

**RADİKAL ALTMODÜLLER  
VE  
DEDEKIND MODÜLLERİN BİR ÇALIŞMASI**

**A STUDY OF RADICAL SUBMODULES  
AND  
DEDEKIND MODULES**

**BÜLENT SARAÇ**

Hacettepe Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin  
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü  
DOKTORA TEZİ  
olarak hazırlanmıştır.

2008

# RADİKAL ALTMODÜLLER VE DEDEKIND MODÜLLERİN BİR ÇALIŞMASI

Bülent Saraç

## ÖZ

Bu tezin temel amacı, halka kuramının önemli kavramlarından biri olan asal ideal kavramının modül kuramı için bir genellemesi olarak düşünülmüş asal altmodül kavramı ve bunun yardımıyla tanımlanan bazı kavramların, modüllerin sınıflandırılmasında nasıl kullanılabileceğini ve bilinen modül sınıfları ile olan ilişkilerini araştırmaktır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmamız boyunca kullandığımız, halka ve modül kuramının bazı temel kavram ve sonuçlarının bulunduğu birinci bölümden sonra yer alan diğer üç bölüm, tamamen özgün olacak şekilde düzenlenmiştir.

İkinci bölüme, asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılan modüllerin incelenmesi ve radikal altmodüllerin karakterizasyonu ile başlanmaktadır. Daha sonra bir yarı-asal altmodülün ne zaman radikal olabileceği ile ilgili sonuçlar elde edilmiş ve her yarı-asal altmodülü radikal olan modüller ile üzerindeki her modül bu şekilde olan halkaların sınıfları araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, radikal formülü üzerinde durularak, radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfı, Artin modüllerin sınıfından, representable modüllerin sınıfına genişletilmiştir. Ayrıca bu bölümde representable modüllerin altmodüllerinin radikalleri belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, daha önce ele alınan kavramlardan farklı olarak, Dedekind modül kavramı ele alınmış ve Dedekind modüllerin karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Bu bölümde, ayrıca, Dedekind modüllerin radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfı içinde yer aldığı gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Asal modül, asal altmodül, radikal altmodül, yarı-asal altmodül, radikal formülü, s.p.a.r. özelliği, sekonder ve representable modüller, Dedekind halka, tersinir altmodül, Dedekind modül.

Danışman: Prof. Dr. Yücel Tıraş, H.Ü. Fen Fakültesi, Matematik bölümü

# A STUDY OF RADICAL SUBMODULES AND DEDEKIND MODULES

Bülent Saraç

## ABSTRACT

The objective of this thesis is to investigate how the notion of prime submodules which is considered as a generalization of one of the significant notions in the ring theory called prime ideals and some other notions defined with the help of prime submodules are used to classify modules, and to figure out how these notions effect on some known module classes.

Our thesis consists of four chapters. It is organized in a way that after the first chapter which contains only preliminary notions and necessary results through the thesis, the three chapters are totally original.

In the second chapter, we give some results on modules which can be written as a direct sum of prime modules and a characterization of radical submodules. Then we investigate when a semiprime submodule is a radical submodule. We also study modules in which every semiprime submodule is radical and the rings over which every module has this property.

In the third chapter, we study the radical formula, and extend the class of modules which satisfy the radical formula from the class of Artinian modules to the class of representable modules.

In the fourth chapter, we deal with Dedekind modules and give some characterizations for a module to be Dedekind. In this section, we also prove that Dedekind modules belong to the class of modules which satisfy the radical formula.

**Keywords:** Prime module, prime submodule, radical submodule, semiprime submodule, radical formula, s.p.a.r. property, secondary and representable modules, Dedekind domain, invertible submodule, Dedekind module.

Advisor: Prof. Dr. Yücel Tıraş, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak zamanını ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Yücel Tıraş'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın bir kısmı Tübitak tarafından sağlanan Yurtdışı Doktora Araştırma Burs Programı çerçevesinde ziyaret ettiğim Ohio Üniversitesi Matematik Bölümü'nde gerçekleştirilmiştir. Prof. Dr. Surender Jain başta olmak üzere tüm Ohio Üniversitesi Matematik Bölümü'ne misafirperverliklerinden dolayı, ziyaretim sırasında bana destek olan ve beni cesaretlendiren Prof. Dr. John Clark ve Prof. Dr. Noyan Er'e sabır ve paylaşımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim.

Tezimin oluşmasının her anında tükenmeyen sabrı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Hande Saraç'a ve beni bugünlere getiren, bu çalışmanın gerçek sahipleri, anne ve babama şükranlarımı sunarım.

# İÇİNDEKİLER

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
<b>1 ÖN BİLGİLER</b>	<b>1</b>
<b>2 YARI-ASAL VE RADİKAL ALTMODÜLLER</b>	<b>14</b>
2.1 Asal Modüller . . . . .	15
2.2 Yarı-asal Altmodüller . . . . .	22
2.3 Değişmeli Halkalar Üzerinde Yarı-asal Altmodüller . . . . .	28
2.4 S.p.a.r. Özelliği . . . . .	38
2.5 S.p.a.r. Özelliğine Sahip Modüllerin Dik Toplamları . . . . .	48
<b>3 RADİKAL FORMÜLÜ VE REPRESENTABLE MODÜLLER</b>	<b>53</b>
<b>4 DEDEKIND MODÜLLER</b>	<b>62</b>
KAYNAKLAR	74

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\subset$ veya $\subsetneq$	kesin olarak kapsama
$Hom_R(M, N)$	$M$ 'den $N$ 'ye $R$ -modül homomorfizmalarının kümesi
$End_R(M)$	$M$ üzerindeki $R$ -endomorfizmalarının kümesi
${}_R M$	$M$ bir sol $R$ -modül
$\leq$	altmodül
$\leq_e$	büyük altmodül
$\oplus$	dik toplam
$l(M)$	$M$ 'nin uzunluğu
$Jac(R)$	$R$ 'nin Jacobson radikali
$E(M)$	$M$ 'nin injektif zarfı
$\sqrt{I}$	$I$ idealinin radikali
$S^{-1}M$	$M$ 'nin $S$ çarpımsal kapalı altkümesine göre yerelleştirmesi
$M_P$	$M$ 'nin $P$ asal idealindeki yerelleştirmesi
$N^e$	$N$ altmodülünün yerelleştirme içindeki genişlemesi
$\Omega^c$	$\Omega$ altmodülünün burulması
$E_M(N)$	$\{rm \in M : r \in R, m \in M \text{ ve } \exists t \in \mathbb{N}, r^t m \in N\}$ kümesi
$RE_M(N)$	$E_M(N)$ tarafından üretilen altmodül
$rad_M(N)$	$N$ 'nin $M$ içindeki (asal) radikali
$Ass_R(M)$	$M$ 'nin $R$ içindeki ilgili asal ideallerinin kümesi
$soc(M)$	$M$ 'nin socle'ı
$Att_R(M)$	$M$ representable modülünün $R$ içindeki eklentileri
$R[X]$	$R$ üzerindeki $X$ değişkenine bağlı polinomların halkası
$\bar{R}$	$R$ 'nin integral kapanışı
$I^{-1}$	$I$ idealinin tersi
$N^{-1}$	$N$ altmodülünün tersi
$\mathcal{O}(X)$	$X$ torsion-free modülünün mertebesi
$Tr_M(N)$	$N$ 'nin $M$ içindeki izi
$\mathbb{N}$	negatif olmayan tamsayıların kümesi
$\mathbb{Z}$	tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
PAT	Prime Avoidance Theorem

# 1 ÖN BİLGİLER

Bu bölümü, çalışmamızda yer alan bazı kavram ve gösterimlerin genel hatlarıyla tanıtılmasına ayırıyoruz. Halka ve modül kuramının bu bölümde değinilmeyen temel tanım ve sonuçları için lisans düzeyinde yazılmış herhangi bir cebir kitabından faydalanılabilir.

Tez çalışmamız boyunca ele aldığımız tüm halkalar birimli ve birleşmeli halkalar, modüller ise üniter (unitary) sol modüller olarak kabul edilecektir. Herhangi bir yapı koruyan dönüşüm (homomorfizma) 1–1 ise bu dönüşüme bir monomorfizma (bazen de gömme dönüşümü), örten ise epimorfizma ve hem 1–1 hem de örten ise izomorfizma diyeceğiz. Bir  $R$  halkası için  $M$  ve  $N$  iki  $R$ -modül ise  $M$ 'den  $N$ 'ye tanımlanan tüm  $R$ -modül homomorfizmalarının (kısaca  $R$ -homomorfizmalarının) toplamsal grubunu  $Hom_R(M, N)$  ile;  $M$  üzerindeki  $R$ -endomorfizmalarının halkasını da  $End_R(M)$  ile göstereceğiz.

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül,  $N$   $M$ 'nin bir altmodülü (kısaca  $N \leq M$ ) ve  $X$   $M$ 'nin boştan farklı bir altkümesi olsun.  $(N :_R X)$  ile  $R$ 'nin  $rX \subseteq N$  olacak şekildeki  $r$  elemanlarının kümesini göstereceğiz. Buna göre  $(N :_R X)$ ,  $R$ 'nin bir sol idealidir. Eğer, ek olarak,  $X$   $M$ 'nin bir altmodülü alınırsa o zaman  $(N :_R X)$ ,  $R$ 'nin bir ideali olur. Eğer  $N = 0$  ise o zaman  $(N :_R X)$  kümesine  $X$ 'in  $R$  içindeki sıfırlayanı denir ve bu küme  $ann_R(X)$  ile gösterilir. Dikkat edilirse  $(N :_R M) = ann_R(M/N)$  dir. Eğer  $X = \{x\}$  tek elemanlı bir küme ise o zaman  $(N :_R X)$  kümesini kısaca  $(N :_R x)$  şeklinde göstereceğiz. Şimdi  $Y$ ,  $R$ 'nin boştan farklı bir altkümesi olsun.  $(N :_M Y)$  ile  $M$ 'nin  $Ym \subseteq N$  olacak şekildeki  $m$  elemanlarının kümesini göstereceğiz. Eğer  $Y$ ,  $R$ 'nin bir sağ ideali ise  $(N :_M Y)$ ,  $M$ 'nin bir altmodülüdür. Eğer  $Y = \{y\}$  tek elemanlı ise  $(N :_M Y)$  kümesini  $(N :_M y)$  şeklinde göstereceğiz. Eğer  $N = 0$  alınırsa  $(N :_M Y)$  kümesine  $Y$ 'nin  $M$  içindeki sıfırlayanı denir ve bu küme  $ann_M(Y)$  şeklinde gösterilir.  $I$ ,  $R$ 'nin bir ideali ise sıfırlayanları  $I$ 'yı içeren  $R$ -modüller aynı zamanda  $(R/I)$ -modül yapısına sahiptirler ve bu modüllerin  $R$ -altmodülleri ile  $(R/I)$ -altmodülleri aynıdır. Özel olarak  $M$ 'nin  $R$ -altmodülleri ile  $R/ann_R(M)$ -altmodülleri aynı olur. Eğer  $ann_R(M) = 0$  ise bu durumda  $M$ 'ye bir *faithful*  $R$ -modül denir. Dikkat edilirse  $M \neq 0$  ise  $M$  bir faithful  $R/ann_R(M)$ -modüldür.

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin altmodüllerinin boştan farklı bir  $\mathcal{A}$  ailesini alalım. Eğer  $\mathcal{A}$  ailesinin boştan farklı her altailesinin kapsama bağıntısına

göre en az bir maksimal elemanı varsa (veya denk olarak  $\mathcal{A}$ 'nın kapsama bağıntısına göre iyi sıralı sayılabilir her artan zinciri sonlu ise) o zaman  $M$ ,  $\mathcal{A}$  üzerinde artan zincir koşulunu sağlar diyeceğiz. Yukarıdaki ifadede kapsama bağıntısının yerine ters kapsama bağıntısı yazılırsa, bu sefer de,  $M$   $\mathcal{A}$  üzerinde azalan zincir koşulunu sağlıyor diyeceğiz. Eğer bir  $M$  modülü tüm altmodülleri üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyor ise  $M$ 'ye bir *Noether (Artin)* modül denir. Bir modülün Noether olması ile her altmodülünün sonlu üreteçli olması denktir. Eğer  $R$  halkası kendisi üzerinde sol modül olarak (kısaca  ${}_R R$ ) Noether (Artin) ise  $R$ 'ye bir sol Noether (Artin) halka denir. Benzer şekilde sağ Noether (Artin) halka tanımı verilebilir. Bir sol Noether halka üzerindeki her sonlu üreteçli sol modül Noetherdir. Ayrıca her sol (sağ) Artin halka sol (sağ) Noetherdir. Bir halka hem sol hem de sağ Noether ise bu halkaya kısaca Noether halka diyeceğiz. Dikkat edilirse bir değişmeli halka için sağ ve sol Noether (ya da Artin) kavramları çakışır. Ayrıca  $R$  bir değişmeli halka ve  $M$  bir Noether  $R$ -modül ise  $R/\text{ann}_R(M)$  halkası Noetherdir.

Eğer  $M \neq 0$  ve  $M$ 'nin sıfır ve kendisinden başka bir altmodülü yoksa  $M$ 'ye *basit modül* denir.  $M$  bir basit  $R$ -modül ise sıfırdan farklı her elemanı  $M$ 'yi üretir. Bu durumda her  $0 \neq m \in M$  için  $M \cong R/\text{ann}_R(m)$  yazılabilir.

Eğer  $M$  hem Noether hem de Artin modül ise  $M$  için *sonlu uzunluğa sahiptir* denir.  $M$ 'nin sonlu uzunluğa sahip olması ile  $M$  içinde her  $0 \leq i \leq n-1$  için  $M_{i+1}/M_i$  bölüm modülü basit olacak şekilde bir  $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$  dizisinin bulunması denktir. Bu şekildeki bir diziye *kompozisyon dizisi* adı verilir ve buradaki  $n$  sayısına da bu dizinin uzunluğu denir. Bir modülün herhangi iki kompozisyon dizisinin uzunluğu aynıdır. Buna göre  $M$  modülü sonlu uzunluğa sahip ise  $M$  içindeki herhangi bir kompozisyon dizisinin uzunluğuna  $M$ 'nin uzunluğu diyeceğiz ve bu sayıyı  $l(M)$  ile göstereceğiz.  $l(M)$ ,  $M$  içindeki altmodül dizilerinin uzunluklarının en küçük üst sınırıdır. Yani  $M$  içindeki hiçbir altmodül dizisinin uzunluğu  $l(M)$ 'yi geçemez ve  $M$ 'nin altmodüllerinin her dizisi bir kompozisyon dizisine tamamlanabilir.

Eğer  $M$  basit  $R$ -modüllerin toplamı şeklinde yazılabiliyor ise o zaman  $M$ 'ye *yarı-basit modül* adı verilir.  $M$ 'nin yarı-basit oluşu basit modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilmesi veya her altmodülünün dik toplananı (direct summand) olması ile karakterize edilebilir. Buna göre yarı-basit modüllerin sıfırdan farklı her altmodülü ile sıfırdan farklı her bölümü yine yarı-basittir. Ayrıca bir yarı-basit modülün sonlu üreteçli

olması, sonlu uzunluğa sahip olması, Noether olması ve Artin olması birbirlerine denktir. Eğer  ${}_R R$  bir yarı-basit modül ise o zaman  $R$ 'ye (sol) *yarı-basit halka* denir.  $R$ 'nin sol veya sağ yarı-basit olması denk olduğundan, bir halka için yalnızca "yarı-basit" ifadesini kullanacağız.  $R$  bir yarı-basit halka ise o zaman üzerindeki tüm sol (ve sağ) modüller yarı-basittir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir konu da basit halkaların, yarı-basit halkaların tanımlandığından farklı şekilde tanımlanıyor olmalarıdır. Basit halka ile, sıfır ve kendisinden başka iki-yönlü ideali olmayan halka kastedilmektedir. Yani her basit halka yarı-basit olmak zorunda değildir.

$M$ , herhangi bir  $R$  halkası üzerinde bir modül ise  $M$ 'nin tüm basit altmodüllerinin (dik) toplamına  $M$ 'nin *socle*'ı denir.  $M$ 'nin socle'ını  $\text{soc}(M)$  ile göstereceğiz. Eğer  $M$  hiç basit modül içermez ise bu durumda  $\text{soc}(M) = 0$  olarak kabul edilecektir.

Eğer bir  $N \leq M$  için  $M/N$  bir basit  $R$ -modül ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *maksimal altmodülü* denir. Zorn Lemma kullanılarak sonlu üreteçli her  $R$ -modülün en az bir maksimal altmodüle sahip olacağı gösterilebilir. Buna göre  $R$  halkası birimli olduğundan maksimal sol (sağ ve iki yönlü) ideallerinin varlığı garantidir.  $R$ 'nin maksimal sol ideallerinin arakesitine  $R$ 'nin *Jacobson radikalı* adı verilir ve  $\text{Jac}(R)$  ile gösterilir.  $\text{Jac}(R)$  aynı zamanda  $R$ 'nin maksimal sağ ideallerinin arakesitidir ve dolayısıyla  $R$ 'nin bir idealidir.  $R$ 'nin bir sol ideali  $I$  için  $I \subseteq \text{Jac}(R)$  olması ile sıfırdan farklı her sonlu üreteçli sol  $R$ -modül  $M$  için  $IM \neq M$  olması denktir. Bu sonuç literatürde *Nakayama Lemma* olarak anılır.

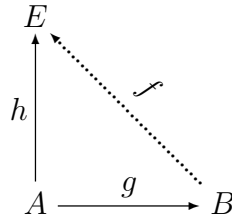
$P$ ,  $R$ 'nin bir ideali olsun. Eğer  $P = \text{ann}_R(B)$  olacak şekilde bir  $B$  basit sol (sağ)  $R$ -modülü varsa o zaman  $P$ 'ye bir sol (sağ) *ilkel ideal* denir. Eğer  $R$ 'nin sıfır ideali bir sol (sağ) ilkel ideal ise o zaman  $R$ 'ye bir sol (sağ) *ilkel halka* diyeceğiz. Maksimal idealler hem sağ hem de sol ilkel ideallerdir ve değişmeli halkalarda ilkel idealler maksimal idealler ile çakışır. Fakat değişmeli olmayan halkalarda durum her zaman böyle değildir (bkz. [9, Alıştırma 2P]). Diğer taraftan bir halkanın tüm sol (veya sağ) ilkel ideallerinin arakesiti halkanın Jacobson radikaline eşittir.

$N \leq M$  olsun. Eğer sıfırdan farklı her  $L \leq M$  için  $N \cap L \neq 0$  ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *büyük (essential) altmodülü* (veya  $M$ 'ye  $N$ 'nin bir büyük genişlemesi) denir. Eğer  $N$ ,  $M$ 'nin bir büyük altmodülü ise bu durumu kısaca  $N \leq_e M$  şeklinde göstereceğiz. Sıfırdan farklı bir  $R$ -modül  $U$  için, eğer  $U$ 'nun sıfırdan farklı her altmodülü  $U$  içinde büyük ise o zaman  $U$ 'ya bir *düzgün*  $R$ -modül denir. Eğer  $M = 0$  ise veya  $M$ 'nin sonlu

adet düzgün  $R$ -modülün dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodülü var ise o zaman  $M$ 'ye *sonlu düzgün boyuta sahiptir* denir. Bir modülün sonlu düzgün boyuta sahip olması ile sıfırdan farklı altmodüllerinin bir sonsuz dik toplamını içermemesi denktir. Buna göre Noether ve Artin modüller sonlu düzgün boyuta sahiptirler. Ayrıca sonlu düzgün boyuta sahip bir modülün her altmodülü de sonlu düzgün boyuta sahip olur. Dolayısıyla  $M$ , sonlu düzgün boyuta sahip ise  $M$ 'nin sıfırdan farklı her altmodülü en az bir düzgün  $R$ -modül içerir.  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip bir  $R$ -modül ve  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_m \leq M$  düzgün  $R$ -modüller olmak üzere  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n \leq_e M$  ve  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m \leq_e M$  ise  $n = m$  dir (Steinitz Replacement Theorem). Bu durumda  $n$  sayısına  $M$ 'nin *düzgün boyutu* denir.  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  ise  $N$  ile  $M$ 'nin düzgün boyutlarının eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $N \leq_e M$  olmasıdır.

$S \leq M$  olsun. Zorn Lemma'nın sıradan uygulamalarından biri de  $\{N : N \leq M \text{ ve } S \cap N = 0\}$  kümesinin bir maksimal elemana sahip olduğunu gösterilmesidir. Bu kümenin maksimal elemanlarının her birine  $S$  altmodülünün  $M$  içindeki *komplementi* diyeceğiz. Ayrıca  $N \leq M$ ,  $M$ 'nin bir altmodülünün bir komplementi ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *komplement altmodülü* diyeceğiz.  $C$ ,  $S$ 'nin  $M$  içindeki bir komplementi ise bu durumda  $S \oplus C \leq_e M$  ve  $(S \oplus C)/C \leq_e M/C$  olur. Ayrıca, eğer bir  $L \leq M$  için  $S \cap L = 0$  ise bu durumda  $S$ 'nin  $L$ 'yi içeren ( $M$  içinde) bir komplementi vardır.

$E$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer her  $g : A \rightarrow B$ ,  $R$ -monomorfizması ve her  $h : A \rightarrow E$ ,  $R$ -homomorfizması için  $h = f \circ g$  olacak şekilde bir  $f : B \rightarrow E$ ,  $R$ -homomorfizması bulunabiliyor ise  $E$ 'ye bir *injektif*  $R$ -modül denir.



İnjektif modüller ile ilgili geliştirilen oldukça geniş bir kuram mevcuttur (daha fazla ayrıntı için bkz. [36]). Fakat biz bu kuramın yalnızca çalışmamızda kullandığımız kısımlarına değineceğiz. Modül kuramının önemli sonuçlarından birisi de her modülün bir injektif modül tarafından içerilebilmesidir. Kabul edelim ki  $M \leq E$  ve  $E$  bir injektif  $R$ -modül olsun. Zorn Lemma sayesinde  $M$ 'nin  $E$  içindeki büyük genişlemelerinin bir

maksimali bulunabilir. Bu altmodül; (i) bir injektif  $R$ -modüldür, (ii)  $M$ 'nin (izomorfizma farkıyla) en geniş büyük genişlemesidir ve (iii)  $M$ 'yi içeren (izomorfizma farkıyla) en küçük injektif modüldür. Bu modüle  $M$ 'nin injektif zarfı denir ve  $E(M)$  ile gösterilir. Bir modülün injektif zarfı izomorfizma farkıyla tektir. Ayrıca bir injektif modülün injektif zarfı yine kendisidir.

Eğer bir modül sıfır ve kendisinden farklı iki altmodülünün dik toplamı şeklinde yazılamıyor ise bu modüle *indecomposable modül* denir. Bir injektif modülün indecomposable olması ile düzgün olması aynı anlama gelir. Aslında daha genel olarak; " $M$ 'nin düzgün olması ile  $E(M)$ 'nin indecomposable olması denktir" denilebilir.

Sonlu adet injektif modülün dik toplamının yine injektif olacağını görmek zor değildir. Fakat sonsuz adet injektif modülün dik toplamı için bu durumdan bahsetmek her zaman mümkün değildir. Aslında  $R$ 'nin sol Noether olması ile injektif  $R$ -modüllerin herhangi bir dik toplamının yine injektif olması denktir.  $R$ 'nin sol Noether olmasına denk olan bir diğer koşul da her injektif  $R$ -modülün indecomposable (injektif)  $R$ -modüllerin bir dik toplamı şeklinde yazılabilmesidir.

Bir  $r \in R$  için  $rs = 0$  ( $sr = 0$ ) olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $s \in R$  varsa  $r$ 'ye bir sol (sağ) sıfır böleni denir. Eğer  $R$ 'nin sağ sıfır böleni olmayan her  $r$  elemanı ve  $M$ 'nin her  $m$  elemanı için  $m = rm'$  olacak şekilde bir  $m' \in M$  bulunabiliyor ise  $M$ 'ye bir *bölünebilir (divisible)  $R$ -modül* denir. Her injektif modül bir bölünebilir modüldür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir (bölünebilir modüllerin bölüm modülleri de bölünebilirdir fakat injektif modüller için aynı şeyi söyleyemeyiz).

Halka yapılarının belirlenmesi ve sınıflandırılmasında kullanılan araçlar arasında asal ideal kavramı ve bu kavram vasıtasıyla tanımlanan bazı kavramlar (asal radikal, yarı-asal ideal ve yarı-asal halka, Krull boyutu, yerelleştirme vs...) önemli yer tutar.  $P$ ,  $R$ 'nin bir ideali olsun. Eğer  $R$ 'nin  $I$  ve  $J$  gibi iki ideali için  $IJ \subseteq P$  iken  $I$  veya  $J$ 'den en az biri  $P$  içinde kalıyor ise o zaman  $P$ 'ye  $R$ 'nin bir *asal ideali* denir. Eğer  $R$ 'nin sıfır ideali asal ise o zaman  $R$ 'ye bir *asal halka* denir. Sağ veya sol ilkel idealler (ve dolayısıyla maksimal idealler) asal ideallerdir. Ayrıca bir sol (veya sağ) Artin halkasının her asal ideali maksimaldir.  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için eğer  $P$ , kendisinden başka  $R$ 'nin bir asal idealini içermez ise o zaman  $P$ 'ye  $R$ 'nin bir *minimal asal ideali* diyeceğiz.  $I$ ,  $R$ 'nin bir öz ideali ise o zaman  $R/I$  halkasının bir  $P/I$  minimal asal ideali için  $P$ 'ye  $I$ 'nin  $R$  içindeki bir minimal asal ideali denir. Her asal ideal bir minimal asal

ideal içerir. Bir sol (veya) sağ Noether halkada yalnızca sonlu adet minimal asal ideal bulunur ve minimal asal ideallerin bir sonlu çarpımı sıfırdır.  $P, R$ 'nin bir asal ideali ve  $I_1, \dots, I_n, R$ 'nin idealleri olsun. Bu durumda (i)  $P \supseteq I_1 \cap \dots \cap I_n$  (veya  $P \supseteq I_1 \dots I_n$ ) ise en az bir  $i = 1, \dots, n$  için  $P \supseteq I_i$  ve (ii)  $P = I_1 \cap \dots \cap I_n$  (veya  $P = I_1 \dots I_n$ ) ise en az bir  $i = 1, \dots, n$  için  $P = I_i$  olur. Bunlara ek olarak değişmeli halkalarda elde edilen kullanışlı bir sonucu daha ifade edelim:  $R$  bir değişmeli halka,  $S \subseteq R$  toplamsal ve çarpımsal olarak kapalı bir küme ve  $P_1, \dots, P_n, R$ 'nin en fazla ikisi asal olmayan idealleri olmak üzere, eğer  $S \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$  ise bu durumda  $S \subseteq P_i$  olacak şekilde  $i = 1, \dots, n$  vardır. Bu sonuc bazı kaynaklarda "Prime Avoidance Theorem" (PAT) olarak anılmaktadır.

$R$  bir değişmeli halka ise  $R$ 'nin asal ideallerinin bütün  $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$  dizileri için  $n$  sayılarının varsa en küçük üst sınırına  $R$ 'nin Krull boyutu (classical Krull dimension) denir. Buna göre her asal ideali maksimal olan bir değişmeli halkanın Krull boyutu sıfırdır.

$R$  bir değişmeli halka ve  $P, R$ 'nin bir asal ideali olsun.  $R$ 'nin asal ideallerinin her  $P = P_n \supset \dots \supset P_1 \supset P_0$  dizisi için  $n$  sayılarının varsa en küçük üst sınırına  $P$ 'nin *yüksekliği* (*height*) denir. Buna göre bir minimal asal idealin yüksekliği sıfır olur.

Asal ideallerin arakesiti şeklinde yazılabilen ideallere *yarı-asal ideal*, sıfır ideali yarı-asal olan halkalara ise *yarı-asal halka* denir. Jacobson radikali sıfır olan halkaların yarı-asal olduğu açıktır. Buna göre her yarı-basit halka yarı-asaldır. Öte yandan her sol (veya sağ) Artin yarı-asal halka yarı-basit olur (Bölüm II'de bu sonucun modüller için bir genellemesini vereceğiz). Dolayısıyla sol Artin ilkel halkalar hem basit hem de yarı-basittir.

$I, R$ 'nin bir ideali olsun.  $I$ 'nin yarı-asal ideal olması ile (i) "her  $r \in R$  için  $rRr \subseteq I$  ise  $r \in I$  dir", (ii) "her  $J$  ideali için  $J^2 \subseteq I$  ise  $J \subseteq I$  dir" ve (iii) "her  $J$  sol (veya sağ) ideali için  $J^2 \subseteq I$  ise  $J \subseteq I$  dir" önermelerinin herbiri denktir.

$R$ 'nin bir  $I$  ideali için  $I$ 'yi içeren tüm asal ideallerin arakesitine  $I$  idealinin  $R$  içindeki (*asal*) *radikali* denir ve  $\sqrt{I}$  şeklinde gösterilir. Sıfır idealinin radikaline ise özel olarak halkanın asal radikali diyeceğiz. Bir sol (veya sağ) Artin halkanın asal radikali Jacobson radikaline eşittir. Bir idealin radikali aynı zamanda onu içeren tüm minimal asal ideallerin arakesitidir. Ayrıca  $R$  halkası değişmeli olduğunda  $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}$  yazabiliriz. Dolayısıyla bir değişmeli halkanın sıfır radikali, yani tüm (mini-

mal) asal ideallerinin arakesiti, halkanın nilpotent (bir kuvveti sıfır olan) elemanlarının kümesidir.

$R$ 'nin bir  $I$  ideali için  $I^n = 0$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı varsa  $I$ 'ya  $R$ 'nin bir *nilpotent ideali* denir. Bir sol (veya sağ) Noether halkanın asal radikali nilpotenttir. Dolayısıyla bir sol Artin halkanın Jacobson radikali nilpotent olur. Eğer  $Jac(R)$  bir nilpotent ideal ve  $R/Jac(R)$  bir yarı-basit halka ise  $R$ 'ye yarı-asıl (semiprimary) halka denir. Buna göre her sol Artin halka yarı-asıldır.

$R$  bir değişmeli halka olsun. Eğer  $R$ 'nin bir tek maksimal ideali varsa o zaman  $R$ 'ye bir *quasi-yerel* (*quasi-local*) halka diyeceğiz. Eğer  $R$  bir Noether quasi-yerel halka ise bu durumda  $R$ 'ye bir *yerel* (*local*) halka diyeceğiz.  $R$ , tek maksimal ideali  $\mathfrak{M}$  olan bir quasi-yerel (ya da yerel) halka ise bu durumda " $(R, \mathfrak{M})$  bir quasi-yerel (ya da yerel) halkadır" ifadesini kullanacağız.

$R$  bir değişmeli halka olsun. Bir  $S \subseteq R$  için eğer (i)  $1 \in S$  ve (ii) her  $a, b \in S$  için  $ab \in S$  koşulları sağlamıyor ise  $S$ 'ye  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesi denir. Örneğin,  $R$ 'nin asal ideallerinin bir  $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$  ailesi için  $R \setminus (\bigcup_A P_\alpha)$  kümesi  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesidir.

$R$  bir değişmeli halka,  $S \subseteq R \setminus \{0\}$  bir çarpımsal kapalı küme ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M \times S$  üzerinde " $(m, s) \sim (m', s') \iff \exists s'' \in S, s''(s'm - sm') = 0$ " şeklinde tanımlı  $\sim$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bir  $(m, s) \in M \times S$  elemanının denklik sınıfını  $m/s$  ile gösterirsek,  $\{m/s : (m, s) \in M \times S\}$  kümesi, her  $(m, s), (m', s') \in M \times S$  için  $m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss'$  şeklinde tanımlanan toplama işlemi ile birlikte bir abelyan grup olur. Bu grubu  $S^{-1}M$  ile göstereceğiz. Burada özel olarak  $M$  modülünün yerine  $R$ 'nin kendisini alırsak  $S^{-1}R$  kümesi, her  $r/s, r'/s' \in S^{-1}R$  için  $(r/s)(r'/s') = (rr')/(ss')$  şeklinde tanımlanan çarpma işlemiyle birlikte bir halka olur. Ayrıca  $S^{-1}M$  toplamsal grubu, her  $r/s \in S^{-1}R$  ve  $m/t \in S^{-1}M$  için  $(r/s)(m/t) = (rm)/(st)$  şeklinde tanımlanan skalerle çarpma işlemi ile bir  $S^{-1}R$ -modül yapısına sahip olur. Buna göre,  $R \rightarrow S^{-1}R$ , her  $r \in R$  için  $r \mapsto r/1$  ile tanımlı dönüşüm bir halka homomorfizması olacağından,  $S^{-1}M$  aynı zamanda  $R$ -modül yapısına da sahiptir.  $S^{-1}M$  modülüne (ya da  $S^{-1}R$  halkasına)  $M$ 'nin (ya da  $R$ 'nin)  $S$ 'deki yerelleştirmesi diyeceğiz. Eğer  $R$ , değişmeli bir tamlık bölgesi alınır ve  $S = R \setminus \{0\}$  olarak seçilirse  $S^{-1}R$  halkası bir cisim olur. Bu cisme  $R$ 'nin *kesirler cismi* adı verilir. Eğer  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için  $S = R \setminus P$  ise  $S^{-1}M$  için kısaca  $M$ 'nin  $P$ 'deki yerelleştirmesi diyeceğiz ve  $S^{-1}M$  yerine  $M_P$

gösterimini kullanacağız. Gerçekten yerelleştirme kelimesi  $R_P$  nin bir quasi-yerel halka olmasından gelir. Fakat herhangi bir çarpımsal kapalı  $S$  kümesi için  $S^{-1}R$  halkasının tek maksimal ideale sahip olması gerektiğini söyleyemeyiz. Örneğin;  $R$ 'nin herhangi ikisi karşılaştırılmaz olan  $P_1, \dots, P_n$  asal idealleri için  $S = R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n)$  alınırsa  $S^{-1}R$  halkasının  $n$  tane maksimal ideali olur (bu idealler, biraz sonra tanımlayacağımız,  $P_i$  ideallerinin  $S^{-1}R$  içindeki genişlemeleridir).

$S, R$  ve  $M$ 'yi yukarıdaki gibi kabul edelim.  $\chi : M \rightarrow S^{-1}M$ , her  $m \in M$  için  $m \mapsto m/1$  ile tanımlanan dönüşüm bir  $R$ -homomorfizmasıdır. Bir  $N \leq M$  için  $S^{-1}M$ 'nin  $\chi(N)$  tarafından üretilen  $S^{-1}R$ -altmodülüne  $N$ 'nin  $S^{-1}M$  içindeki genişlemesi (*extension*) denir ve  $N^e$  ile gösterilir. Ayrıca  $S^{-1}M$ 'nin bir  $\Omega$   $S^{-1}R$ -altmodülü için  $M$ 'nin  $\chi^{-1}(\Omega)$  altmodülüne  $\Omega$ 'nın  $M$  içindeki burulması (*contraction*) denir ve  $\Omega^c$  şeklinde gösterilir. Buna göre  $N^e = \{\lambda \in S^{-1}M : \exists n \in N \text{ ve } s \in S, \lambda = n/s\}$  ve  $\Omega^c = \{m \in M : m/1 \in \Omega\}$  olur. Burada  $\Omega \neq S^{-1}M$  ise  $(\Omega^c : M) \cap S = \emptyset$  olur. Ayrıca  $\Omega^{ce} = \Omega$  yazılabilir. Öte yandan genel olarak  $(N :_R M)^e \subseteq (N^e :_{S^{-1}R} M^e)$  dir ve  $M$  sonlu üreteçli  $R$ -modül olduğunda da eşitlik vardır. Dolayısıyla  $M$  sonlu üreteçli olduğunda  $S^{-1}M$ 'nin tüm  $S^{-1}R$ -altmodüllerinin kümesi  $\{N^e : N \leq M \text{ ve } (N : M) \cap S = \emptyset\}$  kümesidir. Böylece  $M$  bir Noether  $R$ -modül ise  $S^{-1}M$  de bir Noether  $S^{-1}R$ -modül olur. Yerelleştirme ile ilgili bazı kullanışlı özellikleri şu şekilde sıralayabiliriz:  $I, R$ 'nin bir ideali ve  $N, N_1$  ve  $N_2$   $M$ 'nin altmodülleri olmak üzere; (i)  $(IN)^e = I^e N^e$ , (ii)  $(N_1 + N_2)^e = N_1^e + N_2^e$  ve (iii)  $(N_1 \cap N_2)^e = N_1^e \cap N_2^e$ . Dikkat edilirse bu sonuçlar  $R$  halkasının idealleri için yeniden yazılabilir.

$R$  herhangi bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M \neq 0$  ve  $M$ 'nin sıfırdan farklı her  $N$  altmodülü için  $\text{ann}(M) = \text{ann}(N)$  ise o zaman  $M$ 'ye bir *asal*  $R$ -modül denir.  $M$  bir asal  $R$ -modül ise  $\text{ann}(M)$ ,  $R$ 'nin bir asal idealidir. Bir  $N \leq M$  için  $M/N$  bölüm modülü bir asal  $R$ -modül ise bu durumda  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *asal altmodülü* denir. Eğer  $N, M$ 'nin bir asal altmodülü ve  $P = \text{ann}(M/N) = (N : M)$  ise  $N$ 'ye özel olarak  $P$ -asal altmodül diyeceğiz. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta da bir modülün asal altmodülü ile içinde yer alan asal modül arasında fark olduğudur. Yani " $N, M$ 'nin bir asal altmodülüdür" denildiğinde ([15]'de olduğu gibi) " $N$  bir asal modüldür ve  $M$ 'nin içinde yer alır" ifadesi kastedilmeyecektir. Bu iki durum arasındaki ayrım konusunda okuyucunun dikkatine güvenmekten fazla bir iş yapmayacağız.

$R$  bir değişmeli tamlık bölgesi ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$  bir faithful asal

$R$ -modül ise  $M$ 'ye *torsion-free*  $R$ -modül diyeceğiz. Kolayca görülebilir ki  $\{m \in M : \exists 0 \neq r \in R, rm = 0\}$  kümesi  $M$ 'nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle  $M$ 'nin *torsion altmodülü* denir.  $T$ ,  $M$ 'nin torsion altmodülü olsun. Eğer  $T = M$  ise  $M$ 'ye bir *torsion  $R$ -modül* denir. Dikkat edilirse  $T \neq M$  olduğunda  $M/T$  bir torsion-free  $R$ -modül olur. Buna göre  $T \neq 0$  ise  $T$ ,  $M$ 'nin bir 0-asal altmodülüdür.

Asal altmodül ve tek-yönlü asal ideal kavramları birçok yazar tarafından çalışılmıştır (örneğin bkz. [4], [7], [10], [11], [13], [17], [23], [25], [28] ve [41]). Bir modülün belli özellikteki altmodüllerinin bir ailesinin Zorn Lemma ya da başka maksimallik koşulları yardımıyla bir maksimal elemanı bulunabildiği zaman, bu elemanın bir asal altmodül olması alışılmış bir durumdur. Bu durumda, çoğu zaman, altmodüllerin bir koşulu sağlaması, yalnızca asal altmodüllerin o koşulu sağlaması ile karakterize edilebilir. Örneğin Michler [28] ve Koh [13], bir halkanın sol Noether olması ile asal sol ideallerinin sonlu üreteçli olmasının denk olduğunu; Smith [40],  $R$  bir sol Noether halka ve  $M$  bir  $R$ -modül alındığında,  $M$ 'nin injektif olması ile  $R$ 'nin her büyük asal sol ideali  $L$  ve her  $\varphi : L \rightarrow M$ ,  $R$ -homomorfizması için  $\theta|_L = \varphi$  olacak şekilde bir  $\theta : R \rightarrow M$ ,  $R$ -homomorfizmasının bulunabilmesinin denk olduğunu ve Alkan, Saraç ve Tıraş [1], sonlu üreteçli bir modülün Dedekind olması ile her asal altmodülünün tersinir olmasının denk olduğunu göstermişlerdir. Asal altmodüllerin kullanıldığı bunlara benzer pek çok sonuç bulunmaktadır.

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir öz altmodülü olsun.  $N$ 'nin bir asal altmodül olmasını, (i) her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rRm \subseteq N$  ise  $rM \subseteq N$  veya  $m \in N$ , (ii)  $R$ 'nin her  $I$  (sol) ideali ve her  $L \leq M$  için  $IL \subseteq N$  ise  $IM \subseteq N$  veya  $L \subseteq N$ , (iii) her  $r \in R$  ve her  $L \leq M$  için  $rL \subseteq N$  ise  $rM \subseteq N$  veya  $L \subseteq N$  ve (iv)  $R$ 'nin her  $I$  ideali ve her  $m \in M$  için  $Im \subseteq N$  ise  $IM \subseteq N$  veya  $m \in N$  denk koşullarından herhangi biri ile belirleyebiliriz. Ayrıca  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ise o zaman  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür ancak ve ancak  $PM \subseteq N$  ve her  $r \in R \setminus P$  ve  $m \in M \setminus N$  için  $rRm \not\subseteq N$ . Eğer  $P$  asal ideali bir maksimal ideal ise  $M$ 'nin  $PM \subseteq N$  olacak şekildeki her  $N$  öz altmodülü  $P$ -asal altmodül olur.

Kolayca görülebilir ki bir asal modülün sıfırdan farklı her altmodülü de asal modüldür. Dolayısıyla  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü ise  $N$ 'yi kesin olarak içeren  $M$ 'nin her  $L$  altmodülü için  $N$ ,  $L$ 'nin de bir  $P$ -asal altmodülüdür.  $K \leq M$  olsun. O zaman  $M$ 'nin  $K$ 'yi içeren asal altmodülleri ile  $M/K$ 'nin asal altmodülleri birebir eşleşir. Daha

açık bir ifadeyle her  $K \leq N \leq M$  için  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür ancak ve ancak  $N/K$ ,  $M/K$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Ayrıca  $M$ 'nin  $(R/\text{ann}(M))$ -modül yapısına göre asal altmodülleri ile  $R$ -modül yapısına göre asal altmodülleri aynıdır.

$R$  bir değişmeli halka,  $S \subseteq R \setminus \{0\}$  bir çarpımsal kapalı küme ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $\mathfrak{P}$ ,  $S^{-1}R$ 'nin bir asal ideali ve  $\mathcal{K}$ ,  $S^{-1}M$ 'nin bir  $\mathfrak{P}$ -asal altmodülü ise o zaman  $\mathcal{K}^c$ ,  $M$ 'nin bir  $\mathfrak{P}^c$ -asal altmodülüdür. Öte yandan eğer  $P$ ,  $R$ 'nin  $P \cap S = \emptyset$  olacak şekilde bir asal ideali ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü ise  $N^e$ ,  $S^{-1}M$ 'nin bir  $P^e$ -asal altmodülüdür. Ayrıca  $N$ ,  $M$ 'nin  $(N : M) \cap S = \emptyset$  olacak şekilde bir asal altmodülü ise  $N^{ec} = N$  dir. Dolayısıyla  $M$ 'nin  $(N : M) \cap S = \emptyset$  olacak şekildeki  $N$  asal altmodülleri ile  $S^{-1}M$ 'nin asal altmodülleri arasında birebir bir eşleme vardır. Özel olarak  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ise  $R_P$ 'nin tüm asal idealleri,  $R$ 'nin  $P$  içinde kalan asal ideallerinin genişlemeleridir. Dolayısıyla  $(R_P, P^e)$  bir quasi-yerel halkadır. Buna göre  $P^e M_P \neq M_P$  ise  $P^e M_P$ ,  $M_P$ 'nin bir  $P^e$ -asal altmodülüdür. Yukarıda söylenenlerden dolayı  $(P^e M_P)^c \neq M$  ise o zaman  $(P^e M_P)^c$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Burada  $(P^e M_P)^c = \{m \in M : \exists c \in R \setminus P, cm \in PM\}$  kümesidir.

$R$  herhangi bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren tüm asal altmodüllerinin arakesitine  $N$ 'nin  $M$  içindeki (asal) radikali denir ve  $\text{rad}_M(N)$  ile gösterilir. Eğer  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir asal altmodülü yok ise o zaman  $\text{rad}_M(N) = M$  olarak kabul edilecektir. Değişmeli bir halkada bir idealin radikalının nasıl elemanlardan oluştuğunu daha önce söylemiştik. Bu durumu modüller için genellemek üzere  $R$ 'yi bir değişmeli halka alarak,  $N$  altmodülünün  $M$  içindeki zarfını tanımlayacağız:  $E_M(N) = \{rm \in M : r \in R, m \in M \text{ ve } \exists k \in \mathbb{N}, r^k m \in N\}$  kümesine  $N$ 'nin  $M$  içindeki *zarfı* denir.  $E_M(N)$  genellikle  $M$ 'nin bir altmodülü değildir. Bu nedenle  $M$ 'nin  $E_M(N)$  tarafından üretilen  $RE_M(N)$  altmodülü ile çalışacağız. Burada  $N \subseteq RE_M(N) \subseteq \text{rad}_M(N)$  olduğunu görmek zor değildir. Eğer  $RE_M(N) = \text{rad}_M(N)$  ise bu durumda  $N$  için *radikal formülünü* sağlıyor diyeceğiz. Eğer  $M$ 'nin her altmodülü radikal formülünü sağlar ise o zaman  $M$  için radikal formülünü sağlıyor diyeceğiz. Ayrıca, eğer  $R$  üzerindeki her modül radikal formülünü sağlar ise bu durumda da  $R$  için (halka olarak) radikal formülünü sağlıyor diyeceğiz. Buna göre her değişmeli halka kendisi üzerinde modül olarak düşünüldüğünde radikal formülünü sağlar. Fakat her değişmeli halka (halka olarak) radikal formülünü sağlamak zorunda değildir. Leung ve Man [16]'da radikal formülünü sağlayan Noether değişmeli halkaları karakterize

etmişlerdir. Bu karakterizasyondan, özel olarak, bir değişmeli Artin halkanın radikal formülünü sağladığı ve bir değişmeli Noether tamlık bölgesinin radikal formülünü sağlaması ile Dedekind halka olmasının denk olduğu görülmektedir. [32]'de bir değişmeli halka üzerindeki Artin modüllerin ve Krull boyutu sıfır olan bir değişmeli halka üzerindeki her modülün radikal formülünü sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra [41]'de yarı–Artin modüllerin de radikal formülünü sağladığı gösterilmiş ve dolayısıyla radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfı, Artin modüllerin sınıfından daha büyük bir sınıfa genişletilmiştir. Biz de Bölüm III'te, radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfını Artin modüllerin sınıfından daha geniş bir sınıfa farklı bir modül sınıfı ile genişleteceğiz. [41]'de ayrıca cisim olmayan bir Noether tamlık bölgesinin Krull boyutunun 1 olması ile bu halka üzerindeki tüm torsion modüllerin radikal formülünü sağlamasının denk olduğu gösterilmiştir (bu sonucu Bölüm IV'te Dedekind modüllerin radikal formülünü sağladıklarını gösterirken kullanacağız). Son olarak [2]'de Noether olmayan değişmeli halkalar üzerinde radikal formülü çalışılmış ve Krull boyutu 1 olan Aritmetik halkaların (tüm ideallerinin kümesinde toplamanın arakesit üzerine dağılma özelliği sağlanan halkalar) radikal formülünü sağladığı gösterilmiştir.

$R$  herhangi bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Eğer  $N$ ,  $M$ 'nin asal altmodüllerinin arakesiti şeklinde yazılabiliyor ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *radikal altmodülü* denir. Eğer  $R$ 'nin bir (sol) ideali  $R$ -altmodül olarak radikal ise bu durumda bu ideale radikal (sol) ideal diyeceğiz. Yani  $N$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür ancak ve ancak  $N = \text{rad}_M(N)$ .  $N$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olsun.  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rRr m \subseteq N$  ise kolayca görülebilir ki  $rm \in N$  dir. Bu gözlem bize yarı–asal altmodül kavramını tanımlamakta ilham verici rol oynamaktadır. Buna göre  $L \leq M$  olmak üzere eğer  $L \neq M$  ve her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rRr m \subseteq L$  iken  $rm \in L$  oluyorsa  $L$ 'ye  $M$ 'nin bir *yarı–asal altmodülü* denir. Eğer  $M \neq 0$  ve  $M$ 'nin sıfır altmodülü  $M$  içinde yarı–asal ise o zaman  $M$ 'ye bir *yarı–asal modül* diyeceğiz. Dikkat edilirse,  $R$  değişmeli halka olduğunda,  $N \leq M$  bir yarı–asal altmodüldür ancak ve ancak her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $r^n m \in N$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  bulunması  $rm \in N$  olmasını gerektirir (bu denkliği  $n = 2$  alarak ta verebiliriz).  $R$ 'nin bir sol (sağ) ideali  $R$ 'nin sol (sağ) altmodülü olarak yarı–asal altmodül ise bu durumda bu ideale bir yarı–asal sol (sağ) ideal diyeceğiz.  $I$ ,  $R$ 'nin bir sol ideali ise  $I$ 'nin yarı–asal sol ideal olması ile (i) her  $r \in R$  için  $rRr \subseteq I$  ise  $r \in I$  dir, ve (ii)  $R$ 'nin her  $J$  sol ideali için  $J^2 \subseteq I$  ise  $J \subseteq I$  önermeleri denktir.

Yarı-asal modül ve yarı-asal altmodül kavramları [5], [7] ve [20]'de çalışılmıştır. [7]'de  $R/ann(M)$  bir sol Artin halka olacak şekildeki  $M$  yarı-asal sol  $R$ -modülleri ele alınmış ve yarı-asal modül kavramı bu Artin olma koşulu ile birlikte incelenmiştir.

Bir yarı-asal modülün sıfırdan farklı her altmodülü de yarı-asal modüldür. Dolayısıyla  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ise  $N$ 'yi kesin olarak içeren  $M$ 'nin her  $L$  altmodülü için  $N$ ,  $L$ 'nin de bir yarı-asal altmodülüdür.  $K \leq M$  olsun. O zaman her  $K \leq N \leq M$  için  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür ancak ve ancak  $N/K$ ,  $M/K$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür. Ayrıca  $M$ 'nin  $(R/ann(M))$ -modül yapısına göre yarı-asal altmodülleri ile  $R$ -modül yapısına göre yarı-asal altmodülleri aynıdır.

Daha önce her radikal altmodülün bir yarı-asal altmodül olduğunu söylemiştik. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Ashında bunun tersinin doğru olduğu modüllere *s.p.a.r.* (semiprimes are radical) özelliğine sahip modüller diyeceğiz. Yani  $M$ 'nin her yarı-asal altmodülü radikal ise o zaman  $M$  *s.p.a.r.* özelliğine sahiptir. Ayrıca bir halka üzerindeki her modül *s.p.a.r.* özelliğine sahip ise bu halkaya (halka olarak) *s.p.a.r.* özelliğine sahiptir diyeceğiz. Dikkat edilirse  $R$  bir değişmeli halka ise  $N$ 'nin  $M$  içinde yarı-asal altmodül olması ile  $N = RE_M(N)$  olması denktir. Dolayısıyla değişmeli halkalar üzerinde *s.p.a.r.* özelliği radikal formülünün özel bir halidir, yani radikal formülünü sağlayan her modül *s.p.a.r.* özelliğine sahiptir. Buna göre bir değişmeli halka, kendisi üzerinde modül olarak düşünüldüğünde, *s.p.a.r.* özelliğine sahiptir. Ayrıca değişmeli olmayan bir halkanın yarı-asal iki yönlü idealleri *s.p.a.r.* özelliğine sahip olur. Fakat bir halkanın halka olarak *s.p.a.r.* özelliğine sahip olması her zaman söz konusu değildir. [20]'de *s.p.a.r.* özelliğine sahip değişmeli Noether halkalar karakterize edilmiştir. Ayrıca [2]'de verilen Sonuç 2.7'den sonraki açıklamalardan birincisine göre, Noether olmasa bile sonlu Krull boyuta sahip bir Aritmetik halka, *s.p.a.r.* özelliğine sahiptir. Aynı açıklama içinde radikal formülünün bugüne kadar ele alınan tanımına alternatif olabileceği belirtilen bir tanım önerilmiştir. Fakat bu tanıma göre bir modülün radikal formülünü sağlaması ile *s.p.a.r.* özelliğine sahip olması denktir.

Bugüne kadar asal ve yarı-asal altmodül kavramları ve bunlar ile ilgili sonuçlar çoğunlukla değişmeli halkalar üzerinde çalışılarak verilmiş ([2], [11], [16], [17], [19], [20], [21], [23], [24], [32], [39], [41], [42]) ve daha genel halka yapıları üzerindeki araştırmalar ([4], [10], [13], [25], [28]) bunlarla karşılaştırıldığında daha az yapılmıştır. Üstelik yarı-asal altmodül kavramı ile ilgili çalışmalar oldukça sınırlıdır. Örneğin; bir modülün veya

halkanın s.p.a.r. özelliğine sahip olması problemi ilk defa [20]'de ortaya atılmış fakat bu problemin ele alınması, bu çalışma ile sınırlı kalmıştır. Tezimizde, bu kavramların değişmeli ve değişmeli olmayan halkalar üzerindeki incelemelerine yer verilmektedir.

## 2 YARI-ASAL VE RADİKAL ALTMODÜLLER

Yarı-asal altmodül ve yarı-asal modül kavramları, halka kuramında önemli yer tutan yarı-asal ideal ve yarı-asal halka kavramlarının modül kuramı içinde bir genellemesi olarak düşünülmüştür (bkz. [7], [19], [20] ve [42]). Halka kuramında, bir yarı-asal idealin, kendisini içeren asal ideallerin arakesiti olarak yazılabildiği iyi bilinmektedir. Fakat yarı-asal altmodüller için bu durum her zaman geçerli değildir. Yani asal altmodüllerin arakesiti şeklinde yazılamayan yarı-asal altmodüller vardır (Örnek 2.30). Bu bölümde, genel olarak, yarı-asal altmodüllerin ne zaman radikal olabildikleri araştırılmaktadır. Ayrıca, bir modülün her yarı-asal altmodülünün radikal olması ile bir halka üzerindeki her modülün her yarı-asal altmodülünün radikal olması problemleri de ele alınmaktadır.

Bu bölüm beş alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci kısımda asal modüller, asal modüllerin dik toplamları ve radikal altmodüller ele alınarak bunlar üzerinde bazı sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlardan en önemlileri arasında, farklı sıfırlayanlara sahip asal modüllerin dik toplamı için verilen teklik teoremi (Teorem 2.4) ile radikal altmodüllerin karakterizasyonu (Teorem 2.9) söylenebilir. İkinci kısımda yarı-asal altmodüller üzerinde durulmuş ve yarı-asal altmodüllerin ne zaman radikal olabildikleri araştırılmıştır. Bu bölümde, ayrıca, halka kuramında iyi bilinen, bir halkanın yarı-asal ve Artin olması ile yarı-basit olmasının denk oluşu modül kuramına genişletilmiştir (Teorem 2.17). Üçüncü kısımda yarı-asallık, değişmeli halkalar üzerindeki Noether modüller içinde ele alınmış ve asıl ayrışım kavramı yardımıyla, bir yarı-asal altmodülün radikal olması için bazı denk koşullar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde güçlü yarı-asal altmodül kavramı ortaya atılarak bu altmodüllerin ne zaman radikal oldukları incelenmiştir. Dördüncü kısımda s.p.a.r. özelliği üzerinde durularak bu özelliği sağlayan halka ve modüller araştırılmıştır. Son kısımda ise s.p.a.r. özelliğine sahip modüllerin dik toplamlarının da s.p.a.r. özelliğine sahip olduğu bazı durumlar incelenmiştir.

Önümüzdeki iki alt bölümde ele alınan halkalar aksi belirtilmedikçe değişmeli olmak zorunda olmayan birimli halkalar ve modüller ise üniter modüllerdir.

## 2.1 Asal Modüller

Bu kısma bir dizi lemma vererek başlıyoruz. Aşağıdaki lemma [9, Exercise 2J]'de yer almasına rağmen bu lemmanın kanıtını bütünlüğü korumak amacıyla burada dahil edeceğiz.

**Lemma 2.1**  *$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , birbirinden farklı sıfırlayanlara sahip  $M$  içindeki asal  $R$ -modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda  $\sum_{\alpha \in A} L_\alpha$  toplamı diktir.*

**Kanıt.**  $M$  içindeki farklı sıfırlayanlara sahip asal modüllerin sonlu bir  $\{L_1, \dots, L_n\}$  ailesi için  $L_1 + \dots + L_n$  toplamının dik olacağını göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için  $n$  üzerine tümevarım uygulayacağız.  $n = 2$  olsun.  $L_1 \cap L_2 \neq 0$  ise tanımdan dolayı  $\text{ann}(L_1) = \text{ann}(L_1 \cap L_2) = \text{ann}(L_2)$  olacağından bu durum kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla  $L_1 \cap L_2 = 0$  olur. Şimdi  $n > 2$  ve iddiamız  $n$ 'den küçük bütün pozitif tamsayılar için doğru olsun.  $L = L_1 \cap (L_2 \oplus \dots \oplus L_n) = 0$  olduğunu göstererek kanıtı tamamlayacağız. Kabul edelim ki  $L \neq 0$  olsun. Tümevarım hipotezinden dolayı  $L_1 \cap (L_3 \oplus \dots \oplus L_n) = 0$  olur. Buna göre  $L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ 'den  $L_2$  üzerine tanımlanan doğal izdüşüm dönüşümünün  $L$ 'ye kısıtlanması ile bir gömme dönüşümü elde ederiz. Yani  $L$ 'nin  $L_2$  içinde bir izomorf kopyası vardır. Dolayısıyla  $L$  bir asal modüldür ve  $\text{ann}(L) = \text{ann}(L_2)$  dir. Öte yandan  $0 \neq L \leq L_1$  olduğundan  $\text{ann}(L) = \text{ann}(L_1)$  elde edilir. Bu durum ise bir çelişkidir. ■

**Lemma 2.2**  *$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali olsun.  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , her  $\alpha \in A$  için  $\text{ann}(L_\alpha) = P$  olacak biçimde  $M$  içindeki asal  $R$ -modüllerin bir ailesi olsun. Eğer  $L = \sum_{\alpha \in A} L_\alpha$  toplamı dik ise o zaman  $L$ , sıfırlayanı  $P$  olan bir asal modüldür.*

**Kanıt.**  $\text{ann}(L) = P$  olduğu açıktır. Kabul edelim ki  $rRl = 0$  olacak şekilde  $r \in R \setminus P$  ve  $0 \neq l \in L$  bulunsun. Buna göre  $l \in L_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_k}$  olacak şekilde  $\alpha_i \in A$  ( $1 \leq i \leq k$ ) vardır.  $r \in R \setminus P$  ve  $r(L_{\alpha_i} \cap Rl) = 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olduğundan  $L_{\alpha_i} \cap Rl = 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olur. Buna göre  $Rl$ 'yi  $L_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_k}$  içine gömebiliriz.  $Rl'$ ,  $Rl$ 'nin  $L_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_k}$  içindeki izomorf kopyası olsun. O halde  $rRl' = 0$  olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa her  $i = 2, \dots, k$  için  $Rl' \cap L_{\alpha_i} = 0$  olduğu görülür. Bu şekilde devam ederek tümevarım yoluyla  $Rl$ 'nin  $L_{\alpha_k}$

içine gömülebileceğini görebiliriz. Fakat buradan  $\text{ann}(Rl) = P$  elde edilir ki bu bir çelişkidir. ■

**Lemma 2.3**  $R$  bir halka ve  $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$  asal  $R$ -modüllerin bir ailesi olsun. Eğer  $N \leq \bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha$ , bir asal  $R$ -modül ise  $\text{ann}(N) = \text{ann}(L_\beta)$  olacak şekilde bir  $\beta \in A$  vardır.

**Kanıt.**  $L = \bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha$  olsun. Lemma 2.2'den dolayı  $L$  dik toplamı, sıfırlayanları birbirinden farklı olan asal modüllerin bir dik toplamına indirgenebilir.  $N \cap L = N \neq 0$  olduğundan, Lemma 2.1 gereğince, bir  $\beta \in A$  için  $\text{ann}(N) = \text{ann}(L_\beta)$  olmak zorundadır. ■

**Teorem 2.4**  $R$  bir halka ve  $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ , sıfırlayanları birbirinden farklı olan asal  $R$ -modüllerin bir ailesi olsun. Eğer sıfırlayanları birbirinden farklı asal  $R$ -modüllerin başka bir  $\{L'_\beta : \beta \in B\}$  ailesi için

$$\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha = \bigoplus_{\beta \in B} L'_\beta$$

ise o zaman bu iki aile arasında karşılıklı terimlerin izomorf oldukları birebir bir eşleme vardır.

**Kanıt.**  $\alpha_0 \in A$  alalım. Bir önceki lemmadan dolayı  $\text{ann}(L_{\alpha_0}) = \text{ann}(L_{\beta_0})$  olacak şekilde  $\beta_0 \in B$  vardır.  $\psi$  ve  $\varphi$ , doğal izdüşümlerin kısıtlamaları olmak üzere

$$L_{\alpha_0} \xrightarrow{\psi} L'_{\beta_0} \xrightarrow{\varphi} L_{\alpha_0}$$

bileşkesini düşünelim.  $0 \neq x \in L_{\alpha_0}$  olsun. Buna göre  $x = y + y'$  olacak şekilde (tek türlü belirli)  $y \in L'_{\beta_0}$  ve  $y' \in \bigoplus_{\beta \neq \beta_0} L'_\beta$  elemanları vardır. Eğer  $y' = 0$  ise  $\varphi\psi(x) = x$  dir.  $y' \neq 0$  olsun. Bu taktirde  $y' \in L'_{\beta_1} \oplus \dots \oplus L'_{\beta_t}$  olacak şekilde  $\beta_1, \dots, \beta_t \in B \setminus \{\beta_0\}$  elemanları vardır.  $t$  sayısını bu şekildeki en küçük pozitif tamsayı olarak seçelim. Her  $1 \leq i \leq t$  için  $P'_{\beta_i} = \text{ann}(L'_{\beta_i})$  ve  $P_{\alpha_0} = \text{ann}(L_{\alpha_0})$  olsun.  $y' = y_1 + \dots + y_t$  olacak şekilde  $y_i \in L'_{\beta_i}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) elemanları vardır.  $t$ 'nin seçiminden dolayı her  $i = 1, \dots, n$  için  $y_i \neq 0$  olur.  $a \in P_{\alpha_0}$  olsun. Buna göre  $aRx = 0$  olacağından  $aRy' = 0$  ve böylece her  $i = 1, \dots, t$  için  $aRy_i = 0$  bulunur. Buradan da  $a \in P'_{\beta_1} \cap \dots \cap P'_{\beta_t}$  elde edilir. Dolayısıyla  $P_{\alpha_0} \subsetneq P'_{\beta_1} \cap \dots \cap P'_{\beta_t}$  olur.  $r \in (P'_{\beta_1} \cap \dots \cap P'_{\beta_t}) \setminus P_{\alpha_0}$  alalım. Buna göre  $rRy' = 0 \subseteq \bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} L_\alpha$  elde edilir.  $\bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} L_\alpha$ ,  $M$ 'nin bir  $P_{\alpha_0}$ -asal altmodülü

olduğundan,  $y' \in \bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} L_\alpha$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $\varphi\psi(x) = \varphi(\psi(y + y')) = \varphi(y) = \varphi(x - y') = x$  elde edilir. Böylece  $\varphi\psi = id_{L_{\alpha_0}}$  olur. Simetrik argümanlar kullanılarak  $\psi\varphi = id_{L'_{\beta_0}}$  olduğu da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla  $L_{\alpha_0} \cong L'_{\beta_0}$  olur.

■

Yukarıdaki teoremden  $A$  (veya  $B$ ) kümesi sonlu alındığında, yani teklik teoremi farklı sıfırlayanlara sahip sonlu adet asal modülün dik toplamı için düşünüldüğünde, toplamda yer alan bazı terimlerin birebir eşleşmesindeki izomorfizmanın yerini eşitliğini aldığını görebiliriz. Bunu göstermeden önce normal asal ayrışım kavramına değineceğiz:

$M$  bir modül ve  $N \leq M$  olsun.  $n \geq 1$  bir tamsayı olmak üzere, eğer  $N$ ,  $M$ 'nin sonlu tane  $K_1, \dots, K_n$  asal altmodülünün arakesiti olarak yazılabiliyor ise o zaman

$$N = K_1 \cap \dots \cap K_n \quad (*)$$

yazılışına  $N$ 'nin ( $M$  içindeki) bir *asal ayrışımı* diyeceğiz. Ek olarak, eğer her  $1 \leq i \leq n$  için  $N \neq K_1 \cap \dots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \dots \cap K_n$  ve her  $1 \leq i \neq j \leq n$  için  $(K_i : M) \neq (K_j : M)$  ise o zaman (\*) ayrışımına  $N$ 'nin bir *normal asal ayrışımı* adını vereceğiz. Şimdi  $N = K_1 \cap \dots \cap K_n$  ve  $N = K'_1 \cap \dots \cap K'_m$  gibi  $N$ 'nin iki normal asal ayrışımını alalım. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $P_i = (K_i : M)$  ve her  $1 \leq j \leq m$  için  $Q_j = (K'_j : M)$  olsun. Buna göre  $n = m$  ve  $\{P_1, \dots, P_n\} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  olur. Ayrıca  $\{K'_1, \dots, K'_m\}$  kümesini her  $1 \leq i \leq n$  için  $P_i = Q_i$  olacak şekilde yeniden sıralarsak,  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin (kapsama bağıntısına göre) her minimal elemanı  $P_s$  için  $K_s = K'_s$  olur (bkz. [38, Teorem 3 ve Teorem 5]).

$R$  bir halka ve  $\{L_1, \dots, L_n\}$  ile  $\{L'_1, \dots, L'_m\}$  farklı sıfırlayanlara sahip asal  $R$ -modüllerin iki ailesi olsun. Kabul edelim ki  $M = L_1 \oplus \dots \oplus L_n = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m$  olsun. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $P_i = ann(L_i)$  ve her  $1 \leq j \leq m$  için  $P'_j = ann(L'_j)$  denirse, Teorem 2.4'den dolayı,  $n = m$  ve  $\{P_1, \dots, P_n\} = \{P'_1, \dots, P'_m\}$  olur.  $\{L_1, \dots, L_n\}$  kümesini her  $1 \leq i \leq n$  için  $P_i = P'_i$  olacak şekilde (gerekirse yeniden) sıralayalım. Her  $1 \leq j \leq n$  için  $K_j = \bigoplus_{i \neq j} L_i$  ve  $K'_j = \bigoplus_{i \neq j} L'_i$  olsun.  $L_j \subseteq \bigcap_{i \neq j} K_i$  ve  $L_j \not\subseteq K_j$  olduğundan  $\bigcap_{i \neq j} K_i \not\subseteq K_j$  elde edilir. Ayrıca, kolayca görülebilir ki her  $1 \leq j \leq n$  için  $K_j$  ve  $K'_j$  sırasıyla  $M$ 'nin bir  $P_j$ - ve  $P'_j$ -asal altmodülleridir. Buna göre  $0 = K_1 \cap \dots \cap K_n$  ve  $0 = K'_1 \cap \dots \cap K'_n$  iki normal asal ayrışımıdır. Kabul edelim ki  $P_s$ ,  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin bir maksimal elemanı olsun.  $n = 1$  ise gösterecek bir şey yoktur.  $n > 1$  olsun. O zaman  $\{P_1, \dots, P_n\} \setminus \{P_s\}$  kümesinden, bir minimal eleman seçebiliriz. Bu

eleman  $P_t$  olsun. Buna göre  $K_t = K'_t$  olur. Ayrıca  $P_s \in \{P_1, \dots, P_n\} \setminus \{P_t\}$  olacağından  $n$  üzerine tümevarım uygulayarak  $L_s = L'_s$  sonucuna ulaşabiliriz. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış oluruz:

**Teorem 2.5**  $R$  bir halka ve  $\{L_1, \dots, L_n\}$  ile  $\{L'_1, \dots, L'_m\}$  farklı sıfırlayanlara sahip asal  $R$ -modüllerin iki ailesi olmak üzere

$$L_1 \oplus \dots \oplus L_n = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m$$

olsun. Buna göre  $n = m$  ve  $\{\text{ann}(L_i) : i = 1, \dots, n\} = \{\text{ann}(L'_j) : j = 1, \dots, m\}$ . Eğer her  $1 \leq i \leq n$  için  $P_i = \text{ann}(L_i) = \text{ann}(L'_i)$  denirse  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin her maksimal  $P_s$  elemanı için  $L_s = L'_s$  dir.

Yukarıdaki teoremden maksimal olmayan asal ideallere karşılık gelen asal modüller için eşitliğin varlığını söylemek her zaman mümkün değildir. Örneğin  $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$  alınırsa kolayca görülebilir ki  $N = \langle (\bar{1}, 1) \rangle$ ,  $\text{ann}(N) = 0$  olacak şekilde bir asal  $\mathbb{Z}$ -modüldür ve aynı zamanda  $L = \mathbb{Z}_2 \oplus 0$  için  $M = L \oplus N$  yazılabilir.

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $\{\text{ann}(N) : 0 \neq N \leq M\}$  kümesinin  $\text{ann}(N_0)$  gibi bir maksimal elemanı varsa o zaman  $N_0$ 'ın bir asal  $R$ -modül olacağı bilinmektedir (bkz. [9, Proposition 2.12]). Örneğin  $R$ , idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ise bu durumda  $R$  üzerindeki sıfırdan farklı her  $M$  modülü bir asal  $R$ -modül içerir. Benzer şekilde  $R$  bir değişmeli halka ve  $M$  sıfırdan farklı bir Noether  $R$ -modül ise  $M$ 'nin sıfırdan farklı her altmodülü en az bir asal  $R$ -modül içerir (ileride göreceğimiz ki bu durum, herhangi bir halka üzerindeki sonlu düzgün boyuta sahip bir yarı-asal modül için de gerçekleşir). Bu durumda ise  $M$  içindeki asal modüllerin her maksimal bağımsız ailesi,  $M$  içinde büyük toplama sahiptir.

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $P$ ,  $R$ 'nin bir ideali olsun. Eğer  $\text{ann}(N) = P$  olacak şekilde  $M$  içinde bir  $N$  asal  $R$ -modülü varsa o zaman  $P$ 'ye  $M$ 'nin  $R$  içindeki bir ilgili asal ideali (*associated prime*) denir.  $M$ 'nin  $R$  içindeki tüm ilgili asal ideallerinin kümesini  $\text{Ass}_R(M)$  veya  $\text{Ass}(M)$  ile göstereceğiz.

**Önerme 2.6**  $R$ , idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Buna göre,  $M$ 'nin sonlu düzgün boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul  $|\text{Ass}(M)| < \infty$  ve  $M$  içindeki her asal  $R$ -modülün sonlu düzgün boyuta sahip olmasıdır.

**Kanıt.**  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip ise Lemma 2.1 gereğince  $|Ass(M)| < \infty$  olur. Diğer taraftan  $|Ass(M)| < \infty$  ve  $M$  içindeki her asal modül sonlu düzgün boyuta sahip olsun.  $M$  içindeki asal modüllerin bir maksimal bağımsız ailesini alalım. Lemma 2.2 ile  $|Ass(M)| < \infty$  oluşu birlikte kullanılırsa bu ailenin dik toplamı, terimleri farklı sıfırlayanlara sahip asal modüllerin bir sonlu dik toplamı şeklinde yeniden yazılabilir. Önermeden önceki açıklamalarda da belirtildiği gibi bu toplam  $M$  içinde büyüktür. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

**Lemma 2.7**  $R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $L \leq M$  bir asal  $R$ -modül olsun. Eğer  $ann(L) = P$  ve  $L \cap PM = 0$  ise o zaman  $L$ 'nin  $M$  içindeki  $PM$ 'i içeren her komplementi  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür.

**Kanıt.**  $K$ ,  $L$ 'nin  $M$  içindeki  $PM$ 'i içeren bir komplementi olsun.  $K \neq M$  olduğu açıktır. Kabul edelim ki  $R$ 'nin bir  $I$  ideali ile  $M$ 'nin  $K \subset N$  olacak şekildeki bir  $N$  altmodülü için  $IN \subseteq K$  olsun. Buna göre  $L \cap N \neq 0$  ve  $I(L \cap N) \subseteq L \cap K = 0$  olur.  $L$  bir asal modül olduğundan  $I \subseteq P$  olmalıdır. Böylece  $IM \subseteq PM \subseteq K$  elde edilir. ■

**Lemma 2.8**  $R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$ 'nin sıfır altmodülü bir radikal altmodül ise o zaman  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için  $L \cap K = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin ( $L$ 'ye bağlı) bir  $K$  asal altmodülü bulunabilir.

**Kanıt.**  $I$  bir indis kümesi olmak üzere her  $i \in I$  için  $K_i$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü ve  $0 = \bigcap_{i \in I} K_i$  olsun.  $L, M$  içinde sıfırlayan  $P$  olan bir asal  $R$ -modül olsun.  $PL = 0 \subseteq K_i$  ( $i \in I$ ) olduğundan  $PM \subseteq K_i$  veya  $L \subseteq K_i$  ( $i \in I$ ) olur. Buna göre her  $i \in I$  için  $L \cap PM \subseteq K_i$ , yani  $L \cap PM = 0$  olur. Böylece bir önceki lemmayı kullanarak kanıtı tamamlayabiliriz. ■

Aşağıdaki teorem yardımıyla Lemma 2.8'in tersinin uygun bir koşul altında doğru olduğunu söyleyerek, radikal altmodüller ile asal modüller arasında bir ilişki olduğunu görebiliriz.

**Teorem 2.9**  $R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki  $M$ , asal  $R$ -modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodüle sahip olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

(i)  $M$ 'nin sıfır altmodülü radikaldir.

(ii)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için  $L \cap K = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin ( $L$ 'ye bağlı) bir  $K$  asal altmodülü bulunabilir.

(iii)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için,  $\text{ann}(L) = P$  ise  $L \cap PM = 0$ .

(iv)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için,  $\text{ann}(L) = P$  ise  $L \not\subseteq PM$ .

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Lemma 2.8.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $M$  içinde sıfırlayan  $P$  olan bir  $L$  asal modülü ve  $L \cap K = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $K$  asal altmodülünü alalım.  $PL = 0 \subseteq K$  ve  $L \not\subseteq K$  olduğundan  $PM \subseteq K$  olur. Böylece  $L \cap PM = 0$  elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Lemma 2.7.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Açıktır.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) :  $M$  içinde sıfırlayan  $P$  olan bir  $L$  asal  $R$ -modülü alalım.  $L \cap PM \neq 0$  olsun. Bu durumda  $L \cap PM$  de sıfırlayan  $P$  olan bir asal modül olur. Fakat bu ise kabulümüz ile çelişir.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $M$  içindeki asal modüllerin bir bağımsız  $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$  ailesi için  $\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha \leq_e M$  olsun. Kabul edelim ki  $M$ 'nin sıfır altmodülü radikal olmasın.  $A$  kümesinin iyi sıralandığını varsayalım. Sonlu-ötesi tümevarım (transfinite induction) ile aşağıdaki özellikleri sağlayan  $M$ 'nin altmodüllerinin bir  $\{K_\beta\}$  ailesi ile  $A$  içinde bir  $\{\alpha^{(\beta)}\}$  dizisi inşa edeceğiz:

(1) Eğer  $\beta$  bir limit ordinal değilse  $K_\beta$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü,  $\left(\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) \neq 0$  ve  $\left(\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha < \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) = 0$ ,

(2) Eğer  $\beta$  bir limit ordinal ise  $K_\beta = \bigcap_{\gamma < \beta} K_\gamma$ ,  $K_\beta \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) \neq 0$  ve  $K_\beta \cap \left(\bigoplus_{\alpha < \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) = 0$ ,

(3)  $\beta' < \beta$  ise  $\alpha^{(\beta')} < \alpha^{(\beta)}$  ve

(4)  $\bigcup_{\beta} \alpha^{(\beta)} = A$ .

$L_0$  bir asal  $R$ -modül olduğundan, kabulümüz gereği,  $L_0 \cap K_0 = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $K_0$  asal altmodülü vardır.  $K_0 \neq 0$  olacağından  $K_0 \cap \left(\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha\right) \neq 0$  olur. Buna göre,  $A$  kümesi iyi sıralı olduğundan,  $K_0 \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(0)}} L_\alpha\right) \neq 0$  olacak şekildeki en küçük  $\alpha^{(0)} \in A$  elemanı seçilebilir. Bu durumda  $K_0 \cap \left(\bigoplus_{\alpha < \alpha^{(0)}} L_\alpha\right) = 0$  olur. Şimdi kabul edelim ki  $0 < \beta \in A$  ve yukarıdaki (1)–(3) özelliklerini sağlayan  $\{\alpha^{(\gamma)} : \gamma < \beta\}$

dizisi ile  $\{K_\gamma : \gamma < \beta\}$  ailesi bulunsun.  $\beta$  bir limit ordinal ise o zaman  $K_\beta = \bigcap_{\gamma < \beta} K_\gamma$  olarak tanımlansın. Sıfır altmodülü radikal olmadığından  $K_\beta \neq 0$  dır. Dolayısıyla  $K_\beta \cap \left(\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha\right) \neq 0$  olur.  $\alpha^{(\beta)} \in A$ ,  $K_\beta \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) \neq 0$  olacak şekilde en küçük eleman olsun.  $\lambda < \beta$  alalım.  $\alpha^{(\lambda)} < \alpha^{(\beta)}$  olduğunu göstereceğiz.  $\lambda < \lambda' < \beta$  olacak şekilde bir  $\lambda'$  ordinali bulunabilir.  $\alpha^{(\lambda)} < \alpha^{(\lambda')}$  olacağından  $\left(\bigcap_{\eta \leq \lambda'} K_\eta\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\lambda)}} L_\alpha\right) = 0$  olur. Bu durumda  $K_\beta \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\lambda)}} L_\alpha\right) = 0$  olur.  $\alpha^{(\beta)}$ 'nin seçiminden dolayı  $\alpha^{(\lambda)} < \alpha^{(\beta)}$  elde edilir. Şimdi bir  $\gamma$  ordinali için  $\beta = \gamma + 1$  olsun. (Eğer  $\alpha^{(\gamma)} = A$  ise bu işlem  $\gamma$ 'da sonlandırılır). Buna göre

$$\left(\bigcap_{\beta' \leq \gamma} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\gamma)}} L_\alpha\right) \neq 0$$

ve

$$\left(\bigcap_{\beta' \leq \gamma} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha < \alpha^{(\gamma)}} L_\alpha\right) = 0$$

olacak şekilde  $\alpha^{(\gamma)} \in A$  vardır. Dolayısıyla  $\left(\bigcap_{\beta' \leq \gamma} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\gamma)}} L_\alpha\right)$ ,  $L_{\alpha^{(\gamma)}}$  içine gömülebilir. Böylece, kabulümüzden dolayı

$$\left(\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\gamma)}} L_\alpha\right) = 0$$

olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $K_\beta$  asal altmodülü bulunabilir.  $\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'} \neq 0$  olduğundan  $\left(\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha\right) \neq 0$  olur. Kabul edelim ki  $\alpha^{(\beta)} \in A$ ,

$$\left(\bigcap_{\beta' \leq \beta} K_{\beta'}\right) \cap \left(\bigoplus_{\alpha \leq \alpha^{(\beta)}} L_\alpha\right) \neq 0$$

olacak şekilde en küçük eleman olsun. Açıktır ki  $\alpha^{(\gamma)} < \alpha^{(\beta)}$  ve böylece tümevarım tamamlanmış olur. Dolayısıyla yukarıdaki (1)–(4) koşullarını sağlayan  $M$ 'nin altmodüllerinin bir  $\{K_\beta\}$  ailesi ile  $A$  içinde bir  $\{\alpha^{(\beta)}\}$  dizisi bulunabilir. Fakat bu durumda

$$\left(\bigcap_{\beta} K_\beta\right) \cap \left(\bigoplus_A L_\alpha\right) = 0$$

olur ki bu durum bir çelişkidir. ■

**Sonuç 2.10**  $R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki aşağıdakilerden biri doğru olsun:

(A)  $R$ , idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.

(B)  $R$  değişmeli bir halka ve  $M$  Noether  $R$ -modüldür.

Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

- (i)  $M$ 'nin sıfır altmodülü radikaldir.
- (ii)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için  $L \cap K = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin ( $L$ 'ye bağlı) bir  $K$  asal altmodülü bulunabilir.
- (iii)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için,  $\text{ann}(L) = P$  ise  $L \cap PM = 0$ .
- (iv)  $M$  içindeki her asal modül  $L$  için,  $\text{ann}(L) = P$  ise  $L \not\subseteq PM$ .

Teorem 2.14 ile yarı–asal Noether modüller için yukarıdaki sonucun söylediğinden daha fazlasını söyleyeceğiz. Teorem 2.14'e göre sıfır altmodülünün radikal olduğunu görmek için yalnızca düzgün altmodülleri kontrol etmek yeterlidir. Bu, aynı zamanda, bir Noether modülün ne zaman s.p.a.r. özelliğine sahip olacağı hakkında bir fikir vermektedir. Ayrıca Teorem 2.21, değişmeli Noether halkalar üzerinde yarı–asal altmodüllerin radikal olmaları ile ilgili benzer fakat daha özel bir yöntem vermektedir.

## 2.2 Yarı–asal Altmodüller

**Önerme 2.11**  $R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ –modül ve  $N \leq M$  olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı–asal altmodülüdür.
- (ii)  $R$ 'nin her  $I$  sol ideali ve her  $m \in M$  için  $I^2m \subseteq N$  olması  $Im \subseteq N$  olmasını gerektirir.
- (iii) Her  $m \in M \setminus N$  için  $(N : m) = \{r \in R : rm \in N\}$  kümesi  $R$ 'nin bir yarı–asal sol idealidir.

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $R$ 'nin bir  $I$  sol ideali ve bir  $m \in M$  için  $I^2m \subseteq N$  olsun.  $a \in I$  olsun. Buna göre  $aRa \subseteq I^2$  ve böylece  $aRam \subseteq N$  olur.  $N$  yarı–asal olduğundan  $am \in N$  elde edilir. Dolayısıyla  $Im \subseteq N$  dir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Açıktır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $r \in R$  ve  $m \in M \setminus N$  için  $rRrm \subseteq N$  olsun. Buna göre  $(Rr)^2 \subseteq (N : m)$  olur.  $(N : m)$  yarı–asal olduğundan  $Rr \subseteq (N : m)$  yani  $rm \in N$  elde edilir. ■

**Lemma 2.12**  $R$  bir halka,  $I$ ,  $R$ 'nin bir ideali ve  $M$  bir  $R$ –modül olsun.  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı–asal altmodülü ise o zaman ya  $IM \subseteq N$  ya da  $(N : I)$   $M$ 'nin bir yarı–asal altmodülüdür.

**Kanıt.**  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ve  $IM \not\subseteq N$  olsun. Bu taktirde  $(N : I)$ ,  $M$ 'nin bir öz altmodülüdür.  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rRm \subseteq (N : I)$  olsun. Buna göre  $IrRm \subseteq N$  ve böylece  $(Ir)^2m \subseteq N$  olur. Bir önceki lemmadan dolayı  $Irm \subseteq N$ , yani  $rm \in (N : I)$  elde edilir. ■

$R$  bir halka ve  $M$ ,  $R$  üzerinde bir düzgün modül olsun.  $R$ 'nin  $P = \{r \in R : \text{bir } 0 \neq N \leq M \text{ için } rN = 0\}$  altkümesini ele alalım. Buna göre  $P$ ,  $R$ 'nin bir idealidir. Bu ideale  $M$ 'nin  $R$  içindeki *assassinator*'ı denir. Kolayca görülebilir ki eğer  $M$ 'nin sıfırdan farklı bir  $L$  altmodülü için  $PL = 0$  ise o zaman  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal idealidir.

**Lemma 2.13**  $U$ , bir  $R$  halkası üzerinde bir düzgün modül olsun. O zaman  $U$ 'nun  $R$ -modül olarak asal olması ile yarı-asal olması denktir. Ayrıca  $U$  asal  $R$ -modül ve  $U$ 'nun *assassinator*'ı  $P$  ise  $\text{ann}(U) = P$  olur.

**Kanıt.**  $U$  asal ise yarı-asal olacağından tersini göstermekle kanıtı tamamlayacağız. Buna göre  $U$  bir yarı-asal  $R$ -modül olsun.  $r \in R$  ve  $u \in U$  için  $rRu = 0$  olsun. Kabul edelim ki  $rU \neq 0$  ve  $u \neq 0$  olsun. Bu durumda  $RrU \cap Ru \neq 0$  olur. Böylece  $0 \neq sru' = r'u$  olacak şekilde  $s, r' \in R$  ve  $u' \in U$  elemanları bulunabilir. Buradan  $Rsr'u = Rr'u \subseteq Ru$  elde edilir. Dolayısıyla  $srRsr'u \subseteq srRu = 0$  olur.  $U$  yarı-asal olduğundan  $sru' = 0$  elde edilir ki bu durum bir çelişkidir.

Şimdi  $U$  bir asal  $R$ -modül olsun.  $P \supseteq \text{ann}(U)$  olduğu açıktır.  $p \in P$  olsun.  $pV = 0$  olacak şekilde  $0 \neq V \leq U$  vardır. Fakat  $U$  asal olduğundan  $p \in \text{ann}(U)$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $P = \text{ann}(U)$  elde edilir. ■

**Teorem 2.14**  $R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $L$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ve  $M/L$  sonlu düzgün boyuta sahip olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $L$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür.
- (ii)  $M/L$ 'nin her düzgün  $U/L$  altmodülü için  $U \cap K = L$  olacak biçimde  $M$ 'nin bir  $K$  asal altmodülü bulunabilir.
- (iii)  $M/L$ 'nin her düzgün  $U/L$  altmodülü için eğer  $U/L$ 'nin *assassinator*'ı  $P$  ise  $U \cap PM \subseteq L$ .
- (iv)  $M/L$ 'nin her düzgün  $U/L$  altmodülü için eğer  $U/L$ 'nin *assassinator*'ı  $P$  ise  $U \not\subseteq L + PM$ .

**Kanıt.** Genelliği bozmadan  $L = 0$  alabiliriz. Yani  $M$ 'yi sonlu düzgün boyuta sahip yarı–asal  $R$ –modül olarak kabul edebiliriz.  $M$ 'nin her düzgün altmodülü asal olduğundan (Lemma 2.13)  $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$  gerektirmeleri Teorem 2.9'daki yapılan işlemlerin aynıları yapılarak kolayca elde edilebilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$  :  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip olduğundan, Lemma 2.13'den dolayı  $M$ 'nin, asal modüllerin dik toplamı olarak yazılabilen bir büyük altmodülü vardır. Şimdi  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $L$ ,  $M$ 'nin içinde sıfırlayanı  $P$  olan bir asal  $R$ –modül olsun. Kabul edelim ki  $L \cap PM \neq 0$  olsun.  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip olduğundan  $L \cap PM$  içinde bir  $U$  düzgün modülü bulunabilir. Dikkat edilirse  $U \leq L$  olduğundan  $P$ , aynı zamanda  $U$ 'nun assassinator'ıdır. Kabulümüzden dolayı  $U \cap PM = 0$  olmak zorundadır. Fakat  $U \subseteq PM$  olduğundan bu durum bir çelişkidir. Şimdi Teorem 2.9'u kullanarak kanıtı tamamlayabiliriz. ■

$R$  bir sol Noether halka ve  $E$  bir injektif yarı–asal  $R$ –modül olsun.  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  olacak şekilde  $E_i$  indecomposable injektif  $R$ –modülleri vardır.  $E_i$ 'ler düzgün olduğundan Lemma 2.13'den dolayı asal olurlar. Bu ise  $E$ 'nin sıfır altmodülünün  $E$  içinde radikal olacağı anlamına gelir. İleride bu sonucu sol Noether yarı–asal bir halka üzerindeki injektif modüllerin yarı–asal bölümleri için genişleteceğiz. Aynı zamanda bu yarı–asal bölümlerin, sıfırlayanları farklı asal modüllerin dik toplamı şeklindeki (izomorfizma farkıyla) tek türlü olan yazılımında, asal modüllerin neler olacağını da göreceğiz.

**Teorem 2.15**  $R$  bir sol Noether halka ve  $M$  bir devirli (cyclic)  $R$ –modül olsun.  $M$  yarı–asal ise  $M$ 'nin sıfır altmodülü radikaldir.

**Kanıt.**  $I$ ,  $R$ 'nin bir sol ideali olmak üzere  $M = R/I$  seçebiliriz.  $R$  bir sol Noether halka olduğundan  $M$ 'nin, asal  $R$ –modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodülü vardır.  $J$ ,  $R$ 'nin  $I$ 'yi içeren bir sol ideali ve  $J/I$  bir asal  $R$ –modül olsun.  $\text{ann}(J/I) = P$  alalım.  $r \in J \cap P$  olsun. Buna göre  $rRr \subseteq rJ \subseteq PJ \subseteq I$  ve  $I$ ,  $R$ 'nin bir yarı–asal sol ideali olduğundan  $r \in I$  elde edilir. Buna göre  $J \cap P \subseteq I$  olur. Dolayısıyla  $(J/I) \cap P(R/I) = 0$  bulunur. Teorem 2.9'u kullanarak kanıtı tamamlayabiliriz. ■

**Lemma 2.16**  $R$ , tüm sol ilkel faktörleri Artin olan bir halka olsun. O zaman her sonlu uzunluğa sahip yarı–asal  $R$ –modül yarı–basittir.

**Kanıt.**  $M$ , uzunluğu  $n$  olan bir yarı–asal  $R$ –modül olsun.  $n$  üzerine tümevarım uygulayacağız.  $n = 1$  ise durum açık olduğundan  $n > 1$  alalım. Kabul edelim ki iddia,

uzunluğu  $n$ 'den küçük olan tüm yarı-asal  $R$ -modüller için doğru olsun. Eğer  $M$ 'nin  $N_1$  ve  $N_2$  gibi iki maksimal altmodülü varsa o zaman  $N_1 + N_2 = M$  ve  $N_1$  ile  $N_2$  her ikisi de uzunluğu  $n$ 'den küçük olan yarı-asal  $R$ -modüller olacağından tümevarım hipotezimiz gereğince  $M$  yarı-basit olur. Dolayısıyla kabul edelim ki  $M$ 'nin yalnız bir tane maksimal altmodülü olsun. Bu altmodüle  $N$  diyelim.  $S, M$  içinde bir basit modül ve  $\text{ann}(S) = P$  olsun. Önce  $PM \neq M$  olduğunu kanıtlayacağız. Bunu kanıtlamak için aşağıdaki iddiayı kanıtlamak yeterlidir. Çünkü bu durumda, eğer  $PM = M$  olsaydı o zaman  $S \subseteq PM$  ve böylece  $IS = 0$  olacağından  $I \subseteq P$ , yani bir çelişki elde edilirdi.

*İddia* :  $IPM = 0$  olacak şekilde  $R$ 'nin  $P$  tarafından içerilmeyen bir  $I$  ideali vardır. Kabul edelim ki iddiamız yanlış olsun.  $M$ 'nin bir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

kompozisyon serisini alalım. Kabul edelim ki  $k \leq n$ ,

$$I \not\subseteq P \implies IPM_k \neq 0$$

koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun.  $k > 0$  olduğu açıktır.  $J = \text{ann}(M_k/M_{k-1})$  yazalım. Eğer  $J \subseteq P$  ise kabulümüz gereği  $J = P$  olur ki bu durumda  $PM_k \subseteq M_{k-1}$  elde edilir. Öte yandan eğer  $J \not\subseteq P$  ise o zaman  $JPM_k \subseteq M_{k-1}$  olacağından her durumda  $I_1PM_k \subseteq M_{k-1}$  olacak şekilde  $R$ 'nin  $P$  tarafından içerilmeyen bir  $I_1$  idealini bulmak mümkündür.  $k$ 'nin seçiminden dolayı  $I_2PM_{k-1} = 0$  ve  $I_2 \not\subseteq P$  olacak şekilde  $R$ 'nin bir  $I_2$  ideali vardır. Böylece  $I_2PI_1PM_k = 0$  elde edilir. Buna göre  $(I_1I_2P)^2M_k = 0$  olur.  $M$  yarı-asal olduğundan  $I_1I_2PM_k = 0$  olmak zorundadır. Fakat  $P$  asal ideal ve  $I_1, I_2 \not\subseteq P$  olduğundan  $I_1I_2 \not\subseteq P$  olur ki bu durum  $k$ 'nin seçimi ile çelişir. Böylece yukarıdaki iddiamız kanıtlanmış olur.

$PM \neq M$  olduğundan  $PM \subseteq N$  olur. Kabul edelim ki  $\text{ann}_M(P) \neq M$  olsun. Bu durumda  $S \subseteq \text{ann}_M(P) \subseteq N$  olur. Öte yandan, Lemma 2.12'den dolayı  $M/\text{ann}_M(P)$ , uzunluğu  $n$ 'den küçük olan bir yarı-asal  $R$ -modüldür. Tümevarım hipotezimiz gereğince  $M/\text{ann}_M(P)$ , tek maksimal altmodülü  $N/\text{ann}_M(P)$  olan bir yarı-basit  $R$ -modül olur. Bu durum ise ancak  $N = \text{ann}_M(P)$  olması ile mümkündür.  $PM \subseteq N$  olduğundan  $P^2M = 0$  ve böylece  $PM = 0$  elde edilir. Fakat bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\text{ann}_M(P) = M$  olur. Buna göre  $M, R/P$  üzerinde modüldür.  $R/P$  Artin olduğundan yarı-basittir ve dolayısıyla  $M$  bir yarı-basit  $R/P$ -modül ve nihayet bir yarı-basit  $R$ -modül olur. ■

**Teorem 2.17**  $R$ , tüm sol ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.

Buna göre aşağıdaki iki ifade birbirine denktir:

(i)  $M$  yarı-asal Artin  $R$ -modüldür.

(ii)  $M$  sonlu üreteçli yarı-basit  $R$ -modüldür.

**Kanıt.** Bir yarı-basit modülün sıfır altmodülü maksimal altmodüllerinin arakesiti şeklinde yazılabileceğinden (ii)  $\Rightarrow$  (i) gerektirmesi açıktır.  $M$  yarı-asal Artin  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin altmodüllerinin bir

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots \quad (*)$$

dizisi, her  $n \geq 0$  için  $L_{n+1}/L_n$  faktörleri basit olacak şekilde alınsın. (Böyle bir dizi Artin modüllerde her zaman inşa edilebilir). Her  $n > 0$  için,  $L_n$  sonlu uzunluğa sahip bir yarı-asal  $R$ -modül olacağından, Lemma 2.16'dan dolayı,  $L_n$  yarı-basit  $R$ -modül olur. Her  $n \geq 0$  için  $L_{n+1} = L_n \oplus K_n$  yazalım. Eğer (\*) dizisi sonlu bir adımda  $M$  ile sonlanmaz ise bu durumda  $M$ ,  $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots$  gibi bir sonsuz dik toplam içerir. Bu durum ise  $M$ 'nin Artin olması ile çelişir. Dolayısıyla uygun bir  $i > 0$  tamsayısı için  $M = L_i$  olmalıdır. Böylece  $M$  bir sonlu üreteçli yarı-basit  $R$ -modül olur. ■

Yarı-asal sol (veya sağ) Artin olan bir halka aldığımızda, bu halkanın tüm ilkel faktörleri Artin olacağından, yukarıdaki teoremi uygulayarak halka kuramının iyi bilinen sonuçlarından, "bir halkanın yarı-asal sol (veya sağ) Artin olması ile yarı-basit olması denktir" sonucunu elde edebiliriz (bkz. [9, Sonuç 3.17]).

$R$  bir basit halka ise, açıktır ki, sıfırdan farklı her  $R$ -modül asal (dolayısıyla yarı-asal) olur.  $k$ , karakteristiği sıfır olan bir cisim olmak üzere  $k$  üzerindeki birinci Weyl cebiri  $A_1(k)$ , Artin olmayan bir basit halkadır (bkz. [14, Sonuç 3.17]). Fakat [27, Teorem 6.2] ile gösterilmiştir ki  $A_1(k)$ , uzunluğu 3 olan bir indecomposable modüle sahiptir. Bu ise hem Lemma 2.16'nın hem de Teorem 2.17'deki denkliğin verilmesinde  $R$  halkası üzerine konulan koşulun kaldırılamaz olduğunu gösterir. Ek olarak, tüm sol ilkel faktörleri Artin olan halkaların sınıfı değişmeli halkaların sınıfından çok daha büyüktür. Örneğin FBN halkaları ile PI halkaları bu sınıftadırlar (bkz. [9, Önerme 8.4] ve [26, 13.3.8]).

Bir önceki paragrafta bir basit halka üzerindeki sıfırdan farklı her modülün asal olduğunu söylemiştik.  $R$  bir basit halka ve  $0 \neq I \leq_R R$  ise  $(I^2 : I) = \{r \in R : rI \subseteq I^2\}$

kümesi  $R$ 'nin  $I$ 'yı içeren bir ideali olacağından  $(I^2 : I) = R$ , yani  $I = I^2$  olmak zorundadır. Bir halkada karesi kendisine eşit olan sol (veya sağ) ideallere eşkare (idempotent) sol (veya sağ) ideal denir. Fisher, [8]'de, bütün sol idealleri eşkare olan halkalara *FLI* (*fully left idempotent*) halka adını vermiş ve daha sonra Hansen tarafından bu halkaların, her sol öz ideali asal sol ideallerin arakesiti şeklinde yazılabilen halkalar olduğu gösterilmiştir (bkz. [10, Lemma 1]). McCasland ve Smith bu karakterizasyonu bir adım daha ileri götürerek bir halka üzerindeki sıfırdan farklı tüm sol modüllerin her öz altmodülünün radikal olması ile halkanın FLI olmasının denk olduğunu kanıtlamışlardır (bkz. [24, Sonuç 2.7]). Aşağıdaki teorem ile FLI halkaların karakterizasyonunu biraz daha genişleteceğiz:

**Teorem 2.18** *Bir  $R$  halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:*

- (i)  $R$  bir FLI halkadır.
- (ii) Sıfırdan farklı her sol  $R$ -modül  $M$  için,  $M$ 'nin her öz altmodülü bir radikal altmodüldür.
- (iii) Sıfırdan farklı her sol  $R$ -modül yarı-asaldır.
- (iv) Her asal  $R$ -modülün her büyük genişlemesi yine bir asal  $R$ -modüldür.
- (v) Her basit  $R$ -modülün her büyük genişlemesi bir asal  $R$ -modüldür.

**Kanıt.** (ii)  $\Rightarrow$  (iii) ve (iv)  $\Rightarrow$  (v) gerektirmeleri açıktır. Ayrıca (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) denkliği [24, Sonuç 2.7]'de verilmiştir.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) :  $M$  sıfırdan farklı bir sol  $R$ -modül olsun. Sıfır altmodülünün  $M$  içinde radikal olduğunu göstermek yeterlidir. Her  $0 \neq m \in M$  için  $M$ 'nin  $m$ 'yi içermeyen altmodüllerinin ailesinden bir maksimal eleman seçelim ve bu elemana  $K_m$  diyelim. (Zorn Lemma sayesinde böyle  $K_m$ 'ler bulmak mümkündür). Buna göre  $\bigcap_{0 \neq m \in M} K_m = 0$  olduğu açıktır.  $(Rm + K_m)/K_m$ ,  $M/K_m$ 'nin bir büyük basit altmodülü olacağından  $M/K_m$  bir düzgün  $R$ -modül olur ve böylece Lemma 2.13'den dolayı  $K_m$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülüdür.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv) :  $L$  bir asal  $R$ -modül ve  $E$ ,  $L$ 'nin bir büyük genişlemesi olsun.  $E \neq L$  alalım.  $\text{ann}(L) = P$  olsun. [24, Teorem 2.6]'dan dolayı  $L \cap PE = PL = 0$  olur. Dolayısıyla  $PE = 0$  dir. Lemma 2.7'den dolayı  $E$  bir asal  $R$ -modül olur.

(v)  $\Rightarrow$  (ii) : Yukarıda (iii)  $\Rightarrow$  (ii) gerektirmesinin kanıtında,  $M/K_m$ ,  $Rm + K_m/K_m$  basit modülünün bir büyük genişlemesi olduğundan  $K_m$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü olur.

■

## 2.3 Değişmeli Halkalar Üzerinde Yarı–asal Altmodüller

Bu kısım boyunca  $R$ , bir değişmeli halkayı gösterecektir.  $M$  bir  $R$ –modül ve  $Q \leq M$  olsun. Eğer her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rm \in Q$  ve  $m \notin Q$  iken  $r^k M \subseteq Q$  olacak şekilde bir  $k$  pozitif tamsayısı bulunabiliyor ise o zaman  $Q$ 'ya  $M$ 'nin bir *asıl (primary) altmodülü* denir.  $Q \leq M$  bir asıl altmodül ise kolayca görülebilir ki  $(Q : M)$  idealinin  $R$  içindeki radikali  $P = \sqrt{(Q : M)}$  bir asal idealdir. Bu durumda  $Q$  için  $P$ –asıl altmodül ifadesi kullanılır. Kolayca görülebilir ki  $Q$ ,  $M$ 'nin bir asıl altmodülü ve  $(Q : M)$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ise o zaman  $Q$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü olur.

Eğer  $M$ 'nin bir  $N$  altmodülü,  $M$ 'nin asıl altmodüllerinin bir kesişimi olarak yazılabilir ise bu yazılışların herbirine  $N$ 'nin  $M$  içindeki bir *asıl ayrışımı* denir. Her altmodül asıl ayrışımına sahip olmak zorunda değildir. Asıl ayrışımına sahip olan altmodüllere *ayrışabilir* altmodüller diyeceğiz. Değişmeli halka kuramında bir Noether modülün her öz altmodülünün ayrışabilir olduğu iyi bilinmektedir.

$N \leq M$  bir ayrışabilir altmodül olmak üzere  $N$ 'nin bir

$$N = Q_1 \cap \dots \cap Q_n \text{ (her } i = 1, \dots, n \text{ için } Q_i, P_i\text{–asıl altmodül)}$$

asıl ayrışımını alalım. Eğer

(i) her  $1 \leq i, j \leq n$  için  $i \neq j$  iken  $P_i \neq P_j$  ve

(ii) her  $1 \leq i \leq n$  için  $N \neq Q_1 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n$

koşulları sağlanıyorsa bu ayrışımına  $N$ 'nin bir *normal asıl ayrışımı* denir. Kolayca görülebilir ki bir ayrışabilir altmodülün her ayrışımı bir normal ayrışımına indirgenebilir.

**Lemma 2.19**  $M$  bir  $R$ –modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir ayrışabilir yarı–asal altmodülü olsun. Her  $i = 1, \dots, n$  için  $\sqrt{(Q_i : M)} = P_i$  olmak üzere  $N = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ ,  $N$ 'nin  $M$  içindeki bir normal asıl ayrışımı olsun. Her  $i = 1, \dots, n$  için  $N_i = Q_1 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n$  yazalım. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $P_i N_i \subseteq N$ .

(ii)  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin bir maksimal elemanı  $P_i$  ise  $(N : P_i) = N_i$ .

(iii) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $N$ ,  $N_i$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülüdür.

(iv)  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin bir minimal elemanı  $P_i$  ise  $Q_i$ ,  $M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülüdür.

**Kanıt.** (i)  $r \in P_i$  ve  $m \in N_i$  olsun. Buna göre  $r^t M \subseteq Q_i$  olacak şekilde bir  $t$  pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla  $r^t m \in N_i \cap Q_i = N$  olur.  $N$  yarı-asal olduğundan  $rm \in N$  elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki  $P_i, P_1, \dots, P_n$  idealleri arasında maksimal olsun. (i) den dolayı  $N_i \subseteq (N : P_i)$  dir. Tersine, bir  $m \in M$  için  $P_i m \subseteq N$  olsun. PAT'yi kullanarak bir  $r \in P_i \setminus P_1 \cup \dots \cup P_{i-1} \cup P_{i+1} \cup \dots \cup P_n$  elemanı seçelim. Bu durumda  $rm \in N_i$  olur. Her  $j \neq i$  için  $Q_j$ 'ler  $P_j$ -asal altmodül olduklarından  $m \in N_i$  elde edilir. Dolayısıyla istenen eşitlik kanıtlanmış olur.

(iii) Lemmada verilen asıl ayrışımın normalliğinden dolayı  $N \neq N_i$  dir. (i) den dolayı  $P_i \subseteq (N : N_i)$  olur. Şimdi  $r \in R \setminus P_i$  ve  $x \in N_i$  için  $rx \in N$  olsun. Bu durumda  $rx \in Q_i$  ve dolayısıyla  $x \in Q_i$  olur. Böylece  $x \in N_i \cap Q_i = N$  elde edilir.

(iv) Kabul edelim ki  $P_i, P_1, \dots, P_n$  idealleri arasında minimal olsun.  $(Q_i : M) = P_i$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $r \in P_i$  alalım. Buna göre  $r^t M \subseteq Q_i$  olacak şekilde bir  $t$  pozitif tamsayısı bulunabilir. Bir  $s \in (P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap P_{i+1} \cap \dots \cap P_n) \setminus P_i$  elemanı seçelim. Bu durumda uygun bir  $k$  pozitif tamsayısı için  $s^k M \subseteq N_i$  yazılabilir. Böylece  $s^k r^t M \subseteq Q_i \cap N_i = N$  ve buradan da  $N$  yarı-asal olduğundan  $srM \subseteq N$  elde edilir. Özel olarak  $srM \subseteq Q_i$  olur. Fakat  $s \in R \setminus P_i$  ve  $Q_i, M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülü olduğundan  $rM \subseteq Q_i$ , yani  $r \in (Q_i : M)$  olmak zorundadır. ■

**Lemma 2.20** [34, Lemma 8.21]  $I$   $R$ 'nin bir ideali olsun. Eğer  $\sqrt{I}$  sonlu üreteçli ise  $(\sqrt{I})^n \subseteq I$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı bulunabilir.

$M$  bir Noether  $R$ -modül ve  $N \leq M$  ise  $R/\text{ann}(M)$  bir Noether halka ve  $\text{ann}(M) \subseteq (N : M)$  olacağından, yukarıdaki lemmadan dolayı,  $(\sqrt{(N : M)})^n \subseteq (N : M)$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı bulunabilir.

Aşağıdaki teorem ile bir değişmeli halka üzerinde tanımlanan bir Noether modülün yarı-asal altmodüllerinin ne zaman radikal oldukları, normal asıl ayrışım kavramı kullanılarak belirlenmektedir:

**Teorem 2.21**  $M$  bir Noether  $R$ -modül olsun. Yukarıdaki lemmada yapılan kabuller altında aşağıdaki ifadeler denktir:

(i)  $N$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür.

(ii) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $N = N_i \cap K_i$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülü  $K_i$  vardır.

(iii) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $N_i \cap P_i M \subseteq N$ .

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Lemma 2.8 ve Lemma 2.19'dan dolayı açıktır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $K$ ,  $N = N_i \cap K$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülü olsun. Bu durumda  $P_i M \subseteq K$  olacağından  $N_i \cap P_i M \subseteq N$  elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Bir  $i = 1, \dots, n$  için  $N_i \cap P_i M \subseteq N$  olsun.  $K = \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_i, cm \in N + P_i M\}$  kümesini tanımlayalım. [25, Önerme 1.7]'den  $K$ ,  $M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülüdür. Açıktır ki  $N \subseteq N_i \cap K$ . Şimdi  $m \in N_i \cap K$  olsun.  $cm \in N + P_i M$  olacak şekilde  $c \in R \setminus P_i$  vardır. Buna göre uygun bir  $x \in N$  için  $cm + x \in P_i M$  dir. Buradan  $cm + x \in N_i \cap P_i M \subseteq N \subseteq Q_i$  elde edilir.  $x \in N \subseteq Q_i$  olduğundan  $cm \in Q_i$  olur.  $Q_i$ ,  $P_i$ -asal altmodül ve  $c \in R \setminus P_i$  olduğundan  $m \in Q_i \cap N_i = N$  elde edilir. Dolayısıyla  $N = N_i \cap K$  olur.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $n$  üzerine tümevarım uygulayacağız.  $n = 1$  olsun. Lemma 2.19 (iv)'den dolayı  $N$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü ve dolayısıyla radikal altmodülüdür.  $n > 1$  ve iddiamız  $n - 1$  için doğru olsun. Genelliği bozmadan  $P_n$ 'i  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin bir maksimal elemanı olarak kabul edebiliriz. Eğer  $n = 2$  ise (ii) kabulümüz ile Lemma 2.19'i birlikte düşünerek  $N$ 'nin iki asal altmodülün arakesiti olarak yazılabileceğini görebiliriz. Dolayısıyla  $n > 2$  seçebiliriz. Lemma 2.19 (ii)'den dolayı  $(N : P_n) = N_n = Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-1}$  olur. Ayrıca Lemma 2.12'den dolayı  $N_n$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olur. (ii) koşulunun  $N_n = Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-1}$  normal asal ayrışımı için de sağladığını göstererek tümevarım hipotezimizi  $N_n$  için uygulayacağız. Buna göre her  $j = 1, \dots, n - 1$  için  $N_n = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_{j+1} \cap \dots \cap Q_{n-1} \cap K_j$  olacak şekilde  $M$ 'nin  $K_j$  gibi bir  $P_j$ -asal altmodülü bulunabileceğini göstereceğiz.  $j = n - 1$  seçebiliriz. Kabulümüzden dolayı  $N = N_{n-1} \cap K$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P_{n-1}$ -asal altmodülü  $K$  vardır.  $m \in N_n$  olsun. Bu durumda  $P_n m \subseteq N$  olur.  $P_n$ 'nin maksimalliğinden dolayı  $P_n \not\subseteq P_1 \cup \dots \cup P_{n-1}$  dir. Dolayısıyla  $m \in Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-2} \cap K$  yazılabilir. Buna göre  $N_n \subseteq Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-2} \cap K$  olur. Tersine,  $m \in Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-2} \cap K$  alalım.  $M$  Noether  $R$ -modül olduğundan uygun bir  $k$  pozitif tamsayısı için  $P_n^k M \subseteq Q_n$  dir (Lemma 2.20).

Buna göre  $P_n^k m \subseteq N_{n-1} \cap K = N$  olur.  $N$  yarı-asal olduğundan  $P_n m \subseteq N$ , yani  $m \in (N : P_n) = N_n$  dir. Dolayısıyla  $N_n = Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-2} \cap K$  elde edilir. Tümevarım hipotezimizden dolayı  $N_n$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olur. Öte yandan (ii) kabulü gereğince  $N = N_n \cap K'$  olacak şekilde  $M$ 'nin  $K'$  gibi bir  $P_n$ -asal altmodülü vardır. Dolayısıyla  $N$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olur. ■

**Lemma 2.22** [31, §2, Lemma 10]  $M$  bir Noether  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Eğer  $M/N$  bir düzgün  $R$ -modül ise o zaman  $N$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülüdür.

**Lemma 2.23** [37, Lemma 1.5]  $M$  sonlu düzgün boyuta sahip bir  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin düzgün altmodüllerinin bir bağımsız  $\{U_1, \dots, U_n\}$  kümesi için  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n \leq_e M$  olsun. Her  $i = 1, \dots, n$  için  $K_i$ ,  $U_i$ 'nin  $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_n$  toplamını içeren  $M$  içindeki bir komplementi ise aşağıdakiler sağlanır:

- (i) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $M/K_i$  bir düzgün  $R$ -modüldür,
- (ii)  $0 = K_1 \cap \dots \cap K_n$  ve
- (iii)  $0 \neq K_1 \cap \dots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \dots \cap K_n$ .

Hatırlarsak, değişmeli bir halka üzerindeki bir Noether modülün, farklı sıfırlayanlara sahip sonlu adet asal modülün dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodülünü bulmak mümkündür. Aşağıdaki teorem, Teorem 2.9'dan farklı olarak, değişmeli bir halka üzerindeki bir Noether modülde, sıfır altmodülünün radikal olup olmadığını anlamak için yalnızca sonlu adet asal modülü kontrol etmenin yeterli olacağını göstermektedir.

**Teorem 2.24**  $M$  bir Noether  $R$ -modül ve  $M$  içindeki farklı sıfırlayanlara sahip bağımsız asal modüllerin bir  $\{L_1, \dots, L_n\}$  ailesi için  $L_1 \oplus \dots \oplus L_n \leq_e M$  olsun. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $\text{ann}(L_i) = P_i$  yazalım. Buna göre aşağıdakiler denktir:

- (i) Sıfır altmodülü  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür.
- (ii) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $L_i \cap K_i = 0$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P_i$ -asal altmodülü  $K_i$  vardır.
- (iii) Her  $i = 1, \dots, n$  için  $L_i \cap P_i M = 0$ .

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) gerektirmeleri Teorem 2.9'un kanıtında olduğu gibi verilebilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Öncelikle  $M$ 'nin bir yarı-asal  $R$ -modül olacağını görelim. Kabul edelim ki  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $r^2m = 0$  fakat  $rm \neq 0$  olsun. Buna göre  $0 \neq srm \in L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$  olacak şekilde bir  $s \in R$  vardır.  $srm = l_{i_1} + \cdots + l_{i_k}$  olacak şekilde 1 ve  $n$  arasında birbirinden farklı  $i_1, \dots, i_k$  tamsayıları ve  $0 \neq l_{i_j} \in L_{i_j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) elemanları bulunabilir.  $0 = sr^2m = rl_{i_1} + \cdots + rl_{i_k}$  olacağından, her  $1 \leq j \leq k$  için  $rl_{i_j} = 0$  ve böylece  $r \in P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_k}$  elde edilir. Dikkat edilirse  $L = (L_{i_1} \oplus \cdots \oplus L_{i_k}) \cap (P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_k})M = 0$  dır. Bunu göstermek için  $k$  üzerine tümevarım uygulayalım.  $k = 1$  için kabulümüzden dolayı gösterecek birşey yoktur.  $k > 1$  ve iddia  $k - 1$  için doğru olsun. Bu durumda

$$(L_{i_1} \oplus \cdots \oplus L_{i_{k-1}}) \cap (P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_{k-1}})M = 0 = (L_{i_2} \oplus \cdots \oplus L_{i_k}) \cap (P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_k})M$$

olur. Bu durumda  $L$ 'yi hem  $L_{i_1}$ 'in hem de  $L_{i_k}$ 'nin içine gömebiliriz. Fakat  $L \neq 0$  olduğunda  $P_{i_1} = P_{i_k}$  elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla  $L = 0$  dır. Fakat  $srm \in L = 0$  olacağından bir çelişki daha elde ederiz. Böylece  $M$  bir yarı-asal  $R$ -modül olur. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $L_i$ , bir Noether  $R$ -modül olduğundan sonlu düzgün boyuta sahiptir ve dolayısıyla  $U_{i1} \oplus \cdots \oplus U_{is_i} \leq_e L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) olacak şekilde  $U_{ij}$  düzgün altmodülleri vardır. Buna göre

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s_i}} U_{ij} \leq_e M$$

olur. Ayrıca dikkat edilirse her  $1 \leq i \leq n$  ve  $1 \leq j \leq s_i$  için  $\text{ann}(U_{ij}) = P_i$  dir.  $K_{\alpha\beta}$ ,  $U_{\alpha\beta}$ 'nin

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq i \neq \alpha \leq n \\ 1 \leq j \neq \beta \leq s_i}} U_{ij}$$

toplamını içeren  $M$  içindeki bir komplementi olsun. Lemma 2.22 ve Lemma 2.23 (i)'den dolayı  $K_{ij}$ 'ler  $M$ 'nin asıl altmodülleri.  $r \in P_i$  ve  $0 \neq m \in U_{ij}$  alalım.  $rm = 0 \in K_{ij}$  ve  $m \notin K_{ij}$  olduğundan  $r \in \sqrt{(K_{ij} : M)}$  olur. Tersine,  $r \in \sqrt{(K_i : M)}$  alınırsa uygun bir  $t$  pozitif tamsayısı için  $r^t M \subseteq K_{ij}$  ve böylece  $r^t U_{ij} \subseteq U_{ij} \cap K_{ij} = 0$  olacağından  $r \in P_i$  elde edilir. Dolayısıyla  $K_{ij}$ 'ler  $M$ 'nin  $P_i$ -asıl altmodülleri. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $Q_i = K_{i1} \cap \cdots \cap K_{is_i}$  olsun. Bu durumda  $Q_i$ 'ler  $M$ 'nin  $P_i$ -asıl altmodülleri ve Lemma 2.23 (ii) ve (iii)'den dolayı  $0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ , sıfır altmodülü için bir normal

asıl ayrışım olur. Şimdi

$$x \in \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s_i}} U_{ij}$$

olsun. Buna göre  $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq s_i} u_{ij}$  olacak şekilde  $u_{ij} \in U_{ij}$  elemanları vardır. Eğer bir  $1 \leq t \leq n$  için  $x \in Q_t$  ise o zaman  $u_{t1} + \dots + u_{ts_t} = 0$  olur. Dolayısıyla her  $1 \leq i \leq n$  için

$$Q_1 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n \cap \left( \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s_i}} U_{ij} \right) \subseteq U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{is_i}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{is_i}) \cap P_i M = 0$$

olduğundan  $Q_1 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap P_i M \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n = 0$  elde edilir. Böylece, Teorem 2.21'den dolayı ((iii)  $\Rightarrow$  (i) gerektirmesinden), sıfır altmodülü  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olur. ■

**Önerme 2.25**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $P_1, \dots, P_n$ ,  $R$ 'nin ikişer ikişer (kapsama bağıntısına göre) karşılaştırılmaz asal idealleri olmak üzere  $P_1 \cap \dots \cap P_n \subseteq (N : M)$  ise o zaman

$$L = \{m \in M : \exists c \in R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n), cm \in N\}$$

kümesi ya  $M$ 'dir ya da  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir radikal altmodülüdür. Eğer, ek olarak,  $M$  sonlu üreteçli ve  $(N : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  ise  $L \neq M$  ve  $(L : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  olur.

**Kanıt.**  $S = R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n)$  olsun. Buna göre  $S$ ,  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesidir.  $P_1^e \cap \dots \cap P_n^e \subseteq (N : M)^e \subseteq (N^e :_{S^{-1}R} S^{-1}M)$  olduğundan  $N^e \neq S^{-1}M$  ise  $S^{-1}M/N^e$  bir yarı-basit  $S^{-1}R$ -modül olur ki bu da  $S^{-1}N$ 'nin  $S^{-1}M$ 'nin bir radikal altmodülü olacağı anlamına gelir. Asal altmodüllerin burulmalarının yine asal olması ve burulma işleminin kesişimi korumasından dolayı, bu durumda,  $L = N^{ec}$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olur.

Şimdi  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ve  $(N : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  olsun.  $rM \subseteq L$  olsun. Buna göre  $crM \subseteq N$  olacak şekilde bir  $c \in R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n)$  vardır. Bu durumda  $cr \in P_1 \cap \dots \cap P_n$  ve dolayısıyla  $r \in P_1 \cap \dots \cap P_n$  elde edilir. Böylece  $(L : M) \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n$  bulunur. Ters kapsam açık olduğundan kanıt tamamlanmış olur. ■

**Lemma 2.26** [17, Önerme 8]  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ve  $I$ ,  $R$ 'nin bir radikal ideali olsun. Buna göre  $(IM : M) = I$  ancak ve ancak  $\text{ann}_R(M) \subseteq I$ .

**Sonuç 2.27**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $R$ 'nin ikişer ikişer karşılaştırılmaz  $P_1, \dots, P_n$  asal idealleri için  $(N : M) \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n$  ise o zaman

$$L = \{m \in M : \exists c \in R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n), cm \in N + (P_1 \cap \dots \cap P_n)M\}$$

kümesi ya  $M$ 'dir ya da  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür. Eğer, ek olarak,  $M$  sonlu üreteçli ise  $L \neq M$  ve  $(L : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  olur.

**Kanıt.** Birinci kısım için Önerme 2.25'i  $N$  yerine  $N + (P_1 \cap \dots \cap P_n)M$  altmodülü için uygularsak istenileni elde edebiliriz. Ek olarak  $M$  sonlu üreteçli ise Lemma 2.26'yı  $M$  yerine  $M/N$  için uygularsak  $(N + (P_1 \cap \dots \cap P_n)M : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  elde edilir. Buna göre Önerme 2.25'i tekrar  $N + (P_1 \cap \dots \cap P_n)M$  altmodülü için uygulayarak kanıtı tamamlayabiliriz. ■

$\{P_\alpha\}$ ,  $R$ 'nin asal ideallerinin bir ailesi ve  $I = \bigcap P_\alpha$  olsun. Dikkat edilirse  $I$ ,  $R$ 'nin bir radikal idealidir.  $a, b \in R$  için eğer  $ab \in I$  ise ya  $a \in I$  ya da  $b \in \bigcup P_\alpha$  olacağı açıktır. Şimdi bu gözlemi temel alarak bir tanım vereceğiz:

**Tanım 2.28**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun.  $\{P_\alpha\}$ ,  $(N : M)$  idealinin  $R$  içindeki bütün minimal asal ideallerinin ailesi olsun. Eğer her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rm \in N$  olması  $r \in \bigcup P_\alpha$  ya da  $m \in N$  olmasını gerektiriyor ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir güçlü yarı-asal altmodülü denir.

**Örnek 2.29**  $B_1, \dots, B_n$ ,  $M$ 'nin asal altmodülleri olsun. Kabul edelim ki her  $i = 1, \dots, n$  için  $(B_i : M) = P_i$  ve  $P_1, \dots, P_n$  ikişer ikişer karşılaştırılmaz asal idealler olsun. Bu durumda  $B_1 \cap \dots \cap B_n$ ,  $M$ 'nin bir güçlü yarı-asal altmodülüdür.

**Örnek 2.30** Genel olarak her yarı-asal altmodül güçlü olmak zorunda değildir. Örneğin,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin  $(N : M)$  ideali asal olacak şekilde asal olmayan bir yarı-asal altmodülü ise o zaman  $N$ ,  $M$ 'nin güçlü yarı-asal altmodülü olamaz. Daha somut bir örnek için  $(R, \mathfrak{M})$  bir yerel tamlık bölgesi ve  $a, b \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$  olmak üzere  $M = R \oplus R$  ve  $N = \{(x, y) \in M : xb = ya\}$  alalım.  $N \leq M$ 'nin bir 0-asal altmodül olduğu kolayca gösterilebilir.  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r \in R \setminus \{0\}$  ve  $(x, y) \in M$  için  $r^n(x, y) \in \mathfrak{M}N$  olsun. Eğer

$r \in R \setminus \mathfrak{M}$  ise o zaman  $(x, y) \in \mathfrak{M}N$  olur.  $r \in \mathfrak{M}$  olsun.  $\mathfrak{M}N \subseteq N$  ve  $N$  bir 0–asal altmodül olduğundan,  $(x, y) \in N$  elde edilir. Dolayısıyla  $r(x, y) \in \mathfrak{M}N$  olur. Buna göre  $\mathfrak{M}N$ ,  $M$ ’nin bir yarı–asal altmodülüdür.  $0 \neq (a, b) \in N$  olduğundan, Nakayama Lemma gereğince  $\mathfrak{M}N \neq N$  dir. Bu taktirde  $(x, y) \in N \setminus \mathfrak{M}N$  elemanı bulunabilir. Böylece  $\mathfrak{M}(x, y) \subseteq \mathfrak{M}N$  fakat  $\mathfrak{M}M \not\subseteq \mathfrak{M}N$  olur. Yani  $\mathfrak{M}N$  asal değildir. Fakat  $(\mathfrak{M}N : M) = 0$  bir asal idealdir.

Ayrıca  $a \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$  ve  $b \in \mathfrak{M} \setminus Ra$  seçilirse ( $R$  bir D.V.R. (discrete valuation ring) değilse bu şekilde elemanlar seçilebilir) o zaman  $\mathfrak{M}N$ ,  $M$ ’nin radikal olmayan bir yarı–asal altmodülü olur. Bunu görmek için  $\mathfrak{M}N$ ’yi  $M$ ’nin bir radikal altmodülü kabul edelim. Bu durumda  $M/\mathfrak{M}N$ ’nin sıfır altmodülü radikaldir.  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}N : N)$  olacağından  $\mathfrak{M}N$ ,  $N$ ’nin bir asal altmodülü olur. Dolayısıyla  $N/\mathfrak{M}N$ ,  $M/\mathfrak{M}N$  tarafından içerilen bir asal  $R$ –modüldür. Lemma 2.8 gereğince  $(K/\mathfrak{M}N) \cap (N/\mathfrak{M}N) = 0_{M/\mathfrak{M}N}$  olacak şekilde  $M/\mathfrak{M}N$ ’nin  $K/\mathfrak{M}N$  gibi bir asal altmodülü vardır. Kolayca görülebilir ki  $K$ ,  $M$ ’nin bir  $\mathfrak{M}$ –asal altmodülüdür. Buna göre  $\mathfrak{M}N \subseteq \mathfrak{M}M \cap N \subseteq K \cap N = \mathfrak{M}N$ , yani  $\mathfrak{M}M \cap N = \mathfrak{M}N$  olur. Fakat  $(a, b) \in (\mathfrak{M}M \cap N) \setminus \mathfrak{M}N$  olacağından bu durum bir çelişkidir.

**Teorem 2.31**  $M$  bir  $R$ –modül ve  $N$ ,  $M$ ’nin bir güçlü yarı–asal altmodülü olsun. Eğer  $(N : M)$  idealinin  $R$  içinde yalnızca sonlu adet minimal asal ideali varsa o zaman  $N$ ,  $M$  içinde radikaldir.

**Kanıt.**  $P_1, \dots, P_n$ ,  $(N : M)$ ’nin  $R$  içindeki minimal asal idealleri olsun. O zaman  $(N : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  yazılabilir. Tanımdan dolayı  $N = \{m \in M : \exists c \in R \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n), cm \in N\}$  yazabiliriz. Önerme 2.25’den dolayı  $N$ ,  $M$ ’nin bir radikal altmodülü olur. ■

$R$  halkası yarı–asal idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar ise o zaman  $R$ ’nin her öz ideali sonlu adet minimal asal ideale sahiptir (bkz. [12, Teorem 88]). Öte yandan kolayca görülebilir ki,  $R$  yarı–asal idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlarsa yine her öz ideali sonlu adet minimal asal ideale sahip olur.

**Lemma 2.32**  $M$  bir  $R$ –modül,  $N$ ,  $M$ ’nin bir yarı–asal altmodülü ve  $P$ ,  $(N : M)$ ’nin  $R$  içindeki bir minimal asal ideali olsun. Eğer ya  $M$  Noether ya da  $R$  yarı–asal idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ise o zaman

$$K = \{m \in M : \exists c \in R \setminus P, cm \in N\}$$

kümesi  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir  $P$ -asal altmodülüdür.

**Kanıt.** Bu kabuller altında  $(N : M)$ 'nin sonlu adet minimal asal ideali vardır.  $P_1, \dots, P_n$ ,  $(N : M)$ 'nin tüm minimal asal idealleri olmak üzere  $(N : M) = P_1 \cap \dots \cap P_n$  yazalım.  $P_1 = P$  alabiliriz.  $PM \subseteq K$  olduğunu gösterelim. Eğer  $n = 1$  ise bu durumda gösterecek birşey yoktur.  $n > 1$  olsun. Bir  $c \in (P_2 \cap \dots \cap P_n) \setminus P$  elemanı seçelim.  $cP \subseteq (N : M)$  olacağından  $cPM \subseteq N$  elde edilir.  $K$ 'nin tanımından dolayı  $PM \subseteq K$  olur.  $M$  Noether ise  $M/N$  sonlu üreteçlidir. Ayrıca her  $m \in M \setminus N$  için  $(N : m)$ ,  $R$ 'nin bir yarı-asal ideali olur. Dolayısıyla  $M$  Noether veya  $R$  yarı-asal idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar ise, her iki durumda da,  $(N : M) = (N : Rm_1 + \dots + Rm_k)$  olacak şekilde  $m_1, \dots, m_k \in M$  elemanları bulunabilir. Kabul edelim ki  $K = M$  olsun. Buna göre her  $i = 1, \dots, k$  için  $cm_i \in N$  olacak şekilde bir  $c \in R \setminus P$  bulunabilir. Fakat bu durumda  $c \in (N : M) \subseteq P$  elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla  $K \neq M$  dir. Bundan sonra  $K$ 'nin asal olduğunu görmek çok kolaydır. ■

**Sonuç 2.33**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki aşağıdakilerden biri sağlansın:

- (i)  $R$  bir Noether halkadır.
- (ii)  $M$  bir Noether  $R$ -modüldür.
- (iii)  $R$ , yarı-asal idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.

Buna göre  $M$ 'nin her güçlü yarı-asal altmodülü bir radikal altmodülüdür. Ayrıca  $M$  Noether ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir güçlü yarı-asal altmodülü ise  $P_1, \dots, P_n$ ,  $(N : M)$ 'nin tüm minimal asal idealleri ve her  $i = 1, \dots, n$  için  $K_i = \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_i, cm \in N\}$  olmak üzere  $N = K_1 \cap \dots \cap K_n$  dir.

**Kanıt.** (i), (ii) ya da (iii) koşullarından herhangi biri sağlandığı takdirde  $R$ 'nin her yarı-asal ideali sonlu adet asal idealin arakesiti şeklinde yazılabilir. Buna göre Teorem 2.31'den dolayı yukarıdaki sonucun ilk kısmı elde edilir.

Şimdi  $M$  Noether olsun. Lemma 2.32'den dolayı her  $i = 1, \dots, n$  için  $K_i$ ,  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir  $P_i$ -asal altmodülüdür. Böylece  $N \subseteq K_1 \cap \dots \cap K_n$  olur.  $M$  Noether olduğundan, [25, Sonuç 4.3] gereğince,  $N = B_1 \cap \dots \cap B_l$ ,  $N$ 'nin bir normal asal ayrışımı olacak şekilde  $M$ 'nin  $B_1, \dots, B_l$  asal altmodülleri vardır.  $P_1 \cap \dots \cap P_n = (N : M) = (B_1 : M) \cap \dots \cap (B_l : M)$  olduğundan  $n \leq l$  ve uygun bir yeniden indisleme sayesinde her  $i = 1, \dots, n$  için  $(B_i : M) = P_i$  elde edilir. Bu durumda  $K_i \subseteq B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) olacağı açıktır. Kabul edelim ki  $n < l$  olsun. Buna göre,  $N = K_1 \cap \dots \cap K_n \cap B_{n+1} \cap \dots \cap B_l$

ve, normal asal ayrışımardaki terimlerin sayısının değişmezliğinden,  $K_1 \cap \dots \cap K_n \not\subseteq B_{n+1} \cap \dots \cap B_l$  elde edilir. Ayrıca  $(B_{n+1} : M) \cap \dots \cap (B_l : M) \not\subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$  olduğu açıktır (PAT). Şimdi  $r \in [(B_{n+1} : M) \cap \dots \cap (B_l : M)] \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n)$  ve  $m \in (K_1 \cap \dots \cap K_n) \setminus (B_{n+1} \cap \dots \cap B_l)$  elemanlarını seçelim. Buna göre  $rm \in N$  olur. Fakat  $N$  güçlü yarı-asal olduğundan bu durum mümkün değildir. Dolayısıyla  $n = l$  ve böylece  $N = K_1 \cap \dots \cap K_n$  elde edilir. ■

**Lemma 2.34** [3, II.2.6. Önerme 12]  $I, R$ 'nin bir ideali ve  $P, I$ 'nin  $R$  içindeki bir minimal asal ideali olsun.  $p \in P$  ise  $cp^n \in I$  olacak şekilde bir pozitif  $n$  tamsayısı ile bir  $c \in R \setminus P$  vardır.

**Lemma 2.35**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $P, R$ 'nin  $(N : M) \not\subseteq P$  olacak şekilde bir asal ideali olsun. Eğer  $K, N$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü ise o zaman  $K' \cap N = K$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü  $K'$  bulunabilir.

**Kanıt.** Önce  $N \cap PM \subseteq K$  olduğunu göstereceğiz.  $x \in N \cap PM$  olsun. Kabul gereğince  $r \in (N : M) \setminus P$  seçebiliriz. Buna göre  $rx \in PrM \subseteq PN \subseteq K$  olur. Fakat  $r \notin P, x \in N$  ve  $K, N$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olduğundan  $x \in K$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $N/K \cap P(M/K) = 0_{M/K}$  elde edilir.  $N/K$  sıfırlayıcı  $P$  olan bir asal  $R$ -modül olduğundan Lemma 2.7'den dolayı  $N/K \cap K'/K = 0$  olacak şekilde  $M/K$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü  $K'/K$  vardır. Dolayısıyla  $N \cap K' = K$  ve  $K', M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. ■

$M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $rad_M(N) = M$  veya  $rad_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olacağından  $\sqrt{(N : M)}M \subseteq rad_M(N)$  yazılabilir. Eğer, ek olarak,  $M$  sonlu üreteçli olursa  $P \supseteq (N : M)$  olacak şekildeki  $R$ 'nin her  $P$  asal ideali için  $\{m \in M : \exists c \in R \setminus P, cm \in N + PM\}$  kümesi  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir  $P$ -asal altmodülüdür ([25, Lemma 1.6 ve Önerme 1.7]). Buna göre aşağıdaki lemma kolayca elde edilebilir.

**Lemma 2.36**  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Bu durumda  $\sqrt{(N : M)} = (rad_M(N) : M)$  dir.

$M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ve  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olmak üzere  $m \in rad_M(N)$  ise yukarıdaki lemmanın da yardımıyla  $(N : M) \subseteq (N + Rm : M) \subseteq (rad_M(N) : M) = \sqrt{(N : M)} = (N : M)$  olduğunu yani her  $m \in rad_M(N)$  için

$(N + Rm : M) = (N : M)$  olduğunu görürüz. Aşağıdaki teorem aynı durumun sonlu üreteçli olmayan modüller için de geçerli olacağını söylemektedir:

**Teorem 2.37**  *$M$  bir  $R$ -modül ve  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun. Buna göre her  $m \in \text{rad}_M(N)$  için  $(N + Rm : M) = (N : M)$  dir.*

**Kanıt.**  $m \in \text{rad}_M(N)$  olsun.  $m \in N$  ise durum açıktır. Dolayısıyla  $m \notin N$  olsun. Buna göre  $(N : m)$ ,  $R$ 'nin bir yarı-asal idealidir. Kabul edelim ki  $(N : m)$  idealinin  $R$  içindeki bir  $P$  minimal asal ideali için  $(N + Rm : M) \not\subseteq P$  olsun.  $K = \{x \in N + Rm : \exists c \in R \setminus P, cx \in N + Pm\}$  kümesini düşünelim. Bu kümenin  $M$ 'nin bir altmodülü olduğunu görmek zor değildir.  $m \in K$  olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki  $m \notin K$  olsun. Bu durumda  $K \neq N + Rm$  ve buradan da kolayca görülebilir ki  $K, N + Rm$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olur.  $(N + Rm : M) \not\subseteq P$  olduğundan Lemma 2.35 gereğince  $K' \cap (N + Rm) = K$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $K$  asal altmodülü vardır. Fakat  $m \in \text{rad}_M(N) \subseteq K'$  olacağından bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla  $m \in K$ , yani  $cm = n + pm$  olacak şekilde  $c \in R \setminus P$  ve  $p \in P$  elemanları bulunabilir.  $P, (N : m)$ 'nin bir minimal asal ideali olduğundan, Lemma 2.34 gereğince uygun bir  $d \in R \setminus P$  ve  $k$  pozitif tamsayısı için  $dp^k m \in N$  olur.  $N$  yarı-asal olduğundan  $dpm \in N$  elde edilir. Buna göre  $(dc)m = dn + dpm \in N$  ve böylece  $dc \in (N : m) \subseteq P$  olur. Bu durum ise bir çelişkidir. Dolayısıyla  $(N + Rm : M), (N : m)$ 'nin bütün minimal asal idealleri tarafından içerilir.  $(N : m), R$ 'nin bir yarı-asal ideali olduğundan  $(N + Rm : M) \subseteq (N : m)$  yazılabilir.

Şimdi kabul edelim ki  $r \in (N + Rm : M)$ , yani  $rM \subseteq N + Rm$  olsun. Yukarıda gösterilenden dolayı  $rm \in N$  olur. Buna göre  $r^2M \subseteq rN + Rrm \subseteq N$ .  $N$  yarı-asal olduğundan  $rM \subseteq N$  dir. Böylece  $(N + Rm : M) = (N : M)$  elde edilir. ■

**Sonuç 2.38**  *$M$  bir  $R$ -modül ve  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun. Eğer her  $N \not\subseteq L \leq M$  için  $(N : M) \not\subseteq (L : M)$  ise o zaman  $N, M$ 'nin bir radikal altmodülüdür.*

## 2.4 S.p.a.r. Özelliği

Bu kısımda ele alınan halkalar aksi belirtilmedikçe değişmeli olmak zorunda olmayan birimli halkalardır. Aşağıdaki kullanışlı teorem sayesinde denilebilir ki bir sol Noether halkanın s.p.a.r. özelliğine sahip olduğunu görebilmek için yalnızca üzerindeki sonlu üreteçli yarı-asal modüllerin sıfır radikale sahip olduğunu görmek yeterlidir.

**Teorem 2.39**  $R$  bir halka ve  $M$ , bir  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki  $M$ , asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodüle sahip olsun. Bu taktirde sıfır altmodülünün  $M$  içinde radikal olması ile  $M$ 'nin sıfırdan farklı tüm sonlu üreteçli altmodülleri içinde radikal olması denktir.

**Kanıt.** Sıfır altmodülü  $M$  içinde radikal ise o zaman  $M$ 'nin tüm sıfırdan farklı altmodülleri içinde de radikal olacağı açıktır. Kabul edelim ki sıfır altmodülü  $M$ 'nin tüm sonlu üreteçli altmodülleri içinde radikal olsun.  $L$ ,  $M$  içinde bir asal  $R$ -modül ve  $\text{ann}(L) = P$  olsun.  $L \subseteq PM$  olsun.  $L \neq 0$  olduğundan  $0 \neq l \in L$  seçebiliriz. Buna göre  $Rl$  de sıfırlayıcı  $P$  olan bir asal  $R$ -modül olur. Ayrıca  $Rl \subseteq PN$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir sonlu üreteçli  $N$  altmodülü bulunabilir. Fakat sıfır altmodülü  $N$  içinde radikal olacağından, Lemma 2.8'den dolayı  $Rl \cap PN = 0$  olmak zorundadır. Bu durum ise bir çelişkidir. Dolayısıyla  $L \not\subseteq PM$  olur ve Teorem 2.9'u kullanarak kanıtı tamamlayabiliriz. ■

Aşağıdaki teorem, [20, Teorem 4.5]'de verilen  $(i) \Leftrightarrow (iv)$  denkleğinin değışmeli olmayan halkalar için bir genellemesidir.

**Sonuç 2.40**  $R$ , yarı-asal (sol) idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağılayan bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (i)  $R$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.
- (ii)  $R$  üzerindeki her sonlu üreteçli modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.
- (iii) Her sonlu üreteçli serbest (free)  $R$ -modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $(i) \Rightarrow (iii)$  : Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (ii)$  : Her sonlu üreteçli  $R$ -modül bir sonlu üreteçli serbest modülün homomorf görüntüsü olduğundan açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$  :  $M$  bir yarı-asal  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin sıfırdan farklı her  $N$  altmodülü için  $\text{ann}(N)$ ,  $R$ 'nin bir yarı-asal ideali olduğundan  $\{\text{ann}(N) : 0 \neq N \leq M\}$  kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemana  $\text{ann}(N_0)$  diyelim. Buna göre  $N_0$  bir asal  $R$ -modüldür. Dolayısıyla  $M$ 'nin sıfırdan farklı her altmodülü en az bir asal  $R$ -modül içerir. Böylece  $M$ 'nin asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılan bir büyük altmodülü vardır. Buna göre istenilen, Teorem 2.39'dan kolayca elde edilir. ■

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$ 'nin her komplement altmodülü  $M$ 'nin bir dik toplananı ise (veya denk olarak  $M$ 'nin her altmodülü,  $M$ 'nin bir dik toplananı tarafından büyük olarak içeriliyor ise)  $M$ 'ye bir CS modül denir.

**Sonuç 2.41**  $R$ , üzerindeki her sonlu üreteçli modülün CS olduğu bir halka olsun. Buna göre  $R$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $M$  bir yarı-asal  $R$ -modül olsun. [15, Sonuç 6.45]'den dolayı her sonlu üreteçli  $R$ -modül düzgün modüllerin bir sonlu dik toplamı şeklinde yazılabilir. Buna göre sıfırdan farklı her modül bir düzgün modül içerir. Dolayısıyla  $M$  düzgün (ve Lemma 2.13'den dolayı da asal) modüllerin dik toplamı şeklinde yazılan bir büyük altmodüle sahiptir.  $N$ ,  $M$ 'nin sıfırdan farklı sonlu üreteçli bir altmodülü olsun. [15, Sonuç 6.45] ve Lemma 2.13'den,  $N = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$  olacak şekilde  $M$  içinde  $L_1, \dots, L_n$  asal  $R$ -modülleri vardır. Açıktır ki her  $i = 1, \dots, n$  için  $\bigoplus_{j \neq i} L_j$ ,  $N$ 'nin bir asal altmodülüdür.

$$\bigcap_{i=1}^n \left( \bigoplus_{j \neq i} L_j \right) = 0$$

olduğundan, sıfır altmodülü  $N$  içinde radikaldir. Teorem 2.39'dan dolayı sıfır altmodülü  $M$  içinde de radikal olur. Böylece istenilen elde edilir. ■

Bir  $R$  halkası için, eğer  $R$ 'nin tüm sol (veya sağ) idealleri bir tek eleman tarafından üretilebiliyor ise – yani  $R$ 'nin her sol (veya sağ) ideali temel ideal ise – o zaman  $R$ 'ye bir temel sol (veya sağ) ideal halkası adı verilir.

**Teorem 2.42**  $R$  bir temel sağ ideal halkası olsun. Buna göre  $R$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $M$  bir yarı-asal  $R$ -modül olsun. Kabulümüzden dolayı  $R$ , idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayacağından,  $M$ , asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilen bir büyük altmodüle sahiptir. Şimdi  $L$ ,  $M$  tarafından içerilen bir asal  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki  $\text{ann}(L) = P$  ve  $L \subseteq PM$  olsun. Buna göre  $P = pR$  olacak şekilde bir  $p \in P$  vardır.  $0 \neq l \in L$  alalım. Bu durumda uygun bir  $m \in M$  için  $l = pm$  yazabiliriz. Fakat  $pRpm = pRl = 0$  olacağından  $pm = 0$  olur. Bu çelişkidenden dolayı  $L \not\subseteq PM$  elde edilir. Böylece Teorem 2.9'dan dolayı sıfır altmodülü  $M$  içinde radikal olur. ■

**Teorem 2.43**  $R$  bir yarı-asal halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$  yarı-asal ise yarı-basittir. Dolayısıyla her yarı-asal halka s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $J = \text{Jac}(R)$  olsun.  $M$  yarı-asal olsun.  $J^n = 0$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı bulunabileceğinden  $J^n M = 0$  ve buradan da  $JM = 0$  elde edilir. Buna göre  $M$  bir yarı-basit  $R/J$ -modüldür. Dolayısıyla  $M$  bir yarı-basit  $R$ -modül olur. Böylece sıfır altmodülü  $M$  içinde radikaldir. Dolayısıyla her yarı-asal halka s.p.a.r. özelliğine sahiptir. ■

Daha önce Teorem 2.17 ile, tüm sol ilkel faktörleri Artin olan bir halka üzerindeki tüm Artin yarı-asal modüllerin yarı-basit olacağını söylemiştik. Buna göre, tüm sol ilkel faktörleri Artin olan halkalar üzerindeki Artin modüller s.p.a.r. özelliğine sahip modüllerdir. Fakat herhangi bir halka üzerindeki Artin modüllerin s.p.a.r. özelliğine sahip modüller olup olmadıkları henüz bilinmemektedir. Yukarıda belirtilen türdeki halkalar üzerindeki s.p.a.r. özelliğini sağlayan modüllerin sınıfını Artin modüllerin herhangi çokluktaki dik toplamlarını da içine alacak şekilde genişletmek mümkündür. Bu modüllerin sınıfı yerel Artin modüllerin sınıfıdır. Eğer bir modülün her sonlu üreteçli altmodülü Artin ise o zaman bu modüle *yerel Artin modül* denir. Yerel Artin modüllerin dik toplamları, altmodülleri ve homomorf görüntüleri yine yerel Artindir.

**Teorem 2.44**  $R$ , tüm sol ilkel faktörleri Artin olan bir halka olsun. Bu durumda her yerel Artin  $R$ -modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $M$  bir yerel Artin  $R$ -modül olsun. Genelliği bozmadan  $M$ 'yi yarı-asal kabul edebiliriz.  $\text{soc}(M) \leq_e M$  olduğu açıktır. Dolayısıyla  $M$ , asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılan bir büyük altmodüle sahiptir.  $M$ 'nin sonlu üreteçli altmodülleri Artin olduğundan bu altmodüller s.p.a.r. özelliğine sahiptirler. Dolayısıyla sıfır altmodülü,  $M$ 'nin tüm sonlu üreteçli altmodülleri içinde radikaldir. Buna göre Teorem 2.39 gereğince sıfır altmodülü  $M$  içinde de radikal olur. ■

$M$  bir modül olsun. Eğer  $M$ 'nin her sıfırdan farklı homomorf görüntüsü sıfırdan farklı socle'a sahip ise, yani  $M$ 'nin her  $N$  öz altmodülü için  $N \subset L$  ve  $L/N$  basit olacak şekilde bir  $L \leq M$  bulunabiliyor ise, o zaman  $M$ 'ye bir *yarı-Artin modül* adı verilir. Yarı-Artin modüllerin dik toplamları, alt modülleri ve homomorfik görüntüleri yine yarı-Artindir.

Bir  $R$  halkası üzerindeki bir  $M$  modülü için eğer her  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $RrRm$ ,  $M$ 'nin bir sonlu üreteçli altmodülü ise  $M$ 'ye bir *zayıf Noether  $R$ -modül* diyeceğiz (bkz. [25]). Değişmeli halkalar ile sol Noether halkalar üzerindeki her sol modül zayıf Noetherdir. Ayrıca zayıf Noether modüllerin altmodülleri ile homomorfik görüntüleri yine zayıf Noether olur.

Aşağıdaki teorem bazı koşullar altında yarı-Artin modüllerin s.p.a.r. özelliğine sahip olduklarını söylemektedir. Dikkat edilirse bu koşullardan halka ile ilgili olanı FBN halkaları ile PI halkaları ve daha da özel olarak tüm değişmeli halkalar için sağlanır.

**Teorem 2.45**  *$R$ , birbirinden farklı herhangi iki sol ilkel ideali karşılaştırılmaz olan bir halka ve  $M$  bir zayıf Noether  $R$ -modül olsun. Buna göre  $M$  yarı-Artin ise s.p.a.r. özelliğine sahiptir.*

**Kanıt.**  $M$ 'yi yarı-asal kabul edebiliriz.  $M$  yarı-Artin olduğundan  $\text{soc}(M) \leq_e M$  olur. Dolayısıyla  $M$ , asal modüllerin dik toplamı şeklinde yazılan bir büyük altmodüle sahiptir. Buna göre sıfır altmodülünün  $M$ 'de radikal olduğunu görmek için, Teorem 2.9 gereğince, verilen bir  $N \leq M$  asal  $R$ -modülü için  $N \not\subseteq \text{ann}(N)M$  olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat incelememizi asal modüllerden basit modüllere indirgeyebiliriz. Yani verilen bir  $S \leq M$  basit  $R$ -modülü için  $S \not\subseteq \text{ann}(S)M$  olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü  $M$  içindeki her asal  $R$ -modül sıfırlayanı aynı olan bir basit  $R$ -modül içerir.

Şimdi  $S \leq M$  bir basit  $R$ -modül ve  $\text{ann}(S) = P$  olsun. Kabul edelim ki  $S \subseteq PM$  olsun. Öncelikle her  $p \in P$  ve her sonlu üreteçli  $U \leq M$  için  $IpU = 0$  olacak şekilde  $P$  tarafından içerilmeyen ( $p$  ve  $U$ 'nun seçimine bağlı) bir  $I \leq R$  ideali bulunabileceğini göstereceğiz. Aksini kabul edelim.  $M$  yarı-Artin olduğundan aşağıdaki iki özelliği sağlayacak şekilde  $M$ 'nin altmodüllerinin bir

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset \dots \subset M_\lambda = M$$

dizisi bulunabilir:

- (1) Her  $\alpha < \lambda$  için  $M_{\alpha+1}/M_\alpha$  bir basit  $R$ -modüldür.
- (2) Eğer  $\beta < \lambda$  bir limit ordinal ise  $M_\beta = \bigcup_{\beta' < \beta} M_{\beta'}$ .

$\lambda$  iyi sıralı olduğundan aşağıdaki özelliği sağlayan en küçük  $\gamma$  ordinalini seçebiliriz:

” $P$  tarafından içerilmeyen her  $I$  ideali için  $IpU \neq 0$  olacak şekilde bir  $p \in P$  ve sonlu üreteçli bir  $U \leq M_\gamma$  bulunabilir.”

Dikkat edilirse en kötü ihtimalle  $\gamma = \lambda$  dır.  $U$  sonlu üreteçli olduğundan  $\gamma$  bir limit ordinal olamaz. Bu yüzden  $\gamma = \gamma' + 1$  yazabiliriz. Lemma 2.16'nın kanıtında olduğu gibi  $P$  tarafından içerilmeyen uygun bir  $I_1$  ideali için  $I_1 p U \subseteq M_{\gamma'}$  elde edilir.  $U = Ru_1 + \dots + Ru_t$  olsun.  $c \in R \setminus P$  olmak üzere  $I_1 = RcR$  almakta sakınca yoktur.  $M$  zayıf Noether olduğundan her  $i = 1, \dots, t$  için  $RpRu_i$  sonlu üreteçlidir.  $RpRu_i = \sum_{j=1}^{t_i} Rv_{ij}$ ,  $v_{ij} \in M$  ( $1 \leq i \leq t$ ,  $1 \leq j \leq t_i$ ) yazalım. Bu taktirde

$$I_1 p U \subseteq \sum_{i=1}^t RcRpRu_i \subseteq \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{t_i} RcRv_{ij} = V \subseteq M_{\gamma'}$$

elde edilir. Dikkat edilirse  $RcRv_{ij}$  altmodülleri sonlu üreteçli olduklarından  $V$  de sonlu üreteçlidir.  $\gamma$ 'nın minimalliğinden dolayı  $I_2 p V = 0$  olacak şekilde  $P$  tarafından içerilmeyen bir  $I_2$  ideali bulunabilir. Böylece  $I_2 p I_1 p U = 0$  elde edilir. Fakat bu durumda Lemma 2.16'nın kanıtında da olduğu gibi  $I_1 I_2 p U = 0$  bulunur ki bu da,  $I_1 I_2 \not\subseteq P$  olacağından dolayı, bir çelişkidir.

$S \subseteq PM$  ve  $S$  basit olduğundan  $S \subseteq Rp_1 m_1 + \dots + Rp_k m_k$  ve her  $i = 1, \dots, k$  için  $p_i m_i \neq 0$  olacak şekilde  $p_i \in P$  ve  $m_i \in M$  ( $1 \leq i \leq k$ ) elemanları vardır.  $k$ 'yı bu şekildeki en küçük pozitif tamsayı olarak seçelim. Yukarıda gösterilenlerden dolayı  $I p_1 m_1 = 0$  olacak şekilde  $P$  tarafından içerilmeyen  $R$ 'nin bir  $I$  ideali bulunabilir. Buna göre  $IS \neq 0$  ve dolayısıyla

$$S = IS \subseteq I p_1 m_1 + I p_2 m_2 + \dots + I p_k m_k \subseteq R p_2 m_2 + \dots + R p_k m_k$$

elde edilir. Fakat bu durum  $k$ 'nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla  $S \not\subseteq PM$  olur. ■

**Lemma 2.46** [36, Önerme 2.27]  $R$  bir halka,  $I$   $R$ 'nin bir ideali ve  $E$  bir injektif  $R$ -modül olsun. Buna göre  $\text{ann}_E(I)$  bir injektif  $(R/I)$ -modüldür.

Aşağıdaki lemma [35, Lemma 2.2]'de değişmeli bir halka için verilmiştir. Fakat bu lemma değişmeli olmayan bir halka için de kanıtı değiştirilmeksizin aşağıdaki gibi verilebilir:

**Lemma 2.47**  $R$  bir halka ve  $I_1, \dots, I_n$   $R$ 'nin idealleri olsun.  $E$  bir injektif  $R$ -modül ise  $\sum_{i=1}^n \text{ann}_E(I_i) = \text{ann}_E(\bigcap_{i=1}^n I_i)$  olur.

**Kanıt.**  $\sum_{i=1}^n \text{ann}_E(I_i) \subseteq \text{ann}_E(\bigcap_{i=1}^n I_i)$  olduğu açıktır.  $x \in \text{ann}_E(\bigcap_{i=1}^n I_i)$  olsun.  $f : R/(\bigcap_{i=1}^n I_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n R/I_i$ , her  $r \in R$  için  $f(r + \bigcap_{i=1}^n I_i) = (r + I_1, \dots, r + I_n)$  şeklinde tanımlı dönüşüm bir  $R$ -monomorfizmasıdır.  $\eta : R/(\bigcap_{i=1}^n I_i) \rightarrow E$ , her  $r \in R$  için  $\eta(r + \bigcap_{i=1}^n I_i) = rx$  olarak tanımlansın. Buna göre  $\eta$  bir  $R$ -homomorfizmasıdır.  $E$  bir injektif  $R$ -modül olduğundan  $g \circ f = \eta$  olacak şekilde bir  $g : \bigoplus_{i=1}^n R/I_i \rightarrow E$ ,  $R$ -homomorfizması bulunabilir. Buradan,  $x = \eta(1 + \bigcap_{i=1}^n I_i) = g(1 + I_1, \dots, 1 + I_n) = g(1 + I_1, 0, \dots, 0) + \dots + g(0, \dots, 0, 1 + I_n) \in \sum_{i=1}^n \text{ann}_E(I_i)$  elde edilir. ■

$R$  bir halka olsun.  $R$ 'nin kendisi üzerindeki sol modül yapısına göre bir  $X$  altkümesinin  $R$  içindeki sıfırlayanını  $l.\text{ann}_R(X)$  ile göstereceğiz. Yani  $l.\text{ann}_R(X) = \{r \in R : rX = 0\}$  dir. Eğer  ${}_R R$ ,  $\{l.\text{ann}_R(X) : X \subseteq R\}$  kümesi üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan sonlu düzgün boyuta sahip bir  $R$ -modül ise  $R$ 'ye bir sol Goldie halkası adı verilir.  $R$  halkasının bir  $I$  ideali için  $\mathcal{C}_R(I) = \{r \in R : r + I, R/I \text{ halkasının sıfır böleni değildir}\}$  olarak alacağız.

**Teorem 2.48**  $R$  bir yarı-asal sol Goldie halkası ise her injektif  $R$ -modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $E$  bir injektif  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki  $R$ 'nin tüm minimal asal idealinin kümesi  $\{P_1, \dots, P_n\}$  olsun. Buna göre Lemma 2.47'den,  $E = \text{ann}_E(0) = \text{ann}_E(P_1 \cap \dots \cap P_n) = \text{ann}_E(P_1) + \dots + \text{ann}_E(P_n)$  yazılabilir.  $N$ ,  $E$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun. Önce her  $i = 1, \dots, n$  için  $\mathcal{A}_i = (\text{ann}_E(P_i) + N)/N$  olmak üzere  $\mathcal{A}_i \neq 0$  ise  $\mathcal{A}_i$ 'nin, sıfırlayanı  $P_i$  olan bir asal  $R$ -modül olacağını gösterelim:  $P_i \mathcal{A}_i = 0$  olduğu açıktır. Dolayısıyla her  $r \in R \setminus P_i$  ve  $x \in \text{ann}_E(P_i) \setminus N$  için  $rRx \not\subseteq N$  olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki bu şekildeki  $r$  ve  $x$  elemanları için  $rRx \subseteq N$  olsun. [26, Önerme 3.2.4] gereğince  $R/P_i$  bir asal sol Goldie halkasıdır. Buna göre [26, Lemma 2.3.4 ve Önerme 2.3.5]'den dolayı  $RrR \cap \mathcal{C}_R(P_i) \neq \emptyset$  dir.  $c \in RrR \cap \mathcal{C}_R(P_i)$  olsun.  $c = arb$  olacak şekilde  $a, b \in R$  vardır. Buradan,  $cRx = arbRx \subseteq arRx \subseteq N$  elde edilir. Lemma 2.46'dan,  $\text{ann}_E(P_i)$  bir injektif  $(R/P_i)$ -modül olduğundan bölünebilir  $(R/P_i)$ -modüldür. Dolayısıyla  $x = cx'$  olacak şekilde  $x' \in \text{ann}_E(P_i)$  vardır. Buna göre  $cRx' = cRx \subseteq N$  ve  $N$ ,  $E$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olduğundan  $x = cx' \in N$  elde edilir. Bu durum ise  $x$ 'in seçimi ile çelişir. Dolayısıyla her  $i = 1, \dots, n$  için  $\mathcal{A}_i \neq 0$  ise  $\mathcal{A}_i$ , sıfırlayanı  $P_i$  olan bir asal  $R$ -modüldür. Kabul edelim ki sıfırdan farklı tüm  $\mathcal{A}_i$ 'lerin kümesi  $\{\mathcal{A}_{i_1}, \dots, \mathcal{A}_{i_k}\}$  olsun. Bu durumda  $E/N = \mathcal{A}_{i_1} + \dots + \mathcal{A}_{i_k}$  olur.  $\{\mathcal{A}_{i_1}, \dots, \mathcal{A}_{i_k}\}$ ,

farklı sıfırlayanlara sahip asal  $R$ -modüllerin bir kümesi olduğundan, Lemma 2.1'den dolayı  $E/N = \mathcal{A}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{i_k}$  yazılabilir. Böylece  $N$ ,  $E$ 'nin bir radikal altmodülü olur.

■

**Sonuç 2.49**  *$R$  bir yarı-asal sol Noether halka ise her injektif  $R$ -modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.*

S.p.a.r. özelliğine sahip bazı halka ve modüller üzerinde durduktan sonra şimdi de s.p.a.r. özelliğinin, altmodüllerin radikallerinin belirlenmesinde nasıl kullanılabileceğini göreceğiz. Gerçekte bir altmodülün radikalının belirlenmesi ya da formüle edilmesi, serbest modüller içinde dahi oldukça zor bir problemdir. Biz de burada özel bir durumu ele alarak değişmeli bir halka üzerindeki s.p.a.r. özelliğini sağlayan bir Noether modülün radikali asal olan altmodüllerinin radikallerini bulmaya çalışacağız. *Bu nedenle, şu andan itibaren, bu kısmın sonuna kadar,  $R$  değişmeli ve birimli bir halkayı gösterecektir.* Sonuçlarımızı vermeden önce [19]'da yer alan bir sonucu ifade edelim:

**Önerme 2.50** [19, Önerme 2.1]  *$R$  bir Noether halka ve  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahip olsun. O zaman  $M$ 'nin her  $N$  altmodülü için aşağıdaki ifadelerden biri sağlanır:*

- (i)  $N = \text{rad}_M(N)$ , yani  $N$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülüdür.
- (ii)  $N \subseteq L \subsetneq \text{rad}_M(N)$  ve  $\text{rad}_M(N) = RE_M(L)$  olacak şekilde bir  $L \leq M$  vardır.

$M$  bir Noether  $R$ -modül olsun. Kabul edelim ki yukarıda verilen önermedeki (ii) koşunu sağlayacak şekilde  $N, L \leq M$  bulunsun.  $L \leq L' \subsetneq \text{rad}_M(N)$  olacak şekilde bir  $L' \leq M$  alalım. Bu taktirde

$$RE_M(L) \leq RE_M(L') \leq RE_M(\text{rad}_M(N)) = \text{rad}_M(N) = RE_M(L)$$

olacağından  $\text{rad}_M(N) = RE_M(L')$  elde edilir.  $M$ 'nin Noether oluşunu da kullanırsak yukarıdaki önermede verilen (ii) koşulundaki  $L$  altmodülünü  $\text{rad}_M(N)/L$  bir basit  $R$ -modül olacak şekilde seçebiliriz. Bu gözlemi aşağıdaki lemmanın kanıtlanmasında kullanacağız.

**Lemma 2.51**  *$(R, \mathfrak{M})$  bir yerel halka,  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $M$  s.p.a.r. özelliğini sağlayan bir Noether  $R$ -modül olsun. Buna göre bir  $N \leq M$  için  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür ancak ve ancak  $PM \subseteq N$  ve  $\text{rad}_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür.*

**Kanıt.**  $N$ ,  $P$ -asal altmodül ise  $PM \subseteq N$  ve  $rad_M(N) = N$  olur. Tersine, kabul edelim ki  $PM \subseteq N$  ve  $rad_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olsun.  $N \subseteq rad_M(N)$  olduğundan  $N \neq M$  dir.  $N \neq rad_M(N)$  olsun. Önerme 2.50'den  $N \leq L \not\subseteq rad_M(N)$  ve  $rad_M(N) = RE_M(L)$  olacak şekilde bir  $L \leq M$  vardır. Lemmadan önce yaptığımız gözlemden dolayı  $L$ 'yi  $rad_M(N)/L$  bir basit  $R$ -modül olacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda  $ann(rad_M(N)/L) = \mathfrak{M}$ , yani  $\mathfrak{M}rad_M(N) \subseteq L$  olur. Bir  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $rm \in E_M(L)$  olsun. Buna göre  $r^t m \in L$  olacak şekilde bir  $t$  pozitif tamsayısı bulunabilir. Eğer  $r \in R \setminus \mathfrak{M}$  ise o zaman  $rm \in L$  olur. Dolayısıyla  $r \in \mathfrak{M}$  kabul edelim.  $r \in \mathfrak{M} \setminus P$  ise  $rad_M(N)$  bir  $P$ -asal altmodül olduğundan  $m \in rad_M(N)$  ve böylece  $rm \in \mathfrak{M}rad_M(N) \subseteq L$  elde edilir. Son olarak  $r \in P$  ise  $PM \subseteq N \subseteq L$  olacağından tekrar  $rm \in L$  elde edilir. Dolayısıyla her durumda  $rm \in L$  olur. Buna göre  $L = RE_M(N)$  bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $N = rad_M(N)$  olmak zorundadır. Yani  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. ■

**Sonuç 2.52**  $(R, \mathfrak{M})$  bir yerel halka,  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir Noether  $R$ -modül olsun. Buna göre bir  $N \leq M$  için  $N + PM$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür ancak ve ancak  $rad_M(N + PM)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Eğer, ek olarak,  $R$  bir tamlık bölgesi ise o zaman  $N$  bir 0-asal altmodüldür ancak ve ancak  $rad_M(N)$  bir 0-asal altmodüldür.

**Kanıt.** Bir önceki lemmadan dolayı açıktır. ■

**Lemma 2.53** [31, §3. Önerme 13]  $S$ ,  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesi,  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Buna göre  $N^e = S^{-1}M$  ancak ve ancak  $S \cap (N : M) \neq \emptyset$ .

**Lemma 2.54** [20, Önerme 3.2]  $M$  bir Noether  $R$ -modül olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

(i)  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

(ii)  $R$ 'nin her maksimal  $\mathfrak{M}$  ideali için  $M_{\mathfrak{M}}$ , s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R_{\mathfrak{M}}$ -modüldür.

**Lemma 2.55** [21, Sonuç 2.3]  $S$ ,  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesi,  $M$  bir Noether  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Buna göre  $(rad_M(N))^e = rad_{S^{-1}M}(N^e)$  dir.

**Teorem 2.56**  $M$ , s.p.a.r. özelliğini sağlayan bir Noether  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Eğer  $rad_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü ise o zaman  $rad_M(N) = N + PM$  dir.

**Kanıt.** Kabul edelim ki  $rad_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olsun.  $K$ ,  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir asal altmodülü olsun. Bu durumda  $P = (rad_M(N) : M) \subseteq (K : M)$  olacağından  $N + PM \subseteq K$  olur. Dolayısıyla  $N + PM \subseteq rad_M(N)$  ve böylece  $rad_M(N + PM) = rad_M(N)$  elde edilir. Şimdi  $\mathfrak{M}$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olsun.  $P \not\subseteq \mathfrak{M}$  ise Lemma 2.26 ve Lemma 2.53'den,  $(rad_M(N))^e = M_{\mathfrak{M}} = (N + PM)^e$  olacağı açıktır (buradaki genişleme gösterimini  $R$ 'nin ve  $M$ 'nin  $\mathfrak{M}$ 'deki yerelleştirmeleri için kullanıyoruz). Dolayısıyla  $P \subseteq \mathfrak{M}$  olsun.  $rad_M(N + PM)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olduğundan  $(rad_M(N + PM))^e$  de  $M_{\mathfrak{M}}$ 'in bir  $P^e$ -asal altmodülü olur. Lemma 2.54 ve Lemma 2.55'den dolayı  $M_{\mathfrak{M}}$ , s.p.a.r. özelliğine sahiptir ve  $(rad_M(N + PM))^e = rad_{M_{\mathfrak{M}}}(N^e + P^e M_{\mathfrak{M}})$  elde edilir. Böylece Sonuç 2.52'den  $N^e + P^e M_{\mathfrak{M}} = rad_{M_{\mathfrak{M}}}(N^e + P^e M_{\mathfrak{M}})$  bulunur. Yani  $(N + PM)^e = (rad_M(N + PM))^e$  olur.  $\mathfrak{M}$  maksimal ideali keyfi seçildiğinden,  $N + PM = rad_M(N + PM)$  elde edilir. ■

**Lemma 2.57** [39, Lemma 1.3]  $P$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N$   $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olsun. Buna göre  $RE_M(N) = N + PM$  dir.

**Sonuç 2.58**  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir Noether  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$ 'nin her asal altmodülü  $M$  içinde asal radikale sahipse o zaman  $M$  asal altmodüller için radikal formülünü sağlar.

**Kanıt.**  $N$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olsun. Kabulümüzden dolayı  $rad_M(N)$  bir asal altmodüldür. Lemma 2.36'dan  $(rad_M(N) : M) = \sqrt{(N : M)} = P$  olacağından  $rad_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Buna göre Teorem 2.56 ve Lemma 2.57'den dolayı  $rad_M(N) = N + PM = RE_M(N)$  elde edilir. ■

Biliyoruz ki bir değişmeli halka üzerindeki bir modülün radikal formülünü sağlaması, s.p.a.r. özelliğine sahip olmasını gerektirir. Fakat bunun tersinin doğru olduğunu her zaman söyleyemeyiz (bkz. [16] ve [20]). Yukarıdaki sonuç ile belli koşullar altında s.p.a.r. özelliğinin, sınırlı da olsa radikal formülünü gerektirdiği bir durumu görmüş olduk. Yine de, s.p.a.r. özelliğinin ne zaman radikal formülünü gerektireceği sorusuna henüz bir cevap verilememiştir.

## 2.5 S.p.a.r. Özelliğine Sahip Modüllerin Dik Toplamları

Bu bölüm boyunca  $R$  değişmeli ve birimli bir halkayı gösterecektir. Biliyoruz ki  $R$ , kendisi üzerindeki modül yapısı düşünüldüğünde bir  $R$ -modül olarak s.p.a.r. özelliğine sahiptir. Fakat [20, Teorem 4.1]'de de söylendiği gibi  $R \oplus R$  genelde  $R$ -modül olarak s.p.a.r. özelliğine sahip olmak zorunda değildir. Yani s.p.a.r. özelliği dik toplamlarda korunan bir özellik değildir. Bu bölümde s.p.a.r. özelliğine sahip  $M'$  ve  $M''$  gibi iki  $R$ -modül için  $M' \oplus M''$  dik toplamının s.p.a.r. özelliğine sahip olduğu durumlardan bazılarını inceleyeceğiz.

**Teorem 2.59**  *$R$  bir tamlık bölgesi ve  $M'$  ile  $M''$  birer  $R$ -modül olsun. Eğer  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R$ -modül ve  $M''$  de  $R$ -modül olarak bölünebilir ise o zaman  $M' \oplus M''$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.*

**Kanıt.**  $M = M' \oplus M''$  ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun.  $\pi : M \rightarrow M'$  doğal izdüşüm dönüşümü olmak üzere  $N' = \pi(N)$  olsun. Buna göre  $N'$ ,  $M'$  'nün bir yarı-asal altmodülüdür. Bunu görmek için bir  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $r^n m \in N'$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $r^n m + d \in N$  olacak şekilde bir  $d \in M''$  vardır.  $r = 0$  ise işimiz tamam. Bu yüzden  $r \neq 0$  alalım.  $M''$  bölünebilir  $R$ -modül olduğundan  $d = r^n w$  olacak şekilde bir  $w \in M''$  elemanı bulunabilir. Böylece  $r^n(m + w) \in N$  ve buradan da  $rm + rw \in N$  elde edilir. Dolayısıyla  $rm \in N'$  olur.

Şimdi  $m' \in M'$  ve  $m'' \in M''$  olmak üzere  $m' + m'' \in \text{rad}_M(N)$  olsun. Açık ki  $N \leq N' \oplus M''$ . Ayrıca  $M'$ 'nün her asal  $\mathfrak{P}$  altmodülü için  $\mathfrak{P} \oplus M''$  de  $M$ 'nin bir asal altmodülüdür. Dolayısıyla  $m' \in \text{rad}_{M'}(N')$  olur.  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip olduğundan  $m' \in N'$  elde edilir. Böylece  $m' + y \in N$  olacak şekilde bir  $y \in M''$  bulunabilir.  $(m' + y) + (m'' - y) = m' + m'' \in \text{rad}_M(N)$  olduğundan  $m'' - y \in \text{rad}_M(N)$  elde edilir. Kabul edelim ki  $T/N$ ,  $M/N$ 'nin torsion  $R$ -altmodülü olsun. Buna göre  $T = M$  ya da  $T$ ,  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir asal altmodülüdür. Her durumda  $m'' - y \in T$  olur. Dolayısıyla  $c(m'' - y) \in N$  olacak şekilde bir  $0 \neq c \in R$  vardır. Öte yandan,  $M''$  bölünebilir olduğundan,  $cz = m'' - y$  olacak şekilde bir  $z \in M''$  vardır. Buna göre  $c^2 z = c(m'' - y) \in N$  ve buradan da  $m'' - y = cz \in N$  elde edilir. Böylece  $m' + m'' = (m' + y) + (m'' - y) \in N$  olur. Yani  $N = \text{rad}_M(N)$  dir. ■

Pusat-Yılmaz ve Smith [41]'de genelleştirilmiş bölünebilir modülleri tanımlamış ve bu modüllerin dik toplamlarının radikal formülünü sağlaması üzerine çalışmışlardır.

**Tanım 2.60**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M = \sum_{i \in I} M_i$  öyle ki her  $i \in I$  için  $P_i M_i = 0$  ve  $M_i$  bir (torsion) bölünebilir  $R/P_i$ -modül olacak şekilde  $R$ 'nin bir  $P_i$  asal ideali bulunabiliyor ise o zaman  $M$ 'ye bir genelleştirilmiş (torsion) bölünebilir  $R$ -modül denir.

[41]'de,  $M'$  radikal formülünü sağlayan bir  $R$ -modül ve  $M''$  bir genelleştirilmiş torsion bölünebilir  $R$ -modül olmak üzere  $M' \oplus M''$  modülünün radikal formülünü sağladığı gösterilmiştir. Bu teoremi s.p.a.r. özelliği için de vermek mümkündür. Yani  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R$ -modül ve  $M''$  bir genelleştirilmiş torsion bölünebilir  $R$ -modül ise  $M = M' \oplus M''$  toplamı da s.p.a.r. özelliğine sahiptir. Bunu görebilmek için  $M$ 'nin bir yarı-asal  $N$  altmodülünü alalım.  $L \leq M$ ,  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için, torsion bölünebilir  $(R/P)$ -modül ise  $L \leq N$  olur. Çünkü, bir  $0 \neq l \in L$  alırsak, kabulümüzden dolayı,  $rl = 0$  ve  $l = rl'$  olacak şekilde  $r \in R \setminus P$  ve  $l' \in L$  bulunabilir ve bu durumda da  $r^2 l' \in N$  olacağından  $l = rl' \in N$  elde edilir. Buna göre  $M'' \leq N$  olur.  $M/M'' \cong M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip olduğundan  $N/M'' = \text{rad}_{M/M''}(N/M'') = \text{rad}_M(N)/M''$  ve böylece  $N = \text{rad}_M(N)$  elde edilir. Dolayısıyla  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir. Bu nedenle  $M''$  üzerindeki torsion kabulünü kaldırarak incelememize devam edeceğiz. Fakat bundan önce aşağıdaki iki lemmayı verelim.

**Lemma 2.61**  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $I$  bir indis kümesi ve her  $i \in I$  için  $P_i$   $R$ 'nin bir asal ideali ve  $L_i \leq M$  bir bölünebilir  $(R/P_i)$ -modül olmak üzere  $M = \sum_{i \in I} L_i$  olsun. Eğer  $N$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü ise  $(N : M) = P_j$  olacak şekilde  $j \in I$  vardır.

**Kanıt.**  $(N : M) = P$  alalım.  $N \neq M$  olduğundan  $L_j \not\subseteq N$  olacak şekilde  $j \in I$  vardır. Bu durumda  $P_j L_j = 0 \subseteq N$  olduğundan  $P_j \subseteq P$  bulunur. Eğer  $P_j \neq P$  ise bir  $r \in P \setminus P_j$  elemanı vardır. Fakat bu durumda  $L_j = r L_j \subseteq N$  elde edilir ki bu da bir çelişkidir. ■

**Lemma 2.62**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N, L \leq M$  olsun.  $L$  bir genelleştirilmiş bölünebilir  $R$ -modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ise o zaman  $N + L = M$  veya  $N + L$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür.

**Kanıt.**  $I$  bir indis kümesi, her  $i \in I$  için  $P_i$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $L_i \leq M$  öyle ki  $P_i L_i = 0$  ve  $L_i$  bir bölünebilir  $R/P_i$ -modül olmak üzere  $L = \sum_{i \in I} L_i$  olsun. Bir  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $r^n m \in N + L$  olsun. Buna göre  $r^n m \in N + L_{i_1} + \dots + L_{i_k}$  olacak şekilde

$I$ 'nın bir sonlu  $\{i_1, \dots, i_k\}$  altkümesi vardır. Uygun  $x_0 \in N$  ve  $x_j \in L_{i_j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) elemanları için

$$r^n m = x_0 + x_1 + \dots + x_k$$

yazabiliriz.  $k$  üzerine tümevarım uygulayalım.  $k = 0$  ise gösterilecek bir şey yoktur.  $k \geq 1$  olsun. Eğer  $r \in P_{i_k}$  ise  $rx_k = 0$  olacağından

$$r^{n+1}m = rx_0 + rx_1 + \dots + rx_{k-1}$$

olur. Tümevarım hipotezimizden dolayı  $rm \in N + L$  elde edilir. Kabul edelim ki  $r \in R \setminus P_{i_k}$  olsun. Buna göre  $r^n \in R \setminus P_{i_k}$  ve dolayısıyla  $L_{i_k} = r^n L_{i_k}$  elde edilir.  $x_k = r^n y$  olacak şekilde  $y \in L_{i_k}$  vardır. Bu durumda

$$r^n(m - y) = x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1}$$

olur. Tümevarım hipotezimizden dolayı  $r(m - y) \in N + L$  dir. Fakat  $y \in L$  olacağından  $rm \in N + L$  elde edilir. ■

**Teorem 2.63** *Bir  $R$ -modül  $M$  için,  $M' \leq M$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R$ -modül,  $I$  bir indis kümesi ve her  $i \in I$  için  $P_i$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $L_i \leq M$  bir bölünebilir  $(R/P_i)$ -modül olmak üzere  $M = M' \oplus (\sum_{i \in I} L_i)$  olsun. Eğer her  $i \in I$  için  $\text{ann}(M') \not\subseteq P_i$  ise  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.*

**Kanıt.**  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için, herhangi çokluktaki bölünebilir  $(R/P)$ -modüllerin toplamı da yine bölünebilir  $(R/P)$ -modül olacağından  $P_i$  asal ideallerini birbirinden farklı seçebiliriz.

$M'' = \sum_{i \in I} L_i$  diyelim.  $N, M'$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ve  $m \in \text{rad}_M(N)$  olsun.  $m \in N$  olduğunu göstererek kanıtı tamamlayacağız. Önce  $m \in N + M''$  olduğunu gösterelim.  $N + M'' = M$  ise durum açıktır. Kabul edelim ki  $N + M'' \neq M$  olsun. Yukarıdaki lemmadan dolayı  $N + M''$   $M'$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür.  $M/M'' \cong M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip olduğundan

$$m + M'' \in \text{rad}_{M/M''}((N + M'')/M'') = (N + M'')/M''$$

ve buradan da  $m \in N + M''$  elde edilir. Dolayısıyla uygun  $n \in N$  ve  $x \in M''$  için  $m = n + x$  yazabiliriz. Buna göre  $x = m - n \in \text{rad}_M(N) \cap M''$  olur. Kolayca görülebilir ki her  $i \in I$  için  $(N + L_i)/N$  bir bölünebilir  $(R/P_i)$ -modüldür. Buna göre

her  $i \in I$  için  $L_i \not\subseteq N$  ise  $(N + L_i)/N$ , sıfırlayıcı  $P_i$  olan bir asal  $R$ -modül olur. Eğer her  $i \in I$  için  $L_i \subseteq N$  ise  $M'' \subseteq N$  olur. Bu durumda  $x \in N$  ve buradan da  $m \in N$  elde ederiz. Kabul edelim ki  $L_j \not\subseteq N$  olacak şekildeki  $j$ 'lerin kümesi boştan farklı olsun. Bu kümeyi  $J$  ile gösterelim. Buna göre, Lemma 2.1 den dolayı,  $(N + M'')/N = \bigoplus_{j \in J} (N + L_j)/N$  yazılabilir. Dolayısıyla  $M''/(N \cap M'')$  de asal  $R$ -modüllerin dik toplamı şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu toplamdaki terimler bölünebilir  $(R/P_i)$ -modüllerdir.  $K, M''$ 'nin  $N \cap M''$  altmodülünü içeren bir asal altmodülü olsun. Lemma 2.61'den dolayı  $(K : M'') = P_j$  olacak şekilde  $j \in J$  vardır. Öte yandan  $M' \oplus K, M'$ 'nin bir  $P_j$ -asal altmodülüdür.  $\text{ann}(M')N = (M'' : M)N \subseteq M'' \cap N \subseteq M' \oplus K$  ve  $\text{ann}(M') \not\subseteq P_j$  olduğundan  $N \leq M' \oplus K$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $x \in M' \oplus K$  elde edilir. Böylece  $x \in K$  olur.  $K, N \cap M''$  altmodülünü içeren keyfi bir asal altmodül olarak seçildiğinden  $x \in \text{rad}_{M''}(N \cap M'')$  elde edilir. Fakat  $M''/(N \cap M'')$ , asal  $R$ -modüllerin dik toplamı olarak yazılabildiğinden, sıfır altmodülü  $M''/(N \cap M'')$  içinde radikaldir. Yani  $\text{rad}_{M''}(N \cap M'') = N \cap M''$  olur. Dolayısıyla  $x \in N \cap M''$  ve böylece  $m \in N$  elde edilir. ■

**Sonuç 2.64** Her genelleştirilmiş bölünebilir modül s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

$M$  bir  $R$ -modül olsun.  $\mathfrak{M}, R$ 'nin bir maksimal ideali olmak üzere eğer her  $m \in M$  ve  $a \in \mathfrak{M}$  için  $ca^nm = 0$  olacak şekilde  $a$  ve  $m$ 'ye bağlı bir  $c \in R \setminus \mathfrak{M}$  ve  $n \in \mathbb{N}$  bulunabiliyorsa  $M$ 'ye bir  $\mathfrak{M}$ -özel modül (special module) denir. Eğer  $M, R$ 'nin her  $\mathfrak{M}$  maksimal ideali için  $\mathfrak{M}$ -özel ise o zaman  $M$ 'ye özel  $R$ -modül denir (bkz. [41]).

**Lemma 2.65** [41, Lemma 4.4]  $M'$  ve  $M''$  iki  $R$ -modül ve  $M = M' \oplus M''$  olsun. Eğer  $M''$  bir yarı-basit  $R$ -modül ise her  $N \leq M'$  için  $\text{rad}_M(N) = \text{rad}_{M'}(N)$  dir.

**Lemma 2.66** [41, Lemma 4.7]  $\mathfrak{M}, R$ 'nin bir maksimal ideali,  $M$  bir  $R$ -modül,  $N \leq M$  ve  $L \leq M$  bir  $\mathfrak{M}$ -özel modül olsun. Bir  $r \in R$  ve  $m \in M$  için  $r^nm \in N + \mathfrak{M}L$  olacak şekilde  $n$  pozitif tamsayısı varsa o zaman  $crm \in RE_M(N)$  olacak şekilde bir  $c \in R \setminus \mathfrak{M}$  vardır.

**Lemma 2.67**  $M'$  ve  $M''$  birer  $R$ -modül ve  $M = M' \oplus M''$  olsun. Eğer  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R$ -modül ve  $M''$  bir yarı-basit  $R$ -modül ise o zaman  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun.  $\pi : M \rightarrow M''$  doğal izdüşüm homomorfizması olsun. Buna göre  $M'' = \pi(N) \oplus N''$  olacak şekilde  $N'' \leq M''$  vardır. Buradan  $M = N + (M' \oplus N'')$  yazabiliriz.  $T = M' \oplus N''$  ve  $L = N \cap T$  olsun.  $l \in L$  alalım.  $l = x + y$  olacak şekilde  $x \in M'$  ve  $y \in N''$  vardır. Fakat  $y \in \pi(N) \cap N'' = 0$  olacağından  $l = x \in M'$  elde edilir. Yani  $L \subseteq M'$  olur.  $L, T$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olduğundan aynı zamanda  $M'$  'nin de bir yarı-asal altmodülü olur.  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip olduğundan  $L, M'$  içinde radikaldir. Buna göre Lemma 2.65'den

$$rad_T(L) = rad_{M'}(L) = L$$

elde edilir. Yani  $L, T$  içinde de radikaldir.  $M/N \cong T/L$  olduğundan  $N$  de  $M$  içinde radikal olur. ■

**Teorem 2.68**  $M'$  ve  $M''$  birer  $R$ -modül ve  $M = M' \oplus M''$  olsun. Eğer  $M'$  s.p.a.r. özelliğine sahip bir  $R$ -modül ve  $M''$  bir özel  $R$ -modül ise o zaman  $M$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.

**Kanıt.**  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü ve  $m \in rad_M(N)$  olsun. Kabul edelim ki  $m \notin N$  olsun. O zaman  $(N : m), R$ 'nin bir öz idealidir ve dolayısıyla bir  $\mathfrak{M}$  maksimal ideali tarafından içerilir. Dikkat edilirse  $M/\mathfrak{M}M'' \cong M' \oplus (M''/\mathfrak{M}M'')$  olduğundan bir önceki lemmadan dolayı  $M/\mathfrak{M}M''$  s.p.a.r. özelliğine sahiptir.  $K = \{x \in M : \exists c \in R \setminus \mathfrak{M}, cx \in N + \mathfrak{M}M''\}$  olsun. Buna göre  $K \leq M$  dir. Eğer  $K = M$  ise  $rad_{M/\mathfrak{M}M''}((N + \mathfrak{M}M'')/\mathfrak{M}M'') \subseteq K/\mathfrak{M}M''$  olacağı açıktır. Dolayısıyla  $K \neq M$  olsun. Bu durumda  $K, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür. Bunu görmek için  $r \in R$  ve  $x \in M$  olmak üzere  $r^n x \in K$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) olduğunu kabul edelim. Buna göre  $cr^n x \in N + \mathfrak{M}M''$  olacak şekilde  $c \in R \setminus \mathfrak{M}$  vardır. Lemma 2.66'dan,  $dcrx \in N$  olacak şekilde  $d \in R \setminus \mathfrak{M}$  bulunabilir. Dolayısıyla  $rx \in K$  olur. Yani  $K, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülüdür. Bu durumda

$$m + \mathfrak{M}M'' \in rad_{M/\mathfrak{M}M''}((N + \mathfrak{M}M'')/\mathfrak{M}M'') \subseteq rad_{M/\mathfrak{M}M''}(K/\mathfrak{M}M'') = K/\mathfrak{M}M''$$

elde edilir. Böylece uygun bir  $c' \in R \setminus \mathfrak{M}$  için  $c'm \in N + \mathfrak{M}M''$  yazılabilir. Tekrar Lemma 2.66'dan  $d'c'm \in N$  olacak şekilde  $d' \in R \setminus \mathfrak{M}$  bulunabilir. Fakat bu durumda  $d'c' \in (N : m) \subseteq \mathfrak{M}$  elde edilir ki bu da bir çelişkidir. ■

[41, Sonuç 3.4]'e göre bir değişmeli halka üzerindeki her yarı-Artin modül bir özel modüldür. Dolayısıyla yukarıdaki teorem sayesinde  $M'$  s.p.a.r. özelliğini sağlayan bir  $R$ -modül ve  $M''$  bir yarı-Artin  $R$ -modül ise  $M' \oplus M''$  de s.p.a.r. özelliğine sahip olur.

### 3 RADİKAL FORMÜLÜ VE REPRESENTABLE MODÜLLER

Değişmeli halkalar üzerindeki modüllerin radikal formülünü sağlaması problemi bugüne kadar bir çok yazar tarafından çalışılmış bir problemdir (örn. bkz. [11], [16], [21], [23], [32] ve [41]). Birinci bölümde her sol ilkel faktörü Artin olan halkalar üzerindeki Artin modüllerin s.p.a.r. özelliğine sahip olduğunu söylemiştik. Dolayısıyla değişmeli halkalar üzerindeki Artin modüller s.p.a.r. özelliğine sahiptir. Fakat daha genel olarak değişmeli halkalar üzerindeki Artin modüllerin radikal formülünü de sağladığı [32]'de gösterilmiştir. Ayrıca [32]'de bu sonuç biraz daha genelleştirilerek, her asal ideali maksimal olan bir değişmeli halkanın (halka olarak) radikal formülünü sağladığı söylenmiştir. Yılmaz ve Smith [41]'de bu sonucu biraz daha ileri götürerek Krull boyutu 1 olan halkaların üzerindeki her torsion modülün radikal formülünü sağladığını göstermişlerdir. Ayrıca [41]'de özel modül kavramı ortaya atılarak bu modüllerin radikal formülünü sağlayan modüller oldukları gösterilmiş ve böylece de radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfı, Artin modülleri de içine alan özel modüllerin sınıfı ile genişletilmiştir. Biz de bu bölümde, radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfını, Artin modülleri de içine alan (fakat özel modülleri içermeyen) ve Artin modüllerin sınıfından çok daha büyük olan bir modül sınıfı ile genişletmeye devam edeceğiz. Bu modül sınıfı representable modüllerin sınıfıdır.

Bu bölüm boyunca  $R$  değişmeli ve birimli bir halkayı gösterecektir. Sonuçlarımızı vermeden önce representable modül kavramına kabaca değinelim:

$S$  sıfırdan farklı bir  $R$ -modül olsun. Eğer her  $r \in R$  için  $rS = S$  veya bir  $n$  pozitif tamsayısı için  $r^n S = 0$  ise  $S$ 'ye bir *sekonder* (*secondary*)  $R$ -modül denir. Kolayca görülebilir ki  $S$  bir sekonder modül ise  $P = \sqrt{\text{ann}_R(S)}$ ,  $R$ 'nin bir asal idealidir. Bu durumda  $S$ 'ye bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül denir. Kolayca görülebilir ki,  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için, herhangi iki  $P$ -sekonder modülün toplamı yine  $P$ -sekonderdir.

$M$  bir  $R$ -modül olsun.  $S_1, \dots, S_n$  birer sekonder modül olmak üzere eğer

$$M = S_1 + \dots + S_n$$

ise  $M$ 'nin bu şekildeki yazılışına  $M$ 'nin bir *sekonder gösterimi* denir.  $M$ 'nin bu şekildeki bir gösterimi için  $P_i = \sqrt{\text{ann}_R(S_i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) olmak üzere eğer

(i)  $P_1, \dots, P_n$  idealleri birbirinden farklı ve

(ii) her  $i = 1, \dots, n$  için  $S_i \not\subseteq \sum_{j=1, j \neq i}^n S_j$

ise o zaman  $M = S_1 + \dots + S_n$  sekonder gösterimine bir *minimal* sekonder gösterim denir. Dikkat edilirse her sekonder gösterim bir minimal gösterime indirgenebilir. Sekonder gösterime sahip olan modüllere literatürde *representable* modüller adı verilmektedir.

$M$  bir representable  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin bir

$$M = S_1 + \dots + S_n \quad (\sqrt{\text{ann}(S_i)} = P_i, \quad i = 1, \dots, n)$$

minimal sekonder gösterimini alalım. Buna göre  $n$  pozitif tamsayısı ile  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesi  $M$ 'nin minimal sekonder gösterimlerinin seçiminden bağımsızdır. Bu kümeyi  $\text{Att}_R(M)$  ile göstereceğiz. Kolayca görülebilir ki eğer bir  $M$  representable  $R$ -modülü için  $G \lesssim M$  ise o zaman  $M/G$  de bir representable modüldür ve  $\text{Att}_R(M/G) \subseteq \text{Att}_R(M)$  dir.

Sekonder gösterimler, I. G. Macdonald tarafından, asıl ayrışım kavramının duali olarak geliştirilmiştir (bkz. [18]). Değişmeli halkalar üzerindeki her Noether modülün her öz altmodülünün bir asıl ayrışımına sahip olduğunu daha önce söylemiştik. Bunun duali olarak, değişmeli halkalar üzerindeki her Artin modülün representable olduğunu söyleyebiliriz (bkz. [22, Teorem 6.11]). Fakat daha sonra göreceğiz ki representable modüllerin sınıfı Artin modüllerin sınıfından daha geniştir.

**Lemma 3.1**  $P, R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $M$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül olsun.

Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her  $N \lesssim M$  için  $(N : M) \subseteq P$  dir.

(ii)  $PM \subseteq RE_M(0)$ .

(iii) Her  $N \lesssim M$  için  $RE_M(N) \neq M$  ise  $(RE_M(N) : M) = P$  dir.

**Kanıt.** (i) Bir  $r \in R$  için  $rM \subseteq N$  olsun.  $N \neq M$  olduğundan  $rM \neq M$  dir. Dolayısıyla  $r^k M = 0$  olacak şekilde bir  $k$  pozitif tamsayısı vardır. Böylece  $r \in \sqrt{\text{ann}(M)} = P$  olur.

(ii)  $p \in P$  ve  $m \in M$  olsun.  $M, P$ -sekonder olduğundan  $p^n m = 0$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla  $pm \in RE_M(0)$  olur. Yani  $PM \subseteq RE_M(0)$  dır.

(iii) Bir  $N \lesssim M$  için  $RE_M(N) \neq M$  olsun. (i)'den dolayı  $(RE_M(N) : M) \subseteq P$  olur. Öte yandan (ii)'den dolayı da  $P \subseteq (RE_M(0) : M) \subseteq (RE_M(N) : M)$  elde edilir. Yani  $(RE_M(N) : M) = P$  dir. ■

**Lemma 3.2**  $P, R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $M$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül olsun. Buna göre  $M$ 'nin her yarı-asal altmodülü  $P$ -asaldır.

**Kanıt.**  $N, M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olsun.  $RE_M(N) = N$  olacağından, Lemma 3.1 (iii)'den,  $(N : M) = P$  bulunur. Bir  $r \in R \setminus P$  ve  $m \in M$  için  $rm \in N$  olsun. Buna göre  $rM = M$  dir. Dolayısıyla  $m = rm'$  olacak şekilde bir  $m' \in M$  bulunabilir. Böylece  $r^2m' = rm \in N$  olur.  $N$  yarı-asal olduğundan  $m = rm' \in N$  elde edilir. Dolayısıyla  $N, M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. ■

**Lemma 3.3**  $P, R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $M$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül olsun. Buna göre  $M$ 'nin her  $N$  altmodülü için ya  $rad_M(N) = M$  ya da

$$rad_M(N) = \{m \in M : \exists c \in R \setminus P, cm \in N + PM\}.$$

**Kanıt.**  $N \leq M$  ve  $rad_M(N) \neq M$  olsun.  $rad_M(N), M$ 'nin bir radikal (ve dolayısıyla da bir yarı-asal) altmodülü olduğundan Lemma 3.2 gereğince  $rad_M(N), M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olur. [25, Lemma 1.6 ve Önerme 1.7]'den dolayı  $\{m \in M : \exists c \in R \setminus P, cm \in N + PM\}$  kümesi  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren en küçük  $P$ -asal altmodülüdür. Buna göre istenilen eşitlik elde edilir. ■

**Lemma 3.4** Her sekonder  $R$ -modül radikal formülünü sağlar.

**Kanıt.**  $P, R$ 'nin bir asal ideali olmak üzere  $M$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül ve  $N \lesssim M$  olsun.  $RE_M(N) \subseteq rad_M(N)$  olduğundan eğer  $RE_M(N) = M$  ise o zaman  $RE_M(N) = rad_M(N)$  olur. Dolayısıyla kabul edelim ki  $RE_M(N) \neq M$  olsun. Buna göre Lemma 3.1 (iii)'den  $(RE_M(N) : M) = P$  olur.  $RE_M(N)$ 'nin  $M$ 'nin bir asal altmodülü olduğu göstereceğiz. Bu taktirde  $N \subseteq RE_M(N)$  olduğundan  $rad_M(N) \subseteq RE_M(N)$  elde edilir ki bu da  $RE_M(N) = rad_M(N)$  olması anlamına gelir.  $r \in R \setminus P$  ve  $m \in M$  için  $rm \in RE_M(N)$  olsun. Buna göre  $rm = r_1m_1 + \dots + r_km_k$  ve  $r_i^n m_i \in N$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olacak şekilde  $n, k \in \mathbb{N}, r_i \in R$  ve  $m_i \in M$  ( $1 \leq i \leq k$ ) elemanları bulunabilir.  $r \in R \setminus P$  olduğundan  $rM = M$  dir. Dolayısıyla her  $i = 1, \dots, k$  için  $rm'_i = m_i$  olacak şekilde  $m'_1, \dots, m'_k \in M$  elemanları vardır.  $x = m - r_1m'_1 - \dots - r_km'_k$  diyelim. Buna

göre  $rx = 0$  olur. Ayrıca uygun bir  $x' \in M$  için  $x = rx'$  yazabiliriz. Bu taktirde  $r^2x' = rx = 0$  olacağından  $x = rx' \in RE_M(0) \subseteq RE_M(N)$  elde edilir. Diğer taraftan her  $i = 1, \dots, k$  için  $m'_i = rm''_i$  olacak şekilde  $m''_1, \dots, m''_k \in M$  elemanları bulunabilir. Böylece  $r_i^n r^2 m''_i = r_i^n r m'_i = r_i^n m_i \in N$  ve buradan da  $r_i m'_i = r_i r m''_i \in RE_M(N)$  elde edilir. Dolayısıyla  $m = r_1 m'_1 + \dots + r_k m'_k + x \in RE_M(N)$  bulunur. Yani  $RE_M(N)$ ,  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Bu ise daha önce belirtildiği gibi kanıtı tamamlar. ■

**Örnek 3.5**  $R$ , maksimal olmayan bir  $P$  asal idealine sahip bir halka ve  $E$ ,  $R/P$ 'nin injektif zarfı olsun. Bu durumda  $M = \text{ann}_E(P)$ ,  $R$  üzerinde bir sekonder modül olur ([35, Lemma 2.1]). Fakat  $M$  özel  $R$ -modül değildir. (Dolayısıyla  $M$ , Artin  $R$ -modül de değildir). Bunu görebilmek için  $P$ 'yi içeren  $R$ 'nin bir maksimal  $\mathfrak{M}$  idealini alalım.  $r \in \mathfrak{M} \setminus P$  olsun.  $R/P \subseteq M$  olduğundan  $1 + P \in M$  dir. Eğer  $cr^n(1 + P) = 0$  olacak şekilde  $c \in R \setminus \mathfrak{M}$  ve  $n \in \mathbb{N}$  varsa bu durumda  $cr^n \in P$  olur. Bu ise imkansızdır. Dolayısıyla  $M$  bir özel  $R$ -modül değildir, fakat bir sekonder  $R$ -modüldür.

**Önerme 3.6**  $M$  bir  $R$ -modül,  $M_1 \leq M$ , radikal formülünü sağlayan bir  $R$ -modül ve  $M_2 \leq M$ ,  $R$ 'nin bir  $P$  asal ideali için bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül olmak üzere  $M = M_1 + M_2$  olsun. Eğer  $\text{ann}_R(M_1) \not\subseteq P$  ise o zaman  $M$  radikal formülünü sağlar.

**Kanıt.**  $M/M_2$ ,  $M_1$ 'in bir bölümüne izomorf olacağından, kabulümüz gereği,  $M/M_2$  radikal formülünü sağlar.  $N \leq M$  ve  $m \in \text{rad}_M(N)$  olsun. Buna göre

$$m + M_2 \in \text{rad}_{M/M_2} \left( \frac{N + M_2}{M_2} \right) = RE_{M/M_2} \left( \frac{N + M_2}{M_2} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla  $m + M_2 = r_1(m_1 + M_2) + \dots + r_k(m_k + M_2)$  ve  $r_i^t(m_i + M_2) \in (N + M_2)/M_2$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olacak şekilde  $t, k \in \mathbb{N}$ ,  $r_1, \dots, r_k \in R$  ve  $m_1, \dots, m_k \in M$  elemanları bulunabilir. Uygun  $u_1, \dots, u_k \in M_2$  ve  $n_1, \dots, n_k \in N$  elemanları için  $r_i^t m_i = n_i + u_i$  yazalım. Bir  $1 \leq j \leq k$  için kabul edelim ki  $r_j \in P$  olsun.  $M_2$  bir  $P$ -sekonder modül olduğundan  $r_j^s M_2 = 0$  olacak şekilde bir  $s$  pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda  $r_j^{t+s} m_j = r_j^s n_j \in N$ , yani  $r_j m_j \in RE_M(N)$  elde edilir. Öte yandan, eğer  $r_j \in R \setminus P$  ise o zaman  $r_j M_2 = M_2$  olur. Buna göre  $r_j^t u'_j = u_j$  olacak şekilde bir  $u'_j \in M_2$  bulunabilir. Buradan ise  $r_j^t(m_j - u'_j) = n_j \in N$ , yani  $r_j(m_j - u'_j) \in RE_M(N)$  elde edilir.  $J = \{j : 1 \leq j \leq k \text{ ve } r_j \in P\}$  ve  $I = \{1, \dots, k\} \setminus J$  alalım. Bu taktirde uygun bir  $x \in M_2$  için  $m = \sum_{j \in J} r_j m_j + \sum_{i \in I} r_i(m_i - u'_i) + x$  yazabiliriz.  $e = \sum_{j \in J} r_j m_j + \sum_{i \in I} r_i(m_i - u'_i)$  olsun.  $e \in RE_M(N)$  olduğundan  $x \in RE_M(N)$

olduğunu gösterirsek  $m \in RE_M(N)$  elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. Dikkat edilirse  $x = m - e \in rad_M(N) \cap M_2$  dir.  $x \in RE_{M_2}(N \cap M_2)$  olduğunu göstereceğiz. Eğer  $RE_{M_2}(N \cap M_2) = M_2$  ise işimiz tamam. Bu nedenle  $RE_{M_2}(N \cap M_2) \neq M_2$  olsun. Lemma 3.4'ün kanıtından  $RE_{M_2}(N \cap M_2)$ ,  $M_2$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür. Ayrıca  $ann_R(M_1) \not\subseteq P$  olduğundan  $(M_2 : M) \not\subseteq P$  olur. Buna göre Lemma 2.35'den dolayı  $K \cap M_2 = RE_{M_2}(N \cap M_2)$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü  $K$  bulunabilir.  $K \supseteq N \cap M_2 \supseteq (M_2 : M)N$  ve  $(M_2 : M) \not\subseteq P$  olduğundan  $K \supseteq N$  elde edilir. Dolayısıyla  $x \in rad_M(N) \subseteq K$  olacağından  $x \in K \cap M_2 = RE_{M_2}(N \cap M_2)$  bulunur. Fakat  $RE_{M_2}(N \cap M_2) \subseteq RE_M(N \cap M_2) \subseteq RE_M(N)$  olduğundan  $x \in RE_M(N)$  elde edilir. ■

**Teorem 3.7**  $M$  bir  $R$ -modül,  $M_1 \leq M$ , radikal formülünü sağlayan bir  $R$ -modül ve  $M_2 \leq M$ , bir representable  $R$ -modül olmak üzere  $M = M_1 + M_2$  olsun. Eğer  $ann_R(M_1)$ ,  $Att_R(M_2)$  kümesinin hiçbir elemanı tarafından içerilmez ise o zaman  $M$  radikal formülünü sağlar. Özel olarak her representable modül radikal formülünü sağlar.

**Kanıt.** Kabul edelim ki

$$M_2 = L_1 + \cdots + L_k \quad (\text{her } i = 1, \dots, k \text{ için } L_i, P_i\text{-sekonder})$$

$M_2$ 'nin bir minimal sekonder gösterimi olsun.  $k$  üzerine tümevarım uygulayacağız.  $k = 1$  ise yukarıdaki önermeden dolayı işimiz tamam. Buna göre  $k > 1$  ve iddia,  $k$ 'dan küçük tüm pozitif tamsayılar için doğru olsun. Genelliği bozmadan,  $P_k$  idealini  $Att_R(M_2)$  kümesinin kapsama bağıntısına göre bir minimal elemanı olarak seçebiliriz. Kabul edelim ki  $ann_R(M_1 + L_1 + \cdots + L_{k-1}) \subseteq P_k$  olsun. Bu durumda  $ann_R(M_1) \cap ann_R(L_1) \cap \cdots \cap ann_R(L_{k-1}) \subseteq P_k$  olur. Buradan da  $\sqrt{ann_R(M_1)} \cap P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \subseteq P_k$  elde edilir. Her  $1 \leq j \leq k-1$  için  $P_j \not\subseteq P_k$  olacağından  $ann_R(M_1) \subseteq \sqrt{ann_R(M_1)} \subseteq P_k$  buluruz. Fakat durum kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla  $ann_R(M_1 + L_1 + \cdots + L_{k-1}) \not\subseteq P_k$  elde edilir. Diğer taraftan, tümevarım hipotezimizden dolayı  $M_1 + L_1 + \cdots + L_{k-1}$  radikal formülünü sağlar. Dolayısıyla bir önceki önerme gereğince  $M$  de radikal formülünü sağlar. Teoremin son kısmı için  $M_1 = 0$  almak yeterlidir. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki teorem ile representable modüllerin radikal formülünü sağladığını göstermiş olduk. Bu sayede Artin modüllerin radikal formülünü sağlamasını genellemiş ol-

manın yanısıra, başka bilinen representable modüller için de bir sonuç vermiş olduk. Bunlardan bazılarını şimdi değinelim.

$R$  bir Noether halka ve  $E$  bir injektif  $R$ -modül olsun. Buna göre;

(1)  $Q$ , sıfır altmodülü  $P$ -asıl altmodül olan bir  $R$ -modül ise o zaman  $Hom_R(Q, E)$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modül olur.

(2)  $M$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ise  $Hom_R(M, E)$ , bir representable  $R$ -modüldür. (bkz. [33, Alıştırma 7.2.10])

Örneğin,  $E$ 'yi sonsuz tane injektif  $R$ -modülün dik çarpımı olarak alırsak her sonlu üreteçli  $R$ -modül  $M$  için  $Hom_R(M, E)$ , Artin olmayan bir representable  $R$ -modül olur ve radikal formülünü sağlar.

Yukarıdaki (2) sonucunda özel olarak  $M = R$  alırsak değişmeli Noether halkalar üzerindeki her injektif modülün representable olduğunu görürüz. Daha genel olarak sıfır ideali asıl ayrışma sahip olan halkalar üzerindeki injektif modüller ile herhangi bir halka üzerindeki sıfır altmodülü asıl ayrışma sahip olan injektif modüller de representable olur. Burada kullanılan iki önemli sonuç vardır. Birincisi eğer  $Q$ ,  $R$ 'nin bir  $P$ -asıl ideali ise o zaman  $ann_E(Q)$  bir  $P$ -sekonder  $R$ -modüldür. İkincisi ise, Eğer  $0 = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$  olacak şekilde  $Q_1, \dots, Q_n$  idealleri varsa o zaman  $E = ann_E(Q_1) + \dots + ann_E(Q_n)$  yazılabilir. Aslında bu yaklaşımı, kontravaryant funktörleri ele alarak daha genel bir şekilde vermek mümkündür. Dikkat edilirse  $E$  bir injektif modül olduğunda  $Hom_R(\cdot, E)$ , bir kontravaryant toplamsal tam funktör olur. Ayrıca  $Q$  bir ideal ise  $ann_E(Q)$ ,  $R \rightarrow R/Q$  doğal epimorfizması tarafından doğurulan  $Hom_R(R/Q, E) \rightarrow Hom_R(R, E) \cong E$  homomorfizmasının görüntüsüne karşılık gelir. Buna göre  $T$ ,  $R$ -modüllerin sınıfı üzerinde tanımlı bir kontravaryant toplamsal tam funktör ve  $M$ , sıfır altmodülü asıl ayrışma sahip bir  $R$ -modül ise o zaman  $T(M)$  bir representable  $R$ -modül olur ve  $Att(T(M)) \subseteq Ass(M)$  dir (bkz. [35]).

Şimdi representable modüllerin altmodüllerinin radikallerini inceleyeceğiz. Bunun için önce aşağıdaki kısıtlanmış bir durum için verilen teoremi ifade ve ispat edelim.

**Teorem 3.8**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun. Kabul edelim ki  $M/N$  bir representable  $R$ -modül ve  $Att_R(M/N)$ 'nin her elemanı kapsama bağıntısına göre minimal olsun. Bu takdirde

$$rad_M(N) = \{m \in M : \exists c \in R \setminus \bigcup Att_R(M/N), cm \in N + \sqrt{(N : M)M}\}$$

olur.

**Kanıt.**  $rad_{M/N}(0) = rad_M(N)/N$  olacağından  $N = 0$  almakta sakınca yoktur.  $M = S_1 + \dots + S_k$ ,  $M$ 'nin bir minimal sekonder gösterimi olsun. Her  $i = 1, \dots, k$  için  $P_i = \sqrt{ann_R(S_i)}$  olsun. Kabul edelim ki  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin her elemanı minimal olsun.  $\sqrt{ann_R(M)} = \bigcap_{i=1}^k P_i$  olduğu açıktır.  $L = \{m \in M : \exists c \in R \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i, cm \in \left(\bigcap_{i=1}^k P_i\right)M\}$  olarak tanımlayalım.  $m \in L$  olsun. Bu durumda  $cm \in \left(\bigcap_{i=1}^k P_i\right)M = \sqrt{ann_R(M)}M$  olacak şekilde  $c \in R \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$  vardır. Öte yandan,  $c \notin \bigcup_{i=1}^k P_i$  olduğundan her  $i = 1, \dots, k$  için  $cS_i = S_i$  dir. Dolayısıyla  $cM = M$  olur. Buna göre uygun bir  $m' \in M$  için  $m = cm'$  yazılabilir. Buradan  $c^2m' = cm \in \sqrt{ann_R(M)}M \subseteq rad_M(0)$  elde edilir.  $rad_M(0)$ ,  $M$ 'nin bir yarı-asal altmodülü olduğundan  $m = cm' \in rad_M(0)$  elde edilir. Böylece  $L \subseteq rad_M(0)$  olur.  $L = M$  ise işimiz tamam. Kabul edelim ki  $L \neq M$  olsun. Bu durumda Önerme 2.25'den  $L$ ,  $M$ 'nin bir radikal altmodülü olur.  $rad_M(0) \subseteq rad_M(L) = L$  olacağından  $L = rad_M(0)$  elde edilir. ■

**Lemma 3.9**  $M$  bir representable  $R$ -modül ve  $M = S_1 + \dots + S_n$  (her  $i = 1, \dots, n$  için  $P_i = \sqrt{ann_R(S_i)}$ ),  $M$ 'nin bir minimal sekonder gösterimi olsun. Kabul edelim ki  $\{P_1, \dots, P_n\}$  kümesinin  $k$  tane minimal elemanı olsun. Genelliği bozmadan bu elemanları  $P_1, \dots, P_k$  olarak seçelim. Eğer  $G = S_1 + \dots + S_k$  denirse o zaman  $rad_G(0) = rad_M(0) \cap G$  olur.

**Kanıt.**  $Att_R(G) = \{P_1, \dots, P_k\}$  olduğu açıktır. Eğer  $G = M$  ise o zaman durum açıktır. Kabul edelim ki  $G \neq M$  olsun. Buna göre  $k < n$  olur.  $rad_G(0) \subseteq rad_M(0) \cap G$  olduğu bilindiğinden ters kapsamı göstermek yeterlidir. Bunun için  $x \in rad_M(0) \cap G$  ve  $G$ 'nin bir asal altmodülü  $H$  alalım.  $(H : G) = P$  olsun. Öncelikle  $(G : M) \not\subseteq P$  olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki  $(G : M) \subseteq P$  olsun.

$$\bigcap_{j=k+1}^n P_j = ann_R(S_{k+1} + \dots + S_n) \subseteq (S_1 + \dots + S_k : S_{k+1} + \dots + S_n) = (G : M) \subseteq P$$

olduğundan bir  $k+1 \leq j \leq n$  için  $P_j \subseteq P$  olur.  $r \in P$  olsun. Buna göre  $rG \subseteq H$  olur. Eğer  $r \in R \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$  ise o zaman her  $i = 1, \dots, k$  için  $rS_i = S_i$  olacağından  $G = rG \subseteq H$  elde edilir. Bu ise  $H$ 'nin  $G$ 'nin bir asal altmodülü olması ile çelişir. Dolayısıyla  $r \in \bigcup_{i=1}^k P_i$  olur.  $r \in P$  keyfi seçildiğinden  $P \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$  elde edilir. Buna göre PAT'den dolayı  $P \subseteq P_i$  olacak şekilde bir  $1 \leq i \leq k$  vardır. Fakat bu durumda  $P_j \subseteq P \subseteq P_i$  olur ki bu da  $P_i$ 'nin  $Att_R(M)$  kümesinin bir minimal elemanı olması ile çelişir. Dolayısıyla  $(G : M) \not\subseteq P$  dir. Lemma 2.35'den  $H = K \cap G$  olacak şekilde  $M$ 'nin

bir  $K$  asal altmodülü bulunabilir.  $x \in \text{rad}_M(0) \subseteq K$  olacağından  $x \in K \cap G = H$  elde edilir.  $H, G$ 'nin keyfi bir asal altmodülü alındığından  $x \in \text{rad}_G(0)$  olur. Dolayısıyla  $\text{rad}_G(0) = \text{rad}_M(0) \cap G$  elde edilir. ■

**Teorem 3.10** *Yukarıdaki lemmada kullanılan gösterimler ile*

$$\text{rad}_M(0) = \text{rad}_M(G) \cap \left\{ m \in M : \exists c \in R \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i, cm \in \left( \bigcap_{i=1}^k P_i \right) M \right\}$$

dir.

**Kanıt.**  $G = M$  ise Teorem 3.8'den dolayı işimiz tamam. Dolayısıyla  $G \neq M$  alalım.  $m \in \text{rad}_M(0)$  olsun.  $m = s_1 + \dots + s_n$  olacak şekilde  $s_i \in S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) elemanları vardır. Eğer  $\bigcap_{j=k+1}^n P_j \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$  ise o zaman PAT'den dolayı  $\bigcap_{j=k+1}^n P_j \subseteq P_i$  olacak şekilde bir  $1 \leq i \leq k$  vardır ve böylece uygun bir  $j = k+1, \dots, n$  için  $P_j \subseteq P_i$  olur. Fakat  $P_i, \text{Att}_R(M)$  kümesinin bir minimal elemanı ve  $P_j \neq P_i$  olduğundan bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\bigcap_{j=k+1}^n P_j \not\subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$  olur. Bir  $r \in \left( \bigcap_{j=k+1}^n P_j \right) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k P_i \right)$  seçelim. Bu durumda her  $j = k+1, \dots, n$  için  $r^t S_j = 0$  olacak şekilde  $t_j$  pozitif tamsayıları bulunabilir.  $t = \max\{t_{k+1}, \dots, t_n\}$  olsun. Buna göre bir önceki lemmadan,  $r^t m \in G \cap \text{rad}_M(0) = \text{rad}_G(0)$  dir. Teorem 3.8'den dolayı  $cr^t m \in \left( \bigcap_{i=1}^k P_i \right) G$  olacak şekilde bir  $c \in R \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k P_i \right)$  vardır. Böylece  $cr^t \in R \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k P_i \right)$  olacağından,

$$\text{rad}_M(0) \subseteq \text{rad}_M(G) \cap \left\{ m \in M : \exists c \in R \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i, cm \in \left( \bigcap_{i=1}^k P_i \right) M \right\}$$

elde edilir. Şimdi  $m \in \text{rad}_M(G)$  ve bir  $c \in R \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k P_i \right)$  için  $cm \in \left( \bigcap_{i=1}^k P_i \right) M$  olsun.  $K, M$ 'nin bir asal altmodülü ve  $(K : M) = P$  olsun. Eğer  $G \subseteq K$  ise  $m \in \text{rad}_M(G) \subseteq K$  olur. Kabul edelim ki  $G \not\subseteq K$  olsun.  $\sqrt{\text{ann}_R(M)} = \bigcap_{i=1}^k P_i$  olduğu açıktır. Böylece  $P = (K : M) \supseteq \sqrt{\text{ann}_R(M)} = \bigcap_{i=1}^k P_i$  elde edilir. Buradan  $cm \in \left( \bigcap_{i=1}^k P_i \right) M \subseteq PM \subseteq K$  bulunur. Kabul edelim ki  $c \in P$  olsun. Bu durumda  $cG \subseteq K$  ve  $G \not\subseteq K$  olduğundan  $cG \neq G$  elde edilir. Dolayısıyla  $c \in \bigcup_{i=1}^k P_i$  olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Buna göre  $c \in R \setminus P$  dir. Fakat  $cm \in K$  olduğundan  $m \in K$  olacaktır.  $K$  asal altmodülü keyfi olarak seçildiğinden  $m \in \text{rad}_M(0)$  elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki teoremden  $\text{rad}_M(0)$ 'ı tümevarımla elde etmek mümkündür:

Dikkat edilirse

$$\frac{M}{G} = \frac{G + S_{k+1}}{G} + \dots + \frac{G + S_n}{G}$$

$M/G$ 'nin bir minimal sekonder gösterimidir. Buna göre  $Att_R(M/G) = \{P_{k+1}, \dots, P_n\}$  olur.  $rad_M(G)/G = rad_{M/G}(0_{M/G})$  olacağından yukarıdaki teorem bu defa da  $rad_{M/G}(0_{M/G})$ 'yi bulmak için kullanılırsa  $rad_M(G)$  elde edilmiş olur. Fakat, eğer  $Att_R(M/G)$ 'nin her elemanı minimal değilse aynı işlem  $M$  yerine  $M/G$  için de tekrarlanır. Sonlu bir adım sonunda öyle bir bölüm modülüne ulaşılabilir ki bu bölüm modülünün eklentilerinin her biri minimal olur. Buradan sonra ise Teorem 3.8 kullanılarak işlem tamamlanır. Örneğin, çok basit olarak, yukarıdaki teoreme  $P_1 \subset \dots \subset P_n$  alınrsa bu taktirde  $S_0 = 0$  olmak üzere

$$rad_M(0) = \bigcap_{j=0}^{n-1} \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_{j+1}, cm \in \sum_{i=0}^j S_i + P_{j+1}M\}$$

eşitliği elde edilir. Gerçekten de yukarıdaki teoreme göre  $rad_M(0) = rad_M(S_1) \cap \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_1, cm \in P_1M\}$  olur.  $M/S_1 = (S_1 + S_2)/S_1 + \dots + (S_1 + S_n)/S_1$  olacağından yine aynı teoreme göre

$$rad_{M/S_1}(0) = rad_{M/S_1}(S_1 + S_2/S_1) \cap \{\bar{m} \in M/S_1 : \exists c \in R \setminus P_2, c\bar{m} \in P_2(M/S_1)\}$$

yazılabilir. Buradan ise  $rad_M(S_1) = rad_M(S_1 + S_2) \cap \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_2, cm \in S_1 + P_2M\}$  elde edilir. Benzer şekilde  $rad_M(S_1 + S_2) = rad_M(S_1 + S_2 + S_3) \cap \{m \in M : \exists c \in R \setminus P_3, cm \in S_1 + S_2 + P_3M\}$  bulunur. Bu şekilde devam edilirse yukarıdaki sonuç elde edilir.

## 4 DEDEKIND MODÜLLER

Bu bölümde Dedekind halkaların bir genellemesi olarak düşünülen Dedekind modül kavramı üzerine bazı sonuçlar vereceğiz. Dedekind modül kavramı ilk defa [30]'da Naoum ve Al-Alwan tarafından ortaya atılmış ve daha çok çarpımsal modüller üzerinde araştırılmıştır. 2005 yılında Alkan, Saraç ve Tıraş tarafından bu kavram, daha genel modüller için ele alınarak halka kuramında verilenlere benzer sonuçların Dedekind modüller için de verebileceğini göstermişlerdir. Biz de bu bölümde, Dedekind modüllerin ve Dedekind modüllere sahip halkaların karakterizasyonlarını mertebe kavramını da kullanarak vereceğiz. Fakat Dedekind modül kavramına giriş yapmadan önce değişmeli halka kuramından iyi bilinen integral kapalılık ve Dedekind halka kavramlarına kısaca değinelim.

İntegral eleman ve integral kapalılık kavramları, genelde, değişmeli halkalar üzerindeki değişmeli olmak zorunda olmayan cebirler (algebra) için verilebilmesine karşın, bu bölümdeki ilgiyi dağıtmamak amacıyla biz bu kavramı, özel bir durum için yani değişmeli bir tamlık bölgesinin kesirler cismi içinde kalan halkalar için tanımlayacağız.  $R$  bir değişmeli tamlık bölgesi ve  $\mathbb{K}$ ,  $R$ 'nin kesirler cismi olsun.  $T$ ,  $\mathbb{K}$ 'nın  $R$ 'yi içeren bir althalkası olsun. Eğer bir  $u \in T$  için  $p(u) = 0$  olacak şekilde bir monik  $p(X) \in R[X]$  polinomu varsa, yani uygun  $a_1, \dots, a_n \in R$  için  $u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$  yazılabiliyor ise o zaman " $u$ ,  $R$  üzerinde integraldir" denir. Eğer  $T$ 'nin her elemanı  $R$  üzerinde integral ise o zaman " $T$ ,  $R$  üzerinde integraldir" denir.  $T$ 'nin  $R$  üzerinde integral olan tüm elemanları  $T$ 'nin  $R$ 'yi içeren bir althalkasını oluşturur.  $T = \mathbb{K}$  alınırsa, bu althalkaya  $R$ 'nin *integral kapanışı* adı verilir ve genellikle  $\bar{R}$  şeklinde gösterilir. Eğer bir  $R$  tamlık bölgesi için  $R = \bar{R}$  ise  $R$  için "*integral olarak kapalıdır*" ifadesi kullanılır. Kolayca görülebilir ki  $\bar{R}$  integral olarak kapalıdır. Aslında  $\bar{R}$ ,  $\mathbb{K}$ 'nin  $R$ 'yi içeren integral olarak kapalı en küçük althalkasıdır. Dedekind halkaların karakterizasyonunda integral kapalılık önemli yer tutar. Aslında her Dedekind halka integral olarak kapalıdır. Ayrıca her tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi (unique factorization domain) de integral olarak kapalıdır. Fakat her Dedekind halka tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi değildir. (Yalnızca temel ideal bölgeleri hem Dedekind halka hem de tek türlü çarpanlara ayırma bölgesidir). Literatürde Dedekind halka kavramı genellikle tersinir ideal kavramı yardımıyla tanımlanmaktadır.  $I$ ,  $R$ 'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $\{q \in \mathbb{K} : qI \subseteq R\}$  kümesi  $\mathbb{K}$ 'nin  $R$ 'yi içeren bir  $R$ -altmodülüdür. Bu kümeyi  $I^{-1}$  ile

göstereceğiz. Buna göre  $II^{-1} = I^{-1}I \subseteq R$  dir. Eğer  $II^{-1} = R$  ise o zaman  $I$  idealine  $R$ 'nin bir *tersinir ideali* denir. Sıfırdan farklı her ideali tersinir olan tamlık bölgelerine *Dedekind halka* adı verilir. Dedekind halkalar bugüne kadar pek çok farklı şekilde karakterize edilmiştir. (Hereditary olma, asal ideallerindeki yerelleştirmelerinin temel ideal bölgesi olması, üzerindeki bölünebilir modüllerin injektif olması vs...). Fakat biz bu bölümde yalnızca aşağıdaki karakterizasyon üzerinde duracağız:

*”Cisim olmayan bir  $R$  tamlık bölgesinin Dedekind olması ile  $R$ 'nin, sıfırdan farklı her asal ideali maksimal ideal olan Noether ve integral kapalı bir halka olması denktir.”*

Bu bölümde Dedekind halkalar için verilen bu karakterizasyonun modüller için nasıl genelleştirilebileceğini göreceğiz (Teorem 4.17 ve Sonuç 4.18).

Şimdi  $R$  herhangi bir değişmeli halka ve  $M$  sıfırdan farklı bir  $R$ -modül olsun.  $\mathcal{C}_R$  ile  $R$ 'nin tüm sıfır böleni olmayan elemanlarının kümesini gösterelim. Buna göre  $S = \{s \in \mathcal{C}_R : \forall m \in M, sm = 0 \Rightarrow m = 0\}$  kümesi  $R$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesidir.  $R$ 'nin  $S$ 'ye göre yerelleştirmesini  $R_S$ ,  $M$ 'nin  $S$ 'ye göre yerelleştirmesini ise  $M_S$  ile gösterelim. Dikkat edilirse  $R \rightarrow R_S$ , her  $r \in R$  için  $r \mapsto r/1$  ve  $M \rightarrow M_S$ , her  $m \in M$  için  $m \mapsto m/1$  şeklinde tanımlı dönüşümler sırasıyla birer halka ve  $R$ -modül monomorfizmalarıdır. Dolayısıyla  $R \subseteq R_S$  ve  $M \subseteq M_S$  kabul edebiliriz. Şimdi  $0 \neq N \leq M$  alalım. Bir  $r/s \in R_S$  ile  $n \in N$  için  $(r/s)n$  çarpımı  $M_S$  içindedir. Fakat bu çarpım her zaman  $M$  içinde kalmak zorunda değildir.  $\{q \in R_S : \text{her } n \in N \text{ için } qn \in M\} = \{q \in R_S : qN \subseteq M\}$  kümesi  $R_S$ 'nin  $R$ 'yi içeren bir  $R$ -altmodülüdür. Bu kümeyi  $N^{-1}$  ile göstereceğiz. Dikkat edilirse  $N^{-1}N \subseteq M$  dir. Eğer  $N^{-1}N = M$  ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *tersinir altmodülü* denir. Ayrıca  $M$ 'nin sıfırdan farklı her altmodülü tersinir ise o zaman  $M$ 'ye bir *Dedekind  $R$ -modül* adı verilir.  $M$  bir Dedekind  $R$ -modül olsun.  $f \in \text{End}_R(M)$  alalım. Kabul edelim ki bir  $0 \neq m \in M$  için  $f(m) = 0$  olsun. Keyfi bir  $x \in M$  alalım.  $M$  Dedekind olduğundan  $Rm$  altmodülü tersinirdir. Dolayısıyla  $x = (r/s)m$  olacak şekilde bir  $r/s \in R_S$  vardır. Buna göre  $sx = rm$  ve böylece  $sf(x) = f(sx) = f(rm) = rf(m) = 0$  elde edilir. Fakat  $s \in S$  olduğundan  $f(x) = 0$  olmak zorundadır. Dolayısıyla  $f = 0$  olur. Buna göre bir Dedekind modülün endomorfizma halkasındaki sıfırdan farklı her eleman bir monomorfizmadır. Yani Dedekind modüllerin endomorfizma halkaları birer tamlık bölgesidir.  $M$  bir  $R$ -modül ise,  $R$  değişmeli olduğundan, her  $r \in R$  için  $\varphi_r : M \rightarrow M$ , her  $m \in M$  için  $m \mapsto rm$  ile tanımlı dönüşüm bir  $R$ -homomorfizmasıdır. Buna göre  $R/\text{ann}_R(M) \rightarrow \text{End}_R(M)$ ,

$\bar{r} \mapsto \varphi_r$  ile tanımlı dönüşüm bir halka monomorfizmasıdır. Dolayısıyla eğer  $M$  bir Dedekind  $R$ -modül ise o zaman  $\text{ann}_R(M)$ ,  $R$ 'nin bir asal ideali ve  $M$  bir torsion-free  $R/\text{ann}_R(M)$ -modül olur. Buna göre  $\text{ann}_R(M) \cap S = \emptyset$  ve  $\text{ann}_R(M) \cup S = R$  olur. Böylece  $R/\text{ann}_R(M)$ 'nin kesirler cismi,  $r \in R$  ve  $s \in S$  için  $\frac{r+\text{ann}_R(M)}{s+\text{ann}_R(M)}$  tipindeki elemanlardan ibarettir. Ayrıca her  $m \in M$  için  $\frac{r+\text{ann}_R(M)}{s+\text{ann}_R(M)}m \in M$  ise  $\frac{r+\text{ann}_R(M)}{s+\text{ann}_R(M)}m = \frac{r}{s}m$  olur. Dolayısıyla  $M$  aynı zamanda bir Dedekind  $R/\text{ann}_R(M)$ -modül olur. Bu nedenle bu bölümde tamlık bölgeleri üzerindeki torsion-free modüller ile çalışacağız. Elde edilen sonuçların genel durumlara aktarılması ise okuyucuya bırakılacaktır.

Bu bölüm boyunca  $R$  cisim olmayan bir değişmeli tamlık bölgesini,  $\mathbb{K}$ ,  $R$ 'nin kesirler cismini ve  $M$  de bir torsion-free  $R$ -modülü gösterecektir. Ayrıca  $\mathbb{K}M$  ile  $M$ 'nin  $R \setminus \{0\}$  çarpımsal kapalı kümesine göre yerelleştirmesini göstereceğiz. Herhangi bir torsion-free  $R$ -modül  $X$  için  $\mathcal{O}(X) = \{q \in \mathbb{K} : qX \subseteq X\}$  kümesini tanımlayalım. Dikkat edilirse  $X$ , toplamsal kapalı olduğundan  $\mathcal{O}(X)$  de toplamsal kapalıdır. Ayrıca  $\mathcal{O}(X)$ 'in çarpımsal kapalı olduğunu görmek zor değildir. Dolayısıyla  $\mathcal{O}(X)$ ,  $\mathbb{K}$ 'nin  $R$ 'yi içeren bir althalkasıdır. Öte yandan her  $q \in \mathcal{O}(X)$  için  $qX \subseteq X$  olduğundan  $X$  aynı zamanda bir  $\mathcal{O}(X)$ -modüldür. Aslında  $\mathcal{O}(X)$ ,  $X$ 'in, üzerinde modül yapısına sahip olduğu  $\mathbb{K}$ 'nin en geniş althalkasıdır.  $\mathcal{O}(X)$  halkasına  $X$ 'in  $\mathbb{K}$  içindeki mertebesi diyeceğiz. Bu bölümde, bir  $R$ -modül  $X$  aldığımız zaman, bu modülün  $R$ - ya da  $\mathcal{O}(X)$ -modül yapılarından hangisinin kastedildiğini kısaca  ${}_R X$  ve  ${}_{\mathcal{O}(X)} X$  gösterimlerini kullanarak belirteceğiz. Dikkat edilirse  $\mathcal{O}(X)$  halkasının kesirler cismi yine  $\mathbb{K}$ 'dir. Bu durum  $X$ 'in  $\mathcal{O}(X)$ -altmodüllerini incelerken, tıpkı  $R$ -altmodüllerinde olduğu gibi, bu altmodüllerin de  $\mathcal{O}(X)$ -modül yapısına göre terslerini  $\mathbb{K}$  içinde bulma şansı vermektedir.

$M$  ve  $M'$  iki torsion-free  $R$ -modül ve  $f : M \rightarrow M'$  bir  $R$ -homomorfizması olsun. Bir  $r/s \in \mathbb{K}$  ve  $m \in M$  için  $(r/s)m \in M$  olsun. Buna göre  $\mathbb{K}M'$  içinde  $s(r/s)f(m) = rf(m) = f(rm) = f(s(r/s)m) = sf((r/s)m)$  olacağından  $(r/s)f(m) = f((r/s)m)$  eşitliği elde edilir. Kabul edelim ki  $f$  bir izomorfizma olsun.  $r/s \in \mathcal{O}(M)$  alalım. Buna göre  $m' \in M'$  ise bir  $m \in M$  için  $f(m) = m'$  ve böylece  $(r/s)m' = f((r/s)m) \in M'$  elde edilir. Yani  $r/s \in \mathcal{O}(M')$  olur. Aynı işlemler  $f^{-1} : M' \rightarrow M$  dönüşümü için de tekrar edilirse  $\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(M')$  bulunur. Dolayısıyla izomorf torsion-free  $R$ -modüllerin  $\mathbb{K}$  içindeki mertebeleri aynıdır.

**Lemma 4.1** *Eğer  $M$ ,  $R$ -modül olarak sonlu üreteçli ise o zaman  $\mathcal{O}(M)$ -modül olarak da sonlu üreteçlidir.*

**Kanıt.**  $R \subseteq \mathcal{O}(M)$  olduğundan,  $M$ 'yi  $R$ -modül olarak üreten elemanlar aynı zamanda  $\mathcal{O}(M)$ -modül olarak ta üretir. ■

**Lemma 4.2** [34, Önerme 13.15]  $R \subseteq S$  iki halka ve  $M$  bir  $S$ -modül olsun.  $M$  (skalerlerin kısıtlanması ile elde edilen)  $R$ -modül olarak sonlu üreteçli olsun. Eğer bir  $s \in S$  ve  $R$ 'nin bir  $I$  ideali için  $sM \subseteq IM$  ise o zaman

$$s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \in \text{ann}_S(M)$$

olacak şekilde  $n \in \mathbb{N}$  ve  $a_i \in I^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) elemanları vardır.

$0 \neq N \leq M$  olsun. Biliyoruz ki  $N$ 'nin tersinir altmodül olması için  $N^{-1}N = M$  olması gerekir. Aslında  $N$ 'nin tersinir olabilmesi için  $\mathbb{K}$ 'nin en az bir  $R$ -altmodülü  $\mathcal{A}$  için  $\mathcal{A}N = M$  olması yeterlidir. Çünkü bu durumda kolayca görülebilir ki  $\mathcal{A} \subseteq N^{-1}$  ve böylece  $M = \mathcal{A}N \subseteq N^{-1}N \subseteq M$ , yani  $N^{-1}N = M$  olur. Ayrıca eğer  $N^{-1}N = M$  ise bu durumda  $\mathcal{O}(M) \subseteq N^{-1}$  ve  $N^{-1}$ ,  $\mathbb{K}$ 'nin bir  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olur. Şimdi  $0 \neq N \leq_{\mathcal{O}(M)} M$  alalım. Buna göre  $N \leq_R M$  olur. Eğer  $N^{-1}N = M$  ise bu durumda yukarıda söylediklerimizden dolayı  $N$ ,  $M$ 'nin  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olarak ta bir tersinir altmodülü olur. Buraya kadar aşağıdaki lemmanın ilk kısmını kanıtlamış olduk.

**Lemma 4.3** Kabul edelim ki  ${}_R M$  Dedekind modül olsun. Bu takdirde  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$  de bir Dedekind modüldür. Eğer, ek olarak,  ${}_R M$  sonlu üreteçli ise  $\mathcal{O}(M)$  halkası bir Dedekind halkadır ve  $\mathcal{O}(M)$ ,  $R$ 'nin  $\mathbb{K}$  içindeki integral kapanışıdır.

**Kanıt.**  ${}_R M$  sonlu üreteçli olsun.  $\mathcal{O}(M)$ 'nin sıfırdan farklı bir  $A$  idealini alalım. Buna göre  $AM \leq_R M$  dir. Ayrıca  $(AM)^{-1} = \{q \in \mathbb{K} : qAM \subseteq M\} = \{q \in \mathbb{K} : qA \subseteq \mathcal{O}(M)\} = A^{-1}$  elde edilir. (Buradaki  $A^{-1}$ ,  $A$ 'nın  $\mathcal{O}(M)$  halkası üzerindeki tersidir). Dolayısıyla  $\mathcal{O}(M)$ -modül olarak  $A^{-1}AM = M$  elde edilir. Lemma 4.2 kullanılırsa,  $A^{-1}A = \mathcal{O}(M)$  bulunur. Dolayısıyla  $\mathcal{O}(M)$  halkasının sıfırdan farklı her ideali tersinir idealdir. Yani  $\mathcal{O}(M)$  bir Dedekind halkadır.

Şimdi bir  $q \in \mathbb{K}$  için  $qM \subseteq M$  olsun. Bu durumda, Lemma 4.2 tekrar kullanılırsa,  $q$ 'nun  $R$  üzerinde integral olduğu görülür. Öte yandan  $\mathcal{O}(M)$  bir Dedekind halka olduğundan integral olarak kapalıdır. Dolayısıyla  $R$ 'nin integral kapanışı  $\mathcal{O}(M)$ 'in içinde kalır. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Dikkat edilirse, yukarıdaki lemmanın kanıtında  $\mathcal{O}(M)$  halkasının  $R$  üzerinde integral olduğunu gösterirken  ${}_R M$ 'nin Dedekind modül oluşunu kullanmaya gerek kalmamıştır. Buna göre her sonlu üreteçli torsion-free  $R$ -modül  $M$  için  $\mathcal{O}(M)$ ,  $R$  üzerinde integraldir. Bu gözlemi ileride kullanacağız.

**Lemma 4.4**  $R \subseteq S \subseteq \mathbb{K}$  ve  $S$  bir Dedekind halka olsun. Kabul edelim ki  $A$ ,  $S$ 'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu takdirde  $A$ , bir torsion-free Dedekind  $R$ -modüldür.

**Kanıt.**  $0 \neq B \leq_R A$  olsun.  $SB$ ,  $S$ 'nin sıfırdan farklı bir ideali olacağından  $(SB)^{-1}B = S$  olur. Böylece  $[(SB)^{-1}A]B = A$  elde edilir.  $(SB)^{-1}A$ ,  $\mathbb{K}$ 'nin bir  $R$ -altmodülü olduğundan kanıt tamamlanmış olur. ■

**Lemma 4.5** [12, Teorem 48]  $R \subset T$  iki değişmeli ve birimli halka olsun. Eğer  $T$ ,  $R$  üzerinde integral ise o zaman  $R$  ile  $T$ 'nin Krull boyutları eşittir.

**Lemma 4.6** [1, Sonuç 3.7] Her sonlu üreteçli torsion-free Dedekind  $R$ -modül  $R$ 'nin bir idealine izomorftur.

**Lemma 4.7** [22, Teorem 3.7 (i)]  $A \subset B$  iki değişmeli ve birimli halka olsun. Eğer  $B$ , hem bir Noether halka, hem de  $A$ -modül olarak sonlu üreteçli ise o zaman  $A$  da bir Noether halkadır.

**Sonuç 4.8**  $R$  üzerinde en az bir sonlu üreteçli torsion-free Dedekind modül vardır ancak ve ancak  $R$ , Krull boyutu 1 olan bir Noether tamlık bölgesidir ve  $R$ 'nin  $\mathbb{K}$  içindeki integral kapanışı  $R$ -modül olarak sonlu üreteçlidir.

**Kanıt.**  $\bar{R}$ ,  $R$ 'nin  $\mathbb{K}$  içindeki integral kapanışı olsun. Önce bir sonlu üreteçli torsion-free Dedekind  $R$ -modül  $M$  alalım. Lemma 4.3'den dolayı  $\bar{R}$ , bir Dedekind halkadır. Lemma 4.5'den dolayı  $R$ , Krull boyutu 1 olan bir halkadır. Ayrıca Lemma 4.6'dan  $M$ ,  $\bar{R}$ 'nin bir idealine izomorftur. Kabul edelim ki bu ideal  $I$  olsun ve  $I$ ,  $R$ -modül olarak  $x_1, \dots, x_k$  elemanları tarafından üretilsin.  $I$ ,  $\bar{R}$  içinde tersinir ideal olduğundan  $1 = q_1x_1 + \dots + q_kx_k$  olacak şekilde  $q_1, \dots, q_k \in I^{-1}$  elemanları vardır.  $x \in \bar{R}$  olsun. Buna göre  $x = q_1(xx_1) + \dots + q_k(xx_k)$  yazılabilir.  $I$ ,  $\bar{R}$ 'nin bir ideali olduğundan her  $i = 1, \dots, k$  için  $xx_i \in I$  olur. Dolayısıyla  $xx_i = r_{1i}x_1 + \dots + r_{ki}x_k$  olacak şekilde  $r_{ij} \in R$  ( $1 \leq i, j \leq k$ ) elemanları bulunabilir. Buradan, uygun  $r_1, \dots, r_k \in R$  elemanları için  $x = r_1(q_1x_1) + \dots + r_k(q_kx_k)$  yazabiliriz. Böylece  $\bar{R}$ ,  $R$ -modül olarak  $q_1x_1, \dots, q_kx_k$

elemanları tarafından üretilir. Lemma 4.7'den dolayı  $R$  bir Noether halka olur. Tersine  $R$  bir Noether halka,  $R$ 'nin Krull boyutu 1 ve  $\bar{R}$ ,  $R$  üzerinde sonlu üreteçli olsun. Dikkat edilirse  $\bar{R}$ 'nin her ideali bir  $R$ -altmodüldür. Dolayısıyla  $\bar{R}$ , bir Noether  $R$ -modül olacağından, aynı zamanda bir Noether halka olur. Ayrıca Lemma 4.5'den  $\bar{R}$ 'nin Krull boyutu 1'dir. Böylece  $\bar{R}$  bir Dedekind halka olur. Dolayısıyla Lemma 4.4'den  $\bar{R}$  bir sonlu üreteçli torsion-free Dedekind  $R$ -modüldür. ■

Yukarıdaki sonuca göre pek çok değişmeli tamlık bölgesi, sıfırdan farklı sonlu üreteçli (torsion-free) Dedekind modüle sahip değildir. Örneğin, Noether olmayan tamlık bölgeleri veya 1-boyutlu olmayan tamlık bölgeleri sonlu üreteçli Dedekind modüllere sahip olmayan halkalar arasında sayılabilir. Buna rağmen, aşağıdaki örnekte de görülmektedir ki pek çok Noether tamlık bölgesi de yeterince iyi miktarda Dedekind modüle sahiptir. Örneğimizi vermeden önce değişmeli halka kuramında Krull-Akizuki Teoremi olarak bilinen sonucu ifade edelim:

**Teorem 4.9** [6, Teorem 11.13]  $R$  bir 1-boyutlu (Krull boyutu) Noether tamlık bölgesi ve  $\mathbb{K}$ ,  $R$ 'nin kesirler cismi olsun.  $L$ ,  $\mathbb{K}$ 'nin bir sonlu cisim genişlemesi olmak üzere eğer  $S$ ,  $L$ 'nin  $R$ 'yi içeren bir althalkası ise o zaman  $S$ , Krull boyutu en fazla 1 olan bir Noether halkadır.

**Örnek 4.10**  $R$ , cisim ya da 1-boyutlu yerel halka olmayan bir Noether tamlık bölgesi olsun. Buna göre  $R \subset M \subset \mathbb{K}$  ( $M \neq \mathbb{K}$ ) olacak şekilde sonlu üreteçli olmayan bir Dedekind  $R$ -modül  $M$  vardır.

**Kanıt.**  $P$ , yüksekliği 1 olan  $R$ 'nin herhangi bir asal ideali olsun. Değişmeli Noether halkalarda böyle bir asal ideal her zaman bulunabilir. Çünkü [12, sayfa 65, Alıştırma 25]'de de belirtildiği gibi, eğer bir değişmeli halka asal idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyor ve her yarı-asal ideali sonlu adet asal idealin arakesiti şeklinde yazılabiliyorsa (özel olarak halka Noether ise) o zaman bu halka yarı-asal idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar. Dolayısıyla  $R$ 'nin azalan her asal ideal zinciri durmak zorunda olacağından yüksekliği 1 olan bir asal ideali bulunabilir.  $S$ ,  $R$ 'nin  $P$ 'deki yerelleştirmesi olsun. Buna göre  $R \subseteq S \subseteq \mathbb{K}$  olur. Ayrıca  $S$  Krull boyutu 1 olan bir Noether halkadır. Kabul edelim ki  $T$ ,  $S$ 'nin  $\mathbb{K}$  içindeki integral kapanışı olsun. Buna göre Teorem 4.9'dan dolayı  $T$  bir Noether halkadır. Ayrıca Lemma 4.5'den

$T$ 'nin de Krull boyutu 1 olur. Dolayısıyla  $T$  bir Dedekind halkadır. Şimdi  $A$ ,  $T$ 'nin sıfırdan farklı bir  $R$ -altmodülü olsun.  $A'$  ile  $qA \subseteq T$  koşulunu sağlayan  $q \in \mathbb{K}$  elemanlarının kümesini ifade edelim. Buna göre  $A'$ ,  $q(TA) \subseteq T$  koşulunu sağlayan  $q \in \mathbb{K}$  elemanlarının kümesi olur. Böylece  $A' = (TA)^{-1}$  ve  $T$  bir Dedekind halka olduğundan  $A'A = A'TA = T$  elde edilir. Dolayısıyla  $T$  bir Dedekind  $R$ -modüldür. Ayrıca  $T$ , 1-boyutlu halka olduğundan  $T \neq \mathbb{K}$  olur.  $T$  bir sonlu üreteçli  $R$ -modül ise  $S$  de bir sonlu üreteçli  $R$ -modül olur. Fakat  $S$ 'nin  $R$ -altmodüllerinin kesin olarak artan bir  $R(1/c) \subset R(1/c^2) \subset \dots \subset R(1/c^k) \subset \dots$  zinciri bulunabilir. Aksi halde her  $c \in R \setminus P$  için  $c$ ,  $R$ 'nin bir tersinir elemanı olurdu ki bu durum da  $R$ 'nin 1-boyutlu yerel halka olması demektir. Dolayısıyla  $T$ ,  $R$ -modül olarak sonlu üreteçli değildir. ■

Yukarıdaki örneğin kanıtından faydalanarak daha somut örnekler de elde edebiliriz:  $\Lambda$ , asal sayıların boştan farklı herhangi bir altkümesi olsun.  $m \in \mathbb{Z}$  ve  $n$ , her asal bölüneni  $\Lambda$  içinde olan bir pozitif tamsayı olmak üzere rasyonel sayıların  $m/n$  tipindeki elemanlarının kümesine  $T$  diyelim.  $\Lambda'$ ,  $\Lambda$  dışında kalan asal sayıların kümesi olmak üzere  $S = \mathbb{Z} \setminus (\bigcup_{p \in \Lambda'} p\mathbb{Z})$  kümesi  $\mathbb{Z}$ 'nin bir çarpımsal kapalı altkümesidir ve  $T = S^{-1}\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$ 'nin  $S$ 'deki yerelleştirmesidir. (Eğer  $\Lambda$  bütün asal sayıları kapsar ise  $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  alınsın). Buna göre Teorem 4.9'dan dolayı  $T = \mathbb{Q}$  veya  $T$  bir 1-boyutlu Noether tamlık bölgesi olur. Ayrıca [3, V.1.5, Sonuç 1] gereğince  $T$ ,  $\mathbb{Q}$  içinde integral olarak kapalıdır. Dolayısıyla  $T = \mathbb{Q}$  veya  $T$  bir Dedekind halkadır. Buna göre  $T$  sonlu üreteçli olmayan bir Dedekind  $\mathbb{Z}$ -modül olur. Ayrıca  $\Lambda$  bütün asal ideallerin kümesi değilse o zaman  $T$  quasi-injektif değildir. Aslında bir tamlık bölgesi üzerinde quasi-injektif, torsion-free ve düzgün olan bir tek modül vardır: o da tamlık bölgesinin kesirler cisimidir.

**Sonuç 4.11** *Her sonlu üreteçli torsion-free Dedekind  $R$ -modül Noetherdir.*

**Kanıt.** Sonuç 4.8'den dolayı açıktır. ■

**Lemma 4.12** [1, Lemma 3.9]  *${}_R M$  bir sonlu üreteçli Dedekind modül olsun. Buna göre  $M$ 'nin sıfırdan farklı her  $N$  altmodülü için  $(N : M) \neq 0$  dır.*

**Sonuç 4.13** *Her sonlu üreteçli torsion-free Dedekind modül radikal formülünü sağlar.*

**Kanıt.**  $M$  bir sonlu üreteçli torsion-free Dedekind modül olsun.  $M$  torsion-free olduğundan bir asal modüldür. Dolayısıyla radikal formülünü  $M$ 'nin sıfırdan farklı

altmodülleri için inceleyebiliriz. Buna göre  $0 \neq N \leq M$  olsun. Sonuç 4.8'den dolayı  $R$ , Krull boyutu 1 olan bir Noether tamlık bölgesidir. Ayrıca Lemma 4.12'den  $(N : M) \neq 0$  olacağından  $M/N$  bir torsion  $R$ -modül olur. Dolayısıyla [41, Teorem 4.12] gereğince  $M/N$  radikal formülünü sağlar. Buna göre  $rad_M(N)/N = rad_{M/N}(0_{M/N}) = RE_{M/N}(0_{M/N}) = RE_M(N)/N$  olacağından  $rad_M(N) = RE_M(N)$  elde edilir.  $N \leq M$  keyfi seçildiğinden  $M$  radikal formülünü sağlar. ■

**Lemma 4.14**  ${}_R M$  sonlu üreteçli Dedekind modül ve  $N, M$ 'nin bir  $R$ -altmodülü olsun. Eğer  $M/N$  bir torsion-free  $R$ -modül ise o zaman ya  $N = 0$  ya da  $N = M$  dir.

**Kanıt.** Lemma 4.12'den dolayı açıktır. ■

**Lemma 4.15**  ${}_R M$  bir sonlu üreteçli Dedekind modül olsun. Buna göre  $\mathcal{O}(M)M$ 'nin sıfırdan farklı her asal altmodülü maksimaldir.

**Kanıt.**  $N, M$ 'nin sıfırdan farklı bir asal  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olsun.  $P = (N :_{\mathcal{O}(M)} M)$  olsun. Buna göre  $P, \mathcal{O}(M)$  halkasının bir asal idealidir. Eğer  $P = 0$  ise bu taktirde  $M/N$  torsion-free  $\mathcal{O}(M)$ -modül (ve dolayısıyla da torsion-free  $R$ -modül) olacağından Lemma 4.14 gereğince  $N = 0$  olmak zorundadır. Fakat bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla  $P \neq 0$  dir. Lemma 4.3'den  $P, \mathcal{O}(M)$  halkasının bir maksimal ideali olur.  $PM \subseteq N$  olduğunu biliyoruz. Buradan  $(N^{-1}P)M = N^{-1}(PM) \subseteq N^{-1}N = M$  ve böylece  $P \subseteq N^{-1}P \subseteq \mathcal{O}(M)$  elde edilir.  $N^{-1}P, \mathcal{O}(M)$ 'nin bir ideali ve  $P$  maksimal olduğundan ya  $N^{-1}P = P$  ya da  $N^{-1}P = \mathcal{O}(M)$  olmalıdır. Kabul edelim ki  $N^{-1}P = P$  olsun.  $\mathcal{O}(M)$  bir Noether halka olduğundan  $P$  bir sonlu üreteçli  $\mathcal{O}(M)$ -modüldür. Lemma 4.2'yi uygularsak  $N^{-1} \subseteq \mathcal{O}(M)$  olduğunu görürüz. Dolayısıyla  $N^{-1} = \mathcal{O}(M)$  dir. Fakat bu durumda  $M = N^{-1}N = \mathcal{O}(M)N = N$  olacağından bir çelişki elde edilir. Buna göre  $N^{-1}P = \mathcal{O}(M)$  olur. Buradan  $N = \mathcal{O}(M)N = (PN^{-1})N = P(N^{-1}N) = PM$  elde edilir. Buraya kadar, aynı zamanda, yalnızca bir tek  $P$ -asal altmodül olacağını da görmüş olduk. Bu asal altmodül ise  $PM$  dir.  $N \subseteq L \subsetneq M$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $L$  altmodülünü alalım.  $P, \mathcal{O}(M)$ 'nin maksimal ideali ve  $P \subseteq (L : M)$  olduğundan  $P = (L : M)$  dir. Buna göre  $L, M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülüdür ve dolayısıyla  $L = PM = N$  olur. ■

**Lemma 4.16** [1, Teorem 3.3]  ${}_R M$  sonlu üreteçli olsun. Eğer  ${}_R M$ 'nin her asal altmodülü tersinir ise o zaman  ${}_R M$  bir Dedekind modüldür.

**Teorem 4.17**  ${}_R M$  sonlu üreteçli olsun. Buna göre  $M$  Dedekind  $R$ -modüldür ancak ve ancak

- (i)  $M$ 'nin sıfırdan farklı her asal  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü maksimaldir ve
- (ii)  $\mathcal{O}(M)$  bir Dedekind halkadır.

**Kanıt.** ( $\Rightarrow$ ) : Lemma 4.3 ve Lemma 4.15'den dolayı açıktır.

( $\Leftarrow$ ) :  $N$ ,  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$ 'nin sıfırdan farklı bir asal altmodülü olsun. (i)'den dolayı  $N$ ,  $M$ 'nin bir maksimal altmodülüdür. Dolayısıyla  $(N : M) = P$ ,  $\mathcal{O}(M)$ 'nin bir maksimal idealidir. Fakat  $PM$  de  $M$ 'nin bir asal  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olacağından  $PM$  maksimal olur.  $PM \subseteq N$  olduğundan  $PM = N$  elde edilir.  $P^{-1} = \{q \in \mathbb{K} : qP \subseteq \mathcal{O}(M)\}$  olduğundan  $P^{-1}N = P^{-1}PM \subseteq \mathcal{O}(M)M = M$  ve buradan da  $P^{-1} \subseteq N^{-1}$  elde edilir. (ii)'den dolayı  $M = \mathcal{O}(M)M = (P^{-1}P)M \subseteq N^{-1}N \subseteq M$  olur. Buna göre  $N$ ,  $M$ 'nin bir tersinir  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülüdür.  $N$  sıfırdan farklı asal altmodülü keyfi olarak seçildiğinden Lemma 4.16 gereğince  $M$  bir Dedekind  $\mathcal{O}(M)$ -modül olur. Şimdi  $0 \neq L \leq_R M$  olsun. Buna göre  $L^{-1} = \{q \in \mathbb{K} : qL \subseteq M\} = \{q \in \mathbb{K} : q(\mathcal{O}(M)L) \subseteq M\}$  olacağından  $\mathcal{O}(M)L^{-1} \subseteq L^{-1}$  elde edilir. Böylece  $M = L^{-1}(\mathcal{O}(M)L) = (L^{-1}\mathcal{O}(M))L \subseteq L^{-1}L \subseteq M$  olacağından  $L$  tersinir olur. Dolayısıyla  ${}_R M$  bir Dedekind modüldür. ■

**Sonuç 4.18**  ${}_R M$  sonlu üreteçli ise o zaman  ${}_R M$  bir Dedekind modüldür ancak ve ancak

- (i)  $M$  bir Noether  $\mathcal{O}(M)$ -modüldür,
- (ii)  $M$ 'nin sıfırdan farklı her asal  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü maksimaldir ve
- (iii)  $\mathcal{O}(M)$ ,  $\mathbb{K}$  içinde integral olarak kapalıdır.

**Kanıt.** ( $\Rightarrow$ ) : Sonuç 4.11 ve Teorem 4.17'den dolayı açıktır.

( $\Leftarrow$ ) : Dikkat edilirse  $M$ , sonlu üreteçli ve torsion-free  $\mathcal{O}(M)$ -modül olacağından (i)'den dolayı  $\mathcal{O}(M)$  bir Noether halka olur.  $P$ ,  $\mathcal{O}(M)$  halkasının bir asal ideali olsun.  $T = \{m \in M : \exists c \in \mathcal{O}(M) \setminus P, cm \in PM\}$  olsun.  $T \neq M$  olacağından,  $T$   $M$ 'nin bir  $P$ -asal altmodülü olur. (ii)'den  $T$ ,  $M$ 'nin bir maksimal altmodülüdür. Buna göre  $P = (T : M)$ ,  $\mathcal{O}(M)$ 'nin bir maksimal ideali olur. (iii)'den dolayı  $\mathcal{O}(M)$  integral olarak kapalı olduğundan,  $\mathcal{O}(M)$  bir Dedekind halka olur. Teorem 4.17'den dolayı  $M$  bir Dedekind  $R$ -modüldür. ■

**Lemma 4.19** [3, V.2.1, Önerme 1]  $h : A \rightarrow A'$  bir halka homomorfizması ve  $A'$ ,  $A$  üzerinde integral olsun.  $A'$  halkasının bir  $P'$  asal ideali için  $P = h^{-1}(P')$  ise o zaman

$P$ 'nin  $R$  içinde bir maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul  $P'$ 'nin  $R'$  içinde maksimal ideal olmasıdır.

**Lemma 4.20** [12, §2.3, Alıştırma 12]  $R$  cisim olmayan bir Noether tamlık bölgesi olsun. Eğer  $R$ 'nin her maksimal ideali tersinir ise o zaman  $R$  bir Dedekind halkadır.

Bir  $N \leq_R M$  için eğer  $(N :_R M)$  ideali  $R$ 'nin bir maksimal ideali ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir yarı-maksimal altmodülü denir. Aşağıdaki sonuç, yarı-maksimal altmodülleri kullanarak bir Noether modülün Dedekind olmasını karakterize etmektedir:

**Sonuç 4.21**  ${}_R M$  bir sonlu üreteçli Dedekind modüldür ancak ve ancak  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$  bir Noether modül ve  ${}_R M$ 'nin her yarı-maksimal altmodülü tersinirdir.

**Kanıt.** ( $\Rightarrow$ ) : Sonuç 4.11'den dolayı açıktır.

( $\Leftarrow$ ) :  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$  torsion-free olduğundan  $\mathcal{O}(M)$  bir Noether halkadır.  $P$ ,  $\mathcal{O}(M)$ 'nin bir maksimal ideali olsun.  $\text{ann}_{\mathcal{O}(M)}(M) = 0 \subseteq P$  ve  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$  sonlu üreteçli olduğundan Lemma 2.26'dan dolayı  $PM \neq M$  ve  $(PM :_{\mathcal{O}(M)} M) = P$  dir.  ${}_R M$  sonlu üreteçli ve torsion-free olduğundan, Lemma 4.3'den sonra yaptığımız gözleme göre  $\mathcal{O}(M)$ ,  $R$  üzerinde integraldir. Ayrıca  $(PM :_R M) = R \cap (PM :_{\mathcal{O}(M)} M) = R \cap P$  olacağından Lemma 4.19 gereğince  $(PM :_R M)$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olur. Buna göre  $PM$ ,  $M$ 'nin bir yarı-maksimal  $R$ -altmodülüdür. Buradan, Lemma 4.3'ün kanıtında olduğu gibi  $P$ ,  $\mathcal{O}(M)$ 'nin bir tersinir ideali olur. Böylece Lemma 4.20'den dolayı  $\mathcal{O}(M)$  bir Dedekind halkadır. Kabul edelim ki  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$  bir Dedekind modül olmasın.  ${}_{\mathcal{O}(M)} M$ , Noether modül olduğundan,  $M$ 'nin tersinir olmayan sıfırdan farklı  $\mathcal{O}(M)$ -altmodüllerinin ailesi içinde bir maksimal eleman bulunabilir. Bu eleman  $N$  olsun.  $L$ ,  $M$ 'nin  $N$ 'yi içeren bir maksimal  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olsun.  $L$  aynı zamanda yarı-maksimal olacağından kabulümüzden dolayı  $L$ ,  $M$ 'nin bir tersinir  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü olur. Öte yandan  $\mathcal{O}(M) \subseteq L^{-1} \subseteq N^{-1}$  olacağından  $N \subseteq L^{-1}N \subseteq M$  elde edilir. Eğer  $N = L^{-1}N$  ise Lemma 4.2 ile  $L^{-1}$ 'in her elemanının  $\mathcal{O}(M)$  üzerinde integral olacağı görülür. Fakat  $\mathcal{O}(M)$  integral olarak kapalı olduğundan  $L^{-1} = \mathcal{O}(M)$  elde edilir. Bu durumda  $M = L^{-1}L = \mathcal{O}(M)L = L$  çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla  $N \neq L^{-1}N$  dir.  $N$ 'nin seçiminden dolayı  $L^{-1}N$ ,  $M$ 'nin bir tersinir  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülüdür. Fakat bu durumda da  $N$ 'nin tersinir olacağını görmek zor değildir. Bu çelişkiden dolayı  $M$ 'nin sıfırdan

farklı her  $\mathcal{O}(M)$ -altmodülü tersinir olur. Yani  $M$  bir Dedekind  $\mathcal{O}(M)$ -modüldür. Teorem 4.17'nin kanıtında olduğu gibi  $M$  bir Dedekind  $R$ -modül olur. ■

Tezimizin son bölümünü Dedekind modüller ile  $\pi$ -modüller arasındaki ilişkiyi vererek sonlandıracağız.  $R$  herhangi bir değişmeli ve birimli halka ve  $M$  herhangi bir  $R$ -modül olsun. Bir  $N \leq M$  alalım.

$$\sum \{Im(\theta) : \theta \in Hom_R(N, M)\}$$

kümesi  $M$ 'nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle  $N$ 'nin  $M$  içindeki *izi* (*trace*) denir ve  $Tr_M(N)$  ile gösterilir. Eğer  $M$ 'nin sıfırdan farklı her  $N$  altmodülü için  $Tr_M(N) = M$  ise o zaman  $M$ 'ye  $\pi$ -modül adı verilir.

Şimdi, daha önce olduğu gibi  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $M$  bir torsion-free  $R$ -modül olsun.  $0 \neq N \leq M$  olsun. Her  $q \in N^{-1}$  için  $f_q : N \rightarrow M$ ,  $f_q(n) = qn$  ( $\forall n \in N$ ) ile tanımlanan dönüşümün bir  $R$ -homomorfizması olduğunu görmek zor değildir. Kabul edelim ki  $N$ ,  $M$ 'nin bir tersinir altmodülü olsun.  $0 \neq m \in M$  alalım. Buna göre  $m = q_1n_1 + \dots + q_kn_k$  olacak şekilde  $q_1, \dots, q_k \in N^{-1}$  ve  $n_1, \dots, n_k \in N$  elemanları vardır. Bu durumda  $m = f_{q_1}(n_1) + \dots + f_{q_k}(n_k) \in Tr_M(N)$  olacağından  $Tr_M(N) = M$  dir. (Aslında daha genel olarak  $N^{-1}N \subseteq Tr_M(N)$  yazabiliriz). Dolayısıyla eğer  $M$  bir Dedekind  $R$ -modül ise aynı zamanda bir  $\pi$ -modül olur. Bunun tersi ile ilgili olarak, Naoum ve Al-Alwan, [29]'da, bir  $M$  faithful çarpımsal (veya denk olarak torsion-free çarpımsal)  $R$ -modül  $M$  için  $M$ 'nin Dedekind  $R$ -modül olması ile  $\pi$ -modül olmasının denk olacağını göstermişlerdir. Biz de bir  $\pi$ -modülün ne zaman Dedekind olacağını, modülü çarpımsal kabul etmeden göstereceğiz. Bu sonucu vermeden önce kanıt içinde ihtiyaç duyacağımız bir gözlem yapalım:

Kabul edelim ki  ${}_R M$  sıfırdan farklı bir torsion-free düzgün modül olsun. Bir  $0 \neq x \in M$  alalım.  $M$  düzgün olduğundan her  $0 \neq m \in M$  için  $Rx \cap Rm \neq 0$  olur (yani  $0 \neq rx = sm$  olacak şekilde  $r, s \in R$  vardır). Buna göre  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $f(0) = 0$  ve her  $0 \neq m \in M$  için  $r, s \in R$  ve  $0 \neq rx = sm$  ise  $f(m) = r/s$  şeklinde tanımlı dönüşüm bir  $R$ -homomorfizmasıdır. Bunun için önce  $f$ 'nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.  $0 \neq m \in M$  olsun. Kabul edelim ki  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$  için  $0 \neq r_1x = s_1m$  ve  $0 \neq r_2x = s_2m$  olsun. Bu durumda  $s_2r_1m = r_1r_2x = r_2s_1m$  olacağından  $(s_2r_1 - r_2s_1)m = 0$  bulunur.  $M$  torsion-free olduğundan  $s_2r_1 = r_2s_1$ , yani  $r_1/s_1 = r_2/s_2$  elde edilir. Şimdi  $m_1, m_2 \in M$  olsun.  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$  için  $0 \neq r_1x = s_1m_1$  ve  $0 \neq r_2x = s_2m_2$  olsun.

Buna göre  $s_1s_2(m_1 + m_2) = (s_2r_1 + s_1r_2)x$  olur. Eğer  $m_1 + m_2 = 0$  ise o zaman  $s_2r_1 + s_1r_2 = 0$  olacağından  $f(m_1) + f(m_2) = r_1/s_1 + r_2/s_2 = (s_2r_1 + s_1r_2)/s_1s_2 = 0 = f(0) = f(m_1 + m_2)$  elde edilir. Dolayısıyla  $m_1 + m_2 \neq 0$  olsun. Bu durumda da  $s_1s_2(m_1 + m_2) \neq 0$  olacağından tanım gereği  $f(m_1 + m_2) = (s_2r_1 + s_1r_2)/s_1s_2 = r_1/s_1 + r_2/s_2 = f(m_1) + f(m_2)$  bulunur. Böylece  $f$  bir grup homomorfizmasıdır. Benzer yollar ile  $f$ 'nin  $R$ -doğrusal olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca  $f$ , 1-1 dir. Çünkü, her sıfırdan farklı  $m \in M$  için  $f(m) \neq 0$  dir. Dolayısıyla her torsion-free düzgün  $R$ -modülün  $\mathbb{K}$  içine gömülebileceğini göstermiş olduk.

**Teorem 4.22**  ${}_R M$  bir Dedekind modüldür ancak ve ancak  ${}_R M$  bir düzgün  $\pi$ -modüldür.

**Kanıt.**  ${}_R M$  bir düzgün (torsion-free)  $\pi$ -modül olsun. Yukarıdaki gözlemden dolayı  $M \leq_R \mathbb{K}$  seçebiliriz.  $M$ 'nin sıfırdan farklı bir  $N$  altmodülü ile  $f : N \rightarrow M$  bir  $R$ -homomorfizması alalım.  $f(N) \subseteq M \subseteq \mathbb{K}$  ve  $\mathbb{K}$  bir injektif  $R$ -modül olduğundan  $f$  homomorfizması bir  $g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  homomorfizmasına genişler. Yani her  $n \in N$  için  $f(n) = g(n)$  dir.  $g(1) = q$  ve  $n \in N$  olsun.  $N \subseteq \mathbb{K}$  olduğundan  $sn \in R$  olacak şekilde bir  $0 \neq s \in R$  vardır. Buna göre  $sf(n) = sg(n) = g(sn) = sng(1) = snq$  ve buradan da  $f(n) = nq$  elde edilir. Dolayısıyla,  $f(N) \subseteq M$  olduğundan,  $q \in N^{-1}$  bulunur. Böylece  $M = Tr_M(N) \subseteq N^{-1}N \subseteq M$  elde edilir. Yani  $N$ ,  $M$ 'nin bir tersinir altmodülüdür.  $N \leq M$  keyfi seçildiğinden  $M$  bir Dedekind  $R$ -modül olur.

Tersine,  ${}_R M$  bir Dedekind modül ise  ${}_R M$ 'nin bir  $\pi$ -modül olacağını daha önce söylemiştik  $M$ 'nin düzgün  $R$ -modül olduğunu görmek için  $M$ 'de sıfırdan farklı  $m_1$  ve  $m_2$  gibi iki eleman alalım ve  $Rm_1 \cap Rm_2 \neq 0$  olduğunu gösterelim.  $Rm_1$ ,  $M$ 'nin bir tersinir altmodülü olduğundan  $m_2 = qm_1$  olacak şekilde  $q \in (Rm_1)^{-1}$  vardır.  $q = r/s$  olsun. Buna göre  $0 \neq sm_2 = rm_1 \in Rm_1 \cap Rm_2$  elde edilir. Dolayısıyla  $M$  bir düzgün  $R$ -modüldür. ■

## KAYNAKLAR

- [1] Alkan, M., Saraç, B. ve Tıraş, Y., 2005, Dedekind modules. *Comm. Algebra*, 33, no. 5, 1617–1626.
- [2] Azizi, A., 2007, Radical formula and prime submodules., *J. Algebra*, 307, no. 1, 454–460.
- [3] Bourbaki, N., 1972, Elements of mathematics. Commutative algebra, Translated from the French. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass..
- [4] Dauns, J., 1980, Prime modules and one-sided ideals. *Ring theory and algebra, III* (Proc. Third Conf., Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1979), pp. 301–344, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 55, Dekker, New York.
- [5] Dauns, J., 1978, Prime modules, *J. Reine Angew. Math.*, 298, 156–181.
- [6] Eisenbud, D., 1995, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York.
- [7] Ferrero, M. ve Rodrigues, V., 2006, On prime and semiprime modules and comodules, *J. Algebra Appl.*, 5, no. 5, 681–694.
- [8] Fisher, J. W., 1973, Von Neumann regular rings versus V-rings, *Ring theory* (Proc. Conf., Univ. Oklahoma, Norman, Okla.), New York: Dekker, pp. 101–119.
- [9] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, Jr., 1989, *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. London Mathematical Society Student Texts, 16. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Hansen, F., 1975, On one-sided prime ideals, *Pacific J. Math.*, 58, no. 1, 79–85.
- [11] Jenkins, J. ve Smith, P. F., 1992, On the prime radical of a module over a commutative ring, *Comm. Algebra*, 20, no. 12, 3593–3602.
- [12] Kaplansky, Irving, 1970, *Commutative rings*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass..
- [13] Koh, K., 1971, On prime one-sided ideals, *Canad. Math. Bull.*, 14, 259–260.

- [14] Lam, T. Y., 2001, A first course in noncommutative rings, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York.
- [15] Lam, T. Y., 1999, Lectures on modules and rings. Graduate Texts in Mathematics, 189. Springer-Verlag, New York.
- [16] Leung, K. H. ve Man, S. H., 1997, On commutative Noetherian rings which satisfy the radical formula, *Glasgow Math. J.*, 39, no. 3, 285–293.
- [17] Lu, C.-P., 1984, Prime submodules of modules, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 33, no. 1, 61–69.
- [18] Macdonald, I. G., 1973, Secondary representation of modules over a commutative ring, *Symposia Mathematica*, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), pp. 23–43. Academic Press, London.
- [19] Man, S. H., 1999, On commutative Noetherian rings which satisfy the generalized radical formula, *Comm. Algebra*, 27, no. 8, 4075–4088.
- [20] Man, S. H., 1998, On commutative Noetherian rings which have the s.p.a.r. property, *Arch. Math. (Basel)*, 70, no. 1, 31–40.
- [21] Man, S. H., 1996, One-dimensional domains which satisfy the radical formula are Dedekind domains, *Arch. Math. (Basel)*, 66, no. 4, 276–279.
- [22] Matsumura, H., 1986, Commutative ring theory, Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge.
- [23] McCasland, R. L. ve Moore, M. E., 1991, On radicals of submodules, *Comm. Algebra*, 19, no. 5, 1327–1341.
- [24] McCasland, R. L. ve Smith, P. F., 2006, On isolated submodules, *Comm. Algebra*, 34, no. 8, 2977–2988.
- [25] McCasland, R. L. ve Smith, P. F., 1993, Prime submodules of Noetherian modules, *Rocky Mountain J. Math.*, 23, no. 3, 1041–1062.

- [26] McConnell, J. C. ve Robson, J. C., 1987, Noncommutative Noetherian rings. With the cooperation of L. W. Small. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.
- [27] McConnell, J. C. ve Robson, J. C., 1973, Homomorphisms and extensions of modules over certain differential polynomial rings, *J. Algebra*, 26, 319–342.
- [28] Michler, G. O., 1972, Prime right ideals and right noetherian rings, *Ring theory (Proc. Conf., Park City, Utah, 1971)*, pp. 251–255 Academic Press, New York.
- [29] Naoum, A. G. ve Al-Alwan, F. H., 1996, Dense submodules of multiplication modules. *Comm. Algebra*, 24, no. 2, 413–424.
- [30] Naoum, A. G. ve Al-Alwan, F. H., 1996, Dedekind modules. *Comm. Algebra*, 24, no. 2, 397–412.
- [31] Northcott, D. G., 1968, *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge University Press, London.
- [32] Sharif, H., Sharifi, Y. ve Namazi, S., 1996, Rings satisfying the radical formula, *Acta Math. Hungar.*, 71, no. 1-2, 103–108.
- [33] Brodmann, M. P. ve Sharp, R. Y., 1998, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60. Cambridge University Press, Cambridge.
- [34] Sharp, R. Y., 1990, *Steps in commutative algebra*, London Mathematical Society Student Texts, 19. Cambridge University Press, Cambridge.
- [35] Sharp, R. Y., 1976, Secondary representations for injective modules over commutative Noetherian rings, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 20, no. 2, 143–151.
- [36] Sharpe, D. W. ve Vámos, P., 1972, *Injective modules*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 62. Cambridge University Press, London-New York.
- [37] Smith, P. F., 2004, Radical submodules and uniform dimension of modules, *Turkish J. Math.*, 28, no. 3, 255–270.

- [38] Smith, P. F., 2003, Uniqueness of primary decompositions. *Turkish J. Math.*, 27, no. 3, 425–434.
- [39] Smith, P. F., 2001, Primary modules over commutative rings, *Glasg. Math. J.*, 43, no. 1, 103–111.
- [40] Smith, P. F., 1981, The injective test lemma in fully bounded rings, *Comm. Algebra*, 9, no. 17, 1701–1708.
- [41] Pusat-Yilmaz, D. ve Smith, P. F., 2002, Modules which satisfy the radical formula, *Acta Math. Hungar.*, 95, no. 1-2, 155–167.
- [42] Pusat-Yılmaz, D. ve Smith, P. F., 1996, Chain conditions in modules with Krull dimension, *Comm. Algebra*, 24, no. 13, 4123–4133.