

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
STRONGLY SEMİ $\beta - I$ - IRRESOLUTE
VE
SEMİ $\alpha - I$ - PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Havva Nur TÜRKKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
STRONGLY SEMİ $\beta - I$ – IRRESOLUTE
VE
SEMİ $\alpha - I$ – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Havva Nur TÜRKKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / ... / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği /
oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
(Danışman)

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
STRONGLY SEMİ β – I – IRRESOLUTE
VE
SEMİ α – I – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

HAZIRLAYAN
Havva Nur TÜRKKAN

KONYA - 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
STRONGLY SEMİ β – I – IRRESOLUTE
VE
SEMİ α – I – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Havva Nur TÜRKKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA-2007

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlik ve sabırla takip ederek çalışmamın her bir safhasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve yürütülmesinde yol göstericiliğinden yaralandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunar, ayrıca bana her zaman destek olan Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e ve sevgili eşim Alpay TÜRKKAN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Havva Nur TÜRKKAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
STRONGLY SEMİ $\beta - I$ – IRRESOLUTE
VE
SEMİ $\alpha - I$ – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Havva Nur TÜRKKAN

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2007, Sayfa : 42

Jüri : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde [12]' de verilen strongly semi $\beta -$ irresolute ve semi $\alpha -$ preirresolute fonksiyon (Tanım 1.1.6)

kavramlarını çalıştık ve bu fonksiyonların sağladığı özellikler için verilen hipotezleri yorumladık.

İkinci bölümde, üçüncü bölümde yaptığımız çalışma için gerekli olan, ideal topolojik uzayla ilgili temel kavramlar verdik.

Üçüncü bölümde ise, birinci bölümde verdiğimiz bazı kümeleri esas alan strongly semi $\beta - I$ - irresolute fonksiyon (Tanım 3.1.7) ve semi $\alpha - I$ - preirresolute fonksiyon (Tanım 3.1.8) olarak adlandırdığımız iki yeni sürekli fonksiyon çeşidi tanımlayıp, karakterizasyonlarını elde ettik. Diğer bazı fonksiyon türleri ile karşılaştırarak gerekli ters örnekleri verip bir diagram oluşturduk.

Anahtar Kelimeler: pre - I - açık küme, semi - I - açık küme, strongly semi $\beta - I$ - irresolute fonksiyon ve semi $\alpha - I$ - preirresolute fonksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

A STUDY ON STRONGLY SEMI β – I – IRRESOLUTE AND SEMI α – I – PREIRRESOLUTE FUNCTIONS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACE

Havva Nur TÜRKKAN

Selcuk University

Graduate School of Natural and Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2007, Page : 42

Juri : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

This study consist of three sections. In the first section, we have studied strongly semi β – irresolute and semi α – preirresolute functions (Definition 1.1.6)

concepts given in [12] and we have interpreted hypothesis which given for their features.

In the second section, we have given the basic concepts for ideal topological space required for studying which we have done in third section.

In the third section, we defined two more continuity types that we called as strongly semi β - I - irresolute (Definition 3.1.7) and semi α - I - preirresolute functions (Definition 3.1.8) which consider some of the sets given in the first section as the basis and obtained their characteristics. We formed a diagram, giving required test examples by comparing those functions with the other function types.

Key words: pre - I - open set, semi - I - open set, strongly semi β - I - irresolute function and semi α - I - preirresolute function.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	vi
GÖSTERİMLER	vii
GİRİŞ	1
1. STRONGLY SEMİ β – IRRESOLUTE VE SEMİ α – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR.....	2
1.1. Ön Bilgiler.....	2
1.2. Strongly Semi β – Irresolute Fonksiyonlar	5
1.3. Semi α – Preirresolute Fonksiyonlar	7
2. İDEAL TOPOLOJİK UZAY	
2.1. İdeal Topolojik Uzay İçin Temel Kavramlar	11
2.2. Kümenin Lokal Fonksiyonu	13
3. STRONGLY SEMİ β – I – IRRESOLUTE VE SEMİ α – I – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR.....	20
3.1. Strongly Semi β – I – Irresolute Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri	20
3.2. Semi α – I – Preirresolute Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri.....	33
SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	40

GÖSTERİMLER

$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\emptyset$	: Boş küme
X	: Evrensel küme
$P(X)$	: Güç kümesi
$A \subset B$	: B, A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B, A kümesini kapsamaz
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
A^t	: A kümesinin tümleyeni
$A - B$	: A fark B
I	: X kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
I_c	: X kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideal
I_f	: X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal
τ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: Topolojik uzay
$G_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayında x noktasının açık komşuluklar ailesi
$\mathcal{U}_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi
τ_A	: $A \subset X$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi
(X, τ_A)	: Alt topolojik uzay

(X, τ, I)	: İdeal topolojik uzay
$\tilde{A}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ alt kümesinin yığılma noktaları kümesi
$\text{yoğ}(A)$	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ alt kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi

GİRİŞ

İlk defa 1933 yılında Kuratowski [24] bir topolojik uzayda ideal kavramını kullanarak kümenin lokal fonksiyonu kavramını tanımladı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikleri inceledi. 12 yıl sonra Vaidyanathaswamy [36] lokal fonksiyon kavramı yardımıyla bir kapanış işlemi tanımladı, bu işlemden yeni bir topoloji oluşturdu ve bu topolojinin tabanını elde etti.

1964 yılında Hayashi [20], kendi adını verdiği Hayashi uzayını tanımladı. Daha sonra 1975 yılında Samuels [35] lokal fonksiyon kavramının ideallerin değiştirilmesiyle genel topolojide de bilinen kapanış noktası, yığılma noktası, yoğunlaşma noktası ve ikinci kategoriden nokta kavramına eşit olduğunu gösterdi. Böylece lokal fonksiyon kavramının bu nokta kavramının bir genellemesi olduğu sonucuna vardı.

Ardından 1990 yılında D. Janković ve T. R. Hamlet [23] lokal fonksiyon kavramı ile ilgili o zamana kadar yapılan tüm çalışmaları ayrıntılı incelediler ve bu kavramla ilgili yeni özellikler elde ettiler.

1933 yılında ilk defa tanımlanmış olan lokal fonksiyon kavramı ile ilgili zamanımıza kadar çeşitli araştırmalar yapılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Halen günümüzde de araştırmacılar için önemli bir çalışma konusu olmuştur.

Bu çalışmada; (X, τ) topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyonu olmayan uzay olarak alınacaktır. Ayrıca (X, τ) topolojik uzayında herhangi bir $A \subset X$ kümesinin kapanışı $(A)^-$ ve bu kümenin içi de $(A)^\circ$ sembolleri ile gösterilecektir. (X, τ) ve (Y, φ) topolojik uzayları yerine X ve Y uzayları alınacaktır. (X, τ) topolojik uzayından (Y, φ) topolojik uzayına giden, tek değerli fonksiyon olarak tanımlanan f fonksiyonu da

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$$

şeklinde verilecektir.

I. BÖLÜM

STRONGLY SEMİ β – IRRESOLUTE VE SEMİ α – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda gerekli olan ön bilgiler verilmiştir.

İkinci kısımda ve üçüncü kısımda ise, [12]' de tanımlanıp incelenmiş olan strongly semi β – irresolute fonksiyon sınıfı ve semi α – preirresolute fonksiyon sınıfı sıra ile ayrıntılı olarak çalışılmış, gerekli yorumlar yapılmıştır.

1.1. Ön Bilgiler

Şimdi çalışmamız için gerekli olan tanımları verelim.

Tanım 1.1.1. (X, τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

- i) $A \subset ((A^\circ)^-)^\circ$ ise; A kümesine **α – açık küme** [33],
- ii) $A \subset (A^\circ)^-$ ise; A kümesine **semi – açık küme** [25],
- iii) $A \subset (A^-)^\circ$ ise; A kümesine **pre – açık küme** [29],
- iv) $A \subset ((A^-)^\circ)^-$ ise; A kümesine **β – açık küme** [1]

denir. Ayrıca α – açık (semi – açık, pre – açık, β – açık) kümenin tümleyenine **α – kapalı** [30] (**semi – kapalı** [15], **pre – kapalı** [29], **β – kapalı** [1]) **küme** denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm α – açık kümelerin ailesini τ^α , semi – açık kümelerin ailesini $SO(X)$, pre – açık kümelerin ailesini $PO(X)$ ve β – açık kümelerin ailesini de $\beta O(X)$ sembolü ile göstereceğiz. Ayrıca bu bölümün içeriğinde geçen, bir $S \subset X$ kümesi için, bu kümeyi kapsayan bütün pre – kapalı (β – kapalı) kümelerin kesişimi S kümesinin pre – kapanışı (β – kapanışı [3]) olup S^{-p} ($S^{-\beta}$) şeklindedir [31]. Bir S kümesinde kapsanan bütün pre – açık (β – açık) kümelerin birleşimi S kümesinin pre – içi (β – içi [3]) olup S^{op} ($S^{o\beta}$) şeklindedir [31].

Tanım 1.1.1 de verilen kümeleri esas alan fonksiyon çeşitleri [12]' de aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Tanım 1.1.2. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \varphi$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \alpha O(X)$ ise; f fonksiyonuna **α – sürekli** [30],
- ii) $f^{-1}(V) \in SO(X)$ ise; f fonksiyonuna **semi – sürekli** [25],
- iii) $f^{-1}(V) \in \beta O(X)$ ise; f fonksiyonuna **β – sürekli** [1]

fonksiyon denir.

Tanım 1.1.3. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \alpha O(Y)$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \tau$ ise; f fonksiyonuna **strongly α – irresolute** [26],
- ii) $f^{-1}(V) \in \alpha O(X)$ ise; f fonksiyonuna **α – irresolute** [27],
- iii) $f^{-1}(V) \in SO(X)$ ise; f fonksiyonuna **semi α – irresolute** [9],
- iv) $f^{-1}(V) \in \beta O(X)$ ise; f fonksiyonuna **almost α – irresolute** [10]

fonksiyon denir.

Tanım 1.1.4. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in PO(Y)$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \tau$ ise; f fonksiyonuna **Strongly M – pre sürekli** [4],
- ii) $f^{-1}(V) \in \alpha O(X)$ ise; f fonksiyonuna **α – preirresolute** [13],
- iii) $f^{-1}(V) \in \beta O(X)$ ise; f fonksiyonuna **β – preirresolute** [13],

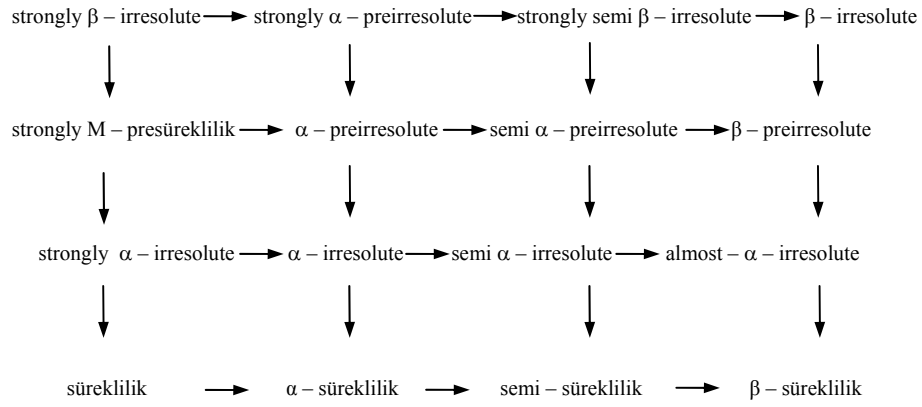
fonksiyon denir.

Tanım 1.1.5. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \beta O(Y)$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \tau$ ise; f fonksiyonuna **strongly β – irresolute** [32],
- ii) $f^{-1}(V) \in \alpha O(X)$ ise; f fonksiyonuna **strongly α – preirresolute** [11],
- iii) $f^{-1}(V) \in \beta O(X)$ ise; f fonksiyonuna **β – irresolute** [28],

fonksiyon denir.

Tanım 1.1.6. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \beta O(Y)$ ($V \in PO(Y)$) için, $f^{-1}(V) \in SO(X)$ ise, f fonksiyonuna **strongly semi β – irresolute (semi α – preirresolute)** fonksiyon denir.



Şekil – 1 –

Şekil – 1 ile; Tanım 1.1.2, Tanım 1.1.3, Tanım 1.1.4, Tanım 1.1.5 ve Tanım 1.1.6 da verilen fonksiyon türlerinin karşılaştırılması yapılmıştır [12] . Diğer taraftan bu karşılaştırmaların terslerinin doğru olmadığı [12]’ de aşağıdaki uyarı ve onu takip eden bir örnekle verilmiştir.

Uyarı 1.1.1.

- i) Strongly M pre – sürekli fonksiyon, β – irresolute değildir. ([6, Example 3.2]).
- ii) Strong α – irresolute fonksiyon, β – preirresolute değildir. ([7, Example 2.2]).
- iii) Sürekli fonksiyon, α – irresolute değildir. ([6, Example 3.3]).
- iv) β – irresolute fonksiyon, semi – sürekli değildir. ([7, Example 3.1]).

Örnek 1.1.1. $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}\}$ topolojisi ile (X, τ) topolojik uzayı verilsin. $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(x) = f(y) = y$, $f(z) = z$ şeklinde tanımlansın. O halde f strongly semi β – irresolute fonksiyondur, fakat α – sürekli değildir.

1.2. Strongly Semi β – Irresolute Fonksiyonlar

Teorem 1.2.1 [12] ile strongly semi β – irresolute fonksiyonunu karakterize eden özellikler verilmiştir.

Teorem 1.2.1. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) f fonksiyonu strongly semi β – irresolute bir fonksiyondur;
- ii) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren Y uzayındaki her V β – açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayında bir semi – açık $U \subset X$ alt kümesi vardır;
- iii) Her $V \subset Y$ β – açık kümesi için, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^-$;
- iv) Her $F \subset Y$ β – kapalı kümesi için, $f^1(F) \subset X$ kümesi semi – kapalıdır;
- v) Her $B \subset Y$ alt kümesi için, $((f^1(B))^\circ)^- \subset f^1(B^{-\beta})$;
- vi) Her $A \subset X$ alt kümesi için, $f(((A)^-)^{\circ}) \subset (f(A))^{-\beta}$ olmasıdır.

Lemma 1.2.1. ([2], [18], [34]). Her $i = 1, 2, \dots, n$ indisi için, bir $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesini ve boş olmayan, $X_{\lambda i}$ ailesinin bir $U_{\lambda i}$ alt kümesini alalım. Bu takdirde

$$\emptyset \neq U = \prod_{\lambda \neq \lambda i} X_\lambda \times \prod_{i=1}^n U_{\lambda i} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

şeklinde U kümesinin β – açık [2] (sırasıyla, semi – açık [34], pre – açık [18]) bir küme olması için gerek ve yeter şart, her $i = 1, 2, \dots, n$ indisi için, $U_{\lambda i} \subset X_{\lambda i}$ kümesinin β – açık (sırasıyla, semi – açık, pre – açık) küme olmasıdır.

Lemma 1.2.1 den yararlanarak, g grafik fonksiyonunun strongly semi β – irresolute fonksiyon olması halinde f fonksiyonunun da strongly semi β – irresolute fonksiyon olduğu Teorem 1.2.2 ile aşağıda gösterilmiştir [12].

Teorem 1.2.2. Eğer her $x \in X$ noktası için, $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g : (X, \tau) \rightarrow X \times Y$ grafik fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon ise, bu takdirde $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyondur.

Teorem 1.2.3. [12] Eğer $f : (X, \tau) \rightarrow \prod Y_\lambda$ fonksiyon strongly semi β – irresolute fonksiyon ise, $P_\lambda : \prod Y_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $P_\lambda \circ f : (X, \tau) \rightarrow Y_\lambda$ bileşke fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyondur.

Teorem 1.2.4. [12] Eğer $f : \prod X_\lambda \rightarrow \prod Y_\lambda$ fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon ise, bu takdirde her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyondur.

Uyarı 1.2.1. Teorem 1.2.5 de, f fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon iken hangi şartlar altında f/A kısıtlanmış fonksiyonunun strongly semi β – irresolute fonksiyon olduğu; Teorem 1.2.6 da ise, f/A kısıtlanmış fonksiyonunun strongly semi β – irresolute fonksiyon olması halinde ne zaman f fonksiyonunun strongly semi β – irresolute fonksiyon olduğu verilmiştir [12].

Teorem 1.2.5. Eğer $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi pre – açık bir küme ise, bu takdirde $f/A : A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyondur.

Teorem 1.2.6. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ bir fonksiyon ve $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi X uzayının semi – açık bir örtüsü olsun. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ indisi için,

$$f/A_\lambda : A_\lambda \rightarrow Y$$

kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon ise, f fonksiyonu da strongly semi β – irresolute bir fonksiyondur.

Uyarı 1.2.2. Teorem 1.2.7 [12]’ de $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun strongly semi β – irresolute fonksiyon olması için f ve g fonksiyonlarının hangi özellikleri sağlaması gerektiği verilmiştir.

Teorem 1.2.7. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ ve $g : (Y, \varphi) \rightarrow (Z, \upsilon)$ iki fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonu strongly semi β – irresolute fonksiyon ve g fonksiyonu β –

irresolute bir fonksiyon ise, $\text{gof} : (X, \tau) \rightarrow (Z, \upsilon)$ bileşke fonksiyonu da strongly semi β – irresolute fonksiyondur.

1.3. Semi α – preirresolute Fonksiyonlar

Teorem 1.3.1 [12] ile semi α – preirresolute fonksiyonunu karakterize eden özellikler verilmiştir.

Teorem 1.3.1. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

- i) f fonksiyonu semi α – preirresolute bir fonksiyondur;
- ii) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren Y uzayındaki her V pre – açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayında bir semi – açık $U \subset X$ alt kümesi vardır;
- iii) Her $V \subset Y$ pre – açık kümesi için, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^-$;
- iv) Her $F \subset Y$ pre – kapalı kümesi için, $f^1(F) \subset X$ kümesi semi – kapalıdır;
- v) Her $B \subset Y$ alt kümesi için, $((f^1(B))^\circ)^- \subset f^1(B^{-p})$;
- vi) Her $A \subset X$ alt kümesi için, $f(((A)^-)^{\circ}) \subset (f(A))^{-p}$ olmasıdır.

Uyarı 1.3.1. Lemma 1.2.1 den yararlanarak, g grafik fonksiyonunun semi α – preirresolute fonksiyon olması halinde f fonksiyonunun da semi α – preirresolute fonksiyon olduğu Teorem 1.3.2 ile aşağıda gösterilmiştir [12].

Teorem 1.3.2. Eğer her $x \in X$ noktası için, $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g : (X, \tau) \rightarrow X \times Y$ grafik fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon ise, bu takdirde $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyondur.

Teorem 1.3.3. [12] Eğer $f : (X, \tau) \rightarrow \Pi Y_\lambda$ fonksiyon semi α – preirresolute fonksiyon ise, $P_\lambda : \Pi Y_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $P_\lambda \circ f : (X, \tau) \rightarrow Y_\lambda$ bileşke fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyondur.

Teorem 1.3.4. [12] Eğer $f : \prod X_\lambda \rightarrow \prod Y_\lambda$ fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon ise, bu takdirde her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ kısıtlanmış fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyondur.

Uyarı 1.3.2. Teorem 1.3.5 te, f fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon iken hangi şartlar altında f/A kısıtlanmış fonksiyonunun semi α – preirresolute fonksiyon olduğu; Teorem 1.3.6 da ise, f/A kısıtlanmış fonksiyonunun semi α – preirresolute fonksiyon olması halinde ne zaman f fonksiyonunun semi α – preirresolute fonksiyon olduğu verilmiştir [12].

Teorem 1.3.5. Eğer $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi pre – açık bir küme ise, bu takdirde $f/A : A \rightarrow (Y, \varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyondur.

Teorem 1.3.6. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ bir fonksiyon ve $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi X uzayının semi – açık bir örtüsü olsun. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ indisi için,

$$f/A_\lambda : A_\lambda \rightarrow Y$$

kısıtlanmış fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon ise, f fonksiyonu da semi α – preirresolute bir fonksiyondur.

Uyarı 1.3.3. Teorem 1.3.7 [12]’ de $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun semi α – preirresolute fonksiyon olması için f ve g fonksiyonlarının hangi özellikleri sağlaması gerektiği verilmiştir.

Teorem 1.3.7. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ ve $g : (Y, \varphi) \rightarrow (Z, \upsilon)$ iki fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonu semi α – preirresolute fonksiyon ve g fonksiyonu pre – irresolute fonksiyon ise, $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Z, \upsilon)$ bileşke fonksiyonu da semi α – preirresolute fonksiyondur.

Tanım 1.3.1. [8] (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her yoğun alt kümesi bu uzayda açık küme oluyorsa, bu takdirde (X, τ) uzayına **submaximal uzay** denir.

Tanım 1.3.2. [22] (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her açık kümesinin kapanışı yine bu uzayda açık küme oluyorsa; bu takdirde (X, τ) uzayına **extramally disconnected uzay** denir.

Tanım 1.3.1 ve Tanım 1.3.2' den yararlanarak Şekil –1– de verilen karşılaştırmaların tersinin sağlanmadığı [12]' de aşağıdaki Teorem 1.3.8 ve Teorem 1.3.9 ile verilmiştir.

Teorem 1.3.8. (X, τ) topolojik uzayı submaximal ve extramally disconnected uzay olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) Strongly semi β – irresolute $\Leftrightarrow$ strongly β – irresolute $\Leftrightarrow$ strongly α – preirresolute $\Leftrightarrow \beta$ – irresolute.
- ii) Semi α – preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly M – presüreklilik $\Leftrightarrow \alpha$ – preirresolute $\Leftrightarrow \beta$ – preirresolute.
- iii) Semi α – irresolute $\Leftrightarrow$ strongly α – irresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – irresolute $\Leftrightarrow$ almost α – irresolute.
- iv) süreklilik $\Leftrightarrow \alpha$ – süreklilik $\Leftrightarrow$ semi – süreklilik $\Leftrightarrow \beta$ – süreklilik

Teorem 1.3.9. (Y, φ) topolojik uzayı submaximal ve extramally disconnected uzay olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) Strongly semi β – irresolute $\Leftrightarrow$ semi α – preirresolute $\Leftrightarrow$ semi α – irresolute $\Leftrightarrow$ semi – süreklilik.
- ii) β – preirresolute $\Leftrightarrow$ almost α – irresolute $\Leftrightarrow \beta$ – irresolute. $\Leftrightarrow \beta$ – süreklilik.
- iii) Strongly α – preirresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – preirresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – irresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – süreklilik.

iv) Strongly β – irresolute $\Leftrightarrow$ strongly M – pre süreklilik $\Leftrightarrow$ strongly α – irresolute $\Leftrightarrow$ süreklilik.

II. BÖLÜM

İDEAL TOPOLOJİK UZAY

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda bu çalışma için gerekli olan temel kavramlar verilecektir.

İkinci kısımda ise, Kuratowski [24] tarafından tanımlanan kümenin lokal fonksiyon kavramı ve [23]' de verilen bu fonksiyon kavramının sağladığı özellikler verilecek ve yorumlanacaktır.

2.1. İdeal Topolojik Uzay İçin Temel Kavramlar

Bu kısımda konunun temelini oluşturan, kümenin lokal fonksiyonu tanımına geçmeden önce gerekli olan bazı kavramları verelim.

Tanım 2.1.1. [24] Boş olmayan bir X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi verilsin. Eğer I ailesi,

- i) Her $A, B \in I$ kümeleri için, $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği),
- ii) Her $A \in I$ kümesi ve $B \subseteq A$ alt kümesi için, $B \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

özelliklerini sağlarsa bu taktirde, I ailesine **X kümesi üzerinde bir ideal** denir.

Tanım 2.1.2. [24] $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu,

- i) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$
- ii) $A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq \alpha(A)$
- iii) $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$
- iv) $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağlarsa bu taktirde, α küme fonksiyonuna **Kuratowski Kapanış İşlemi** denir. $K = \{A \in P(X) \mid A = \alpha(A)\}$ ailesine, X kümesi üzerindeki topolojiye göre **Kapalılar Ailesi** denir.

Uyarı 2.1.1 [23] $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $d : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu,

$$\text{i) } d(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{ii) } d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$$

$$\text{iii) } d(d(A)) \subseteq d(A)$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde, $\alpha(A) = A \cup d(A)$ şeklinde tanımlanan $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu, $P(X)$ güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir.

İspat. i) $\alpha(A) = A \cup d(A)$ ifadesinde $A = \emptyset$ alırsak $\alpha(\emptyset) = \emptyset \cup d(\emptyset)$ olur. Uyarı 2.1.1 (i) gereği, $d(\emptyset) = \emptyset$ olup böylece $\alpha(\emptyset) = \emptyset$ bulunur.

ii) Herhangi bir $A, B \in P(X)$ alt kümeleri için, α küme fonksiyonu tanımı ve Uyarı 2.1.1 (ii) şıkkı gereği,

$$\alpha(A \cup B) = (A \cup B) \cup d(A \cup B) = (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B)) = (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B)) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$$

ifadesi bulunur. Böylece $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ olduğu elde edilir.

iii) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ olur. Buradan (iii) gereği,

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A \cup d(A)) = \alpha(A) \cup \alpha(d(A)) = (A \cup d(A)) \cup (d(A) \cup d(d(A)))$$

bağıntısı bulunur. Uyarı 2.1.1' (iii) den $d(d(A)) \subseteq d(A)$ olur. Böylece $\alpha(\alpha(A)) = A \cup d(A) = \alpha(A)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$ küme fonksiyonu Tanım 2.1.2' de verilen Kuratowski kapanış işlemi şartlarını sağlar.

Tanım 2.1.3. [14] X kümesi üzerinde $\varphi = \{\emptyset, X\}$ şeklinde tanımlanan φ topolojisine **ayrık olmayan topoloji**, (X, φ) ikilisine de **ayrık olmayan uzay** denir.

Tanım 2.1.4. [14] X kümesi üzerinde tanımlanan $P(X)$ topolojisine **ayrık topoloji**, $(X, P(X))$ ikisine de **ayrık uzay** denir.

Tanım 2.1.5. [24] (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \mathcal{U}_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V \neq \emptyset$ ise, $x \in X$ noktasına **A kümesinin bir kapanış noktası** denir.

Tanım 2.1.6. [24] (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \mathcal{U}_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V$ kümesinde sonsuz sayıda eleman varsa, $x \in X$ noktasına **A kümesinin bir yoğunlaşma noktası** denir.

Tanım 2.1.7. [24] (X, τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \mathcal{U}_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$ ise, $x \in X$ noktasına **A kümesinin bir yığılma noktası** denir.

2.2. Kümenin Lokal Fonksiyonu

Tanım 2.2.1. [24] (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu taktirde,

$$A^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I\}$$

kümesine A kümesinin I ideali ve τ topolojisi ile ilgili **lokal fonksiyonu** denir.

$A^*(I, \tau)$ gösterimi için [23]' de belirtildiği gibi $A^*(I)$ veya kısaca A^* sembolünü kullanacağız ve buna A kümesinin lokal fonksiyonu diyeceğiz.

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere X kümesindeki en basit idealler minimal ideal ($I = \{\emptyset\}$) ve maksimal ideal ($I = P(X)$) olup A^* kümesi bu ideallere göre [23]' de aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} A^*(\{\emptyset\}, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin \{\emptyset\}\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \neq \emptyset\} \\ &= (A)^- \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(\{\emptyset\}, \tau) = (A)^-$$

olarak bulunur.

$$A^*(P(X), \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin P(X)\} = \emptyset$$

Buradan,

$$A^*(P(X), \tau) = \emptyset$$

olarak bulunur.

(X, τ) uzayında I_f (sonlu alt kümeler ideali), I_c (sayılabilir alt kümeler ideali) idealleri için [23]' de A^* kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} A^*(I_f, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I_f\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \text{ sonsuz}\} \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_f, \tau) = \tilde{A}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} A^*(I_c, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I_c\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \text{ kümesi sayılamaz}\} \\ &= \text{yoğ}(A) \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_c, \tau) = \text{yoğ}(A)$$

olarak bulunur.

[35]' de, A kümesinin $A^*(I, \tau)$ lokal fonksiyonunun, A kümesinin kapanış noktası, yığılma noktası ve yoğunlaşma noktasının bir genelleştirilmesi olduğu verilmiştir.

Şimdi [23]' de verilen, lokal fonksiyonun özellikleriyle ilgili teoremi verelim.

Teorem 2.2.1. [23] (X, τ) uzayı, X kümesi üzerinde I_1, I_2 idealleri ile birlikte verilen bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu takdirde,

- i) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$
- ii) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$
- iii) $A^* = (A^*)^- \subseteq (A)^- \quad (A^* \text{ kümesi kapalı bir kümedir})$
- iv) $(A^*)^* \subseteq A^*$
- v) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
- vi) $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$
- vii) $A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$
- viii) $U \in \tau \Rightarrow U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$
- ix) $S \in I \Rightarrow (A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$

İspat. i) Herhangi bir $x \in A^*$ noktasını alalım. Tanım 2.2.1'den her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $A \cap U \notin I$ olur. Eğer $A \subset B$ ise, $A \cap U \subset B \cap U$ olup $B \cap U \notin I$ elde edilir. Eğer $B \cap U \in I$ olsaydı I idealinin kalıtımsallık özelliğinden $A \cap U \in I$ olurdu. Bu ise, bir çelişkidir. O halde her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $B \cap U \notin I$ ise Tanım 2.2.1 gereği, $x \in B^*$ olur. Böylece alt küme tanımı gereği $A^* \subset B^*$ bağıntısı bulunur.

ii) $I_1 \subseteq I_2$ ise $I_2^t \subset I_1^t$ olur.(1)

$$A^*(I_2) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I_2\}$$

$$A^*(I_2) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \in I_2^t\} \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2) ifadeleri ve Tanım 2.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A^*(I_2) &\subseteq \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \in I_1^t\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I_1\} \\ &= A^*(I_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$$

olduğu görülür.

iii) Öncelikle $A^* = (A^*)^-$ eşitliğini gösterelim. Her $A \subset X$ alt kümesi için, $A \subset (A)^-$ bağıntısı her zaman sağlanır. Bu ifade $A^* \subset X$ alt kümesi için de gerçekleşeceğinden

$$A^* \subseteq (A^*)^- \dots\dots\dots (3)$$

$A^*(\{\emptyset\}, \tau) = (A)^-$, $A^*(P(X), \tau) = \emptyset$ olduğu gösterilmiştir. Teorem 2.2.1 (b) gereğince kümenin lokal fonksiyonu en büyük değerini $I = \{\emptyset\}$ minimal ideali için, en küçük değerini de $I = P(X)$ maksimal ideali için alır. O halde (X, τ) uzayındaki her I ideali için $\emptyset \subseteq I \subseteq P(X)$ ifadesi sağlandığından,

$$\emptyset \subseteq A^*(I, \tau) \subseteq (A)^- \dots\dots\dots (4)$$

olur.

Şimdi de $(A^*)^- \subset A^*$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in (A^*)^-$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^*$ olsun. $(A^*)^- = \bigcap \{F \subset X \mid F \text{ kapalı küme ve } A^* \subset F\}$ ifadesinden ve $x \in (A^*)^-$ olduğundan $A^* \subset F$ olan her F kapalı kümesi için, $x \in F$ olur. $A^* \subset F$ ve F kapalı küme ise $X - F \subset X - A^*$ olup $X - F$ açık kümedir. Buradan $(X - F) \cap A^* = \emptyset$ bulunur. $x \notin A^*$ ifadesinden $x \in (X - A^*)$ elde edilir ve $x \in F$ olduğundan

$F \cap (X - A^*) \neq \emptyset$ olur. $(X - F) \cap A^* = \emptyset$ ve $F \cap (X - A^*) \neq \emptyset$ olması $F \subset A^*$ olduğunu gösterir.

Bu ise bir çelişkidir. O halde,

$$(A^*)^- \subset A^* \dots\dots\dots (5)$$

bulunur.

(3), (4) ve (5) ifadelerinden $A^* = (A^*)^- \subseteq (A^*)^-$ bağıntısı elde edilir.

iv) Herhangi bir $x \in (A^*(I))^*(I)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^*(I)$ olsun. Tanım 2.2.1 gereğince, $(A^*(I))^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A^*) \notin I\}$ olur. Her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $U \cap A^* \notin I$ ifadesi ve idealin kalıtımsallık özelliği gereğince, $U \cap A^* \neq \emptyset$ olduğu bulunur. Kapanış noktası tanımından $x \in (A^*)^-$ elde edilir. (e) şıkkı gereğince, $(A^*)^- = A^*$ olması $x \in A^*$ olduğunu gösterir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde $x \in (A^*)^*$ noktası için, $x \in A^*$ olduğundan $(A^*)^* \subseteq A^*$ bağıntısı elde edilir.

v) Tanım 2.2.1 gereğince A ve B kümelerinin lokal fonksiyonları,

$$A^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I\} \dots\dots\dots (6)$$

$$B^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap B) \notin I\} \dots\dots\dots (7)$$

olur.

(6) ve (7) ifadelerinde birleşim işlemi alırsak,

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I \text{ veya } (U \cap B) \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } [(U \cap A) \cup (U \cap B)] \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } [U \cap (A \cup B)] \notin I\}$$

elde edilir. Tanım 2.2.1'den,

$$A^*(I) \cup B^*(I) = (A \cup B)^*(I)$$

bulunur.

$$\text{vi) } (A \cap B)^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } [(A \cap B) \cap U] \notin I\}$$

$$(A \cap B)^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } [(A \cap U) \cap (B \cap U)] \notin I\}$$

$$(A \cap B)^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (A \cap U) \notin I \text{ ve } (B \cap U) \notin I\} \dots\dots\dots (8)$$

(8) ifadesi gereği,

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (A \cap U) \notin I\} \dots\dots\dots (9)$$

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (B \cap U) \notin I\} \dots\dots\dots (10)$$

elde edilir. (9) ve (10) ifadelerinin kesişimlerini alırsak,

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq A^*(I) \cap B^*(I)$$

olduğu bulunur.

vii) $A \cup B = (A - B) \cup B$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte (*) işlemi uygulanırsa, Teorem 2.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup B)^* = [(A - B) \cup B]^* = (A - B)^* \cup B^*$$

eşitliğini elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafın B^{*t} kümesi ile kesişim alınır,

$$(A \cup B)^* \cap B^{*t} = [(A - B)^* \cup B^*] \cap B^{*t}$$

$$(A^* \cup B^*) \cap B^{*t} = [(A - B)^* \cup B^*] \cap B^{*t}$$

$$(A^* \cup B^{*t}) \cap (B^* \cap B^{*t}) = [(A - B)^* \cap B^{*t}] \cup (B^* \cap B^{*t})$$

olur. $B^* \cap B^{*t} = \emptyset$ olduğundan,

$$A^* \cap B^{*t} = (A - B)^* \cap B^{*t}$$

eşitliği elde edilir. Fark işlemi tanımı gereği, $A^* - B^* = (A - B)^* - B^*$ eşitliği yazılır. Bu son eşitlikten

$$A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$$

bulunur.

viii) Herhangi bir $x \in U \cap A^*$ noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından $x \in U$ ve $x \in A^*$ dır. Tanım 2.2.1 gereği her $V \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $V \cap A \neq \emptyset$ olur. $x \in U$ ve $U \in \tau$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $U \in G_{(x)}$ olur. Bir noktanın komşuları kesişimi yine o noktanın komşuluğu olduğundan $V \cap U \in G_{(x)}$ olur. $x \in A^*$ olup, $[(V \cap U) \cap A] = [V \cap (U \cap A)] \neq \emptyset$ ifadesi elde edilir. Tanım 2.2.1 gereği, $x \in (U \cap A)^*$ bulunur. $x \in U \cap A^*$ noktası için, $x \in (U \cap A)^*$ olduğundan

$$U \cap A^* \subseteq (U \cap A)^* \dots\dots\dots (11)$$

bulunur. (11) ifadesinde her iki tarafın U kümesi ile kesişimini alırsak,

$$[U \cap (U \cap A^*)] \subseteq [U \cap (U \cap A)^*]$$

$$(U \cap A^*) \subseteq [U \cap (U \cap A)^*] \dots\dots\dots (12)$$

$U \cap A \subseteq A$ bağıntısı ve Teorem 2.2.1 (a) gereğince

$$(U \cap A)^* \subseteq A^* \dots\dots\dots (13)$$

olur. (13) ifadesinin her iki tarafının U kümesi ile kesişimi alınır,

$$[U \cap (U \cap A)^*] \subseteq U \cap A^* \dots\dots\dots (14)$$

bulunur. (12) ve (14) ifadelerinden,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \dots\dots\dots (15)$$

eşitliği yazılır. O halde (11) ve (15) ifadeleri gereği,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$$

bulunur.

ix) $A \cup S = (A - S) \cup S$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın $(^*)$ işlemi alınırsa,

$$(A \cup S)^* = [(A - S) \cup S]^*$$

olur. Teorem 2.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup S)^* = A^* \cup S^* = (A - S)^* \cup S^* \dots\dots\dots (16)$$

elde edilir. Tanım 2.2.1 ve $S \in I$ olduğundan $S^* = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap S) \notin I\} = \emptyset$ olur. (16) ifadesinde $S^* = \emptyset$ yazılırsa $(A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$ elde edilir.

[24]' de, bir $(^-)$ işlemi tanımlanmış ve bu işlemin aslında bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

Lokal fonksiyon olarak tanımlanan $(^*) : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu Teorem 2.2.1'in (d) ve (e) şıkları ile,

$$\emptyset^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap \emptyset) \notin I\}$$

$$\emptyset^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } \emptyset \notin I\}$$

bulunur. Bu ise, I ideal olduğundan kalıtımsallık özelliği gereği imkansızdır. Dolayısıyla $\emptyset \in I$ olur. Dolayısıyla $\emptyset^*(I) = \emptyset$ olup, $(^*) : P(X) \rightarrow P(X)$ lokal fonksiyonu, Uyarı 2.1.1'de verilen $d : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu ile çakışır. Her $A \subseteq X$ alt kümesi için, $(A)^{-*} = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $(^-) : P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu Kuratowski Kapanış işlemidir.

[23]' de, X kümesindeki minimal ideal olan $I = \{\emptyset\}$ ve maksimal ideal olan $I = P(X)$ idealleri için $(A)^{-*}$ kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$I = \{\emptyset\}$ minimal ideali için, $A^*(\{\emptyset\}) = (A)^-$ olup bu ifade $(A)^{-*} = A \cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa $(A)^{-*} = A \cup (A)^-$ olur. Kapanış işleminin $A \subset (A)^-$ özelliğinden, $(A)^{-*} = (A)^-$ olur.

$I = P(X)$ maksimal ideali için, $A^*(P(X)) = \emptyset$ olup $(A)^{-*} = A \cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa, $(A)^{-*} = A$ olur.

$(^-)$ fonksiyonu yardımıyla üretilen τ^* topolojisi [23]' de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.2. [23] τ topolojisi X kümesindeki ilk topoloji olmak üzere, $(-)^*$ fonksiyonu tarafından üretilen topoloji $\tau^*(I, \tau)$ ya da $\tau^*(I)$ (kısaca τ^*) ile gösterilir. Bu topoloji,

$$\tau^*(I) = \{U \subseteq X \mid (X-U)^- = X-U\}$$

şeklindedir.

$I = \{\emptyset\}$ minimal ideali için $\tau^*(I) = \tau$ ve $I = P(X)$ maksimal ideali için, $\tau^*(I) = P(X)$ olup X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\emptyset \subseteq I \subseteq P(X)$ olduğundan $\tau \subseteq \tau^*(I) \subseteq P(X)$ bağıntısı Teorem 2.2.1'in (b) şıkkından elde edilir.

III. BÖLÜM

STRONGLY SEMİ β – I – IRRESOLUTE VE SEMİ α – I – PREIRRESOLUTE FONKSİYONLAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda, strongly semi β – I – irresolute fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni bir fonksiyon çeşidi verip, bu fonksiyon kavramının strongly α – I – preirresolute [7], **strongly semi β – I – irresolute**, β – I – irresolute [38], α – I – preirresolute [6], **semi α – I – preirresolute**, β – I – preirresolute [6], α – I – irresolute [37], semi α – I – irresolute [38], almost α – I – irresolute [37], α – I – sürekli [19], semi – I – sürekli [19] ve β – I – sürekli [19] fonksiyon türleri ile karşılaştırmasını yapacağız. Ayrıca bu fonksiyonun karakterizasyonunu ve sağladığı özellikleri elde edeceğiz.

İkinci kısımda ise; Tanım 3.1.8 ile verdiğimiz semi α – I – preirresolute fonksiyon kavramının karakterizasyonunu ve sağladığı özellikleri elde edip, yorumlayacağız.

3.1. Strongly Semi β – I – irresolute Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. (X, τ) topolojik uzayı ve herhangi $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

- i) $A \subset ((A^\circ)^-)^\circ$ ise; A kümesine **α – açık küme** [33],
- ii) $A \subset (A^\circ)^-$ ise; A kümesine **semi – açık küme** [25],
- iii) $A \subset (A^-)^\circ$ ise; A kümesine **pre – açık küme** [29],
- iv) $A \subset ((A^-)^\circ)^-$ ise; A kümesine **β – açık küme** [1],

denir. Ayrıca α – açık (semi – açık, pre – açık, β – açık) kümenin tümleyenine **α – kapalı** [30] (**semi – kapalı** [15], **pre – kapalı** [29], **β – kapalı** [1]) **küme** denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm α – açık kümelerin ailesini τ^α , semi – açık kümelerin ailesini $SO(X)$, pre – açık kümelerin ailesini $PO(X)$ ve β – açık kümelerin ailesini de $\beta O(X)$ sembolü ile göstereceğiz. Ayrıca bu bölümün içeriğinde geçen, bir $S \subset X$ kümesini kapsayan bütün pre – kapalı (β – kapalı) kümelerin kesişimi S

kümesinin pre – kapanışı (β – kapanışı [3]) olup S^{-p} ($S^{-\beta}$) şeklindedir [31]. Bir S kümesinde kapsanan bütün pre – açık (β – açık) kümelerin birleşimi S kümesinin pre – içi (β – içi [3]) olup S^{op} ($S^{o\beta}$) şeklindedir [31]. Bununla beraber (X, τ, I) ideal topolojik uzayında $(-^*)$ işleminin tümleyenini $(^\circ)^*$ işlemi ile sembolize edeceğiz.

Tanım 3.1.2. (X, τ, I) ideal topoloji uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

- i) $A \subset ((A^\circ)^{-*})^\circ$ ise; A kümesine **α – I – açık küme** [19],
- ii) $A \subset (A^\circ)^{-*}$ ise; A kümesine **semi – I – açık küme** [19],
- iii) $A \subset (A^{-*})^\circ$ ise; A kümesine **pre – I – açık küme** [16],
- iv) $A \subset ((A^{-*})^\circ)^-$ ise; A kümesine **β – I – açık küme** [19],

denir.

(X, τ, I) ideal topolojik uzayında bütün α – I – açık kümelerin ailesini $\alpha IO(X)$, semi – I – açık kümelerin ailesini $SIO(X)$, pre – I – açık kümelerin ailesini $PIO(X)$ ve β – I – açık kümelerin ailesini de $\beta IO(X)$ sembolü ile göstereceğiz.

Şimdi Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.2’ de geçen kümeleri esas alan bazı fonksiyon kavramlarını verelim.

Tanım 3.1.3. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \varphi$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \alpha IO(X)$ ise; f fonksiyonuna **α – I – sürekli** [19],
- ii) $f^{-1}(V) \in SIO(X)$ ise; f fonksiyonuna **semi – I – sürekli** [19],
- iii) $f^{-1}(V) \in \beta IO(X)$ ise; f fonksiyonuna **β – I – sürekli** [19]

fonksiyon denir.

Tanım 3.1.4. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \alpha O(Y)$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \alpha IO(X)$ ise; f fonksiyonuna **α – I – irresolute** [37],
- ii) $f^{-1}(V) \in SIO(X)$ ise; f fonksiyonuna **semi α – I – irresolute** [38],
- iii) $f^{-1}(V) \in \beta IO(X)$ ise; f fonksiyonuna **almost α – I – irresolute** [37]

fonksiyon denir.

Tanım 3.1.5. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \text{PO}(Y)$ kümesi için,

- i) $f^{-1}(V) \in \alpha \text{IO}(X)$ ise; f fonksiyonuna **$\alpha - I - \text{preirresolute}$** [6],
- ii) $f^{-1}(V) \in \beta \text{IO}(X)$ ise; f fonksiyonuna **$\beta - I - \text{preirresolute}$** [6]

fonksiyon denir.

Tanım 3.1.6. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \beta \text{O}(Y)$ kümesi için,

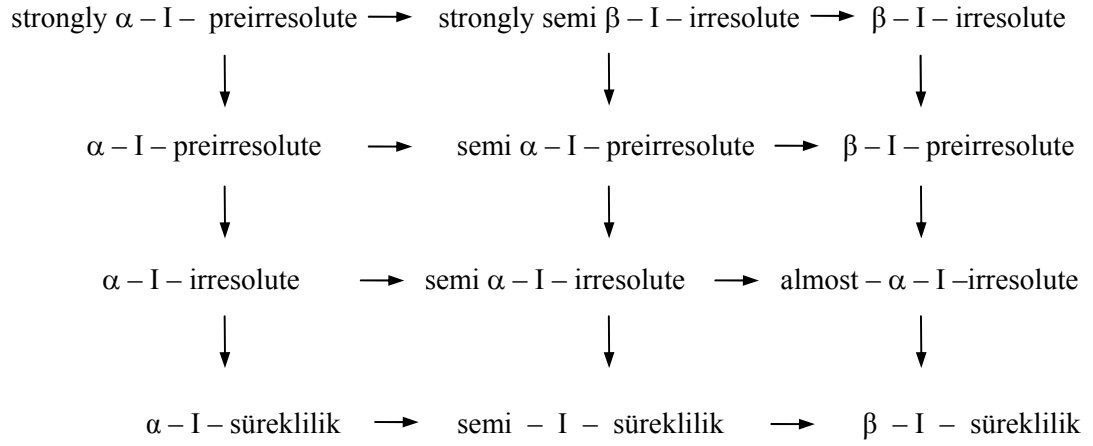
- i) $f^{-1}(V) \in \alpha \text{IO}(X)$ ise; f fonksiyonuna **strogly $\alpha - I - \text{preirresolute}$** [7],
- ii) $f^{-1}(V) \in \beta \text{IO}(X)$ ise; f fonksiyonuna **$\beta - I - \text{irresolute}$** [38]

fonksiyon denir.

Tanım 3.1.7. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $V \in \beta \text{O}(Y)$ kümesi için, $f^{-1}(V) \in \text{SIO}(X)$ ise, f fonksiyonuna **strongly semi $\beta - I - \text{irresolute fonksiyon}$** denir.

Tanım 3.1.8. Bir $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in \text{PO}(Y)$ kümesi için, $f^{-1}(V) \in \text{SIO}(X)$ oluyorsa, f fonksiyonuna **semi $\alpha - I - \text{preirresolute fonksiyon}$** denir.

Yukardaki tanımlardan yararlanarak Şekil – 2 yi aşağıdaki gibi elde ederiz.



Şekil – 2 –

Uyarı 3.1.1. Şekil – 2’de verdiğimiz geçişlerin tersleri genellikle doğru değildir.

Örnek 3.1.1. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de $\varphi = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi ile (Y, φ) topolojik uzayı verilsin. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = f(d) = b$, $f(c) = c$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\alpha - I - \text{preirresolute}$ fonksiyondur ancak $\beta - I - \text{irresolute}$ bir fonksiyon değildir. f fonksiyonunun $\alpha - I - \text{preirresolute}$ fonksiyon olduğunu göstermemiz için, her $V \in \text{PO}(Y)$ kümesi için, $f^1(V) \subset (((f^1(V))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğunu göstermeliyiz.

(i) $A = \{b\} \in \text{PO}(Y)$ kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{b\}) = \{a, b, d\}$ ve $(f^1(A))^\circ = \{a, b\}$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*} = X$ olur ve $((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ = X^\circ = X$ bulunur. Buradan $f^1(A) \subset (((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğu elde edilir.

(ii) $B = \{a, b\} \in \text{PO}(Y)$ kümesi için, $f^1(B) = f^1(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$ ve $(f^1(B))^\circ = \{a, b\}$, $((f^1(B))^\circ)^{-*} = X$ olur. Buradan $((f^1(B))^\circ)^{-*})^\circ = X$ bulunur ki $f^1(B) \subset (((f^1(B))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğu elde edilir.

(i) ve (ii) şıklarından f fonksiyonunun $\alpha - I - \text{preirresolute}$ fonksiyon olduğu görülür. Diğer taraftan $C = \{a, c\} \in \text{PO}(Y)$ kümesi için, $f^1(C) = f^1(\{a, c\}) = \{c\}$,

$(f^1(C))^{-*} = \{c, d\}$ ve $((f^1(C))^{-*})^\circ = \emptyset$ bulunur. $((f^1(C))^{-*})^\circ)^- = \emptyset$ ve $f^1(C) \not\subset ((f^1(C))^{-*})^\circ)^-$ olduğundan, f fonksiyonu $\beta - I -$ irresolute bir fonksiyon değildir.

Örnek 3.1.2. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de $\varphi = \{\emptyset, Y, \{b\}, \{a, c\}\}$ topolojisi ile (Y, φ) topolojik uzayı verilsin. $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = a$ ve $f(b) = f(d) = c$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu $\alpha - I -$ irresolute fonksiyondur ama $\beta - I -$ preirresolute bir fonksiyon değildir. f fonksiyonunun $\alpha - I -$ irresolute bir fonksiyon olduğunu göstermemiz için, her $A \in \alpha O(Y)$ kümesi için, $f^1(A) \subset (((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğunu göstermeliyiz.

$A = \{a, c\} \in \alpha O(Y)$ kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{a, c\}) = X$, $((f^1(A))^\circ)^{-*} = X$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ = X$ elde edilir. Dolayısıyla $f^1(A) \subset (((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ$ olup f fonksiyonu $\alpha - I -$ irresolute fonksiyon olur.

$B = \{b, c\} \in PO(Y)$ kümesi için, $f^1(B) = \{b, d\}$, $(f^1(B))^{-*} = \{b, d\}$ ve $((f^1(B))^{-*})^\circ = \{d\}$ bulunur. Buradan $((f^1(B))^{-*})^\circ)^- = \{c, d\}$ olur. Dolayısıyla $f^1(B) \not\subset (((f^1(B))^{-*})^\circ)^-$ olduğundan, f fonksiyonu $\beta - I -$ preirresolute bir fonksiyon değildir.

Örnek 3.1.3. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de $\varphi = \{\emptyset, Y, \{c\}, \{b, c\}\}$ topolojisi ile (Y, φ) topolojik uzayı verilsin. $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = b$, $f(c) = f(d) = a$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\alpha - I -$ sürekli fonksiyon olmasına rağmen almost $\alpha - I -$ irresolute bir fonksiyon değildir. $A = \{b, c\} \subset Y$ açık kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{b, c\}) = \{a, b\}$ ve $(f^1(A))^\circ = \{a, b\}$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*} = X$ olup $((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ = X$ bulunur. $f^1(A) \subset (((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğundan Tanım 3.1.3 gereği fonksiyon $\alpha - I -$ süreklidir. Fakat Y uzayındaki $B = \{a, c\} \in \alpha -$ açık kümesi için, $f^1(B) = f^1(\{a, c\}) = \{c, d\}$, $(f^1(B))^{-*} = \{c, d\}$ ve

$((f^1(B))^{-*})^\circ = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $((f^1(B))^{-*})^\circ = \emptyset$, $f^1(B) \not\subset ((f^1(B))^{-*})^\circ$ olup f fonksiyonu almost $\alpha - I -$ irresolute fonksiyon değildir.

Örnek 3.1.4. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de $\varphi = \{\emptyset, Y, \{b\}\}$ topolojisi ile (Y, φ) topolojik uzayı verilsin. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = c$ ve $f(c) = f(d) = b$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur ancak $\alpha - I -$ sürekli bir fonksiyon değildir. f fonksiyonunun strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğunu göstermemiz için, her $A \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(A) \subset ((f^1(A))^\circ)^{-*}$ olduğunu göstermeliyiz.

(i) $A = \{b\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(A) = \{c, d\}$, $((f^1(A))^\circ) = \{d\}$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*} = \{c, d\}$ elde edilir ki $f^1(A) \subset ((f^1(A))^\circ)^{-*}$ bulunur.

(ii) $B = \{a, b\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(B) = \{c, d\}$, $((f^1(B))^\circ) = \{d\}$ ve $((f^1(B))^\circ)^{-*} = \{c, d\}$ elde edilir ki $f^1(B) \subset ((f^1(B))^\circ)^{-*}$ bulunur.

(iii) $C = \{b, c\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(C) = f^1(\{b, c\}) = X$, $(f^1(C))^\circ = X$ ve $((f^1(C))^\circ)^{-*} = X$ elde edilir ki $f^1(C) \subset ((f^1(C))^\circ)^{-*}$ bulunur.

(i), (ii) ve (iii) şıklarından f fonksiyonunun strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğu görülür. Diğer taraftan $A = \{b\} \in \varphi$ kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{b\}) = \{c, d\}$, $(f^1(A))^\circ = \{d\}$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*} = \{c, d\}$ bulunur. $((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ = \{d\}$ ve $f^1(A) \not\subset (((f^1(A))^\circ)^{-*})^\circ$ olduğundan, f fonksiyonu $\alpha - I -$ sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 3.1.5. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de $\varphi = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$ topolojisi ile (Y, φ) topolojik uzayı verilsin. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = f(d) = a$,

$f(b) = c$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\beta - I -$ irresolute bir fonksiyondur. Ancak semi $- I -$ sürekli bir fonksiyon değildir. f fonksiyonunun $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğunu göstermemiz için, her $A \subset Y$ $\beta -$ açık kümesi için, $f^1(A) \subset (((f^1(A))^{-*})^\circ)^-$ olduğunu göstermeliyiz.

(i) $A = \{a\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{a\}) = \{a, c, d\}$ ve $(f^1(A))^{-*} = X$ olur. $((f^1(A))^{-*})^\circ = X^\circ = X$ ve $X^- = X$ olup $f^1(A) \subset (((f^1(A))^{-*})^\circ)^-$ bulunur.

(ii) $B = \{a, b\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(B) = f^1(\{a, b\}) = \{a, c, d\}$ ve $(f^1(B))^{-*} = X$ olur. $((f^1(B))^{-*})^\circ = X^\circ = X$ ve $X^- = X$ olup $f^1(B) \subset (((f^1(B))^{-*})^\circ)^-$ bulunur.

(iii) $C = \{a, c\} \in \beta O(Y)$ kümesi için, $f^1(C) = f^1(\{a, c\}) = X$ ve $(f^1(C))^{-*} = X$ olur ve $((f^1(C))^{-*})^\circ = X^\circ = X$ bulunur. Buradan $f^1(C) \subset (((f^1(C))^{-*})^\circ)^-$ olduğu elde edilir.

(i), (ii) ve (iii) şıklarından f fonksiyonunun $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğu görülür. Diğer taraftan $A = \{a\} \in \emptyset$ kümesi için, $f^1(A) = f^1(\{a\}) = \{a, c, d\}$, $(f^1(A))^\circ = \{d\}$ ve $((f^1(A))^\circ)^{-*} = (\{d\})^{-*} = \{d\}$ bulunur. $f^1(A) \not\subset ((f^1(A))^\circ)^{-*}$ olduğundan, Tanım 3.1.3 (ii) gereği, f fonksiyonu semi $- I -$ sürekli bir fonksiyon değildir.

Şimdi, strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyonunun sağladığı özellikleri inceleyelim.

Teorem 3.1.1. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur;
- ii) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren Y uzayındaki her V $\beta -$ açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayında bir semi $- I -$ açık $U \subset X$ alt kümesi vardır;
- iii) Her $V \subset Y$ $\beta -$ açık kümesi için, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$;
- iv) Her $F \subset Y$ $\beta -$ kapalı kümesi için, $f^1(F) \subset X$ kümesi semi $- I -$ kapalıdır;
- v) Her $B \subset Y$ alt kümesi için, $((f^1(B))^\circ)^{-*} \subset f^1(B^{-\beta})$;

vi) Her $A \subset X$ alt kümesi için, $f(((A^-)^{\circ*})) \subset (f(A))^{-\beta}$ olmasıdır.

İspat. i) $\Rightarrow$ ii) Herhangi bir $x \in X$ noktasını ve $f(x)$ noktasını içeren bir $V \subset Y$ β – açık kümesini alalım. Hipotez gereği, f fonksiyonu strongly semi β – I – irresolute fonksiyon olduğundan, Tanım 3.1.7 gereği, $f^1(V)$ kümesi x noktasını içeren X uzayında semi – I – açık bir kümedir. $U = f^1(V)$ diyelim. Bu taktirde U kümesi, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayının semi – I – açık bir kümesidir.

ii) $\Rightarrow$ iii) V kümesi Y uzayının herhangi bir β – açık kümesi ve $x \in f^1(V)$ olsun. Hipotezden $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ semi – I – açık kümesi vardır. Böylece $x \in U \subset (U^\circ)^{-*} \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ ve buradan da $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ olduğu elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ iv) Herhangi bir $F \subset Y$ β – kapalı kümesini alalım. $V = Y - F$ olsun. Dolayısıyla V kümesi Y uzayında β – açık bir kümedir. (iii) ifadesi gereği, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ elde edilir. Buradan $f^1(F) = X - f^1(Y - F) = X - f^1(V)$ kümesi X uzayında semi – I – kapalı küme olur.

iv) $\Rightarrow$ v) Herhangi bir $B \subset Y$ alt kümesini alalım. $(B^{-\beta})$ kümesi Y uzayının β – kapalı bir kümesi olduğundan, $f^1(B^{-\beta}) \subset X$ kümesi semi – I – kapalı bir kümedir. Buradan $((f^1(B^{-\beta}))^\circ)^{-*} \subset f^1(B^{-\beta})$ olur. Böylece $((f^1(B))^\circ)^{-*} \subset f^1(B^{-\beta})$ olduğu bulunur.

v) $\Rightarrow$ vi) A kümesi, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. Hipotez gereğince, $(A^-)^{\circ*} \subset ((f^1(f(A)))^\circ)^{-*} \subset f^1(((f(A))^{-\beta}))$ olduğu bulunur. Bu son ifadeden f fonksiyonuna göre görüntü alınırsa, $f((A^-)^{\circ*}) \subset (f(A))^{-\beta}$ ifadesi elde edilir.

vi) $\Rightarrow$ i) V kümesi, Y uzayının herhangi bir β – açık kümesi olsun. $f^1(Y - V) = X - f^1(V)$ kümesi, X uzayının bir alt kümesidir. Hipotez gereği,

$$\begin{aligned} f(((f^1(Y - V))^\circ)^{-*}) &\subset (f(f^1(Y - V)))^{-\beta} \\ &\subset (Y - V)^{-\beta} \\ &= Y - (V^{\circ\beta}) \\ &= Y - V \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$X - ((f^1(V))^\circ)^{-*} = ((X - f^1(V))^\circ)^{-*}$$

$$\begin{aligned}
&= ((f^1(Y - V))^\circ)^* \\
&\subset f^1(f(((f^1(Y - V))^\circ)^*)) \\
&\subset f^1(Y - V) \\
&= X - f^1(V)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ bulunup $f^1(V)$ kümesinin X uzayında semi – I – açık bir küme olduğu görülür. Dolayısıyla Tanım 3.1.7 gereği, f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

Lemma 3.1.1. ([2], [18], [34]). Her $i = 1, 2, \dots, n$ indisi için, bir $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesini ve boş olmayan, $X_{\lambda i}$ ailesinin bir $U_{\lambda i}$ alt kümesini alalım. Bu takdirde

$$\emptyset \neq U = \prod_{\lambda \neq \lambda i} X_\lambda \times \prod_{i=1}^n U_{\lambda i} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

şeklinde U kümesinin $\beta -$ açık [2] (sırasıyla, semi – açık [34], pre – açık [18]) bir küme olması için gerek ve yeter şart, her $i = 1, 2, \dots, n$ indisi için, $U_{\lambda i} \subset X_{\lambda i}$ kümesinin $\beta -$ açık (sırasıyla, semi – açık, pre – açık) küme olmasıdır.

Teorem 3.1.2. Eğer her $x \in X$ noktası için, $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g : (X, \tau) \rightarrow X \times Y$ grafik fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon ise, bu takdirde $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ noktasını ve $f(x)$ noktasını içeren bir $V \subset Y$ $\beta -$ açık kümesini alalım. Bu takdirde Lemma 3.1.1 gereği, $X \times V \subset X \times Y$ kümesi $g(x)$ noktasını içeren $\beta -$ açık bir küme olur. Hipotez gereği, g grafik fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğundan Teorem 3.1.1 (ii) gereği, $g(U) \subset X \times V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ semi – I – açık kümesi vardır. Dolayısıyla $f(U) \subset V$ olur. Böylece f fonksiyonun strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 3.1.3. Eğer $f : (X, \tau, I) \rightarrow \prod Y_\lambda$ fonksiyon strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon ise, $P_\lambda : \prod Y_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$

indisi için, $P_{\lambda} \circ f : (X, \tau) \rightarrow Y_{\lambda}$ bileşke fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V_{\lambda} \subset Y_{\lambda}$ kümesi $\beta -$ açık kümesini alalım. P_{λ} izdüşüm fonksiyonu, sürekli ve açık fonksiyon olduğundan [1, Teorem 2.2] gereği, $\beta -$ irresolute fonksiyondur. $\beta -$ irresolute fonksiyon tanımından, $p_{\lambda}^{-1}(V_{\lambda}) \subset \Pi Y_{\lambda}$ kümesi $\beta -$ açık bir küme olur. Hipotez gereği, f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğundan,

$$f^1(p_{\lambda}^{-1}(V_{\lambda})) = (P_{\lambda} \circ f)^{-1}(V_{\lambda})$$

kümesinin X uzayında semi $- I -$ açık küme olduğu elde edilir. Böylece, her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $P_{\lambda} \circ f$ bileşke fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

Lemma 3.1.2. [5] (X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) Eğer $O \in \tau$ ise, bu takdirde $O \cap (A)^{-*} \subset (O \cap A)^{-*}$.
- ii) Eğer $A \subset X_0 \subset X$ ise, bu takdirde $(A)^{-*X_0} = (A)^{-*} \cap X_0$.

Lemma 3.1.3. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. Eğer $A \in \text{PIO}(X)$, and $B \in \text{SIO}(X)$ ise, bu takdirde $A \cap B \in \text{SIO}(A)$ olur.

İspat. X uzayında herhangi bir pre $- I -$ açık A kümesi ve semi $- I -$ açık bir B kümesini alalım. Tanım 3.1.2 gereği, $A \subset ((A)^{-*})^{\circ}$ ve $B \subset ((B)^{\circ})^{-*}$ yazılabilir. Bu takdirde, Lemma 3.1.2 yi kullanarak,

$$\begin{aligned} A \cap B &\subset ((A)^{-*})^{\circ} \cap ((B)^{\circ})^{-*} \subset (((A)^{-*})^{\circ} \cap (B)^{\circ})^{-*} \\ &\subset ((A)^{-*} \cap (B)^{\circ})^{-*} \\ &= (A \cap (B)^{\circ})^{-*} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $A \cap B \subset (A \cap (B)^{\circ})^{-*} \cap A = (A \cap (B)^{\circ})^{-*A}$ elde edilir. Böylece $A \cap B$ kümesinin, A alt uzayında semi $- I -$ açık bir küme olduğu görülür.

Lemma 3.1.4. (X, τ, I) bir ideal topolojik uzay olsun. Eğer $A \in \text{SIO}(X_0)$, $A \subset X_0 \subset X$ ve $X_0 \in \text{SIO}(X)$ ise, bu takdirde $A \in \text{SIO}(X)$ olur.

İspat. A kümesi X_0 alt uzayında semi – I – açık bir küme olsun. Hipotezi, Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 ü kullanarak,

$$\begin{aligned}
 A &\subset ((A)^{\circ X_0})^{-*X_0} \\
 &= ((A)^{\circ X_0})^{-*} \cap X_0 \\
 &= ((A)^{\circ} \cap X_0)^{-*} \cap X_0 \\
 &\subset ((A)^{\circ} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*})^{-*} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &= ((A)^{\circ})^{-*} \cap (((X_0)^{\circ})^{-*})^{-*} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &\subset ((A)^{\circ})^{-*} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &= ((A)^{\circ})^{-*} \cap ((X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &= ((A)^{\circ} \cap (X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &= ((A \cap X_0)^{\circ})^{-*} \\
 &= ((A)^{\circ})^{-*}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A \subset ((A)^{\circ})^{-*}$ olur. Bu ifade de A kümesinin X uzayında semi – I – açık bir küme olduğunu gösterir.

Lemma 3.1.5. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Bu taktirde, her $i \in \mathbb{N}$ indisi ve her $\lambda_i \in \Lambda$ için, $A_{\lambda_i} \in \text{SIO}(X)$ ise

$$\bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} A_{\lambda_i} \in \text{SIO}(X)$$

olur.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ indisi ve her $\lambda_i \in \Lambda$ için, $A_{\lambda_i} \in \text{SIO}(X)$ olsun. Bu takdirde,

$$A_{\lambda_1} \subset \left((A_{\lambda_1})^\circ \right)^{-*} \subset \left(\left(\bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} A_{\lambda_i} \right)^\circ \right)^{-*}$$

$$A_{\lambda_2} \subset \left((A_{\lambda_2})^\circ \right)^{-*} \subset \left(\left(\bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda} A_{\lambda_2} \right)^\circ \right)^{-*}$$

•
•
•

olup, buradan birleşim işlemi alınır,

$$\bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} A_{\lambda_i} \subset \left(\left(\bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} A_{\lambda_i} \right)^\circ \right)^{-*}$$

ifadesinden $\bigcup_{\lambda_i \in \Lambda} A_{\lambda_i}$ kümesi X uzayında semi – I – açık küme olur.

Teorem 3.1.4. Eğer $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi pre – I – açık bir küme ise, bu takdirde $f/A : A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

İspat. $V \subset Y$ kümesi bir $\beta -$ açık küme olsun. Hipotez gereği, f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğundan $f^1(V) \subset X$ semi – I – açık bir küme olur. $A \subset X$ alt kümesi de pre – I – açık bir küme olduğundan $(f/A)^{-1}(V) = A \cap f^1(V) \subset A$ kümesi Lemma 3.1.3 gereği, semi – I – açık bir kümedir. Böylece Tanım 3.1.7 gereği, f/A kısıtlanmış fonksiyonunun strongly semi $\beta - I -$ irresolute bir fonksiyon olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.5. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ bir fonksiyon ve $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi X uzayının semi – I – açık bir örtüsü olsun. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ indisi için,

$$f/A_\lambda : A_\lambda \rightarrow Y$$

kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon ise, f fonksiyonu da strongly semi $\beta - I -$ irresolute bir fonksiyondur.

İspat. $V \subset Y$ bir $\beta -$ açık küme olsun. Hipotez gereği, f/A_λ kısıtlanmış fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğundan, Tanım 3.1.7 gereği, $(f/A_\lambda)^{-1}(V)$ kümesi A_λ alt uzayında semi $- I -$ açık bir küme olur. A_λ kümesi X uzayında semi $- I -$ açık bir küme olduğundan Lemma 3.1.4 gereği, her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $(f/A_\lambda)^{-1}(V) \subset X$ kümesi semi $- I -$ açık bir küme olur. Lemma 3.1.5 den semi $- I -$ açık kümelerin herhangi birleşimi semi $- I -$ açık küme olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= X \cap f^{-1}(V) \\ &= \cup \{A_\lambda \cap f^{-1}(V) : \lambda \in \Lambda\} \\ &= \cup \{(f/A_\lambda)^{-1}(V) : \lambda \in \Lambda\} \end{aligned}$$

kümesi, X uzayında semi $- I -$ açık bir kümedir. Böylece f fonksiyonunun strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğu elde edilir

Teorem 3.1.6. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ ve $g : (Y, \varphi) \rightarrow (Z, \upsilon)$ iki fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon ve g fonksiyonu $\beta -$ irresolute bir fonksiyon ise, $g \circ f : (X, \tau, I) \rightarrow (Z, \upsilon)$ bileşke fonksiyonu da strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyondur.

İspat. W kümesi Z uzayının herhangi bir $\beta -$ açık kümesi olsun. g fonksiyonu $\beta -$ irresolute fonksiyon olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayının $\beta -$ açık bir kümesi olur. f fonksiyonu strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğundan $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayının semi $- I -$ açık bir kümesi olur. Böylece $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun strongly semi $\beta - I -$ irresolute fonksiyon olduğu elde edilir.

3.2. Semi $\alpha - I$ – preirresolute Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri

Teorem 3.2.1. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \phi)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) f fonksiyonu semi $\alpha - I$ – preirresolute bir fonksiyondur;
- ii) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren Y uzayının her V pre – açık kümesi için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayında bir semi – I – açık $U \subset X$ alt kümesi vardır;
- iii) Her $V \subset Y$ pre – açık kümesi için, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$;
- iv) Her $F \subset Y$ pre – kapalı kümesi için, $f^1(F) \subset X$ kümesi semi – I – kapalıdır;
- v) Her $B \subset Y$ alt kümesi için, $((f^1(B))^\circ)^{-*} \subset f^1(B^{-p})$;
- vi) Her $A \subset X$ alt kümesi için, $f(((A)^\circ)^{-*}) \subset (f(A))^{-p}$ olmasıdır.

İspat. i) $\Rightarrow$ ii) Herhangi bir $x \in X$ noktasını ve $f(x)$ noktasını içeren bir $V \subset Y$ pre – açık kümesini alalım. Hipotez gereği, f fonksiyonu semi $\alpha - I$ – preirresolute fonksiyon olduğundan, Tanım 3.1.8 gereği, $f^1(V)$ kümesi x noktasını içeren X uzayında semi – I – açık bir kümedir. $U = f^1(V)$ diyelim. Bu taktirde U kümesi, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren X uzayının semi – I – açık bir kümesidir.

ii) $\Rightarrow$ iii) V kümesi Y uzayının herhangi bir pre – açık kümesi ve $x \in f^1(V)$ olsun. Hipotezden $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ semi – I – açık kümesi vardır. Böylece $x \in U \subset (U^\circ)^{-*} \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ ve buradan da $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ olduğu elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ iv) Herhangi bir $F \subset Y$ pre – kapalı kümesini alalım. $V = Y - F$ olsun. Dolayısıyla V kümesi Y uzayında pre – açık bir kümedir. (iii) ifadesi gereği, $f^1(V) \subset ((f^1(V))^\circ)^{-*}$ elde edilir. Buradan $f^1(F) = X - f^1(Y - F) = X - f^1(V)$ kümesi X uzayında semi – I – kapalı küme olur.

iv) $\Rightarrow$ v) Herhangi bir $B \subset Y$ alt kümesini alalım. (B^{-p}) kümesi Y uzayının pre – kapalı bir kümesi olduğundan, $f^1(B^{-p}) \subset X$ kümesi semi – I – kapalı bir

kümedir. Buradan $((f^1(B^{-p}))^{-})^{\circ*} \subset f^1(B^{-p})$ olur. Böylece $((f^1(B))^{-})^{\circ*} \subset f^1(B^{-p})$ olduğu bulunur.

vi) $\Rightarrow$ vi) A kümesi, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. Hipotez gereğince, $(A^{-})^{\circ*} \subset ((f^1(f(A)))^{-})^{\circ*} \subset f^1((f(A))^{-p})$ olduğu bulunur. Bu son ifadeden f fonksiyonuna göre görüntü alınırsa, $f((A^{-})^{\circ*}) \subset (f(A))^{-p}$ ifadesi elde edilir.

vi) $\Rightarrow$ i) V kümesi, Y uzayının herhangi bir pre – açık kümesi olsun. $f^1(Y - V) = X - f^1(V)$ kümesi, X uzayının bir alt kümesidir. Hipotez gereği,

$$\begin{aligned} f(((f^1(Y - V))^{-})^{\circ*}) &\subset (f(f^1(Y - V)))^{-p} \\ &\subset (Y - V)^{-p} \\ &= Y - (V^{\circ p}) \\ &= Y - V \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} X - ((f^1(V))^{\circ})^{-*} &= ((X - f^1(V))^{-})^{\circ*} \\ &= ((f^1(Y - V))^{-})^{\circ*} \\ &\subset f^1(f(((f^1(Y - V))^{-})^{\circ*})) \\ &\subset f^1(Y - V) \\ &= X - f^1(V) \end{aligned}$$

olur. Böylece $f^1(V) \subset ((f^1(V))^{\circ})^{-*}$ bulunup $f^1(V)$ kümesinin X uzayında semi – I – açık bir küme olduğu görülür. Dolayısıyla Tanım 3.1.8 gereği, f fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

Teorem 3.2.2. Eğer her $x \in X$ noktası için, $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g : (X, \tau) \rightarrow X \times Y$ grafik fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon ise, bu takdirde $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olur.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ noktasını ve $f(x)$ noktasını içeren bir $V \subset Y$ pre – açık kümesini alalım. Bu takdirde Lemma 3.1.1 gereği, $X \times V \subset X \times Y$ alt kümesi $g(x)$ noktasını içeren pre – açık bir küme olur. Hipotez gereği, g grafik fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğundan Teorem 3.2.1 (ii) gereği, $g(U) \subset X \times V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ semi – I – açık kümesi

vardır. Dolayısıyla $f(U) \subset V$ olur. Böylece f fonksiyonun semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 3.2.3. Eğer $f : (X, \tau, I) \rightarrow \Pi Y_\lambda$ fonksiyon semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon ise, bu takdirde $P_\lambda : \Pi Y_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $P_\lambda \circ f : (X, \tau) \rightarrow Y_\lambda$ bileşke fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

İspat. Herhangi bir $V_\lambda \subset Y_\lambda$ pre - açık kümesini alalım. P_λ izdüşüm fonksiyonu, sürekli ve açık fonksiyon olduğundan [1, Teorem 2.2] gereği, pre - irresolute fonksiyondur. pre - irresolute fonksiyon tanımından, $p_\lambda^{-1}(V_\lambda) \subset \Pi Y_\lambda$ kümesi pre - açık bir küme olur. Hipotez gereği, f fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğundan,

$$f^1(p_\lambda^{-1}(V_\lambda)) = (P_\lambda \circ f)^{-1}(V_\lambda)$$

kümesinin X uzayında semi - I - açık küme olduğu elde edilir. Böylece, her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $P_\lambda \circ f$ bileşke fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

Teorem 3.2.4. Eğer $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon ve $A \subset X$ alt kümesi pre - I - açık bir küme ise, bu takdirde $f/A : A \rightarrow (Y, \varphi)$ kısıtlanmış fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

İspat. $V \subset Y$ kümesi bir pre - açık küme olsun. Hipotez gereği, f fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğundan $f^1(V) \subset X$ semi - I - açık bir küme olur. $A \subset X$ alt kümesi de pre - I - açık bir küme olduğundan $(f/A)^{-1}(V) = A \cap f^1(V) \subset A$ kümesi Lemma 3.1.3 gereği, semi - I - açık bir kümedir. Böylece Tanım 3.1.8 gereği, f/A kısıtlanmış fonksiyonunun semi $\alpha - I -$ preirresolute bir fonksiyon olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.5. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ bir fonksiyon ve $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi X uzayının semi - I - açık bir örtüsü olsun. Eğer her $\lambda \in \Lambda$ indisi için,

$$f/A_\lambda : A_\lambda \rightarrow Y$$

kısıtlanmış fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon ise, f fonksiyonu da semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

İspat. $V \subset Y$ bir pre – açık küme olsun. Hipotez gereği, f/A_λ kısıtlanmış fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğundan, Tanım 3.1.8 gereği, $(f/A_\lambda)^{-1}(V)$ kümesi A_λ alt uzayında semi – $I -$ açık bir küme olur. A_λ kümesi X uzayında semi – $I -$ açık bir küme olduğundan Lemma 3.1.4 gereği, her $\lambda \in \Lambda$ indisi için, $(f/A_\lambda)^{-1}(V) \subset X$ kümesi semi – $I -$ açık bir küme olur. Lemma 3.1.5 den semi – $I -$ açık kümelerin herhangi birleşimi semi – $I -$ açık küme olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= X \cap f^{-1}(V) \\ &= \cup \{A_\lambda \cap f^{-1}(V) : \lambda \in \Lambda\} \\ &= \cup \{(f/A_\lambda)^{-1}(V) : \lambda \in \Lambda\} \end{aligned}$$

kümesi, X uzayında semi – $I -$ açık bir kümedir. Böylece f fonksiyonunun semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyonu olduğu elde edilir

Teorem 3.2.6. $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ ve $g : (Y, \varphi) \rightarrow (Z, \upsilon)$ iki fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon ve g fonksiyonu pre – irresolute bir fonksiyon ise, $\text{gof} : (X, \tau) \rightarrow (Z, \upsilon)$ bileşke fonksiyonu da semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyondur.

İspat. W kümesi Z uzayının herhangi bir pre – açık küme olsun. g fonksiyonu pre – irresolute fonksiyon olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayının pre – açık bir kümesi olur. f fonksiyonu semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğundan $(\text{gof})^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayının semi – $I -$ açık bir kümesi olur. Böylece gof bileşke fonksiyonunun semi $\alpha - I -$ preirresolute fonksiyon olduğu elde edilir.

Tanım 3.2.1. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $A^* = X$ oluyorsa, bu takdirde A kümesine $\tau^* -$ **yoğun küme** [17] denir.

Tanım 3.2.2. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer, X uzayının her τ^* – yoğun alt kümesi X uzayında açık küme oluyorsa; bu takdirde X uzayına **I – submaximal uzay** [6] denir.

Tanım 3.2.3. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer, X uzayının her $A \in \tau$ kümesi için, $\emptyset \neq A^* \in \tau$ oluyorsa; bu takdirde X uzayına **P – I – disconnected uzay** [6] denir.

Teorem 3.2.7. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı I – submaximal uzay ve P – I – disconnected uzay olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) Strongly semi β – I – irresolute $\Leftrightarrow$ strongly α – I – preirresolute
- ii) Semi α – I – preirresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – I – preirresolute
- iii) Semi α – I – irresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – I – irresolute
- iv) α – I – sürekli $\Leftrightarrow$ semi – I – sürekli
- v) strongly α – I – preirresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – I – preirresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – I – irresolute $\Leftrightarrow \alpha$ – I – sürekli.

İspat. X uzayı hem I – submaximal uzay hem de P – I – disconnected uzay olduğundan $\tau = \alpha IO(X) = SIO(X) = PIO(X)$ eşitlikleri vardır.

Tanım 3.2.4. [8] (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her yoğun alt kümesi bu uzayda açık küme oluyorsa, bu takdirde (X, τ) uzayına **submaximal uzay** denir.

Tanım 3.2.5. [22] (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her açık kümesinin kapanışı yine bu uzayda açık küme oluyorsa; bu takdirde (X, τ) uzayına **extramally disconnected uzay** denir.

Eğer (X, τ) topolojik uzayı submaximal ve extramally disconnected uzay ise, bu taktirde $\tau = \tau^\alpha = SO(X) = PO(X) = \beta O(X)$ dir [21].

Teorem 3.2.8. (Y, φ) topolojik uzayı submaximal uzay ve extramally disconnected uzay olsun. Bu takdirde $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) Strongly semi $\beta - I -$ irresolute $\Leftrightarrow$ semi $\alpha - I -$ preirresolute $\Leftrightarrow$ semi $\alpha - I -$ irresolute $\Leftrightarrow$ semi $- I -$ süreklilik.

ii) $\beta - I -$ preirresolute $\Leftrightarrow$ almost $\alpha - I -$ irresolute $\Leftrightarrow \beta - I -$ irresolute. $\Leftrightarrow \beta - I -$ süreklilik.

İspat. Açıktır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

(X, τ) topolojik uzayında [12]' de verilen strongly semi β – irresolute fonksiyonlar ve semi α – preirresolute fonksiyonlar isimli çalışmayı inceleyip bu fonksiyonların sağladığı özellikler için gerekli yorumları yaptık. (X, τ, I) ideal topolojik uzayında bazı sürekli fonksiyon türleri tanımladık. Bu fonksiyon türlerinin genel olarak bulundukları yeri tespit edip, terslerinin doğru olmadığına dair örnekler verdik. Ayrıca strongly semi β – I – irresolute ve semi α – I – preirresolute fonksiyon kavramlarının sağladığı özellikleri ayrıntılı olarak inceleyip yorumladık.

Bu çalışma üzerinde incelemeler yapıp yeni kavramlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Abd El – Monsef M.E., El – Deeb S. N. and Mahmoud R. A., 1983, β – open sets and β – continuous mapping, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., A 12 (1), 77 – 90.
- [2] Abd El – Monsef M. E., Geaisa A. N. and Mahmoud R. A., 1985, β - regular spaces, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 60, 47-52.
- [3] Abd El – Monsef M.E., Mahmoud R. A. and Lashin E. R., 1986, β - closure and β - interior, J. Fac. Ed. Ain Shams Univ. 10, 235-245.
- [4] Abd El – Monsef M. E., Mahmoud R. A. And Nasef A. A., 1990, A class of functions stronger than M – precontinuity, preirresolute and A functions, Qatar Univ. Sci. Bull. 10, 41-48.
- [5] Açıkgöz A., Noiri T. and Yüksel Ş., 2004, On α -I-continuous and α -I-open functions, Acta Math. Hungar., 105 (1-2), 27-37.
- [6] Acıkgoz A., Yuksel S. and Noiri T., 2005, α – I – preirresolute functions and β – I – preirresolute functions, Bull. Malaysian Math. Sci. Soc., Vol. 28 (1).
- [7] Acıkgoz A. and Yuksel S., 2005, A new class of functions, J. Pure Math., 22, 1-8.
- [8] Arhangel'skii A. V. and Collins P. J., 1995, On submaximal spaces, Topology and its Applications, 64, 219-241.
- [9] Beceren Y., 2000, On semi α – irresolute functions, J. Indian Acad. Math., 22, (2), 353 – 362.
- [10] Beceren Y. 2000, Almost α – irresolute functions, Bull. Calcutta Math. Soc. 92 (3), 213-218.
- [11] Beceren Y. and Noiri T., 2001, Strongly α – preirresolute functions and strongly β - preirresolute functions, J. Pure Math., 18, 1, 1-7.
- [12] Beceren Y. and Noiri T., 2001, Strongly semi – β – irresolute functions and semi – α – preirresolute functions, Far East J. Math. Sci., 3 (6), 973-983.
- [13] Beceren Y. and Noiri T., 2003, α – preirresolute functions and β - preirresolute functions, Demonstratio Math., 36, 1, 207-213.
- [14] Bourbaki N., 1966, General Topology, Addison – Wesley Mass.
- [15] Crossley, S. G. and Hildebrand, S. K., 1971, Semi - closure, Texas J. Sci. 22 (2-3), 99-112.

- [16] Dontchev J., 1996, On pre – I – open sets and a decomposition of I – continuity, Banyan Math. J. 2.
- [17] Dontchev J., M. Ganster and D. Rose, 1999, Ideals Resolvability, Topology and its Applications, Vol. 93, 1 – 16.
- [18] El-Deeb S. N., Hasanein I. A., Mashhour A. S. and Noiri T., 1983, On p-regular spaces, Bull. Math Soc. Sci. Math. R. S, Roumanie (N. S) 27 (75) (4), 311-315.
- [19] Hatir E. and Noiri T., 2002, On decompositions of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., 96, 341 – 349.
- [20] Hayashi E., 1964, Topologies defined by local properties, Math. Ann., Vol. 156, 205-215.
- [21] Jankovic' D. S., 1983, On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. I 97 (2), 59-72.
- [22] Jankovic' D. S., 1985, A note on mappings of extremally connected Spaces, Acta Math. Hungar, 46, No. 1 – 2, 83 – 92
- [23] Jankovic' D. and Hamlet, T. R., 1990, New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, Vol. 97, 295 – 310.
- [24] Kuratowski K., 1933. Topologies I, Warszawa.
- [25] Levine N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41.
- [26] La Faro G., 1987, On strongly α – irresolute mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 18, 146-151.
- [27] Maheshwari S. N. and Thakur S. S., 1980, On α – irresolute mappings, Tamkang J. Math. 11 (2), 209 – 214.
- [28] Mahmoud, R. A. and Abd El-Monsef, M. E., 1990, β – irresolute and β – topological invariant, Proc. Pakistan Acad. Sci., 27 (3), 285-296.
- [29] Mashhour A. S., Abd El – Monsef M. E. and El – Deeb S. N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47 – 53.
- [30] Mashhour A. S., Hasanein I. A. and El – Deeb S. N., 1983, α – continuous and α – open mappings, Acta Math. Hungar., 41 (3-4), 213 – 218.

- [31] Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E. and Hasanein I. A., 1984, On pretopological spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.) 28 (76) (1), 39-45.
- [32] Nasef A. A. and Noiri T., 1996, Strongly β – irresolute functions, J Natur. Sci. Math 36 (2), 199-206.
- [33] Njåstad O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., 15, 961 – 970.
- [34] Noiri, T., 1973, Remark on Semi open mappings, Bull Calcutta Math. Soc. 65 (4), 197-201.
- [35] Samuels P., 1975, A topology farmed from a given topology and ideal, J. London Math. Soc., (2) 10, 409 – 416.
- [36] Vaidyanathaswamy R., 1960, Set topology, Chelsa Publishing Company, New York.
- [37] Yuksel S., Acikgoz A. and Noiri T., 2003, On α – pre – I – continuous functions, Bull. Calcutta Math. Soc., 26 (7 – 9), 7 – 12.
- [38] Yüksel Ş, Açikgöz A. and O. Uyar, 2006., On a new type of functions, J. Inst. Math. Com. Sci., 19, 2, 157-163.