

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İDEAL VE φ -YAKINSAKLIK

Hüseyin ALBAYRAK

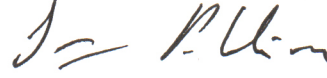
Danışman: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA, 2008**

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda
oybirliği/oyçokluğu ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü



Üye : Yrd. Doç. Dr. Simten UYHAN
Akdeniz Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf CİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü



ONAY

Bu tez ^{16.01.08}.../.../20... tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda, yukarıdaki jüri
üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

.../.../20...

Prof. Dr. Fatma GÖKTEPE
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	vi
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. YOĞUNLUKLAR.....	3
2.1. Bilinen Bazı Yoğunluk Kavramları.....	3
2.2. Yoğunluklar Arasındaki İlişkiler.....	4
3. TOPLANABİLME METOTLARI ve φ -YAKINSAKLIK.....	5
3.1. T -Toplanabilme.....	5
3.2. φ -Yakınsaklık.....	6
3.2.1. φ Euler Fonksiyonu.....	6
3.2.2. φ Fonksiyonunun Özellikleri.....	6
4. MATRİSLERLE TANIMLANAN YOĞUNLUK KAVRAMLARI.....	9
4.1. A -Yoğunluk ve A -İstatistiksel Yakınsaklık.....	9
4.2. φ -Yoğunluk.....	10
5. İDEAL YAKINSAKLIK VE φ -YOĞUNLUKLU KÜMELERİN İDEALİ... ..	11
5.1. I -Yakınsaklık.....	11
5.2. Bazı İdeal Örnekleri ve Bunlarla Üretilen I -Yakınsaklık.....	12
5.3. I -Yakınsaklığın Bazı Özellikleri.....	13
5.4. φ -Yakınsaklık ile I_φ -Yakınsaklık Arasındaki İlişki.....	14
6. I -SÜREKLİLİK VE φ -SÜREKLİLİK.....	16
6.1. I -Süreklilik.....	16
6.2. φ -Süreklilik.....	16
7. BAZI SONUÇLAR.....	18
7.1. Alt dizilerin ve Yeniden Düzenlenmiş Dizilerin I -Yakınsaklığı.....	18
7.2. I_φ -Limit Noktası ve I_φ -Yığılma Noktası.....	22
7.3. I_φ -Yakınsak ve φ -Yakınsak Dizi Uzayları.....	23
8. KAYNAKLAR.....	25
ÖZGEÇMİŞ.....	28

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İDEAL VE φ -YAKINSAKLIK

Hüseyin ALBAYRAK

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Jüri: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Simten UYHAN
Yrd. Doç. Dr. Yusuf CİVAN

Bu çalışmada, klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan ideal yakınsaklık ve özel bir toplanabilme metodu olan φ -yakınsaklık ele alınmıştır. Bu iki tip yakınsaklığın özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenip, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Yedi bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konunun tarihi gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde, doğal sayılar kümesinde asimptotik yoğunluk, düzgün yoğunluk ve logaritmik yoğunluk kavramlarının tanımı verilir, aralarındaki ilişki belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde, sonsuz matrisler yardımıyla tanımlanan T -toplanabilme ifade edilmiştir. Özellikle sayılar teorisinde önemli bir yeri olan φ Euler fonksiyonunun tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir. φ fonksiyonu kullanılarak, negatif olmayan regüler Φ matrisi elde edilmiş ve bu matris yardımıyla özel bir toplanabilme metodu olan φ -yakınsaklığın tanımı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, negatif olmayan regüler A matrisleri kullanılarak A -yoğunluğun tanımı verilmiştir. Bu A matrislerinin yerine özel olarak Φ matrisi alınarak φ -yoğunluğu tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, topolojideki ideal kavramı doğal sayılar kümesi üzerinde ele alınarak, bu kavram üzerinden reel sayı dizileri için ideal yakınsaklık ya da kısaca I -yakınsaklığın tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca bazı ideal örnekleri ve bu idealler ile tanımlanan ideal yakınsaklıklar verilmiştir. Sıfır φ -yoğunluklu kümelerin ailesi olan I_φ ideali ile tanımlanan I_φ -yakınsaklık ve φ -yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir.

Altıncı bölümde, $\mathbb{R}$ de tanımlı olan fonksiyonlar için I_φ -süreklilik ve φ -süreklilik kavramları tanımlanmıştır.

Son bölümde ise, elde edilen sonuçlar verilmiştir. I_φ -limit noktası ve I_φ -yığılma noktası kavramları tanımlanıp, aralarındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca I_φ -yakınsak diziler uzayı ile φ -yakınsak diziler uzayı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal Yakınsaklık, φ -yakınsaklık, Euler Fonksiyonu, Toplanabilme, Yoğunluk

2008, 28 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

IDEAL AND φ -CONVERGENCE

Hüseyin ALBAYRAK

**Süleyman Demirel University Graduate School of Applied and
Natural Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Committee: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN (Supervisor)
Asst. Prof. Simten UYHAN
Asst. Prof. Yusuf CİVAN

In this thesis, we investigate the properties of the ideal convergence which is a generalization of ordinary convergence and statistical convergence, and the φ -convergence which is a special method of summability. We also investigate the relations between these two concepts and obtain some main results.

The thesis consists of seven chapters. In the first chapter, historical background of these convergence types is presented.

In the second chapter, the concepts of asymptotic density, uniform density and the logarithmic density of a set of natural numbers are recalled and the relations between these concepts are stated.

In the third chapter, the T -summability which is defined by infinite matrices is studied. In particular, the notion of φ Euler function which is very important in number theory is considered and its basic properties are presented. Using the φ function, the nonnegative regular Φ matrix is obtained and the φ -convergence is defined via this matrix.

In the fourth chapter, the concept of A -density is considered using the nonnegative regular matrix A . If A is taken to be the Φ matrix, then the concept of φ -density is obtained.

In the fifth chapter, the concept of ideal in topology is considered in the setting of natural numbers and hence the notion of ideal convergence (I -convergence, briefly) of a real sequence is studied and its basic properties are investigated. In addition, some examples of ideals and thus ideal convergences defined by these ideals are given. Also the ideal I_φ which is the family of sets having zero φ -densities, and the

I_φ -convergence which is defined via this family is considered, and the relation between I_φ -convergence and φ -convergence is investigated.

In the sixth chapter, I_φ -continuity and φ -continuity of the functions defined on $\mathbb{R}$ are introduced.

In the final chapter, the main results that we have obtained are presented. The notions of I_φ -limit point and I_φ -cluster point are introduced and the relation between these concepts is investigated. Moreover, the relations between the space of I_φ -convergent sequences and the space of φ -convergent sequences are investigated.

Key Words: Ideal convergence, φ -convergence, Euler function, Summability, Density.

2008, 28 pages

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde beni yönlendiren, konu ile ilgili açık problemleri ortaya koymada bana yardımcı olan ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini gördüğüm danışman hocam Sayın Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN' a teşekkür ederim. Ayrıca tezin yazım sürecindeki yardımlarından dolayı Dr. Salih AYTAR' a ve Celalettin ŞENÇİMEN' e teşekkür ederim.

Hüseyin ALBAYRAK
ISPARTA, 2008

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	Tüm Asal Sayıların Kümesi
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\underline{d}(A)$	A kümesinin alt asimptotik yoğunluğu
$\overline{d}(A)$	A kümesinin üst asimptotik yoğunluğu
$d(A)$	A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$\underline{u}(A)$	A kümesinin alt düzgün yoğunluğu
$\overline{u}(A)$	A kümesinin üst düzgün yoğunluğu
$u(A)$	A kümesinin düzgün yoğunluğu
$\underline{\delta}(A)$	A kümesinin alt logaritmik yoğunluğu
$\overline{\delta}(A)$	A kümesinin üst logaritmik yoğunluğu
$\delta(A)$	A kümesinin logaritmik yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin A – yoğunluğu
$d_\varphi(A)$	A kümesinin φ – yoğunluğu
$\varphi(n)$	Euler Fonksiyonu
$T = (t_{nk})_{n,k=1}^\infty$	Sonsuz matris
$x = (x_n)_{n=1}^\infty$	Reel sayıların bir dizisi
$k n$	k sayısı n yi böler
$k \nmid n$	k sayısı n yi bölmez
C_1	Cesàro matrisi
$st_A - \lim x$	x dizisinin A – istatistiksel limiti
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
$\Lambda_x(\mathcal{I})$	x dizisinin $\mathcal{I}$ – limit noktalarının kümesi
$\Gamma_x(\mathcal{I})$	x dizisinin $\mathcal{I}$ – yığılma noktalarının kümesi
L_x	x dizisinin limit noktalarının kümesi
ω	Tüm reel sayı dizilerinin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
$c^{\mathcal{I}_\varphi}$	$\mathcal{I}_\varphi$ – yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

Klasik yakınsaklık kavramı yanısıra ölçüm, küme ve benzeri araçları kullanarak bu kavrama yakın birçok yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca toplanabilme teorisinde sonsuz matrisler kullanılarak çeşitli matris metodlarına ilişkin yakınsaklık kavramları da tanımlanmıştır. Bu metotlar genelde yakınsak olmayan dizilerin belli bir sınıfını yeni anlamda yakınsak yapmaya yöneliktir. Bir yakınsaklık metodu tanımlanırken bu metodun regüler olması, yani limiti koruması istenir. Regülerlik özelliği, yakınsak dizilere matris dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen dönüşüm dizisinin limitini koruması nedeniyle büyük bir öneme sahiptir.

Yeni yakınsaklık kavramlarının en önemlilerinden biri 1951’de birbirinden bağımsız olarak Fast ve Steinhaus tarafından tanımlanan ve geniş bir uygulama alanına sahip olan istatistiksel yakınsaklık metodudur. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Šalát (1980), Fridy (1993), Connor (1988), Freedman (1981), Miller (1995) ve Schoenberg (1959) in istatistiksel yakınsaklığın gelişmesinde önemli katkıları olmuştur.

Euler fonksiyonuyla elde edilen özel bir toplanabilirlik metodu olan φ -yakınsaklığı ilk olarak Schoenberg (1959) tanımladı. Aynı çalışmasında φ -yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha zayıf ve istatistiksel yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu gösterdi. Daha sonra Erdős (1978), yakınsak olmayan, fakat φ -yakınsak olan bir dizi örneğini verdi.

Freedman ve Sember (1981) negatif olmayan regüler A matrislerini kullanarak A -yoğunluk kavramını tanımladılar. Connor (1989) A -yoğunluk kavramını kullanarak A -istatistiksel yakınsaklığın tanımını verdi. A -istatistiksel yığılma noktası ve A -istatistiksel limit noktası tanımları Connor ve Kline (1996) tarafından verilmiştir. Demirci (2000) A -istatistiksel üst limit, A -istatistiksel alt limit ve A -istatistiksel çekirdek kavramlarını tanımlamıştır.

T negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere, Miller (1995) T -yoğunluk

kavramını tanımladı. Kostyrko vd. (2000) ideal kavramını kullanarak klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın da bir genellemesi olan ideal yakınsaklık kavramını tanımladılar. Ayrıca sıfır T -yoğunluklu kümelerin ailesi olan $\mathcal{I}_{dT}$ nin bir uygun ideal olduğunu gösterdiler. Schoenberg (1959), Euler fonksiyonu yardımıyla özel bir toplanabilirlik metodu tanımlamıştır. Buna göre, $k|n$ ise $\phi_{nk} = \frac{\varphi(k)}{n}$, $k \nmid n$ ise $\phi_{nk} = 0$ olmak üzere negatif olmayan regüler $\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi ile bir kümenin karakteristik fonksiyon dizisinin çarpımıyla elde edilen dizinin limiti o kümenin φ -yoğunluğunu verir. Kostyrko vd. (2000) tüm sıfır φ -yoğunluklu kümelerin ailesi olan $\mathcal{I}_{\varphi}$ nin ideal olduğunu gösterdiler ve bu ideal üzerinden $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsaklığı tanımladılar.

Kováč (2005) φ -yakınsaklık ile $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelemiştir. $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsaklığın φ -yakınsaklıktan daha zayıf olduğunu göstermiştir. Ayrıca bir küme φ -yoğunluğa sahipse sadece 0 veya 1 değerlerini alabileceğini göstermiştir. Eğer bir kümenin φ -yoğunluğu mevcutsa asimptotik ve logaritmik yoğunlukları da mevcut olup, aynı değeri alır. Dolayısıyla $\mathcal{I}_d$ ve $\mathcal{I}_{\delta}$ idealleri $\mathcal{I}_{\varphi}$ idealini kapsar. Kováč (2005), düzgün yoğunluğa sahip olmayan sıfır φ -yoğunluklu bir küme örneği ve kendisi φ -yakınsak, fakat mutlak değeri φ -yakınsak olmayan bir dizi örneği vermiştir.

Bu çalışmada $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsaklık ile φ -yakınsaklığın özellikleri ve bu iki yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. $\mathcal{I}_{\varphi}$ -süreklilik ve φ -süreklilik tanımları verilip, $\mathcal{I}_{\varphi}$ -süreklilik ile sürekliliğin denk olduğu ifade edilmiştir. Yedinci bölümde, Zeager (2000)'ın istatistiksel yakınsaklık için verdiği iki teorem $\mathcal{I}$ -yakınsaklık için verilecek, daha genel sonuç elde edilmiştir. Ayrıca klasik yakınsaklıkta çok iyi bilinen, “bir (x_n) dizisi yakınsaksa (x_{2n}) ve (x_{2n-1}) alt dizileri de yakınsaktır” çift gerektirmeli ifadesi istatistiksel yakınsaklık için verilmiştir. Bu teoremin $\mathcal{I}$ -yakınsaklığa genellenemeyeceği ifade edilerek, ters bir örnek gösterilmiştir. Bir dizinin $\mathcal{I}_{\varphi}$ -limit noktaları kümesi $\Lambda_x(\mathcal{I}_{\varphi})$ ve $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yığılma noktaları kümesi $\Gamma_x(\mathcal{I}_{\varphi})$ tanımları verilecek, özellikleri incelenmiştir. Son olarak, $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsak diziler uzayı, φ -yakınsak diziler uzayı ve kuvvetli φ -yakınsak diziler uzayının özellikleri incelenmiştir.

2. YOĞUNLUKLAR

Bu bölümde bilinen bazı yoğunluk tanımları ve aralarındaki ilişki verilmiştir.

2.1. Bilinen Bazı Yoğunluk Kavramları

Tanım 2.1.1 (Asimptotik Yoğunluk). $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $A(n) := |(\{1, \dots, n\} \cap A)|$ şeklinde tanımlayalım.

$$\underline{d}(A) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}, \quad \bar{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} \quad (2.1)$$

sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{d}(A) = \bar{d}(A)$, yani A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu mevcut ve birbirine eşit ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A(n)}{n} \right) =: d(A)$ mevcuttur. $d(A)$ sayısına A kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Buck, 1953).

Tanım 2.1.2 (Düzgün Yoğunluk). $A \subseteq \mathbb{N}$, t, s tamsayı ve $t \geq 0$, $s \geq 1$ olsun. $A \cap [t+1, t+s]$ kümesinin eleman sayısı $A(t+1, t+s)$ olarak belirtilsin.

$$\alpha_s = \liminf_{t \rightarrow \infty} A(t+1, t+s), \quad \alpha^s = \limsup_{t \rightarrow \infty} A(t+1, t+s) \quad (2.2)$$

olmak üzere,

$$\underline{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha_s}{s} \text{ ve } \bar{u}(A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha^s}{s} \quad (2.3)$$

sırasıyla A nın alt ve üst düzgün yoğunlukları olarak adlandırılır. Eğer $\underline{u}(A) = \bar{u}(A) =: u(A)$ ise ortak olan $u(A)$ sayısına A kümesinin düzgün yoğunluğu denir (Brown ve Freedman, 1990).

Tanım 2.1.3 (Logaritmik Yoğunluk). $A \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a}, \quad \bar{\delta}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a} \quad (2.4)$$

sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst logaritmik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{\delta}(A) = \bar{\delta}(A) =: \delta(A)$ ise

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a} \quad (2.5)$$

sayısına A kümesinin logaritmik yoğunluğu denir (Halberstam ve Roth, 1966).

2.2. Yoğunluklar Arasındaki İlişkiler

Keyfi bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \underline{u}(A) \leq \underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(A) \leq \bar{d}(A) \leq \bar{u}(A) \leq 1 \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır (Brown ve Freedman, 1990; Halberstam ve Roth, 1966). Bu eşitsizlikten kolayca görüleceği gibi, $u(A)$ mevcut ise $d(A)$ da mevcut ve $d(A) = u(A)$ dır. Eğer $d(A)$ mevcut ise $\delta(A)$ da mevcut ve $\delta(A) = d(A)$ dır. Bu durumların tersleri doğru değildir. Aşağıdaki ilk örnekte, asimptotik yoğunluğa sahip, fakat düzgün yoğunluğa sahip olmayan bir küme örneği verilmiştir. İkinci örnekte ise, logaritmik yoğunluğa sahip, fakat asimptotik yoğunluğa sahip olmayan bir küme gösterilmiştir.

Örnek 2.2.1. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{10^k + 1, 10^k + 2, \dots, 10^k + k\}$ kümesini ele alalım. A kümesi asimptotik yoğunluğa sahiptir ve $d(A) = 0$ dır. Fakat $\underline{u}(A) = 0$ ve $\bar{u}(A) = 1$ olduğundan A kümesi düzgün yoğunluğa sahip değildir (Baláz ve Šalát, 2006).

Örnek 2.2.2. B , ilk rakamı 1 olan tüm doğal sayıların kümesi olsun. Açık yazılacak olursa,

$$B = \{1, 10, 11, \dots, 19, 100, \dots, 199, 1000, \dots\} \quad (2.7)$$

şeklinde olsun. Bu küme logaritmik yoğunluğa sahiptir, fakat asimptotik yoğunluğa sahip değildir.

3. TOPLANABİLME METOTLARI ve φ -YAKINSAKLIK

Bu bölümde T bir sonsuz matris olmak üzere T -toplanabilme kavramı ele alınacaktır. T matrisi yerine özel olarak negatif olmayan regüler $\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisini alarak tanımlanan φ -yakınsaklık metodunu inceleyeceğiz.

3.1. T-Toplanabilme

Şimdi sonsuz matrislerle elde edilen bir yakınsaklık metodu olan T -toplanabilmenin tanımını verelim. Toeplitz Teoremi olarak bilinen Teorem 3.1.2'de, T matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Tanım 3.1.1.

$$T = (t_{nk})_{n,k=1}^{\infty} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

elemanları reel sayılar olan bir sonsuz matris olsun. $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ reel değerli bir dizi olmak üzere $n = 1, 2, \dots$ için

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k \quad (3.2)$$

serilerini ele alalım. Bu serilerin tümü yakınsak olduğunda yeni bir $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisini elde ederiz. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$ ise x dizisi ξ sayısına T -toplanabilirdir denir. Bu durumda ξ sayısına x dizisinin T -limiti denir ve $T - \lim x_n = \xi$ olarak yazılır (Hardy, 1949).

Yakınsak her x dizisi T -toplanabilir ve $T - \lim x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ise T matrisi regülerdir denir (Hardy, 1949). Aşağıdaki teorem T matrisinin regülerliği için sağlaması gereken koşulları verir.

Teorem 3.1.2 (Toeplitz Teoremi). $T = (t_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisinin regüler olması

için gerek ve yeter koşul T nin aşağıdaki koşulları sağlamasıdır:

(i) Her $n = 1, 2, \dots$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| \leq M$$

olacak şekilde bir M reel sayısı vardır.

(ii) Her $k = 1, 2, \dots$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$ (Hardy, 1949).

3.2. φ -Yakınsaklık

Bu bölümde, sayılar teorisinde önemli bir yeri olan φ Euler fonksiyonunun özellikleri verilmiştir. Ayrıca φ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ve özel bir toplanabilme metodu olan φ -yakınsaklığın tanımı verilmiştir. φ -yakınsaklık, klasik yakınsaklıktan daha zayıftır. Yakınsak olan her dizi aynı zamanda φ -yakınsaktır. Örnek 3.2.4, bu durumun tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

3.2.1. φ Euler Fonksiyonu

n bir doğal sayı olmak üzere $\varphi(n)$, n den küçük veya eşit olan ve n ile aralarında asal olan doğal sayıların sayısını belirtir. Bu şekilde tanımlanan φ fonksiyonuna Euler fonksiyonu da denir. $n > 1$ ve n in asal çarpanlara ayrışımı $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ olmak üzere

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \quad (3.3)$$

ve $\varphi(1) = 1$ dir (Niven ve Zuckerman, 1967).

3.2.2. φ Fonksiyonunun Özellikleri

φ fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1) $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ aralarında asal ise $\varphi(n_1.n_2) = \varphi(n_1) \varphi(n_2)$ dir.

2) Her n doğal sayısı için

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

eşitliği sağlar.

3) p asal sayı ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\varphi(p) = p - 1$ ve $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ dir.

4) $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$ dir.

5) $n > 1$ için $0 < \frac{\varphi(n)}{n} < 1$ dir (Niven ve Zuckerman, 1967).

$$\phi_{nk} = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{n} & k|n \text{ ise} \\ 0 & k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.4)$$

olmak üzere,

$$\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & 0 & \dots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{2}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{8} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sonsuz matrisi tanımlansın. Schoenberg (1959) Φ matrisinin regüler olduğunu gösterdi.

Tanım 3.2.3 (φ -yakınsaklık). $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ bir reel sayı dizisi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d \quad (3.6)$$

olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$ ise x dizisi ξ sayısına φ -yakınsaktır denir. ξ sayısına x dizisinin φ -limiti denir ve $\varphi - \lim x_n = \xi$ yazılır (Schoenberg, 1959).

Φ matrisinin regülerliğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ durumu $\varphi - \lim x_n = \xi$ olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnek bu durumun tersinin doğru olmadığını gösteriyor. Yani bir dizi φ -yakınsak ise yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.4. $\mathbb{P} = \{p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots\}$ tüm asal sayıların kümesi olsun.

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = 2.3.5 \dots p_k \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.7)$$

olsun. $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak değildir, fakat φ -yakınsaktır (Erdős, 1978).

Teorem 3.2.5. Bir $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi bir $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına φ -yakınsak, yani $\varphi - \lim x_n = \xi$ olsun. Ayrıca $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. Buradan,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n_i)}{n_i} > 0$$

olması

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = \xi$$

olmayı gerektirir (Schoenberg, 1959).

4. MATRİSLERLE TANIMLANAN YOĞUNLUK KAVRAMLARI

Bu bölümde, A negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere A -yoğunluk kavramını ele alacağız. Yukarıda tanımını verdiğimiz $\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olduğundan, A -yoğunluk tanımında özel olarak Φ matrisi alındığında φ -yoğunluk elde edilir.

4.1. A -Yoğunluk ve A -İstatistiksel Yakınsaklık

Önce genel A -yoğunluk kavramı, daha sonra bunun bir özel hali olan φ -yoğunluk kavramlarını vereceğiz.

Tanım 4.1.1. A negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere, bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için

$$\delta_A(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_K(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A\chi_K)_n \quad (4.1)$$

mevcut ise K kümesi A -yoğunluğa sahiptir denir (Freedman ve Sember, 1981).

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & k \leq n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.2)$$

olmak üzere,

$$C_1 = (c_{nk})_{n,k=1}^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

sonsuz matrisi tanımlansın. Bu matris Cesàro matrisi olarak bilinir. Yukarıdaki A -yoğunluk tanımında C_1 Cesàro matrisi kullanılırsa ikinci bölümde tanımlanan asimptotik yoğunluk tanımı elde edilir. Yani $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $|K|$, K kümesindeki eleman sayısını belirtmek üzere, K kümesinin asimptotik yoğunluğu aşağıdaki

limit mevcut olmak koşuluyla,

$$d(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 \chi_K)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}| \quad (4.4)$$

ile tanımlanır (Fridy, 1993).

Tanım 4.1.2. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin A -yoğunluğu sıfır yani,

$$\delta_A(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (4.5)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir (Connor, 1989).

4.2. φ -Yoğunluk

A -yoğunluk tanımında kullandığımız regüler $A = (a_{nk})$ matrisi yerine Φ matrisini alarak φ -yoğunluk tanımını verebiliriz.

Tanım 4.2.1. $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$d_\varphi^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \chi_A(d), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

olarak belirtilsin. Eğer

$$d_\varphi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi^{(n)}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \chi_A(d) \quad (4.7)$$

limiti mevcut ise $d_\varphi(A)$ sayısı A kümesinin φ -yoğunluğu olarak adlandırılır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 4.2.2. $\mathbb{P} = \{p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots\}$ tüm asal sayıların kümesi olsun.

$$E = \{2 < 2 \cdot 3 < \dots < 2 \cdot 3 \cdots p_k < \dots\} \quad (4.8)$$

kümesini ele alalım. Bu küme için $d_\varphi(E) = 0$ dır (Kováč, 2005).

Örnek 4.2.3. $d(\mathbb{P}) = \delta(\mathbb{P}) = u(\mathbb{P}) = 0$ dır, fakat $\mathbb{P}$ kümesi φ -yoğunluğa sahip değildir (Kováč, 2005).

5. İDEAL YAKINSAKLIK VE φ -YOĞUNLUKLU KÜMELERİN İDEALİ

Kostyrko vd. (2000) ideal kavramını kullanarak ideal yakınsaklık ya da kısaca $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramını tanımladılar. Bu yakınsaklık tipi klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık başta olmak üzere çok sayıda yakınsaklık çeşidini kapsar. Sıfır φ -yoğunluklu kümelerin ailesi de bir idealdir ve bu ideal yardımıyla $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsaklık tanımlanır. Bu bölümde $\mathcal{I}_\varphi$ ideali ile diğer bazı idealler arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Ayrıca $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsaklık ile φ -yakınsaklık arasındaki ilişki verilmiştir.

5.1. I–Yakınsaklık

$\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramına girebilmek için önce ideal ve filtre tanımlarını vereceğiz.

Tanım 5.1.1. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için,

- (i) $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$ (toplamsallık),
- (ii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subseteq A$ ise $B \in \mathcal{I}$ (kalıtsallık)

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ de bir ideal olarak adlandırılır (Jech, 2003).

Yukarıdaki tanımdaki (ii) den $\emptyset \in \mathcal{I}$ olacağı açıktır. Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ ideali öz ideal olarak adlandırılır. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dışındaki bütün idealler öz idealdir. Her $x \in \mathbb{N}$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise, yani $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümelerini içeriyorsa uygun ideal olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{I}$ ideali kapsamaya göre maksimal olan bir öz ideal ise maksimal ideal adını alır (Kostyrko vd., 2000).

Şimdi ideale dual bir kavram olan filtre tanımını verelim.

Tanım 5.1.2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ailesi için,

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- (ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye $\mathbb{N}$ de bir filtre denir (Jech, 2003). $\mathcal{I}$ ile $\mathcal{F}$ arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önerme açıkca vermektedir.

Önerme 5.1.3. $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ de bir öz ideal olsun.

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{I} \ni M = \mathbb{N} \setminus A\} \quad (5.1)$$

ailesi $\mathbb{N}$ de $\mathcal{I}$ ideali ile ilgili filtredir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 5.1.4. $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathbb{N}$ de bir öz ideal olsun. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I} \quad (5.2)$$

ise x dizisi ξ sayısına $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ şeklinde yazılır (Kostyrko vd., 2000).

5.2. Bazı İdeal Örnekleri ve Bunlarla Üretilen $\mathcal{I}$ -Yakınsaklık

Şimdi genel olarak tanımladığımız ideal kavramını sağlayan, doğal sayıların alt-kümelerinin farklılıklarını ortaya koyacağız.

Örnek 5.2.1. $\mathcal{I}_f, \mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümelerinin ailesi olsun. Bilindiği gibi klasik yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu bir değerdir. Ölçüm teorisinde bunun dizinin tüm terimlerine oranı bilindiği gibi sıfırdır. Bu özelliğe sahip kümeler ideal tanımındaki özellikleri sağlar. Bu nedenle $\mathcal{I}_f$ -yakınsaklık klasik yakınsaklığın genelleştirilmiştir. $\mathcal{I}_f$, kapsamaya göre en küçük uygun idealdir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.2. $\mathcal{I}_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. Bilindiği gibi istatistiksel yakınsaklıkta limit noktasının komşuluğu dışında kalan eleman sayısı sonlu veya tüm eleman sayısına göre daha az bir değerdir. Ancak sonlu olması gerekmez sonsuz da olabilir. Ölçüm teorisinde bunun dizinin tüm terimlerine oranı bilindiği gibi sıfırdır. Yakınsaklık ise hemen hemen bir yakınsaklık

türüdür. Bu özeliğe sahip kümeler ideal tanımındaki özellikleri sağlar. Bu nedenle $\mathcal{I}_d$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiştir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.3. $\mathcal{I}_u = \{A \subset \mathbb{N} : u(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir. $\mathcal{I}_u$ -yakınsaklık düzgün istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.4. $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$ -yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.5. $\mathcal{I}_\varphi = \{A \subset \mathbb{N} : d_\varphi(A) = 0\}$ ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.6. $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ olmak üzere $\mathcal{I}_0$ $\mathbb{N}$ de minimal idealdir. $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}_0$ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x in sabit dizi olmasıdır (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.7. $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$ ve $M \neq \mathbb{N}$ olsun. $\mathcal{I}_M = \mathcal{P}(M)$ alalım. $\mathcal{I}_M$, $\mathbb{N}$ de bir öz idealdir ve M kümesi ne olursa olsun $\mathcal{I}_M$ uygun ideal değildir. Bir $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}_M$ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x in $\mathbb{N} \setminus M$ üzerinde sabit olmasıdır, yani $\xi \in \mathbb{R}$ vardır öyleki her $n \in \mathbb{N} \setminus M$ için $x_n = \xi$ dir. $M = \emptyset$ için $\mathcal{I}_0$ idealini elde ederiz (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 5.2.8. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, m sayısını bulundurmeyen kümelerin oluşturduğu aile bir maksimal idealdir (Kostyrko vd., 2000).

Bu ideal, uygun ideal değildir. Çünkü $\{m\}$ kümesi bu ideale ait değildir. Herhangi bir x dizisi m inci elemanına bu ideal üzerinden $\mathcal{I}$ -yakınsaktır .

5.3. I–Yakınsaklığın Bazı Özellikleri

$\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$ iki ideal olmak üzere $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de bir idealdir, fakat aralarında kapsama bağıntısı yoksa $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ bir ideal değildir. Yukarıdaki idealler arasında,

$$\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_u \subset \mathcal{I}_d \subset \mathcal{I}_\delta \quad (5.3)$$

ve

$$\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_\varphi \subset \mathcal{I}_d \subset \mathcal{I}_\delta \quad (5.4)$$

kapsama bağıntıları vardır . $\mathcal{I}_u$ ile $\mathcal{I}_\varphi$ arasında bir kapsama yoktur. $\mathcal{I}_1$ ve $\mathcal{I}_2$ iki uygun ideal ve $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_1 - \lim x_n = \xi$ ise $\mathcal{I}_2 - \lim x_n = \xi$ dir.

Teorem 5.3.1. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ise $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ dir.
- (ii) $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$, $\mathcal{I} - \lim y_n = \eta$ ise $\mathcal{I} - \lim (x_n + y_n) = \xi + \eta$ dir.
- (iii) $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$, $\mathcal{I} - \lim y_n = \eta$ ise $\mathcal{I} - \lim (x_n \cdot y_n) = \xi \cdot \eta$ dir.
- (iv) $\mathcal{I}$ -limitler tektir.
- (v) Eğer $\mathcal{I} - \lim x_n$ var ise $\liminf x_n \leq \mathcal{I} - \lim x_n \leq \limsup x_n$. (Kostyrko vd.,2005).

Teorem 5.3.2. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ nın maksimal uygun ideal olması için gerek ve yeter koşul her $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$(A \in \mathcal{I}) \vee (\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}) \quad (5.5)$$

olmasıdır (Kostyrko vd.,2000).

Teorem 5.3.3. $\mathcal{I}$ $\mathbb{N}$ de bir maksimal uygun ideal olsun. Reel sayıların her sınırlı $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{I}$ -yakınsaktır (Kostyrko vd.,2000).

Önerme 5.3.4. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 0 ve 1'lerin bir dizisi olmak üzere $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ ise $\xi \in \{0, 1\}$ dir (Kováč, 2005).

Teorem 5.3.5. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $d_\varphi(A)$ mevcut ise $d_\varphi(A) \in \{0, 1\}$ dir (Kováč, 2005).

5.4. φ -Yakınsaklık İle $\mathcal{I}_\varphi$ -Yakınsaklık Arasındaki İlişki

$\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi kullanılarak elde edilen φ -yakınsaklık, T -toplanabilmenin özel bir halidir. Yine Φ matrisiyle elde edilen $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsaklık ise A -istatistiksel yakınsaklığın özel bir halidir.

Teorem 5.4.1. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayıların bir dizisi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Buradan;

- (i) $\varphi - \lim |x_n - \xi| = 0$ ise $\mathcal{I}_\varphi - \lim x_n = \xi$ dir.
- (ii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sınırlı bir dizi ve $\mathcal{I}_\varphi - \lim x_n = \xi$ ise $\varphi - \lim |x_n - \xi| = 0$ dir.

(iii) $\varphi - \lim |x_n - \xi| = 0$ ise $\varphi - \lim x_n = \xi$ dir (Kováč, 2005).

Yukarıdaki teoremin (ii) ve (iii) sinden sınırlı diziler için $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsaklık, φ -yakınsaklığı gerektirir. Kováč (2005) φ -yakınsak olup, $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsak olmayan sınırlı bir dizinin mevcut olduğunu ispatladı. Dolayısıyla φ -yakınsaklık, $\mathcal{I}_\varphi$ -yakınsaklığı gerektirmez.

6. I-SÜREKLİLİK VE φ -SÜREKLİLİK

Bu bölümde, reel tanımlı fonksiyonlar için $\mathcal{I}$ -sürekliliğin tanımını verip, uygun idealler için sürekliliğe denk olduğundan bahsedeceğiz. A -sürekliliğin tanımında Φ regüler matrisini kullanarak φ -sürekliliğin tanımını vereceğiz.

6.1. I-Süreklilik

Tamm 6.1.1. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal olsun. Bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde, eğer her bir reel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için,

$$\mathcal{I} - \lim x_n = x_0 \implies \mathcal{I} - \lim f(x_n) = f(x_0) \quad (6.1)$$

oluyorsa f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{I}$ -süreklidir denir (Baláz vd., 2002; Sleziak, 2003).

Önerme 6.1.2. Eğer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{I}$ -süreklili ise $g \circ f$ de $\mathcal{I}$ -süreklidir (Baláz vd., 2002; Sleziak, 2003).

Önerme 6.1.3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları bir x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -süreklili ise $f + g$ ve $f.g$ fonksiyonları da x_0 noktasında $\mathcal{I}$ -süreklidir (Baláz vd., 2002).

Teorem 6.1.4. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ise $\mathcal{I}$ -süreklilik ile $\mathcal{I}_f$ -süreklilik denktir. Yani $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$f \text{ } \mathcal{I}\text{-süreklidir} \iff f \text{ } \mathcal{I}_f\text{-süreklidir} \quad (6.2)$$

(Sleziak, 2003).

Sonuç 6.1.5. $\mathcal{I}_f$ -süreklilik, $\mathcal{I}_u$ -süreklilik, $\mathcal{I}_\varphi$ -süreklilik, $\mathcal{I}_d$ -süreklilik ve $\mathcal{I}_\delta$ -süreklilik birbirine denktir.

6.2. φ -Süreklilik

Tanım 6.2.1. $A = (a_{mn})$ regüler bir matris ve $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $A - \lim x_n = x_0$ olmak üzere $A - \lim f(x_n) = f(x_0)$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında A -süreklidir denir (Antoni ve Šalát, 1980).

Yukarıdaki tanımda $\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ regüler matrisini kullanırsak φ -sürekliliği tanımlanmış oluruz.

Tanım 6.2.2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\varphi - \lim x_n = x_0$ olmak üzere $\varphi - \lim f(x_n) = f(x_0)$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında φ -süreklidir denir.

7. BAZI SONUÇLAR

Şimdi elde ettiğimiz bazı sonuçları vereceğiz.

7.1. Altdizilerin ve Yeniden Düzenlenmiş Dizilerin $\mathcal{I}$ -Yakınsaklığı

Aşağıdaki iki teorem Zeager (2000)'ın istatistiksel yakınsaklık için ispatladığı teoremlerin daha genel olan $\mathcal{I}$ -yakınsak için verilmiş halidir. Teorem 7.1.3'de klasik yakınsaklıkta çok iyi bilinen bir teorem istatistiksel yakınsaklık için verilmiştir.

Teorem 7.1.1. $\mathcal{I}$ maksimal olmayan bir uygun ideal olsun. Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x in her altdizisinin $\mathcal{I}$ -yakınsak olmasıdır.

İspat. Önce gereklilik ispatını verelim. x yakınsak ise x in her altdizisi de yakınsaktır ve $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $\mathcal{I}$ -yakınsaktır.

Şimdi de yeterliliği gösterelim. x ıraksak ise x in $\mathcal{I}$ -yakınsak olmayan bir $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ altdizisinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. x ıraksak olsun. İki durum vardır; x ya sınırlı ya da sınırsızdır.

Kabul edelim ki x sınırsız olsun. Tüm $k \in \mathbb{N}$ için $1 + |y_k| < |y_{k+1}|$ olan x in bir y altdizisini seçebiliriz. Herhangi bir $L \in \mathbb{R}$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |y_k - L| < \varepsilon\}$ kümesi sadece sonlu sayıda elemana sahiptir. Böylece $A_\varepsilon \in \mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ uygun ideal) ve $\mathbb{N} \setminus A_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |y_k - L| \geq \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ dır. Buradan y, L ye $\mathcal{I}$ -yakınsak değildir. L keyfi olduğundan x dizisinin y altdizisi $\mathcal{I}$ -yakınsak değildir.

Şimdi x dizisinin sınırlı ve ıraksak olduğunu kabul edelim. Bu durumda x dizisi α ve β gibi en az iki farklı limit noktasına sahiptir. $\{x_{a(k)}\}$ ve $\{x_{b(k)}\}$ iki altdizi öyleki $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{a(k)} = \alpha$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{b(k)} = \beta$ olsun. $\varepsilon_0 = \frac{|\beta - \alpha|}{3}$ olsun. Genelliği bozmaksızın $\{x_{a(k)}\}$ ve $\{x_{b(k)}\}$ nın ayrı ve tüm k lar için $|x_{a(k)} - \alpha| < \varepsilon_0$ ve $|x_{b(k)} - \beta| < \varepsilon_0$ olduğunu varsayalım.

$\mathcal{I}$ maksimal olmadığından bir $A = \{m_1 < m_2 < \dots < m_p < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $A \notin \mathcal{I}$ ve $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$ dır.

Şimdi x dizisinin aşağıdaki gibi y alt dizisini inşa edebiliriz.

$m_1 = 1$ ise $N(1) = a(1)$, aksi halde $i = 1, 2, \dots, m_1 - 1$ için $N(i) = b(i)$ olsun.

Herbir $p = 1, 2, \dots$ için,

$$\begin{aligned} N(m_p) &= \min \{a(k) : a(k) > N(m_p - 1)\} \\ N(m_p + 1) &= \min \{b(k) : b(k) > N(m_p)\} \\ N(m_p + 2) &= \min \{b(k) : b(k) > N(m_p + 1)\} \\ &\dots\dots\dots \\ N(m_{p+1} - 1) &= \min \{b(k) : b(k) > N(m_{p+1} - 2)\}. \end{aligned}$$

$y_k = x_{N(k)}$ olsun. Buradan $\lim_p y_{m_p} = \lim_k x_{a(k)} = \alpha$ ve $\lim_{k \neq m_p} y_k = \lim_k x_{b(k)} = \beta$ dır.

$$\begin{aligned} A &= \{k : |y_k - \beta| \geq \varepsilon_0\} \notin \mathcal{I} \\ \mathbb{N} \setminus A &= \{k : |y_k - \alpha| \geq \varepsilon_0\} \notin \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Böylece y , $\mathcal{I}$ -yakımsak değildir. ■

Tanım 7.1.2. $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ bir reel sayı dizisi ve $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bire-bir, örten bir fonksiyon olsun. Herbir $k = 1, 2, \dots$ için $z_k = x_{\pi(k)}$ şeklinde tanımlanan z dizisine x dizisinin bir yeniden düzenlenmiş dizisi adı verilir.

Teorem 7.1.3. $\mathcal{I}$ maksimal olmayan bir uygun ideal olsun. Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ dizisinin yakımsak olması için gerek ve yeter koşul x in her yeniden düzenlenmiş dizisinin $\mathcal{I}$ -yakımsak olmasıdır.

İspat. Önce gereklilik ispatını verelim. x yakımsak ise x in her yeniden düzenlenmiş dizisi de yakımsaktır ve $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $\mathcal{I}$ -yakımsaktır.

Şimdi de yeterliliği gösterelim. x ıraksak ise x in $\mathcal{I}$ -yakımsak olmayan bir y yeniden düzenlenmiş dizisinin var olduğunu göstereceğiz. x ıraksak olsun. İki durum vardır; x sınırlı ya da sınırsızdır.

İlk olarak x dizisinin sınırsız olduğunu kabul edelim. Herbir $i \in \mathbb{N}$ için $a(i+1) > a(i) + 1$ ve $j < a(i)$ ise $|x_{a(i)}| > |x_j|$ olacak şekilde x in bir $\{x_{a(i)}\}$ alt dizisi bulabiliriz.

$\mathcal{I}$ maksimal olmadığından bir $A = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki

$A \notin \mathcal{I}$ ve $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$ dir. Herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{m_i} = x_{a(i)}$ olsun. $x_{b(i)}$, x dizisinden $x_{a(i)}$ altdizisinin terimlerinin silinmesiyle elde edilen altdizi olsun. $\mathbb{N} \setminus A = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ olmak üzere herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{n_i} = x_{b(i)}$ olsun. Herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{m_i} = x_{a(i)}$ ve $z_{n_i} = x_{b(i)}$ olmak üzere $z = (z_n)$, x in bir yeniden düzenlenmiş dizisidir.

Herhangi bir $L \in \mathbb{R}$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |z_n - L| \geq \varepsilon\} = (A \cup B) \setminus M$$

dir. Burada B keyfi bir küme ve M sonlu bir kümedir. $A \notin \mathcal{I}$ olduğundan $A \cup B \notin \mathcal{I}$ ve $(A \cup B) \setminus M \notin \mathcal{I}$ dir. Böylece $\{n \in \mathbb{N} : |z_n - L| \geq \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ dir. z dizisi L ye $\mathcal{I}$ -yakınsak değildir. L keyfi olduğundan x dizisinin z yeniden düzenlenmiş dizisi $\mathcal{I}$ -yakınsak değildir.

Şimdi x in sınırlı olduğunu kabul edelim. x , α ve β gibi en az iki ayrık limit noktasına sahiptir. $\varepsilon_0 = \frac{\beta - \alpha}{3}$ olsun. Tüm $i \in \mathbb{N}$ için $|x_{a(i)} - \alpha| < \varepsilon_0$ ve $|x_{b(i)} - \beta| < \varepsilon_0$ olmak üzere $\lim_i x_{a(i)} = \alpha$ ve $\lim_i x_{b(i)} = \beta$ olacak şekilde $\{x_{a(i)}\}$ ve $\{x_{b(i)}\}$, x in ayrık altdizileri olsun.

$\mathcal{I}$ maksimal olmadığından bir $A = \{m_1 < m_2 < \dots < m_p < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $A \notin \mathcal{I}$ ve $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$ dir.

Herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{m_i} = x_{a(i)}$ olsun. $x_{c(i)}$, x dizisinin $x_{a(i)}$ altdizisinin terimlerinin silinmesiyle elde edilen altdizi olsun. $\mathbb{N} \setminus A = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ olmak üzere herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{n_i} = x_{c(i)}$ olsun. Herbir $i = 1, 2, \dots$ için $z_{m_i} = x_{a(i)}$ ve $z_{n_i} = x_{c(i)}$ olmak üzere $z = (z_n)$, x in bir yeniden düzenlenmiş dizisidir. B herhangi bir küme olmak üzere,

$$\{k : |z_k - \alpha| \geq \varepsilon_0\} = \mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$$

$$\{k : |z_k - \beta| \geq \varepsilon_0\} = A \cup B \notin \mathcal{I}$$

dir. Sonuç olarak, x in z yeniden düzenlenmiş dizisi $\mathcal{I}$ -yakınsak değildir. ■

Not. Yukarıdaki iki teorem sadece maksimal olmayan idealler için geçerlidir. Yakınsak olmayan sınırlı bir dizi ele aldığımızda, bu dizinin tüm altdizileri de sınırlıdır. $\mathcal{I}$ idealini maksimal seçersek, maksimal ideal özelliğinden bu dizinin

bütün altdizileri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır, fakat dizinin kendisi yakınsak değildir.

Teorem 7.1.4. Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $\mathcal{I}_d$ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_{2n}) ve (x_{2n-1}) altdizilerinin ξ ye $\mathcal{I}_d$ -yakınsak olmasıdır.

İspat. Önce gereklilik ispatını verelim. $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ ye $\mathcal{I}_d$ -yakınsak, yani $\mathcal{I}_d - \lim x_n = \xi$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_d.$$

$$B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ ve } n = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2b_1, 2b_2, \dots\}$$

$$C_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ ve } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\} = \{2c_1 - 1, 2c_2 - 1, \dots\}$$

olsun. $B_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$ ve $C_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$ olduğundan $B_\varepsilon \in \mathcal{I}_d$ ($d(B_\varepsilon) = 0$) ve $C_\varepsilon \in \mathcal{I}_d$ ($d(C_\varepsilon) = 0$) dir.

(x_{2n}) altdizisi için;

$$B_\varepsilon^I = \{n \in \mathbb{N} : |x_{2n} - \xi| \geq \varepsilon\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

elde edilir. $d(B_\varepsilon^I) = \frac{1}{2}d(B_\varepsilon)$ ve $d(B_\varepsilon) = 0$ olduğundan $d(B_\varepsilon^I) = 0$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ için $B_\varepsilon^I \in \mathcal{I}_d$ olduğundan $\mathcal{I}_d - \lim x_{2n} = \xi$ dir. Benzer şekilde (x_{2n-1}) altdizisi için;

$$C_\varepsilon^I = \{n \in \mathbb{N} : |x_{2n-1} - \xi| \geq \varepsilon\} = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

elde edilir. $d(C_\varepsilon^I) = \frac{1}{2}d(C_\varepsilon)$ ve $d(C_\varepsilon) = 0$ olduğundan $d(C_\varepsilon^I) = 0$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ için $C_\varepsilon^I \in \mathcal{I}_d$ olduğundan $\mathcal{I}_d - \lim x_{2n-1} = \xi$ dir.

Şimdi de yeterliliği gösterelim. $\mathcal{I}_d - \lim x_{2n} = \xi$ ve $\mathcal{I}_d - \lim x_{2n-1} = \xi$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$B_\varepsilon^I = \{n \in \mathbb{N} : |x_{2n} - \xi| \geq \varepsilon\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} \in \mathcal{I}_d$$

ve

$$C_\varepsilon^I = \{n \in \mathbb{N} : |x_{2n-1} - \xi| \geq \varepsilon\} = \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \in \mathcal{I}_d$$

dir.

$$B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ ve } n = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{2b_1, 2b_2, \dots\}$$

$$C_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ ve } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\} = \{2c_1 - 1, 2c_2 - 1, \dots\}$$

olmak üzere $d(B_\varepsilon) = 2d(B'_\varepsilon)$ ve $d(C_\varepsilon) = 2d(C'_\varepsilon)$ dir. $d(B'_\varepsilon) = 0$ ve $d(C'_\varepsilon) = 0$ olduğundan $d(B_\varepsilon) = 0$ ve $d(C_\varepsilon) = 0$ dir. Bu $B_\varepsilon \in \mathcal{I}_d$ ve $C_\varepsilon \in \mathcal{I}_d$ anlamına gelir. $\forall \varepsilon > 0$ için;

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} = B_\varepsilon \cup C_\varepsilon \in \mathcal{I}_d$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{I}_d - \lim x_n = \xi$ dir. ■

Benzer bir ispat tekniği ile $a \in \mathbb{N}$ için;

$$\mathcal{I}_d - \lim x_n = \xi \iff \forall b = 0, 1, 2, \dots, a-1 \text{ için } \mathcal{I}_d - \lim x_{an-b} = \xi$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Yukarıdaki teorem $\mathcal{I}_u$ -yakınsaklık için de verilebilir. Fakat tüm uygun ideallere bu teorem genellenemez. Şimdi maksimal uygun idealler için yukarıdaki teoremin geçerli olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 7.1.5. $\mathcal{I}$ maksimal uygun ideal olsun. Tek indislerde 1, çift indislerde 0 değerini alan $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlı ve $\mathcal{I}$ maksimal bir ideal olduğundan, Teorem 5.3.3 e göre bu dizi $\mathcal{I}$ -yakınsaktır. Üstelik $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olduğundan, Önerme 5.3.4 e göre dizi 0 veya 1 e $\mathcal{I}$ -yakınsaktır. Fakat bu dizinin (x_{2n}) alt dizisi 0 a $\mathcal{I}$ -yakınsak, (x_{2n-1}) alt dizisi ise 1 e $\mathcal{I}$ -yakınsaktır. Dolayısıyla yukarıdaki teorem maksimal uygun idealler için geçerli değildir.

7.2. $\mathbf{I}_\varphi$ -Limit Noktası ve $\mathbf{I}_\varphi$ -Yığılma Noktası

Şimdi Kostyrko vd. (2000) tanımladığı $\mathcal{I}$ -limit noktası ve $\mathcal{I}$ -yığılma noktası tanımlarını $\mathcal{I}_\varphi$ ideali için verelim.

Tanım 7.2.1. $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ bir reel sayı dizisi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun.

(a) $d_\varphi(M) \neq 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi mevcut ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına x dizisinin $\mathcal{I}_\varphi$ -limit noktası denir.

(b) Her $\varepsilon > 0$ için $d_\varphi(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| < \varepsilon\}) \neq 0$ ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına x dizisinin $\mathcal{I}_\varphi$ -yığılma noktası denir.

Burada $d_\varphi(M) \neq 0$ olması $d_\varphi(M) = 1$ veya M kümesinin φ -yoğunluğa sahip olmaması anlamına gelir.

Bir $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm $\mathcal{I}_{\varphi}$ -limit noktalarının kümesi $\Lambda_x(\mathcal{I}_{\varphi})$ ve tüm $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yığılma noktalarının kümesi $\Gamma_x(\mathcal{I}_{\varphi})$ ile belirtilir. Bu iki küme arasında

$$\Lambda_x(\mathcal{I}_{\varphi}) \subseteq \Gamma_x(\mathcal{I}_{\varphi}) \quad (7.1)$$

bağıntısı vardır (Kostyrko vd.,2000). Ayrıca $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ ise $\Lambda_x(\mathcal{I}_2) \subseteq \Lambda_x(\mathcal{I}_1)$ ve $\Gamma_x(\mathcal{I}_2) \subseteq \Gamma_x(\mathcal{I}_1)$ olduğu kolayca gösterilebilir:

$\xi \in \Lambda_x(\mathcal{I}_2)$ olsun. Bu durumda, $M \notin \mathcal{I}_2$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ dir. $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ olduğundan $M \notin \mathcal{I}_1$ dir. Sonuç olarak $M \notin \mathcal{I}_1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ mevcut olduğundan $\xi \in \Lambda_x(\mathcal{I}_1)$ dir.

Benzer şekilde, $\eta \in \Gamma_x(\mathcal{I}_2)$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $\{n : |x_n - \eta| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$ dir. $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \eta| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_1$ dir. Böylece $\eta \in \Gamma_x(\mathcal{I}_1)$ dir.

L_x , x dizisinin tüm limit noktalarının kümesi olmak üzere aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

$$\Lambda_x(\mathcal{I}_d) \subseteq \Lambda_x(\mathcal{I}_{\varphi}) \subseteq L_x \quad (7.2)$$

ve

$$\Gamma_x(\mathcal{I}_d) \subseteq \Gamma_x(\mathcal{I}_{\varphi}) \subseteq L_x \quad (7.3)$$

bağıntıları sağlanır.

7.3. $\mathcal{I}_{\varphi}$ -Yakınsak ve φ -Yakınsak Dizi Uzayları

Tüm reel sayı dizilerinin uzayı ω ile belirtilsin. Aşağıda sırasıyla $\mathcal{I}_{\varphi}$ -yakınsak diziler uzayı, φ -yakınsak diziler uzayı ve kuvvetli φ -yakınsak diziler uzayı verilmektedir:

$$\begin{aligned} c^{\mathcal{I}_{\varphi}} & : = \{x \in \omega : \mathcal{I}_{\varphi} - \lim x = \xi, \xi \in \mathbb{R}\} \\ c^{\varphi} & : = \{x \in \omega : \varphi - \lim x = \xi, \xi \in \mathbb{R}\} \\ c_s^{\varphi} & : = \{x \in \omega : \varphi - \lim |x - \xi| = 0, \xi \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Teorem 5.4.1'den $c_s^{\varphi} \subset c^{\mathcal{I}_{\varphi}}, c^{\mathcal{I}_{\varphi}} \cap \ell_{\infty} \subset c_s^{\varphi} \cap \ell_{\infty}$ ve $c_s^{\varphi} \subset c^{\varphi}$ kapsama bağıntıları verilebilir. Bu bağıntılardan

$$c^{\mathcal{I}_{\varphi}} \cap \ell_{\infty} = c_s^{\varphi} \cap \ell_{\infty} \quad (7.4)$$

ve

$$c^{\mathcal{I}_\varphi} \cap \ell_\infty \subset c^\varphi \cap \ell_\infty \quad (7.5)$$

elde edilir.

Tanım 7.3.1. Bir $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ dizisi için $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > K\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut ise x dizisi $\mathcal{I}$ -sınırlıdır denir (Kostyrko vd.,2005).

$\mathcal{I}$ -sınırlı dizilerin uzayı $\ell_\infty^{\mathcal{I}}$ ile gösterilsin. $\ell_\infty \subset \ell_\infty^{\mathcal{I}}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bir $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ dizisi sınırlı ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Buradan $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > K\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ olduğundan $x \in \ell_\infty^{\mathcal{I}}$ dir.

8. KAYNAKLAR

- Antoni, J., Šalát, T., 1980. On the A -continuity of real functions. Acta Math. Univ. Comenian, 39, 159-164 .
- Baláž, V., Červeňanský, J., Kostyko, P., Šalát, T., 2002. $\mathcal{I}$ -convergence and $\mathcal{I}$ -continuity of real functions. Acta Mathematica, 5, 43-50.
- Baláž, V., Šalát, T., 2006. Uniform density u and corresponding $\mathcal{I}_u$ -convergence. Mathematical Communications, 11, 1-7.
- Brown, T. C., Freedman, A. R., 1990. The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 11, 1-6.
- Buck, R. C., 1953. Generalized asymptotic density. Amer. J. Math., 75, 335-346.
- Connor, J., 1988. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences. Analysis, 8, 47-63.
- Connor, J., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32, 194-198.
- Connor, J., Kline, J., 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. Journal of Mathematical Analysis and Application, 197, 392-399.
- Demirci, K., 2000. A -statistical core of a sequence. Demonstratio Mathematica, 33, 343-353.
- Erdős, P., 1978. Solutions of advanced problems: ϕ -convergence. Amer. Math. Monthly, 85, 122-123.
- Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 2, 241-244.

- Freedman, A. R., Sember, J. J., 1981. Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95, 293-305.
- Fridy, J. A., 1993. Statistical Limit Points. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 118, 1187-1192.
- Halberstam, H., Roth, K.F., 1966. *Sequences I*. Oxford, Clarendon Press, 290s., London.
- Hardy, G. H., 1949. *Divergent Series*. Oxford, Clarendon Press, 434s., England.
- Jech, T., 2003. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematic, Springer-Verlags, 769s., Berlin.
- Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}$ –convergence. *Real Anal. Exchange*, 26, 669-686.
- Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T., Szeziak, M., 2005. $\mathcal{I}$ –convergence and extremal $\mathcal{I}$ –limit points. *Mathematica Slovaca*, 55, 443-464.
- Kováč, E., 2005. On φ –convergence and φ –density. *Math. Slovaca*, 55, 329-351.
- Miller, H. I., 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Transactions of The American Mathematical Society*, 347, 1811-1819.
- Niven, I., Zuckerman, H.S., 1967. *An Introduction To The Theory of Numbers*. John Wiley and Sons, New York.
- Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30, 139-150.
- Schoenberg, I. J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, 66, 361-375.
- Szeziak, M., 2003. $\mathcal{I}$ –continuity in topological spaces. *Acta Mathematica*, 6, 115-122.

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique.
Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.

Zeager, J., 2000. Statistical convergence analogues of some matrix summability theorems. Doctoral dissertation, Kent State University.

ÖZGEÇMİŞ



Adı Soyadı : Hüseyin ALBAYRAK

Doğum Yeri ve Yılı : ISPARTA 1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : 1995–1998 Isparta Gazi Lisesi

Lisans : 1999–2003 Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Tezsiz Y. Lisans : 2003–2005 Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği

İş Deneyimi

2006 - ... Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi