

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Özge ŞEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2007**

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Özge ŞEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde sırasıyla fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı ve yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizileri kavramlarına ilişkin bazı bilinen sonuçlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde fonksiyon dizileri için istatistiksel anlamda noktasal ve düzgün yakınsaklık, μ -istatistiksel ve μ -yoğunlukta yakınsaklık kavramları verilmiş ve klasik analizde iyi bilinen ve ikinci bölümde verdiğimiz bazı temel sonuçların istatistiksel benzerleri elde edilmiştir. Son bölümde ise I-yakınsaklık kavramı verilip fonksiyon dizilerinin I-yakınsaklığı incelenmiştir.

2007, 36 sayfa

Anahtar Kelimeler: Noktasal ve düzgün yakınsaklık, yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, μ -istatistiksel yakınsaklık, μ -yoğunlukta yakınsaklık, ideal yakınsaklık.

ABSTRACT

Master Thesis

STATISTICAL CONVERGENCE OF FUNCTION SEQUENCES

Özge ŞEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In chapter two, we study the uniform convergence of function sequences as well as the convergence preserving function sequences. In chapter three, we consider the statistically and μ -statistically pointwise convergent and uniformly convergent function sequences. We also give some results analogues to those given in Analysis. In the final chapter, we recall I-convergence and examine the I-convergence of function sequences.

2007, 36 pages

Key Words: Pointwise convergence, uniformly convergence, density, statistical convergence, μ -statistical convergence, convergence in μ -density, ideal convergence.

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren ve araŐtırmalarımın her aŐamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, Sayın ArŐ. Gör. Özlem GİRGIN ATLIHAN ile her zaman yanımda olan ve desteğini hiç esirgemeyen canım aileme teşekkür ederim.

Özge ŞEN
Ankara, Temmuz 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Fonksiyon Dizileri ve Düzgün Yakınsaklık	2
2.2 Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyon Dizileri	7
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ	12
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık	12
3.2 İstatistiksel Cauchy Dizisi	14
3.3 μ - İstatistiksel ve μ -Yoğunlukta Yakınsaklık	15
3.4 μ - İstatistiksel ve μ -Yoğunlukta Yakınsak Fonksiyon Dizileri	19
3.5 μ - İstatistiksel Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyon Dizileri	25
4. I-YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ	30
4.1 I-Yakınsaklık	30
4.2 I-Yakınsaklık Fonksiyon Dizileri	31
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

Anahtar Kelimeler: Banach örgüleri, sıra yakınsaklık, sıra sürekli operatör, operatör normu, sıra sınırlı norm.

Key Words: : Banach lattices, order convergence, order continuous operators, operator norm, order-bounded norm.

ÖNSÖZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	Doğal Sayılar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
$ A $	A Kümesinin Eleman Sayısı
A^c	A Kümesinin Tümlenyeni
c	Yakınsak Diziler Uzayı
c_0	Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
st	İstatistiksel Yakınsak Diziler Uzayı
$\delta(A)$	A Kümesinin Doğal Yoğunluğu
$h.h.k$	Hemen Her k İçin
χ_A	A Kümesinin Karakteristik Fonksiyonu
$B(D)$	D Üzerindeki Sınırlı Fonksiyonların Uzayı
$\ \cdot\ _{B(D)}$	$B(D)$ Uzayının Alışılmış Supremum Normu
C_1	Cesáro Matrisi
$A \Delta B$	A ve B Kümelerinin Simetrik Farkı
$P(\mathbb{N})$	Doğal Sayıların Kuvvet Kümesi
$B(x, \delta)$	Merkezi x , Yarıçapı δ Olan Açık Yuvar

1. GİRİŞ

İlk olarak 1951 yılında Steinhaus tarafından Polonya’da yapılan bir konferansta tanıtılan ve yine aynı yıl Fast tarafından geliştirilen “İstatistiksel Yakınsaklık” kavramı matematiğin bir çok alanı ile olan ilişkisi nedeniyle uzun süredir bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Connor 1990 ve 1992 yıllarındaki çalışmalarında yoğunluk kavramı yerine sonlu toplamsal bir küme fonksiyonunu kullanarak istatistiksel yakınsaklığı daha da genelleştirmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde, reel sayıların bir alt kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyon dizileri için istatistiksel, μ -istatistiksel ve μ -yoğunlukta yakınsaklık tanımlarını kullanarak Analizde iyi bilinen bazı klasik sonuçların istatistiksel benzerlerini elde edeceğiz. Bu sayede bilinen bazı sonuçların daha zayıf koşullar altında da gerçekleştirilebileceğini göstereceğiz. Son olarak fonksiyon dizilerinin I-yakınsaklığını inceleyeceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde fonksiyon dizilerini, özellikle fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığına ilişkin özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizilerinden bahsedeceğiz.

2.1 Fonksiyon dizileri ve düzgün yakınsaklık

Bu kısım düzgün yakınsak fonksiyon dizilerine ayrılmıştır.

Tanım.2.1.1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \rightarrow F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna fonksiyon dizisi adı verilir (Rudin 1953).

Tanım.2.1.2. (f_n) $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ verildiğinde her $n \geq n_o$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir n_o sayısının var olmasıdır (Rudin 1953).

Tanım.2.1.3. (f_n) $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_o$ ve her bir $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir n_o sayısının var olmasıdır (Rudin 1953).

Bu tanımdan aşağıdaki sonucu kolayca elde edebiliriz.

Teorem.2.1.1. f_n ve f fonksiyonları $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olsunlar. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_n = \sup_{x \in A} | f_n(x) - f(x) |$$

eşitliği ile tanımlanan (c_n) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır (Rudin 1953).

Şimdi yakınsaklığın düzgün olması halinde limit fonksiyonunun ne gibi özelliklere sahip olduğunu görelim.

Teorem.2.1.2. f_n fonksiyonları A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir (Rudin 1953).

İspat: (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_o doğal sayısı bulunabilir ki her $n \geq n_o$ ve her $x \in A$ için

$$| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. $x_0 \in A$ olsun f_{n_o} fonksiyonu x_0 da sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardırki $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$| f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır.

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_{n_o}(x) + f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_0) + f_{n_o}(x_0) - f(x_0)$$

olduğundan, A nın $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan x elemanları için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_o}(x)| + |f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_0)| + |f_{n_o}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise f nin x_0 da sürekli olduğunu gösterir. x_0 keyfi seçildiğinden f fonksiyonu A üzerinde sürekli dir.

O halde Teorem.2.1.2 nin hipotezleri altında,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right\}$$

yazılabilir.

Bu teoremden şu sonucu çıkarabiliriz:

Terimleri sürekli fonksiyonlar olan (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunda f limit fonksiyonu sürekli değil ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

Aşağıdaki sonuç yukarıdaki teoremin bir karşıtı olarak düşümlenebilir.

Teorem.2.1.3. (*Dini Teoremi*)

(f_n) reel sayıların kompakt bir D altkütmesi üzerinde sürekli ve monoton fonksiyonların bir dizisi olsun. Ayrıca (f_n) dizisinin D üzerinde sürekli bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda D üzerinde (f_n) , f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır (Rudin 1953).

İspat: (f_n) monoton azalan olsun ve $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ yazalım. Hipotezden g_n fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca (g_n) dizisi sıfır fonksiyonuna D üzerinde noktasal yakınsaktır. Şimdi gösterelim ki (g_n) dizisi sıfır fonksiyonuna D üzerinde düzgün yakınsaktır.

$g_n \rightarrow 0$ (D üzerinde) olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için en az bir n_x sayısı

vardır öyle ki her $n \geq n_x$ için

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. $g_{n_x}, x \in D$ noktasında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için x elemanını içeren en az bir $J(x)$ açık kümesi vardır öyle ki $t \in J(x)$ için

$$|g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Bu durumda monotonluktan dolayı her $t \in J(x)$ ve $n \geq n_x$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_n(t) \leq g_{n_x}(t) = g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x) + g_{n_x}(x) \\ &\leq |g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)| + |g_{n_x}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yani; $0 \leq g_n(t) \leq \varepsilon$ elde edilir. $D \subset \cup_{x \in D} J(x)$ olup D kümesi kompakt olduğundan, Heine-Borel teoremi uyarınca D kümesi, $D \subset J(x_1) \cup J(x_2) \cup \dots \cup J(x_m)$ olacak şekilde sonlu bir açık örtüye sahiptir. $N = maks \{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_m}\}$ seçersek her $t \in D$ ve $n \geq N$ olacak şekilde en az bir N sayısı bulunur öyleki $0 \leq g_n(t) \leq \varepsilon$ bulunur. O halde D üzerinde $g_n \rightrightarrows 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bazen limit fonksiyonunu kullanmadan düzgün yakınsaklığa denk bir kritere ihtiyaç duyulur. Bu kriteri aşağıdaki tanım ve teorem ile ifade edebiliriz.

Tanım.2.1.4. (f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, her $m, n \geq n_0$ olduğunda her $x \in A$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise bu durumda (f_n) bir “Düzgün Cauchy dizisidir” denir (Rudin 1953).

Teorem.2.1.4. (f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin A üzerinde düzgün Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizisinin A üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır (Rudin 1953).

İspat: (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ki her $n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Eğer $m, n \geq n_0$ seçilirse her $x \in A$ için

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Bu da (f_n) dizisinin düzgün Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Karşıt olarak (f_n) dizisi bir düzgün Cauchy dizisi olsun. Bu durumda reel terimli $(f_n(x))$ dizisi bir Cauchy dizisidir. \mathbb{R} deki her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $(f_n(x))$ dizisi bir $f(x)$ sayısına yakınsar. Dolayısıyla A üzerinde $f(x) = \lim f_n(x)$ eşitliği yardımıyla bir f fonksiyonu tanımlanmış olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. (f_n) düzgün Cauchy dizisi olduğundan öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ki her $m, n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olur. Böylece her $x \in A$ ve her $m > n_0$ için

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu da (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi vereceğimiz teorem hangi hallerde integral ile limit alma işlemlerinin sırasını değiştirebileceğimizi vermektedir.

Teorem.2.1.5. (f_n) , $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli ve sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. f_n fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir-

dir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir (Rudin 1953).

Teorem.2.1.6. Bir sınırlı I aralığı üzerinde tanımlı f_n fonksiyonları bu aralık üzerinde sürekli türevlere sahip olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve (f'_n) türev dizisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise I üzerinde $g = f'$ dir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

gerçeklenir (Rudin 1953).

2.2 Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyon Dizileri

Bu kısımda yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizilerini inceleyeceğiz.

\mathbb{R} reel sayılar kümesini göstermek üzere S , \mathbb{R} nin kapalı bir alt kümesi ve $f_k : S \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) olmak üzere $\mathbb{F} = (f_k)$ bir fonksiyon dizisi olsun.

Tanım.2.2.1. Terimleri S den alınan yakınsak her $x = (t_k)$ dizisi için $\mathbb{F}(x)$ dizisi de yakınsak oluyor ise \mathbb{F} dizisine S üzerinde yakınsaklığı koruyan veya konservatif fonksiyon dizisi denir (Kolk 1999).

Eğer konservatif \mathbb{F} dizisi, aynı zamanda S üzerindeki yakınsak dizilerin limit değerlerini de koruyor ise bu durumda S üzerinde regüler fonksiyon dizisi adını alır.

Örneğin ; $f_k(t) = \frac{kt}{k+1}$ fonksiyon dizisi konservatif ve regülerdir. Fakat $g_k(t) = e^{-kt}$ fonksiyon dizisi $[0, 2]$ kapalı aralığında konservatif değildir.

Teorem.2.2.1. $\mathbb{F} = (f_k)$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdaki iki ifade birbirine denktir.

(i) \mathbb{F} , $[a, b]$ üzerinde konservatiftir.

(ii) \mathbb{F} , $[a, b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır (Kolk 1999).

İspat : (i) \implies (ii) :

\mathbb{F} , $[a, b]$ üzerinde konservatif olsun. Bu durumda *her* $t \in [a, b]$ için $\lim_k f_k(t) = f(t)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır. O halde \mathbb{F} , f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde noktasal yakınsaktır. f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için f fonksiyonunun bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda $[a, b]$ aralığında $\lim_k u_k = t_0$ olduğunda $\lim_k f(u_k) \neq f(t_0)$ olacak biçimde bir (u_k) dizisi vardır.

$[a, b]$ üzerinde $\mathbb{F} \rightarrow f$ olduğundan, köşegenleştirme yöntemini (Bartle 1964) kullanarak bir (n_k) artan indis dizisi inşa edebiliriz öyle ki, $(m_k) = \mathbb{N} \setminus (n_k)$ sonsuz omak üzere

$$\lim_k [f_{n_k}(u_k) - f(u_k)] = 0$$

gerçeklenir. Şimdi bir (t_i) dizisini

$$t_i = \begin{cases} t_0 , i = m_k \\ u_k , i = n_k \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O halde $\lim_i t_i = t_0$ gerçekleşir. Fakat

$$\lim_k f_{m_k}(t_{m_k}) = \lim_k f_{m_k}(t_0) = f(t_0) \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \lim_k f_{n_k}(t_{n_k}) &= \lim_k [f_{n_k}(u_k) - f(u_k)] + \lim_k f(u_k) \\ &= \lim_k f(u_k) \neq f(t_0) \end{aligned}$$

olması \mathbb{F} nin konservatif olması ile çelişir. O halde f sürekli dir.

Şimdi $[a, b]$ üzerinde $\mathbb{F} \ni f$ olduğunu yani yakınsaklığın “düzgün” olduğunu göstere-
lim. Kabul edelimki \mathbb{F} , f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olmasın.

Bu durumda $\mathbb{N} \setminus (n_k)$ sonsuz omak üzere en az bir (n_k) indis dizisi için

$$|f_{n_k}(t_k) - f(t_k)| \geq 2\varepsilon_0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ ve $t_k \in [a, b]$ vardır. Diğer yandan $x = (t_k)$ dizisi sınırlı olduğundan bir (t_{k_i}) yakınsak alt dizisine sahiptir. Bu limit değerine L diyelim.

$\lim_i t_{k_i} = L$ ise f sürekli olduğundan $\lim_k f(t_{k_i}) = f(L)$ gerçekleşir. Böylece $i \geq i_0$ için

$$|f(t_{k_i}) - f(L)| < \varepsilon_0$$

olacak şekilde bir i_0 indisi vardır.

$i \geq i_0$ için,

$$\begin{aligned} \left| f_{n_{k_i}}(t_{k_i}) - f(L) \right| &\geq \left| f_{n_{k_i}}(t_{k_i}) - f(t_{k_i}) \right| - |f(t_{k_i}) - f(L)| \\ &\geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (1)$$

elde ederiz. Şimdi bir $z = (u_j)$ dizisini

$$u_j = \begin{cases} t_{k_i}, & j = n_{k_i} \\ L, & j \neq n_{k_i} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O halde $\lim_j u_j = L$ olduğu açıktır.

$\mathbb{F}(z)$ dizisinin indisleri $\mathbb{N} \setminus (n_{k_i})$ de olan alt dizileri $f(L)$ değerine yakınsıyor, fakat $(f_{n_{k_i}}(u_{n_{k_i}})) = (f_{n_{k_i}}(t_{k_i}))$ alt dizisi (1) den dolayı $f(L)$ değerine yakınsamıyor. Bu ise \mathbb{F} nin konservatif olması ile çelişir. O halde $[a, b]$ üzerinde \mathbb{F} dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

(ii) \implies (i) :

\mathbb{F} , $[a, b]$ üzerinde sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. $(f_k) \rightrightarrows f$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_1 = n_1(\varepsilon)$ vardır ki her $k \geq n_1$ ve her $t \in [a, b]$ için,

$$|f_k(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Şimdi $x = (t_k)$, $[a, b]$ aralığında yakınsak bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_k t_k = t_0$ ise f sürekli olduğundan $\lim_k f(t_k) = f(t_0)$ gerçekleşir. O halde her $\varepsilon > 0$ için bir $n_2 = n_2(\varepsilon)$ vardır öyle ki $k \geq n_2$ için,

$$|f(t_k) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Böylece $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dersek her $k \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} |f_k(t_k) - f(t_0)| &\leq |f_k(t_k) - f(t_k)| + |f(t_k) - f(t_0)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu ise $\lim_k f_k(t_k) = f(t_0)$ olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.1 tarafından kapsanan aşağıdaki teorem, klasik analizde sıkça kullandığımız “Kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olması halinde limit fonksiyonu da bu kapalı aralıkta süreklidir (Rudin 1953)” teoreminin tamamlayıcısı olarak da düşünülebilir.

Teorem.2.2.2. $\mathbb{F} = (f_k)$ fonksiyon dizisi $[a, b]$ kapalı aralığında (veya \mathbb{R} deki her kapalı aralıkta) f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ de (veya \mathbb{R} de) sürekli olması için gerek ve yeter şart \mathbb{F} dizisinin $[a, b]$ de (veya \mathbb{R} de) konservatif olmasıdır (Kolk 1999) .

Sonuç.2.2.1. $\mathbb{F} = (f_k)$, \mathbb{R} de tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. O halde \mathbb{F} fonksiyon dizisinin , \mathbb{R} üzerinde konservatif olması için gerek ve yeter şart \mathbb{F} fonksiyon

dizisinin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olmasıdır (Kolk 1999).

Şimdi fonksiyon dizilerinin regüleriğini inceleyelim.

\mathbb{F} , $[a, b]$ üzerinde regüler ise her $t \in [a, b]$ için $\lim_k f_k(t) = t$ olur. Teorem.2.2.1 de $(ii) \implies (i)$ nin ispatında $f(t) = t$ alırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Teorem.2.2.3. $\mathbb{F} = (f_k)$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. O halde \mathbb{F} fonksiyon dizisinin $[a, b]$ üzerinde regüler olması için gerek ve yeter şart \mathbb{F} dizisinin $[a, b]$ üzerinde $f(t) = t$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır (Kolk 1999).

Sonuç.2.2.2. $\mathbb{F} = (f_k)$, \mathbb{R} de tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. O halde \mathbb{F} fonksiyon dizisinin \mathbb{R} üzerinde regüler olması için gerek ve yeter şart \mathbb{F} fonksiyon dizisinin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde $f(t) = t$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır (Kolk 1999).

Aşağıdaki verilen örnekte kolayca görülüyor ki Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 de her bir f_k sürekli olmayabilir ve Sonuç 2.2.1' in ikinci kısmında $[a, b]$ yerine tüm \mathbb{R} yazılamaz.

Örnek.2.2.1. $f_k(t) = \begin{cases} 1, & t = k \\ 0, & t \neq k \end{cases}$

fonksiyon dizisinde her bir f_k süreksiz olup her $[a, b]$ kapalı aralığı için $f_k(t) \rightrightarrows 0$ olduğu kolayca görülebilir.

O halde $\mathbb{F} = (f_k)$ konservatiftir fakat regüler değildir.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ

Bu bölümde önce istatistiksel yakınsaklığı ve μ -istatistiksel yakınsaklığı tanıtır ve sonra istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerini inceleyeceğiz.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

\mathbb{N} doğal sayılar kümesini göstermek üzere bir $A \subset \mathbb{N}$ altkütmesi verilsin ve $\{k \leq n : k \in A\}$ kümesi A_n ile, A kümesinin eleman sayısı da $|A|$ ile gösterilsin.

Tanım.3.1.1. Bir $A \subset \mathbb{N}$ altkütmesi için $\lim_n \frac{1}{n} |A_n|$ limiti mevcut ise bu limit değerine A kümesinin “yoğunluğu” (veya “doğal yoğunluğu”) denir. $\delta(A)$ ile gösterilir. Ayrıca (a_n) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(A)$ mevcut ise $\delta(A) = \lim_n \frac{n}{a_n}$ ile verilir (Niven and Zucker man 1980).

Örneğin;

$\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{m^2 : m \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$, $\delta(\{2m + 1 : m \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. A asal sayıların oluşturduğu bir küme olsun; n den küçük yada eşit olan asal sayıların sayısı $\frac{n}{\ln n}$ den küçük veya eşit olacağından $\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \text{ asal}\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \frac{n}{\ln n} = 0$ olup $\delta(A) = 0$ elde edilir. Hatta doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunluklıdır. Ayrıca $\delta(A \cup A^c) = 1$ gerçekleşir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım.3.1.2. $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve $x_k \longrightarrow L$ (*stat*) veya $st - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir (Salat 1980).

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı üzere, eğer x dizisi bir L sayısına

istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak dizilerin uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını da st ile gösterecek olursak, bu durumda $c \subset st$ olduğu kolayca görülür. Aşağıdaki örnek bu kapsamın karşıtının doğru olamayacağını göstermektedir.

Örnek.3.1.1. $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 ; k = m^2 \\ 0 ; k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda tanım.3.1.2 uyarınca $st - \lim_k x_k = 0$ olur. Fakat buradaki x dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.

Hatta yakınsak her dizi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez.

Örnek.3.1.2. $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} ; k = m^2 \\ 0 ; k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda yine $st - \lim_k x_k = 0$ olmasına rağmen x dizisi üstten sınırsızdır.

Teorem.3.1.1. Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta \{n_k; k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır (Salat 1980, Fridy 1985, Connor 1988).

O halde Teorem.3.1.1 den $st - \lim_{k} x_k = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K) = 1$ olacak şekilde öyle bir $K \subset \mathbb{N}$ altkütmesi ve $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardırki $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in K$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ sağlanır. Kısacası sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında (bir yoğunluklu indis kümesi üzerinde) x dizisi L değerine klasik anlamda yakınsak ise bu durumda x dizisi bir L değerine istatistiksel yakınsaktır.

Eğer $\delta(k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ geçerli değil}) = 0$ ise bu durumda $P(k)$ hemen her k için geçerlidir denir ve kısaca “h.h.k” yazılır.

Dolayısıyla yukarıdaki düşünceleri de kullanırsak şunu yazabiliriz: “Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon > 0$ verildiğinde h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olmasıdır.”

Teorem.3.1.2. İstatistiksel yakınsak bir dizinin limiti bir tektir.

İspat: $x = (x_k)$ dizisinin L_1 ve L_2 sayılarına istatistiksel yakınsadığını kabul edelim. O halde her $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi ve $n_0(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz öyle ki $\delta(A) = 1$ ve her $k > n_0(\varepsilon)$ ve $k \in A$ için $|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. Aynı zamanda bir $B \subset \mathbb{N}$ kümesi ve $n_1(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $\delta(B) = 1$ ve her $k > n_1(\varepsilon)$ ve $k \in B$ için $|x_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $n_2(\varepsilon)$ sayısını $n_2(\varepsilon) = maks\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ alırsak $\delta(A \cap B) = 1$ olmak üzere her $k > n_2(\varepsilon)$ ve $k \in A \cap B$ için

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &\leq |L_1 - x_k| + |L_2 - x_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan $|L_1 - L_2| = 0$ bulunur. Böylece $L_1 = L_2$ olup ispat tamamlanır.

3.2 İstatistiksel Cauchy Dizisi

Klasik analizde bildiğimiz klasik anlamda “Cauchy Dizisi” kavramının istatistiksel

benzeri de 1985 yılında Fridy tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım.3.2.1. $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise bu durumda x dizisine “İstatistiksel Cauchy Dizisi” denir (Fridy 1985).

Tanım 3.2.1 uyarınca bir x dizisi istatistiksel Cauchy dizisi ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ gerçekleşecek biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır.

Böylece istatistiksel yakınsaklık için bir başka karakterizasyon aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem.3.2.1. Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.
- (ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
- (iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

3.3 μ -İstatistiksel ve μ -Yoğunlukta Yakınsaklık

Connor 1990 yılındaki çalışmasında yoğunluk kavramını “ölçü” kavramı ile değiştirerek istatistiksel yakınsaklığın bir genişlemesini vermiştir. Burada alınan μ yoğunluğu \mathbb{N} uzayının altkümelerinin bir Γ cebiri üzerinde tanımlı, sonlu toplamsal bir küme fonksiyonu olup;

(i) A sonlu ise $\mu(A) = 0$

(ii) $\mu(\mathbb{N}) = 1$

(iii) $A \subset B$ ve $\mu(B) = 0$ ise $\mu(A) = 0$

özelliklerini gerçekler.

Yukarıdaki şekilde tanımlı $[0, 1]$ aralığında değerler alan bu μ -yoğunluğuna bundan sonra ölçü adı verilecektir. Fakat bu kavramın bilinen anlamdaki ölçüden farklı olduğuna dikkat edilmelidir.

Tanım.3.3.1. (μ - yoğunlukta yakınsaklık)

Bir $x = (x_n)$ dizisinin bir L sayısına μ - yoğunlukta yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\mu(A) = 1$ ve x dizisi L değerine A kümesi boyunca yakınsak olacak biçimde bir $A \in \Gamma$ kümesinin mevcut olmasıdır ve $x_k \rightarrow L$ (μ - yoğunluk) şeklinde gösterilir. Burada x dizisinin A kümesi boyunca L değerine yakınsak olması; her $\varepsilon > 0$ için her $k \in A$ ve $k > N(\varepsilon)$ olmak üzere $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N(\varepsilon)$ sayısının mevcut olmasıdır (Connor1990).

Tanım.3.3.2. (μ - istatistiksel yakınsaklık)

Bir $x = (x_n)$ dizisinin bir L sayısına μ - istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olmasıdır ve kısaca $st_\mu - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir (Connor1990).

Sonsuz matrisler yardımıyla yukarıdaki özellikleri gerçekleyen sonlu toplamsal bir ölçü oluşturmak mümkündür. Bunu verebilmek için önce bazı kavramları hatırlatalım.

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer A matrisi tüm yakınsak dizileri, limitleri koruyarak yine yakınsak bir diziye dönüştürüyor ise bu matrise “regüler matris” denir ve regüler matrisler aşağıdaki Silverman-Toeplitz teoremi ile karakterize edilirler.

(Silverman – Toeplitz Teoremi) : Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$$i. \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$ii. \lim_n a_{nk} = 0 \text{ (her } k \text{ için)}$$

$$iii. \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk}) = 1$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Şimdi $T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve bir $A \subset \mathbb{N}$ için $\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_A(k)$ olmak üzere

$$\Gamma = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_n \mu_n(A) = 0 \text{ veya } \lim_n \mu_n(A) = 1 \right\} \text{ şeklinde alınsın. Ayrıca}$$

$\mu_T : \Gamma \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\mu_T(A) = \lim_n \mu_n(A) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \chi_A(k)$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda μ_T ve Γ yukarıdaki tanımların koşullarını sağlar. Eğer T yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa bu durumda istatistiksel yakınsaklık tanımı elde edilir.

Teorem.3.3.1. Bir dizi μ -yoğunlukta yakınsak ise μ -istatistiksel yakınsaktır (Connor 1990).

İspat: $x_k \rightarrow r$ (μ -yoğunluk) olsun. Bu durumda $\mu(A) = 1$ ve $(x - r)_{\chi_A} \in c_0$ olacak şekilde bir $A \in \Gamma$ kümesi mevcuttur. O halde her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in A : |x_k - r| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur. Buradan $\mu\{k \in A : |x_k - r| \geq \varepsilon\} = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} C &= \{k : |x_k - r| \geq \varepsilon\} = \{k \in A : |x_k - r| \geq \varepsilon\} \cup \{k \in A^c : |x_k - r| \geq \varepsilon\} \\ &\subset \{k \in A : |x_k - r| \geq \varepsilon\} \cup A^c \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\mu(C) \leq \mu\{k \in A : |x_k - r| \geq \varepsilon\} + \mu\{A^c\} \quad (2)$$

bulunur. (2) eşitsizliğinde sağ taraf sıfıra eşit olduğundan $\mu(C) = 0$ bulunur. Buradan ε keyfi olduğundan $st_\mu - \lim_k x_k = r$ elde edilir.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Bu yeter şartın ne zaman gerçekleşeceği aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem.3.3.2. $\mu - yoğunlukta$ yakınsaklık ile μ -istatistiksel yakınsaklığın birbirlerine denk olması için, μ ölçüsü, sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olmalıdır (Connor 1990).

Tanım.3.3.3. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ sıfır ölçülü kümelerin bir koleksiyonu verildiğinde her bir $i \in \mathbb{N}$ için $|A_i \Delta B_i| < \infty$, $B = \bigcup B_i \in \Gamma$ ve $\mu(B) = 0$ koşullarını gerçekleyen bir $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ koleksiyonu mevcut ise bu durumda μ ölçü fonksiyonuna “sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahiptir” denir. Burada Δ sembolü simetrik farkı göstermektedir (Connor 1990).

Teorem.3.3.3. μ ölçüsü, sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olsun. Eğer (x^r) , $\mu - yoğunlukta$ yakınsak dizilerin sayılabilir bir koleksiyonu ise bu durumda $\mu(\{\lambda(n) : n \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $\lim_n x_{\lambda(n)}^r$ limiti mevcut olacak şekilde bir $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dizisi vardır (Connor 1992).

İstatistiksel Cauchy dizisi kavramındaki benzer düşünce kullanılarak aşağıdaki tanım ve teorem verilmiştir.

Tanım.3.3.4. Her $\varepsilon > 0$ için $\mu\{k : |x_k - x_n| \geq \varepsilon\} = 0$ olacak şekilde bir $n = n(\varepsilon)$ sayısı varsa, bu durumda $x = (x_k)$ reel terimli dizisine “ $\mu - Cauchy$ dizisi” adı verilir (Connor 1992).

Teorem.3.3.4. Bir x dizisinin μ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\mu - Cauchy$ dizisi olmasıdır (Connor 1992).

3.4 μ -İstatistiksel ve μ -Yoğunlukta Yakınsak Fonksiyon Dizileri

Bu kısımda μ -yoğunlukta yakınsaklık ve μ -istatistiksel yakınsaklık kavramlarını reel sayıların bir D altkümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerine aktaracağız.

$D \subset \mathbb{R}$ ve (f_n) , D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.

Tanım.3.4.1. (μ -yoğunlukta noktasal yakınsaklık)

(f_n) dizisinin $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde μ -yoğunlukta noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için $n \geq n_0$ ve $n \in K_x$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu(K_x) = 1$ özelliğine sahip bir $K_x \in \Gamma$ altkümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in K_x$ sayısının mevcut olmasıdır ve kısaca $f_n \rightarrow f(\mu\text{-yoğunluk})$ ile gösterilir (Duman and Orhan 2001).

Tanım.3.4.2. (μ -yoğunlukta düzgün yakınsaklık)

(f_n) dizisinin $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde μ -yoğunlukta düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ ve $n \in K$ olduğunda her $x \in D$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu(K) = 1$ özelliğine sahip bir $K \in \Gamma$ altkümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in K$ sayısının mevcut olmasıdır ve kısaca $f_n \Rightarrow f(\mu\text{-yoğunluk})$ şeklinde gösterilir (Duman and Orhan 2001).

Tanım.3.4.3. (μ -istatistiksel noktasal yakınsaklık)

(f_n) dizisinin $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde μ -istatistiksel noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için $\mu(\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ olmasıdır ve kısaca $f_n \rightarrow f(\mu\text{-stat})$ şeklinde gösterilir (Duman and Orhan 2001).

Tanım.3.4.4. (μ – istatistiksel düzgün yakınsaklık)

(f_n) , D üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$st_{\mu} - \lim_n \|f_n - f\|_{B(D)} = 0$$

ise, bu durumda (f_n) dizisi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde “ μ – istatistiksel düzgün yakınsaktır” denir (Duman and Orhan 2001).

Bu durumda $f_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ yazacağız. Yani; D üzerinde $f_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ olması için gerek ve yeter koşul $st_{\mu} - \lim_n (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$ olmasıdır.

Buradaki $\|\cdot\|_{B(D)}$ normu, D üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı olan $B(D)$ üzerindeki alışılmış supremum normudur.

Tanımlardan görüldüğü gibi, D üzerinde μ –yoğunlukta noktasal yakınsak her fonksiyon dizisi μ –istatistiksel noktasal yakınsaktır, ayrıca sınırlı fonksiyonlar için μ –yoğunlukta düzgün yakınsak her fonksiyon dizisi de μ –istatistiksel düzgün yakınsaktır. Eğer μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip ise, bu durumda Teorem 3.3.2 uyarınca μ –yoğunlukta düzgün yakınsaklık ile μ –istatistiksel düzgün yakınsaklık denk olacaktır.

Teorem.2.1.2 ile verilen, elemanları bir $D \subset \mathbb{R}$ bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsadığı limit fonksiyonunun da D üzerinde sürekli olması, klasik analizde iyi bilinen bir sonuçtur. Şimdi aşağıda elde edeceğimiz teorem, bu sonucun μ –yoğunluk anlamında bir genişlemesini vermektedir.

Teorem.3.4.1. Her bir n için f_n fonksiyonları bir $D \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olsun. Eğer D üzerinde $f_n \rightrightarrows f(\mu - yoğunluk)$ ise, bu durumda f fonksiyonu da D üzerinde süreklidir(Duman and Orhan 2001).

İspat: D üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (μ -yoğunluk) olsun bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\mu(K) = 1$ özelliğine sahip bir $K \in \Gamma$ altkümesi ve bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her bir $x \in D$ ve $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ gerçekleşir. Hipotezden her n için f_n fonksiyonları bir $D \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan f_{n_0} fonksiyonu bir $x_0 \in D$ noktasında sürekli olup en az bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur, öyle ki her bir $x \in D$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ gerçekleşir. Şimdi $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan D deki tüm x elemanları için,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x_0 \in D$ keyfi olduğundan, f fonksiyonu D üzerinde süreklidir ki bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 3.4.1'in bir sonucu olarak ise aşağıdakini elde ederiz.

Sonuç.3.4.1. Her bir n için f_n fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{R}$ altkümesi üzerinde sürekli ve μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olsun. Eğer D üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (μ -stat) ise, bu durumda f fonksiyonu D üzerinde süreklidir.

Aşağıdaki örnek hem Teorem 3.4.1'in hem de Sonuç 3.4.1.'in karşıtlarının her zaman için doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek.3.4.1. $K \in \Gamma$ altkümesi $\mu(K) = 1$ koşulunu gerçeklesin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; n \notin K \text{ ise} \\ \frac{2nx}{1+n^2x^2}; & n \in K \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $[0, 1]$ üzerinde $f_n \rightarrow f = 0$ (μ -yoğunluk) olur. O halde $f_n \rightarrow f = 0$ (μ -stat) bulunur. Her bir f_n ve f fonksiyonları $[0, 1]$ üzerinde sürekli olmalarına rağmen, $c_n = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1$ ve

$st_\mu - \lim c_n = 1 \neq 0$ olduğundan Tanım 3.4.4 uyarınca (f_n) dizisinin $[0, 1]$ üzerindeki μ -istatistiksel noktasal yakınsaklığı “düzgün” olamaz.

Analizdeki bir diğer önemli sonuç olan ve Teorem 2.1.3 ile verdiğimiz Dini teoreminin μ -istatistiksel benzerini şu şekilde elde edebiliriz:

Teorem.3.4.2. μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip ve (f_n) , reel sayıların kompakt bir D altkümesi üzerinde sürekli ve monoton azalan fonksiyonların bir dizisi olsun. Ayrıca D üzerinde $f_n \rightarrow f(\mu - stat)$ olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda D üzerinde $f_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ gerçekleşir (Duman and Orhan 2001).

İspat: $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ yazalım. Hipotezden D üzerinde her bir g_n fonksiyonu sürekli, monoton azalandır ve $g_n \rightarrow 0(\mu - stat)$ gerçekleşir aynı zamanda μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğine sahip olduğundan

$g_n \rightarrow 0(\mu - yoğunluk)$ yazabiliriz. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in D$ için $\mu(K_x) = 1$ özelliğine sahip bir $K_x \in \Gamma$ altkümesi ve bir $n_x := n(\varepsilon, x) \in K_x$ sayısı mevcut, öyle ki $n \geq n_x$ koşulunu sağlayan her $n \in K_x$ için $0 \leq g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir. Diğer taraftan g_{n_x} fonksiyonu $x \in D$ noktasında sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için x elemanını içeren en az bir $J(x)$ açık kümesi vardır, öyle ki $J(x)$ deki tüm t ler için $|g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda monotonluktan dolayı, her $t \in J(x)$ ve $n \geq n_x$ olacak şekildeki her $n \in K_x$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_n(t) \leq g_{n_x}(t) = g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x) + g_{n_x}(x) \\ &\leq |g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)| + |g_{n_x}(x)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $D \subset \cup_{x \in D} J(x)$ olup D kümesi kompakt olduğundan, Heine-Borel teoremi uyarınca D kümesi, $D \subset J(x_1) \cup J(x_2) \cup \dots \cup J(x_m)$ olacak şekilde sonlu bir açık örtüye sahiptir. Şimdi $K = K_{x_1} \cap K_{x_2} \cap \dots \cap K_{x_m}$ ve $N = maks\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_m}\}$ dersek $\mu(K) = 1$ olmak üzere her $t \in D$ ve $n \geq N$ olacak şekildeki her $n \in K$ için

$0 \leq g_n(t) < \varepsilon$ bulunur. O halde D üzerinde $g_n \rightrightarrows 0(\mu - \text{yoğunluk})$ olup bu ise $g_n \rightrightarrows 0(\mu - \text{stat})$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.4 ile verdiğimiz fonksiyon dizilerinin alışılmış anlamdaki düzgün yakınsaklığını karakterize eden teorem, Cauchy kriteri olarak bilinir. Sıradaki teorem μ -istatistiksel düzgün yakınsaklık için bir Cauchy kriteri vermektedir.

Teorem.3.4.3. (f_n) , D üzerinde sınırlı fonksiyonların bir dizisi ve de μ ölçüsü sıfır ölçütlü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olsun. Bu durumda D üzerinde (f_n) dizisinin μ -istatistiksel düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(\{n : \|f_n - f_{n(\varepsilon)}\|_{B(D)} < \varepsilon\}) = 1 \quad (3)$$

olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olmasıdır.

Uyarı: (3) özelliğini sağlayan (f_n) dizisine " μ -istatistiksel düzgün Cauchy dizisi" diyeceğiz.

İspat: Gereklilik. (f_n) dizisinin D üzerinde tanımlı bir f fonksiyonuna μ -istatistiksel düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda $\mu(\{n : \|f_n - f\|_{B(D)} < \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1$ sağlanır. Şimdi $\|f_{n(\varepsilon)} - f\|_B < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı seçelim. $\|f_n - f_{n(\varepsilon)}\|_B \leq \|f_n - f\|_B + \|f - f_{n(\varepsilon)}\|_B$ eşitsizliğini kullanarak $\mu(\{n : \|f_n - f_{n(\varepsilon)}\|_B < \varepsilon\}) = 1$ elde ederiz. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan (f_n) , D üzerinde μ -istatistiksel düzgün Cauchy dizisi olmak zorundadır.

Yeterlilik. (f_n) dizisinin D üzerinde μ -istatistiksel düzgün Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x \in D$ noktasını sabit tutalım. O halde her $\varepsilon > 0$ için, $\mu(\{n : |f_n(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon\}) = 1$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece $\{f_n(x)\}$ bir μ -Cauchy dizisi olur. Teorem 3.3.4 uyarınca $\{f_n(x)\}$, μ -istatistiksel yakınsaktır. O halde her bir $x \in D$ için $st_\mu - \lim f_n(x) = f(x)$ yani $\mu(\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak biçimde D üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu

vardır. Buradan D üzerinde $f_n \longrightarrow f(\mu - stat)$ elde edilir. Şimdi bu μ -istatistiksel noktasal yakınsaklığın μ -istatistiksel düzgün olacağını göstereceğiz. Aynı zamanda μ ölçüsü, sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olduğundan $\mu(K) = 1$ koşulunu sağlayan bir $K \in \Gamma$ altkümesi vardır, öyle ki $n \geq n(\varepsilon)$ olacak şekilde her $n \in K$ için $\|f_n - f_{n(\varepsilon)}\|_{B(D)} < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. O halde her $\varepsilon > 0$ için $\mu(K) = 1$ özelliğine sahip bir $K \in \Gamma$ altkümesi ve $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur, öyle ki $m, n \geq n(\varepsilon)$ olacak şekilde her $m, n \in K$ ve her $x \in D$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu son yazdığımız eşitsizlikteki n 'yi sabit tutarak $m \in K$ indisleri üzerinden limit alırsak, her $\varepsilon > 0$ için $\mu(K) = 1$ özellikli bir $K \in \Gamma$ altkümesi ve $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır, öyle ki $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in K$ ve her $x \in D$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bulunur. Buradan D üzerinde $f_n \rightrightarrows f(\mu - yoğunluk)$ olup bu ise $f_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ olmasını gerektirir.

Bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığı altında limit ile integral operatörlerinin yer değiştirebileceğini biliyoruz. Şimdi μ -istatistiksel düzgün yakınsaklığı kullanarak bu özelliğin korunacağını gösteren aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem.3.4.4. μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olsun. Eğer $[a, b]$ aralığı üzerinde (f_n) dizisi, bir f fonksiyonuna μ -istatistiksel düzgün yakınsak ve (f_n) fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ise, bu durumda f fonksiyonu da $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Üstelik,

$$st_{\mu} - \lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b st_{\mu} - \lim f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

eşitliği gerçekleşir (Duman and Orhan 2001).

Teorem.3.4.5. μ ölçüsü sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olsun. Ayrıca her bir f_n fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde sürekli türevlere sahip olduğunu kabul edelim. Eğer $[a, b]$ üzerinde $f_n \longrightarrow f(\mu - stat)$ ve $f'_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ ise, bu durumda $[a, b]$ üzerinde $f_n \rightrightarrows f(\mu - stat)$ olur; burada f , $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon olup $f' = g$ gerçekleşir (Duman and Orhan 2001).

3.5 μ -İstatistiksel Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyon Dizileri

Kolk 1999 yılındaki çalışmasında, yakınsaklığı koruyan fonksiyon dizilerini gözönüne almıştır. Biz de bu bölümde μ -istatistiksel limit operatörü yardımıyla Kolk'un elde ettiği sonuçların μ -istatistiksel benzerlerini vererek μ -istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin μ -istatistiksel limit fonksiyonlarının sürekliliği için dizisel bir karakterizasyon elde edeceğiz.

Tanım.3.5.1. $D \subset \mathbb{R}$ ve (f_n) , D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer D deki μ -istatistiksel yakınsak her bir $x = (x_n)$ dizisi için $\{f_n(x_n)\}$ dönüşüm dizisi de μ -istatistiksel yakınsak ise, bu durumda (f_n) dizisine D üzerinde “ μ -istatistiksel yakınsaklığı koruyan” (veya “ μ -istatistiksel konservatif”) fonksiyon dizisi adı verilir. Eğer (f_n) aynı zamanda μ -istatistiksel yakınsak dizilerin limit değerlerini de koruyorsa, bu durumda (f_n) , D üzerinde “ μ -istatistiksel regüler fonksiyon dizisi” adını alır (Duman and Orhan 2001).

Kolayca görülebilir ki; (f_n) , D üzerinde konservatif bir fonksiyon dizisi ise, bu durumda μ -istatistiksel konservatiftir. Fakat aşağıdaki örnek bu önermenin karşınının her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek.3.5.1. $\mathbb{N} \setminus K$ sonsuz elemanlı ve $\mu(K) = 1$ olacak şekilde bir $K \in \Gamma$ altkümesi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \begin{cases} 0; & n \in K \text{ ise} \\ 1; & n \notin K \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $[0, 1]$ aralığında $st_\mu - \lim x = L$ olacak şekilde herhangi bir $x = (x_n)$ dizisi alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{n : |f_n(x_n) - 0| \geq \varepsilon\}) = \mu(\mathbb{N} \setminus K) = 0$ olduğundan $st_\mu - \lim f_n(x_n) = 0$ bulunur. Dolayısıyla (f_n) dizisi $[0, 1]$ üzerinde μ -istatistiksel konservatiftir, fakat (f_n) dizisinin konservatif olmadığı açıktır.

Teorem.3.5.2. μ ölçüsü, sıfır ölçütlü kümeler için toplamsal özelliğe sahip ve (f_k) , bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda (f_k) dizisinin $[a, b]$ üzerinde μ -istatistiksel konservatif olması için gerek ve yeter koşul $[a, b]$ üzerinde (f_k) dizisinin sürekli bir fonksiyona μ -istatistiksel düzgün yakınsak olmasıdır (Duman and Orhan 2001).

İspat: Gereklilik. (f_k) dizisi $[a, b]$ üzerinde μ -istatistiksel konservatif olsun. Her bir $t \in [a, b]$ için $(u_k) = (t, t, \dots)$ dizisini seçelim. $st_\mu - \lim u_k = t$ olduğundan $st_\mu - \lim f_k(u_k)$ mevcut olup her $t \in [a, b]$ için $st_\mu - \lim f_k(t) = f(t)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır. İddia ediyoruz ki f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir. Bunu göstermek için f nin bir $t_0 \in [a, b]$ noktasında sürekli olmadığını kabul edelim. Bu durumda $[a, b]$ aralığında $\lim_k u_k = t_0$ olduğunda $\lim_k f(u_k) \neq f(t_0)$ olacak şekilde bir (u_k) dizisi vardır. Ayrıca $[a, b]$ üzerinde $f_k \rightarrow f(\mu - stat)$ ve μ ölçüsü, sıfır ölçütlü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olduğundan yine $[a, b]$ üzerinde $f_k \rightarrow f(\mu - yoğunluk)$ elde edilir.

Dolayısıyla her bir j için $\{f_k(u_j) - f(u_j)\} \rightarrow 0(\mu - yoğunluk)$ olur. O halde Teorem 3.3.3 uyarınca $\mu(\{\lambda(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve her bir j için

$$\lim_k [f_{\lambda(k)}(u_j) - f(u_j)] = 0$$

olacak şekilde bir $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dizisi mevcuttur. Şimdi köşegenleştirme metodunu (Bartle 1964) kullanarak $\mu(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k [f_{n_k}(u_k) - f(u_k)] = 0$ olacak biçimde bir (n_k) indis dizisi seçebiliriz. Şimdi bir $x = (t_i)$ dizisi

$$t_i = \begin{cases} t_0; & i = n_k \text{ ve } i \text{ tek ise} \\ u_k; & i = n_k \text{ ve } i \text{ çift ise} \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O halde $t_i \rightarrow t_0(\mu - yoğunluk)$ olup buradan $st_\mu - \lim_i t_i = t_0$ elde edilir. Fakat $i = n_k$ ve i tek olduğunda $\lim_k f_{n_k}(t_0) = f(t_0)$ ve ayrıca $i = n_k$ ve i çift ise $\lim_k f_{n_k}(u_k) = \lim_k [f_{n_k}(u_k) - f(u_k)] + \lim_k f(u_k) \neq f(t_0)$ bulunur. Buna göre

$\{f_i(t_i)\}$ dizisi, farklı iki limit değerine yakınsayan ve indis kümeleri pozitif ölçülü iki ayrık alt diziye sahip olduğundan μ -yoğunlukta yakınsak değildir. μ , sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özellikli olduğundan $\{f_i(t_i)\}$, μ -istatistiksel yakınsak da olamaz. Bu da (f_k) dizisinin μ -istatistiksel konservatif olması ile çelişir. Dolayısıyla f , $[a, b]$ üzerinde sürekli olmak zorundadır. Şimdi $[a, b]$ üzerinde $f_k \rightrightarrows f(\mu - stat)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki (f_k) dizisi f ye μ -istatistiksel düzgün yakınsak olmasın. Bu durumda (f_k) dizisi f ye $[a, b]$ üzerinde μ -yoğunlukta düzgün yakınsak da olamaz. Bu nedenle $\mu(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ özelliğine sahip keyfi bir (n_k) indis dizisi için $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|f_{n_k}(t_k) - f(t_k)| \geq 2\varepsilon_0$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ve $t_k \in [a, b]$ sayıları vardır. (t_k) dizisi sınırlı olduğundan (t_{k_i}) yakınsak alt-dizisine sahiptir. Bu limit değerine α diyelim. Bu alt dizi μ -istatistiksel yakınsak olmak zorundadır. O halde $st_\mu - \lim_i t_{k_i} = \alpha$ olur. f fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim_i f(t_{k_i}) = f(\alpha)$ olur. Böylece $i \geq i_0$ için $|f(t_{k_i}) - f(\alpha)| < \varepsilon_0$ olacak şekilde bir i_0 indisi vardır. Aynı i ler için

$$|f_{n_{k_i}}(t_{k_i}) - f(\alpha)| \geq |f_{n_{k_i}}(t_{k_i}) - f(t_{k_i})| \geq |f(t_{k_i}) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0 \quad (4)$$

elde edilir.

Şimdi (u_j) dizisini

$$u_j = \begin{cases} \alpha; & j = n_{k_i} \text{ ve } j \text{ tek ise} \\ t_{k_i}; & i = n_{k_i} \text{ ve } j \text{ çift ise} \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $u_j \rightarrow \alpha(\mu - yoğunluk)$ olup bu da $st_\mu - \lim u_j = \alpha$ olmasını gerektirir. Fakat $j = n_{k_i}$ ve j tek olduğunda $\lim_i f_{n_{k_i}}(\alpha) = f(\alpha)$ ve ayrıca $j = n_{k_i}$ ve j çift olduğunda ise (4) uyarınca $\lim_i f_{n_{k_i}}(t_{k_i}) \neq f(\alpha)$ dir. Buna göre $\{f_i(u_j)\}$ dizisi farklı iki limit değerine yakınsayan indis kümeleri pozitif ölçülü ki ayrık altdiziye sahip olduğundan μ -yoğunlukta yakınsak değildir ve dolayısıyla μ -istatistiksel yamsak da olamaz. Bu durum (f_k) dizisinin μ -istatistiksel kon-

servatif olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $[a, b]$ üzerinde (f_k) dizisi f ye μ -istatistiksel düzgün yakınsaktır.

Yeterlilik. $[a, b]$ üzerinde $f_k \rightrightarrows f(\mu\text{-stat})$ olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonunun mevcut olduğunu kabul edelim ve $st_\mu - \lim x_n = x_0$ olacak şekilde terimleri $[a, b]$ aralığında bulunan bir $x = (x_n)$ dizisi alalım. μ ölçüsü, sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olduğundan $x_n \rightarrow x_0(\mu\text{-yoğunluk})$ olur.

O halde $\lim_k x_{n_k} = x_0$ ve $\mu(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ koşullarını gerçekleyen bir (n_k) indis dizisi mevcuttur. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$ gerçekleşir. Buradan $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($\mu\text{-yoğunluk}$) elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\mu(K_1) = 1$ özelliğine sahip bir $K_1 \in \Gamma$ altkümesi vardır, öyle ki $n \geq n_1$ olacak şekildeki her $n \in K_1$ için $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir. Ayrıca μ ölçüsü, sıfır ölçülü kümeler için toplamsal özelliğe sahip olduğundan μ -istatistiksel düzgün yakınsaklık ile μ -yoğunlukta düzgün yakınsaklık denktir.

Böylece $\mu(K_2) = 1$ özelliğine sahip bir $K_2 \in \Gamma$ altkümesi ve $n \in K_2$ sayısı vardır, öyle ki her $t \in [a, b]$ ve $n \geq n_2$ özellikli her $n \in K_2$ için $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir. $N := \max\{n_1, n_2\}$ ve $K := K_1 \cap K_2$ alalım. Bu durumda $\mu(K) = 1$ olup $t = x_n$ olarak $n \geq N$ olacak şekildeki her $n \in K$ için

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

elde ederiz.

Buradan $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($\mu\text{-yoğunluk}$) ve böylece $st_\mu - \lim_n f_n(x_n) = f(x_0)$ olmak zorundadır ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem.3.5.3. μ ölçüsü, sıfır ölçütlü kümeler için toplamsal özelliğe sahip ve $[a, b]$ üzerinde $f_n \Rightarrow f(\mu\text{-stat})$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizisinin μ -istatistiksel konservatif olmasıdır (Duman and Orhan 2001).

Şimdi fonksiyon dizilerinin μ -istatistiksel regülerliğini inceleyelim. Eğer (f_k) dizisi $[a, b]$ üzerinde μ -istatistiksel regüler ise her $t \in [a, b]$ için $st_\mu - \lim_k f_k(t) = t$ olur. Böylece Teorem 3.4.2 de $f(t) = t$ olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem.3.5.4. μ ölçüsü, sıfır ölçütlü kümeler için toplamsal özelliğe sahip ve (f_k) , $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda (f_k) dizisinin $[a, b]$ üzerinde μ -istatistiksel regüler olması için gerek ve yeter koşul $[a, b]$ üzerinde (f_k) dizisinin $f(t) = t$ ile tanımlanan f fonksiyonuna μ -istatistiksel düzgün yakınsak olmasıdır (Duman and Orhan 2001).

4. I-YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ

Bu bölümde elde edilen sonuçlar, bir önceki bölümde elde edilen bazı sonuçların genişletilmesidir.

4.1 I-Yakınsaklık

Öncelikle yoğunluk ve ideal kavramlarını hatırlatalım.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $A \subset \mathbb{N}$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $d_j(A) = \frac{1}{j} |\{k \leq j : k \in A\}|$ olsun. Eğer $\delta(A) = \lim d_j(A)$ limiti mevcut ise bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu denildiğini biliyoruz.

$I \subset P(\mathbb{N})$ olsun. Eğer

i. $\emptyset \in I$

ii. $A, B \in I \implies A \cup B \in I$

iii. $A \in I$ ve $B \subset A \implies B \in I$

ise I kümesine bir ideal denir (Kostyrko *et al.* 2000). O halde

$$I_d = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$$

olmak üzere I_d , \mathbb{N} kümesinin altkümelerinin oluşturduğu bir idealdir. $P(\mathbb{N})$ den farklı ve tek nokta cümlelerini içeren ideale kabul edilebilir (*admissible*) ideal diyeceğiz. Açıkça görülüyor ki I_d kabul edilebilir idealdir.

Tanım.4.1.1. I kabul edilebilir ideal olsun ve (Y, ρ) metrik uzayını gözönüne alalım. (y_n) dizisinin y 'ye I yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(y_n, y) \geq \varepsilon\} \in I$ olmasıdır ve $y_n \rightarrow y(I)$ şeklinde gösterilir (Balcerzak *et al.* 2007).

Eğer I, \mathbb{N} nin tüm sonlu altkümelerinin ideali ise yukarıdan klasik anlamda yakın-

saklığı elde ederiz. Eğer $I = I_d$ ise istatistiksel yakınsaklığı elde ederiz. I kabul edilebilir olduğundan I, \mathbb{N} kümesinin tüm sonlu altkümelerini içerir bundan dolayı klasik anlamda yakınsaklık I yakınsaklığı gerektirir.

4.2 I-Yakınsak Fonksiyon Dizileri

Bu kısımda I yakınsak fonksiyon dizilerini inceleyeceğiz.

Tanım.4.2.1. (*I noktasal yakınsaklık ve I düzgün yakınsaklık*)

$I \subset P(\mathbb{N})$ kabul edilebilir ideal olsun ve (Y, ρ) metrik uzayını alalım. X boş kümeden farklı olsun ve $f : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna “ I noktasal yakınsak” olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için (Y, ρ) metriğinde $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ (I) olmasıdır (Balcerzak *et al.* 2007). Yani; $f_n \rightarrow f$ (I) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $M \in I$ vardır öyle ki her $n \notin M$ olduğunda $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ gerçekleşmesidir.

(f_n) dizisini f fonksiyonuna “ I düzgün yakınsak” ($f_n \rightrightarrows f$ (I)) olması için gerek ve yeter koşul ise her $\varepsilon > 0$ için en az bir $M \in I$ vardır öyle ki her $n \notin M$ ve her $x \in X$ için $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ sağlanır.

$f_n \rightrightarrows f$ (I) ise $f_n \rightarrow f$ (I) sağlanır. Aşağıdaki sonuç ise bunun karşının özel bir durum için geçerli olduğunu gösteriyor.

Teorem.4.2.1. $I \subset P(\mathbb{N})$ kabul edilebilir ideal ve $(X, \sigma), (Y, \rho)$ metrik uzaylar olsunlar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyonları X üzerinde eşsürekli ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için X üzerinde $f_n \rightarrow f$ (I) olduğunu varsayalım. Bu durumda f, X üzerinde sürekli ayrıca X kompakt ise $f_n \rightrightarrows f$ (I) gerçekleşir (Balcerzak *et al.* 2007).

İspat: Önce f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) fonksiyon dizisi eşsürekli olduğundan $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$

ve $x \in B(x_0, \delta)$ için $\rho(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ sağlanır. $x \in \{B(x_0, \delta)\}$ elemanını sabitleyelim. $f_n \rightarrow f(I)$ olduğundan, I daki

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x_0), f(x_0)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

kümesi \mathbb{N} kümesinden farklıdır. Dolayısıyla öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$\rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} \rho(f(x_0), f(x)) &\leq \rho(f(x_0), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup buradan f süreklidir.

Şimdi $f_n \rightrightarrows f(I)$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. X kompakt olduğundan X üzerinde f fonksiyonu düzgün sürekli ve f_n fonksiyonları eşdüzgün süreklidir. O halde öyle bir $\delta > 0$ seçelim ki $\sigma(x, x') < \delta$ koşulunu sağlayan herhangi $x, x' \in X$ için $\rho(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $\rho(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$ olsun. X kompakt olduğundan $\{B(x, \delta)\}_{x \in X}$ örtüsünden sonlu bir $B(x_1, \delta), \dots, B(x_k, \delta)$ alt örtüsü seçebiliriz.

$f_n \rightarrow f(I)$ olduğunu kullanarak $M \in I$ alalım öyle ki her $n \notin M$ ve

her $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $\rho(f_n(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olsun. $n \notin M$ ve $x \in X$ olsun, bazı $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x \in B(x_i, \delta)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho(f_n(x), f(x)) &\leq \rho(f_n(x), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup X üzerinde $f_n \rightrightarrows f(I)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer $I = I_d$ ise $\rightarrow(I)$ ve $\rightrightarrows(I)$ sırasıyla noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık olarak okunur.

Tanım.4.2.2. $I \subset P(\mathbb{N})$ kabul edilebilir ideal ve $(X, \sigma), (Y, \rho)$ metrik uzaylar olsunlar ve $f : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna “eş istatistiksel yakınsak” olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $g_{j,\varepsilon} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x \in X$ olmak üzere $g_{j,\varepsilon}(x) = d_j(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon\})$ fonksiyonları ile verilen $(g_{j,\varepsilon})_{j \in \mathbb{N}}$ dizisinin sıfıra X üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır ve $f_n \rightarrow f(I_d)$ ile gösterilir. Yani; $f_n \rightarrow f(I_d)$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon, \delta > 0$ için en az bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki her $j \geq k$ ve her $x \in X$ için $d_j(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon\}) < \delta$ olmasıdır. d_j operatörü monoton olduğundan $\varepsilon = \delta$ alabiliriz.

Örnek.4.2.1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ ve $f_n = \chi_{\{\frac{1}{n}\}}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $f_n \rightarrow f(I_d)$ fakat (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem.4.2.2. $(X, \sigma), (Y, \rho)$ metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. $x_0 \in X$ elemanını sabitleyelim. Eğer X üzerinde $f_n \rightarrow f(I_d)$ ve tüm f_n fonksiyonları x_0 da sürekli ise f fonksiyonu da x_0 da sürekli (Balcerzak *et al.* 2007).

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. $f_n \rightarrow f(I_d)$ olduğundan her $x \in X$ için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $d_k(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}) < \frac{1}{2}$ sağlanır. $x \in X$ ve $E(x) = \{n \leq k : \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}\}$ alalım. $d_k, P(\mathbb{N})$ de olasılık ölçüsü olduğundan ve k nın seçiminden her $x \in X$ için $d_k(E(x)) > \frac{1}{2}$ bulunur. f_1, f_2, \dots, f_k fonksiyonları x_0 noktasında sürekli olduğundan $x \in B(x_0, \delta)$ ve her $i \in \{1, \dots, k\}$ için $\rho(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Biz her $x \in B(x_0, \delta)$ için $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz. $x \in B(x_0, \delta)$ noktasını sabitleyelim. $d_k(E(x)) > \frac{1}{2}$ ve $d_k(E(x_0)) > \frac{1}{2}$ olduğundan $p \in E(x) \cap E(x_0)$ buluruz. Böylece

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(x_0)) &\leq \rho(f(x), f_p(x)) + \rho(f_p(x), f_p(x_0)) + \rho(f_p(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek.4.2.2. $x \in [0, 1]$ için $f_n(x) = x^n$ olsun. (f_n) fonksiyon dizisi 1 noktasında süreksiz olan f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Dolayısıyla Teorem.4.2.1 den $f_n \rightarrow f(I_d)$ gerçekleşmez.

KAYNAKLAR

- Balcerzak, M., Dems, K. and Komisarski, A. 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *J. Math. Anal. Appl.* 328; 715-729.
- Bartle, R. G. 1964. *Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York
- Connor, J. S. 1988. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, 8; 47-63.
- Connor, J. S. 1990. Two valued measures and summability. *Analysis*, 10; 373-385.
- Connor, J. S. 1992. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence. *Proc. Amer. Math. Soc.* 115; 319-327.
- Duman, O. and Orhan, C. 2004. μ -statistically convergent function sequences. *Czech. Math. J.* 54; 413-422.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.* 2; 241-244.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5; 301-313.
- Kolk, E. 1998. Convergence-preserving function sequences and uniform convergence. *J. Math. Anal. Appl.* 238; 599-603.
- Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W. 2000. I-convergence. *Real Anal. Exchange* 26; 669-689.
- Rudin, W. 1953. *Principles of Mathematical Analysis*. Mcgraw-Hill, New York.
- Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30; 139-150.
- Wilczynski, W. 2000. Statistical convergence of sequences of functions. *Real Anal. Exchange* 25; 49-50.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge ŞEN

Doğum Yeri : Mersin

Doğum Tarihi : 10.01.1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Tefik Sırrı Gür Lisesi (1998)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Temmuz 2007)