

**T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
REZİDÜ YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice KAYA

İSTANBUL 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
REZİDÜ YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice KAYA

050860003

Tez Danışmanı:

Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL 2007

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

24/09.../2007

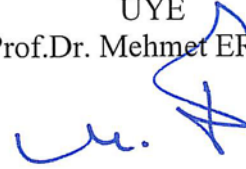
Enstitümüz Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı yüksek lisans öğrencilerinden **050860003** numaralı **Hatice KAYA**'nın "Beykent Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddesine göre hazırlayarak, Enstitümüze teslim ettiği "**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN REZİDÜ YÖNTEMİ**" başlıklı tezi, Yönetim Kurulumuzun 06/08/2007 tarih ve 2007/10 sayılı toplantısında seçilen ve Fakülte binasında toplanan biz jüri üyeleri huzurunda, ilgili yönetmeliğin (c) bendi gereğince (80) dakika süre ile aday tarafından savunulmuş ve sonuçta adayın tezi/projesi hakkında ~~Oyçokluğu/Oybirliği~~ ile ~~Kabul/Red veya Düzeltme~~ kararı verilmiştir.

İşbu tutanak, 4 nüsha olarak hazırlanmış ve Enstitü Müdürlüğü'ne sunulmak üzere tarafımızdan düzenlenmiştir.

DANIŞMAN
Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL



ÜYE
Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN



ÜYE
Prof.Dr. Mahir RESULOV



YEMİN METNİ

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendimin hazırladığına and içerim. 25.10.2007

Hatice KAYA

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması esnasında gerekli yardım ve desteklerini esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Yrd.Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a ve ayrıca eşim Serdar KAYA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hatice KAYA

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER	9
2.1 Lineer Diferansiyel İfade ve Operatör	9
2.2 Adjoint Diferansiyel İfade	12
2.3 Adjoint Sınır Koşulları	17
2.4 Homojen Sınır Problemi	20
2.5 Lineer Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları	23
2.6 Adjoint Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişki	26
2.7 Adi Lineer Diferansiyel Operatörün Green Fonksiyonu, Ters Operatörün Kurulması	29
2.8 Özdeğer Probleminin İntegral Denkleme İndirgenmesi	36
3. SABİT KATSAYILI ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN REZİDÜ YÖNTEMİ	38
3.1 Homojen Denklemler	38
3.2 Homojen Olmayan Denklemler	40
3.3 Rezidü Yöntemiyle 2. Mertebeden Homojen Olmayan Denklemin Genel Çözümü	42
3.4 Sabitin Varyasyonu Yöntemiyle Çözümün Elde Edilmesi	44
3.5 Adi Diferansiyel Denklem İçin Cauchy Probleminin Rezidü Yöntemiyle Çözümü.....	46
6. SONUÇLAR	49
7. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	51

ÖZET

Üç bölümden oluşan tezde, lineer diferansiyel operatörler ve onların oluşturduğu lineer diferansiyel denklemler için genel şekilde yazılmış sınır değer probleminin cebirsel yapısı detaylı şekilde incelenmiştir. Bu amaçla genel şekilde yazılmış lineer diferansiyel ifade ve operatörler için Lagrange anlamında adjoint diferansiyel ifade ve adjoint sınır koşulları da incelenmiştir. Bunun yanı sıra lineer diferansiyel operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları da kapsamlı şekilde ele alınmış ve onların bazı özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca tezde, lineer diferansiyel ifade ve operatörler için Green fonksiyonu kullanılarak, adi lineer diferansiyel operatörler için ters operatörün kurulmasına da yer verilmiştir.

Bu tür araştırmalar, lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer problemlerinin çözümünü Fourier yöntemi ile aldığımızda ve çözümün doğrulanmasında önem kazanmaktadır. Bilindiği gibi, spektral problemin özdeğerleri katlı olduğu durumda bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar tam ve ortonormal sistem oluşturmazlar ve böyle durumlar için Fourier yönteminin uygulanmasında bazı zorluklarla karşılaşılır.

Bu nedenle, tezin üçüncü bölümünde sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer probleminin çözümü rezidü yöntemiyle incelenmiş ve ele alınmıştır. İncelenmiş olan rezidü yöntemi self adjoint olmayan ve katlı özdeğerlere sahip sınır değer problemleri için de geçerli olmaktadır.

Son bölümde, özel olarak ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan denklem için yazılmış sınır değer problemi hem sabitin varyasyonu hem de rezidü yöntemleri ile çözülmüştür.

ABSTRACT

In this thesis the algebraic structure of the boundary value problem for linear differential equations in general form is comprehensively investigated. The properties of linear differential operators generated by the problem have also been studied. For this aim, at first the adjoint differential expression in Lagrange's sense is written and the adjoint boundary conditions are examined. Moreover, the eigenvalues and eigenfunctions of the linear differential operators and of some properties have been studied. Later, the Green's function of the boundary value problem for a linear differential equations has been obtained. By using the Green's function, the concept of the inverse operator has been given, too.

The results of the above investigated subjects are used for both solving the boundary value problem of linear differential equations when Fourier's method is applied and verifying the obtained solution.

It is known that if the eigenvalues are the higher order poles of the solution, corresponding eigenfunctions are not orthonormal and the problem of expansion of any function over these eigenfunctions is open. In this case, the application of Fourier's method is impossible instead, the residue method for the boundary value problem of a linear differential equation with constant coefficients has been investigated. The residue method can be applied when the differential operator generated by the corresponding problem is not self-adjoint.

Finally, using the residue method, some boundary value problems of the second order linear differential equations with constant coefficients have been solved.

1. GİRİŞ

Tezin ileriki kısımlarında gereken bazı temel kavramlara ve kullanacağımız formüllere kısaca değinelim.

1. Türev kavramı ve varlık koşulu

$z = x + iy$ ile kompleks değişkeni gösterelim ve $w = f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ dir.

Eğer, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ (Δx ve Δy sırasıyla z artımının reel ve imajiner kısımlarıdır) olmak üzere $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ limiti mevcutsa $w = f(z)$ fonksiyonu tanım bölgesinin herhangi bir z noktasında türeve sahiptir denir ve

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1.1)$$

ile gösterilir.

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ sırasıyla $f(z)$ fonksiyonunun reel ve imajiner kısımları, yani

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

olsun. Bu taktirde (1.1) formülü

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Genelde limit kavramına dayanarak $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ nin herhangi bir doğrultuda sıfıra yaklaştığını varsaymıştık. (1.2) ifadesini elde ederken, Δz yi sıfıra ox -ekseni boyunca yaklaştırdık. Aynı yolla Δz yi bu kez oy -ekseni boyunca sıfıra yaklaştırsak

$$f'(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (1.3)$$

olur. (1.2) ile (1.3) ü karşılaştırdığımızda

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

denklemlerinin sağlanması gerektiğini görürüz. (1.4) koşuluna Cauchy-Riemann denklemleri denir ve bu koşul $w = f(z)$ fonksiyonunun türevinin olması için gerek koşuldur.

2. Bölgede analitiklik kavramı

$w = f(z)$ fonksiyonu bir bağlantılı D bölgesinin her bir noktasında türevlenebilir (monogen) ise, bu fonksiyona D bölgesinde analitik fonksiyon veya holomorf fonksiyon denir.

Eğer tek değerli fonksiyon D bölgesinin her bir noktasında sonlu türeve sahip ise, bu fonksiyona D üzerinde analitik fonksiyon denir.

Sonlu kompleks düzlemin her noktasında analitik olan bir fonksiyona tam (entire) fonksiyon denir.

Yukarıda belirtilenlerden, analitikliğin bölgesel bir kavram olduğu fakat bu bölgenin her bir noktasında da fonksiyonun analitik olması kastedilmektedir. Dolayısıyla, fonksiyonun bir noktadaki analitikliğinden, fonksiyonun bu noktanın civarında analitik olduğu anlaşılmalıdır. Örneğin, $w = z \operatorname{Re} z$ tüm düzlemde süreklidir. $z = 0$ da türeve sahiptir ve türevi sıfırdır. Çünkü, Δz keyfi doğrultu boyunca sıfıra yaklaştığında, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Re} z$ sıfıra yaklaşır. Bu fonksiyon $z = 0$ da monogen (türevlenebilen) fonksiyondur ama bu noktada analitik değildir. Gerçekten de,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z) \operatorname{Re}(z + \Delta z) - z \operatorname{Re} z}{\Delta z} = z \frac{\Delta x}{\Delta x + i \Delta y} + x + \Delta x, \quad (z \neq 0)$$

ifadesi Δz sıfıra yaklaştığında herhangi bir limite yaklaşmaz. Yukarıda incelediğimiz fonksiyon tüm düzlemde sürekli ve hiç bir yerde ($z \neq 0$ hariç) türevi olmayan bir fonksiyon olmaktadır.

İkinci bir örnek, $w = \operatorname{Re} z$ fonksiyonu her yerde sürekli, fakat hiç bir yerde türevi olmayan bir fonksiyondur.

Buradan şunu söyleyebiliriz ki, kompleks değişkenli fonksiyonlarda türevin varlığı reel değişkenli fonksiyonlarla karşılaştırıldığında çok kuvvetli koşul olmaktadır.

Daha sonra, kompleks değişkenli fonksiyonun birinci mertebeden türevi varsa, her mertebeden türevi olduğunu göstereceğiz. Reel fonksiyonlarda ise bu geçerli değildir. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} (+\sqrt{1-x})^3, & 0 < x \leq 1 \\ (+\sqrt{x-1})^3, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu (0,2) aralığında sürekli diferansiyellenebilirdir, fakat $x=1$ noktasında ikinci mertebeden türev mevcut değildir.

3. Green Formülü

Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ sınırı Γ olan kapalı D bölgesinde sürekli ve sürekli $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ ve $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ kısmi türevlerine sahip fonksiyonlar ise

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.5)$$

gerçeklenir. (1.5) formülüne Green formülü denir.

4. Cauchy İntegral Teoremi

Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir bağlantılı D bölgesinde analitik ise, yani D nin her noktasında $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ türevine sahipse ve L , D bölgesinde yerleşen parça parça pürüzsüz eğri ise

$$\int_L f(z)dz = 0$$

dır.

5. Cauchy integrali (formülü)

D parça parça pürüzsüz Γ eğrisi ile sınırlanan bir bağlantılı bölge olsun ve $f(z)$ kapalı $\bar{D}$ bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer z , Γ nın içinde keyfi bir nokta ise, bu durumda

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.6)$$

dır. Bu formül şunu ifade etmektedir: Bir analitik fonksiyonun analitik olduğu bölgenin içerisinde her bir noktadaki değeri, sınırdaki değerleri yardımı ile hesaplanabilir.

6. Cauchy türlü integral

L herhangi bir parça parça pürüzsüz kapalı veya açık bir eğri, $\varphi(z)$ ise L üzerinde sürekli fonksiyon olsun.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.7)$$

fonksiyonu L üzerinde bulunmayan tüm z ler için sonlu tek değerli fonksiyon olmaktadır. (1.7) formülüne Cauchy türlü integral denir. Eğer L eğrisi kapalı, $\varphi(z)$ L nin içinde ve üzerinde analitik fonksiyonsa, (1.7) integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} \varphi(z), & z, L \text{ nin içinde ise,} \\ 0, & z, L \text{ nin dışınd ise} \end{cases}$$

şeklini alır.

Teorem 1. Eğer L keyfi parça parça pürüzsüz kapalı veya açık bir eğri, $\varphi(z)$ L nin üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon ise, (1.7) formülü ile tanımlanan $F(z)$ fonksiyonu bir bağlantılı D bölgesinin tüm noktalarında analitik fonksiyondur ve L nin dışındaki tüm z ler için keyfi mertebeden

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.8)$$

türevlerine sahiptir [2].

Teorem 1 gösteriyor ki, bir D bölgesinde analitik olan bir fonksiyon bu bölgede her mertebeden türevlere sahiptir ve türevler de analiktir.

7. Taylor açılımı

Teorem 2. $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 merkezli ve r yarıçaplı $|z - z_0| < r$ açık diskinde analitik olsun. Bu disk içindeki her z noktası için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (1.9)$$

açılımı vardır. Bu seri $D(z_0, r)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür [2].

(1.9) ile belirtilen kuvvet serisine f fonksiyonunun $z = z_0$ ın komşuluğundaki Taylor açılımı denir. Bu teorem bize gösteriyor ki, bir analitik fonksiyon analitik olduğu noktanın bir komşuluğunda bir kuvvet serisi ile gösterilebilir.

8. Laurent Serisi

Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse f , z_0 da bir ayırık aykırı (singüler) noktaya sahiptir denir.

Teorem 3. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayırık aykırılığı varsa, bu noktanın delinmiş bir $A = \{z \mid s_1 < |z - z_0| < s_2\}$ komşuluğunda f nin

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.10)$$

açılımı vardır. Burada,

$$\gamma = \{z \mid |z - z_0| = r, s_1 < r < s_2\}$$

olmak üzere serinin katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dır. Burada (1.10) daki kuvvet serisi f ye, A üzerinde mutlak ve bunun kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsar [2].

Teorem 3 deki (1.10) serisine f fonksiyonunun Laurent serisi ve a_n katsayılarına da Laurent katsayıları denir.

9. Ayırık aykırılıkların sınıflandırılması

Çoğu kez f fonksiyonunun Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

şeklinde yazılır. Burada $(z - z_0)$ in negatif kuvvetlerinden oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ serisine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki esas kısmı denir.

Eğer fonksiyonun z_0 noktasındaki Laurent serisinin bütün a_{-n} katsayıları sıfır ise, z_0 noktasına f nin kaldırılabilir ayırık aykırı noktası denir.

Eğer bir $m \geq 1$ tam sayısı için $a_{-m} \neq 0$ fakat $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \dots = 0$ ise, z_0 noktasına f fonksiyonunun m . mertebeden kutup yeri (veya z_0 noktasında f nin m . mertebeden kutbu vardır) denir. Bu durumda f fonksiyonunun $0 < |z - z_0| < r$ bölgesindeki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} \quad (1.11)$$

şeklinde olacaktır. Dikkat edilirse f nin z_0 noktasındaki esas kısmı sonlu sayıda terim bulundurur. Özel olarak $m = 1$ ise, z_0 noktasına f nin basit kutup yeri denir.

Eğer f fonksiyonunun z_0 noktasındaki esas kısmı sonsuz çoklukta sıfırdan farklı terim bulunduruyorsa, z_0 noktasına f nin esaslı aykırı noktası denir.

Laurent açılımındaki a_{-1} katsayısına f nin z_0 daki rezidüsü denir ve

$$a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$$

şeklinde gösterilir.

10. Kutup noktalarındaki rezidülerin hesaplanması

f fonksiyonunun z_0 noktasında m . mertebeden kutbu olsun. Bu durumda $0 < |z - z_0| < r$ bölgesinde f fonksiyonu (1.11) şeklinde Laurent serisine açılabilir ve $a_{-m} \neq 0$ dır. $z \neq z_0$ için

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + a_{-1} (z - z_0)^{m-1} + a_{-2} (z - z_0)^{m-2} + \dots + a_{-m}$$

olur.

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z), \quad z \neq z_0$$

diyelim. g fonksiyonunun $z = z_0$ noktasında kaldırılabilir aykırılığı vardır. Eğer z_0 noktasında $g(z_0) = a_{-m}$ olarak tanımlanırsa, g fonksiyonu z_0 da analitik olur. Bu durumda z_0 noktasındaki Taylor serisinin a_{-1} katsayısı

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad (1.12)$$

şeklindedir. Bu formülü şu şekilde de ifade edebiliriz. g fonksiyonu $z = z_0$ da analitik olduğundan, bu noktada her mertebeden türeve sahiptir. Buna göre

$$g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$a_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right] \quad (1.13)$$

elde edilir. Özel olarak $m = 1$ ise, yani f fonksiyonun $z = z_0$ da basit kutbu varsa,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (1.14)$$

olarak hesaplanır.

11. İki analitik fonksiyonun bölümü

g ve h fonksiyonları z_0 noktasında analitik olmak üzere

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

olsun. f fonksiyonunun z_0 noktasında bir basit kutbu var ve $g(z_0) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (1.15)$$

dır.

12. Rezidü teoremi

Şimdi ele alacağımız rezidü teoremi kompleks fonksiyonların kapalı çevreler üzerindeki integrallerinin hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlayacaktır. Ayrıca, birçok belirli reel integrallerin hesaplanmasında bu teoreme başvurulur.

Teorem 4. f fonksiyonu basit kapalı γ (pozitif yönlendirilmiş) çevresi üzerinde ve γ ile sınırlı bölge içinde bulunan sonlu sayıda $z_1, z_2, \dots, z_n$ aykırı (singüler) noktaları dışında analitik olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

dır [2].

2. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

2.1 Lineer Diferansiyel İfade ve Operatör

$C^{(n)}[a,b]$ ile herhangi bir $[a,b]$ aralığında, n . merteye de dahil olmak üzere tüm sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar uzayını gösterelim. a ve b noktalarındaki süreklilik sırasıyla sağdan ve soldan süreklilik anlamındadır. $[a,b]$ de tanımlı, sadece sürekli fonksiyonlar uzayını $C^{(0)}[a,b]$ veya kısaca $C[a,b]$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki şekilde yazılmış ifadeyi

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y \equiv \ell y \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_n(x)y = \sum_{k=0}^n p_k(x)y^{(n-k)} \quad (2.1)$$

göz önüne alalım. (2.1) ifadesindeki $p_i(x)$ fonksiyonlarının reel değişkene bağlı kompleks fonksiyonlar olduğunu varsayacağız, yani her bir fonksiyon $\varphi(x) = \varphi_*(x) + i\varphi_{**}(x)$, $i = \sqrt{-1}$ şeklinde olmaktadır. Ayrıca varsayalım ki, $p_i(x)$ fonksiyonları $n-i$, ($i=0,1,2,\dots,n$) mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $p_k(x) \in C[a,b]$, ($k = \overline{0,n}$) ve $y(x) \in C^{(n)}[a,b]$ olduğu takdirde (2.1) operatörü $[a,b]$ de tanımlı, sürekli bir fonksiyona karşılık gelir. Diğer deyimle, $f(x) \in C[a,b]$ olmak üzere

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x) \quad (2.2)$$

dır.

Eğer biz (2.2) ifadesindeki $f(x)$ fonksiyonunu bilinen bir fonksiyon olarak kabul edersek, (2) denkleminin n . mertebeden lineer diferansiyel denklem olarak bakabiliriz. Bu durumda, (2) denkleminin genel çözümünü araştıralım. Bunun için önce (2.2) ye karşılık gelen

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = 0, \quad p_0(x) \neq 0$$

homojen denklemini göz önüne alalım. Bu denklemi (2.1) ifadesini dikkate alarak açık şekilde aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} y^{(n-1)} + \dots + \frac{p_n(x)}{p_0(x)} y = 0. \quad (2.2')$$

Bu denklemin katsayıları sürekli fonksiyon olmaktadır ve Cauchy-Picard teoremine göre denklemin temel fonksiyonlar sisteminin varlığını ispatlamak mümkündür. Temel çözümler sistemi farklı yollarla elde edilebilir. Örneğin, (2.2') denklemini için aşağıdaki başlangıç koşulları

$$y_i^{(j-1)}(a) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (2.3)$$

verilerek söz konusu çözümleri elde etmek mümkündür. (2.3) ifadesinde n tane başlangıç koşulu vardır. Gerçekten de i 'yi sabit tutup, j 'yi ise 1'den n 'e kadar değiştirerek söz konusu koşulların birini elde edebiliriz. (2.2') denkleminin bu koşullar çerçevesindeki çözümleri tüm $[a, b]$ aralığında tanımlı ve tektirler. Söz konusu çözümleri $y_1, y_2, \dots, y_n$ ile gösterelim. Bu çözümlere *fundamental* (temel) çözümler sistemi denir. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi fundemantal çözümler yardımıyla (2.2') denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \quad (2.4)$$

olarak yazılır. Buna ek olarak (2.2) denkleminin genel çözümü ise

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) + y^*(x) \quad (2.5)$$

şeklindedir. Fundamental çözümler sistemi bilindiği takdirde (2.5) ifadesinde yer alan $y^*(x)$ 'i sabitin varyasyonu yöntemi ile elde etmek mümkündür.

Bizi (2.2) veya (2.2') denklemlerinin belli bir sınır koşullarını sağlayan çözümleri ilgilendirmektedir. $y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}$ ve $y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ ler $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığının uç noktalarındaki değerleri olsun ve $U_v(y)$ ile aşağıdaki lineer formu gösterelim

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{s=1}^n \{ \alpha_{\nu s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s} y^{(s-1)}(b) \}. \quad (2.6)$$

Eğer

$$U_\nu(y) = 0, \quad (\nu = \overline{1, m}) \quad (2.7)$$

gibi ifadeler verilirse, bunlara sınır koşulları denir. Burada $\alpha_{\nu s}$ ve $\beta_{\nu s}$ genelde kompleks sabitlerdir. Görüldüğü gibi, (2.7) sınır koşulları bilinmeyen fonksiyonun ve m . mertebeye kadar türevlerinin aralığın uç noktalarındaki değerlerini birbirine bağlamaktadır. Eğer herhangi bir $y(x)$ fonksiyonu (2.7) sınır koşullarının herbirini korursa, $c \cdot y(x)$ de bu koşulların herbirini korur. Ayrıca, eğer $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ bu koşulların herbirini korursa $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de korur. Nihayetinde özdeş olarak sifıra eşit olan fonksiyon da bu koşulların her birini korumaktadır. Böylelikle, (2.7) koşulunu koruyan fonksiyonlar kümesi $C^{(n)}[a, b]$ nin alt uzayını oluşturur. D ile (2.7) koşulunu koruyan tüm $y \in C^{(n)}[a, b]$ fonksiyonlar kümesini gösterelim. Açıktır ki, $D \subset C^{(n)}[a, b]$ dır ve (2.7) koşulu olmazsa $D \equiv C^{(n)}[a, b]$ dır.

$\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve D manifoldunun verildiğini varsayalım. $y \in D$ olan keyfî fonksiyona $f = \ell(y)$ yi karşılık getirelim. Bu D de tanımlı lineer operatör oluşturur. Söz konusu operatörü L ile gösterelim. Böylelikle, (2.2) lineer diferansiyel denklemi (2.7) koşulu ile birlikte L operatörünü oluşturur, yani

$$\begin{cases} \ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x), \\ U_\nu y = 0, \quad \nu = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

dır. D bölgesine L lineer diferansiyel operatörünün tanım bölgesi denir. (2.6) ifadelerinin lineer bağımsız olması doğaldır. Çünkü, sınır koşullarının herhangi biri diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, & \beta_{11}, \dots, \beta_{1n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}, & \beta_{m1}, \dots, \beta_{mn} \end{pmatrix} = m \quad (2.10)$$

olmaktadır. Açık ki, $m \leq 2n$ dir ve aynı bir diferansiyel ifade, m sayıda sınır koşulları ile birlikte ele alındığında onlar farklı lineer diferansiyel operatörler doğurabilir. Bu operatörler birbirinden tanım bölgesi ile farklılaşır. Özel durumda, eğer sınır koşulları dikkate alınmazsa en geniş tanım bölgesi olan operatör alınır. Bu durumda tanım bölgesi $C^{(n)}[a, b]$ olur. Bu anlamda en dar tanım bölgesi olan operatör $m = 2n$ olduğunda ele alınır. Bu taktirde, sınır koşullarının katsayısından oluşturulan matris $2n$ boyutlu kare matris olur ve (2.10) koşulu o matrisin determinantının sıfırdan farklı olmasına dönüşür. O halde, (2.6) sınır koşullarına,

$$y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$$

büyükliklerine göre homojen lineer cebirsel denklemler sistemi gibi bakarsak, sistemin determinantı sıfırdan farklı olduğundan onun yalnız trivial çözümü olmaktadır. Bu ise şu anlama gelir: (2.6) ifadesi $m = 2n$ olduğunda yalnız ve yalnız

$$y_a = y'_a = \dots = y_a^{(n-1)} = y_b = y'_b = \dots = y_b^{(n-1)} = 0 \quad (2.11)$$

olduğu durumda geçerlidir.

2.2 Adjoint Diferansiyel İfade

$y(x), z(x) \in C[a, b]$ keyfi iki skaler fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibi iç çarpım tanımlayalım

$$(y, z) = \int_a^b y(x) \bar{z}(x) dx. \quad (2.12)$$

Burada $\bar{z}$, z nin eşleniğini göstermektedir; yani $z(x) = z_1(x) + iz_2(x)$ ise $\bar{z}(x) = z_1(x) - iz_2(x)$ dir. (2.12) eşitliğinde tanımlanan iç çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $(y, z) = \overline{(z, y)},$
2. $(\lambda y, z) = \lambda(y, z),$

3. $(y, \lambda z) = \overline{\lambda}(y, z),$
4. $(y, \alpha z(x) + \beta q(x)) = \overline{\alpha}(y, z) + \overline{\beta}(y, q).$

Reel değerli fonksiyonlar için skaler çarpım genelde aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1. D bölgesinde tanımlı $u(x), v(x) \in D \subset R^n$ keyfi fonksiyonlarının skaler çarpımı

$$(u, v) = \int_D u(x)v(x)dx \quad (2.12')$$

dır. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ olarak tanımlanmaktadır.

Örnek 1. $\overline{D} = \{ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \}$ ve $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 2$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) 2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^1 dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

olarak hesaplanılır.

Tanım 2. D herhangi bir manifold olsun. Bu taktirde $u \in D$ elemanının $\|u\|$ ile gösterilen

normu $\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_D u^2(x)dx}$ olarak tanımlanır.

Örnek 2. $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1 \}$ ve $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ olsun. Buradan

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y dx dy} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi x dx \int_0^1 \sin^2 \pi y dy} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Fonksiyonun kendi kendine iç çarpımı

$$(y, y) = \|y\|^2 = \int_a^b |y(x)|^2 dx$$

olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 3. Eğer $(y, z) = 0$, ise y ve z fonksiyonları birbirine ortogonaldır(diktir) denir.

İç çarpım kavramını kullanarak lineer diferansiyel ifade için Lagrange anlamında adjoint diferansiyel ifadeyi açıklayalım.

Varsayalım ki, $y(x), z(x) \in C^{(n)}[a, b]$ olsun. $(\ell y, z)$ ifadesini göz önüne alalım.

Burada $\ell y = \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(n-k)}(x)$ ve $p_k(x)$ fonksiyonları $n-k$ mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Kısmi integrasyon formülünü kullanarak $(\ell y, z)$ iç çarpımını, integral altında y fonksiyonunu türev işaretinden kurtaracak şekilde dönüştürelim. Bu durumda katsayılar ve $z(x)$ fonksiyonu türev işareti altına girer, yani

$$\begin{aligned} (\ell y, z) &= \int_a^b \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(n-k)}(x) \bar{z}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x) y^{(n-k)}(x) \bar{z}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) e kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} \int_a^b p_k(x) y^{(n-k)}(x) \bar{z}(x) dx &= y^{(n-k-1)}(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right]_a^b - \int_a^b y^{(n-k-1)}(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right]' dx \\ &= \left\{ y^{(n-k-1)}(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right] \right\} \Big|_a^b - \left\{ y^{(n-k-2)}(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right]' \right\} \Big|_a^b + \left\{ y^{(n-k-3)}(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right]'' \right\} \Big|_a^b \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-k-1} \left\{ y(x) \left[p_k(x) \bar{z}(x) \right]^{(n-k-1)} \right\} \Big|_a^b + (-1)^{n-k} \int_a^b y(x) \left[\overline{p_k(x) z(x)} \right]^{(n-k)} dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki notasyonları göz önüne alalım

$$\eta = \{y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)\}$$

$$\xi = \{z(a), z'(a), \dots, z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), \dots, z^{(n-1)}(b)\}.$$

η ve ξ 'nin $2n$ boyutlu vektör uzayının elemanları olduğu açıktır. (2.14) ifadesinin sağ tarafındaki integral dışında kalan terimlerin her biri η nin belli bir koordinatı ile ξ nin belli koordinatlarının bilinen bir sayıyla çarpımından oluşmaktadır. Bu tür ifadelere bilinear fomlar denir. (2.14) ifadesini k ' ya göre 0'dan n 'e kadar toplarsak

$$(\ell y, z) = \beta(\eta, \xi) + \int_a^b y(x) \overline{\ell^*(z)} dx \quad (2.15)$$

elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} \ell^* z \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} [\overline{p_k(x)} z(x)]^{(n-k)} &= (-1)^n [\overline{p_0(x)} z(x)]^{(n)} + \\ &+ (-1)^{n-1} [\overline{p_1(x)} z(x)]^{(n-1)} + \overline{p_n(x)} z(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) nın sağ tarafındaki çarpımlarının türevlerini

$$\begin{aligned} \beta(y, z) &= y \{a_{n-1} z - (a_{n-2} z)' + \dots + (-1)^{n-1} (a_0 z)^{(n-1)}\} + \\ &+ y' \{a_{n-2} z - (a_{n-3} z)' + \dots + (-1)^{n-2} (a_0 z)^{(n-2)}\} + \dots + y^{(n-2)} \{a_1 z - (a_0 z)'\} + y^{(n-1)} a_0 z \end{aligned}$$

Leibnitz kuralı ile hesaplayıp alınan sonucu gruplaştırıp $\ell^* z$ ifadesini de ℓ lineer diferansiyel ifadesi gibi yazabiliriz. Bu yolla elde edilen ℓ^* lineer diferansiyel ifadesine, ℓ lineer difarensiyel ifadesine Lagrange anlamında adjoint lineer diferansiyel ifade denir. Açıktır ki, $(\ell^*)^* = \ell$ dir ve bu işlemin aşağıdaki özellikleri vardır:

$$(\lambda \ell)^* = \overline{\lambda} \ell^*,$$

$$(\ell_1 + \ell_2)^* = \ell_1^* + \ell_2^*.$$

Tanım 4. Eğer $\ell^* \equiv \ell$ ise ℓ^* a kendi kendine (self) adjoint operatör denir.

Teorem 5. Sonlu sayıda self adjoint diferansiyel ifadelerin toplamı da self adjointdir .

Teorem 6. Self adjoint operatörün bir keyfi sabit ile çarpımı da self adjoint operatör vermektedir.

Şimdi self adjoint olan diferansiyel ifadelerin genel yazılım formunu bulalım.

Teorem 7. Keyfi self adjoint olan diferansiyel ifade aşağıdaki gibi

$$\ell_{2\nu}(y) = (py^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad \ell_{2\nu-1}(y) = \frac{1}{2} \left[(ipy^{(\nu-1)})' + (ipy^\nu)^{(\nu-1)} \right]$$

diferansiyel ifadelerin toplamı şeklinde olmaktadır.

İspat. $\int_a^b \ell_{2\nu}(y) \bar{z} dx$ ve $\int_a^b \ell_{2\nu-1}(y) \bar{z} dx$ integrallerini göz önüne alalım. Burada $y, z \in C^{(n)}[a, b]$ dir. Her iki integrale kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} \int_a^b p_k(x) y^{(n-k)}(x) \bar{z}(x) dx &= p_k(x) \bar{z}(x) y^{(n-k-1)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b y^{(n-k-1)} [p_k(x) \bar{z}(x)]' dx = \\ &= \left\{ p_k(x) \bar{z}(x) y^{(n-k-1)}(x) \Big|_a^b - \left[y^{(n-k-2)} [p_k(x) \bar{z}(x)]' \Big|_a^b - \int_a^b y^{(n-k-2)} [p_k(x) \bar{z}(x)]'' dx \right] \right\} = \\ &= p_k(x) \bar{z}(x) y^{(n-k-1)} \Big|_a^b - y^{(n-k-2)} [p_k(x) \bar{z}(x)]' \Big|_a^b + \dots + \\ &\quad + (-1)^{k-1} y (p_{n-k} \bar{z})^{(k-1)} \Big|_a^b + (-1) \int_a^b y (p_{n-k} \bar{z})^{(k)} dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitliği k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplarsak aşağıdaki

$$\int_a^b \ell_{2\nu}(y) \bar{z} dx = P(a, b) + \int_a^b y L^*(z) dx$$

Lagrange formülünü elde ederiz. Burada $L^*(z)$ 'a $L(z)$ lineer diferansiyel ifadesine karşılık gelen Lagrange anlamda adjoint diferansiyel ifade denir, ve

$$L^*(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (p_{n-k}(x) z(x))^{n-k} y^{n-k} dx$$

olmaktadır. $P(a,b)$ ise integrallemeden sonra elde edilen ifadelerin cebirsel toplamını göstermektedir.

2.3 Adjoint Sınır Koşulları

Yukarda verilen notasyonlar çerçevesinde (2.15) aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$(\ell y, z) = \beta(\eta, \xi) + (y, \ell^* z). \quad (2.17)$$

Bildiğimiz gibi, $\beta(\eta, \xi)$ η ve ξ vektörlerine göre bilineer formdur. Bilineer formu genel şekilde aşağıdaki gibi yazmak mümkündür

$$\beta(\eta, \xi) = \sum_{k,s=1}^q a_{ks} \eta_k \overline{\xi_s}. \quad (2.18)$$

Burada a_{ks} -ler katsayılar, η_k ve ξ_s ise değişkenlerdir.

Kare formların bilineer formların özel durumu olduğu açıktır. (2.18) ifadesinin katsayılarından oluşan matrisin Δ determinantı sıfırdan farklı olduğunda ona dejenere olmayan bilineer form denir, bu durumda

$$\Delta = \det \left\{ \|a_{ks}\|_{k,s=1}^q \right\} \neq 0 \quad (2.19)$$

dır. Şimdi, (2.17) ifadesindeki $\beta(\eta, \xi)$ bilineer formunun dejenere olmadığını gösterelim. (2.14) den görüldüğü gibi, $\beta(\eta, \xi)$ formunda η ve ξ nin tüm koordinatları birlikte iştirak etmezler. Ona göre de $\beta(\eta, \xi)$ nin katsayılarından oluşturulan matris

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta(a) & 0 \\ 0 & \Delta(b) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

şeklinde özel bir matristir. Burada,

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} & & & (-1)^n p_0(x) \\ & & \ddots & \\ & & p_0(x) & \\ & \ddots & & \\ p_0(x) & & & \end{pmatrix}$$

$n \times n$ boyutlu kare matristir. (2.20) ifadesindeki matrislerin her biri $n \times n$ boyutlu matris olduğundan genelde A matrisi $2n \times 2n$ boyutlu kare matris olur ve Laplace teoremine göre

$$\det\{\|\mathbf{A}\|\} \neq 0 \quad (2.21)$$

dir. (2.21) den görüldüğü üzere, (2.17) ifadesindeki $\beta(\eta, \xi)$ bilineer formu gerçekten de dejenere olmayandır.

Yukarıda sözünü ettiğimiz sınır koşullarına geri dönelim

$$U_\nu y = \sum_{s=1}^n \left\{ \alpha_{1s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{1s} y^{(s-1)}(b) \right\}, \quad (\nu = \overline{1, m}) \quad (2.22)$$

$m < 2n$ olduğunda (2.22) ifadelerinin katsayılarından oluşturulan matrise yeni satırlar ilave ederek $2n$ boyutlu kare matrise tamamlayalım öyle ki, ele aldığımız matrisin determinanı sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde

$$\sum_{s=1}^n \{ \alpha_{\nu s} y^{(s-1)}(a) + \beta_{\nu s} y^{(s-1)}(b) \} = U_{\nu} y, \quad \nu = \overline{1, 2n} \quad (2.23)$$

dır ve

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} & \beta_{11} \dots \beta_{1n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mn} & \beta_{m1} \dots \beta_{mn} \\ \alpha_{m+1,1} \dots \alpha_{m+1,n} & \beta_{m+1,1} \dots \beta_{m+1,n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{2m,1} \dots \alpha_{2m,n} & \beta_{2m,1} \dots \beta_{2m,n} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.24)$$

olur. (2.23) sistemine η vektörünün koordinatlarına göre lineer cebirsel denklemler sistemi gibi bakılabilir. Burada $U_\nu y$ sembollerini ise, şimdilik bilinen sağ taraf gibi kabul edelim. Sistemin determinantı sıfırdan farklı olduğundan bu sistemin tek çözümü Cramer formülü ile ele alınabilir. Cramer formüllerinde her defa paydaki determinantın sağ tarafında oluşan sütuna göre ayrılışını yazarsak, nihayetinde η vektörünün her bir bulunmuş koordinatları $U_1 y, U_2 y, \dots, U_n y$ büyüklüklerine göre lineer form olarak alınır.

Şimdi, bu ele aldıklarımızı yukarıdaki (2.17) ifadesinde $\beta(\eta, \xi)$ bilineer formunda yerine yazıp ele alınan ifadeyi aşağıdaki şekilde gruplaştıralım

$$(\ell y, z) = u_1 y \overline{V_{2n} z} + u_2 y \overline{V_{2n-1} z} + \dots + u_m y \overline{V_{2n-m+1} z} + u_{m+1} y \overline{V_{2n-m} z} + \dots + u_{2n} y \overline{V_1 z} + (y, \ell^* z). \quad (2.25)$$

Göstermek mümkündür ki, $V_k z$ lerin her biri $\{z(a), z'(a), \dots, z^{(n-1)}(a)\}$ $\{z(b), z'(b), \dots, z^{(n-1)}(b)\}$ vektör koordinatlarına göre lineer homejen bir formdur. $\beta(\eta, \xi)$ dejenere olmadığından bu özellik (2.25) ifadesinde de korunacaktır.

Şimdi farzedelim ki, $y \in D(L)$ olsun. Bu $U_\nu y = 0$, ($\nu = \overline{1, m}$) anlamına gelir, yani (2.25) in sağ tarafında ilk m sayıda denklemlerde z in nasıl olacağından bağımsız olarak sıfıra dönüşür. Böylelikle, (2.25) aşağıdaki şekile indirgenir

$$(\ell y, z) = U_{m+1} y \overline{V_{2n-m} z} + \dots + U_{2n} y \overline{V_n z} + (y, \ell^* z). \quad (2.26)$$

Sonraki amaçlarımız için integralin dışında kalan tüm terimlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bundan dolayı, $z(x)$ için aşağıdaki sınır koşullarının korunduğunu varsayalım

$$V_k z = 0, \quad k = \overline{1, 2n-m}. \quad (2.27)$$

Bu durumda (2.26)

$$(Ly, z) = (y, L^* z) \quad (2.28)$$

şekli alır. (2.27) ye ve onlarla denk olan her türlü lineer sınır koşullarına (2.6) sınır koşullarına adjoint sınır koşulları denir. ℓ^* lineer diferansiyel ifadesi ve (2.27) sınır koşulunun oluşturduğu lineer diferansiyel operatöre ise, L operatörüne adjoint lineer diferansiyel operatör denir ve L^* ile ifade edilir. (2.28) eşitliğinde bulunan L^* da bu anlamdadır. L^* operatörünün $D(L^*)$ tanım bölgesi (2.27) sınır koşullarını koruyan fonksiyonların $C^{(n)}$ de oluşmuş alt uzayıdır. Adjoint sınır koşullarının oluşturulma prosesinden görüldüğü gibi, onlar yalnız (2.6) nın değil, aynı zamanda lineer diferansiyel ifadenin katsayılarına da bağımlıdır. (2.28) e bazen Green formülü de denir. Eğer (2.27) sınır koşulları ile (2.6) koşulu eşitse onlara self adjoint sınır koşulları denir. Self adjoint lineer diferansiyel ifade ve self adjoint lineer sınır koşullarının doğurduğu L operatörüne

self adjoint lineer diferansiyel operatör denir ve $L = L^*$ şeklde gösterilir. Bu halde Green formülü aşağıdaki şekli alır

$$(Ly, z) = (y, Lz). \quad (2.29)$$

2.4 Homojen Sınır Problemi

$$Ly = 0 \quad (2.30)$$

biçimdeki probleme homojen sınır problemi denir. Bu problemi açık şekilde yazarsak

$$\ell y = 0, \quad (2.31)$$

$$U_\nu y = 0, \quad \nu = \overline{1, m} \quad (2.32)$$

olmaktadır. Bu problemin trivial çözümü her zaman vardır. Ama bizi trivial olmayan çözüm ilgilendirmektedir. (2.31) i aşağıdaki şekilde yazalım

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} y^{(n-1)} + \dots + \frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)} y' + \frac{p_n(x)}{p_0(x)} y = 0. \quad (2.33)$$

(2.31) in katsayıları $[a, b]$ de sürekli fonksiyonlar olmaktadır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, bu denklemler için yazılmış başlangıç değer probleminin $[a, b]$ de tanımlı tek bir çözümü vardır. Özel durumda (2.31) in

$$y_i^{(j-1)}|_{x=a} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n} \quad (2.34)$$

başlangıç koşulu çerçevesindeki fundamental (temel) çözümlerini göz önüne alalım. (2.34) de n tane Cauchy probleminin koşulları vardır. Biz her defa i 'yi sabit tutarak j 'yi 1 'den n 'e kadar değiştirdikçe bir çözüm için lazım olan başlangıç koşulunu elde ederiz. Bu fundamental çözümler sistemini $y_1, y_2, \dots, y_n$ ile gösterelim. Bilindiği gibi (2.31) in genel çözümü

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \quad (2.35)$$

dir. Burada c_i ler keyfi sabitlerdir. Bu sabitleri öyle seçelim ki (2.35) ifadesi (2.32) yi korusun, yani (2.30) un çözümü olsun. (2.35) i (2.32) de yerine yazarsak

$$\sum_{i=1}^n c_i U_{\nu} y_i = 0, \quad (\nu = \overline{1, m}) \quad (2.36)$$

elde ederiz. Burada $U_{\nu} y_i$ ν nolu sınır koşulunun i nolu fundamental çözüme uygulamasını gösterir. Bu anlamda $U_{\nu} y_i$ yi bilinen katsayı olarak kabul edersek (2.36) yı $c_1, c_2, \dots, c_n$ bilinmeyenlerine göre lineer cebirsel denklemler sistemi olarak görmek mümkündür. Burada denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısına eşit değildir. (2.36) nın katsayılarından oluşan matrisi aşağıdaki gibi gösterelim

$$U = \begin{pmatrix} U_1 y_1 & U_1 y_2 & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & U_2 y_2 & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m y_1 & U_m y_2 & \dots & U_m y_n \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Bu matrisin rankı r , yani $\text{rank } U = r$ olsun. Cebirden bilindiği gibi (2.36) nın trivial olmayan çözümünün varlığı için gerekli ve yeterli koşul $r < n$ olmasıdır. Lineer bağımsız olmayan çözümlerin maksimal sayısı $n - r$ ye eşittir. Her defasında bu tür çözümü (2.36) dan bulup (2.35) de yerine yazsak (2.30) un uygun çözümü olur. Böylelikle (2.31) in $n - r$ sayıda lineer bağımsız çözümlerini elde ederiz. Buradaki $n - r$ ye problemin rankı da denilir. Şimdi karşılıklı adjoint problemlerin rankları arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$L^* z = 0 \quad (2.38)$$

problemine (2.30) a karşılık gelen adjoint problem adı verilir.

$$\ell^* z = 0, \quad (2.39)$$

$$V_k z = 0, \quad k = \overline{1, 2n - m} \quad (2.40)$$

problemini göz önüne alalım. $p_k(x)$ fonksiyonlarının $n - k$ mertebeden sürekli diferansiyellenebilen olduğunu varsayalım ve (2.39) un fundamental çözümler sistemini $z_1, z_2, \dots, z_n$ ile gösterelim. (2.39) un genel çözümü β_i ler keyfî sabitler olmak üzere

$$z(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i(x) \quad (2.41)$$

şeklindedir. Buradaki β_i sabitlerini elde etmek için (2.41) i (2.40) da yerine yazalım.

$$\sum_{i=1}^n \beta_i V_k z_i = 0, \quad (k = \overline{1, 2n-m}) \quad (2.42)$$

$V_k z_i$ k . sınır koşulunu i . fundamental çözüme uygulamanın sonucunu göstermektedir. (2.42) sistemi β_i lere göre lineer homojen cebirsel denklemler sistemidir. Sistemin katsayılarından oluşturulmuş matrisi

$$V = \begin{pmatrix} V_1 z_1 & \dots & V_1 z_n \\ V_2 z_1 & \dots & V_2 z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{2n-m} z_1 & \dots & V_{2n-m} z_n \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

şeklinde gösterelim. $\text{rank} V = r'$ olsun. (2.42) nin trivial olmayan çözümünün varlığı için $r' < n$ olmalıdır. Genelde (2.38) in $n-r'$ sayıda lineer bağımsız çözümleri yukarıdaki gibi elde edilir. Burada bizi r ve r' arasındaki ilişki ilgilendirmektedir. Bu ilişkiyi bulmak için yukarıdaki Green formülünü homojen (2.30) denkleminin keyfi trivial olmayan $y(t)$ çözümünde olduğu gibi, (2.39) un keyfi z_i fundamental çözümü için yazalım

$$(Ly, z_i) = u_1 y \overline{V_{2n} z_i} + \dots + u_m y \overline{V_{2n-m+1} z_i} + u_{m+1} y \overline{V_{2n-m} z_i} + \dots + u_{2n} y \overline{V_1 z_i} + (y, \ell^* z_i). \quad (2.44)$$

Buradan

$$U_{m+1} y \overline{V_{2n-m} z_i} + \dots + U_{2n} y \overline{V_1 z_i} = 0, \quad (i = \overline{1, 2n-m}) \quad (2.45)$$

elde ederiz. (2.45) e $U_{m+1} y, \dots, U_{2n} y$ büyüklüklerine göre lineer cebirsel denklem sistemi gibi bakalım. Açıktır ki, bu sistemin matrisi $\overline{V'}$ dir. Burada $\overline{V}$, V nin kompleks adjointini, $(\cdot)$ işareti ise V matrisinin transpozisini gösterir. Bilindiği gibi bu işlemler matrisin rankını değiştirmez, yani $\text{rank } \overline{V'} = r'$ olur. Belirlediğimiz bilinmeyenlere göre (2.45) in $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümlerinin varlığını biliyoruz. Buradan açıkça görülür ki, $r' \leq 2n-m-(n-r)$ olmalıdır. Başka bir deyişle

$$r' \leq n-m+r \quad (2.46)$$

olmalıdır. Yukarıdaki yaptığımız işlemlerde y ve z_i lerin rollerini değiştirirsek, (2.46) eşitsizliğinin yerine $r \leq n-(2n-m)+r'$ eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Buradan

$$r' \geq n - m + r \quad (2.47)$$

olur. (2.46) ve (2.47) den

$$r' = n - m + r \quad (2.48)$$

elde ederiz. Özel olarak, $m = n$ olduğunda $r' = r$ olur.

2.5 Lineer Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

Bilindiği gibi, sonlu uzunluğa sahip telin titreşimini veya sonlu uzunluklu çubuktaki ısı dağılımı problemlerini Fourier yöntemiyle çözerken biz esas problemi iki yardımcı probleme indiririz. Bu problemlerden birini aşağıdaki şekilde yazılmış Sturm-Luoville problemid oluşturur

$$y'' - \lambda y = 0, \quad (2.49)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{array} \right\}. \quad (2.50)$$

Burada, λ parametredir ve bizi bu problemin trivial olmayan çözümleri ilgilendirmektedir.

Tanım 5. Eğer λ nın herhangi bir değerinde (2.49),(2.50) probleminin trivial olmayan çözümü mevcutsa, λ nın bu değerine (2.49),(2.50) probleminin özdeğeri denir.

Tanım 6. (2.49),(2.50) problemindeki λ özdeğerine karşılık gelen çözüme ise özfonksiyon denir.

Eğer L ile (2.49),(2.50) probleminin oluşturduğu lineer diferansiyel operatörü gösterirsek (2.49),(2.50) problemi

$$Ly = \lambda y \quad (2.51)$$

şeklinde yazılabilir. Böyle bir problemi genel durum içinde incelemek mümkündür ve bu tür problemlerin incelenmesi kısmi türevli diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer problemlerinin çözümünde çok önem taşımaktadır. Bu nedenle aşağıdaki şekilde yazılmış daha genel problemi gözönüne alalım

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = \lambda y. \quad (2.52)$$

(2.52) yi açık şekilde yazarsak

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = \lambda y, \quad (2.53)$$

$$U_\nu y = 0, \quad (\nu = \overline{1, m}) \quad (2.54)$$

olur. Diğer bir deyimle, bir parametreye sahip (2.53) adi diferansiyel denklemi için yazılmış sınır değer probleminin incelenmesi gerekmektedir. Parametrenin her bir değerinde trivial çözüm vardır. Trivial olmayan çözümü, yani sıfırdan farklı özdeğer ve özfonksiyonların bulunmasını detaylı şekilde inceleyelim. Bu nedenle (2.53) ü

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + \dots + \frac{p_n(x)\lambda y}{p_0(x)} = 0 \quad (2.53')$$

şeklinde yazalım. (2.53') nün

$$y_i^{(j-1)} \Big|_{x=a} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (2.55)$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerinin varlığı açıktır. Bu çözümleri sırasıyla $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ ile gösterelim. (2.53') denkleminin katsayıları λ ya göre tam analitik fonksiyonlardır ve Puancare teoremine göre $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ çözümlerinin her biri λ ya göre tam analitik fonksiyonlardır. (2.53) ün genel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x, \lambda) \quad (2.56)$$

dır. (2.53),(2.54) ün çözümünü elde etmek için (2.56) ifadesi (2.54) de yerine konulursa

$$\sum_{k=1}^n c_k U_\nu y_k(\lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1, m} \quad (2.57)$$

elde edilir. Burada $U_\nu y_k(\lambda)$ ν . sınır koşulunun k . fundamental çözüme uygulanmasının sonucunu göstermektedir, yani

$$U_{\nu} y_k(\lambda) = \sum_{s=1}^n \left\{ \alpha_{ks} \frac{d^{s-1} y_k}{dx^{s-1}} \Big|_{x=a} + \beta_{ks} \frac{d^{s-1} y_k}{dx^{s-1}} \Big|_{x=b} \right\}$$

dır. $U_{\nu} y_k(\lambda)$ ların herbiri tam analitik fonksiyon olmaktadır. (2.57) sistemi c_k lara göre lineer homojen cebirsel denklemler sistemi oluşturur. Bilinmeyenlerin sayısı denklemlerin sayısı ile aynı değildir. (2.57) nin katsayılarından oluşan matrisi aşağıdaki şekilde gösterelim

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} U_1 y_1(\lambda) & \dots & U_1 y_n(\lambda) \\ U_2 y_1(\lambda) & \dots & U_2 y_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_m y_1(\lambda) & \dots & U_m y_n(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

$\text{rank} U(\lambda) = r$ olsun. (2.57) nin trivial olmayan çözümlerinin varlığı için

$$r < n \quad (2.59)$$

olmalıdır. Ayrı ayrı durumları inceleyelim.

I. $m < n$ olsun. Bu durumda λ nın herhangi bir değerinde mutlaka $r < n$ olur, yani (2.57) sisteminin trivial olmayan çözümü her zaman vardır. Bu çözümü (2.56) da yerine yazıp (2.52) ve (2.53) ün trivial olmayan çözümünü elde edebiliriz. Diğer deyimle, bu durumda λ nın her bir değeri L operatörünün özdeğeri olmaktadır.

II. $m = n$ olsun. Bu durumda $U(\lambda)$ matrisi $n \times n$ boyutlu kare matris olmaktadır. (2.59) koşulu söz konusu matrisin determinantının sıfıra eşit olmasına neden olur, yani

$$\det U(\lambda) = 0 \quad (2.60)$$

olur. $\det U(\lambda)$ nın kendisi de λ ya göre tam analitik fonksiyon olmaktadır ve burada çeşitli durumlar olabilir:

$II_1 \quad \Delta(\lambda) \equiv 0$ olsun.

$$\Delta(\lambda) = \det U(\lambda). \quad (2.61)$$

Bu durumda açıktır ki, yine de λ nın her bir değeri L operatorünün özdeğerleri olmaktadır.

$II_2 \quad \Delta(\lambda) \neq 0$ olsun. Bu durumda (2.59) un ayrı ayrı sıfırları olabilir. Daha net bir şekilde ifade edersek bilindiği gibi tam analitik fonksiyon özdeş olarak sıfıra eşit değilse onun en fazla sayılabilir sayıda sıfırları olabilir. Bu sıfırlar dizisi kompleks düzlemin hiç bir sonlu

kısmında limit noktasına sahip olamaz. Bu durumda söz konusu sıfırları onların modüllerinin artma sırasına göre aşağıdaki şekilde dizelim

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| < \dots \quad (2.62)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$ noktalarından herhangi birini (2.57) de yerine yazarsak alınan sistemin determinatı sıfıra eşit olur ve bundan dolayı sistemin trivial olmayan çözümü bulunur. Bu çözümü (2.56) da yerine yazarak uygun özfonksiyonu da elde edebiliriz.

III. $m > n$ olsun. Bu durumda (2.58) matrisi yine de dikdörtgen şeklinde bir matrise dönüşür. (2.59) u göz önüne alalım. λ nın özdeğer olması için U matrisinden oluşturulan mümkün olabilen tüm $n \times n$ boyutlu determinantlar sıfıra eşit olmalıdır. Burada da iki durum olabilir:

III_1 $U(\lambda)$ matrisinden bilinen yolla düzeltilmiş tüm $n \times n$ boyutlu determinantlar özdeş olarak sıfıra eşit olur. Bu durumda yine de λ nın herhangi bir kompleks değeri L operatörünün özdeğeri olur.

III_2 $U(\lambda)$ matrisinin $n \times n$ determinantlarının içerisinde hiç olmazsa bir tane sıfıra özdeş olmayanı vardır. Açıktır ki, özdeğerler söz konusu determinantın sıfırları içerisinde olabilir. Ayrıca da bu sıfırların her birisi geride kalan tüm $n \times n$ determinantların sıfırı (yani özdeğerleri) olmalıdır. Eğer herhangi bir λ_k bu tür seçilmiş bir determinantın sıfırı oluyorsa, onu (2.57) nin uygun denklemler grubunda yerine yazdığımızda aldığımız sistemin determinatı sıfıra eşit olur. Buradan c_k ları trivial olmayan şekilde elde edebiliriz. Ele aldığımız sistemin diğer denklemleri de korunur, çünkü λ_k da diğer $n \times n$ determinantın her birini sıfıra dönüştürür. Açıktır ki, bu durumda da L operatörünün sayılabilir sayıda özdeğerleri vardır ve bunlar da kompleks düzlemin sonlu kısmında limite sahip olamaz.

2.6 Adjoint Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişki

Aşağıdaki gibi özdeğer problemini ele alalım

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = \lambda y, \quad (2.64)$$

$$\ell\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = \lambda y, \quad (2.65)$$

$$U_\nu y = 0, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (2.66)$$

Eğer λ_0 herhangi bir özdeğer ise ona karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların maksimal sayısı n den büyük olamaz; çünkü, $\lambda = \lambda_0$ da iki adi diferansiyel denklem n mertebeli bir denkleme dönüşür ve onun lineer bağımsız çözümlerinin sayısı n den büyük değildir. Eğer, aynı bir λ_0 özdeğerine karşı iki tane $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ özfonksiyonları karşılık geliyorsa onların $\alpha\varphi_0(x) + \beta\varphi_1(x)$ gibi keyfi trivial olmayan lineer kombinasyonu da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olmaktadır. Gerçekten de,

$$L\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0, \quad L\varphi_1 = \lambda_0\varphi_1,$$

$$L(\alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1) = \alpha L\varphi_0 + \beta L\varphi_1 = \alpha\lambda_0\varphi_0 + \beta\lambda_0\varphi_1 = \lambda_0(\alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1),$$

$$L(\alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1) = \lambda_0(\alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1).$$

dır. Burada özfonksiyonların sayısını ikiden fazla olarak da ele alabiliriz. Lakin keyfi sabit λ_0 özdeğeri için lineer bağımsız olmaları koşulu korunduğunda, onların sayısı n den fazla olamaz.

Adjoint lineer diferansiyel operatörlerin özdeğerleri hakkındaki

$$L^*\left(x, \frac{d}{dx}\right)z = \xi z, \quad (2.65)$$

$$\ell^*\left(x, \frac{d}{dx}\right)z = \xi z, \quad (2.66)$$

$$V_s z = 0, \quad (s = \overline{1, n}) \quad (2.67)$$

problemini inceleyelim. Biz yukarıdaki bölümlerde adjoint homojen sınır probleminin rankları arasındaki ilişki formülünü $r' = n - m + r$ olarak bulmuştuk. İncelediğimiz bu durumda $r' = r$ oluyor ve buradan da aşağıdaki özelliğin doğru olması ortaya çıkıyor.

I. $n = m$ olduğu durumda λ_0 , L operatörünün ν defa katlı özdeğeri ise L^* dan bulunan $\overline{\lambda_0}$ de hemen ν mertebeden katlı özdeğer olmaktadır. Gerçekten de (2.64) de $\lambda = \lambda_0$, (2.65) de

ise $\xi = \overline{\lambda_0}$ yı yerine yazarsak yukarıdaki anlamda karşılıklı adjoint homojen problemler alınır. (2.64) probleminin $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümleri olabilir. (2.65) in ise $n-r' = n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümleri olabilmektedir.

II. Eğer λ_0 L operatörünün özdeğeri, φ_0 ise ona karşılık gelen özfonksiyon, ξ_0 L^* in özdeğeri, ψ_0 ona karşılık gelen özfonksiyon ve $\lambda_0 \neq \overline{\xi_0}$ ise, φ_0 ile ψ_0 arasında

$$(\varphi_0, \psi_0) = 0 \quad (2.68)$$

bağıntısı gerçeklenir. Gerçekten de,

$$(L\varphi_0, \psi_0) = (\varphi_0, L^*\psi_0),$$

$$(\lambda_0\varphi_0, \psi_0) = (\varphi_0, \xi_0\psi_0),$$

$$\lambda_0(\varphi_0, \psi_0) = \overline{\xi_0}(\varphi_0, \psi_0),$$

$$(\lambda_0 - \overline{\xi_0})(\varphi_0, \psi_0) = 0 \Rightarrow (\varphi_0, \psi_0) = 0$$

olduğu görülür.

III. Self adjoint lineer diferansiyel operatörün tüm özdeğerleri reeldir.

Bunu göstermek için $L = L^*$ olduğunu varsayalım. Bu, $\ell = \ell^*$ ve uygun sınır koşulları da self adjoint demektir. Varsayalım ki, λ_0 L nin özdeğeri, φ_0 ona karşılık gelen öz fonksiyondur, yani $L\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$ dır. Green formulüne göre

$$(L\varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, L\varphi_0), \quad L = L^*$$

olduğunda

$$(L\varphi_0, \varphi_0) = \overline{(\varphi_0, L\varphi_0)},$$

veya

$$(L\varphi_0, \varphi_0) = (\lambda_0\varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0(\varphi_0, \varphi_0) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{(L\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}$$

yazabiliriz. Böylelikle gerçekten de λ_0 sayısı reeldir.

Bu ve bundan önceki özelliklerden şunu söyleyebiliriz ki, self adjoint lineer diferansiyel operatörlerin farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları birbirine

ortogonaldır (diktir). Gerçekten de, bu durumda yukarda söylediğimiz $\lambda_0 \neq \overline{\xi_0}$ koşulu $\lambda_0 \neq \xi_0$ şekline dönüşür ve böylece $\varphi_0(x)$ ve $\psi_0(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de L operatörünün özfonksiyonları olur. Bildiğimiz gibi, aynı bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların maksimal sayısı n den fazla değildir. Eğer, bir özdeğere birkaç tane lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelirse onları da kendi aralarında ortonormalleştirmek mümkündür. Daha net olarak söylersek, söz konusu özfonksiyonun aynı kaide ile lineer kombinasyonlarını oluşturmak mümkündür ki, onlar kendi aralarında çift çift ortogonal olsunlar. λ_0 sayısına, mesala $\varphi_{01}(x), \varphi_{02}(x), \dots, \varphi_{0k}(x)$, ($k \leq n$) özfonksiyonları karşılık gelirse, bunların öyle $\psi_{01}(x), \psi_{02}(x), \dots, \psi_{0k}(x)$, ($k \leq n$) lineer kombinasyonu vardır ki,

$$(\psi_{0i}, \varphi_{0j}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olarak ele alınabilir.

Böylelikle eğer $L = L^*$ ise yani L self adjoint lineer diferansiyel operator ise onun en çoğu sayılabilir sayıda özdeğerleri vardır ve bu özdeğerlerin hepsi reeldir. Ayrıca da bunlar sayı ekseninin hiçbir sonlu kısmında yakınsaklığa, yani sonlu limit noktasına sahip değildir. Yukarıda denilenleri dikkate alarak özdeğerleri ve onlara karşılık gelen özfonksiyonları aşağıdaki şekilde sıralamak mümkündür

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \quad (2.69)$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_m(x) \dots \quad (2.70)$$

(2.69) dizisindeki eşitlik işareti, bir özdeğere karşılık gelen özfonksiyonların sayısının özdeğerin katlılık derecesi kadar olması nedeniyle kullanılmıştır.

2.7 Adi Lineer Diferansiyel Operatörün Green Fonksiyonu, Ters Operatorün Kurulması

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$Ly = f(x), \quad (2.71)$$

veya

$$\ell y = f(x), \quad (2.72)$$

$$U_\nu y = 0, \quad (\nu = \overline{1, n}). \quad (2.73)$$

(2.72) ye karşılık gelen homojen denklemi yazalım

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (2.74)$$

Burada $p_0(x) \neq 0$ ve $p_i(x) \in C$, $(i = 0, \dots, n)$ dir. (2.72) nin fundamental çözümler sistemini $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ diye gösterelim. Diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, (2.72) denkleminin genel çözümü

$$y = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \quad (2.75)$$

şeklindedir. Burada c_i ler sabitler olmaktadır. Sabitin varyasyonu yöntemini kullanarak (2.71) in genel çözümünü aşağıdaki gibi arayalım

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x). \quad (2.76)$$

Burada, $c_k(x)$ ler şimdilik bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu bilinmeyen fonksiyonları öyle seçelim ki, (2.76) ile tanımlanan $y(x)$ ifadesi (2.71) in de genel çözümü olsun. (2.76) ifadesinin birinci türevini alalım

$$y'(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k'(x) + \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k(x)$$

ve $c_k(x)$ leri öyle seçelim ki,

$$\sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k(x) = 0 \quad (2.77_1)$$

eşitliği korunsun. (2.77₁) i dikkate alarak ikinci türevi

$$y''(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k''(x) + \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k'(x)$$

olarak buluruz ve burada

$$\sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k'(x) = 0 \quad (2.77_2)$$

eşitliğinin korunduğunu varsayalım. Bu işlemleri $(n-1)$ defa yaparsak

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x)$$

ve

$$\sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0 \quad (2.77_{n-1})$$

elde ederiz. Bunları dikkate alarak

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n)}(x) \quad (2.78)$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz türevleri (2.72) de yerine yazdıktan sonra bazı işlemleri yaparak

$$\sum_{k=1}^n c_k(x) y_k + p_0(x) \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x) \quad (2.79)$$

alırız. (2.79) u $(2.77_1, \dots, 2.77_{n-1})$ ile birlikte yazarsak c_k' bilinmeyenlerini elde etmek için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini elde ederiz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Söz konusu cebirsel denklemler sisteminin determinantı fundamental çözümlerden oluşturulmuş

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Wronski determinanı olmaktadır. (2.80) cebirsel denklemler sisteminin çözümünü Cramer yöntemi ile

$$c_k'(x) = \frac{w_{nk}(x)}{w(x)} \frac{f(x)}{p_0(x)}, \quad k = \overline{1, n} \quad (2.81)$$

şeklinde elde etmek mümkündür. Burada w_{nk} determinanı $w(x)$ in uygun elemanının cebirsel tümleyicisidir. (2.81) i önce a 'dan x 'e kadar integrallersek

$$c_k(x) = c_{k_1} + \int_a^x \frac{w_{nk}(\xi)}{w(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \quad (2.82)$$

elde ederiz. (2.82) yi (2.76) da yerine yazarsak

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) + \sum_{k=1}^n y_k(x) \int_a^x \frac{w_{nk}(\xi)}{w(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \quad (2.83)$$

olur. Bu kez (2.81) ifadesini b 'den x 'e kadar integrallersek, $y(x)$ çözümü için

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_{k_2} y_k(x) + \sum_{k=1}^n y_k(x) \int_b^x \frac{w_{nk}(\xi)}{w(\xi) p_0(\xi)} d\xi \quad (2.84)$$

bulunur. (2.83) ve (2.84) ifadelerini toplayıp ikiye böler ve aşağıdaki notasyonları içerirsek

$$c_k = \frac{c_{k_1} + c_{k_2}}{2},$$

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^n y_k(x) w_{nk}(\xi)}{2w(\xi) p_0(\xi)}, & a \leq \xi \leq x \leq b \\ -\frac{\sum_{k=1}^n y_k(x) w_{nk}(\xi)}{2w(\xi) p_0(\xi)}, & a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} \quad (2.85)$$

bu notasyonlar çerçevesinde (2.71) in genel çözümünü

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) + \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.86)$$

şeklinde elde ederiz. Görüldüğü gibi, (2.71) in genel çözümü uygun homojen denklemin genel çözümü ile kendinin bir özel çözümünün toplamı şeklindedir. Söz konusu özel çözüm (2.86) ifadesindeki ikinci integraldir. (2.85) ile tanımlanan $g(x, \xi)$ fonksiyonuna (2.71) denkleminin Cauchy fonksiyonu da denir. Bu fonksiyonun aşağıdaki özellikleri vardır:

1⁰. $[a, \xi]$ ve $(\xi, b]$ yarı aralıklarının her birinde x 'e göre homojen (2.72) denklemini korur. (2.85) den görüldüğü gibi bu yarı aralıkların herbirinde $g(x, \xi)$ fonksiyonu $y_k(x)$ fundamental çözümlerinin belirli lineer kombinasyonu şeklindedir ve buradan da birinci özellik ispatlanmış olur.

2⁰. $g(x, \xi)$ nin x 'e göre $(n-2)$. mertebeye kadar türevleri $[a, b]$ aralığında mevcuttur ve sürekli fonksiyonlardır. Şu var ki, yalnız $x = \xi$ noktasında kontrole ihtiyaç duyulmaktadır. Gerçekten de, (2.85) ifadesinde $x = \xi$ ye sağdan ve soldan yaklaşarak limite geçsek her

defasında payda $\sum_{k=1}^n y_k'(\xi) w_{nk}(\xi)$ alınır. Bu ise Wronski determinantı $w(\xi)$ de birinci satır

elemanlarının sonuncu satırın uygun elemanlarının cebirsel tümleyicilerine çarpımı demektir ve sıfıra eşittir. Şimdi (2.85) in her iki tarafından x 'e göre türev alalım bu türevler sağ tarafta $y(x)$ ler olarak karşımıza çıkar. Şimdi bu iki tarafta $x = \xi$ ye uygun kaideye

yaklaşmayla limite geçsek, bu defa paydada $\sum_{k=1}^n y_k'(\xi) w_{nk}(\xi)$ şeklinde bir toplam

karşımıza çıkar. Buradaki $w(\xi)$ de ikinci satır elmanlarının sonuncu satır elemanlarının cebirsel tümleyicilerinin çarpımının toplamı olduğundan sıfıra eşittir. Bu işlemleri $(n-2)$. mertebeden türeve kadar devam ettirebiliriz ve her defa sağ ve sol limitlerin değerlerini sıfır olarak ele alırız.

3⁰. $g(x, \xi)$ fonksiyonunun x 'e göre $(n-1)$. mertebeden türevi $x = \xi$ noktasında aşağıdaki süreksizliğe sahiptir

$$\left. \frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Gerçekten de (2.85) in sağ tarafında x 'e göre $(n-1)$. mertebeden türev alsak bu türev işareti $y_k(x)$ in üzerinde meydana çıkar. Sonda ise x 'i $x = \xi$ ye sağdan ve soldan

yakınlaştırmakla limite geçsek her iki ifadede $y^{(n-1)}(\xi)$ meydana gelir ve her iki paydadaki ifade sadece olarak $w(\xi)$ determinantının sonuncu satır elemanlarına göre açılışını verir. Pay ve paydada aynı $w(\xi)$ bulunduğundan solda birinci ifade $\frac{1}{p_0(\xi)}$ ikincisi ise $-\frac{1}{2p_0(\xi)}$ şekline dönüşür. Bunların farkı $\frac{1}{p_0(\xi)}$ olur.

(2.71) sınır değer probleminin çözümünü elde etmek için c_k sabitlerini öyle seçelim ki, (2.73) sınır koşullarının hepsi korunsun. Bilindiği gibi, (2.73) de bilinmeyen fonksiyonun en fazla $(n-1)$. mertebeye kadar türevleri iştirak eder ve yukardaki 2 ve 3. özelliklere göre sınır koşulundaki operatörlerini direkt olarak (2.86) integralinin altına x 'e göre $g(x, \xi)$ ye uygulama mümkündür. Böylelikle, (2.86) yı (2.73) de yerine yazarsak

$$\sum_{k=1}^n c_k U_\nu y_k = - \int_a^b U_\nu(x) g(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (\nu = \overline{1, n}) \quad (2.87)$$

elde ederiz. Burada, $U_\nu(x)g$ ile sınır koşulu operatörünün g fonksiyonuna x değişkenine göre uygulandığı gösterilmektedir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1 y_1 & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n y_1 & \dots & U_n y_n \end{vmatrix} \quad (2.88)$$

determinantını göz önüne alalım ve varsayalım ki,

$$\Delta \neq 0 \quad (2.89)$$

olsun. Bu koşullar çerçevesinde (2.87) nin tek bir çözümü vardır ve bu çözümler Cramer yöntemiyle aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$c_k = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} U_1 y_1 & U_1 y_2 & \dots & U_1 y_{k-1} \int_a^b U_{1x} g(x, \xi) f(\xi) d\xi & U_1 y_{k+1} & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & U_2 y_2 & \dots & U_2 y_{k-1} \int_a^b U_{2x} g(x, \xi) f(\xi) d\xi & U_2 y_{k+1} & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n y_1 & U_n y_2 & \dots & U_n y_{k-1} \int_a^b U_{nx} g(x, \xi) f(\xi) d\xi & U_n y_{k+1} & \dots & U_n y_n \end{vmatrix}.$$

Δ nın başka sütunlarında ξ ye bağımlılık olmadığına göre c_k ları

$$c_k = -\frac{1}{\Delta} \int_a^b \begin{vmatrix} U_1 y_1 & \dots & U_1 y_{k-1} U_{1x} g & U_1 y_{k+1} & \dots & U_1 y_n \\ U_2 y_1 & \dots & U_2 y_{k-1} U_{2x} g & U_2 y_{k+1} & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n y_1 & \dots & U_n y_{k-1} U_{nx} g & U_n y_{k+1} & \dots & U_n y_n \end{vmatrix} f(\xi) d\xi$$

şekilde de yazabiliriz. c_k ların bu değerini (2.86) da yerine yazıp bazı basit işlemlerden sonra (2.71) denkleminin çözümünü

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.90)$$

şekilde elde ederiz. Burada

$$G(x, \xi) = H(x, \xi) / \Delta \quad (2.91)$$

$$H(x, \xi) = \begin{vmatrix} g(x, \xi) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ U_{1x} g & U_1 y_1 & \dots & U_n y_n \\ U_{2x} g & U_2 y_1 & \dots & U_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{nx} g & U_n y_1 & \dots & U_n y_n \end{vmatrix} \quad (2.92)$$

olmaktadır. Göstermek mümkündür ki, (2.89) ifadesi (2.72) denklemini ve (2.73) sınır koşulunu korumaktadır. Bu ifadenin denklemi koruması (2.86) dan gözükmektedir. Çünkü, (2.86) daki birinci kısım (2.72) ye uygun homojen denklemi korur. İkinci terim veya ikinci toplanan ise (2.72) yi korumaktadır. Sınır koşullarına gelince, onların her bir operatörünü (2.89) un altında $G(x, \xi)$ ye uygulamak mümkündür. Çünkü, $G(x, \xi)$ yi

$$G(x, \xi) = g(x, \xi) + G_1(x, \xi) \quad (2.93)$$

şeklinde yazabiliriz; burada $G_1(x, \xi)$ n . meretebeye kadar aralığın tüm noktalarında sürekli türevlenebilirdir. $g(x, \xi)$ nin ise, $(n-1)$. mertebeden türevinin birinci tür süreksizlik noktası vardır. Sınır koşullarında ise en çoğu $(n-1)$ e kadar olan türevler iştirak eder.

$$U_\nu G = 0, (\nu = \overline{1, n}) \quad (2.94)$$

olduğu ise (2.90) dan direkt olarak gözükmektedir. Gerçekten de, $U_\nu G = \frac{U_\nu H}{\Delta}$, $H(x, \xi)$ determinantının ancak birinci satırında x 'e bağımlılık var ve bundan dolayı sınır koşulundaki operatörleri doğrudan bu satırın elemanlarına uygulayabiliriz. U_ν sınır koşulu operatörünü $H(x, \xi)$ nin birinci satır elemanlarına uyguladıktan sonra ele aldığımız $(n+1)$ ölçülü determinantın birinci satırı her defa sonraki satırlardan biri ile aynı olacak ve bu nedenle de sifıra eşit olacaktır. Dolayısıyla (2.94) eşitliğinin korunduğu aşıkardır.

$G(x, \xi)$ fonksiyonu L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonudur ve bu fonksiyonun tek olarak varlığı için yeterli ve gerekli koşul (2.89) koşuludur. (2.93) ü dikkate alarak $G(x, \xi)$ nin aşağıdaki önemli özelliklerini gösterelim.

1⁰. $[a, \xi]$ ve $(\xi, b]$ yarı aralıklarının her birinde $G(x, \xi)$ x 'e göre homojen (2) denklemini korur, yani $\ell G = 0$ dır.

2⁰. $G(x, \xi)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında x 'e göre $(n-2)$. mertebeye kadar türevleri mevcuttur ve sürekli fonksiyonlardır.

3⁰. $G(x, \xi)$ fonksiyonunun x 'e göre $(n-1)$. mertebeden türevi $x = \xi$ noktasında aşağıdaki süreksizliğe sahiptir

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

4⁰. $G(x, \xi)$ x 'e göre (2.73) sınır koşullarının her birini korumaktadır.

1⁰ - 4⁰ özelliklerini, Green fonksiyonunun tanımı olarak kabul etmek de mümkündür ve $\Delta(\lambda) \neq 0$ olduğunda Green fonksiyonu bu özelliklere göre kurulabilir.

2.8 Özdeğer Probleminin İntegral Denkleme İndirgenmesi

Aşağıdaki problemi

$$Ly = \lambda y \tag{2.95}$$

göz önüne alalım. Varsayalım ki, L lineer diferansiyel operatörünün $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu mevcuttur ve bu durumda da L operatörünün tersi olan L^{-1} de tek olarak mevcut olmaktadır. Bu çekirdeği $G(x, \xi)$ olan integral operatördür, yani

$$Ly = f(x) \quad (2.96)$$

ise

$$y = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.97)$$

dır. Dolayısıyla $L^{-1}Ly = L^{-1}f$ veya

$$y = L^{-1}f \quad (2.98)$$

dır. Şimdi (2.95) in her iki tarafına L^{-1} operatörünü uygularsak $y = L^{-1}\lambda y$ veya

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (2.99)$$

elde ederiz. Bu ise $y(x)$ fonksiyonuna göre ikinci tür homojen Fredholm türlü integral denklem olmaktadır. Bilindiği gibi λ nın tüm değerlerinde (2.99) denkleminin trivial çözümü vardır. Lakin bizi trivial olmayan çözümleri ilgilendirmektedir.

Eğer λ nın verilmiş herhangi bir değerinde (2.99) un trivial olmayan çözümü varsa λ nın bu değerine $G(x, \xi)$ fonksiyonunun özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen çözüme ise özfonksiyon denir.

Böylelikle Green fonksiyonu bilindiği durumda lineer diferansiyel operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması uygun Fredholm türlü integral denklemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması problemine indirgenilir.

Daha genel olarak

$$Ly = \lambda y + f(x) \quad (2.100)$$

durumunu göz önüne alalım. Bu problem ise, homojen olmayan aşağıdaki gibi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + F(x) \quad (2.101)$$

Fredholm türlü integral denkleme indirgenir. Burada F

$$F(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.102)$$

dır. (2.101), ikinci tür homojen olmayan lineer Fredholm türlü integral denklem olmaktadır.

3. SABİT KATSAYILI ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN REZİDÜ YÖNTEMİ

3.1 Homojen Denklemler

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y = 0 \quad (3.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada a_i ($i = \overline{1, n}$) ler sabitlerdir. (3.1) denkleminin karşılık gelen karakteristik denklem

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3.2)$$

olmaktadır. Varsayalım ki, (3.2) denkleminin λ_i ($i = \overline{1, p}$) sayıda birbirinden farklı çözümleri vardır. n_i ile λ_i kökünün tekrarlanma derecesini gösterelim. Açıktır ki, $\sum n_i = n$ dir. Bu taktirde, (3.1) denkleminin özel çözümleri

$$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{n_i-1} e^{\lambda_i x}$$

($i = \overline{1, p}$) olur. O halde genel çözüm

$$y(x) = \sum_{i=1}^p (c_1^{(i)} + c_2^{(i)} x + \dots + c_{n_i}^{(i)} x^{n_i-1}) e^{\lambda_i x} \quad (3.3)$$

dır. Burada, $c_k^{(i)}$, ($k = 1, \dots, n_i$), ($i = \overline{1, p}$) lar keyfi sabitlerdir.

Şimdi aşağıdaki fonksiyonu gözönüne alalım

$$\frac{1}{F(\lambda)} e^{\lambda x} \varphi(\lambda).$$

Burada $\varphi(\lambda)$, $F(\lambda)$ fonksiyonu ile ortak sıfırlara sahip olmayan herhangi bir tam fonksiyon olsun. Cauchy' e göre

$$y(x) = \text{Res} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} \quad (3.4)$$

(3.1) denkleminin genel çözümü olur. (3.4) deki rezidü kısaltması ile $\text{Res} \equiv \sum_{\lambda_v} \text{Res}_{\lambda_v}$ kastedilmektedir. Buradaki rezidüler λ_i kutup noktalarının her birine göre hesaplanmaktadır. Gerçekten de, (3.4) ifadesi (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F\left(\frac{d}{dx}\right)y &\equiv \text{Res} \frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \lambda^n + a_1 \text{Res} \frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \text{Res} \frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \lambda + a_n \text{Res} \frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \\ &= \text{Res} \frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} [\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = \text{Res} \varphi(\lambda) e^{\lambda x} \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(\lambda)$ tam fonksiyon olduğu için eşitliğin son kısmındaki ifadenin rezidüsü sıfıra eşit olur, yani (3.4) ifadesi (3.1) denklemini korumaktadır. Göstermek gerekir ki, $y(x) = \text{Res}_{\lambda_v} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)}$ fonksiyonu (3.1) denkleminin fundamental çözümlerinin lineer kombinasyonu olmaktadır.

Varsayalım ki, λ_i $F(\lambda)$ fonksiyonunun n_i dereceden kökü olsun. Bu taktirde $F_i(\lambda_i) \neq 0$ olmak üzere $F(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} F_i(\lambda_i)$ şeklindedir. $\psi_i(\lambda)$ notasyonu ile

$$\psi_i(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{F_i(\lambda)}$$

yı gösterirsek, bu taktirde

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda_v} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} &= \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{n_i-1}}{d\lambda^{n_i-1}} \left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} \right] \\ &= \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{n_i-1}}{d\lambda^{n_i-1}} \left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i} F_i(\lambda)} \right] \\ &= \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{n_i-1}}{d\lambda^{n_i-1}} \left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i} e^{\lambda x} \psi_i(\lambda) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \left\{ x^{n_i-1} e^{\lambda x} \psi_i(\lambda) + (n_i - 1) x^{n_i-2} e^{\lambda x} \psi_i'(\lambda) + \dots + e^{\lambda x} \psi_i^{(n_i-1)}(\lambda) \right\} \\
&= \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \left\{ x^{n_i-1} \psi_i(\lambda) + (n_i - 1) x^{n_i-2} \psi_i'(\lambda) + \dots + \psi_i^{(n_i-1)}(\lambda) \right\} e^{\lambda x} \\
&= \frac{1}{(n_i - 1)!} \left\{ x^{n_i-1} \psi_i(\lambda_i) + (n_i - 1) x^{n_i-2} \psi_i'(\lambda_i) + \dots + \psi_i^{(n_i-1)}(\lambda_i) \right\} e^{\lambda_i x}
\end{aligned}$$

olur. $\psi_i(\lambda)$ keyfî tam fonksiyon olduğundan $\psi_i(\lambda)$ nin türevleri $\lambda = \lambda_i$ noktalarında sabite eşit olur. Böylelikle, tam rezidü şeklinde ifade edilen fonksiyon (3.1) denkleminin genel çözümünü verir, yani

$$y = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(n_i - 1)!} \left\{ x^{n_i-1} \psi_i(\lambda_i) + (n_i - 1) x^{n_i-2} \psi_i'(\lambda_i) + \dots + \psi_i^{(n_i-1)}(\lambda_i) \right\} e^{\lambda_i x} \quad (3.5)$$

genel çözüm olmaktadır.

3.2 Homojen Olmayan Denklemler

Şimdi,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y = f(x) \quad (3.6)$$

denklemini gözönüne alalım. (3.6) denkleminin çözümünü

$$y(x) = \text{Res} \frac{e^{\lambda x} \psi(\lambda, x)}{F(\lambda)}$$

şeklinde arayalım. Sabitin varyasyonu metodunda olduğu gibi $y'(x)$ birinci türevini

$$y' = \text{Res} \lambda e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)}$$

şeklinde buluruz. $\psi(\lambda, x)$ yi öyle seçelim ki,

$$\text{Res} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)} = 0$$

olsun. İkinci mertebeden türevin

$$y'' = \text{Res } \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)}$$

ifadesini gözönüne alarak, ikinci koşulu

$$\text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)} = 0$$

olarak alalım. Bu işlemleri $(n-1)$ defa devam ettirdiğimizde, $(n-1)$. koşul,

$$\text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda^k}{F(\lambda)} = 0 \quad (3.7)$$

olur ve n . mertebeden türev ise

$$y^{(n)} = \text{Res } \lambda^n e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res } \lambda^{n-1} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)}$$

şeklinde olmaktadır. Bu ifadeleri (3.6) da yerine yazarsak

$$\text{Res } F(\lambda) \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} e^{\lambda x} + \text{Res } \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{e^{\lambda x} \lambda^{n-1}}{F(\lambda)} = f(x) \quad (3.8)$$

alırız.

$$\text{Res } F(\lambda) \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} e^{\lambda x} = \text{Res } \psi(\lambda, x) e^{\lambda x} = 0$$

olduğundan

$$\text{Res } \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{e^{\lambda x} \lambda^{n-1}}{F(\lambda)} = f(x)$$

olarak elde ederiz. Böylelikle, (3.7) ve (3.8) denklemleri korunacak şekilde bir $\psi(\lambda, x)$ fonksiyonu bulmak gerekir. Son eşitliği koruyan bu $\psi(\lambda, x)$ yi öyle seçelim ki,

$$e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} = f(x)$$

olsun ve buradan

$$\psi(\lambda, x) = \varphi(\lambda) + \int_a^x e^{-\xi} f(\xi) d\xi$$

dır. Burada $\varphi(\lambda)$, $F(\lambda)$ ile ortak sıfırlara sahip olmayan keyfi ve λ ya göre tam fonksiyon olmaktadır.

Böylelikle (3.6) denkleminin genel çözümü

$$y = \text{Res } e^{\lambda x} \frac{\varphi(\lambda)}{F(\lambda)} + \text{Res } \frac{1}{F(\lambda)} \int_a^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi \quad (3.9)$$

şeklinde olur.

3.3 Rezidü Yöntemiyle İkinci Mertebeden Homojen Olmayan Denklemin Genel Çözümü

Örnek 3. $y'' - 4y = f(x)$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Teoriye göre denklemin çözümü

$$y(x) = \text{Res } \frac{e^{\lambda x} \psi(\lambda, x)}{F(\lambda)}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $F(\lambda) = \lambda^2 - 4$ dır. $F(\lambda)$ nın sıfır yerleri;

$$F(\lambda) \equiv \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

dir. Şimdi, $\psi(\lambda, x)$ nın seçiminin nasıl olacağını irdeleyelim. Bunun için

$$y'(x) = \text{Res } \lambda e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)}.$$

ilk türevinden birinci koşul olarak

$$\text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)} = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde ikinci türevi

$$y'' = \text{Res } \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)}$$

olur. Bu ifadeleri ana denklemde yerine yazarsak

$$\text{Res } \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \text{Res } e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)} - 4 \text{Res } \frac{e^{\lambda x} \psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} = f(x),$$

veya

$$\text{Res} \frac{e^{\lambda x} \psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} [\lambda^2 - 4] + \text{Res} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)} = f(x),$$

ya da

$$\text{Res} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)} = f(x)$$

alırız. Son ifadeyi aşağıdaki şekilde yazalım

$$\text{Res} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4} = f(x).$$

Rezidü Teoremine göre $\sum_{z=z_0} \text{Res} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^2 \text{Res}_{\lambda_i} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4} = f(x)$$

olarak elde ederiz. $\psi(\lambda, x)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki,

$$e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} = f(x)$$

olsun. Bu takdirde, son ifadeden

$$\psi(\lambda, x) = \int_0^x e^{-\lambda \xi} f(\xi) d\xi + \varphi(\lambda)$$

olarak elde ederiz. Burada $\varphi(\lambda)$, λ ya göre keyfi tam fonksiyondur. $\psi(\lambda, x)$ ın bu değerini başlangıçta iddia ettiğimiz çözüm formülünde yerine yazarsak

$$y(x) = \text{Res} e^{\lambda x} \frac{\varphi(\lambda)}{F(\lambda)} + \text{Res} \frac{1}{F(\lambda)} \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi$$

buluruz. Rezidüleri hesaplırsak

$$\text{Res} e^{\lambda x} \frac{\varphi(\lambda)}{F(\lambda)} = \sum_{i=1}^2 \text{Res}_{\lambda_i} e^{\lambda x} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2 - 4} = \frac{e^{2x} \varphi(2)}{4} + \frac{e^{-2x} \varphi(-2)}{-4} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$c_1 = \frac{\varphi(2)}{4}, \quad c_2 = \frac{\varphi(-2)}{-4},$$

$$\begin{aligned} \text{Res} \frac{1}{F(\lambda)} \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^2 \text{Res}_{\lambda_i} \frac{1}{F(\lambda)} \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^x e^{2(x-\xi)} f(\xi) d\xi - \frac{1}{4} \int_0^x e^{-2(x-\xi)} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

buluruz ve denklemin çözümünü

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int sh 2(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

olarak elde ederiz.

3.4 Sabitin Varyasyonu Yöntemiyle Çözümün Elde Edilmesi

Şimdi,

$$y'' - 4y = f(x)$$

denkleminin sabitin varyasyonu yöntemi ile çözümünü bulalım. Bunun için önce,

$$y'' - 4y = 0$$

homojen denklemini çözelim. Karakteristik denklemden kökleri

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

olarak elde ederiz. O halde denklemin fundamental çözümleri $y_1(x) = e^{2x}$ ve $y_2(x) = e^{-2x}$ olur. Homojen denklemin genel çözümü ise c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

olarak elde edilir. Homojen olmayan denkleme bir özel çözüm bulmak için c_1 ve c_2 sabitlerine x değişkene bağlı fonksiyonlar gözü ile bakarak aradığımız çözümün

$$y = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{-2x}$$

şeklinde olduğunu varsayalım ve onları öyle seçelim ki, bu fonksiyon aynı zamanda ana denklemin de çözümü olsun. Bunun için son ifadenin türevini

$$y' = c_1' e^{2x} + 2c_1 e^{2x} + c_2' e^{-2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

bulup, $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ i öyle seçelim ki,

$$c_1' e^{2x} + c_2' e^{-2x} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

olup, bu ifadenin de türevini alırsak

$$y'' = 2c_1' e^{2x} + 4c_1 e^{2x} - 2c_2' e^{-2x} + 4c_2 e^{-2x}$$

olur. Alınan ifadeler ana denklemde yerine yazılırsa

$$2c_1' e^{2x} + 4c_1 e^{2x} - 2c_2' e^{-2x} + 4c_2 e^{-2x} - 4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} = f(x)$$

veya

$$2c_1' e^{2x} - 2c_2' e^{-2x} = f(x)$$

bulunur. Sonuçta $c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$ için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{-2x} = 0, \\ 2c_1' e^{2x} - 2c_2' e^{-2x} = f(x) \end{cases}$$

bulmuş oluruz. Söz konusu denklemler sistemini Cramer kuralı ile çözersek

$$c_1(x) = \frac{1}{4} \int e^{-2\xi} f(\xi) d\xi + c_1,$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{4} \int e^{2\xi} f(\xi) d\xi + c_2$$

olarak elde ederiz. Alınan bu ifadeleri genel çözümün ifadesinde yerine yazarsak,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} \int e^{2(x-\xi)} f(\xi) d\xi - \frac{1}{4} \int e^{-2(x-\xi)} f(\xi) d\xi$$

veya

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int sh 2(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

elde edilir.

3.5 Adi Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Probleminin Rezidü Yöntemiyle Çözümü

Aşağıdaki problemi gözönüne alalım

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = \eta_0, \\ y'(x_0) = \eta_1, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}. \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Burada, $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ -ler bilinen sabitlerdir, x_0 da başlangıç noktasıdır.

(3.10),(3.11) problemini genel şekilde çözmeden önce, (3.11) koşulu yerine η_k -ların herhangi bir η nın dereceleri şeklinde gösterildiği

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = \eta^0, \\ y'(x_0) = \eta^1, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \eta^{n-1} \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

koşulunu alarak Cauchy özel durumu irdeleyelim.

Önceki tartışmalardan,

$$y(x) = \text{Res} \frac{e^{\lambda x} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)}$$

nin (3.10) denkleminin genel çözümü olduğunu ve $\varphi(\lambda)$ nın ise $F(\lambda)$ ile ortak sıfırlara sahip olmayan, λ ya göre tam fonksiyon olduğunu görmüştük. Bu durumda $\varphi(\lambda)$ yı öyle seçmek gerekir ki, (3.12) koşulları korunsun

$$y^{(k)}(x_0) = \text{Res} \frac{\lambda^k e^{\lambda x_0} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} = \eta^k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3.13)$$

(3.13) den görülüyor ki, η^k -lar

$$\eta^k = \text{Res} \frac{\lambda^k}{\lambda - \eta}$$

cinsinden seçilmelidir. Son eşitliği dikkate alırsak, (3.13) ü aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\text{Res} \left[\frac{\lambda^k e^{\lambda x_0} \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} - \frac{\lambda^k}{\lambda - \eta} \right] = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

veya

$$\text{Res} \lambda^k \frac{e^{\lambda x_0} \varphi(\lambda)(\lambda - \eta) - F(\lambda)}{(\lambda - \eta)F(\lambda)} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3.14)$$

Paydadaki polinomun derecesi $(n+1)$ olmaktadır ve rezidülerin bu polinomun kökleri üzerinden hesaplanması gerekir. Bu taktirde (3.14) eşitliğinin korunması için $\varphi(\lambda)$ yı, paydaki polinomun derecesi $(n-1)$ den fazla olmayacak şekilde seçmek gerekir, yani

$$\varphi(\lambda) e^{\lambda x_0} (\lambda - \eta) - F(\lambda) = c$$

eşitliğinin korunması gerekir. Burada c sabittir. Buradan,

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda) + c}{\lambda - \eta} e^{-\lambda x_0}$$

bulunur. Eğer $\lambda = \eta$ de $\varphi(\lambda)$ sabit olmasını talep edersek, $c = -F(\eta)$ olarak ele almamız yeterli olacaktır. Bu taktirde,

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} e^{-\lambda x_0}$$

ve bunu dikkate alırsak Cauchy probleminin çözümü

$$y(x) = \text{Res} \frac{F(\lambda) - F(\eta)}{(\lambda - \eta)F(\lambda)} e^{\lambda(x-x_0)} \quad (3.15)$$

olacak ve

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta}$$

ifadesi λ ya göre (aynı zamanda η ya göre de) $(n-1)$. dereceden bir polinom olmaktadır.

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} = p_0(\lambda)\eta^0 + p_1(\lambda)\eta^1 + \dots + p_{n-1}(\lambda)\eta^{n-1} \quad (3.16)$$

burada $p_k(\lambda)$ $(n-1-k)$. Dereceden polinom olmaktadır. Eğer tam rezidüleri hesaplırsak

$$\text{Res} \lambda^k \frac{p_k(\lambda)}{F(\lambda)} = 1, \quad (k = \overline{0, n-1})$$

son eşitlikten (3.10),(3.11) probleminin çözümü için

$$y(x) = \text{Res} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_k(\lambda) \eta_k}{F(\lambda)} e^{(x-x_0)} \quad (3.17)$$

olarak elde ederiz. (3.17) ifadesi ile verilen çözüm için pratik sonuç elde etmemiz için $p_k(\lambda)$ polinomlarının bulunması ve (3.17) deki rezidülerin hesaplanması gerekmektedir.

4. SONUÇLAR

Tezde lineer diferansiyel denklemler için yazılmış sınır değer probleminin cebirsel temeli incelenmiş ve ele alınan sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. Self adjoint diferansiyel operatörler için Lagrange anlamında adjoint diferansiyel ifade kurulmuştur.
2. Karşılıklı adjoint problemlerin rankları arasındaki ilişki bulunmuştur.
3. Sabit katsayılı lineer homojen ve homojen olmayan denklemlerin genel çözümleri rezidü yöntemi yardımıyla elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

1. Coddington E.A., Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Comp., 1955.
2. Marsden J.E., Hoffman M.J., Basic Complex Analysis, Third Edition, W.H. Freeman and Comp., New York, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice KAYA, 1978 yılında Konya Bozkır’da doğdu. Kıbrıs Bayraktar İlköğretim Okulu’nda ilköğrenimini(1985-1993, Ankara), Seyranbağları Lise’sinde orta öğrenimini, Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü’nde (1997-2001) lisans öğrenimini tamamladı. 2001 yılında Milli Eğitim’de matematik öğretmenliğine başladı. Öğretmenlik görevini İstanbul Çatalca Lise’sinde sürdürmektedir. 2005’de Beykent Üniversitesi Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı. Evli ve bir çocuk annesidir. Yabancı dili İngilizce’dir.