

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ - FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELEKTROOSMOTİK KUVVETİN ETKİSİ ALTINDAKİ
MİKROKANALLARDA ÜÇÜNCÜ DERECE AKIŞKANLARIN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Bahattin AKGÜL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Temmuz 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Ağustos 2008

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Erdoğan ÖZKAYA
: Yrd. Doç. Dr. Muhittin BAĞCI

MANİSA 2008

İÇİNDEKİLER**SAYFA NO**

SEMBOL LİSTESİ	II
ŞEKİL LİSTESİ	IV
TEŞEKKÜR	VI
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Bilgiler ve Yapılmış Çalışmalar	1
1.2. Çalışmanın Kapsamı	2
2. NON- NEWTONYEN AKIŞKANLAR	3
2.1. Newtonyen Akışkan Modeli	3
2.2. Non-Newtonyen Akışkanlara Ait Modeller	5
2.2.1. Zamana Bağımlı Non-Newtonyen Akışkanlar	6
2.2.2. Zamana Bağılı Olmayan Non-Newtonyen Akışkanlar	7
3. MİKROKANALLARDA ELEKTROOZMOTİK AKIŞ	8
4. HAREKET DENKLEMLERİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLER	13
4.1. Üçüncü Derece Akışkanlar	13
4.2. Akış Geometrisi ve Korunum Denklemleri	14
4.3. Sabit Viskozite Hali	15
4.4. Sıcaklığa Bağlı Viskozite Hali	21
5. HIZ-SICAKLIK GRAFİKLERİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI	25
5.1. Sabit Viskozite Halinde Hız ve Sıcaklık Grafikleri	25
5.2. Değişken Viskozite Durumunda Hız ve Sıcaklık Grafikleri	29
5.3. Analitik ve Sayısal Çözümlerin Karşılaştırılması	34
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	37
7. KAYNAKLAR	38
8. ÖZGEÇMİŞ	39

SEMBOL LİSTESİ

ψ^*	Elektriksel potansiyel
ρ_e	Birim hacimdeki lokal net yük yoğunluğu
ρ	Yoğunluk
ϵ	Dielektrik sabiti
$\mathbf{I}$	Birim matris
n_i	İyon konsantrasyonu
z	İyon valans değeri
$\alpha_1, \alpha_2, \beta$	Gerilme Modülleri
e	Elementer yük
k_b	Boltzmann sabiti
θ^*	Mutlak sıcaklık
k	Debye-Hückel parametresi
ζ^*	Kesme düzlemindeki elektriksel potansiyel
$\mathbf{T}$	Gerilme tensörü
μ	Viskozite
$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$	Rivlin-Ericksen tensörleri
$\mathbf{V}^*$	Akışkan hızı
u^*	Akışkan hızının x bileşeni
E_x	Elektiksel alan
ξ	Özgül iç enerji
q	Isı akısı
p^*	Boyutlu basınç
U	Referans hız
h	Kanal yüksekliği
ϵ	Perturbasyon parametresi
$grad$	Gradyen operatörü
div	Diverjans operatörü
u	Boyutsuz x yönündeki hız bileşeni

θ	Boyutsuz sıcaklık
ψ	Boyutsuz elektriksel alan
ζ	Boyutsuz zeta potansiyeli
$\bar{p}^*$	Yeni basınç fonksiyonu
k_{th}	Akışkanın ısı iletkenliği
σ	Akışkanın elektriksel iletkenliği
M	Viskozite indeksi
τ_{yx}	Kayma gerilmesi

ŞEKİL LİSTESİ	SAYFA NO	
Şekil 2.1.	İki sonsuz plaka arasında durgun akışkan	3
Şekil 2.2.	İki sonsuz plaka arasındaki akışkan için üst plakanın hareket ettiği durum	3
Şekil 2.3.	Newtonyen akışkanda düşük ve yüksek viskozite değerleri için kayma gerilmesi hız gradyeni grafiği	4
Şekil 2.4.	Pseudoplastik ve Dilatant akışkanların kayma gerilmesinin hız gradyenine bağlı olarak değişimi	7
Şekil 3.1.	K parametresinin farklı değerleri için elektriksel potansiyelin değişimi	11
Şekil 3.2.	Boyutsuz zeta potansiyelinin farklı değerleri için elektriksel potansiyelin değişimi	12
Şekil 4.1.	Basınç gradyenli ve elektroosmotik mikrokanal akışı	14
Şekil 5.1.	Değişik non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen boyutsuz hız	25
Şekil 5.2.	Değişik elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen boyutsuz hız	26
Şekil 5.3.	Değişik non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen sıcaklık dağılımı	27
Şekil 5.4.	Değişik elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen sıcaklık dağılımı	27
Şekil 5.5.	Joule ısınması (γ_2) için boyutsuz sıcaklık dağılımı	28
Şekil 5.6.	Değişken viskozite durumu için farklı non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen boyutsuz hız	29
Şekil 5.7.	Değişken viskozite durumu için farklı elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen boyutsuz hız	30
Şekil 5.8.	Farklı viskozite indeks (M) değerleri için boyutsuz hız	31
Şekil 5.9.	Değişken viskozite durumu için farklı non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen sıcaklık dağılımı	31
Şekil 5.10.	Değişken viskozite durumu için farklı elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen sıcaklık dağılımı	32

Şekil 5.11.	Farklı viskozite indeks (M) değerleri için sıcaklık dağılımı	32
Şekil 5.12.	Değişken viskozite durumu için farklı değerlerdeki Joule ısınmasına (γ_2) karşılık gelen sıcaklık dağılımı	33
Şekil 5.13.	Sabit viskozite durumu için hız dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	34
Şekil 5.14.	Değişken viskozite durumu için hız dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	35
Şekil 5.15.	Sabit viskozite durumu için sıcaklık dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	36
Şekil 5.16.	Değişken viskozite durumu için sıcaklık dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	36

TEŞEKKÜR

İlk olarak beni bugünlere getiren aileme teşekkür etmek isterim. Çalışmalarımda bana destek olan ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Mehmet PAKDEMİRLİ'ye, verdiği bursla yüksek lisans eğitimimi tamamlamamda yardımcı olan Tübitak-Bideb'e ve Arş. Gör. Ali YURDDAŞ ve Arş. Gör. Saim KURAL'a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Üçüncü derece bir akışkanın dikdörtgensel bir kesite sahip mikrokanalda, elektroosmotik akışı ele alınmıştır. Hareket denklemleri çıkarılıp boyutsuzlaştırılmıştır. Perturbasyon tekniği kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite modelleri ayrı ayrı uygulanmıştır. Bunlarla birlikte nümerik çözümlerde yapılmıştır. Non-Newtonyen parametresinin, Joule ısınmasının, viskozite indeksinin ve elektrokinetik etkilerin hız ve sıcaklık grafikleri üzerine etkileri incelenmiştir. Yaklaşık çözümlerle nümerik çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: elektroosmotik akış, üçüncü derece akışkan, mikrokanal, perturbasyon teknikleri

Abstract

Electroosmotic flow of a third grade fluid in a rectangular microchannel is considered. The equations of motion are derived and made dimensionless. Approximate analytical solutions are obtained by perturbation techniques. Constant viscosity and temperature dependent viscosity (Reynolds model) cases are treated separately. Numerical solutions of the equations are also obtained. Influences of non-Newtonian parameter, Joule heating effect, viscosity index and electrokinetic effect on the velocity and temperature profiles are shown. Approximate and numerical solutions are contrasted.

Keywords: electroosmotic flow, third grade fluids, microchannel, perturbation techniques.

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler ve Yapılmış Çalışmalar

Madde katı, sıvı ve gaz olmak üzere üç temel halde bulunur. Sıvı ve gaz halindeki madde akışkan olarak nitelendirilir. Katı ve sıvı arasındaki fark; madde şeklini değiştirmek üzere uygulanan kayma gerilmesine karşı gösterdikleri direnç ile anlaşılır. Katı, uygulanan kayma gerilmesine bir miktar şekil değiştirerek direnebilir. Tam tersine sıvı, kayma gerilmesi ne kadar küçük olursa olsun sürekli olarak şekil değiştirir.

Akışkanların sınıflandırılmasında bir çok metot kullanılmaktadır. Bunlardan biri de akışkanları Newtonyen ve non-Newtonyen şekilde ayırmaktadır. Genel anlamda, gazlar, su, benzen ve etanol gibi düşük moleküler ağırlığa sahip sıvılar Newtonyen olarak modellenir. Pratikte oldukça fazla karşımıza çıkan yüksek moleküler ağırlığa sahip akışkanlar (bal, hamur, mayonez, bitkisel yağlar, kan, v.b.) non-Newtonyen olarak modellenir. Non-Newtonyen modeller içerisinde en fazla kullanılan model ise power-law modelidir. Fakat bu modelde; akışkan üzerindeki normal gerilme etkilerinin gösterilememesi en büyük dezavantajdır. Bu dezavantajı gidermek amacıyla diferansiyel tip akışkanlar diye nitelendirilen Rivlin-Ericksen akışkanları geliştirilmiştir Fosdick et al. (1980), Dunn et al. (1995). Bu sınıf akışkanlar içerisinde ikinci ve üçüncü derece akışkan modelleri en fazla kabul gören ve kullanılan modeller olmuştur. Bu çalışmada kullanılan üçüncü derece akışkanlar ile ilgili daha ayrıntılı bilgi bölüm 4'te verilecektir.

Akışkan akışını içeren mikroeletromekanik sistemler (MEMS), karakteristik boyutları $1\mu\text{m}$ 'den 1 mm 'ye kadar değişen ve mekanik optik akışkan elemanlarını elektroniklerle birleştiren mekanik sistemler olarak tanımlanır. Minyatürleşme pek çok avantaj sağladığından, MEMS'ler; sağlık bilimlerinden yarı iletkenlere ve uzay araştırmalarına kadar birçok sistemlerde kullanılır. Mühendislik uygulamalarında mikro-ısı değiştiricileri, mikro-pompalar, mikro-türbinler ve biyokimyasal analiz enstrümanları gibi birçok şekilde karşımıza çıkarlar. Mikrokanallar MEMS'lerin temel unsurlarından olduğundan dolayı birçok çalışmaya konu olmuştur. Mikrokanallar ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar şöyledir; Jain et al. (2007), mikrokanallarda

elektrokinetik etkilerin akış ve ısı transferi üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Chen et al. (2003), elektrokinetik etki altındaki mikrokanallarda basınç gradyenli akışı analiz etmişlerdir. Ngoma et al. (2007), mikrokanallardaki akış üzerindeki ısı akısı ve kayma etkilerini araştırmışlardır. Zhang et al. (2005), düzensiz bir kesite sahip mikrokanallarda elektroosmotik akışı incelemişlerdir. Yukarıda bahsedilen çalışmaların hepsinde akışkan Newtonyen olarak kabul edilmiştir. Literatürde mikrokanallarla ilgili non-Newtonyen modelleri içeren çok az çalışma bulunmaktadır; Das et al. (2006), non-Newtonyen bir akışkanın elektroosmotik mikrokanal akışında hız, sıcaklık ve konsantrasyon dağılımları ile ilgili analitik çözümleri yapmışlardır.

1.2. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada; ilk kez elektroosmotik kuvvetin etkisi altındaki mikrokanallarda üçüncü derece akışkanlar incelenmiştir. Bölüm 2’de, non-Newtonyen akışkanlar ile ilgili temel bilgiler verilip, en çok kullanılan modeller gösterilmiştir. Bölüm 3’te, elektroosmotik akış anlatılmıştır.

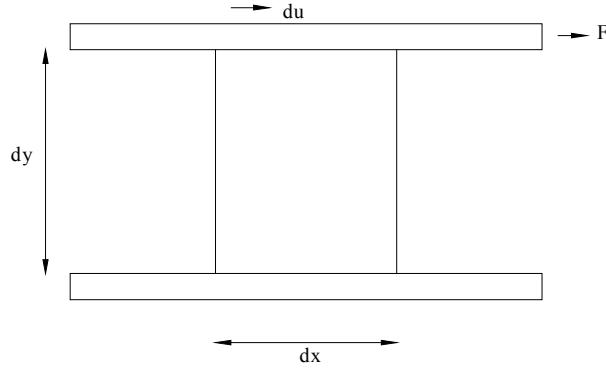
Bölüm 4’te, Yürüsoy et al. (2008), Rajagopal et al. (1986), Hayat et al. (2000), ve Hayat et al. (2007) çalışmalarında üçüncü derece bir akışkan için verilen momentum ve enerji denklemleri, bu çalışmada elektroosmotik etkiler eklenerek sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite modelleri için yeniden türetilip perturbasyon tekniği kullanılarak yarı analitik çözümleri yapılmıştır. Bölüm 5’te ise bu yarı analitik çözümlerin grafikleri çizilip, nümerik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

2. NON-NEWTONYEN AKIŞKAN MODELLERİ

Bölüm 1’de Newtonyen akışkanlar ile non-Newtonyen akışkanlar arasındaki temel ayırmadan söz edilmişti. Bu bölümde akışkanlar genel anlamda sınıflandırılacak ve non-Newtonyen akışkanlar daha ayrıntılı olarak incelenecektir. Karşılaştırma açısından öncelikle Newtonyen akışkanlar ile non-Newtonyen akışkanlar arasındaki farkı görsel ve matematiksel olarak ifade edelim.

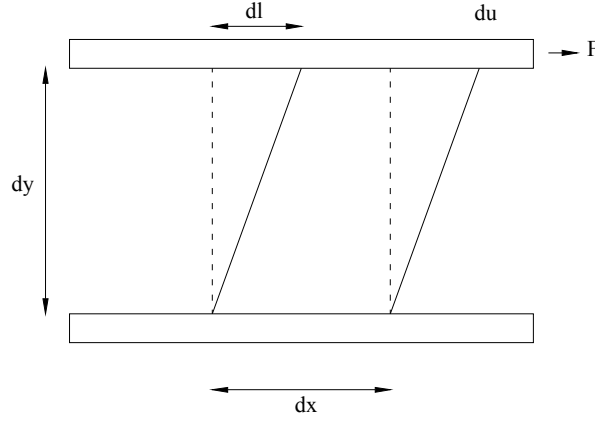
2.1. Newtonyen Akışkan Modeli

Aralarında dy kadar mesafe bulunan sonsuz iki plaka arasında Şekil 2.1’deki gibi x eksenini boyunca dx kadar mesafeye yayılmış akışkan bulunsun.



Şekil 2.1. İki sonsuz plaka arasında durgun akışkan

Üst plaka bir F kuvveti yardımıyla du hızıyla hareket ettirilsin ve dl kadar yer değiştirsin şekil 2.2.



Şekil 2.2. İki sonsuz plaka arasındaki akışkan için üst plakanın hareket ettiği durum

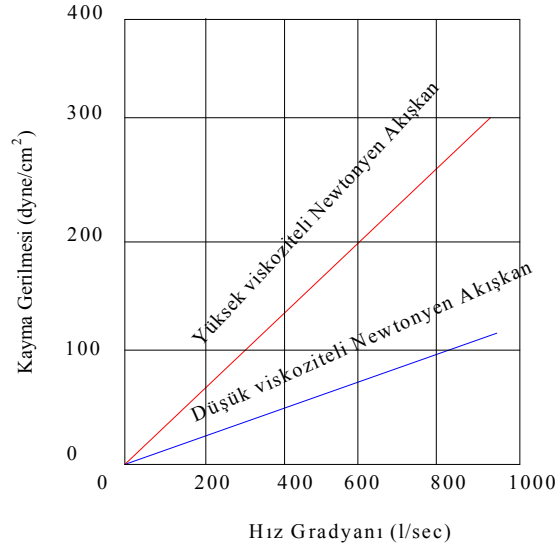
Bu durumda deformasyon oranı du / dy olarak ifade edilir. Kayma gerilmesi ise

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.1)'de μ terimi akışkanın viskozitesi olarak adlandırılır.

Sürekli ortamların mekaniği incelenirken uygulanan kuvvetlere göre şekil değişimini ölçen bazı katsayılar tanımlanmıştır. Katı sürekli ortamlar için elastisite modülü, poisson oranı ve kayma modülü gibi katsayılar (oranlar) vardır. Bir sürekli ortam olarak akışkan için de hacim modülü ve viskozite katsayısı gibi iki katsayı tanımlanmıştır. Bunlar akışkana bir kuvvet uygulandığında yapacağı davranışı öngörmemizi sağlarlar. Denklem 2.1'de bulduğumuz viskozitenin böyle bir önemi vardır. Katılar için, akışkandaki viskoziteye karşılık gelen kayma modülü, kayma gerilmesinin yer değiştirmeye oranı olarak tanımlanırken akışkanda viskozite, kayma gerilmesinin hız gradyanına oranı olarak tanımlanır.

Bir başka tanımla viskozite hareket halindeki akışkandaki yersel gerilmelerle şekil değiştirme hızı arasındaki ilişkiyi ortaya koyar. Newtonyen akışkanlar için verilen herhangi bir sıcaklık için viskozite sabittir. Newtonyen akışkanlarda viskozite, basınç arttıkça çok az artar, sıcaklık arttıkça –sıvılarda- azalır. Düşük ve yüksek viskozite değerleri için Newtonyen akışkanların örnek grafiği Şekil 2.3'de verilmiştir.



Şekil 2.3. Newtonyen akışkanda düşük ve yüksek viskozite değerleri için kayma gerilmesi hız gradyanı grafiği

2.2. Non-Newtonyen Akışkanlara Ait Modeller

Non-Newtonyen akışkanların özellikleri ve sınıflandırması “Reoloji” denilen bilim dalı dahilinde incelenmektedir. Reoloji, şekil değiştirme – kuvvet ilişkisiyle uğraşan bilim dalıdır. Cisimlerin davranışlarını şekil değiştirme, kuvvet ve/veya zaman faktörleri altında ele alır.

Bölüm 1’de genel olarak bahsettiğimiz gibi non-Newtonyen akışkanların Newtonyen akışkanlardan farkı, kayma gerilmesiyle hız gradyanı arasında doğrusal bir ilişkinin olmamasıdır. Bölüm 2.1’de Newtonyen akışkanları denklem (2.1)’le matematiksel olarak ifade ettik. Ancak böyle tek bir genel modeli non-Newtonyen akışkanlar için yazabilmek pek mümkün değildir. Newtonyen olmayan davranış gösteren akışkanlar için birçok model ileri sürülmüştür. Akışkana ve akış biçiminin değişimine göre kullanılabilecek non-Newtonyen akışkan modeli farklılık gösterir. Çünkü her bir modelin değişik şartlar için uygun veya uygun olmayan yönleri mevcuttur. Bazı non-Newtonyen akışkan modellerini sıralayalım,

Power Law Modeli:

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.2)$$

Hershell-Bulkley Modeli:
$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.3)$$

Prandtl Modeli:
$$\tau_{yx} = A \sin^{-1} \left(\frac{du/dy}{c} \right) \quad (2.4)$$

Powell- Eyring Modeli:
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{1}{B} \sinh^{-1} \left(\frac{du/dy}{c} \right) \quad (2.5)$$

Williamson Modeli:
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} + \frac{A du/dy}{B + du/dy} \quad (2.6)$$

Akışkanları en genel olarak Newtonyen akışkanlar ve non Newtonyen akışkanlar olarak iki gruba ayırdıktan sonra yukarıda bazı örnek modellerini verdiğimiz Non Newtonyen akışkanları temel parametresi olan viskozitesinin zamana bağlılığına göre gruplamak istersek iki gruba ayırabiliriz: i) Zamana bağımlı akışkanlar, ii) Zamandan bağımsız akışkanlar

2.2.1. Zamana Bağımlı Non-Newtonyen Akışkanlar

Tiksotropik ve Reopektik olarak adlandırılan akışkanlar bu gruba girer. Tiksotropik akışkanların görünür viskozitesi kayma gerilmesiyle azalır. Zamanla inceliyorlar ve azalan gerilmeye ihtiyaç duyarlar. Bir başka deyişle sabit hız gradyeni için kayma gerilmesi zamana bağlı olarak azalır. Reopektik akışkanların görünür viskozitesi kayma gerilmesiyle artar. Sabit şekil değiştirme hızını koruyabilmek için yavaşça artan kayma gerilmesine ihtiyaç duyarlar. Sabit hız gradyeni için kayma gerilmesi zamana bağlı olarak artar. Tiksotropik akışkanlara örnekler boya, bal ketçap ve yoğurt sayılabilir. Reopektik akışkanlara örnek olarak ta temel mantığı hareket eden iki yüzey arasındaki sürtünmeyi azaltan ve mekanik uygulama alanları oldukça fazla olan yağlama maddeleri verilebilir. Bitkisel, sentetik ve mineral yağlar bu gruba verilebilecek örneklerdir.

2.2.2. Zamana Bağı Olmayan Non-Newtonyen Akışkanlar

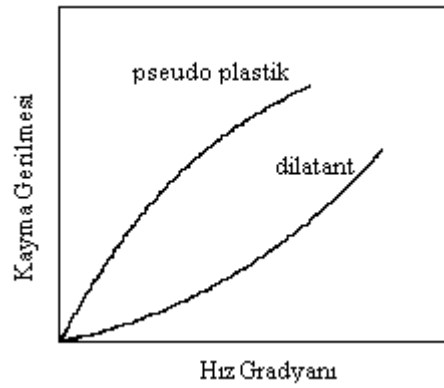
Bazı besin grubu ve biyolojik sistemlerdeki akışkanlar bu gruba girer. Power Law akışkanlar için verilen modeli,

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \text{ şeklinde ifade etmiştik. Burada,}$$

$n < 1$ ise akışkan, alçalan, veya kayma incelmesi davranışı gösteren akışkan (shear thinning) olarak tanımlanır. Bunlar Pseudeplastik akışkanlardır. Hız gradyeni arttıkça görünür viskozitesi azalır. Saç şekillendirici jöleler bu gruba örnek verilebilir.

$n > 1$ ise kabaran, veya kayma kalınlaşması davranışı gösteren akışkan (shear thickening) olarak tanımlanır. Bunlar Dilatant akışkanlardır. Hız gradyeni arttıkça görünür viskozitesi artar. Su ve un karışımı bu gruba örnek verilebilir.

Şekil 2.4’de Pseudoplastik ve Dilatant akışkanların hız gradyenine bağlı olarak kayma gerilmesinin değişimi grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Pseudoplastik ve Dilatant akışkanların kayma gerilmesinin hız gradyenine bağlı olarak değişimi (http://en.wikipedia.org/wiki/Non-Newtonian_fluid).

3. MİKROKANALLARDA ELEKTROOSMOTİK AKIŞ

Bir çok katı, kutuplu bir ortamla (sulu çözeltilerle) temas ettirildiğinde, iyon adsorpsiyonu nedeniyle yüzeyleri üzerinde bir elektrostatik yük oluşur. Eğer temas halindeki akışkan yeterli miktarda iyon içeriyorsa, katı yüzey üzerindeki elektrostatik yükler akışkan içerisindeki zıt yüklü iyonları çeker. Böylelikle yüzey üzerindeki yüklerin ve akışkan içerisindeki iyon konsantrasyonunun yeniden düzenlenmesiyle, akışkan ve katı yüzey arasında elektriksel çift tabaka (EÇT) denen bir katman meydana gelir. EÇT, kompakt ve difüzyon tabakası olarak adlandırılan iki katmandan meydana gelir. İyonların yüzeye doğru kuvvetlice çekildiği ve hareketsiz bulunduğu katı yüzeye yakın olan katmana kompakt tabaka denir ve kalınlığı birkaç angstromdur. Zıt yüklü iyon konsantrasyonu kompakt tabakadan akışkan merkezine doğru ilerledikçe azalır. Eş yüklü iyon konsantrasyonu ise elektriksel itme kuvvetinden dolayı zıt yüklü iyon konsantrasyonuna göre akışkan merkezine doğru gittikçe artar. Sonuç olarak kompakt tabakadan akışkan merkezine ilerledikçe eş ve zıt yüklü iyon sayıları birbirine yaklaştığından, net yük yoğunluğu sıfıra yaklaşır. Kompakt tabakanın hemen altında çekim kuvvetinden daha az etkilenmiş ve hareketli iyonlardan meydana gelen katmana difüzyon tabakası denir. Bu tabakanın kalınlığı akışkanın iyonik konsantrasyonuna ve elektriksel özelliklerine bağlıdır. Genellikle bu kalınlık, yüksek iyonik konsantrasyona sahip çözeltiler için birkaç nanometre iken, saf su ve organik sıvılar için birkaç mikrona ulaşır. Kompakt ve difüzyon tabakaları arasındaki düzleme kesme düzlemi denir. Katı sıvı ara yüzeyindeki elektriksel potansiyeli direk olarak ölçmek zordur. Bu nedenle çalışmalarda, kesme düzlemindeki elektriksel potansiyel kullanılır. Bu potansiyele zeta (ζ^*) potansiyeli denir ve deneysel olarak ölçülür.

EÇT'daki iyon ve elektriksel potansiyel dağılımları doğrudan Poisson-Boltzmann denklemleriyle bulunur. Elektrostatik teoriye göre, herhangi bir noktadaki elektriksel potansiyel ψ^* ve birim hacimdeki lokal net yük yoğunluğu ρ_e arasındaki ilişki Poisson denklemi ile ifade edilir Jain et al. (2007);

$$\frac{d^2\psi^*}{dy^{*2}} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (3.1)$$

buradaki ϵ çözeltinin dielektrik sabitidir. Dielektrik sabitinin uniform olması durumunda iyon konsantrasyonu;

$$n_i = n_{i0} \exp\left(\frac{-ze\psi^*}{k_b\theta^*}\right) \quad (3.2)$$

denklemleri bulunur. Buradaki n_{i0} , z , e , k_b ve θ^* sırasıyla, sıvının iyonik konsantrasyonu, iyon valans değeri, elementer yük, Boltzmann sabiti ve mutlak sıcaklıktır. Net elektriksel yük yoğunluğu, simetrik elektrot durumunda

$$\rho_e = -2zen_0 \sinh\left(\frac{ze\psi^*}{k_b\theta^*}\right) \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.3) ile (3.1) birleştirildiğinde Poisson-Boltzmann denklemi elde edilir;

$$\frac{d^2\psi^*}{dy^{*2}} = \frac{2zen_0}{\epsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi^*}{k_b\theta^*}\right) \quad (3.4)$$

Debye-Hückel lineer yaklaşımı, $\sinh(x) \approx x$ şeklindedir. Bu yaklaşımı Poisson-Boltzmann denklemine uygularsak;

$$\frac{d^2\psi^*}{dy^{*2}} \cong \frac{2n_0z^2e^2\psi^*}{\epsilon k_b\theta^*} \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir. Fakat Debye-Hückel lineer yaklaşımı, elektriksel potansiyelin iyonların termal enerjisine göre küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Denklem (3.5) bu yaklaşımla aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\frac{d^2\psi^*}{dy^{*2}} = k^2\psi^* \quad (3.6)$$

Denklemdaki $k = ze\sqrt{\frac{2n_0}{\epsilon k_b\theta^*}}$ Debye-Hückel parametresi olarak adlandırılır ve $1/k$

EÇT'nin karakteristik kalınlığı olup, Debye uzunluğu olarak bilinir Jain et al. (2007). Denklem (3.6)'nın sınır şartları;

$$\frac{d\psi^*}{dy^*}(0) = 0, \quad \psi^*(h) = \zeta^* \quad (3.7)$$

şeklinde dir. Denklem (3.6) ve sınır şartlarını boyutsuzlaştırırsak;

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = K^2\psi \quad (3.8)$$

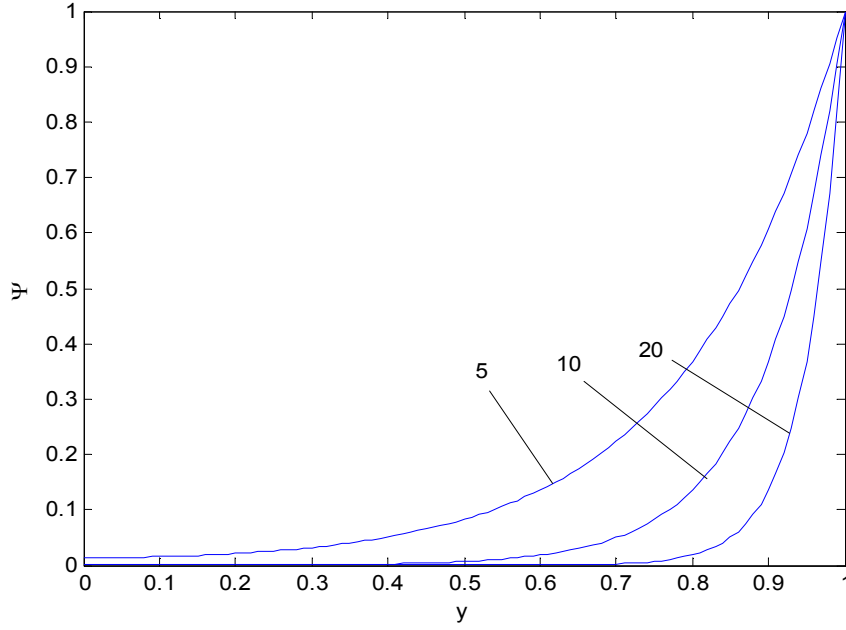
$$\frac{d\psi}{dy}(0) = 0, \quad \psi(1) = \zeta \quad (3.9)$$

denklemlerini elde ederiz. Buradaki y boyutsuz koordinatı, ψ boyutsuz elektriksel potansiyeli, K ise kanal yüksekliğini baz alıp elektrokinetik ayırma mesafesini gösterir. Denklem (3.8) ve (3.9)'da ki boyutsuz parametrelerin boyutlu parametrelerle ilişkisi denklem (3.10)'da verilmiştir;

$$y = \frac{y^*}{h}, \quad \psi = \frac{ze\psi^*}{k_b\theta^*}, \quad K = kh, \quad \zeta = \frac{ze\zeta^*}{k_b\theta^*} \quad (3.10)$$

Denklem(3.8)'in denklem (3.9)'da verilen sınır şartları için analitik çözümü şöyledir;

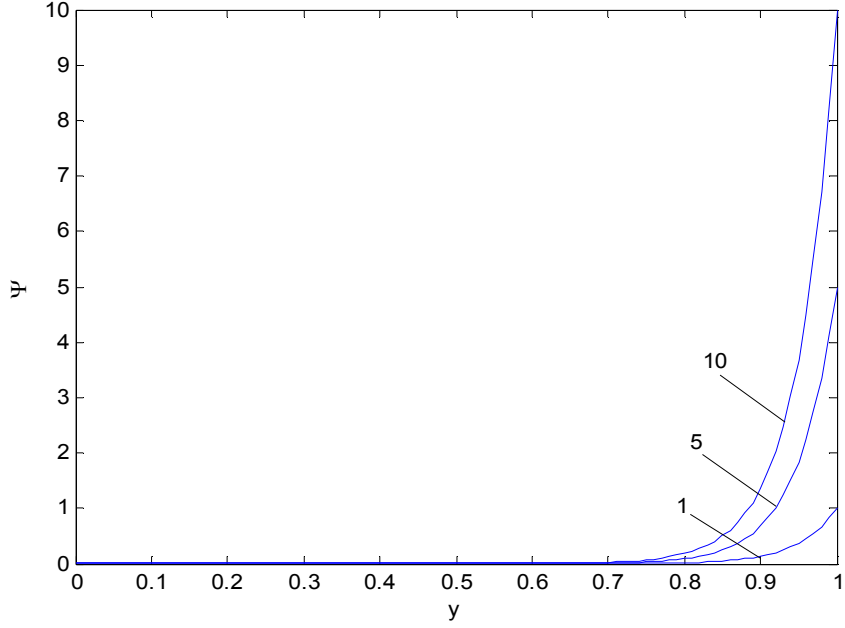
$$\psi = \frac{\zeta \cosh(Ky)}{\cosh(K)} \quad (3.11)$$



Şekil 3.1. K parametresinin farklı değerleri için elektriksel potansiyelin değişimi
($\zeta = 1$)

Şekil 3.1'de K parametresine göre boyutsuz elektriksel potansiyelin nasıl değiştiği gösterilmiştir. K parametresinin her üç değeri için de potansiyel alanı, kanal duvarından uzaklaştıkça keskin bir düşüş göstermektedir. Ayrıca bu düşüş K değerinin artmasıyla daha baskın hale gelmektedir.

Şekil 3.2'de ise değişik zeta potansiyeli değerleri için elektriksel potansiyelin değişimi verilmiştir. Yine Şekil 3.1'deki gibi zetanın her üç değeri için, kanal duvarından uzaklaştıkça potansiyelde keskin düşüşler oluşmaktadır. Fakat Şekil 3.1'deki durumun tersine zeta potansiyeli arttıkça bu düşüşler daha yumuşak halde gerçekleşmektedir.



Şekil 3.2. Boyutsuz zeta potansiyelinin farklı değerleri için elektriksel potansiyelin değişimi ($K=20$)

Sulu bir çözeltiyle dolu mikrokanal ele alındığında, daha öncede anlatıldığı gibi kanal duvarı ve sıvı ara yüzeyine yakın bir bölgede elektriksel çift tabaka oluşmaktadır. Eğer bir elektriksel alan kanal boyunca uygulanırsa, bu alanın oluşturduğu elektriksel kuvvet difüzyon tabakasındaki iyonları, artı veya eksi yüklü elektroda doğru çeker. Çekilen iyonlar, bu tabakadaki fazla sayıda bulunan zıt yüklü iyonlardır. Eğer katı yüzey negatif yüklüyse zıt yüklü iyonlar pozitif iyonlardır. Sayısı fazla olan bu iyonlar, elektriksel alanın etkisiyle hareket edip viskoz kuvvetlerin yardımıyla akışkanı da elektroda doğru çekip elektroosmotik akışı oluşturacaklardır.

Çoğu mikro-çip uygulamasında elektroosmotik akış, plug hız profili elde edildiğinden basınç gradyenli akışa göre tercih edilir. Ayrıca basınç gradyenli akışta, çok küçük boyutlara sahip mikrokanallarda akışkanı pompalamak için akış debisine bağlı olarak büyük basınç farkları gerekmektedir. Bu farkı elde etmek boyutlar ve mekanik dayanım yüzünden bazen çok zordur. Bu nedenle de elektroosmotik akış kullanılır. Bununla birlikte elektroosmotik akışta, mekanik pompa veya hareket eden parça bulunmaması ve akış özelliklerinin elektrik akımıyla oynanarak kolayca değiştirilebilmesi sayesinde basınç gradyenli akışa göre avantaj sağlanır.

4. HAREKET DENKLEMLERİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde, üçüncü derece akışkanlar ile ilgili genel bilgiler verilip, sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite durumları için hareket denklemleri çıkarılıp analitik çözümler perturbasyon metodu ile yapılacaktır.

4.1. Üçüncü Derece Akışkanlar

Cauchy gerilme tensörü $\mathbf{T}$, sıkıştırılmaz ve homojen bir yapıya sahip üçüncü derece akışkan için aşağıdaki şekilde verilir;

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1 \quad (4.1)$$

yukarıdaki p basınç, μ viskozite, $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ akışkan sabitleridir. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ ise Rivlin-Ericksen tensörleridir. Bu tensörler;

$$\mathbf{A}_1 = (\text{grad}\mathbf{V}^*) + (\text{grad}\mathbf{V}^*)^T \quad (4.2)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} + \mathbf{A}_1(\text{grad}\mathbf{V}^*) + (\text{grad}\mathbf{V}^*)^T \mathbf{A}_1 \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemlerdeki $\mathbf{V}^*$ akışkan hızını, d/dt ise zamana göre toplam türevi gösterir. Üçüncü derece akışkanların teorisi Rajagopal et al. (1980) tarafından geliştirilmiştir. Dunn et al. (1985) ise termodinamik analizlerini yapmışlardır. Üçüncü derece akışkanlarla ilgili daha detaylı bilgiye bu kaynaklardan ulaşılabilir.

4.2. Akış Geometrisi ve Korunum Denklemleri

Yüksekliği $2H$ ve uzunluğu L_0 olan dikdörtgensel mikrokanal geometrisi şekil 4.1’de verilmiştir. Simetriden dolayı akış ve elektriksel potansiyel alanları kanalın yarısında incelenmiştir. Elektriksel potansiyel ve basınç gradyeni x eksenini boyunca uygulanmaktadır.

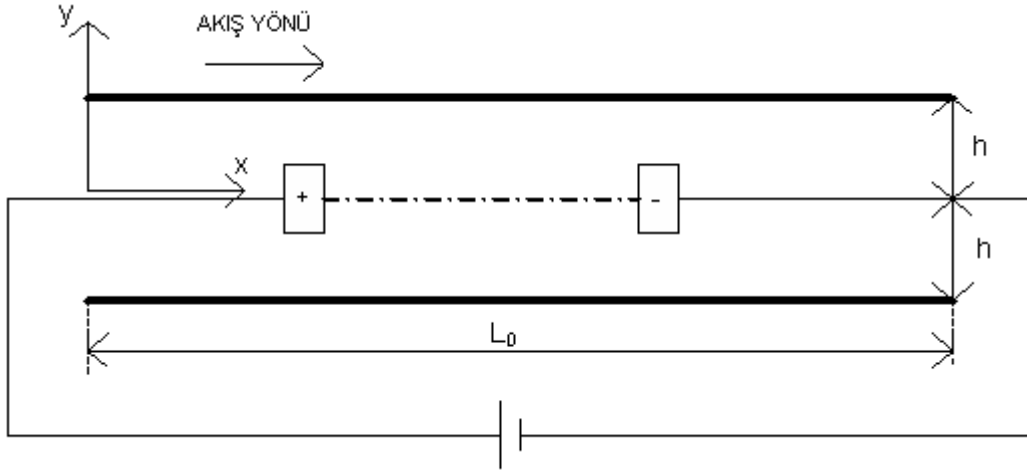
Hareket denklemlerinin çıkarılmasında, sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite modelleri için hız vektörü;

$$\mathbf{V}^* = [u^*(y^*), 0, 0] \quad (4.4)$$

bir boyutlu olacak şekilde kabul edilmiştir. Sıcaklığında benzer şekilde;

$$\theta^* = \theta^*(y^*) \quad (4.5)$$

y eksenini yönünde değiştiği kabulü yapılmıştır.



Şekil 4.1. Basınç gradyenli ve elektroosmotik mikrokanal akışı

Sıkıştırılamaz, laminar akış kabulü ile süreklilik, lineer momentum ve enerji denklemleri;

$$\text{div}(\mathbf{V}^*) = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}^*}{dt} = \text{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{b} = \rho_e E_x \quad (4.8)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \mathbf{T} \cdot \text{grad}(\mathbf{V}^*) - \text{div}\mathbf{q} + E_x^2 \sigma \quad (4.9)$$

şeklindedir. Buradaki ξ özgül iç enerjiyi, $\mathbf{q}$ ısı akısını ve $E_x^2 \sigma$ terimi ise Joule ısınmasını gösterir.

4.3. Sabit Viskozite Hali

Bu bölümde, sabit viskozite hali için hız bileşenlerini kullanıp momentum ve enerji denklemleri çıkarılıp perturbasyon tekniği kullanılarak analitik çözümler yapılacaktır. Denklem (4.1)'de verilen gerilme tensörü ve denklem (4.4)'te verilen hız alanı kullanılarak üç doğrultuda momentum denklemi;

$$\mu \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + 2\beta \frac{d}{dy^*} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^3 + E_x \rho_e = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dy^*} \left[(2\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 \right] = \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4.12)$$

Şeklinde elde edilir. Aşağıdaki gibi yeni bir basınç tanımlarsak;

$$\bar{p}^* = p^* - [2\alpha_1 + \alpha_2] \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 \quad (4.13)$$

$\bar{p}^* = \bar{p}^*(x)$ olur. Bu durumunda momentum denklemi;

$$\mu \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + 2\beta \frac{d}{dy^*} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^3 + E_x \rho_e = \frac{d \bar{p}^*}{dx^*} \quad (4.14)$$

olarak yazılır. Uygulanan basınç gradyeninin sabit olduğu varsayılırsa denklem (4.14) ;

$$\mu \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + 2\beta \frac{d}{dy^*} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^3 + E_x \rho_e = C_0 \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklemdeki E_x ve C_0 sırasıyla uygulanan elektriksel alanı ve sabit basınç gradyenini temsil etmektedir. Denklem (4.15)'i boyutsuzlaştırırsak;

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + 6\Lambda_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \frac{d^2 u}{dy^2} - \Lambda_2 \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \Lambda_3 \quad (4.16)$$

denklemini elde ederiz. Denklemdeki boyutsuz parametreler ise;

$$\Lambda_1 = \frac{\beta U^2}{\mu h^2}, \quad \Lambda_2 = \frac{\epsilon k_b \theta^* E_x}{ze\mu U}, \quad \Lambda_3 = \frac{h^2 C_0}{\mu U}, \quad u = \frac{u^*}{U} \quad (4.17)$$

şeklindedir. Buradaki U referans hızını, Λ_1 akışkanın non-Newtonyen davranışını ifade eden boyutsuz parametreyi, Λ_2 ise boyutsuz elektrokinetik etkileri göstermektedir. Denklem (4.17)'nin boyutsuz formdaki sınır şartları;

$$\frac{du}{dy}(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.18)$$

olarak yazılabilir.

Yaklaşık çözümleri elde etmek için aşağıdaki boyutsuz parametrelerin küçük seçilmesi gerekir;

$$\Lambda_1 = \varepsilon \lambda_1, \quad \Lambda_2 = \varepsilon \lambda_2 \quad (4.19)$$

ε perturbasyon parametresi olup 1 mertebesinden çok daha küçük olan bir mertebeyi temsil etmektedir. Böylelikle yaklaşık hız perturbasyon açılımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (4.20)$$

Denklem (4.19) ve (4.20) denklem (4.16) ve (4.18)'e yerleştirilip her bir mertebe ayrıştırılırsa;

Mertebe 1

$$u_0'' = \Lambda_3 \quad (4.21)$$

$$\frac{du_0}{dy}(0) = 0, \quad u_0(1) = 0 \quad (4.22)$$

Mertebe ε

$$u_1'' = -6\lambda_1(u_0')^2(u_0'') + \lambda_2 \psi'' \quad (4.23)$$

$$\frac{du_1}{dy}(0) = 0, \quad u_1(1) = 0 \quad (4.24)$$

denklemleri elde edilir. $(\quad)' = d/dy$ olarak ifade edilmiştir. Sınır şartlarına uygun birinci mertebe çözümü;

$$u_0 = \frac{\Lambda_3}{2}(y^2 - 1) \quad (4.25)$$

şeklindedir. ε mertebesinde çözüm ise;

$$u_1 = \frac{1}{2} \lambda_1 \Lambda_3^3 (1 - y^4) + \lambda_2 \zeta \left(\frac{\cosh(Ky)}{\cosh(K)} - 1 \right) \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. Her mertebedeki çözümler toplanıp orijinal parametrelere dönülürse nihai çözüm;

$$u = \frac{\Lambda_3}{2}(y^2 - 1) + \frac{1}{2} \Lambda_1 \Lambda_3^3 (1 - y^4) + \Lambda_2 \zeta \left(\frac{\cosh(Ky)}{\cosh(K)} - 1 \right) \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilir. Perturbasyon teorisine göre çözümlerin geçerli olabilmesi için düzeltme terimlerinin ilk terimden çok daha küçük olması gerekir. Böylelikle denklem (4.27)'in geçerli bir çözüm olabilmesi için gereken kriterler;

$$\Lambda_1 \Lambda_3^2 \ll 1, \quad \frac{2\Lambda_2 \zeta}{\Lambda_3} \ll 1 \quad (4.28)$$

şeklindedir. Genelde (4.28)'deki eşitliğin sol tarafındaki terimin 0.2'den daha küçük olduğu durumlarda çözümler geçerlilik kriterleri içinde kalmaktadır.

Momentum denklemine benzer şekilde enerji denklemi sabit viskozite hali için;

$$\mu \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + 2\beta \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^4 + k_{th} \left(\frac{d^2\theta^*}{dy^{*2}} \right) + E_x^2 \sigma = 0 \quad (4.29)$$

şeklinde yazılır. Denklemdeki k_{th} ve σ terimleri sırasıyla akışkanın ısı iletkenliği elektriksel geçirgenliğidir. $E_x^2 \sigma$ terimi ise Joule ısınmasını gösterir. Enerji denklemini boyutsuz şekilde yazarsak;

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \gamma_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + 2\Lambda_1 \gamma_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^4 + \gamma_2 = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. Denklemdeki boyutsuz parametreler;

$$\gamma_1 = \frac{\mu U^2}{k_{th}(\theta_m^* - \theta_s^*)}, \quad \gamma_2 = \frac{E_x^2 \sigma h^2}{k_{th}(\theta_m^* - \theta_s^*)}, \quad \theta = \frac{\theta^* - \theta_s^*}{\theta_m^* - \theta_s^*} \quad (4.31)$$

şeklinde dir. Buradaki γ_1 Brinkmann sayısı, γ_2 Joule ısınmasıyla ilgili boyutsuz parametre, θ_m^* ve θ_s^* ise, sırasıyla mikrokanalın merkez ve yüzey sıcaklığıdır. Enerji denkleminin boyutsuz sınır şartları ise aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{d\theta}{dy}(0) = 0, \quad \theta(1) = 0 \quad (4.32)$$

Momentum denkleminin çözümünde kullanılan merteye seçimlerini kullanarak yaklaşık sıcaklık;

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots \quad (4.33)$$

olarak yazılır. Denklem (4.33)'ü enerji denklemi ve sınır şartlarına yerleştirip, $\Lambda_1 = \varepsilon\lambda_1$ kabulüyle mertebe ayrışması yapılırsa;

Mertebe 1

$$\theta_0'' = -\gamma_1(u_0')^2 - \gamma_2 \quad (4.34)$$

$$\frac{d\theta_0}{dy}(0) = 0, \quad \theta_0(1) = 0 \quad (4.35)$$

Mertebe ε

$$\theta_1'' = -2\gamma_1 u_0' u_1' - 2\lambda_1 \gamma_1 (u_0')^4 \quad (4.36)$$

$$\frac{d\theta_1}{dy}(0) = 0, \quad \theta_1(1) = 0 \quad (4.37)$$

denklemleri elde edilir. Sınır şartlarına uygun birinci mertebe çözümü;

$$\theta_0 = \frac{\gamma_1 \Lambda_3^2}{12} (1 - y^4) + \frac{\gamma_2}{2} (1 - y^2) \quad (4.38)$$

şeklindedir. ε mertebesi çözümü ise

$$\theta_1 = \frac{\gamma_1 \lambda_1 \Lambda_3^4}{15} (y^6 - 1) - \frac{2\gamma_1 \Lambda_3 \lambda_2 \zeta}{K^2} \left(\frac{K(y \sinh(Ky) - \sinh(K)) - 2(\cosh(Ky) - \cosh(K))}{\cosh(K)} \right) \quad (4.39)$$

olarak elde edilir. Her bir mertebedeki çözümler toplanıp orijinal parametrelere dönülürse, yaklaşık sıcaklık çözümü aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\theta = \frac{\gamma_1 \Lambda_3^2}{12} (1 - y^4) + \frac{\gamma_2}{2} (1 - y^2) + \frac{\gamma_1 \Lambda_1 \Lambda_3^4}{15} (y^6 - 1) - \frac{2\gamma_1 \Lambda_3 \Lambda_2 \zeta}{K^2} \left(\frac{K(y \sinh(Ky) - \sinh(K)) - 2(\cosh(Ky) - \cosh(K))}{\cosh(K)} \right) \quad (4.40)$$

Düzeltilme terimlerinin ilk terimlere göre çok küçük olması şartından geçerlilik kriterleri yazılırsa;

$$\frac{12\Lambda_1 \Lambda_3^2}{15} \ll 1, \quad \frac{2\gamma_1 \Lambda_1 \Lambda_3^4}{15\gamma_2} \ll 1, \quad \frac{24\Lambda_2 \zeta}{\Lambda_3 K^2} \ll 1, \quad \frac{4\gamma_1 \Lambda_3 \Lambda_2 \zeta}{\gamma_2 K^2} \ll 1 \quad (4.41)$$

Bu kriterlerin sağlanması durumunda yaklaşık perturbasyon çözümü gerçek çözüm ile uyumlu olacaktır.

4.4. Sıcaklığa Bağlı Viskozite Hali

Bu bölümde sıcaklığa bağlı viskozite modeli için momentum ve enerji denklemleri çıkarılıp, analitik çözümler yapılmıştır. Viskozitenin sıcaklıkla değişimi Reynold modeliyle gösterilmiştir. Sabit viskozite haline benzer olarak boyutsuz momentum ve enerji denklemleri;

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) + 6\Lambda_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) - \Lambda_2 \frac{d^2 \psi}{dy^2} = \Lambda_3 \quad (4.42)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \mu \gamma_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + 2\Lambda_1 \gamma_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^4 + \gamma_2 = 0 \quad (4.43)$$

olarak yazılır. Denklem (4.42) ve (4.43)'teki boyutsuz parametreler ise;

$$\Lambda_1 = \frac{\beta U^2}{\mu_0 h^2}, \Lambda_2 = \frac{\epsilon k_b \theta^* E_x}{ze \mu_0 U}, \Lambda_3 = \frac{h^2 C_0}{\mu_0 U}, \gamma_1 = \frac{\mu_0 U^2}{k_{th}(\theta_m^* - \theta_s^*)}, \gamma_2 = \frac{E_x^2 \sigma h^2}{k_{th}(\theta_m^* - \theta_s^*)},$$

$$\mu = \frac{\mu^*}{\mu_0} \quad (4.44)$$

şeklindedir. Buradaki μ_0 referans viskozite değeridir. Viskozitenin sıcaklıkla değişimini gösteren Reynold modeli ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mu = \exp(-M\theta) \quad (4.45)$$

Momentum ve enerji denklemleriyle ilgili boyutsuz sınır şartları;

$$\frac{du}{dy}(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \frac{d\theta}{dy}(0) = 0, \quad \theta(1) = 0 \quad (4.46)$$

olarak ifade edilir. Sabit viskozite halinde seçilen küçük parametrelere ($\Lambda_1 = \epsilon \lambda_1$, $\Lambda_2 = \epsilon \lambda_2$) ek olarak denklem (4.47)'de gösterildiği gibi viskozite indeksi de küçük parametre olarak seçilir;

$$M = \epsilon m \quad (4.47)$$

Böylelikle hız ve sıcaklık fonksiyonlarına perturbasyon açılımı uygulanırsa, yaklaşık hız ve sıcaklık;

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + \dots \quad (4.48)$$

olarak yazılır. Bununla beraber viskozite ve türevi de aşağıdaki gibi yaklaşık olarak ifade edilir.

$$\mu \cong 1 - \varepsilon m \theta, \quad \frac{d\mu}{dy} \cong -\varepsilon m \frac{d\theta}{dy} \quad (4.49)$$

Denklem (4.47), (4.48) ve (4.49), enerji ve momentum denklemleri (4.42), (4.43) ve sınır şartlarını veren denklem (4.46)'ye yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılırsa;

Mertebe 1

$$u_0'' = \Lambda_3$$

$$\theta_0'' = -\gamma_1 (u_0')^2 - \gamma_2 \quad (4.50)$$

$$\frac{du_0}{dy}(0) = 0, \quad u_0(1) = 0, \quad \frac{d\theta_0}{dy}(0) = 0, \quad \theta_0(1) = 0 \quad (4.51)$$

Mertebe ε

$$u_1'' = m\theta_0' u_0' + m\theta_0 u_0'' - 6\lambda_1 (u_0')^2 (u_0'') + \lambda_2 \psi''$$

$$\theta_1'' = \gamma_1 m \theta_0 (u_0')^2 - 2\gamma_1 u_0' u_1' - 2\lambda_1 \gamma_1 (u_0')^4 \quad (4.52)$$

$$\frac{du_1}{dy}(0) = 0, \quad u_1(1) = 0, \quad \frac{d\theta_1}{dy}(0) = 0, \quad \theta_1(1) = 0 \quad (4.53)$$

denklemlerini elde edilir. İlk mertebedeki denklemlerin verilen sınır şartları için çözümleri;

$$u_0 = \frac{\Lambda_3}{2} (y^2 - 1)$$

$$\theta_0 = \frac{\gamma_1 \Lambda_3^2}{12} (1 - y^4) + \frac{\gamma_2}{2} (1 - y^2) \quad (4.54)$$

şeklindedir. Aynı şekilde ε mertebesi çözümleri;

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{m\gamma_1\Lambda_3^3}{72}(3y^2 - y^6 - 2) + \frac{\lambda_1\Lambda_3^3}{2}(1 - y^4) + \lambda_2\zeta\left(\frac{\cosh(Ky)}{\cosh(K)} - 1\right) \\
 \theta_1 &= \frac{m\gamma_1^2\Lambda_3^4}{12}\left(\frac{y^8}{56} - \frac{y^4}{12} + \frac{11}{168}\right) + \frac{\gamma_1\lambda_1\Lambda_3^4}{15}(y^6 - 1) + \frac{2\gamma_1\Lambda_3\lambda_2\zeta}{K^2} \\
 &\quad \left(\frac{K(\sinh(K) - y\sinh(Ky)) + 2(\cosh(Ky) - \cosh(K))}{\cosh(K)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

olarak elde edilir. Her iki mertebedeki çözümleri toplayıp, orijinal boyutsuz parametrelere dönülürse hız ve sıcaklık için yaklaşık çözümler;

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\Lambda_3}{2}(y^2 - 1) + \frac{M\gamma_1\Lambda_3^3}{72}(3y^2 - y^6 - 2) + \frac{\Lambda_1\Lambda_3^3}{2}(1 - y^4) + \Lambda_2\zeta\left(\frac{\cosh(Ky)}{\cosh(K)} - 1\right) \\
 \theta &= \frac{\gamma_1\Lambda_3^2}{12}(1 - y^4) + \frac{\gamma_2}{2}(1 - y^2) + \frac{M\gamma_1^2\Lambda_3^4}{12}\left(\frac{y^8}{56} - \frac{y^4}{12} + \frac{11}{168}\right) + \frac{\gamma_1\Lambda_1\Lambda_3^4}{15}(y^6 - 1) \\
 &\quad + \frac{2\gamma_1\Lambda_2\Lambda_3\zeta}{K^2}\left(\frac{K(\sinh(K) - y\sinh(Ky)) + 2(\cosh(Ky) - \cosh(K))}{\cosh(K)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

olarak yazılır. Çözümlerin geçerli olabilmesi için boyutsuz parametrelerle ilgili kriterler ise;

$$\begin{aligned}
 \frac{M\gamma_1\Lambda_3^2}{36} &<< 1, \quad \Lambda_1\Lambda_3^2 << 1, \quad \frac{2\Lambda_2\zeta}{\Lambda_3} << 1, \quad M\gamma_1\Lambda_3^2 << 1, \quad \frac{12\Lambda_1\Lambda_3^2}{15} << 1, \\
 \frac{24\Lambda_2\zeta}{\Lambda_3K^2} &<< 1, \quad \frac{\gamma_1^2M\Lambda_3^4}{6\gamma_2} << 1, \quad \frac{2\gamma_1\Lambda_1\Lambda_3^4}{15\gamma_2} << 1, \quad \frac{4\gamma_1\Lambda_2\Lambda_3\zeta}{\gamma_2K^2} << 1
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

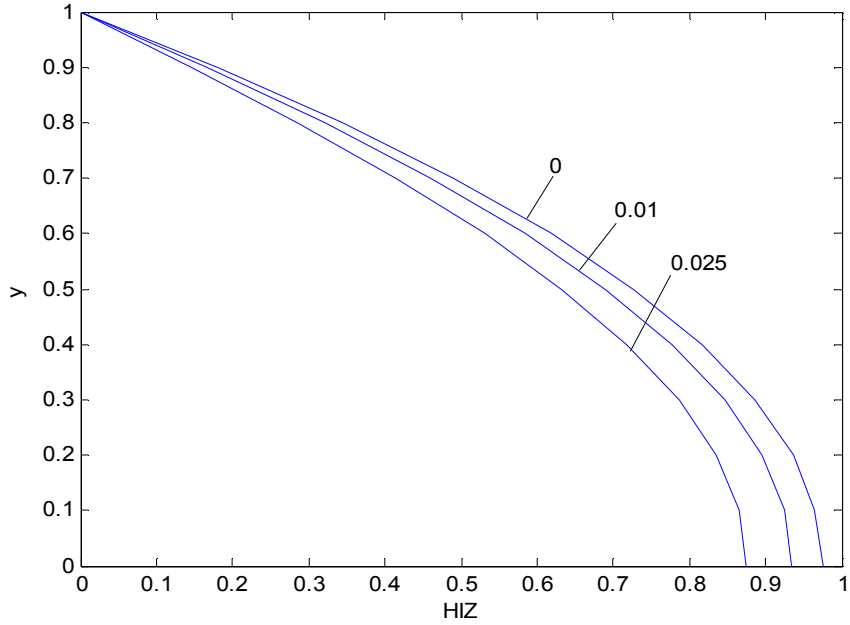
şeklindedir.

5. HIZ-SICAKLIK GRAFİKLERİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLER İLE KARŞILAŞTIRILMASI

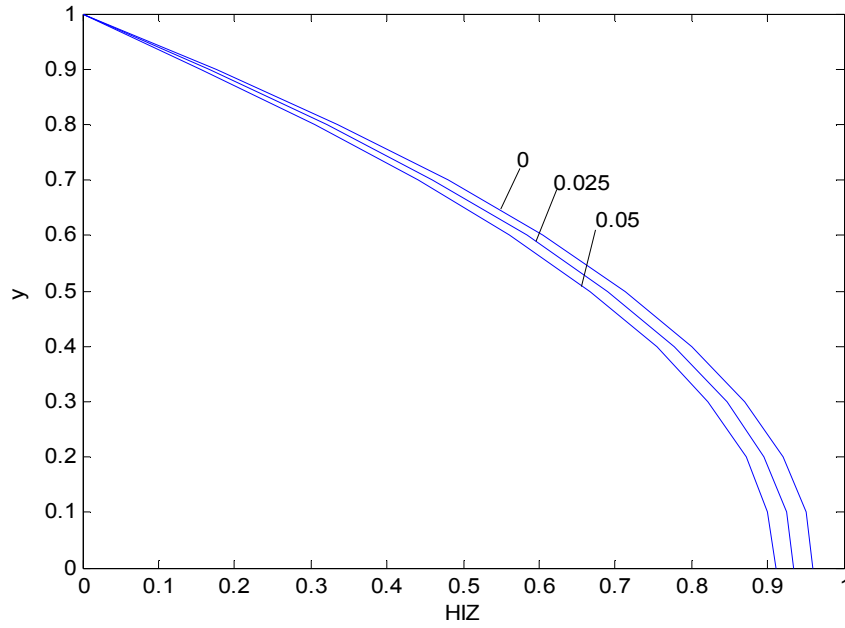
Bu bölümde daha önceki bölümde bulunan analitik çözümler kullanılarak elektroosmotik etki altındaki mikrokanaalda hız ve sıcaklık grafikleri çizdirilecektir. Boyutsuz parametrelerin hız ve sıcaklık üzerindeki etkileri incelenecektir. Analitik çözümlerle sayısal çözümler karşılaştırılacaktır.

5.1. Sabit Viskozite Halinde Hız ve Sıcaklık Grafikleri

Şekil 5.1 ve 5.2’de boyutsuz non-Newtonyen ve boyutsuz elektrokinetik etkilerin farklı değerleri için, simetriden dolayı kanal yüksekliğinin yarısını baz alarak hız grafikleri çizdirilmiştir.



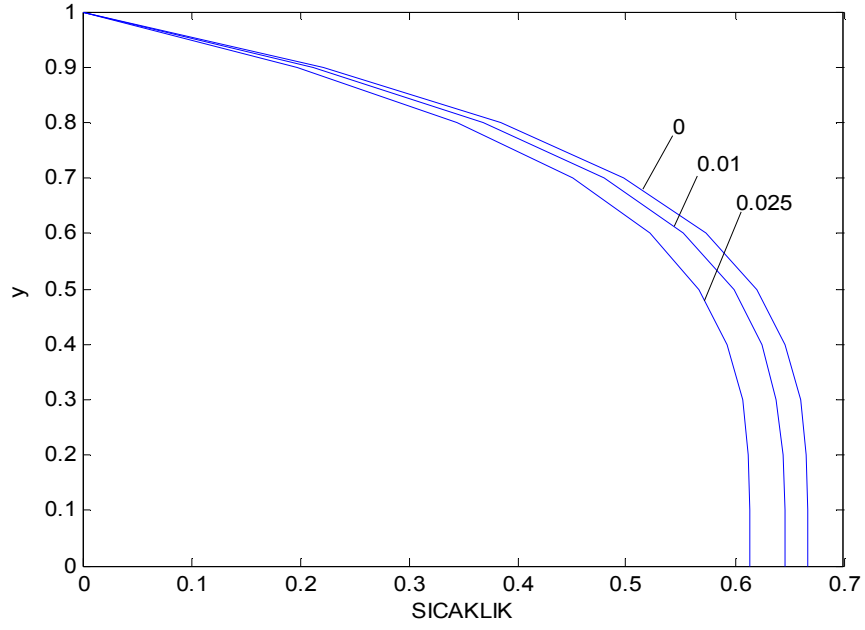
Şekil 5.1. Değişik non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen boyutsuz hız ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$)



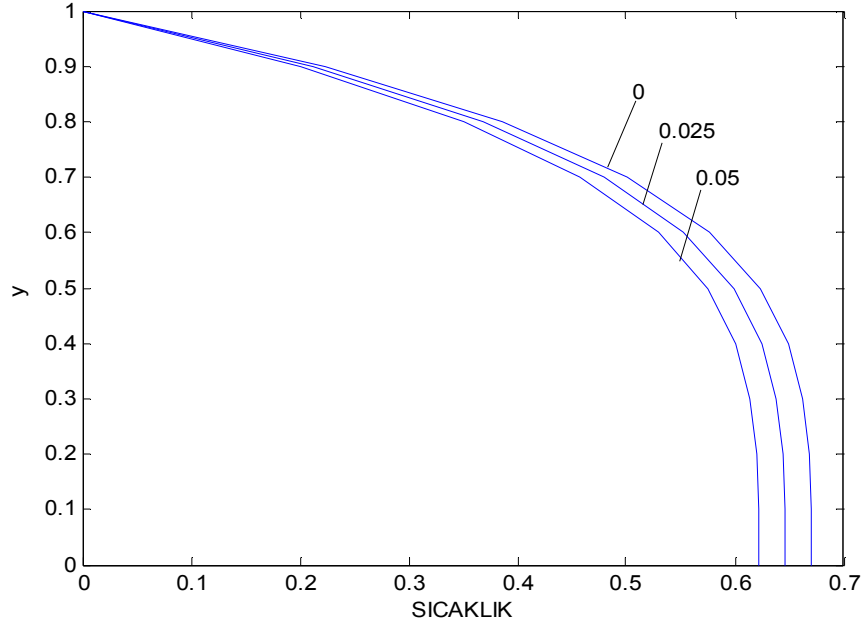
Şekil 5.2. Değişik elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen boyutsuz hız ($\zeta = 1, K=5, \Lambda_1 = 0.01, \Lambda_3 = -2$)

Non-Newtonyenlik parametresinin (Λ_1) boyutsuz hız üzerindeki etkilerini belirlemek için diğer parametreler sabit alınmıştır. Non-Newtonyenlik parametresi grafikte de gösterildiği gibi sırasıyla 0, 0.01 ve 0.025 alınmıştır. $\Lambda_1 = 0$ hali Newtonyen akışkanı temsil etmektedir. Λ_1 parametresinin artmasıyla akışkanın non-Newtonyenlik özelliği yükselmektedir. Şekil 5.1'den de görüldüğü üzere kanalın tam orta noktasında maksimum hıza ulaşılmaktadır. Ayrıca non-Newtonyenlik parametresinin artmasıyla akışkanın hızı azalmaktadır.

Şekil 5.2'de ise farklı değerlerdeki elektrokinetik parametresine göre hızın nasıl değiştiği gösterilmiştir. Elektrokinetik etkilerin sıfıra eşit olması durumunda akış basınç gradyenli akışa dönüşmektedir. Elektrokinetik parametresinin değerinin artmasıyla akışkan hızı düşmektedir.



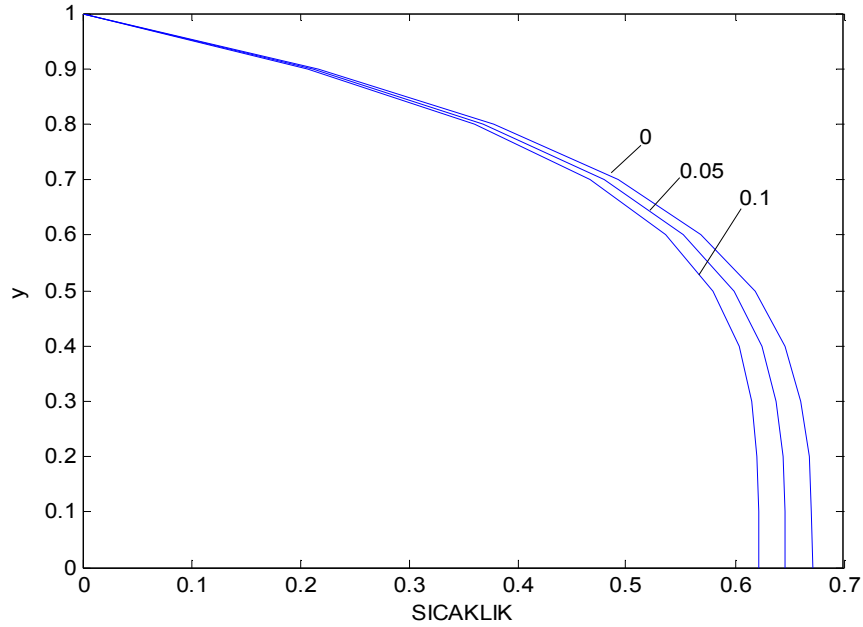
Şekil 5.3. Değişik non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen sıcaklık dağılımı
 ($\zeta = 1, K=5, \Lambda_2 = 0.025, \Lambda_3 = -2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.05$)



Şekil 5.4. Değişik elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen sıcaklık dağılımı
 ($\zeta = 1, K=5, \Lambda_1 = 0.01, \Lambda_3 = -2, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0.05$)

Şekil 5.3, farklı değerlerdeki non-Newtonyenlik parametresi için mikrokanaal içinde sıcaklık dağılımını göstermektedir. Grafikten de görüldüğü üzere parametre değerinin artmasıyla mikrokanaal içinde sıcaklık değerleri düşmektedir.

Şekil 5.4’de ise elektrokinetik parametresinin farklı değerleri için sıcaklık değişimi verilmiştir. Diğer parametre değerleri sabit alınıp, elektrokinetik parametresinin 0, 0.025 ve 0.05 değerleri için grafik çizdirilmiştir. Elektrokinetik parametre değeri arttıkça kanaal içindeki maksimum sıcaklık değerleri düşmektedir.

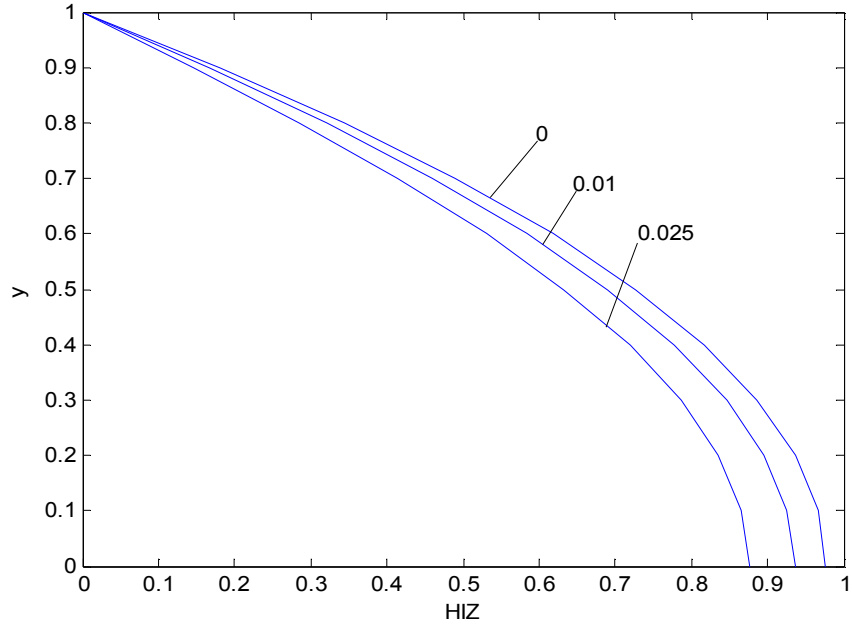


Şekil 5.5. Farklı değerlerdeki Joule ısınması (γ_2) için boyutsuz sıcaklık dağılımı
($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$)

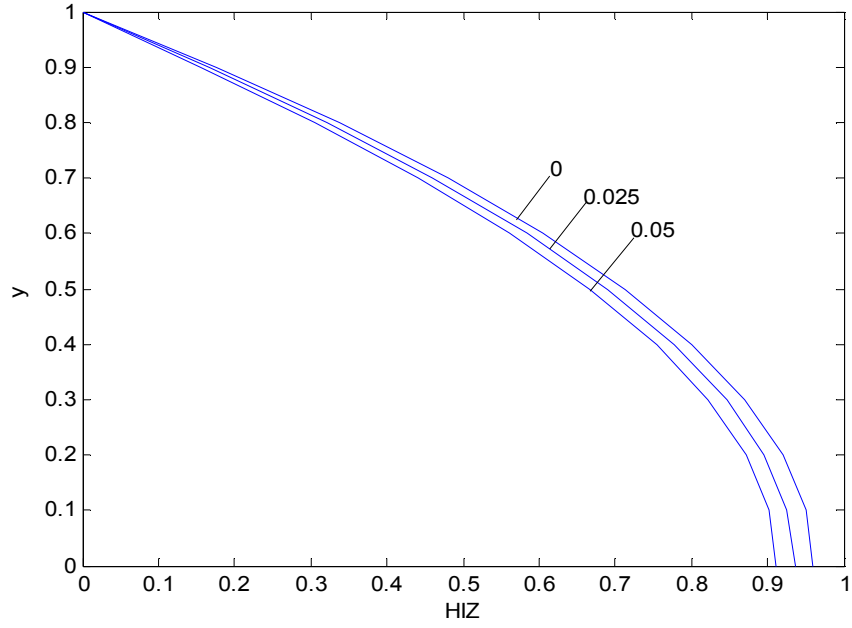
Joule ısınmasının sıcaklık dağılımı üzerindeki etkilerini belirlemek için diğer bütün boyutsuz parametreler sabit alınmıştır. Joule ısınması parametresi sırasıyla 0, 0.05 ve 0.1 olarak alınmıştır. Şekil 5.5’de bu parametreye göre sıcaklık değişimini göstermektedir. Grafikten de görüldüğü üzere Joule ısınmasının artmasıyla sıcaklık artmaktadır. Bu etkiler kanaal merkezine yaklaştıkça daha baskın hale gelmektedir.

5.2. Değişken Viskozite Durumunda Hız ve Sıcaklık Grafikleri

Şekil 5.6 ve 5.7’de sıcaklıkla değişen viskozite durumu için boyutsuz non-Newtonyen ve elektrokinetik parametrelerinin farklı değerleri için hız grafikleri çizdirilmiştir. Bu parametrelerin etkisini analiz etmek için diğer parametreler sabit alınmıştır. Sonuçta sabit viskozite haline benzer sonuçlar elde edilmiştir.

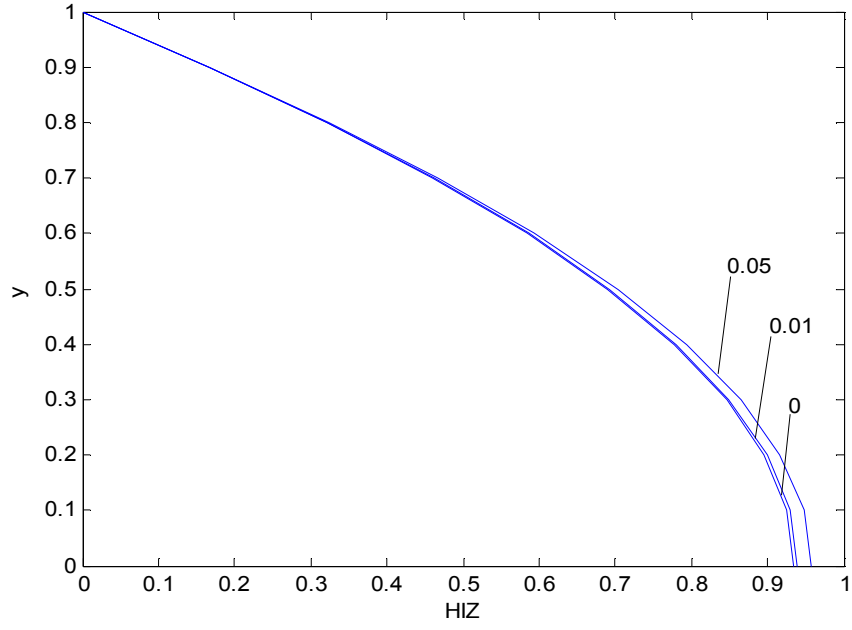


Şekil 5.6. Değişken viskozite durumu için farklı non-Newtonyen parametrelerine karşılık gelen boyutsuz hız ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $M=0.001$)

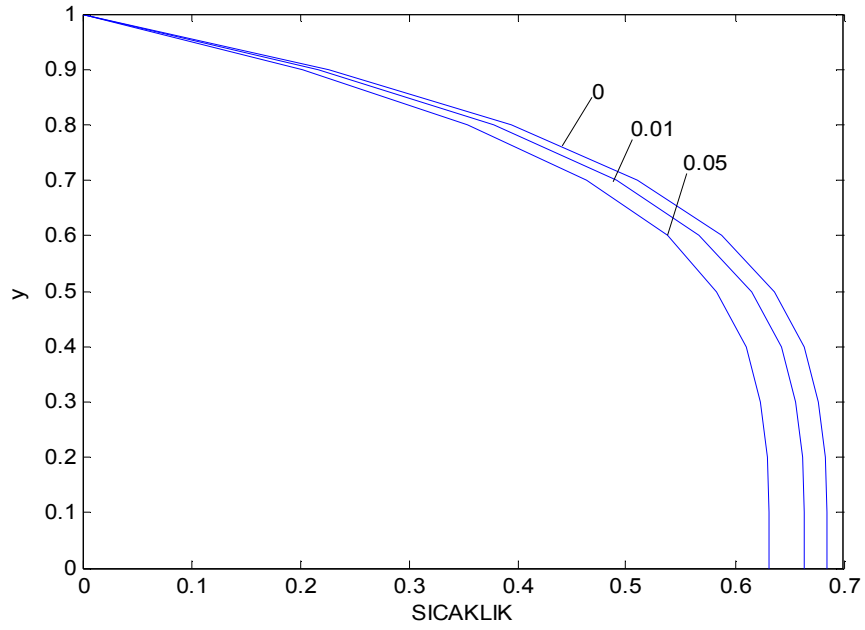


Şekil 5.7. Değişken viskozite durumu için farklı elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen boyutsuz hız ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $M=0.001$)

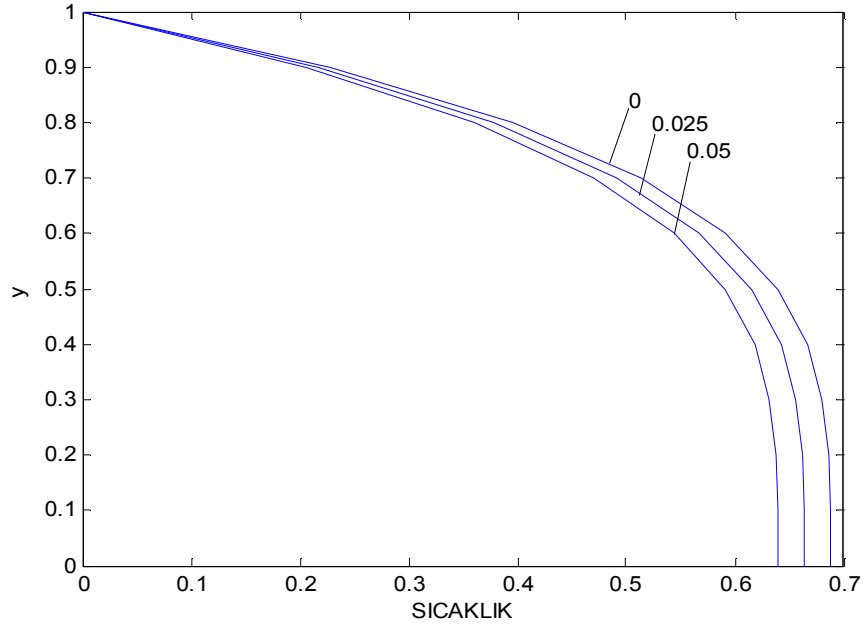
Şekil 5.8’de ise viskozite indeksinin (M) hız üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Viskozite indeksinin küçük olduğu durumlarda sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite durumlarının her ikisinde de hız fazla değişmemektedir. $M=0$ hali sabit viskozite haline tekabül etmektedir. Maksimum hız yine kanalın merkezinde oluşmakta ve indeks değerinin yükselmesiyle artmaktadır.



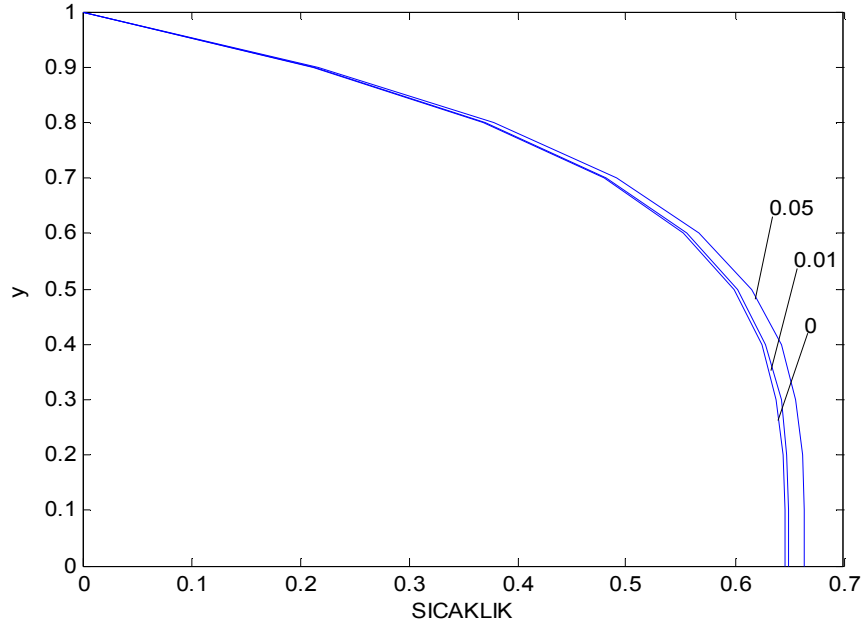
Şekil 5.8. Farklı viskozite indeks (M) değerleri için boyutsuz hız
($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$)



Şekil 5.9. Değişken viskozite durumu için farklı non-Newtonyen parametrelerine (Λ_1) karşılık gelen sıcaklık dağılımı ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $M=0.05$)



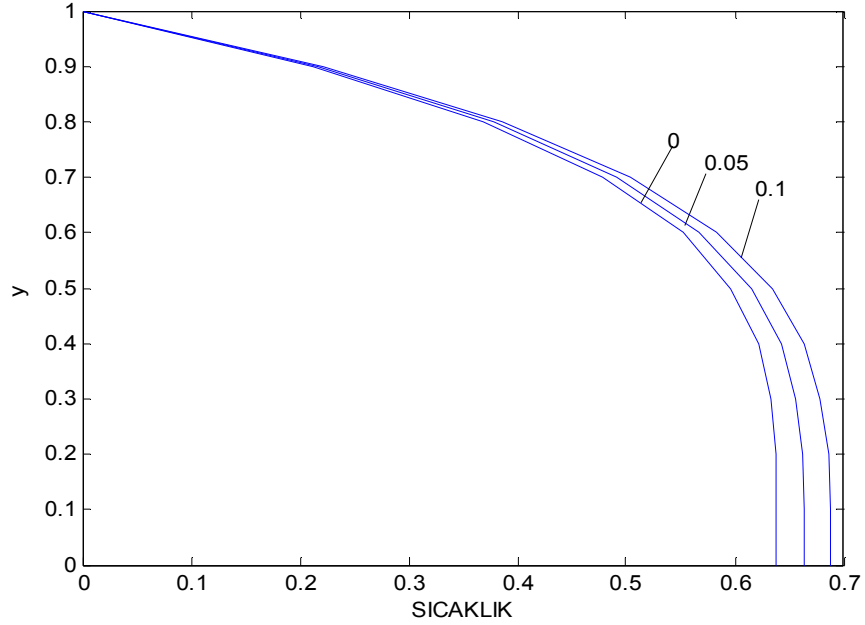
Şekil 5.10. Değişken viskozite durumu için farklı elektrokinetik parametrelerine (Λ_2) karşılık gelen sıcaklık dağılımı ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $M=0.05$)



Şekil 5.11. Farklı viskozite indeks (M) değerleri için sıcaklık dağılımı ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$)

Şekil 5.9 ve 5.10’da sıcaklığa bağlı viskozite durumu için non-Newtonyenlik ve elektrokinetik parametrelerinin farklı değerleri için sıcaklık grafiği çizdirilmiştir. Bu parametrelerin etkisini analiz etmek için diğer parametreler sabit alınmıştır. Her iki parametre değerinin artmasıyla sıcaklık değerleri düşmektedir. Ayrıca bu düşüş, kanal duvarından akışkan merkezine ilerledikçe daha fazla artmaktadır.

Şekil 5.11’de ise farklı viskozite indeks değerlerinin sıcaklığa etkisi verilmiştir. Viskozite indeksindeki küçük artışlar sıcaklık dağılımını fazla etkilememektedir. İndeks değerindeki büyük artışlar kanal içindeki maksimum sıcaklığı arttırmaktadır.

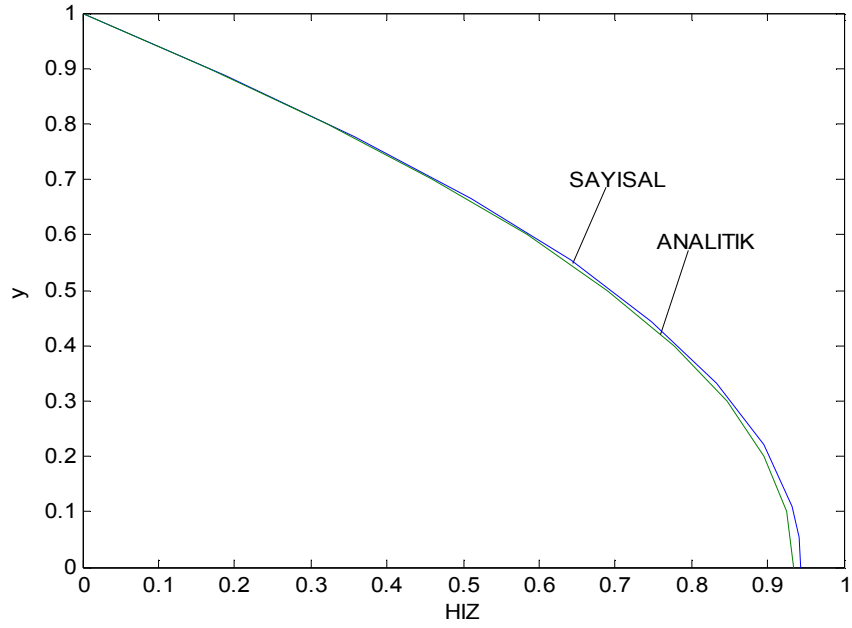


Şekil 5.12. Değişken viskozite halinde farklı değerlerdeki Joule ısınması (γ_2) için boyutsuz sıcaklık dağılımı
($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $M=0.05$)

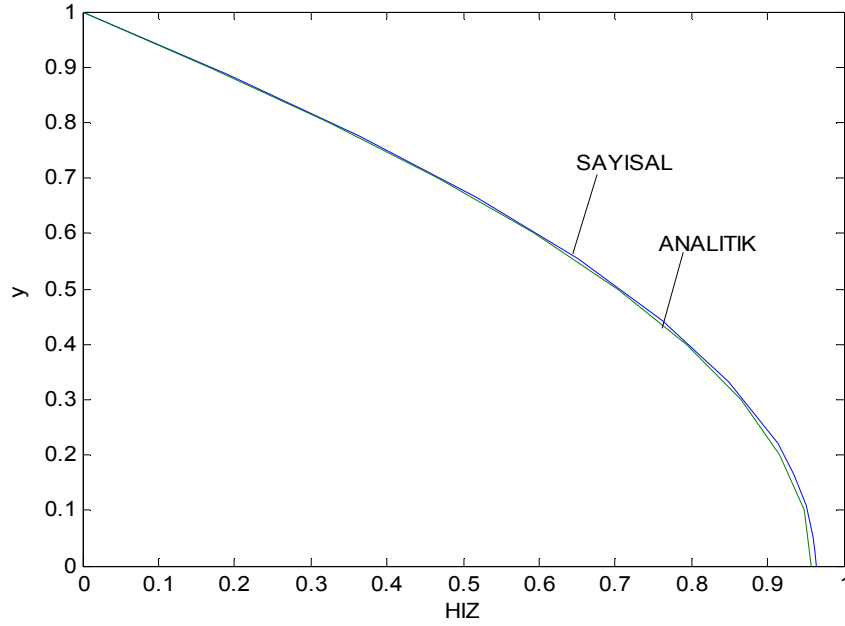
Şekil 5.12’de ise Joule ısınmasının sıcaklık üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Sabit viskozite halinde olduğu gibi parametrenin artmasıyla sıcaklık artmaktadır fakat kanal merkezine doğru bu artım sabit viskozite haline göre daha fazla olmaktadır.

5.3. Analitik ve Sayısal Çözümlerin Karşılaştırılması

Bu bölümde momentum ve enerji denklemleri sayısal olarak çözülüp yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalarda, denklemlerdeki bütün parametre değerleri aynı alınmıştır.



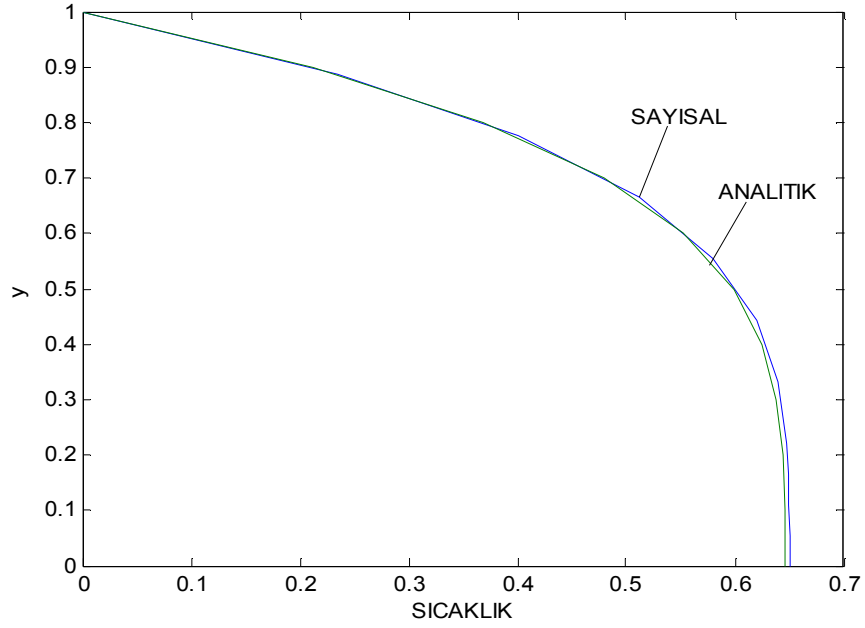
Şekil 5.13. Sabit viskozite hali için hız dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$)



Şekil 5.14. Değişken viskozite durumu için hız dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması
 $(\zeta = 1, K=5, \Lambda_1 = 0.01, \Lambda_2 = 0.025, \Lambda_3 = -2, \gamma_1 = 2, M=0.05)$

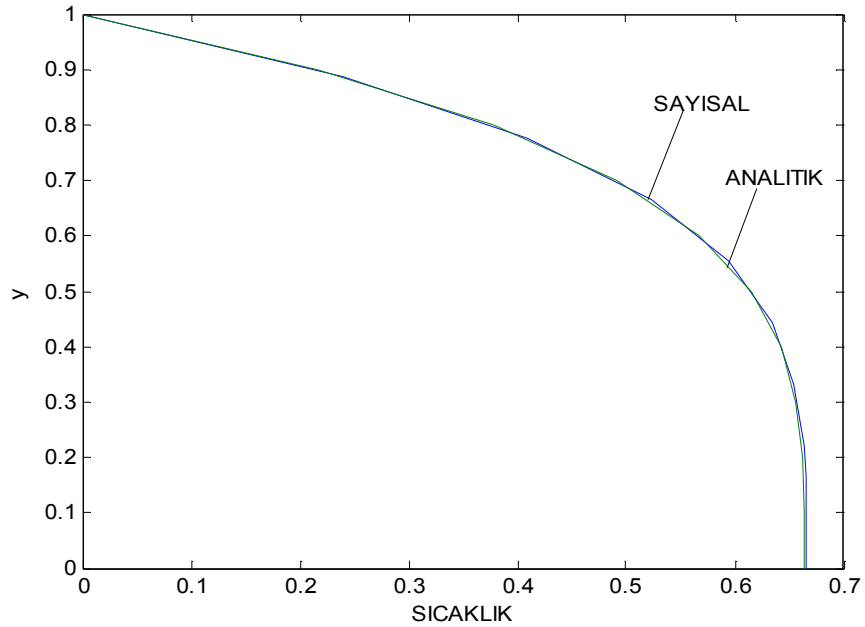
Şekil 5.13 ve 5.14’de sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite halleri için hız dağılımları gösterilmiştir. Grafikten de görüldüğü üzere geçerlilik kriterlerinin içinde kalmak şartıyla yaklaşık çözümler nümerik çözümlere gayet iyi şekilde yakınsamaktadır.

Şekil 5.15 ve 5.16’da ise her iki viskozite hali için sıcaklık dağılımı üzerine yaklaşık ve nümerik çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Yine geçerlilik kriterlerinin içinde kalmak koşuluyla her iki çözümün birbirine yakınması gayet iyidir.



Şekil 5.15. Sabit viskozite durumu için sıcaklık dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.

($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 0.05$)



Şekil 5.16. Değişken viskozite durumu için sıcaklık dağılımının nümerik ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

($\zeta = 1$, $K=5$, $\Lambda_1 = 0.01$, $\Lambda_2 = 0.025$, $\Lambda_3 = -2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 0.05$, $M=0.05$)

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada dikdörtgensel kesite sahip mikrokanalda elektroosmotik akış incelenmiştir. Akışta sabit ve sıcaklığa bağlı viskozite modelleri ayrı ayrı ele alınmıştır. Perturbasyon tekniği kullanılarak analitik yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Yaklaşık çözümlerden çözümlerle ilgili geçerlilik kriterleri türetilmiştir. Non-Newtonyen, elektrokinetik, Joule ısınması parametrelerinin ve viskozite indeksinin hız ve sıcaklık üzerindeki etkileri grafikler şeklinde verilmiştir. Yaklaşık çözümlerin sayısal çözümlerle karşılaştırılması yapılmış ve geçerlilik kriterleri sağlandığında her iki çözümün birbiri ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Bu çalışmanın devamında için akış geometrisin çeşitlendirilebilmesi düşünülebilir. Ayrıca farklı non-Newtonyen akışkan modelleri de elektroosmotik akışa uygulanabilir. Bu modellerin bir tanesi genelleştirilmiş ikinci derece akışkan olup, bu akışkan normal ikinci derece akışkan ile power-law akışkanlarının özelliklerini birleştirmektedir. Akış iki boyutta ele alınıp yeni analizler yapılabilir. Debye-Hückel lineer yaklaşımı kullanılmadan elektriksel potansiyel için yeni çözümler de elde edilebilir.

7. KAYNAKLAR

1. R. L. Fosdick and K. R. Rajagopal, Thermodynamics and stability of fluids of third grade, *Proc. R. Soc. London* 339, 351 (1980).
2. E. J. Dunn and K. R. Rajagopal, Fluids of differential type: Critical review and thermodynamic analysis, *Int. J. of Engineering Sci.* 33, 689 (1995).
3. A. Jain and M. K. Jensen, Analytical modeling of electrokinetic effects on flow and heat transfer in microchannels, *Int. J. of Heat and Mass Trans.* 50, 5161 (2007).
4. X.Y. Chen, K.C. Toh, J.C. Chai, C. Yang, Developing pressure driven liquid flow in microchannels under electrokinetic effect, *Int. J. Eng. Sci.* 42 (5-6), 609 (2003).
5. G. D. Ngoma and F. Erchiqui, Heat flux and slip effects on liquid flow in a microchannel, *Int. J. of Thermal Sci.* 46, 1076 (2007).
6. Y. Zhang, T. N. Wong, C. Yang, K.T. Ooi, Electroosmotic flow in irregular shape microchannels, *Int. J. of Engineering Sci.* 43, 1450 (2005).
7. S. Das and S. Chakraborty, Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid, *Analytica Chimica Acta* 559, 15 (2006).
8. M. Yürüsoy, M. Pakdemirli and B. S. Yılbaş, Perturbation solution for a third grade fluid flowing between parallel plates, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, J. of Mechanical Engineering Sci.* 222, 653 (2008).
9. K. R. Rajagopal, A. Z. Szeri, W. Troy, An existence theorem for the flow of a non-Newtonian fluid past an infinite porous plate, *Int. J. of Non-Linear Mech.* 21, 279 (1986).
10. T. Hayat, S. Asghar, A. M. Siddiqui, Some nonsteady flows of a non-Newtonian fluid. *Int. J. Engng. Sci.* 38, 337 (2000).
11. T. Hayat, F. M. Mahomed, Note on an exact solution for the pipe flow of a third-grade fluid. *Acta Mech.* 190, 233 (2007).
12. http://en.wikipedia.org/wiki/Non-Newtonian_fluid.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Bahattin AKGÜL

Doğum Tarihi : 13.01.1984

Doğum Yeri : Akhisar

Eylül 1998 - Haziran 2002 : Akhisar Anadolu Lisesi

Eylül 2002 - Temmuz 2006 : Süleyman Demirel Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü Lisans Programı

Eylül 2006 - : Celal Bayar Üniversitesi - Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Dinamiği Programı'nda
Yüksek Lisans Eğitimi