} & c \sin x - ab \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + a^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & \cos x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a \sin x & -b \sin x \\ a \sin x & 0 & -c \sin x \\ b \sin x & c \sin x & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \begin{bmatrix} c^2 & -bc & ac \\ -bc & b^2 & -ab \\ ac & -ab & a^2 \end{bmatrix} \\
&= \cos x I + \sin x \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \begin{bmatrix} 1-a^2-b^2 & -bc & ac \\ -bc & 1-a^2-b^2 & -ab \\ ac & -ab & 1-b^2-c^2 \end{bmatrix} \\
&= \cos x I + \sin x \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \left[I_3 + \begin{bmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2-b^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2-c^2 \end{bmatrix} \right] \\
D &= \cos \phi / 2 I + \sin \phi / 2 S + \frac{\sin^2 \phi / 2}{\cos \phi / 2} (I + S^2)
\end{aligned}$$

Bu eşitlik, C ile çarpılırsa,

$$A = I + 2S \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + 2S^2 \sin \frac{\phi}{2} \quad (1.26)$$

ve buradan da;

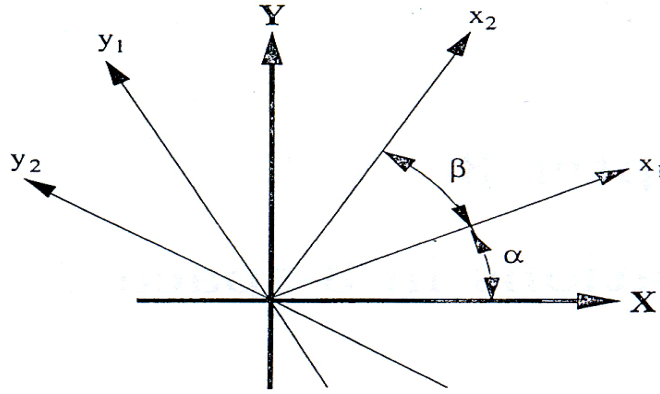
$$A = I + S \sin \phi + S^2 (1 - \cos \phi) \quad (1.27)$$

elde edilir.

3. DÖNME DİZİLERİ

3.1. Düzlemde Dönme Dizileri

Şimdi bir dönmenin bir diğeri tarafından takip edildiğinde ne olduğundan bahsedilecektir. Yani, iki dönmenin bir dizisinin sonucunun ne olacağı araştırılacaktır. Farz edilsin ki ilk koordinat çatısının(noktalar sabit) bir α açılık dönmesinin bir β açısı boyunca sonuçta oluşan koordinat sisteminin bir dönmesi takip eder. Referans çatının eksenleri X ve Y ile nitelendirilir.



Şekil 3.1. R^2 de Dönme Dizisi

Bu referans çatısında tanımlanan herhangi bir v vektörünü dikkate alıp bir α açısı boyunca bir dönme tarafından referans çatıyla bağlantılı olan x_1 ve y_1 le nitelendirilen bir yeni çatı tanımlanır. v_1 ,

$$v_1 = R_\alpha v \quad (1.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada matris dönme operatörü;

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

dır. Daha sonra x_1, y_1 çatısı ilgili olarak bir β açısı yönünde döndürülen başka bir yeni çatı tanımlanır. Bu yeni çatının eksenleri sırasıyla x_2 ve y_2 ile nitelendirilir. Böylece,

$$v_2 = R_\beta v_1$$

yazılabilir. Burada matris dönme operatörü

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

dır. Bundan sonra, matris cebirinin kuralları kullanılarak,

$$v_2 = R_\beta v_1 = R_\beta (R_\alpha v) = (R_\beta, R_\alpha) v$$

Bu denklem gösterir ki dönmelerin dizisi için dönme operatörü, tamamen iki farklı dönme operatörü R_α ve R_β 'nın çarpımıdır. Yani, $R_\beta R_\alpha$ çarpımı yoluyla v vektörü çarpılarak doğrudan v_1 vektöründen v_2 vektörü elde edilir.

$$\begin{aligned} R_\beta R_\alpha &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada,

$$a_{11} = \cos \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$a_{12} = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$$

$$a_{21} = -\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha = -\sin(\alpha + \beta)$$

$$a_{22} = -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta)$$

dir. Böylece,

$$R_\beta R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

yazılır.

Bu son matris, noktalar (veya vektörler) sabit kalırken bir $\alpha + \beta$ açısı boyunca koordinat çatısının bir dönmesini temsil eden dönme matrisidir. Böylece cebirsel olarak Bir β açısı boyunca çatının bir başka dönmesi tarafından takip edilen, bir α açısı boyunca olan bir çatı dönmesi daha önce öne sürüldüğü gibi bir $\alpha + \beta$ açısı boyunca bir tek dönmeye eşdeğer olduğu gösterildi.

3.2. R^3 de Koordinatlar

R^3 Olarak dizayn edilen 3 boyutlu uzay R^2 de koordinatların tanıtıldığı yola tamamen benzer bir yolda koordinatlandırılabilir. R^3 de orjin olarak isimlendirilecek bir keyfi fakat sabit nokta belirtilir.

Bu orijin yönünde geçen üç karşılıklı dik doğru, sırasıyla x-ekseni, y-ekseni ve z-ekseni olarak isimlendirilir. Bu eksenler sağ el koordinat çatısı veya pozitif bir biçim için yönlendirilmiştir.

Böyle bir üç-boyutlu koordinat sistemi verilsin. R^3 de noktalar, reel sayıların (x,y,z) üçlüleri tarafından temsil edilir. Genelde, orjin $(0,0,0)$ koordinatlarına sahiptir. R^3 de verilen herhangi bir $P(x, y, z)$ noktası, orjinden P noktasına çizilen bir vektör olarak temsil edilebilir.

R^2 deki gibi, nokta (veya vektör) sabit kalırken XYZ- koordinat çatısının bir dönmesi ile başlanır. Buradaki problem döndürülen çatı ile ilgili olan noktaların koordinatlarını belirlemektir.

Bu durumda muhakkak 3×3 tipinde bir A dönme matrisi belirlenmelidir, öyle ki eğer koordinatlar döndürülen çatıyla ilgili olarak $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tarafından verilirse,

$$v_2 = Av_1$$

denklemine sahip olunacaktır.

R^2 de herhangi bir Θ açısı boyunca orjin etrafındaki basit bir koordinat çatı dönmesi tanımlanmasına rağmen , R^3 deki bu dönme hareketi tam olarak verilmedi. Burada özel bir dönme ekseninin oluşturulmasına ihtiyaç vardır.

Örneğin, R^3 te Z-ekseni etrafında $\pi/2$ açılık bir koordinat çatısı dönmesi düşünölsün. Burada x ve y koordinatları değışmesine rağmen z koordinatı değışmez. Böylece bir dönme hareketi, bir koordinat çatı dönmesinden oldukça farklı olduğu açıktır.

Daha açık belirtmek gerekirse, bir P noktası (veya v vektörü) XYZ- koordinat çatısıyla ilişkili (x_1, y_1, z_1) koordinatlarına sahiptir. Z eksen etrafında ψ açılık bir koordinat dönmesi alınsın ve P noktasının koordinatları da (x_2, y_2, z_2) olsun. Böylece Z eksen etrafındaki dönme hareketi, P noktasının z-koordinatını sabit bırakır ve dolayısıyla

$$z_2 = z_1$$

yazılabilecektir.

x_2 ve y_2 'i belirlemek amacıyla, XY-düzlemi üzerinde v vektörünün izdüşümü v_1 vektörü olsun. R^2 de, v_1 'in koordinatları (x_1, y_1) dir. Bundan başka, Z-ekseni yönünde φ açısı boyunca olan dönme hareketi , bir φ açısı boyunca XY koordinat çatısının R^2 deki bir dönmesidir. Bu nedenle

$$x_2 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi$$

$$y_2 = y_1 \cos \psi - x_1 \sin \psi \quad (1.30)$$

denklemleri var olmalıdır.

Eğer bu sonuçlar denklemlerin bir tek kümesine kombinelenirse,

$$x_2 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi + 0.z_1$$

$$y_2 = -x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi + 0.z_1$$

$$z_3 = 0.x_1 + 0.y_1 + 1.z_1$$

elde edilir.

Bu lineer denklem sisteminin matris formu,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ψ açısı boyunca Z- ekseni yönünde R^3 de dönme hareketini veren bir R_ψ 3x3 dönme matrisi ele alınsın. XYZ koordinat çatısında $\mathbf{v}=(1,1,1)$ vektörü göz önüne alınırsa, yeni bir xyz koordinat çatısı elde etmek için $\psi = \pi/4$ açısı boyunca Z-ekseni etrafında döndürülür. Yukarıdaki sonuçlara göre, $\mathbf{v}$ vektörünün koordinatları bu yeni çatıyla ilişkilidir.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

olur.

3.3. Ardarda Aynı Eksen Dönmeleri

Z-ekseni yönünde belirli açılar boyunca koordinat çatısının dönmelerinden ayrılmadan önce, eğer, ilki bir α açısı boyunca bunu takip eden ikincisi bir β açısı boyunca, aynı eksen yönünde böyle iki dönmenin bir dizisi varsa, bileşke dönme matrisi, dönme matrislerinin ayrı ayrı çarpımı yoluyla elde edilir. (R^2 de çatı dönmeleri durumunda olduğu gibi); yani;

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$R_{\alpha+\beta} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylelikle, eğer yukarıdaki açılar 0'a eşitse, o zaman bu dönme matrisleri bileşke matrisler olurlar. Dolayısıyla, z eksenini yönünde sıfırdan farklı bir dönme için r (3.3) elemanı biri "1" olmalıdır. Çünkü z-ekseninin yönü değişmeden kalır ve herhangi bir vektörün z-bileşenlerinin değeri de değişmeden kalır.

Öncekinin akabinde eğer dönme Y-ekseni yönünde ise o zaman r(2,2) de "1" görünmelidir. Çünkü sadece z-ekseni ve Y-ekseni yönünde bir Θ açısı boyunca bir pozitif koordinat çatısı dönmesi için, dönme matrisi

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

verilebilir. Benzer olarak, X eksenini yönünde, bir ϕ açısı boyunca bir pozitif koordinat çatısı dönmesi için; dönme matrisi

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

olur.

3.4. Dönme Matrislerinde İşaretler

Burada önemli bir nokta, dönme matrislerinde sinüs ve cosinüs terimlerinin uygun yerleştirilmesidir. Bu yerleştirme bir sağ-el koordinat çatısının kullanımı tarafından belirtilir. Bu terimlerin doğru yerleştirmesini belirlemek için bir uygun yol,

XYZXY dizisidir.

Ondan sonra, bu diziyi soldan sağa okuma, bir ϕ açısı boyunca X-ekseni yönünde bir pozitif dönme, Y-eksenini Z-eksenine döndürür ve böylece $-\sin \phi$ terimi z-koordinatı ile ilişkiliyken $\sin \phi$ terimi y-koordinatıyla ilişkilidir.

Sonra, diziyi soldan sağa okuma, bir ϕ açısı boyunca pozitif yönde bir dönme Z-eksenini X-eksenine döndürür. Böylece $\sin \Theta$ terimi x-koordinatı ile ilişkiliyken $\sin \theta$ terimi z-koordinatıyla ilişkilidir. Son olarak bir ψ açısı boyunca Z-ekseni yönünde bir dönme X-eksenini Y-eksenine döndürür..

Bir koordinat çatısı eksen yönündeki bir dönme için, dönme operatörünün nasıl yazılacağını anlamak önemlidir. Çünkü daha sonra ardışık koordinat çatısı eksenleri yönünde dönmelerin bir dizisi olarak R^3 de genel dönme operatörü geliştirilebilir. Böylece en azından bir koordinat eksen yönünde, koordinat çatısının dönmelerini simgeleyen R_ψ, R_θ, R_ϕ dönme operatörlerinin her biri ortogonaldır ve determinantları 1'dir. Şimdiye kadar bu bölümde sadece noktalar (veya vektörler) sabit kalırken koordinat çatısı dönmelerinden bahsedildi. Aynı zamanda koordinat çatısı sabit kalırken bir koordinat eksen yönünde belirli bir açı boyunca noktaların (veya vektörlerin) dönmelerine de sahip olunacaktır. Sonuçta oluşan operatörlerin henüz bahsedilen operatörlerin transpozesi olduğu anlaşılır. Bu elbette, R^2 deki duruma tamamıyla benzerdir.

3.5. R^3 Dönme Dizileri

Önceki bölümde gösterildi ki, aynı koordinat eksen yönünde R^3 de ard arda iki dönmenin herhangi bir dizisi (ki ya çatı döner ya da noktalar döner), dizide dönme açılarının toplamı olan açı boyunca, o eksen yönünde bir tek dönmeye eşdeğerdir. Şimdi aynı koordinat eksenleri yönünde olmayan dönmelerin,

$$A = R_2 R_1$$

(1.34)

şeklinde iki dönmenin bir dizisinin de herhangi bir eksen yönünde, herhangi bir açı boyunca bir dönmeye sahip olduğu gösterilecektir. Aslında böyle bir dizi için dönme operatörü tanımlanacaktır, yani bu dönmeyi temsil 3x3 matrisi, dönme eksen ve açısı tespit edilecektir.

3.5.1. Dönme geometrisi

R^3 de bir dönme hareketinde, dönme eksen, sabittir, yani değişmez. Böylece, düzlemde bir vektör aynı düzlemde başka bir vektöre döndürülür. Elbette, vektörlerin

uzunluğu ve o konu için, iki vektörün arasındaki açı değişmeden kalır ki buda, iki vektörün skaler çarpımının, dönme hareketi sonunda değişmeyeceği anlamına gelir. Bu durum, dönme altında skaler çarpımın değişmeyen bir nicelik olduğunu ifade etmek mümkündür. Burada, R^2 de ve aynı zamanda R^3 de değişmeyen dönme operatörlerinin karakterizasyonları tartışılabilir. Yani; bir 3x3 matrisi eğer ve sadece determinantı +1 ve ortogonal ise R^3 de bir dönme operatörüdür, denilebilir mi ?, sorusu tartışılabilir.

Bu durumda bir dönme matrisi ortogonal olmalı ve determinantı +1 olmalı. Farz edilsin ki dönme v vektörü yönünde bir θ açısı boyuncadır. Yukarıda bahsedildiği gibi, dönme altında iki vektörün skaler çarpımı değişmeyen niceliktir ki bunun anlamı; herhangi iki v_1 ve v_2 vektörü için;

$$(Av_1)^t (Av_2) = v_1^t v_2$$

Fakat sonra

$$v_1^t A^t A v_2 = v_1^t v_2$$

yazılabilir veya,

$$v_1^t A^t A v_2 - v_1^t v_2 = 0 \text{ yani } v_1^t (A^t A - I) v_2 = 0$$

Bu son denklemin herhangi bir v_1 ve v_2 vektör çifti için değişmemesi nedeniyle, şu durum olmalıdır

$$A^t A - I = 0$$

$$A^t A = I$$

olur. Bu da A matrisinin ortogonal olduğunu gösterir.

Sonra, oldukça kolay bir şekilde bir ortogonal matrisin determinantının ya +1 ya da -1 olduğu gösterilebilir. $\det(A^t) = \det(A)$ ve bir çarpımın determinatı, determinantların çarpımına eşittir. Dolayısıyla A ortogonal ise

$$(\det(A))^2 = \det(A^t) \det(A)$$

$$= \det(A^t A)$$

$$= \det I$$

$$= 1$$

dir.

Böylece $\det(A)$ ya +1 ya da -1 olmalıdır. Şimdi açık olmalıdır ki bir dönme bir koordinat çatısının sağ el kuralını korur; böylece $\det(A) = -1$ olabilir. Örnek olarak, eğer matris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ise o zaman standart sağ-el koordinat çatısı bir sol-el çatısına gönderilir. Aslında, B matrisiyle temsil edilen dönüşüm XY-düzlemine bir simetridir ki, Rankx ve 1 eksenleri değişmez. Fakat Z-ekseni tersine çevrilir. Böylece çatı, bir sol-el koordinat çatısı olur. Böylece, $\det(A) = +1$ 'e sahip olunması gerektiği sonucu çıkar..

3.5.2. Dönme özdeğerleri ve özvektörleri

Şimdi ortogonal ve determinantı +1 olan 3x3 tipinde bir A matrisini ele alalım. Böylece onun herhangi sabit eksen yönünde herhangi bir açı boyunca bir dönmeyi temsil ettiği gösterilmeye çalışılacaktır. Herhangi bir dönmenin eksenini dönme altında sabit olduğu için ilk adım,

$Av_0 = v_0$ denklemini sağlayacak v_0 gibi bir sabit vektörün olması gerektiği gösterilecektir.

Bu durum, A matrisinin bir karakteristik değere sahip olması veya 1'in özdeğeri olması gerektiğini söylemekle eşdeğerdir. A matrisinin özdeğerleri karakteristik denklemi sağlayan λ_0 skaleridir.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Böylece A-I matrisi determinantı 0'a eşitse,

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \det A^t \det(A - I) \\ &= \det(A^t A - A^t) \\ &= \det(I - A^t) \\ &= \det(I - A) \\ &= (-1) \det(A - I) \end{aligned}$$

bu da,

$$\det(A - I) = 0$$

sonucunu verir.

Böylece dönüşüm, dönme eksenini olan, v_0 denilen bir sabit vektöre sahiptir. Önce v_0 'ın A altında sabit olması nedeniyle A^t altında da sabit olduğu gösterilebilir. Bunun için,

$$Av_0 = v_0$$

$$A^t v_0 = A^t Av_0 = I v_0 = v_0$$

olur.

Şimdi $v^t v_0 = 0$ anlamına gelen sabit v_0 vektörüne dik olan düzlemde bir v vektörü dikkate alınsın. Böylece, Av vektörü de V_0 'a dik olmalıdır.

$$\begin{aligned} v^t v_0 &= (Av)^t v_0 = (v^t A^t) v_0 \\ &= v^t A^t Av_0 \\ &= v^t I v_0 \\ &= v^t v_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Son olarak, eğer A matrisi ortogonal ise, bu dönüşüm altında skaler çarpım değişmez kalır ve bu da vektörler arasındaki açı ve vektörlerin uzunlukları, A altında sabittir, değişmez sonucunu doğurur. Bu sonuç, A ile temsil edilen transformasyonun bir dönme olması gerektiğini doğrular. Sonuç olarak, her dönme bir tek sabit eksen ve o eksenle ilgili dönme açısı tarafından tanımlanır.

3.5.3. Dönme hareketinin sabit ekseni

Verilen bir A dönme operatörü için v dönme eksenini belirlemek için standart özdeğer-özvektör metodu kullanılır. Ancak, daha önce herhangi bir dönme operatörü için reel özdeğerin sadece +1 olduğu vurgulandı. Bu durumda

$$[A - I]v = 0 \quad (1.36)$$

hangi genişleme üzerinde homojen denklem verildiği çözüme kavuşturulmalıdır.

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 &= 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 + a_{23}v_3 &= 0 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + (a_{33} - 1)v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_3 = 1$ denir ve daha sonra v_1 ve v_2 yi bulmak için denklemlerin herhangi ikisi kullanılır.

$$\begin{aligned} a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 &= -a_{23} \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 &= -(a_{33} - 1) \end{aligned}$$

Bu denklemler, bileşke dönme için bir olası ifade elde etmek için kullanılacaktır.

$$v = [v_1, v_2, v_3]$$

Burada,

$$v_1 = a_{12}a_{23} - (a_{22} - 1)a_{13}$$

$$v_2 = a_{21}a_{13} - (a_{11} - 1)a_{23}$$

$$v_3 = (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21}$$

Mademki verilen herhangi bir dönme matrisi için dönmenin sabit eksen belirlenebiliyor, o zaman, bu sabit eksen yönünde dönmenin yönü ve büyüklüğü de belirlenebilir.

3.5.4. Sabit eksen yönünde dönme açısı

Şimdi çözülmesi gereken son problem dönme açısını tanımlamaktır. Dönme açısını hesaplamak için, bir matrisin izi kavramına ihtiyaç duyulacaktır. Bu A kare matrisin izi $\text{Tr}(A)$ ile simgelenir ve basitçe matrisin ana köşegeninde yatan elemanların toplamı şeklinde ifade edilebilir. Böylece iz matrisi

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Sadece $\text{Tr}(R_\phi) = 1 + 2 \cos \phi$ dır.

Aynı zamanda herhangi A ve B kare matrisleri için (aynı düzende) kural hatırlandığı zaman oldukça kolay gösterilebilir. Genellikle

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

yazılır.

Şimdi, A matrisi tarafından temsil edilen v_0 eksen yönünde bir ϕ açısı boyunca olan dönme hareketi dikkate alınsın. Bu dönme hareketi, koordinat çatısı eksenleri yönünde dönmelerin bir dizisi olarak yeniden yazılabilir. İlk önce, X- eksen, XY düzleminde v_0 izdüşümüyle çalışması için çatı Z-ekseni yönünde döndürülür. Bunu, yeni x-ekseninin v_0 vektörüyle kesişmesi amacıyla yeni y-ekseni yönünde bir dönme takip eder. Bu iki dönmenin çarpımı Q matrisiyle temsil edilebilir ve bilinir ki Q ortogonaldır ve determinantı +1 dir. Ondan sonra sonuçta oluşan çatı v_0 vektörü yönünde döndürülür(yani Q açısı boyunca yeni y-

ekseni yönüne). Bu dönme hareketi R_ϕ ile isimlendirilsin. Önceki çalışmalardan

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos \phi & \sin \phi \\ 1 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\text{Tr}(R_\phi) = 1 + 2 \cos \phi$$

olduğu bilinmektedir ve sonunda o dönme hareketi Q dönmesinin tersi ile takip edilir. Q nun ortogonal olması nedeniyle, Q^t de ortogonaldır. Geometrik olarak görmek çok kolay olmamasına rağmen, bu dönmelerin dizisi tamamen A matrisiyle temsil edilen orijinal dönme hareketine eşdeğerdir. Dolayısıyla

$$A = Q^t R_\phi Q \quad (1.38)$$

olmalıdır ve burada ϕ dönme açısıdır. Fakat sonra

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(Q^t R_\phi Q) \\ &= \text{Tr}(Q(Q^t R_\phi)) \\ &= \text{Tr}((QQ^t)R_\phi) \\ &= \text{Tr}(I R_\phi) \\ &= \text{Tr}(R_\phi) \end{aligned}$$

Böylece $\text{Tr}(A) = 1 + 2 \cos \phi$ denklemi elde edilir. Eğer ϕ için çözüm yapılırsa, dönme açısı için aşağıdaki formül verilir.

$$\phi = \arccos \frac{\text{Tr}(A) - 1}{2}$$

4. UYGULAMALAR

4.1. Örnek

Bir XYZ koordinat çatısı, bu çatıda $v_0 = (1,1,1)$ vektörü ve $\phi = 2\pi/3$ açısı boyunca v_0 vektörü yönünde bir çatı dönmesi göz önüne alınsın.

Geometrik olarak açıktır ki böyle bir dönme yeni x-ekseni ile eski y-ekseninin, yeni y-ekseni ile eski z-ekseni ve yeni z-ekseni ile ilk X-eksinin bir yeni çatıda kesişmesiyle sonuçlanır. Böyle üç dönmenin bir dizisi, sadece ilk koordinat çatısını kendisine taşır.

$$(1,0,0) \rightarrow (0,0,1)$$

$$(0,1,0) \rightarrow (1,0,0)$$

$$(0,0,1) \rightarrow (0,1,0)$$

Bu durum bir matrise ihtiyacı doğurur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Öyle ki } A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu denklemin $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 1$ ifade ettiğini görmek zor değildir. Yukarıda kalan iki vektörle tamamen aynı yolda ilerleyerek,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dönme matrisi elde edilir.

A matrisi verilsin, şimdi basitçe $A\mathbf{v}$ çarpımını hesaplama yoluyla döndürülen çatıyla ilişkili olan herhangi bir $\mathbf{v} = (x, y, z)$ noktasının koordinatları bulunabilir.

Eğer bir birim matriste kolonlar olarak biçimlendirilerek ilk koordinat çatısının eksenleri üzerinde $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ noktalarının düşünülürse, daha sonra A matrisi, bir kolonu sağa kaydırılan bir özdeşlik matrisi olur. Genelde, bu özdeşlik matrisi, döndürülen çatıda bu noktaların yeni koordinatlarını veren kolonlara sahip olan bir dönmeyi temsil eden matristir. Bir dönme gösteren matris döndürülen çatıda bu noktaların yeni koordinatlarını verir.

Şimdi yukarıdaki A matrisi verilerek ve bir R^3 dönüşümlerinin ne tür dönüşümleri temsil ettiği araştırılmalıdır. A matrisinin ortogonal ve determinantının +1 olduğu kontrol edilir. Dönme eksenini bulmak için basitçe sabit vektör, yani dönme altında değişmeyen $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vektörü aranır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Eğer sistem çözülürse, herhangi bir k reel sayısı için

$$x_0 = y_0 = z_0 = k \text{ dır.}$$

Bunun anlamı sıfır olmayan herhangi bir k reel sayısı için (k, k, k) sabittir. Genelde, $(1,1,1)$ dönme v eksenini olarak belirtilir.

Son olarak, A matrisinin izi

$$Tr(A) = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ dır. Dolayısıyla dönme açısı elbette beklenen}$$

$$\phi = \arccos \frac{0-1}{2} = \arccos(-1/2) = 2\pi/3$$

sonucu verir.

4.2. Örnek

Önceki bölümde R^3 de dönmelerin bir uygulaması olarak, izleme dönüşümü olarak isimlendirilen bilinen bir dönme dizisinden bahsedilecektir. Yeryüzünün yüzeyinde bazı noktalardan izlenen bir uçak gibi uzak bir obje göz önüne alınsın. Yerel teğet (tanjant) eksenini sadece bu noktada dünya düzlemine teğet olan bir düzlemdir. Sırasıyla Kuzey ve doğu yönlerine işaret eden bu teğet düzlemde yatan X ve Y eksenleri ile bir başlangıç koordinat çatısı tanımlanır. Z-ekseni yer merkezlidir, yani dünya merkezine doğru işaret eder. O zaman bir sağ-el koordinat çatısı vardır denir.

Heading (başlık) olarak adlandırılan teğet düzleminde K ile uzak objenin izdüşümü arasında kalan α açısı tanımlanır ve bir de elevation (yükseltme açısı) olarak isimlendirilen, izlenen uzak objenin yönü ve teğet düzlemi arasındaki bir β açısı tanımlanır. İzleme dönüşümü, ilk önce α açısı boyunca yeni y-ekseni yönünde, ardından β açısı, boyunca yeni y-ekseni yönündeki bir dönmedir. Sonuçta oluşan koordinat çatısında x-ekseni izlenen objeye doğru işaret eder.

Eğer R bu dönmeyi temsil eden 3x3 matrisi ise, önceki sonuçlar

$$R = R_{\beta}^y R_{\alpha}^z = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

olur. Bu bileşke izleme dönüşümü herhangi eksen yönünde herhangi açı boyunca basit dönmeden oluşan bir eşdeğer dönme olarak temsil edilebilir. Bu tek dönme için eksen, dönme operatörü için sabit vektör bulma yoluyla bulunur, yani $v = (x_1, y_1, z_1)$, denilen bir vektör öyle ki,

$$Rv=v$$

dir.

Böylece,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

denklemini çözülmelidir.

Matris çarpımı sonuçlarına göre,

$$x_1 \cos \alpha \cos \beta + y_1 \sin \alpha \cos \beta - z_1 \sin \beta = x_1$$

$$-x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + z_1 \cdot 0 = y_1$$

$$x_1 \cos \alpha \sin \beta + y_1 \sin \alpha \sin \beta + z_1 \cos \beta = z_1$$

denklemlerine sahip olunur. Bu denklemler kolayca,

$$x_1 (\cos \alpha \cos \beta - 1) + y_1 \sin \alpha \cos \beta - z_1 \sin \beta = 0$$

$$-x_1 \sin \alpha + y_1 (\cos \alpha - 1) + z_1 \cdot 0 = 0$$

$$x_1 \cos \alpha \sin \beta + y_1 \sin \alpha \sin \beta + z_1 (\cos \beta - 1) = 0$$

formunda yeniden yazılabilir. Bu sistem, $v = (0,0,0)$ aşıkâr çözüme daima sahip olan bir homojen denklemler sistemidir.

Bir aşıkâr olmayan çözüm elde etmek amacıyla, eğer herhangi sıfırdan farklı k reel sayısı için $x_1 = k$ için,

$$y_1 = \frac{k \sin \alpha}{\cos \alpha - 1}$$

ve son olarak üçüncü denklemden,

$$z_1 = \frac{-k \cos \alpha \sin \beta - y_1 \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-k \cos^2 \alpha \sin \beta + k \cos \alpha \sin \beta - k \sin^2 \alpha \sin \beta}{(\cos \beta - 1)(\cos \alpha - 1)} \\
&= \frac{-k \sin \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + k \cos \alpha \sin \beta}{(\cos \beta - 1)(\cos \alpha - 1)} = \frac{k \sin \beta (\cos \alpha - 1)}{(\cos \beta - 1)(\cos \alpha - 1)} = \frac{k \sin \beta}{\cos \beta - 1}
\end{aligned}$$

hesaplanır. Böylece izleme dönüşümü

$$v = (k, \frac{k \sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, \frac{k \sin \beta}{\cos \beta - 1})$$

tarafından verilen dönme eksenine sahiptir.

Bu hesapta sadece dönme ekseninin yönü belirlendi. Dönme eksenini olarak bir belirli vektör elde edilmelidir.

Örnek için: $v = (-1, \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta})$ elde etmek için $k = -1$ seçilebilir.

$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ trigonometrik özdeşliği kullanma yoluyla dönme eksenini için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$v = \left(-\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

Dönme açısının bulunması amacıyla, R dönme operatörünün izi, $\text{tr } R = \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta = 1 + 2 \cos \beta$

ϕ , için bu denklemi çözme sonucunda

$$\phi = \arccos \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta - 1}{2} \right)$$

denklemini verir.

Eğer onun sayısal versiyonu göz önüne alınırsa, daha belirgin örnekler yazılabilir. Farz edilsin ki bir uzak obje, $\alpha = \pi/6$ başlık açısına ve $\beta = \pi/3$ yükselme açısına sahiptir.

O zaman $\sin \alpha = \cos \beta = 1/2$ ve $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. Böylece, dönme eksenini.

$$v = (-1, \frac{1/2}{1 - \sqrt{3}/2}, \frac{\sqrt{3}/2}{1 - 1/2}) = \left(-1, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{3} \right) = (1,000,03,7321.1,732)$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \arccos\left(\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta - 1}{2}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{3} - 2}{8}\right) = \arccos(399) \\
&= 1.159 \text{ radyen} = 66.41
\end{aligned}$$

tarafından verilir.

V dönme eksenine beraber, bu eksen yönündeki (örnekteki, 66.41 derecelik bir açı boyunca) A dönmesi, referans çatıyı , döndürülen çatıya götürür.

Önceki örnekte bir sayısal sonuç daha vardır. Yukarıdaki gibi seçilen α ve β ile vektörün yönünde izlenen objeyi doğrulamak kolaydır.

$$(\sqrt{3}/2, 1/2, -\sqrt{3})$$

Bu vektörün uzunluğu 2'dir. İzleme dönüşümü altında, son koordinat çatısında, bu vektör son x-ekseni boyunca yatar, dolayısıyla bu son koordinat çatısında $\phi, (2,0,0)$ vektörü olmalı, α ve β için verilen değerlerle, dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 3/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ dir, } \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 3/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla elde edilen sonuç beklenendir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

v dönme eksenini, $+1$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Yani,

$$[A - \lambda I]v = 0 \text{ denklemi, eğer, } \det A |A - \lambda I| = 0$$

ise aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

Herhangi bir A matrisi için kübik olan özdeğer denklemi daima bir reel çözüme sahiptir. Yani, $\lambda = +1$ dir ve diğer iki çözüm kompleks eşleniklerdir. Bunun anlamı aranan özvektör, $[A - \lambda I]v = 0$ matris denkleminin çözümüdür. Sonuçta oluşan sabit çatinın bileşenleri elbette ,verilen A dönme matrisinin elemanlarının fonksiyonlarıdır.

Bir alternatif olarak, V sabit dönme ekseninin belirlenmesi için herhangi bir reel değerli matris alınarak yapılabilir ve dolayısıyla genelde bir A matrisinde

$$A = \frac{[S + Q]}{2} \text{ yazılabilir. Burada } S = [A + A^t] \text{ } 2A \text{ nın simetrik kısmı ve}$$

$Q = [A - A^t]$ $2a$ nın anti simetriğidir. Dönme hareketlerinde önceleri elde edilen sonuçlar nedeniyle,

$$v = Av = A^t v$$

denklemin vardır.

$$[A - A^t]v = Qv = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v ' nin kolayca elde edilebileceği bir homojen denklem yazılabilir.

Bu denklemin çözümünden,

$$v = \left(\frac{q_1}{q_3}, \frac{q_2}{q_3}, 1 \right) \equiv [q_1, q_2, q_3] \text{ elde edilir.}$$

Böylece dönme eksenini belli olan bir dönme hareketini tanımlamak kolay bir hal alır ve ardarda gelen dönme hareketleri bu yöntem sayesinde kolaylıkla tanımlanabilir hale gelecektir.

KAYNAKLAR

- Baydaş, Ş., Karakaş, B., 2006. Quaternion forms of the motion defined as 2x3r robotics modelling. **Math. Track**, Vol 2: 65-83.
- Bottema, O., Roth, B., 1979. **Theoretical Kinematics**. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. **Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi**. Gazi Üniversitesi, 30, Ankara. 128.
- Kuipers, J.B., 2002. **Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits aerospace, and virtual reality**. Princeton University, Princeton, Usa. 371.
- McCarthy, J. M., 1990. **An Introduction to Theoretical Kinematics**. The MIT Press, Massachusetts. 130.
- Siminovitch, D.J., 1995. Comment on rotation operator approach to spin dynamics and the euler geometric equations. **J.Chem. Phys.**, 103: 2766-2768.

ÖZ GEÇMİŞ

1979 yılında Adıyaman’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1998 yılında Dicle Üniversitesi Siirt Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2002 yılında bölümünü başarıyla bitirdikten sonra aynı yıl Van Merkez Mehmet Akif Ersoy Lisesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2004 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.