

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**KÜÇÜK BOYUTTA BİR PARAMETRELİ
HAREKETLER ve UYGULAMALARI**

Fatih KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.02.01

Sunuş Tarihi:11.09.2008

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Bornova-İZMİR

2008

Fatih KANDEMİR tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “KÜÇÜK BOYUTTA BİR PARAMETRELİ HAREKETLER ve UYGULAMALARI” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 11.09.2008 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

.....

Raportör Üye: Doç. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

.....

Üye : Doç. Dr. Hasan YILDIZ

.....

ÖZET**KÜÇÜK BOYUTTA BİR PARAMETRELİ
HAREKETLER ve UYGULAMALARI**

KANDEMİR, Fatih

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Eylül 2008, 97 sayfa

Bu tez çalışmasının birinci, ikinci ve üçüncü bölümlerinde mekanizma ile ilgili temel kavramlar ve bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde düzlemdeki hareketlerin kinematik analizi incelenmiştir.

Beşinci ve altınca bölümlerde hız ve ivme kavramları ayrıntılı olarak, matematiksel ispatları verilerek incelenmiş ve mekanizmalardaki hız ve ivme analizleri gösterilmiştir.

Yedinci bölümde ani dönme merkezi kavramı incelenmiş, mekanizmalarda bulunması gösterilmiş, ani dönme merkezlerini kullanarak hız analizi yapılmış, ayrıca hareket pol eğrileri cinsinde ifade edilmiştir.

Sekizinci bölümde önemli teoremlerden Euler-Savary denklemi incelenmiş, büküm çemberi tanımı verilerek ikisi arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Son bölümde, dört uzuvlu mekanizmalar işlenmiş, 5-kol mekanizmasının birinci ve ikinci dereceden kinematik katsayıları kullanılarak, eğrilik yarıçapı bulunarak, büküm çemberinin çizimine ulaşılmıştır ve bilgisayar uygulaması verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: mekanizma, serbestlik derecesi, ani dönme merkezi, pol eğrisi, hız analizi, ivme analizi, Euler-Savary denklemi, dört kol mekanizması, biyel eğrisi, büküm çemberi, kinematik katsayı

ABSTRACT

ONE PARAMETER MOTION IN A SMALL DIMENSION and APPLICATIONS

KANDEMİR, Fatih

Msc.in Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Sep 2008, 97 pages

In the first three chapters of this thesis, fundamental concepts of mechanism are given.

In the fourth chapter, the planar kinematic analyses is investigated.

In the fifth and sixth chapters, concepts of velocity and acceleration are investigated in detail with their mathematical proofs also velocity and acceleration analyses of mechanisms are studied.

In the seventh chapter, instantaneous center of rotation which is the important subject of the motion in a small dimension is investigated and is shown how to find them in a mechanism. Velocity analyses are done using instantaneous centers and a motion is defined using pole curves

In the eighth chapter, Euler-Savary equation (one of the important theorem) is investigated, definition of inflection circle is given and relation of them is mentioned.

In the last chapter, four-bar mechanisms are studied, radius of curvature is found using the first and the second order kinematic coefficients of 5-bar mechanism, and finally reach the inflection circle. The computer application is also given.

Key words: mechanism, degree of freedom, instantaneous center, pole curve, velocity analysis, acceleration analysis, Euler-Savary Equation, four-bar mechanism, coupler curve, inflection circle, kinematic coefficient

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda engin bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen ve değerli katkılar sağlayan sayın hocam Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN'a, yardımlarından dolayı Hatice KUŞAK'a, çalışmalarım boyunca bana destek olan eşime ve bugünlere gelmemdeki emeklerinden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VII
TEŞEKKÜR.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XV
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	XXI
I.GİRİŞ.....	1
I.1 TEMEL KAVRAMLAR.....	1
II. MEKANİZMA SERBESTLİK DERECEŚİ.....	6
II.1 Mafsal Serbestlik Derecesi	6
II.1.1 Mekanizma Serbestlik Derecesi Denklemi.....	8
II.1.2 Grübler denklemi.....	9
III.MEKANİZMALARIN SINIFLANDIRILMASI.....	11
IV.DÜZLEMSEL HAREKETİN KİNEMATİK ANALİZİ.....	14

İÇİNDEKİLER(Devam)

	<u>Sayfa</u>
IV.1 Noktanın Kinematığı.....	14
IV.1.1 Dik Eksen Sisteminden Kutupsal Koordinatlara Dönüşüm.....	16
IV.2 Bir Rijit Cismin Kinematığı.....	17
IV.2.1 Çakışan Noktalar.....	19
IV.3 Mekanizmalarda Vektör Devreleri.....	21
V. HIZ ANALİZİ.....	24
V.1 Doğrusal ve Açısal Hızlar.....	24
V.2 Bağıl Hız ve Hız Farkı	32
V.3 Düzlemdeki Hareketlere Göre Hız ve İvme.....	35
V.3.1 Öteleme.....	35
V.3.2 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme.....	36
V.3.3 Genel Düzlemsel Hareket.....	39
V.4. Hızların Bulunması.....	42
V.4.1 Mehmke Teoremi	43

İÇİNDEKİLER(Devam)

	<u>Sayfa</u>
VI. İVME ANALİZİ.....	45
VI.1 Doğrusal ve Açısal İvme.....	45
VI.2 Bağlı İvme.....	51
VI.3 İvmelerde Mehmke Teoremi.....	53
VI.4 Coriolis İvmesi.....	54
VII. ANİ DÖNME MERKEZİ.....	56
VII.1. Ani Dönme Merkezlerinin Belirlenmesi.....	58
VII.2 Aranhold-Kennedy Teoremi.....	62
VII.3 Ani Dönme Merkezi ile Hız Analizi.....	66
VII.4 Ani Dönme Merkezi Eğrileri.....	68
VIII. EULER-SAVARY DENKLEMİ VE BÜKÜM ÇEMBERİ..	71
IX. MEKANİZMA ÇEŞİTLERİ.....	80

İÇİNDEKİLER(Devam)

	<u>Sayfa</u>
IX.1 Dört Uzunlu Mekanizmalar.....	80
IX.2 Grashof Teoremi.....	81
IX.3.Biyel Eğrisi.....	82
IX.4 5-Kol mekanizması.....	83
IX.4.1 Biyel Kolunun Eğrilik Yörüngesi.....	85
IX.5 Dört kol Mekanizmasının Bilgisayar Uygulaması.....	91
X. SONUÇ.....	95
KAYNAKLAR.....	96
ÖZ GEÇMİŞ.....	97

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekiller</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil I.1. Basit kinematik çiftler.....	2
Şekil I.2. Genel uzayda rijit bir cismin hareketi.....	2
Şekil I.3. Uzun çeşitleri.....	3
Şekil I.4. Kinematik zincir.....	4
Şekil I.5. Mekanizma	4
Şekil I.6. Derecelerine göre mafsallar.....	5
Şekil II.1. Dönme ve öteleme serbestlikleri birbirinden bağımsız kinematik çiftler	7
Şekil III.1. Mekanizma Çeşitleri.....	13
Şekil IV.1 Noktanın kutupsal gösterimi.....	15
Şekil IV.2. Dik eksen sistemi ile kutupsal eksen sistemi arasındaki ilişki.....	16
Şekil IV.3. Rijit cisim üzerindeki iki noktanın hareketi.....	18

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam)

<u>Şekiller</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil IV.4. Rijit bir cismin konumunun vektör ve açı ile gösterilmesi.....	19
Şekil IV.5 Çakışan noktalar.....	20
Şekil IV.6 Mekanizmalarda vektör devreleri.....	22
Şekil V.1. Referans düzlemine göre hareket eden düzlem üzerindeki bir noktanın hızı.....	26
Şekil V.2. k hareketli düzleminin 1 referans düzlemi üzerindeki çember yayı yörüngesi.....	31
Şekil V.3 Bağlı hız.....	32
Şekil V.4. Bağlı hızın gösterimi.....	33
Şekil V.5. Aynı uzuv üzerinde bulunan 2 noktanın hız farkı.....	34
Şekil V.6. Ötelenme.....	35
Şekil V.7. Sabit bir eksen etrafında dönme.....	37
Şekil V.8. Sabit bir eksen etrafında dönen bir cismin üzerindeki bir noktanın hız vektörü ve kutupsal gösterimi.....	38

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam)

<u>Şekiller</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil V.9. Genel düzlem hareket.....	39
Şekil V.10. Genel düzlem hareketinin öteleme ve dönme hareketlerinin birleşimi olarak gösterilmesi	40
Şekil V.11. Krank biyel mekanizmasında hızların bulunması.....	43
Şekil V.12. Hız üçgeni.....	44
Şekil VI.1. Hareketli bir düzlemin bir noktasının eğrilik merkezindeki eksene göre ivmesi.....	46
Şekil VI.2 Hız değişimi.....	47
Şekil VI.3. Hareketli düzlemin çember yayını izleyen bir noktasının çember merkezindeki ivmesi.....	48
Şekil VI.4. O noktasında mafsallanmış hareketli düzlemin çember yayını izleyen bir noktasının çember merkezindeki ivmesi.....	49
Şekil VI.5. Düzlemde bir rijit cismin iki noktasının bağıl ivmesi.....	51

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam)

<u>Şekiller</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil VI.6 Bağıl ivme ve ivme poligonu	52
Şekil VI.7. İvmelerde memhke teoremi.....	53
Şekil VI.8. Hareketli bir düzlem üzerindeki bir noktanın coriolis ivmesi.....	54
Şekil VII.1. Hareket eden bir cisme ait dönme polü.....	56
Şekil VII.2 Ani dönme merkezi.....	57
Şekil VII.3. Mutlak ani dönme merkezlerine örnek.....	59
Şekil VII.4. Ani dönme merkezleri sonsuzdadır.....	59
Şekil VII.5. Kaymadan yuvarlanan bir cismin ani dönme merkezi..	60
Şekil VII.6 Dört kol mekanizmasının birincil ani dönme merkezleri.....	61
Şekil VII.7. Dört kol mekanizmasının ani dönme merkezleri.....	62
Şekil VII.8 6 uzuvlu mekanizma.....	63

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam)

Şekiller

Sayfa

Şekil VII.9 6 uzuvlu mekanizmanın birincil ani dönme merkezleri ve bilinen ani dönme merkezlerinin diyagramda yerleştirilmesi	64
Şekil VII.10 Aranhold-Kennedy Teoremi kullanılarak ani dönme merkezlerinin bulunması.....	65
Şekil VII.11. Ani dönme merkezi kullanarak hız analizi.....	66
Şekil VII.12. Dört kol mekanizmasının farklı konumları için ani dönme merkezleri.....	69
Şekil VII.13. Hareketli ve sabit pol eğrileri.....	70
Şekil VIII.1 Birbiri üzerinde yuvarlanan pol eğrileri.....	71
Şekil VIII.2. Δt zaman sonra ani dönme merkezinin yer değiştirmesi ve yeni ani dönme merkezinin konumu.....	72
Şekil VIII.3 A noktasının ivme bileşenleri.....	73
Şekil VIII.4. Büküm çemberi ve üzerindeki ve yakınındaki noktaların yörüngeleri.....	75
Şekil VIII.5. Euler-Savary denkleminin çıkarılışı.....	77

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam)

<u>Şekiller</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil VIII.6. Büküm Çemberi ve aynı doğru üzerindeki A, J_A, O_A ve I noktaları	78
Şekil IX.1 Dört uzuvlu mekanizmalara örnekler.....	79
Şekil IX.2 Biyel eğrisi.....	82
Şekil IX.3 Düzlemsel 5-kol mekanizması ve vektörel gösterimi.....	83
Şekil IX.4 4 biyel kolu üzerindeki P noktasının vektörel gösterimi.....	86
Şekil IX.5 4 kolunun 1 koluna göre bağıl hareketinde büküm çemberi..	90
Şekil IX.6 Program çıktısı 1.....	93
Şekil IX.7 Program çıktısı 2.....	94

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
Δ	fark operatörü
I	ani dönme merkezi
$\mathbf{v}$	hız vektörü
v	hızın şiddeti
$\mathbf{a}$	ivme vektörü
a	ivmenin şiddeti
$\mathbf{a}_{A^n}$	normal ivme bileşeni
$\mathbf{a}_{A^t}$	teğet ivme bileşeni
$\mathbf{a}_{cor}$	Coriolis ivmesi
ω	açısal hız
$\mathbf{V}_{BA}$	B nin A ya göre bağıl hızı

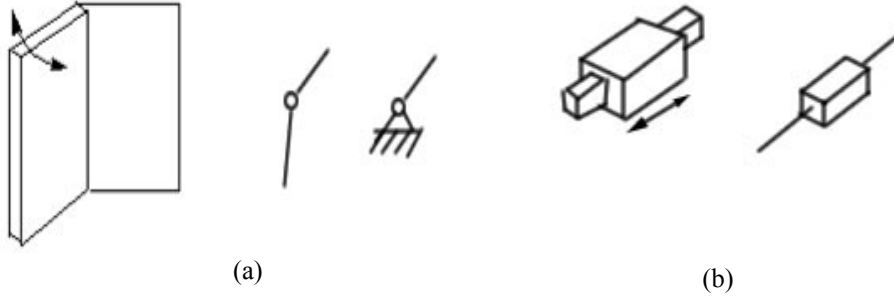
I.GİRİŞ

I.1. TEMEL KAVRAMLAR

Rijit cisim, üzerinde veya içerisinde alınan iki noktası arasındaki uzaklığın hareketi ve işlevi esnasında değişmediği veya değişiminin ihmal edildiği cisimdir.

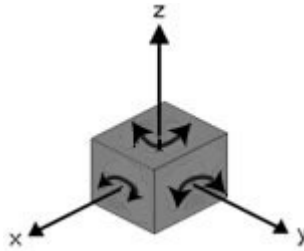
Kinematik eleman, bir rijit cismin diğer bir rijit cisme birbirine göre bağlı hareket yapabilecek şekilde, bağlamak için kullanılan rijit cismin bir kısmına denir.

Kinematik çift, rijit cisim üzerinde bulunan kinematik elemanların yan yana getirilmesinden oluşan bağlantıdır. Kinematik çifte mafsalsal da denmektedir. Kinematik çiftler temas şekillerine göre açık kinematik çift ve kapalı kinematik çift olarak sınıflandırılmaktadırlar. Açık kinematik çiftlerde elemanlar hareket boyunca sürekli temasa sahip değildirler. Ama kapalı kinematik çiftlerde ise hareket süresince iki kinematik eleman arasında temas vardır. Kapalı kinematik çiftler de basit kinematik çift ve yüksek kinematik çift olmak üzere sınıflandırılırlar. Basit kinematik çiftlerde hareket anında kinematik elemanlarla temas bir yüzey boyuncadır. Yüksek kinematik çiftlerde ise temas bir çizgi veya nokta üzerindedir.



Şekil I.1. Basit kinematik çiftler a) Döner kinematik çiftler b) Kayar kinematik çiftler

Uzay serbestlik derecesi, bulunduğu uzayda bir cismin konumunu belirlemek için gerekli olan bağımsız parametre sayısıdır.



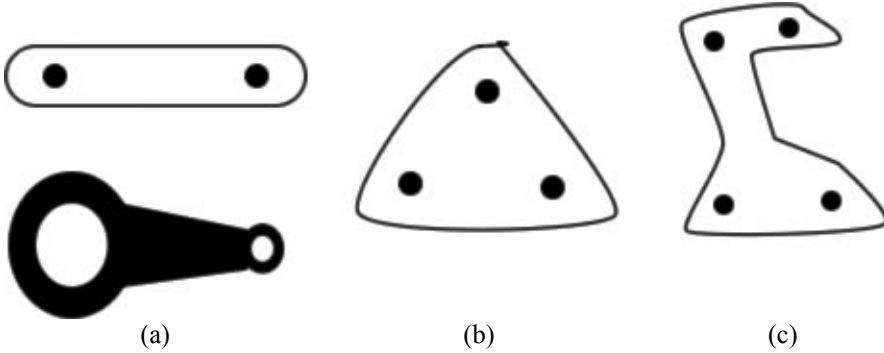
Şekil I.2. Genel uzayda rijit bir cismin hareketi

Genel uzayda yani 3 boyutlu uzayda serbest hareket yapabilen Şekil I.2 deki rijit cismi göz önüne alınsın. Rijit cisim hiçbir dönme yapmadan x,y,z doğrultuları boyunca hareket edebilir, bu durumda 3 öteleme derecesi vardır. Ayrıca cisim bu 3 eksen etrafında dönme yapabilir o halde 3 de dönme derecesi vardır. Bir cismin genel uzayda koordinatlarını belirlemek için 3 ü öteleme ve 3 ü dönme olmak üzere 6

tane bağımsız değişkeni gereklidir. Sonuç olarak denebilir ki 3 boyutlu uzayda uzay serbestlik derecesi 6 dır.

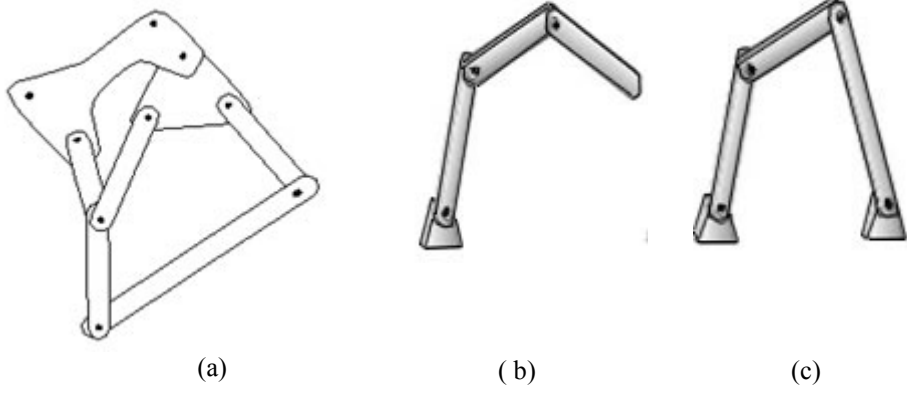
Düzlemde alınan bir cisim ya iki yönde öteleyebilir veya düzlemde bir eksen etrafında dönme hareketi yapabilir. O halde gerekli olan bağımsız parametre sayısı üçtür. Buradan söylenebilir ki; bir düzlemin serbestlik derecesi üçtür.

Uzuv, bir rijit cisim üzerinde kinematik çift oluşturan en az iki kinematik elemana denir. İki kinematik elemana sahip olan uzva ikili uzuv, üç kinematik elemana sahip olan uzva üçlü uzuv denir ve böylece devam eder.



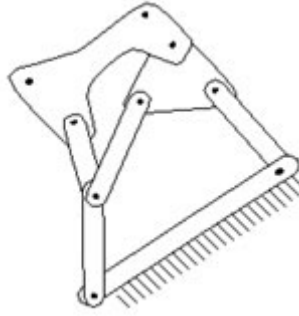
Şekil I.3. Uzuv çeşitleri a) İkili uzuv b) Üçlü uzuv c) Dörtlü uzuv

Kinematik Zincir, kinematik çiftlerle birbirlerine bağlanmış uzuvlar topluluğuna denir. Açık kinematik zincir ve kapalı kinematik zincir olarak sınıflandırılır. Kinematik zincir gerçek mekanizma yapısının bir modelidir.



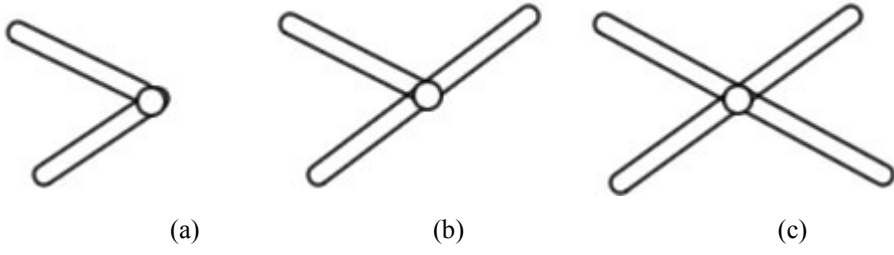
Şekil I.4. a)Kinematik zincir b)Açık zincir c) Kapalı zincir

Mekanizma, uzuvlarından biri sabit tutularak oluşturulan kinematik zincirdir.



Şekil I.5. Mekanizma

Mafsal derecesi, mafsalla birleştirilen uzuv sayısının bir eksiğine denir. Sanki o mafsal noktasında mafsal derecesi kadar mafsal olduğu kabul edilir.



Şekil I.6 a) Bir dereceli mafsal b) İki dereceli mafsal c) Üç dereceli mafsal

II. MEKANİZMA SERBESTLİK DERECEŚİ

II.1. Mafsal Serbestlik Derecesi

Bir mafsalla yani kinematik çiftle birleştirilen cisimlerin birbirlerine göre bağlı konumlarını belirlemek için gerekli olan bağımsız parametre sayısıdır. Örneğin 3 boyutlu uzayın serbestlik derecesi 6 dır. Ama bir kinematik çift bu uzayda 6 serbestlik derecesine sahip olamaz en azından bir serbestliğini, dönme ya da ötelemesini, sınırlaması gerekir. Bu durumda 3 boyutlu uzayda bir kinematik çift en fazla 5 serbestlik derecesine sahip olabilir. Kinematik çiftler serbestlik derecelerine, bu serbestlik derecelerinin müsaade ettiği dönme ve ötelemelere göre sınıflandırılırlar.

Mekanizmanın serbestlik derecesi, bir mekanizmada bulunan tüm uzuvların konumunu belirlemek için gerekli olan parametre sayısıdır.

Mekanizmaların serbestlik derecesi mekanizmanın uzuv boyutlarına bağlı değildir.

SERBESTLİK DEREJESİ	DÖNME SERBESTLİĞİ	ÖTELEME SERBESTLİĞİ	İSİM	ŞEKİL KAPALI	KUVVET KAPALI
5	3	2	Paralel düzlem - küre çifti		
4	3	1	Küre-silindır çifti		
	2	2	Paralel düzlem-silindır çifti		
3	3	0	Küre-kabuk çifti		
	2	1	Kamalı küre-silindır çifti		
	1	2	Düzlem çifti		
2	2	0	Kamalı küre-kabuk çifti		
	2	0	Torus		
	1	1	Silindır çifti		
	1	1	Kamalı silindır		
1	1	0	Döner çifti		
	0	1	Kayar çifti		

Şekil II.1. Dönme ve öteleme serbestlikleri birbirinden bağımsız kinematik çiftler
(Söylemez, 2000)

II.1.1 Mekanizma Serbestlik Derecesi Denklemi

λ = Uzun Serbestlik Derecesi

l = Mekanizmada uzuv sayısı (sabit uzuv dahil)

j = Mekanizmada mafsalsayısı

f_i = i mafsalının serbestlik derecesi

F = Mekanizma serbestlik derecesi

olmak üzere,

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (2.1)$$

denkleminin *mekanizmaların serbestlik derecesi denklemi* denir. Bu denklem şu şekilde elde edilebilir; λ serbestlik derecesine sahip bir uzayda l uzva sahip bir mekanizma olsun. Bu mekanizmadaki sabit uzuv dışındaki $(l-1)$ uzvun her birinin λ sayıda serbestliği vardır. Buna göre mekanizmadaki uzuvlar birbirleriyle bağlı değilken $\lambda \cdot (l-1)$ bağımsız değişkene ihtiyaç vardır. Fakat her mafsalın bir noktası diğer mafsalın bir noktası ile birleşir böylece iki noktayı belirten koordinat sürekli olarak çıkarılır. Serbestlik derecesi λ olan uzuv çiftinin karşılıklı serbest hareketi, serbestlik derecesi 1 olan bir nokta etrafında dönmeye dönüşür. Bu nedenle bir adi mafsal(kayar ya da döner mafsal), serbestlik derecesini 1 azaltır. Daha genel ifade ile λ serbestlik derecesine sahip

olan bir uzayda f_i serbestliği olan bir mafsallık uzvun serbestlik derecesini $(\lambda - f_i)$ kadar azaltır ya da hareketi sınırlanır. Mekanizmada j mafsallık olduğunu düşünürsek toplam azalma yani sınırlama,

$$\sum_{i=1}^j (\lambda - f_i) = \lambda \cdot j - \sum_{i=1}^j f_i$$

kadardır. Bu kısıtlama, uzuvların sahip olduğu toplam serbestlik derecesinden çıkarılırsa mekanizma serbestlik derecesine ulaşılır;

$$F = \lambda(l - j) - (\lambda j - \sum_{i=1}^j f_i)$$

diğer bir yazıyla,

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

dir.

II.1.2 Grübler denklemi

Düzlemsel mekanizmalar için geçerli olan, serbestlik derecesi formülü mekanizmanın bütün mafsalları adi eleman çiftlerine (sadece döner veya kayar) indirildiğinde *Grübler denklemi* adını alır. Yani düzlemsel ($\lambda=3$), bir serbestlik dereceli ($F=1$) ve sadece döner veya kayar mafsallardan oluşan ($f_i=1$, $\sum f_i = j$) mekanizmada serbestlik derecesi denklemini yazılırsa

$$3l - 2j - 4 = 0 \quad (2.2)$$

denklemini elde edilir. Grübler denklemini sağlayan mekanizmalar için  u sonuçlar çıkarılabilir:

i) Mekanizmanın uzuv sayısı çift olmalı, çünkü $3l = 2(j + 2)$ yazılırsa l çift olmalıdır.

ii) Mekanizmada bulunan iki elemanlı uzuv sayısı 4 ve 4 ten fazla olmalıdır.

iii) Mekanizmada bulunan bir uzuvdaki kinematik eleman sayısı mekanizmada bulunan uzuv sayısının yarısından fazla olamaz

(2.2) Grübler denklemini için Matlab programlama diliyle yazılmış  u programı verilebilir:

```
%gr bler denklemini bilgisayar uygulaması
%F mekanizma serbestlik
%L mekanizmadaki uzuv sayısı
%J1 mafsallı sayı ve J2 mafsallı serbestlik derecesi
%girilen L,J1 ve J2 değerleri için dof fonksiyonu ile mekanizmanın
%serbestlik derecesini bulur
function F = dof(L,J1,J2)
F = 3*(L-1) - 2*J1 - 1*J2;
```

III. MEKANİZMALARIN SINIFLANDIRILMASI

Sınıflandırma, bir nesnenin bir grup nesneye olan ilişkisini gösteren faktörlerin sistematik gruplandırmasıdır yani bir düzenleme arayışıdır. Bu güne kadar bütün mekanizmaları içine alan tümüyle birliği sağlanmış genel bir sınıflama şeması bulunamamıştır. Ama iki temel sınıflama şemasının varlığı tanınmıştır. Bunlar **işlevsel** (fonksiyonel) ve **yapısal** şemalardır. İşlevsel sınıflama sistemi bir hareketi diğerine çeviren mekanizmanın tamamını göz önüne alır, mekanizmanın içinde neler olduğu, parçaları önemli değildir. Burada mekanizma içinde ne olduğunu bilinmeyen, ama bir hareketi alıp başka bir harekete dönüştüren kara kutuya benzetebilir. Bu sınıflandırma ile yapılan aynı hareket dönüşümünü veren kara kutuları sıralamaktır. Bu yüzden bu sınıflandırma birliği olmayan mekanizma koleksiyonudur. Monge' nin şeması bu sınıflandırmadadır.

Yapısal sınıflandırma sistemi, parçaları ve onların bağlı hareketlerini dikkate alır. Modern kinematiğin kurucularından mekanizma tekniği konularının ilk defa bir bilim dalı olarak ele alan Reuleaux bu sınıflandırmayı kullanır. Bugün de büyük ölçüde geçerliliği kabul olunan 6 temel gruplandırma kullanır (Şekil III.1) (Hartenberg and Denavit, 1964):

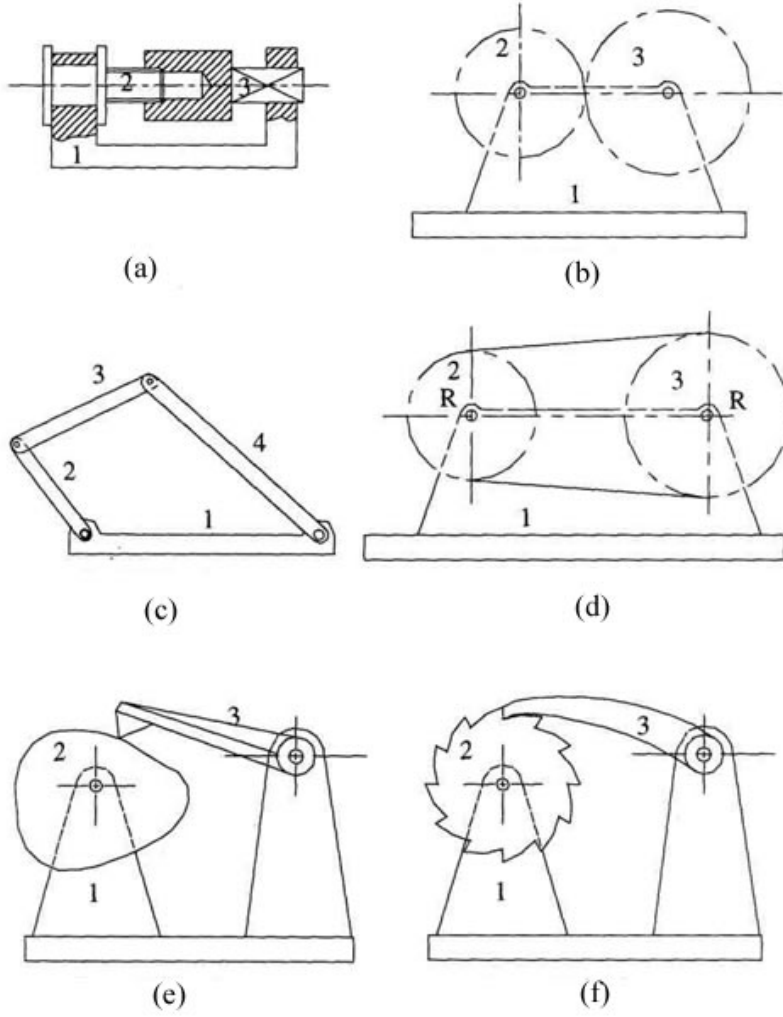
- i. Vida Mekanizmaları
- ii. Çark (dişli çarklar, sürtünme çarkları) mekanizmaları
- iii. Kam (yürek) mekanizmaları
- iv. Kol mekanizmaları

- v. Kayış-kasnak mekanizmaları
- vi. Cırcır veya mandal mekanizmaları

Basit mekanizmalar için bu sınıflandırmalar kullanılabilir ama birçok farklı kinematik çiftin kullanıldığı mekanizmaları sınıflandırmada geçerli değildir.

Bir mekanizmanın tipini belirleyen tüm özellikler sıralanabilir. Bu özellikler mekanizmanın tanımı için yeterlidir ve sınıflandırılmasında da kullanılabilir. Bu özellikler:

- i. Mekanizmanın çalıştığı uzay serbestlik derecesi (düzlemsel, küresel, genel uzay)
- ii. Mekanizma serbestlik derecesi (genel serbestlik derecesine göre veya kritik boyutlara göre)
- iii. Mekanizma uzuv sayısı (dört, beş, altı uzuvlu mekanizmalar gibi)
- iv. Mekanizmada mafsalsal sayısı
- v. Mekanizmada bulunan mafsalsal tipleri (4-R, RRRP mekanizmaları gibi) (Söylemez, 2000)



Şekil III.1. Mekanizma Çeşitleri a) Vida mekanizması b) Çark mekanizması
c) Kol mekanizması d) Kayış-kasnak mekanizması e) Kam mekanizması f) Cırcır mekanizması (Söylemez, 2000)

IV. DÜZLEMSEL HAREKETİN KİNEMATİK ANALİZİ

Konum: Bir rijit cismin veya cisim üzerinde bir noktanın verilmiş olan bir başlangıç noktasına göre yerinin belirlenmesidir.

Yörünge: Bir noktanın zaman içinde aldığı konumların referans düzlemindeki iz düşümüdür

Yer değişim: Referans eksenlerine göre, bir rijit cismin veya üzerinde bir noktanın konumunu değiştirmesidir. Yer değişim vektörel bir değer olup vektörün şiddeti uzunluğudur.

Hız: Bir cismin veya üzerinde bir noktanın zamana göre konumunu değiştirmesidir. Vektörel bir değerdir.

İvme: Hızın zamana göre değişimidir. Vektörel bir değerdir.

IV.1 Noktanın kinematiği

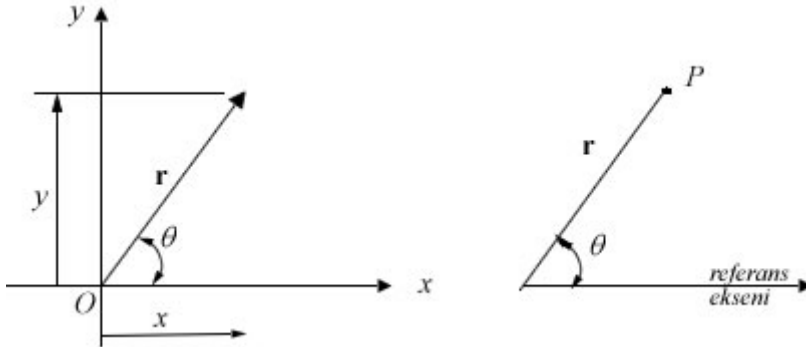
Noktanın konumu bir referans sistemine göre belirlenir. Bu sistem sabit bir sistemdir. Bir P noktasının referans sisteminin en azından bir noktasına uzaklığı zamanla değişiyorsa P noktası bu referans sistemine göre *harekette* denir, ama P nin referans sisteminin her noktasına olan uzaklığı sabit ise P noktası bu referans sistemine göre *hareketsizdir* denir. O yüzden hareket kavramı izafidir. Örneğin bir nokta, üzerinde bulunduğu rijit cisme bağlı bir referans sistemine göre belirlediğinde sabit boyutlar noktanın konumunu belirler. Diğer taraftan hareket eden veya duran bir başka uzvun üzerinde bulunan bir referans sistemine göre

aynı noktanın konumu, farklı değişken değerlerle belirlenir. Referans sistemine göre konumu belirlemek için farklı parametreler kullanılabilir. (Julia, ;Söylemez 2000)

Şekil IV.I de gösterilmiş olan P noktasının konumu O merkezli referans sistemine göre $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ konum vektörü ile belirlenebilir. Konum vektörünün OP uzunluğu ve yön açısı ile belirlenmesi kutupsal gösterimdir.

$$\mathbf{r} = r \angle \theta \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde r, OP uzunluğu, θ ise referans doğrusuna göre OP nin yaptığı açıdır. Açı daima saat yelkovanına ters yönde (SYT) pozitif olacak şekilde ölçülür, eksi açı değerleri saat yelkovanı (SY) yönünde bir açıyı gösterecektir.



Şekil IV.1 Noktanın kutupsal gösterimi

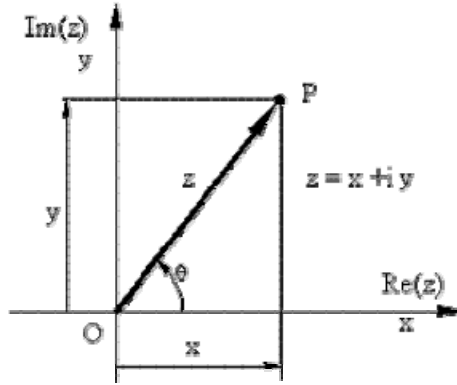
İstenildiğinde bir dik koordinat eksen takımı kullanılarak $\mathbf{OP}$ vektörü dik yönde iki bileşenin değeri ile

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \quad (4.2)$$

biçiminde gösterilir.

IV.1.1 Dik eksen sisteminden kutupsal koordinatlara dönüşüm

Eşitlikleri kullanarak bir eksen sisteminden diğerine geçiş yapılabilir.



Şekil IV.2. Dik eksen sistemi ile kutupsal eksen sistemi arasındaki ilişki

Bir noktanın konumunu belirlemek için kompleks sayılar da kullanılabilir.(Şekil IV.2) Bunun düzlem hareketin incelenmesinde büyük faydaları vardır.

Kutupsal gösterimde kullanılan parametreler (r, θ) ile hesaplamaların kompleks sayılar kullanılarak yapılabilmesi ve dik eksen sistemine dönüşümlerinin kolaylıkla yapılabilmesi mekanizma analizinde önemli faydalar sağlamaktadır. Bir noktanın konumu

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad (4.3)$$

biçiminde gösterilir.

z kompleks sayısı $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ Euler denklemini de denilen eşitliği kullanılarak kolaylıkla bir üstel fonksiyon haline getirilerek

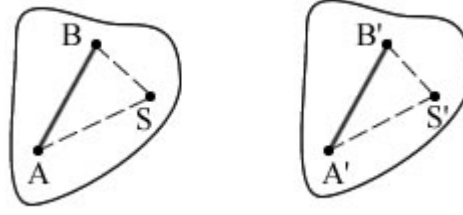
$$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad (4.4)$$

biçiminde gösterilir.

Üstel fonksiyon şeklinde yazılmış olan bu kompleks sayıda (r) katsayısı uzunluğu (veya vektörün şiddetini) $e^{i\theta}$ ise OP yönünde bir birim vektörü göstermektedir ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$). Başka bir anlatım ile, bir sayı $e^{i\theta}$ ile çarpıldığında eksen sisteminde θ açısı kadar SYT dönecektir.

IV.2 Bir Rijit Cismin Kinematığı

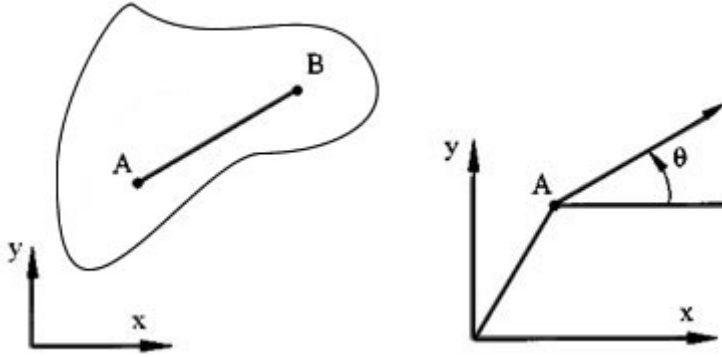
Bir rijit cismin kinematığını incelerken cisme bağlı bir düzlemin bir başka düzlem, örneğin referans sistemini içeren düzlem, üzerindeki paralel hareketi olduğu kabul edilir. Rijit cismin hareketini incelemek demek cismin bağlı olduğu düzlemin üzerindeki noktaların hareketini incelemek demektir. Bir rijit cismin üzerindeki herhangi iki noktanın hareketi belirlendiğinde rijit cismin de hareketi belirlenmiş demektir.



Şekil IV.3. Rijit cisim üzerindeki iki noktanın hareketi

Bir cismin üzerindeki iki noktanın konumlarının her t zamanında bilindiği kabul edilsin. Rijit cisim üzerinde alınan başka bir noktanın bu iki noktaya olan uzaklığı sabittir. Belirli bir t zamanında bu noktanın yine bu iki noktaya olan uzaklıkları rijit cisim tanımından dolayı aynı kalacağı için bu noktanın konumu da belirlidir. Şekil IV.3. de rijit cismin üzerinde A , B ve S noktaları alınsın. Bir süre sonra A ve B noktaları A' , B' konumuna geldiğinde, AS ve BS uzunluklarının bilinen sabit uzunluklar olmasından dolayı S' noktasının konumu A' ve B' konumları ile tanımlıdır.

Rijit cismin konumunu A ve B noktaları yerine cisim üzerinde sabitlenmiş A noktasından B noktasına uzanan bir $\mathbf{AB}$ vektörü ile de tanımlanabilir. $\mathbf{AB}$ vektörü rijit cisim üzerinde sabittir. B her hangi nokta olacağından $\mathbf{AB}$ vektör uzunluğu istenilen bir uzunluk seçilebilecektir. Bu durumda seçilmiş olan referans eksen takımına göre cismin konumu vektörün başlangıç noktası konumu ve $\mathbf{AB}$ doğrusunun referans eksene göre açısal konumu θ ile belirlenebilir. Ayrıca Rijit cisimlerde bir doğru üzerinde bulunan noktaların doğru yönünde hız bileşenleri eşit olmalıdır

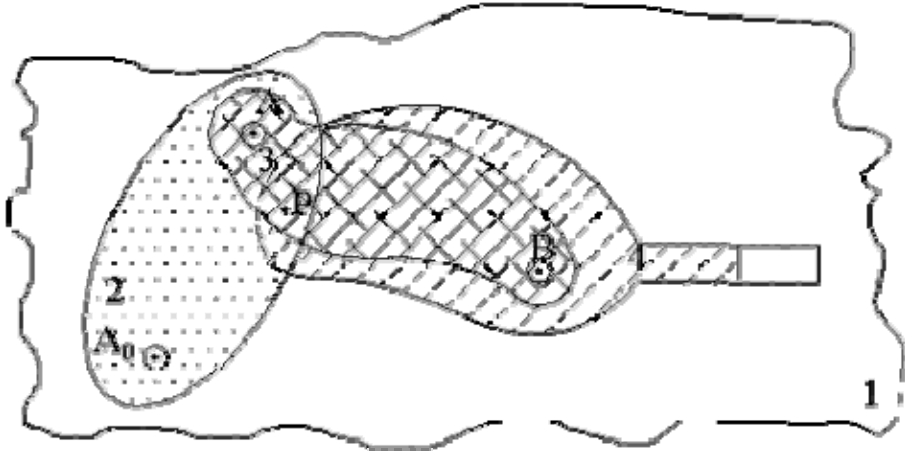


Şekil IV.4. Rijit bir cismin konumunun vektör ve açı ile gösterilmesi

Cismin kinematiği incelendiği için cismin boyutları önemli değildir. Ve daha öncede belirtildiği gibi cisme bağlı, yani cismin içinde bulunduğu düzlemi düşünerek bu düzlemdeki istenilen nokta kullanılabilir (Söylemez, 2000).

IV.2.1 Çakışan Noktalar

Çakışan noktaların özelliklerini anlamak için mekanizmayı oluşturan uzuvların sonsuz boyutlu düzlemler olduğu düşünülmelidir. O halde uzuvlar aslında düzlemin bir parçasıdır. Bu düzlemlerin birbirlerine göre bağlı hareketi bağlantı şekillerine ya da mafsall türlerine göre belirlenir. Döner mafsallar dönmeye izin verir örneğin Şekil IV.5 de A_0 , A ve B. Buna karşın kayar mafsallar doğrusal ötelemeye izin verirler; Şekil IV.5 de 1 ile 4 uzuvları arasındaki kayar mafsall bunun bir örneğidir.



Şekil IV.5 Çakışan noktalar(Hartenberg and Denavit 1964)

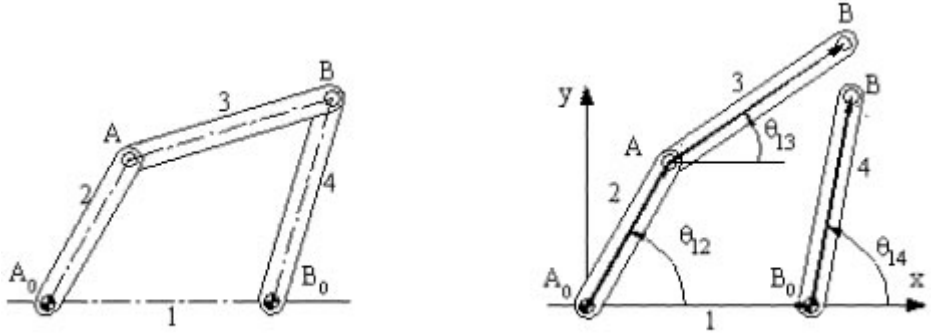
Birbirine paralel 4 düzlemde bir P noktası alınsın. 1 düzleminde bu noktaya P_1 , 2 düzleminde P_2 , 3 düzleminde P_3 ve 4 düzleminde P_4 adını alır. Bu nokta başlangıç durumunda bütün düzlemlerde üst üste gelecek konumdadır. Başka bir ifade ile bu noktaların sabit referans sistemine göre konumları aynıdır ve aynı konum vektörüne sahiptir. Mekanizmanın yer değiştirmesi ile P_1 sabit düzlemde olduğu için konumu değişmeyecektir. P_2 , 1 sabit düzlemine göre A_0 merkezli A_0P yarıçaplı bir çember üzerinde hareket eder diğer bir deyişle 1 düzlemi üzerinde çizdiği yörünge bir çemberdir. 3 düzlemine göre A merkezli AP yarıçaplı bir çember üzerinde hareket eder, 4 düzlemine göre ise bir eğri üzerinde hareket eder bu eğri genelde 4. mertebededir ve nasıl bir eğri olacağının tahmini zordur. Burada 2 düzleminin ya da 2 uzvunun diğer uzuvlara göre bağlı hareketi sonucu üzerinde alınan bir noktanın konumu görülmüş oldu. Benzer şekilde bütün düzlemlerin bağlı hareketleri

incelenerek benzer sonuçlara ulaşılabilir. Şekil IV.5 de P noktası gibi rastgele alınan bir nokta yerine daha özel bir nokta olan A noktası seçilsin ve P noktası için yapılan incelemeye benzer şekilde A noktası için yapılsın. A noktası 2 ve 3 uzuvlarını birbirine bağlayan mafsalsal noktası olduğu için mekanizmanın yer değiştirmesi sonucu iki düzlemde bulunan A_2 ve A_3 noktalarının konumları aynı kalmaktadır ve her t zamanında konum vektörleri aynıdır, böyle noktalara *daima çakışan noktalar* denir. A_1 ve A_4 noktalarının konumları ise yer değiştirme sonucunda değişmiştir. Bu iki nokta sadece bir an için konum vektörleri aynıdır bu tür noktalara da *anlık çakışan noktalar* denir.

IV.3 Mekanizmalarda Vektör Devreleri

Birbirlerine mafsallar ile bağlı uzuvlar kapalı çokgenler oluşturacaklardır. Bu çokgenlerin her birine *devre* denir. Hareket analizinde başlangıç noktası bu devreleri matematiksel olarak ifade etmektir. Kinematik analiz sadece boyutları bilinen uzuvlardan oluşan bir mekanizma için yapılabilir.

Konum analizinde hedef her bir uzuv üzerinde iki noktanın konumunu belirlemek olacaktır. Çünkü bir uzvun konumu iki noktasının bilinmesi ile bilinebilir. Bir uzvun konumunu belirlediğinde diğer uzvun konumunun belirlenmesinde kolaylık sağlamak için bu noktalar, uzuvlar arasında daima çakışan noktalar olması gerekir. Bu şekilde uzuv konumlarını tanımlamak için gereken parametre sayısı azaltılabilecektir. Bir uzvun üzerinde tanımlanan vektörün başlangıç noktası başka bir uzvun üzerinde tanımladığında vektörün bitiş noktası olabilecektir.



Şekil IV.6 Mekanizmalarda vektör devreleri

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A} + \mathbf{AB} = \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{B} \quad (4.5)$$

vektör denklemi Şekil IV.6. dan yazılabilir. B noktası daima çakışan nokta olduğundan (4.5) denklemi mekanizmanın alabileceği her konum için geçerli olması gerekir. (4.5) denklemi oluşan zincirin kapalı bir zincir olduğunu gösterir (daima çakışan noktalar). Bu denkleme *devre kapalılık denklemi* veya *vektör devre denklemi* denir.

Devre kapalılık denkleminde bulunan vektörleri göstermenin bir kolay yolu ise her bir vektörü kompleks sayı kullanarak tanımlamaktır. Örneğin $\mathbf{A}_0\mathbf{A}$ vektörünün uzunluğu a_2 ve yatay eksenle yaptığı açı θ_{12} olduğuna göre:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A} = a_2 \cos \theta_{12} + \mathbf{i}a_2 \sin \theta_{12}$$

veya Euler denklemi kullanılarak üstel fonksiyon olarak

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{A} = a_2 e^{i\theta_2}$$

biçiminde yazılabilir. Benzer bir şekilde, uzuv boyutları a_i olarak ($a_1 = \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0, a_2 = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}$ v.b.) gösterilir ise, vektör devre denklemi kompleks sayılar ile

$$a_2 e^{i\theta_2} + a_3 e^{i\theta_3} = a_1 + a_4 e^{i\theta_4}$$

olarak yazılabilir. İstendiğinde bu vektörler x ve y bileşenleri kullanılarak da yazılabilir. Bu durumda dört-çubuk mekanizması için vektör devre denklemi

$$a_2 \cos \theta_{12} \vec{\mathbf{i}} + a_2 \sin \theta_{12} \vec{\mathbf{j}} + a_3 \cos \theta_{13} \vec{\mathbf{i}} + a_3 \sin \theta_{13} \vec{\mathbf{j}} = a_1 \vec{\mathbf{i}} + a_4 \cos \theta_{14} \vec{\mathbf{i}} + a_4 \sin \theta_{14} \vec{\mathbf{j}}$$

olacaktır. x ve y bileşenleri ayrı ayrı eşitlenir ise

$$a_2 \cos \theta_{12} + a_3 \cos \theta_{13} = a_1 + a_4 \cos \theta_{14}$$

$$a_2 \sin \theta_{12} + a_3 \sin \theta_{13} = a_4 \sin \theta_{14}$$

elde edilir.

V. HIZ ANALİZİ

V.1. Doğrusal ve Açısal Hızlar

Bir hareketin oluşması için bir zaman gereklidir. Bir hareket birbiriyle ilişkili en az üç kavram içerir: *yer değiştirme*, *hız* ve *ivme* bunlara yüksek mertebeden türevler vb. eklenebilir. Bir şeyin hızını tanımlamak için öncelikle bir referans sistemine ihtiyaç duyulur. Hareket bu sisteme göre gözlenir. Kinematik açıdan referans sistemi istenildiği gibi seçilebilse de genelde mekanizmanın uzuvlarının hareketleri *çatı* olarak adlandırılan bir uzva göre incelenir. Bu çatıya göre olan hareketlere *mutlak hareket* bunun dışındaki uzuvlara göre olan hareketlere de *bağıl hareket* denir. Aslında mutlak hareket bağıl hareketin özel bir halidir.

Yer değiştirme daha önce IV. bölümde de tanımladığı gibi ilk ve son konumları arasındaki farktır. Sadece konum koordinatlarına bağlı olması onun vektörel bir nitelikte olduğunu gösterir. İlk ve son konum arasındaki en kısa yoldur. Uzaklık ise vektörel değildir, skaler bir büyüklüktür. İkisi arasında şu fark vardır. İzmir den biri arabasıyla 100 km uzaklıktaki bir yere gidip sonra başladığı noktaya geri dönse bu kişinin yer değiştirmesi 0 dır uzaklık ise 200 km dir. Açısal yerdeğiştirme de buna benzer. Bir doğru bir sabit nokta etrafında doğrudan 270 derece döndüğünde açısal yer değiştirmesi 270 derece ve açısal uzaklığı da 270 derecedir. Doğru bir tam tur attığında açısal yer değiştirmesi 0 dır, açısal uzaklık ise tabii ki 360 derecedir. Bu demek oluyor ki açısal yer değiştirmesi hiçbir zaman 360 dereceye ulaşamayacaktır.

Doğrusal hız, bir noktanın birim zamandaki konum değiştirmesidir. Konum değiştirmesi vektörel bir büyüklük olduğu için doğrusal hız da vektörel bir büyüklüktür ve yönü yer değiştirme doğrultusundadır.

Açısal hız, bir doğrunun açısal konumunun zamana göre değişimidir, düzlemsel mekanizmalar için açısal hız artı ya da eksi bir sayıdır.

Hızın büyüklüğü, birim zamanda alınan uzaklıktır ve vektörel bir büyüklük değildir. Buna skaler hız veya süratte denebilir.

Şekil V.1 den yararlanılarak düzlem üzerindeki bir noktanın konumu değiştiğinde neler olduğu incelenerek yani doğrusal hız incelenerek sonuçları görülebilir. Şekil V.1 de k hareketli düzleminin üzerindeki B noktasının s yolunu çizdiği kağıt düzlemi referans düzlemi olarak kabul edilsin. B noktası Δt zaman aralığında konumunu s_i den s_f ye doğru değiştirir. Polar koordinatlar ρ ve θ için istenilen orijin ve referans doğrusu seçilebilir. s yolunun zamanın değişmesi ile ρ vektörünün ucu tarafından çizilebileceğini düşünülebilir. Bu durumda $\rho(t)$ ve $\rho(t + \Delta t)$ vektörleri s_i ve s_f konumları için konum vektörleri adını alır. Analitik olarak t zamanına bağlı fonksiyon olmaları ve en azından ikinci dereceden türevlerinin bulunmaları gereklidir. Ayrıca s_i de 2 tane dik koordinat eksenini tanımlayabiliriz. Bunlar referans koordinat sistemi

Şekil V.1. Referans düzlemine göre hareket eden düzlem üzerindeki bir noktanın hızı (Hartenberg and Denavit, 1964)

ile bağlantılı olan (r, θ) doğrultuları ile yol ile bağlantılı olan (t, n) doğrultularıdır. Küçük ama sonlu Δt zaman aralığında $s_i s_f$ kirişi boyunca yönlenmiş olan $\Delta \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)$ sonlu vektör değişimine karşılık gelir. $\frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t}$ oranı kiriş boyunca uzanan $\mathbf{v}_{B,av}$ ortalama hız vektörüdür. Skaler hız ise $\frac{|\Delta \mathbf{p}(t)|}{\Delta t}$ dir. Δt zaman aralığı sıfıra yaklaştığında

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}_B(t) \quad (5.1)$$

olur. Anlık bir t zamanında B noktasının hızı s_i nin konumunu tanımlar. $\mathbf{v}_B(t)$ vektörü s_i de eğriye teğet konumuna gelir. $\mathbf{v}_B(t)$ nin büyüklüğünü bulmak için $\Delta \mathbf{p}(t) \neq 0$ ve $\Delta t > 0$ kabul edilerek

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{|\Delta \mathbf{p}(t)|} \frac{|\Delta \mathbf{p}(t)|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{|\Delta \mathbf{p}(t)|} \left| \frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} \right| \quad (5.2)$$

şeklinde yazılır. Δs yay uzunluğunun $|\Delta \mathbf{p}(t)|$ kirişin uzunluğuna oranı 1'e yaklaşır ve limit durumunda

$$|\mathbf{v}_B(t)| = \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right| \quad (5.3)$$

bulunur. Şekil V.1. incelendiğinde $\mathbf{v}_B$ nin n yörünge normaline boyunca hiçbir bileşeni yoktur, teğet doğrultusundadır ve tamamıyla onun içindedir. Ancak r yarıçap ve θ çapraz doğrultularında $\mathbf{v}_B$ nin bileşenleri vardır. Bunlar incelendiğinde $\Delta \mathbf{p}(t)$ vektörünün bileşenleridir, bu şu şekilde gösterilebilir;

$$\Delta \mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_i \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{s}_f \quad (5.4)$$

(5.4) denklemini Δt ile bölersek,

$$\frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{C}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C} \mathbf{s}_f}{\Delta t} = \mathbf{v}_{B,av} \quad (5.5)$$

ortalama hızı bulunur, burada $\mathbf{v}_{B,av}$ farklı doğrultulara sahip iki hız vektöründen oluşmaktadır. Limit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{C}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C} \mathbf{s}_f}{\Delta t} = \mathbf{v}_B \quad (5.6)$$

bulunur. $OC = Os_i$ olduğu için $\mathbf{s}_i \mathbf{C}$ nin orta dikmesi O dan geçer ve $\angle s_i Os_f = \Delta \theta$ ile gösterilirse şekle göre

$$\mathbf{s}_i \mathbf{C} = 2|\mathbf{p}(t)| \sin(\Delta \theta / 2) \quad (5.7)$$

yazılır. $\Delta \theta$ küçük bir değerdir. Küçük bir açının sinüsü yaklaşık olarak kendisine eşittir. O halde

$$|\mathbf{s}_i \mathbf{C}| = |\mathbf{p}(t)| \Delta \theta \quad (5.8)$$

dir. Δt küçülürken $\Delta \theta$ da küçülür ve Δt giderkenki limit durumunda s_i ve s_f ile çakışır, $\angle s_i Os_f$ nin açıortayı da Os_i ile çakışır. $\frac{\mathbf{s}_i \mathbf{C}}{\Delta t}$ vektörü

ise $\mathbf{p}(t)$ konum vektörüne dik olur. Büyüklüğü $\left| \mathbf{p}(t) \frac{d\theta}{dt} \right|$ değerini alır. Bu

$\mathbf{v}_B$ hız vektörünün çapraz $\mathbf{v}_B^\theta$ bileşenidir.

İkinci bileşen vektörü $\frac{\mathbf{Cs}_f}{\Delta t}$, Os_f doğrusu yönündedir ve büyüklüğü, Δt zaman aralığında konum vektöründe meydana gelen değişmeye yani $|\mathbf{p}(t + \Delta t)| - |\mathbf{p}(t)|$ değerine eşittir. Δt küçüldükçe Os_f Os_i 'ye yaklaşır. Limit durumunda ise $\frac{\mathbf{Cs}_f}{\Delta t}$ vektörü $\mathbf{p}$ konum vektörünün doğrultusunu alır ve büyüklüğü, konum vektörünün boyunun zamanla değişim olan $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ye eşittir ve $\mathbf{v}_B^\rho$ ile gösterilir.

Özet olarak $\mathbf{v}_B$ hızı verilen bir anda iki dik bileşenden oluşur,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^\theta + \mathbf{v}_B^\rho \quad (5.9)$$

Ayrıca $|\mathbf{v}_B^\theta| = \rho \frac{d\theta}{dt}$ ve $|\mathbf{v}_B^\rho| = \frac{d\rho}{dt}$ dir.

Diğer taraftan (t, n) dik koordinat sistemi göz önüne alınırsa; $\Delta \mathbf{p}$ vektörü, Δt sıfıra giderken s yolunun teğetine yaklaşacağından, $\mathbf{v}_B$ hız vektörünün yörünge normali üzerinde hiç bir bileşeni yoktur. Yani

$$\mathbf{v}_B^n = 0, \mathbf{v}_B^t = \mathbf{v}_B \quad (5.10)$$

dir. Hareket eden bir cismin hızı bir noktaya göre değil, bir düzleme göre hesap edilir. Hızın varlığı bir yörünge (yolun) bulunmasını gerektirir.

Sıkça rastlanılan özel hallerden birisi, hareketli noktanın referans düzleminin belli bir noktası etrafında çember yayını izlemesidir. Referans düzlemi içinde, hareketin ölçüldüğü sistemin merkezi O , çembersel yolun merkezinde seçildiği için, konum vektörünün boyu sabit bir r değerini alır; $\rho = r = \text{sabit}$. Bu nedenle, k düzlemine ait B_k noktasının hızı,

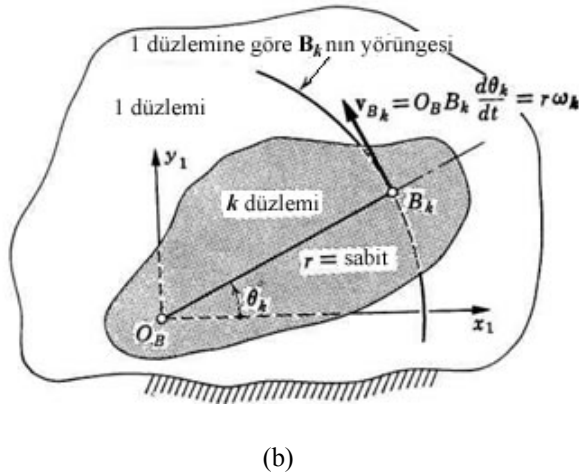
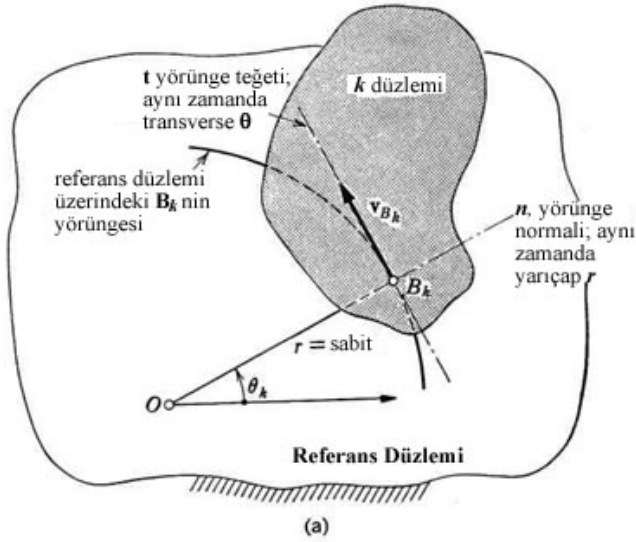
$$|\mathbf{v}_{Bk}| = \mathbf{v}_{Bk}^\theta = r \frac{d\theta_k}{dt} \quad (5.11)$$

olur. $\mathbf{v}_{Bk}$ nin yönü, verilen konumda çembere teğet olacak şekildedir. Burada (r, θ) ve (t, n) koordinatları çıkarılır.

Şekil V.2.(b) de fiziksel duruma bir örnek verilmiştir. Hareketli k düzlemi ve 1 düzlemi birbirlerine O_B noktasında döner mafsalla bağlanmışlardır. k – uzvunun bir B noktasının O_B noktasına olan uzaklığı, rijit cismin tanımından dolayı değişmeyeceğinden, B noktası 1-uzvu üzerinde bir çember çizer. Merkezi döner mafsalin merkezine yerleştirilmiş bir Ox_1y_1 koordinat sisteminde,

$$|\mathbf{v}_{Bk}| = r \frac{d\theta_k}{dt} = r \omega_k = (O_B B) \omega_k \quad (5.12)$$

olur. ω_k k düzleminin 1 düzlemine göre açısal hızıdır. $\mathbf{v}_{Bk}$ de k düzlemindeki B_k noktasının 1 referans düzlemine göre doğrusal

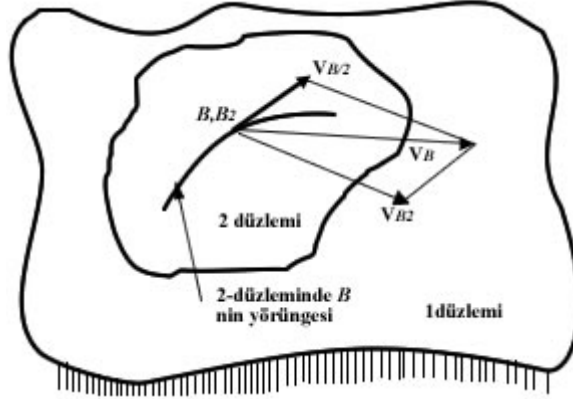


Şekil V.2. a) k hareketli düzleminin 1 referans düzlemi üzerindeki çember yayı yörüngesi b) k uzvu O_B noktasında 1 uzvuna mafsallanmış (Hartenberg and Denavit 1964)

hızıdır. Burada görüldüğü gibi hız iki vektör bileşeni yerine tek vektör bileşeni ile tanımlanmıştır. (Hartenberg and Denavit, 1964; Akçalı, 2002)

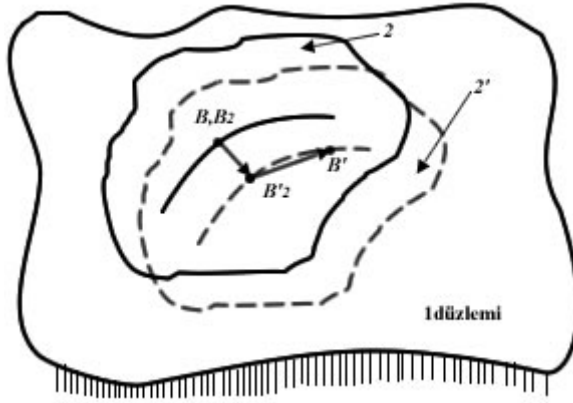
V.2. Bağlı Hız ve Hız Farkı

Bağlı hız kavramını anlamak için 2-düzleminin 1-referans düzlemine göre hareketi düşünülmesi gerekir. 2- düzlemi üzerinde hareket eden bir B noktasının 1-düzlemine göre $\mathbf{v}_B$ ile gösterilen *mutlak hızı* vardır. 2-düzleminde bulunan bir gözlemciye göre B noktasının 2 düzlemine göre $\mathbf{v}_{B/2}$ ile gösterilen *relatif hızı* vardır. Son olarak B_2 noktası B noktası ile anlık çakışır ama 2 -düzlemi ile hareket eder ve $\mathbf{v}_{B2}$ mutlak hızına sahiptir.



Şekil V.3 Bağlı hız

Bağlı üç hız ($\mathbf{v}_B$ *mutlak hızı*, $\mathbf{v}_{B/2}$ *relatif hızı*, çakışan noktanın $\mathbf{v}_{B2}$ *mutlak hızı*) Şekil V.4 de gösterilen küçük yer değiştirme düşünülerek elde edilebilir.

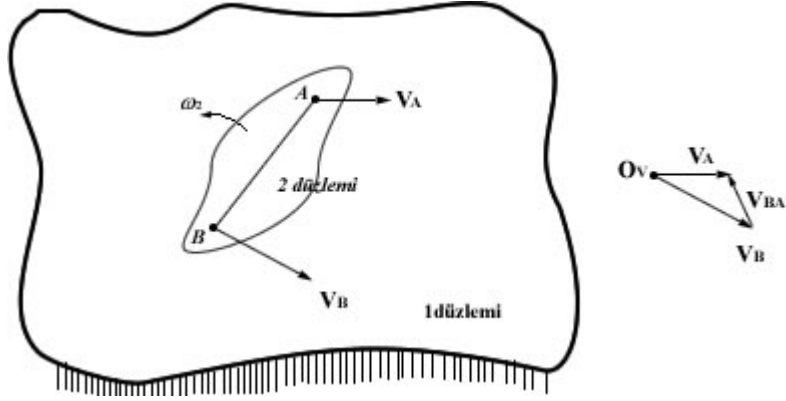


Şekil V.4. Bağıl hızın gösterimi

Şekil V.4 te 2-düzlemi Δt zaman aralığında 2 konumundan 2' konumuna gelsin. Aralığın başlangıcında, B_2 noktası B noktası ile çakışır; Δt aralığı süresince, B_2 2-düzlemi ile hareket ederek B'_2 konumuna gelir. Bununla birlikte B noktası 2- düzlemine göre hareket eder ve zaman aralığının sonunda B'_2 den farklı B' konumu elde edilir. Hız tanımından ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{BB}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{B}_2 \mathbf{B}'_2}{\Delta t} + \frac{\mathbf{B}'_2 \mathbf{B}'}{\Delta t} \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}_2 \mathbf{B}'_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}'_2 \mathbf{B}'}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.13)$$

yazılır.



Şekil V.5. Aynı uzuv üzerinde bulunan 2 noktanın hız farkı

(5.13) eşitliğindeki ilk limit B_2 noktasının hızıdır, ikinci limit 2-düzlemi ile hareket eden bir gözlemcinin gözlemlediği B noktasının hızıdır, yani bu noktanın relatif hızıdır. O halde aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B_2} + \mathbf{v}_{B/2} \quad (5.14)$$

(5.14) eşitliğinde B_2 ve B birbirinden bağımsız çakışık iki noktasının mutlak hızları arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Şekil V.5 te farklı bir durum düşünülebilir; yine 2 düzlemi 1 referans düzlemine göre hareket etsin ama 2-düzlemi birbirinden farklı $\mathbf{v}_A$ ve $\mathbf{v}_B$ mutlak hızlarına sahip iki farklı A ve B noktalarını içersin. Bu iki nokta arasındaki *hız farkı* $\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{BA} \quad (5.15)$$

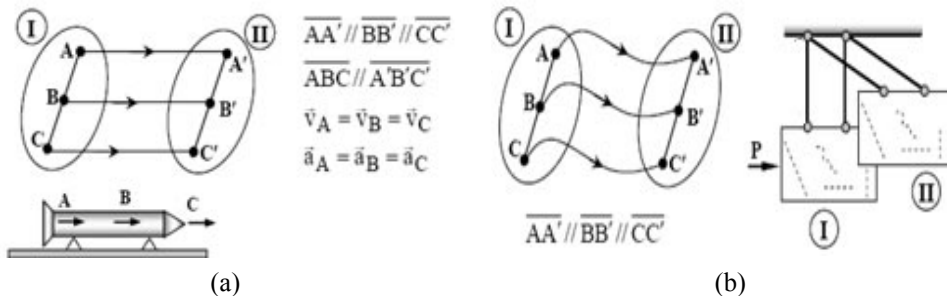
yazılabilir.

Anlatılanlar daha sistematik tarzda şu şekilde ifade edilebilir. Bunun için öncelikle düzlemde rijit cismin hareketi üç değişik şekilde sınıflandırılır(Hartenberg and Denavit, 1964).

V.3. Düzlemdeki Hareketlere Göre Hız ve İvme

V.3.1 Öteleme

Öteleme, rijit cisim içerisindeki her nokta hareket boyunca birbirine paralel yörüngeler çizer. Eğrisel ötelemede rijit cisim içine çizilen düz bir doğru kendisine paralellliğini korur. Öteleme doğrusal ve eğrisel öteleme olarak ikiye ayrılabilir.



Şekil V.6. Öteleme a)Doğrusal öteleme b)Eğrisel öteleme

A, B gibi her hangi iki nokta göz önüne alındığında, birinci konumdan ikinci konuma belirli bir yer değişim olduğunda, $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{A'B'} = AB = A'B'$ dir ve B noktasının konum vektörü $\mathbf{r}_B$;

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} \quad (5.16)$$

olarak yazılabilir. Bu noktanın zamana göre türevi, noktanın hızını verecektir

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \quad (5.17)$$

$\mathbf{r}_{AB}$ vektörünün şiddeti ve açısal yönü değişmediğinden ikinci terim sıfıra eşit olacak ve

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \text{ veya } \mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B \quad (5.18)$$

olur. Aynı değerlendirme ikinci türev için yapılabilir ve

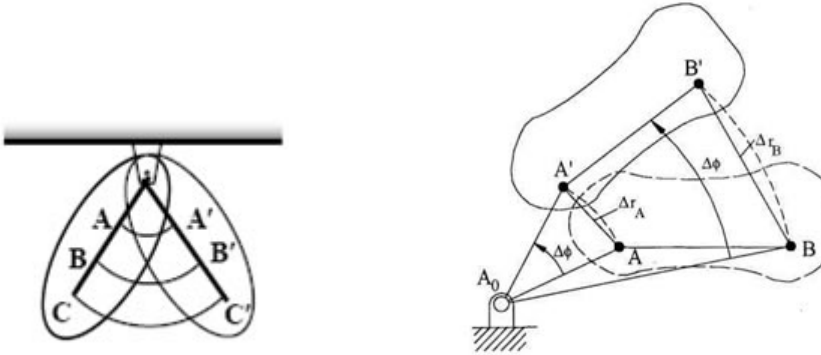
$$\frac{d^2\mathbf{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_A}{dt^2} \text{ veya } \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B \quad (5.19)$$

olur. Öteleme yapan rijit cisimlerde cisim üzerinde bulunan her noktanın yer değişimi, hızı ve ivmesi birbirlerine eşittir.

V.3.2 Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Düzlemsel bir hareket için sabit eksen düzleme dik ve düzlemi A_0 noktasında kesen bir eksendir. Rijit cismin içindeki tüm noktalar eşmerkezli daireler çizerler.

Ek olarak rijit cisim içine çizilmiş her çizgi dönme noktasından geçsin veya geçmesin eşit zaman aralıklarında eşit açılar süpürerek dönerler.



Şekil V.7. Sabit bir eksen etrafında dönme(Söylemez, 2000)

Şekil V.7 deki cisim bir yer değiştirme yapmıştır. Bunun sonucunda

$$\angle AA_0A' = \angle BA_0B' = \Delta\phi$$

olduğu görülebilir.

Her nokta A_0 merkezli bir daire yayı üzerinde hareket edeceğinden o noktanın yer değişim miktarı, o noktanın A_0 merkezinden uzaklığı ile açısal yer değişim miktarı çarpımına eşittir

$$\Delta r_A = r_A \Delta\phi \text{ ve } \Delta r_B = r_B \Delta\phi \quad (5.20)$$

Bu yer değişimin belirli bir zaman aralığında düşünülür ise,

$$\frac{\Delta r_A}{\Delta t} = r_A \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta r_B}{\Delta t} = r_B \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (5.21)$$

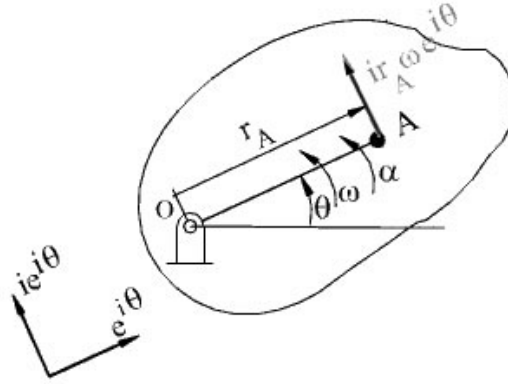
ve Δt limitte sıfıra gittiği düşünülerek

$$v_A = r_A \frac{d\phi}{dt}, \quad v_B = r_B \frac{d\phi}{dt} \quad (5.22)$$

v_A and v_B , A ve B noktalarının hız vektörlerinin büyüklükleridir ve $\frac{d\phi}{dt} = \omega$ cismin açısal hızıdır. Hız vektörlerinin yönü mutlaka o noktayı merkeze bağlayan doğruya dik olacaktır. Hız vektörü, ω ve r_A vektörlerinin

$$v_A = \omega \times r_A \quad (5.23)$$

biçiminde vektörel çarpımıdır.



Şekil V.8. Sabit bir eksen etrafında dönen bir cismin üzerindeki bir noktanın hız vektörü ve kutupsal gösterimi(Söylemez, 2000)

Yukarıdaki ifadeler kompleks sayılar kullanarak da yazılabilir;

$$r_A = r_A e^{i\theta} \quad (5.24)$$

A noktasının konum vektörünü göstermektedir. (5.24) denkleminde

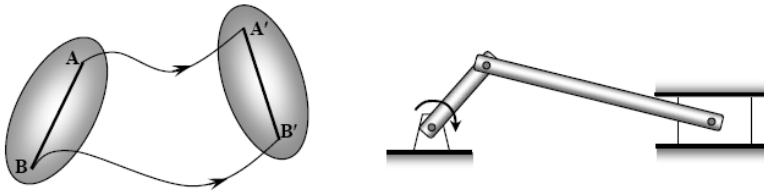
θ değişken bir açıdır ve r_A , A noktasının merkezden uzaklığını gösteren bir sabit parametredir. $e^{i\theta}$ terimi ise A_0A yönünde bir birim vektördür. Konum vektörünün türevi bize o noktanın

$$\mathbf{V}_A = i r_A \omega e^{i\theta} \quad (5.25)$$

hızını verecektir Bu denklemde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ dir. ω açısal hızı eğer θ açısının zamana göre değişimi saat yelkovanına ters yönde artıyor ise, pozitifdir. Saat yönünde zamana göre artış ise negatif bir açısal hızdır (Söylemez,200).

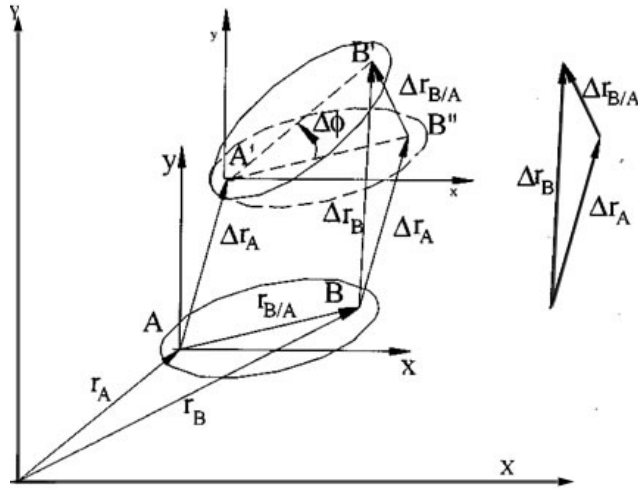
V.3.3. Genel Düzlemsel Hareket

Rijit cismin düzlem içinde dönme ve ötelenme hareketlerini aynı anda birlikte yapmasından doğan harekettir.(Şekil V.9) Bu hareket bir ötelenme ve ardından bir dönme veya bunun tersi bileşenlerinden oluşur bağıl hareket kavramı ile açıklanabilir.



Şekil V.9. Genel düzlem hareket

AB noktaları ile tanımlanan bir cismin düzlemsel hareketi ele alınsın. Şekil V.10 da cismin birinci konumdan ikinci konuma belirli bir Δt zamanında yer değişimi, cismin ilk olarak AB konumundan bir ara konum olan A'B'' konumuna ötelemesi ve A' noktasından geçen düzleme dik bir eksen etrafında dönerek A'B' konumuna gelmesi olarak ele alınabilir. Yani genel hareket dönme ve öteleme hareketlerinin birleşimidir.



Şekil V.10. Genel düzlem hareketinin öteleme ve dönme hareketlerinin birleşimi olarak gösterilmesi(Söylemez, 2000)

Cisim öteleme yaparken her nokta cisim üzerinde seçilen bir noktanın hız ve ivmesi ile hareket edecektir. Cismin dönme yapması sırasında ise, cisim seçilen noktadan geçen düzleme dik bir eksen etrafında dönerken, seçilen nokta konumunu değiştirmeyecek, diğer noktalar bu noktaya göre bir dairesel hareket yapacaktır. Seçilmiş olan

nokta sabit bir nokta değildir ve bu nedenle cismin bu noktaya göre hareketi *bağıl harekettir*.

Hareketi incelemek için hareketli düzlem üzerinde A noktasından geçen, sabit koordinat eksenine paralel bir x-y koordinat eksenini yerleştirilsin. Öteleme sırasında bu koordinat eksenini sabit koordinat eksenine (X-Y) paralel kalır.

Cismin AB konumundan A'B' konumuna gelirken önce öteleme sonra dönme yaptığı düşünülebilir. Hareket AB konumundan A'B'' konumuna her noktanın $\Delta \mathbf{r}_A$ yer değişimi olacak şekilde öteleme yapar. Öteleme A noktasının toplam hareketi kadardır. Cisim A' den geçen düzleme dik bir eksen etrafında $\Delta\phi$ açısı kadar dönme yapar. Cismin AB uzunluğu sabit olacağından B', A' merkezli BA yarıçaplı bir daire yayı üzerinde olacaktır ve B noktası A noktasına göre $\Delta \mathbf{r}_{B/A}$ kadar konumunu değiştirecektir. Bu hareket B noktasının A noktasına göre *bağıl hareketidir*.

B noktasının toplam yer değişimi bu iki yer değişimin

$$\Delta \mathbf{r}_B = \Delta \mathbf{r}_A + \Delta \mathbf{r}_{B/A} \quad (5.26)$$

vektörel toplamıdır. B'' den B' ne hareket bir dönme hareketi olduğundan, $\Delta \mathbf{r}_{B/A} = |BA|\Delta\phi$ olacaktır. Bu bağıl hareketin o andaki mutlak açısal dönmenin fonksiyonudur. $\Delta\phi$ cismin birinci konumu ile ikinci konumu arasında kalan dönme açısıdır. Bu nedenle değişik A noktası seçimi bu açısal dönmeyi etkilemeyecektir. Aynı şekilde, dönme ve öteleme hareketlerinin sırası değiştirilse, dönme açısı yine aynıdır. Yer değişim

bir zaman içinde olduğundan elde edilen denklem bu zaman aralığına bölündüğünde ve bu zaman aralığının limitte sıfır olduğu düşünüldüğünde

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \quad (5.27)$$

olur. Bu denklemde $\mathbf{V}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ dır, $\boldsymbol{\omega}$ cismin açısal hızı ve $\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ (B noktasının A noktasına göre bağıl konumu) dır.

$\mathbf{V}_{B/A}$ cismin üzerinde bulunan A ve B noktaları arasında *bağıl hız* dır. $\mathbf{V}_A$ ve $\mathbf{V}_B$ A ve B noktalarının *mutlak hız* larıdır (Dynamic and Vibration).

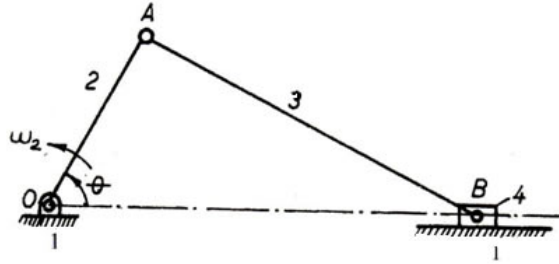
V.4 Hızların Bulunması

Mekanizmalarda hızların bulunmasında bağıl-hız yönteminden faydalanılır. Bunun için önce hızları aranan ve bilinen parçaların hız vektörleri yazılır daha sonra vektör poligonları oluşturularak sonuç aranır. Hız eşitlikleri grafik olarak çözüldüğünden şekil ve hız ölçekleri ile gerçek büyüklükleri çizim büyüklüklerine çevirmek gerekir. Şekil ölçeği k_ϕ ; hız ölçeği k_v ile gösterilirse,

$$k_\phi = \frac{S_\phi}{S_g}, \quad k_v = \frac{V_\phi}{V_g} \quad (5.28)$$

oranı yazılır. Burada S_ϕ ve V_ϕ sırasıyla çizimde kullanılan şekil ve hız büyüklüklerini; S_g ve V_g de sırasıyla gerçek uzunluk ve hız büyüklüklerini göstermektedir.

Örnek olarak krank-biyel mekanizmasında bağıl-hız yöntemi uygulansın.(Şekil V.11)



Şekil V.11.Krank biyel mekanizmasında hızların bulunması

Krank (OA) saatin ters yönünde $\omega = 20$ r/s lik bir açısal hızla dönsün, biyelin açısal hızı ile pistonun hızı bulunsun. Öncelikle vektörel hız eşitliği yazılır,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A}$$

bu eşitlikte A noktasının (2) nolu uzva ait bir nokta olduğu göz önüne alınırsa hız ve doğrultusu bilinmekte; B ve BA'nın hareket doğrultuları bilinmekte; büyüklükleri bilinmemektedir.

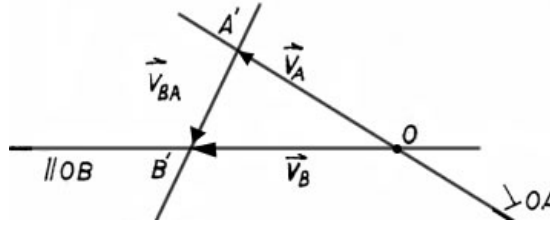
$$V_A = \omega_2 \cdot OA = (20 \text{ r/s})(3 \text{ cm}) = 60 \text{ cm/s}$$

V.4.1 Mehmke Teoremi

Mehmke teoremi: Hız poligonlarında vektörlerin son uç noktalarını, hızını gösterdikleri noktaların harfleri ile işaretlensin $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ hız vektörlerinin uç noktalarını birleştirdiğimizde abc gibi iki farklı üçgen

oluşacaktır. Hız poligonunda oluşan abc üçgeni mekanizma uzvunda bulunan A,B ve C noktalarının oluşturduğu üçgen ile benzerdir.

Mehmke teoremine olarak Şekil V.11 deki mekanizma ile benzer olan hız üçgeni Şekil V.12 verilebilir.



Şekil V.12. Hız üçgeni

Buna göre bir rijit cismin üzerindeki iki noktanın hızı biliniyorsa bu üçgen benzerliğini kullanarak üçüncü noktanın hızı bulunabilir.

VI. İVME ANALİZİ

İvme, hızda olduğu gibi, yer ve zaman gibi iki temel büyüklükten yola çıkılarak türetilmiş bir kavramdır. İvme doğurduğu kuvvetlerden ötürü dolaylı olarak duyulabilecek bir niceliktir. Dünyada ve evrende hareket halinde olan cisimlerin veya canlıların birbiri ile çarpışmaması, bunlara aynı anda değişik koordinatlar verecek olan hareket ögesi, ivmeye dayanır.(Akçalı, 2002)

VI.1 Doğrusal ve Açısal İvme

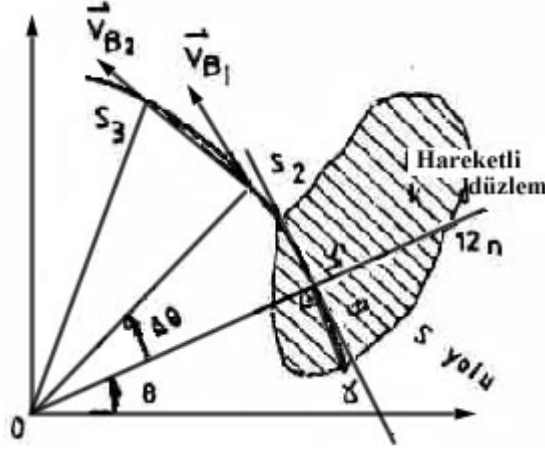
Doğrusal ivme, bir noktanın birim zamanındaki hız değişimidir. Hız bir vektör olduğu için doğrusal ivme de yönü ve büyüklüğü (şiddeti) olan bir niceliktir.

Açısal ivme, bir doğrunun açısal hızında birim zamanda meydana gelen değişme miktarıdır.

Hareketli bir k düzleminin B noktasının Şekil VI.I de gösterildiği gibi s yolunu izlediği düşünölsün. B noktasının ivmesini ölçmek için s yolunun B ye ait eğrilik merkezi O da bir xoy referans sistemi alınacaktır.

Bir noktanın hızını tanımlamak bu noktaya çok yakın ikinci bir noktanın bilinmesini gerektirdiğinden, B nin S_1 deki V_{B1} ani hızının S_2 ve S_1 noktalan, S_2 deki V_{B2} ani hızının da S_3 ve S_2 komşu noktalarının kullanılarak bulunduğı kabul edilsin, t ve n sırayla s yolunun S_1 deki teğet ve normali olsunlar, n normalinin Ox referans eksenini ile yaptığı açı

θ olsun. $\Delta\theta$ S_1 ve S_2 noktalarını ayıran küçük bir dönme açısıdır, ρ da s yolunun S_1 deki eğrilik yarıçapıdır. ΔS , B noktasının S_1 den S_2 ye gelinceye dek aldığı doğrusal yol; S_1 ile S_2 arasındaki kiriştir.

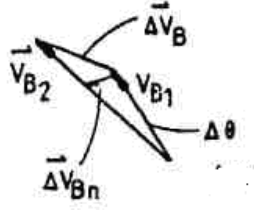


Şekil VI.1. Hareketli bir düzlemin bir noktasının eğrilik merkezindeki eksene göre ivmesi (Akçalı, 2002)

B noktasının $\mathbf{V}_{B_2} - \mathbf{V}_{B_1}$ hız değişimi Δt gibi sonlu bir zamana karşılık ise, S_1 ile S_2 arasındaki ortalama ivmesi $\frac{\mathbf{V}_{B_2} - \mathbf{V}_{B_1}}{\Delta t}$ olur. B noktasının S_1 deki ani ivmesi ise Δt nin sıfıra gittiği limit durumunda elde edilir;

$$\mathbf{a}_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{B_2} - \mathbf{V}_{B_1}}{\Delta t} \quad (6.1)$$

$\mathbf{V}_{B_2}$, $\mathbf{V}_{B_1}$ hız vektörleri ile bunlardaki $\Delta \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_{B_2} - \mathbf{V}_{B_1}$ hız değişimi Şekil VI.2 de gösterilmiştir.



Şekil VI.2 Hız değişimi

V_{B_2} hız vektörü OS_2 doğrusuna, V_{B_1} nin V_{B_2} hız vektörü de OS_1 doğrusuna dik olduklarından V_{B_1} , V_{B_2} arasındaki açı $\Delta\theta$ olacaktır. V_{B_1} üzerindeki iz düşümü alınarak ΔV_B hız değişim vektörü ΔV_{B_n} ve ΔV_{B_t} gibi iki dik bileşenine ayrılabilir. Bu durumda ivme,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B_n} + \mathbf{a}_{B_t} \quad (6.2)$$

şeklinde yazılabilir. Çünkü,

$$\mathbf{a}_{B_n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{B_n}}{\Delta t} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{a}_{B_t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{B_t}}{\Delta t}$$

Şekil VI.2 deki hız poligonu ile ivme bileşenleri hesaplanabilir;

$$\Delta V_{B_n} = V_{B_1} \sin \Delta\theta \cong V_{B_1} \Delta\theta \quad (6.4)$$

(6.4) denkleminde küçük $\Delta\theta$ değeri için $\Delta S = \rho \Delta\theta$ yazılabileceğinden

(6.3) denklemi ;

$$\mathbf{a}_{B_n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{B_1} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} V_{B_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (6.5)$$

şeklini alır. Hız tanımından da

$$V_{B_t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (6.6)$$

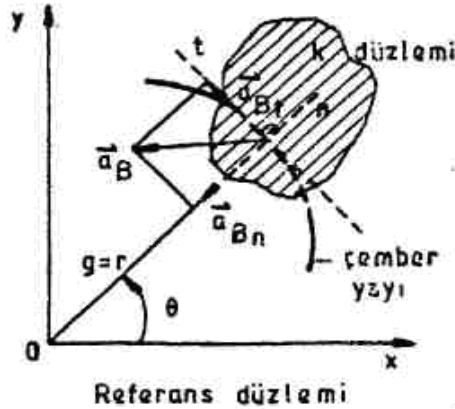
olacağından,

$$a_{B_n} = \frac{V_{B_t}^2}{\rho} \quad (6.7)$$

bulunur. Δt küçüldükçe, $\Delta \theta$ ve ΔS küçülecektir; OS_2, OS_1 e, ΔS de t teğetine yaklaşacaktır. Limit halinde ($\Delta t \rightarrow 0$), OS_2, OS_1 ile ΔS de t ile çakışacağından a_{B_n} vektörünün yönü yörünge normali n üzerinde eğrilik merkezi O ya doğru olacaktır. Bu yüzden, a_{B_n} ye normal ivme bileşeni denir. a_{B_t} vektörü, $\Delta \theta$ sıfıra gittiğinde, teğet ile aynı doğrultuda ve

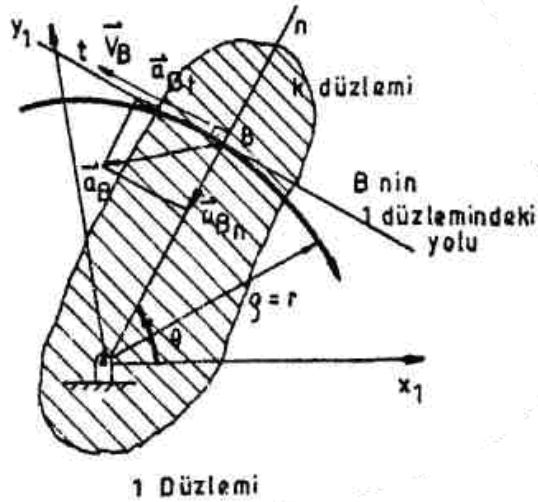
$$a_{B_t} = \frac{dV_B}{dt} \quad (6.8)$$

büyükliğünde olacaktır. a_{B_t} ye teğetsel ivme bileşeni denir.



Şekil VI.3. Hareketli düzlemin çember yayını izleyen bir noktasının çember merkezindeki ivmesi (Akçalı, 2002)

s yolunun bir çembersel eğri olması halinde ivme formüllerinin alacağı biçim, mekanizmalar için pratik sonuçları bakımından, incelenmeye değerdir; Şekil VI.3 de hareketli k düzleminin bir noktasının çember yayının izlemesinden sonuçlanabilecek normal ve teğetsel ivme bileşenleri ile bileşke ivmeyi göstermektedir. Kuşkusuz, burada da ivme, referans düzlemi üzerinde, çemberin merkezinde bulunan bir xoy eksen sisteminde ölçülmektedir. İvme bileşenlerinin değerleri (6.7) ve (6.8) denklemlerine göre saptanır.



Şekil VI.4. O noktasında mafsallanmış hareketli düzlemin çember yayını izleyen bir noktasının çember merkezindeki ivmesi(Akçalı, 2002)

Şekil VI.4 de, Şekil VI.3 e benzer bir durum, ancak bu kez hareketli k düzlemi referans düzleminin değişmez bir O noktasına bağlı kalarak, O nun etrafında değişen bir açısal hızla dönmesi durumu görülmektedir. O ile B arasındaki uzaklık k düzlemini temsil eden rijit cisimden ötürü değişmez kalacağından, B noktası (1) düzlemi üzerinde OB yarıçaplı ($\rho = r$) bir çember çizecektir. Merkezi döner çiftin (O) merkezine yerleştirilmiş Ox_1y_1 referans sisteminde, rijit cismin (k düzlemi) açısal hızı ω ise, B nin

doğrusal hızı

$$V_B = OB.\omega \quad (6.9)$$

olacağından normal ivmesi,

$$a_{B_n} = OB.\omega^2 \quad (6.10)$$

ile hesaplanır. B noktasının teğetsel ivmesi ise

$$a_{B_t} = OB.\frac{d\omega}{dt} \quad (6.11)$$

denklemleri ile bulunur. (6.11) de $\frac{d\omega}{dt}$, açısal hızdaki zamana göre

değişiminin matematik ifadesidir. Açısal ivmenin tanımı anımsanırsa, $(\frac{d\omega}{dt})$

nin açısal ivme olduğu görülür: Sembolik olarak,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (6.12)$$

kullanılırsa, (6.11) denklemi

$$a_{B_t} = OB.\alpha \quad (6.13)$$

biçimini alır. Bileşke ivmenin değeri

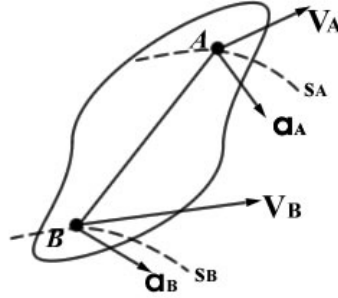
$$a_B = \sqrt{a_{B_t}^2 + a_{B_n}^2} = OB\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad (6.14)$$

denklemleri ve yönünün teğete göre

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{a_{B_n}}{a_{B_t}} = \tan^{-1} \frac{\omega^2}{\alpha} \quad (6.15)$$

açısı ile saptanır.

VI.2 Bağıl İvme



Şekil VI.5. Düzlemde bir rijit cismin iki noktasının bağıl ivmesi

Düzlemde hareketli rijit bir cismin Şekil VI.5 de gösterildiği üzere A ve B gibi iki noktasının s_A, s_B yolları, $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B$ hızları ve $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B$ ivmeleri verilmiş olsun, rijit cismin A ile B noktasının hızları arasında,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \quad (6.16)$$

ilişkisi vardır. B noktasının hızı $\mathbf{V}_A$ öteleme hızı ile B nin A etrafındaki dönme hızından ($\mathbf{V}_{BA}$) oluşmaktadır. Rijit cismin açısal hızı,

$$\omega = \frac{V_{BA}}{BA} \quad (6.17)$$

olur. Benzer şekilde, B nin ivmesinin

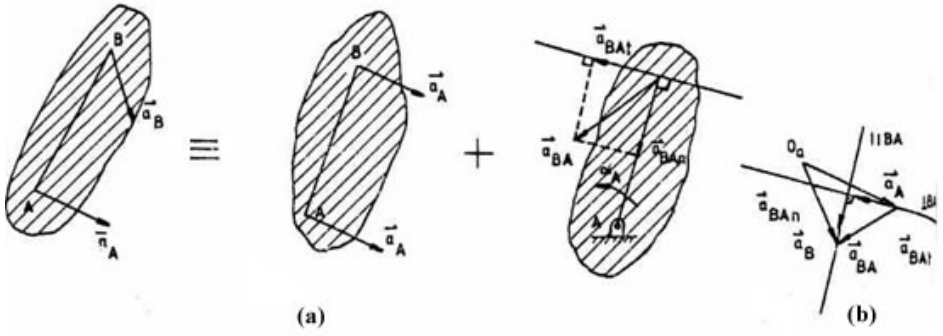
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} \quad (6.18)$$

eşitliği uyarınca, iki bileşenden oluştuğu gözlenir. Birisi A nın herhangi bir referans düzleminden ölçülen ($\mathbf{a}_A$) ivmesi: diğeri B nin A dan ölçülen $\mathbf{a}_{BA}$ bağıl ivmesi,

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad (6.19)$$

biçiminde de yazılır. Buna göre, aynı hareketli düzlem üzerinde değişmez

B noktasının değişmez A noktasına göre ivmesi $\mathbf{a}_{BA}$, noktaların ivmeleri arasındaki vektörel farktır. $\mathbf{a}_{BA}$ bağıl ivmesi, A etrafında dönebilecek biçimde mafsallanmış rijit cismin B noktasının sahip olduğu ivme olarak da düşünülebilir. B nin A ya göre bir çembersel yayı izlediği düşünülen bu durumda, A noktasına göre ivmesi, çözümleme amaçları için



Şekil VI.6 a) Bağıl ivme b) ivme poligonu (Akçalı, 2002)

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA_n} + \mathbf{a}_{BA_t} \quad (6.20)$$

biçiminde bileşenlerine ayrılabilir. Normal ivme, $\mathbf{a}_{BA_n}$ bağıl hız çözümlemesinden elde edilen bilgilerden saptanır,

$$a_{BA_n} = \frac{V_{BA}^2}{BA} = \omega^2 BA \quad (6.21)$$

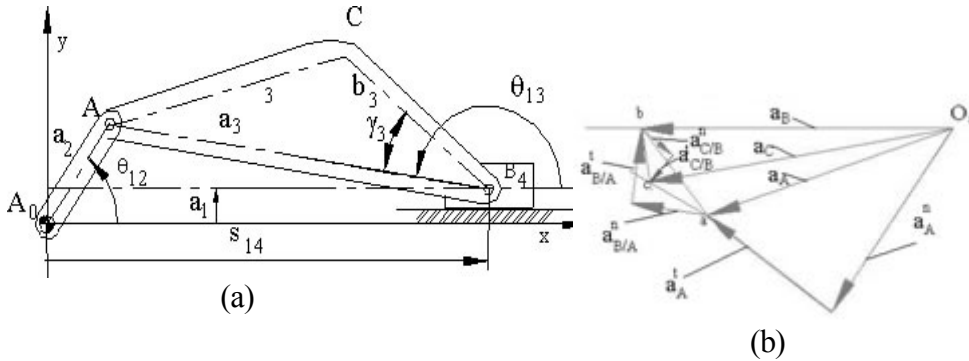
normal ivmesinin yönü, BA doğrultusunda B den A ya doğru olur, BA ya dik doğrultudaki a_{BA_t} teğetsel ivmesinden, rijit cismin açısal ivmesini (α) hesaplamada yararlanılır:

$$\alpha = \frac{a_{BA_t}}{BA} \quad (6.22)$$

Daha karmaşık mekanizmaların ivmeleri bu yolla çözülebilir. İvme analizi için önce hız analizi yapılmalıdır. Bağlı –ivme yönteminde vektörel eşitlikler yazılır daha sonra vektör poligonları ile grafik olarak çözülür. Bunun için çizim büyüklükleri gerçek ivme büyüklükleri arasında bir ivme ölçeği kullanılır.(Dynamic and Vibration)

VI.3 İvmelerde Mehmke Teoremi

İvmelerdeki Mehmke Teoremi aynı hızlardaki Mehmke Teoreminde olduğu gibidir. Yani ivme poligonunda oluşan abc üçgeni mekanizma uzvunda bulunan A,B ve C noktalarının oluşturduğu üçgen ile benzerdir. ABC üçgeni ile abc üçgeninin yönü aynıdır.



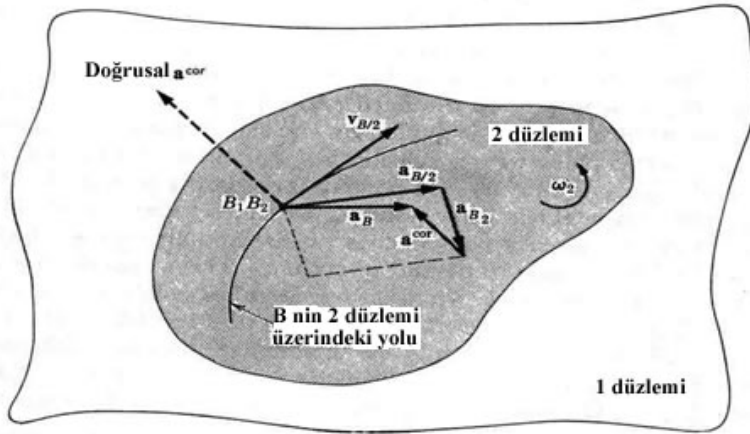
Şekil VI.7. İvmelerde mehmke teoremi a)krank-biyel mekanizması b) ivme poligonu (Söylemez'den 2000)

Bir mekanizmanın her uzvunun hız poligonunda bir görüntüsü olduğu gibi, ivme poligonunda da bir görüntüsü vardır. Bu yöntemle iki noktasının

ivmeleri verilmiş olan bir rijit cismin diğer tüm noktalarının ivmelerinin bağıl-ivme eşitliklerine başvurulmadan bulunabilir.

VI.4. Coriolis İvmesi

2-düzleminin 1-düzlemine göre hareket ettiğini düşünelim(Şekil VI.8). B noktası 2-düzlemine göre $\mathbf{v}_{B/2}$ bağıl hızı ve $\mathbf{a}_{B/2}$ bağıl ivmesi ile hareket ediyor olsun. Bu bağıl ivme 2-düzlemi üzerindeki gözlemci tarafından gözlenen ivmedir. B noktasının 1-düzlemine göre



Şekil VI.8. Hareketli bir düzlem üzerindeki bir noktanın coriolis ivmesi (Hartenberg and Denavit, 1964)

ayrıca $\mathbf{v}_B$ mutlak hızı ve $\mathbf{a}_B$ mutlak ivmesi vardır. Son olarak 2-düzleminde bulunan ve B noktası ile çakışan sabit B_2 noktasının 1-düzlemine göre $\mathbf{v}_{B_2}$ hızı ve $\mathbf{a}_{B_2}$ ivmesi vardır. Relative hız teoremine göre

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/2} + \mathbf{v}_{B_2} \quad (6.23)$$

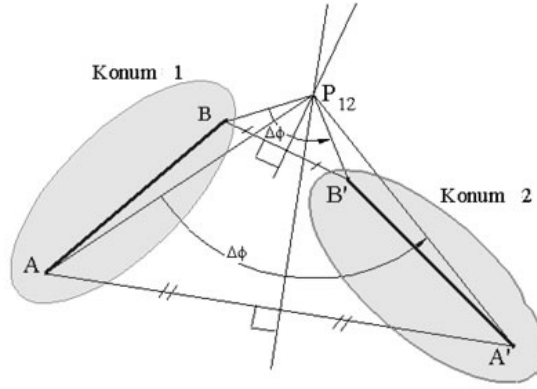
ifadesi yazabilir ve ivmeler için de benzer bir eşitliğin yazılabileceği beklenir. Ama eğer ω_2 sıfırdan farklı bir açısal hız ise bu mümkün olmaz. İvmelerde

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B/2} + \mathbf{a}_{B_2} + \mathbf{a}_{\text{cor}} \quad (6.24)$$

biçiminde yazılabilir, buradaki $\mathbf{a}_{\text{cor}}$ Coriolis ivme bileşenidir ve bu tamamlayıcı ivme bileşeni olarak da bilinmektedir. Coriolis bileşeni, ω_2 açısal dönmesi sonucu B noktasının 2- düzleminde çizdiği yolun oluşturduğu 2 doğrusal vektör bileşenin değişmesinin sonucudur. Coriolis ivmesinin büyüklüğü $2v_{B/2}\omega_2$ dir. Doğrultusu daima bağlı hareketin yolunun normali doğrultusundadır. Ayrıca bu ivme açısal hız altında $\mathbf{v}_{B/2}$ hız vektörünün 90^0 dönmüş hali olarak algılanabilir. (Denavit and Hartenberg, 1964)

VII. ANİ DÖNME MERKEZİ

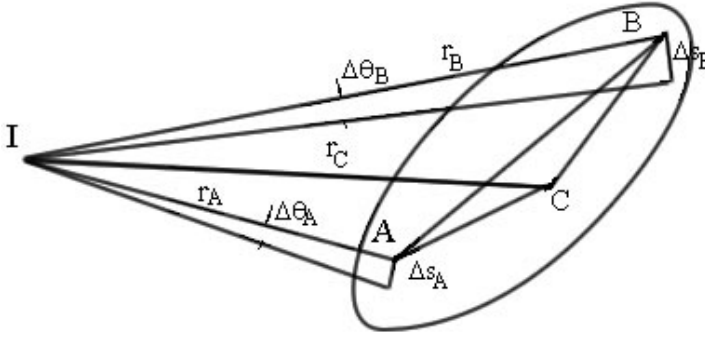
Genel düzlemsel hareket bir dönme ile tanımlanabilir. Şekil VII.1 de gösterildiği biçimde bir cismin AB konumundan A'B' konumuna gelmesi için bu cismin bağlı olduğu düzlemlerin AA' ve BB' doğrularının orta dikmelerinin kesişimi olan bir P_{12} noktası etrafında dönmesi ile sağlanabilir. Bu noktaya *dönme polü* denir.



Şekil VII.1. Hareket eden bir cisme ait dönme polü

Burada $\Delta\phi$ cismin iki konumu arasındaki açısal dönmesidir. Her hangi bir noktanın cismin genel düzlemsel hareketi sırasındaki yörüngesi ile cismin P_{12} etrafında dönmesi ile elde edilen P_{12} merkezli daire yayı yörüngesinin eşit olması için iki konum arasındaki uzaklığın sonsuz yakın olması yani limit durumunda mümkün olur. O zaman her genel düzlemsel hareket bir dönme hareketine eşit olacaktır. Bu limit durumunda A ve B noktalarının yörünge normallerinin kesişimi durumuna gelen bu P_{12} dönme polü *ani dönme merkezi (adm)* adını alır.

Her düzlemsel hareket için, incelendiği anda geçerli olmak üzere, bir ani dönme merkezi bulunur.



Şekil VII.2 Ani dönme merkezi

Şekil VII.2 den,

$$r_A \cdot \Delta\theta_A = \Delta s_A, \quad r_B \cdot \Delta\theta_B = \Delta s_B, \quad (r_A = IA \text{ ve } r_B = IB) \quad (7.1)$$

bu yer değişim Δt zaman aralığında olacaktır:

$$r_A \cdot \frac{\Delta\theta_A}{\Delta t} = \frac{\Delta s_A}{\Delta t}, \quad r_B \cdot \frac{\Delta\theta_B}{\Delta t} = \frac{\Delta s_B}{\Delta t} \quad (7.2)$$

Ancak $\Delta\theta_A = \Delta\theta_B = \Delta\phi$ rijit cismin dönme açısı olacağından Δt sıfıra giderken

$$\frac{d\theta_A}{dt} = \frac{d\theta_B}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \omega \quad (7.3)$$

yazılabilir. Bu denklemde ω cismin açısal dönme hızını gösterdiğine göre herhangi bir düzlemsel hareket *bir an* için bir ani dönme merkezi etrafında dönme yapıyor olarak düşünülebilir ve cismin üzerinde bulunan her hangi bir C noktasının hız vektörünün şiddeti

$$v_C = \omega \cdot r_C = \omega \cdot IC \quad (7.4)$$

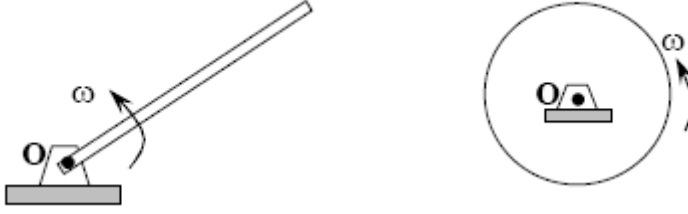
biçimindedir. Bu denklemden yararlanarak özel olarak I ani dönme merkezi noktasının hızının sıfır olduğu açıktır. Bu nokta hareketli düzlemde o an için sıfır hıza sahip tek noktadır. Cisim üzerinde bulunan her hangi bir noktanın hızının şiddeti o noktanın ani dönme merkezinden uzaklığının cismin açısal hızı ile çarpımıdır. Noktanın hızı noktayı ani dönme polüne bağlayan doğruya dik olup yönü açısal hıza göre dir. Vektörel olarak şu eşitlik yazılabilir;

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C \quad (7.5)$$

burada $\boldsymbol{\omega}$ z yönünde bir açısal hız vektörü, $\mathbf{r}_C = \mathbf{IC}$ vektörüdür. Sonuç olarak, hız analizi açısından her türlü düzlemsel hareket anlık olarak ani dönme merkezi etrafında dönme olarak düşünülebilir.

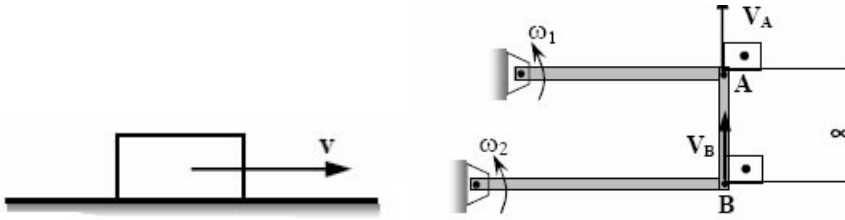
VII.1. Ani Dönme Merkezlerinin Belirlenmesi

Bir cismin hareketinde referans eksenini sabit cisim üzerinde de olabilir hareketli bir cismin üzerinde de bulunabilir. Bu nedenle eğer düzlemsel hareket sabit bir referans eksenine göre ise, *mutlak ani dönme merkezi*, referans eksenini hareketli bir düzlem üzerinde ise *bağıl ani dönme merkezi* denir. Şekil VII.3 de mutlak ani dönme merkezlerine örnekler verilmiştir. Bir rijit cisim sabit bir eksen etrafında dönüyor ise, ani dönme merkezi bu eksenin merkezi ile çakışır ve bu nokta sürekli olarak ani dönme merkezidir. Aşağıdaki şekilde O noktaları mutlak ani dönme merkezleridir.



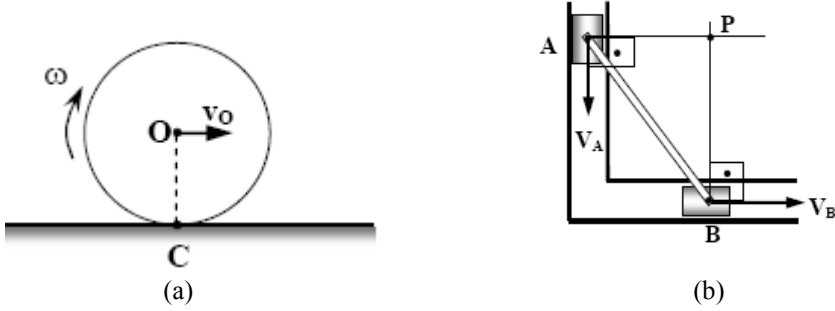
Şekil VII.3. Mutlak ani dönme merkezlerine örnek

Cisim öteleme yapıyor ise, ani dönme merkezi öteleme eksenine dik yönde sonsuzdadır.(Şekil VII.4)



Şekil VII.4. Ani dönme merkezleri sonsuzdadır

Kaymadan yuvarlanma hareketinde cisimlerin değme noktaları ani dönme merkezleridir. Çünkü bu noktalarda bağıl hareket yoktur ve o an için bu noktaların birbirlerine göre bağıl hızları sıfırdır. Şekil VII.5 de C ve P noktası bağıl ani dönme merkezidir.



Şekil VII.5. a) Kaymadan yuvarlanan bir cismin ani dönme merkezi değme noktasıdır.
b) Bir birine göre bağıl hareket yapan iki cismin ani dönme merkezi

Birbirlerine göre bağıl hareket yapan cisimlerde bir ani dönme merkezi vardır. Şekil VII.5.(b) deki hareketi bir düzlemin başka bir sabit düzlem üzerindeki hareketi olarak düşünölsün.

A ve B noktalarının hızları V_A ve V_B olsun. Ani dönme merkezi bu iki noktanın yörünge normalleri üzerinde olacağından. A noktasının dönme merkezi V_A ya dik olan PA doğrusu üzerinde, B noktasının dönme merkezi V_B ye dik olan PB doğrusu üzerindedir. Bu iki doğrunun kesim noktası olan P noktası ani dönme merkezidir. Ve o anda hareketli düzlem sabit düzlem üzerinde P noktası etrafında dönmektedir.

n uzuvlu bir mekanizmada o an için her iki uzuv arasında bir ani dönme merkezi vardır. Buna göre ani dönme merkezi sayısı

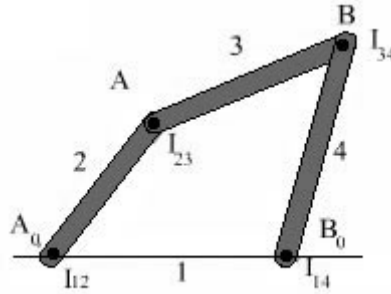
$$N = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \quad (7.6)$$

dir. Bir mekanizmada ani dönme merkezlerini bulmak istediğimizde artık mekanizmada cisimlerin yerlerini uzuvlar alırlar ve her iki uzuv arasında

bir ani dönme merkezi olacağından Şekil VII.6 da gösterilen i ve j uzuvları arasındaki ani dönme merkezini göstermek üzere I_{ij} veya I_{ji} gösterimlerimden biri kullanılmaktadır. Örnek olarak bir 4 kol mekanizmasının ani dönme merkezlerini bulunmak istensin. Öncelikle bu mekanizmadaki ani dönme merkezi sayısı bulunur:

$$N=4.(4-1)/2=6 \quad (7.7)$$

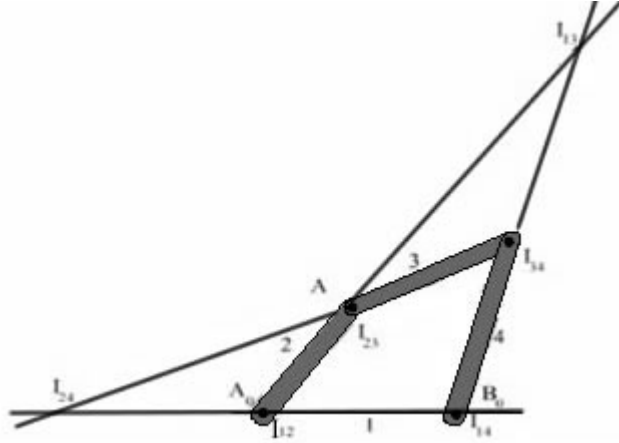
dır.



Şekil VII.6 Dört kol mekanizmasının birincil ani dönme merkezleri

A_0 1 ve 2 uzuvları arasındaki I_{12} ani dönme merkezidir. B_0 1 ve 4 uzuvları arasındaki I_{14} ani dönme merkezidir. A, 2 ve 3 uzuvları arasındaki I_{23} ani dönme merkezidir. B, 3 ve 4 uzuvları arasındaki I_{34} ani dönme merkezidir. Şimdi 3 uzvunun sabit uzva göre ani dönme merkezini bulmak için A ve B noktalarının hızları incelenir. A noktası hem 2 hem de 3 uzvunda bulunan daima çakışan bir nokta olduğuna göre hızı AA_0 doğrusuna yani $I_{12}I_{23}$ doğrusuna diktir. Benzer şekilde B noktası hem 3 hem de 4 uzvu üzerinde olduğu için de onun da hızı BB_0 doğrusuna yani $I_{34}I_{14}$ doğrusuna diktir. 3 uzvu üzerindeki noktaların hızları o noktaları ani dönme merkezine birleştiren doğrulara dik olacağından AA_0 ile BB_0 doğrularının kesim noktası aranan I_{24} ani dönme merkezidir. I_{24} ani dönme merkezini bulmak için 2 uzvunun 4

uzvuna göre ya da 4 uzvunun 2 uzvuna göre bağıl hareketine bakmak gerekir. Bunun için bir an için 2 uzvu sabit olarak düşünölsün. Bu durumda I_{13} ani dönme merkezini bulmak için yapılan işlemin benzeri A ve B noktaları yerine B ve B_0 noktaları alınarak yapıldığında da I_{24} ani dönme merkezi bulunur. Sonuç olarak ani dönme merkezleri Şekil VII.7 de gösterildiğı şekilde bulunur.(Söylemez,2000;Akçalı,2002)



Şekil VII.7. dört kol mekanizmasının ani dönme merkezleri

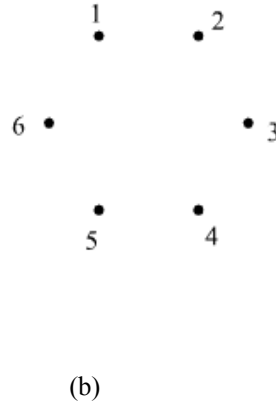
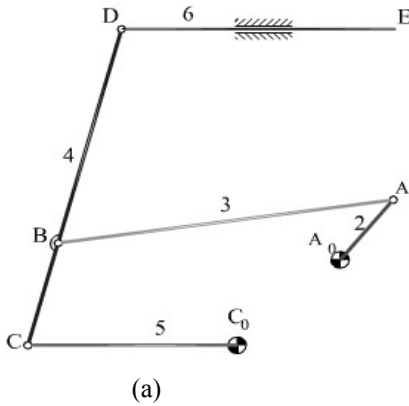
VII.2. Aranhold-Kennedy Teoremi

Aranhold-Kennedy Teoremi: Birbirlerine göre bağıl düzlemsel hareket yapan üç cismin ani dönme merkezleri daima bir doğru üzerindedir.

Aranhold-Kennedy Teoremi kullanılarak bir mekanizmadaki ani dönme merkezleri bulunabilir. Örneğin 4- kol mekanizmasındaki ani dönme merkezlerini bu teorem yardımı ile gösterilebilir. Daha önce Şekil VII.7. de ani dönme merkezlerini bulmuştuk. Teorem şu şekilde uygulanır: bir birine göre bağıl hareket yapan iki cisim 1 ve 3 kolunda , daha önce belirlendiğı gibi birincil ani dönme merkezleri belirledikten

sonra I_{12} , I_{23} ve I_{13} ani dönme merkezleri bir doğru üzerinde olacaktır. I_{12} , I_{23} yeri bellidir fakat I_{13} ün yeri belli değildir. Teorem gereğince $I_{12}I_{23}$ doğrusu üzerinde olduğu bilinmektedir. Benzer şekilde I_{14} , I_{34} ve I_{13} ani merkezleri bir doğru üzerinde olacaktır. I_{14} , I_{34} yeri bellidir fakat I_{13} ün yeri belli değildir. Teorem gereğince $I_{34}I_{14}$ doğrusu üzerinde olduğu bilinmektedir. Sonuç olarak $I_{12}I_{23}$ ve $I_{34}I_{14}$ doğrularının kesişim noktası aranan I_{13} noktasıdır. Benzer işlemler 2 ve 4 kolları için uygulandığında I_{24} ani dönme merkezi de bulunur.

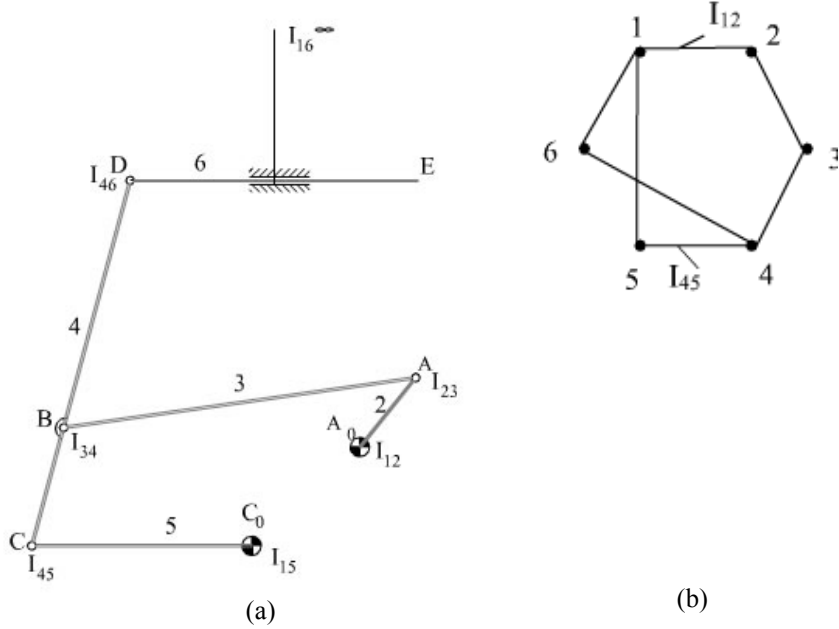
Mekanizma daha karmaşık halde olabilir bu durumda daha sistematik olan kinematik diyagram yöntemi kullanılır. Buna göre şekil VII.8.(a) verilen 6 uzuvlu mekanizmanın ani dönme merkezlerini bulunmak istensin. Bulunması gereken ani dönme merkezi sayısı,



Şekil VII.8 a)6 uzuvlu mekanizma

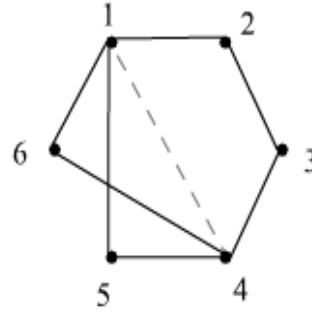
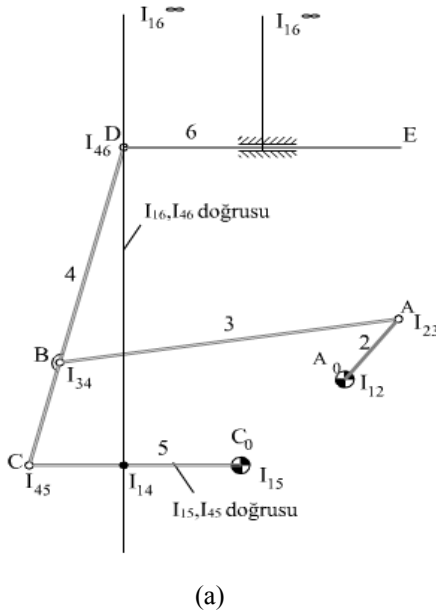
b) uzuv sayısı kadar nokta

$N=6.(6-1)/2=15$ tir. Şöyle bir sistematik bir yol izlenir; öncelikle her bir uzva karşılık gelen bir nokta konur şekil VII.8. (b), daha sonra eğer iki uzuv arasındaki ani dönme merkezi belli ise bu iki uzvu gösteren noktalar bir çizgi ile birleştirilir.



Şekil VII.9 a) 6 uzuvlu mekanizmanın birincil ani dönme merkezleri b) Bilinen ani dönme merkezlerinin diyagramda yerleştirilmesi

İki uzvu birleştiren döner mafsalları iki uzuv arasındaki mutlak ani dönme merkezidir. Mekanizmada kayar mafsalları olduğu için buradaki ani dönme merkezinde kayar mafsalları eksenine dik olacak şekilde sonsuzdur. Bu ani dönme merkezlerini diyagramda yerleştirilirse şekil VII.9.(b) deki görünüm oluşur. Daha sonra bu diyagramda oluşturulan bir üçgenin kenarları üç uzvun oluşturduğu üç ani dönme merkezlerini gösterir. Aronhold-Kennedy Teoremine göre bu üç ani dönme merkezi bir doğru



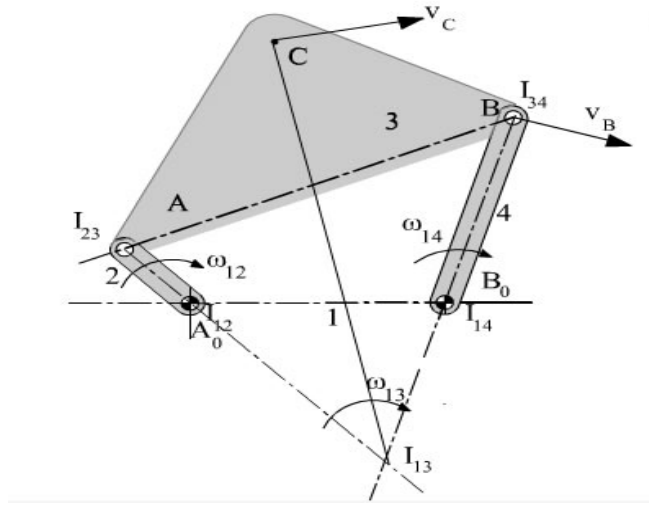
Şekil VII.10 a) Aranhold-Kennedy Teoremi kullanılarak ani dönme merkezlerinin bulunması b) Bulunacak ani dönme merkezlerinin diyagramdan belirlenmesi

üzerinde olmalıdır. Şekil VII.10. (b) ye göre I_{14} ani dönme merkezini bulmak için 1-4-6 ve 1-4-5 üçgenleri kullanılır. Bu iki üçgenin kenarları sırası ile I_{16} , I_{46} ve I_{15} , I_{45} ani dönme merkezlerine karşılık gelir.

Teorem gereğince I_{16} I_{46} ve I_{15} I_{45} doğrularının kesim noktası aranan I_{14} ani dönme merkezidir. Bu nokta bulunduğuna göre 1 ile 4 noktası arasına bir çizgi çizilir. Benzer şekilde diyagram üzerinde ortak kenarlı üçgenler oluşturularak istenen ani dönme merkezleri şekil üzerinde çizilerek bulunur. Böylece 15 tane ani dönme merkezi sistematik bir şekilde bulunabilir. (Pennock and Sankaranarayanan, 2003; Söylemez, 2000)

VII.3. Ani Dönme Merkezi ile Hız Analizi

Düzlemsel harekette i ve j uzuvlarına sahip bir mekanizmanın anlık çakışan noktası I_{ij} ani dönme merkezidir. Bu iki noktanın o an için birbirine göre bağıl hızları sıfırdır. Bu bilgiyi ve Aranhold-Kennedy Teoremini kullanarak bir mekanizmanın hız analizi yapılabilir. Örnek olarak en basit mekanizma olan 4-kol mekanizmasını ele alalım, (Şekil VII.11)



Şekil VII.11. Ani dönme merkezi kullanarak hız analizi (Söylemez,2000)

ω_{12} açısal hızı biliniyor olsun. 2 uzvu I_{12} dönme hareketi yaptığından hızı ;

$$V_A = \omega_{12} \cdot I_{12} A \quad (7.8)$$

ayrıca A noktası 3 uzvunun da bir noktası olduğu için ,

$$V_A = \omega_{13} \cdot I_{13} A \quad (7.9)$$

dır. I_{13} ani dönme merkezi belirledikten sonra bu iki denklem birbirine

eşitlenerek

$$\omega_{13} = \omega_{12} \frac{A_0 A}{I_{13} A} \quad (7.10)$$

3 uzvuna ait açılal hız bulunabilir. 3 uzvu üzerindeki B ve C noktalarının hızları:

$$V_B = \omega_{13} \cdot I_{13} B \quad (7.11)$$

$$V_C = \omega_{13} \cdot I_{13} C$$

ifadeleri ile bulunabilir.

Şimdi de I_{24} ani dönme merkezi alınsın. Bu nokta hem 2 uzvuna bağılı düzlem üzerinde hem de 4 uzvuna bağılı düzlem üzerindedir. Bu iki uzuvda sabit olmayıp bir eksen etrafında dönmektedir ve bu yüzden hızları sıfır değildir. Bu nokta 2 uzvuna bağılı düzlemde düşünöldüğünde;

$$V_{I_{12/2}} = \omega_{12} \cdot I_{12} I_{24} \quad (7.12)$$

ve 4 uzvuna bağılı düzlemde düşünöldüğünde;

$$V_{I_{12/4}} = \omega_{14} \cdot I_{14} I_{24} \quad (7.13)$$

olacaktır. I_{24} ani dönme merkezi olduğuna göre 2 ve 4 uzuvlarının bir birlerine göre bağılı hızları sıfır olduğundan $V_{I_{12/2}} = V_{I_{12/4}}$ dir. Buradan

$$\frac{\omega_{14}}{\omega_{12}} = \frac{I_{12} I_{24}}{I_{14} I_{24}} \quad (7.14)$$

eşitliğini buluruz.

Sonuç olarak bulunan bu ifadeleri genellersek, 1 sabit uzvu ile i ve j uzuvları alınsın. Bu üç uzva ait olan I_{1i} , I_{1j} ve I_{ij} ani dönme merkezleri Aronhold-Kenndy teoremine göre bir doğru üzerinde bulunurlar. I_{ij} nin

hızı i ve j uzuvlarına göre ayrı ayrı yazılarak eşitlenirse

$$\omega_{li} \cdot I_{li} I_{ij} = \omega_{lj} \cdot I_{lj} I_{ij} \quad (7.15)$$

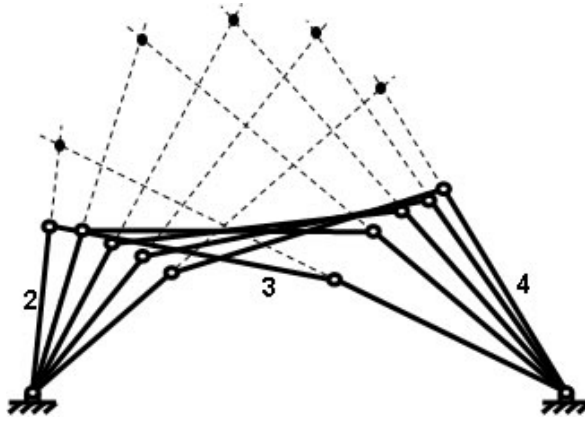
ifadesi bulunur.

Ani dönme merkezi kullanılarak hız analizi çok kolay yapılabilmektedir ama ivme ye geçiş sağlanamamaktadır.

VII.4 Ani Dönme Merkezi Eğrileri

Birbirine göre bağıl hareket eden iki cisimde ani dönme merkezleri oluşacaktır. Fakat her an ani dönme merkezleri farklı noktalarda oluşur. İşte, çeşitli konumlardaki ani dönme merkezlerinin birleştirilmesi ile elde edilen eğriye, ani dönme merkezi eğrisi denir, bu eğrilere *pol eğrisi* de denmektedir.

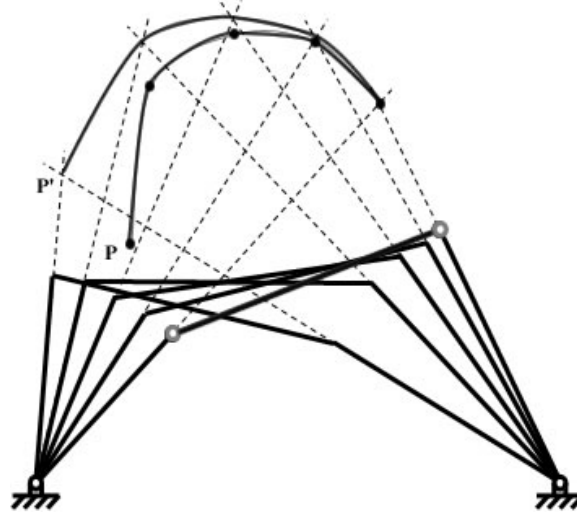
Ani dönme merkezi bir birine göre bağıl hareket yapan iki cismin üst üste çakışan iki noktası olarak düşünülebilir. Bu ani dönme merkezi hareketli cismin üzerinde yani hareketli düzlem üzerinde düşünülürse, bu nokta sabit düzlem üzerinde bir eğri çizer, sabit düzlemde oluşan bu eğriye sabit ani dönme merkezi eğrisi ya da *sabit pol eğrisi* denir. Eğer ani dönme merkezini sabit cismin yani hareketsiz sabit düzlem üzerinde düşündüğümüzde ise hareketli düzlem üzerinde bir eğri çizer (P eğrisi), bu eğriye de hareketli ani dönme merkezi eğrisi ya da *hareketli pol eğrisi* denir.



Şekil VII.12. Dört kol mekanizmasının farklı konumları için ani dönme merkezleri

Şekil VII.12 de bir 4-kol mekanizmasında hareketli 3 kolunun sabit 1 koluna göre bağlı hareketinde farklı konumlar için 2 ve 4 kollarından geçen doğruların kesişim noktaları ani dönme merkezlerini göstermektedir. Bu noktaları birleştiren eğri sabit ani dönme merkezi eğrisi (P'eğrisi) olacaktır.

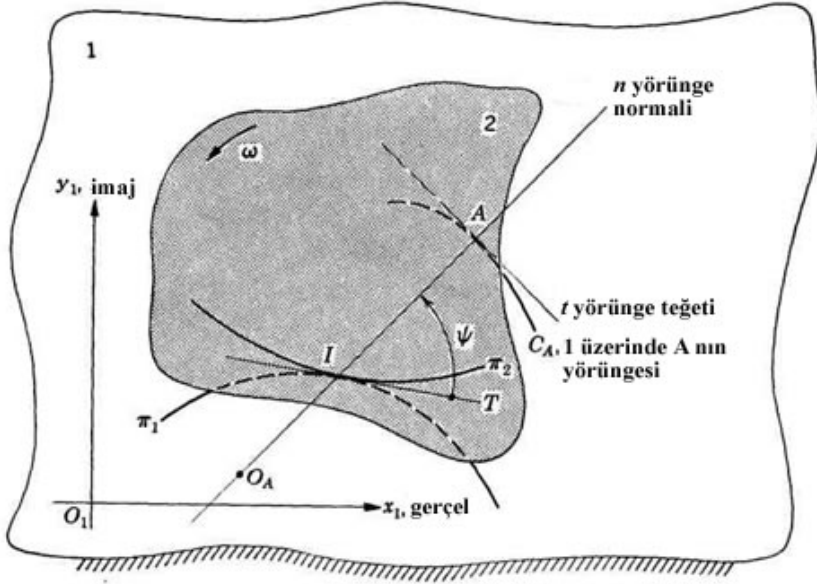
Benzer biçimde 3 kolunu sabit düşünüp 1 kolunu hareketli olarak aldığımızda oluşacak ani dönme merkezlerini birleştirdiğimizde oluşan eğri ise hareketli ani dönme merkezi eğrisi olacaktır.



Şekil VII.13. Hareketli ve sabit pol eğrileri

Şekil VII.13 de bu iki eğri de görölüyor. Sabit ve hareketli ani dönme merkezi eğrileri birbirine göre bağıl hareket yapan iki cismin hareketsiz noktaları olduğu için bu iki cismin hareketi; iki eğrinin birbiri üzerinde kaymadan yuvarlanması şeklinde tarif edilebilir. Şekil VII.13 e göre 3 uzvunun 1 uzvuna göre hareketi P eğrisinin P' eğrisi üzerinde yuvarlanması ile tarif edilebilir. Bir başka örnek de demiryolu üzerinde yuvarlanan bir tekerlekte ani dönme merkezi her zaman, değme noktasında olmasıdır. Hareketli ani dönme merkezi eğrisi bir çember; hareketsiz ani dönme merkezi eğrisi ise bir doğrudur.(Akçalı 2002; Müller,1963)

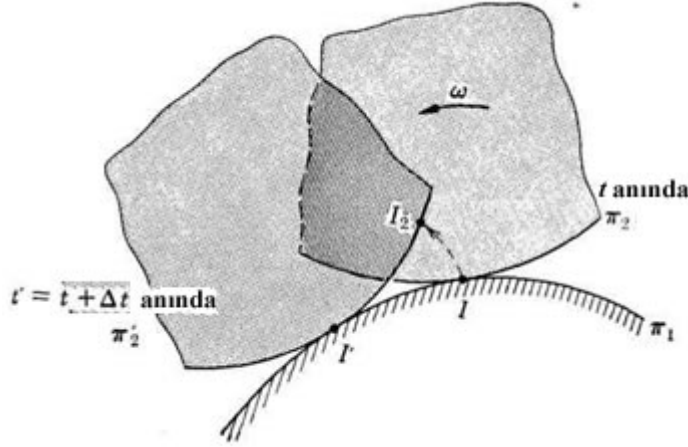
VIII. EULER-SAVARY DENKLEMİ VE BÜKÜM ÇEMBERİ



Şekil VIII.1 Birbiri üzerinde yuvarlanan pol eğrileri (Hartenberg and Denavit, 1964)

2 düzlemi 1 sabit düzlemi üzerinde Şekil VIII.1 deki gibi hareket etsin, Π_1 ve Π_2 sırasıyla sabit ve hareketli pol eğrilerini gösterebilirsin. Bu iki pol eğrisinin anlık çakışma noktası I ani dönme merkezidir. 2 düzlemi 1 düzlemi üzerinde hareket etmeye başladığı an Π_2 eğrisi Π_1 eğrisi üzerinde ω açısal hızı ile yuvarlanmaya başlar yani düzlemlerin hareketi

bu iki eğrinin birbirini üzerindeki yuvarlanması anlamına gelmektedir. İki eğri arasındaki I ani dönme merkezi Π_1 boyunca V_I hızına sahiptir.



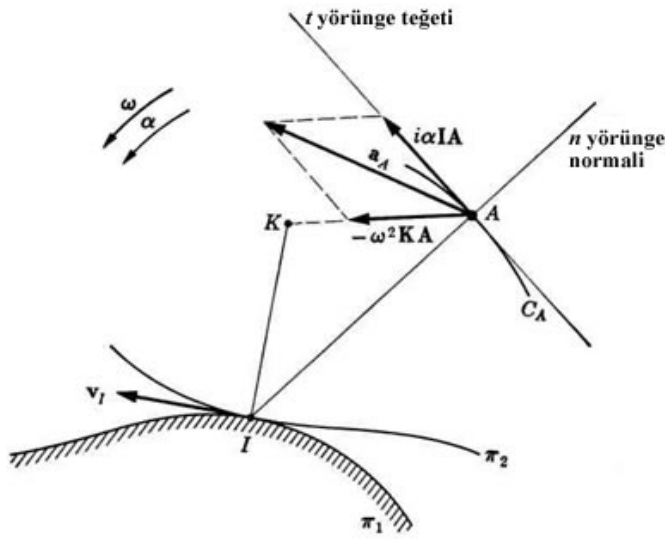
Şekil VIII.2. Δt zaman sonra ani dönme merkezinin yer değiştirmesi ve yeni ani dönme merkezinin konumu (Hartenberg and Denavit, 1964)

Π_2 hareketli pol eğrisinin $t' = t + \Delta t$ zaman sonraki konumu Π'_2 olsun. bu durumdaki ani dönme merkezleri de I ve I' olsun. I noktası I_2 ye hareket ettiği zaman ani dönme merkezinin hızı ile $\Delta t \rightarrow 0$ iken $\frac{II'}{\Delta t}$ limit değerine eşittir. Bu hız ani dönme merkezinin Π_1 sabit pol eğrisi üzerinde nasıl ilerlediğini gösterir.

Şekil VIII.1 e bakıldığında hareketli düzlem üzerindeki A noktası 1-sabit düzlemi üzerinde C_A eğrisini çizer. Bu noktanın O_A eğrilik merkezi IA doğrusu üzerindedir. İşte Euler-Savary denklemi bir doğru üzerinde bulunan 3 nokta A, I ve O_A arasındaki ilişkiyi, diğer bir

değişle hareketli düzlemin noktaları tarafından üretilen eğrilerin eğrilik merkezini verir.

Euler-Savary denkleminin çıkarılışı A noktasının toplam ivmesinin a_{A^n} normal ivme bileşinini kullanarak yapılabilir.



Şekil VIII.3 A noktasının ivme bileşenleri(Hartenberg and Denavit, 1964)

A nın toplam ivmesi ,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A^t} + \mathbf{a}_{A^n}$$

ve

$$a_{A^n} = \frac{V_A^2}{AO_A} \quad (8.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada V_A , A noktasının hızının büyüklüğüdür ve I noktası referans alınarak bulunur yani $V_A = IA \cdot \omega$ dır ve AO_A da C_A

eğrisinin A noktasındaki eğrilik yarıçapıdır. Ayrıca $\mathbf{a}_A$ teğet ivme bileşeninin değeri ile ilgilenilmemektedir.

Şekil VIII.1 de t anında Π_1 ve Π_2 sabit ve hareketli pol eğrileri I ani dönme merkezinde birbirilerine değmektedir. 1 sabit düzleminde bulunan Ox_1y_1 eksen sistemini kutupsal koordinat sistemi olarak düşündüğümüzde aşağıdaki vektörleri kompleks tarzda gösterebiliriz; (ω SYT)

$$\mathbf{V}_A = i\omega \cdot I\mathbf{A} = i\omega \cdot (\mathbf{O}_A\mathbf{A} - \mathbf{O}_1\mathbf{I}) \quad (8.2)$$

ivme ise hızdan elde edilir:

$$\frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \mathbf{a}_A = i\alpha(\mathbf{O}_1\mathbf{A} - \mathbf{O}_1\mathbf{I}) + i\omega\left(\frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{A}}{dt} - \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{I}}{dt}\right) \quad (8.3)$$

bu eşitlikte $i\alpha(\mathbf{O}_1\mathbf{A} - \mathbf{O}_1\mathbf{I}) = i\alpha I\mathbf{A}$ ve $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ SYT pozitif yöndedir.

Aynı zamanda $\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{O}_1\mathbf{A} = \mathbf{V}_A$ ve $\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{O}_1\mathbf{I} = \mathbf{V}_1$ eşitlikleri de vardır.

$$\mathbf{V}_A = i\omega \cdot I\mathbf{A} \quad \text{olduğu zaman} \quad (8.3) \quad \text{denklemini}$$

$$\mathbf{a}_A = i\alpha I\mathbf{A} - \omega^2(I\mathbf{A} + i\frac{\mathbf{V}_1}{\omega}) \quad (8.4)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil VIII.3 e bakıldığında ise K noktası

$$I\mathbf{K} = -\frac{i\mathbf{V}_1}{\omega} \quad (8.5)$$

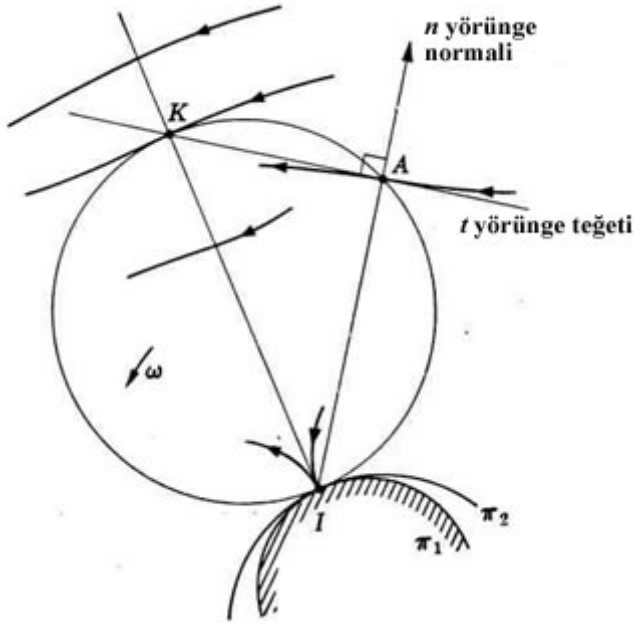
biçiminde tanımlanabilir, öyleki

$$\mathbf{a}_A = i\alpha I\mathbf{A} - \omega^2(I\mathbf{A} - I\mathbf{K}) \quad (8.6) \quad \text{dır.}$$

$I\mathbf{A} - I\mathbf{K} = \mathbf{KA}$ olarak alındığında ivme,

$$\mathbf{a}_A = i\alpha I\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{KA} \quad (8.7)$$

olarak yazılabilir, bu ifadeden anlaşıldığı gibi 2 vektörün toplamıdır. $i\omega \mathbf{IA}$ vektörü IA doğrusuna diktir ve eğrinin yörünge teğeti üzerindedir ve sadece $\mathbf{a}_{A_t}$ bileşeni vardır. $-\omega^2(\mathbf{KA})$ vektörü KA üzerindedir ve yönü K ya doğrudur ve $\mathbf{a}_{A_t}$ ile $\mathbf{a}_{A_n}$ bileşenlerine ayrılabilir.



Şekil VIII.4. Büküm çemberi ve üzerindeki ve yakınındaki noktaların yörüngeleri(Hartenberg and Denavit, 1964)

Şekil VIII.4 ten görülüyor ki eğer IAK açısı 90° ise tek durum vardır ; $-\omega^2(\mathbf{KA})$ eğrinin yörünge teğeti üzerindedir, yörünge normali üzerinde hiçbir bileşeni yoktur. Bu sebepten dolayı $\mathbf{a}_{A_n} = 0$ dır.

IAK açısı 90° olacak şekilde A noktalarının geometrik yarı çapı IK olan bir çemberdir, bu çembere *büküm çemberi* denir. Çemberin her noktası için $a_{A^n} = 0$ dır ve bu noktaların eğrilik yarıçapları sonsuzdur yani eğrilik merkezleri sonsuzdadır.

I noktasındaki normal ile büküm çemberinin kesişim noktası olan K noktasına bazen büküm polü de denmektedir.

Bir A noktasını alalım bu noktanın n eğri normali boyunca a_{A^n} normal ivme vektörü vardır;

$$a_{A^n} = \frac{V_A^2}{AO_A} \quad (8.8)$$

eğer AO_A pozitif ise a_{A^n} de pozitiftir.

Bununla birlikte eğri üzerindeki $-\omega^2(\mathbf{KA})$ nın n normali üzerindeki izdüşümü $\mathbf{a}_{A^n}$ dır.

$$a_{A^n} = \frac{\omega^2(IA)^2}{AO_A} = iz_{IA}[-\omega^2(\mathbf{KA})] = -\omega^2 iz_{IA}(\mathbf{IA} - \mathbf{IK}) \quad (8.9)$$

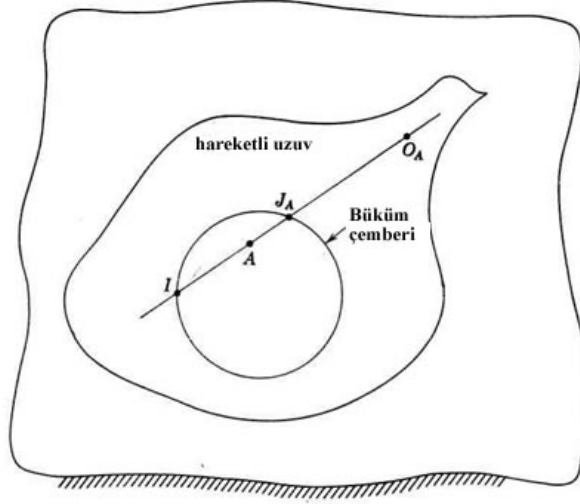
İkinci kesişim noktası IA doğrusu ile büküm çemberinin kesişimi olan J_A dır. Buda K nın IA üzerindeki izdüşümüdür. O zaman şu yazılabilir;

$$\omega^2 \frac{(IA)^2}{AO_A} = -\omega^2(IA - IJ_A) = -\omega^2(J_A A) \quad (8.10)$$

bu denklemden görülür ki;

$$\frac{(IA)^2}{AO_A} = -J_A A \quad (8.11)$$

denklemin eğrinin n normali üzerindeki 3 yönlü, büyüklük arasındaki ilişkidir.



Şekil VIII.6. Büküm Çemberi ve aynı doğru üzerindeki A, J_A , O_A ve I noktaları

Euler-Savary denklemi başka bir şekilde şöyle yazılabilir (Hartenberg and Denavit, 1964);

$$\frac{1}{IA} - \frac{1}{IO_A} = \frac{1}{IJ_A} \quad (8.14)$$

Euler-Savary denkleminin büküm çemberi ile ilişkisini gösteren şu formu da

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{D \sin \varphi} \quad (8.15)$$

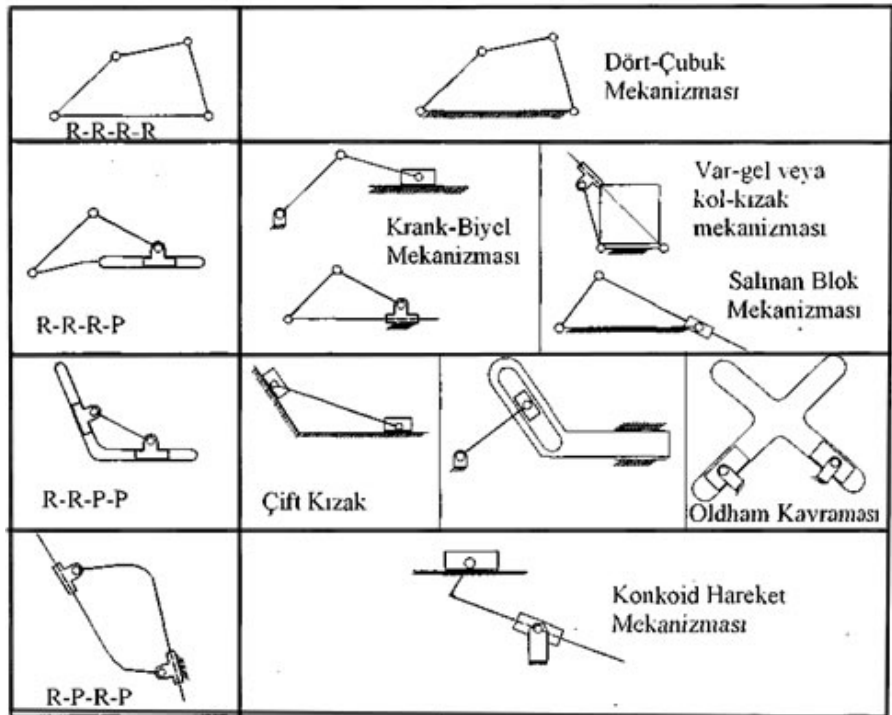
biçiminde verebiliriz. Burada A ve O_A noktalarının kutupsal koordinatlarını sırasıyla (r, φ) ve (r_c, φ) dir. D ise büküm çemberinin çapıdır. Özel bir durum olarak eğer büküm çemberi üzerindeki noktalar

için Euler-Savary denklemi eğrilik merkezlerinin sonsuzda olmasından dolayı $r = D \sin \varphi$ şeklini alır.(Roseneuer and Willis,1980)

IX.MEKANİZMA ÇEŞİTLERİ

IX.I Dört Uzunlu Mekanizmalar

En basit mekanizma dört uzunluyla oluşturulan mekanizmalardır ve bu mekanizmaların uygulamada çok yaygın kullanım alanı vardır. Şekil IX.1 de dört kol mekanizmasına örnekler verilmiştir.



Şekil IX.1 Dört uzunlu mekanizmalara örnekler (Söylemez,2000)

Dört uzunlu mekanizmalardan biri dört kol ve dört döner mafsaldan oluşan dört kol mekanizmasıdır. Uygulamada dört-kol mekanizmasının sabit uzvu ile mafsallanmış olan hareketli iki uzuv ile yaptığı açılar, giriş ve çıkış açısı olarak adlandırılır, arasındaki ilişki incelenebilir veya sabit uzva bağlı olmayan ve biyel olarak adlandırılan uzuv üzerindeki alınacak

bir noktanın istenilen bir eğriyi çizmesi istenebilir, veya biyel uzvunun belli bir hareket yapması istenebilir.(Söylemez,2000)

IX.2 Grashof Teoremi

Sabit uzva döner mafsallarla ilgili uzuvlar sabit uzva göre tam bir dönme yaparsa buna *krank* denir, salınım yaparsa buna da *sarkaç* denir. O halde sabit uzva bağlı kolların krank ve sarkaç olma durumları incelenirse üç farklı durumun oluştuğu gözlenir:

i)İki uzuv da krank olabilir bu tür dört kol mekanizmalarına “*çift-krank*” denir

ii) İki uzuv da sarkaç olabilir bu tür dört kol mekanizmalarına “*çift-sarkaç*” denir.

iii)Biri krank biri sarkaç olabilir bu tür dört kol mekanizmalarına “*krank-sarkaç*” veya “*kol-sarkaç*”denir.

Bu farklı durumların oluşmasına sebep uzuvların boyutlarıdır. Grashof teoremi uzuv boyutları ile oluşan hareketleri şu şekilde sunar; l en uzun uzvu, s en kısa uzvu, p ve q da diğer uzuvların boyutlarını gösterebilir.

Grashof teoremi :Eğer $l + s < p + q$ ise dört durum söz konusudur bu dört durumdan ikisi; en kısa uzva komşu uzuvlardan birisi sabit iken, en kısa uzuv krank olmak üzere iki değişik kol-sarkaç mekanizması olması durumudur. Üçüncü durum en kısa kol sabit iken çift-krank olma durumudur. Dördüncü durum en kısa kolun karşısındaki kol sabit iken çift-sarkaç olma durumudur.

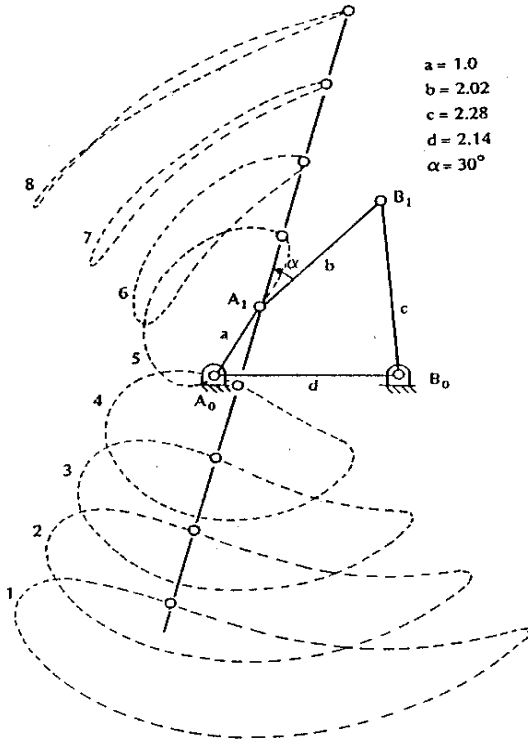
Eğer $l + s > p + q$ ise hangi kol sabit olursa olsun farklı salınımlar yapan çift-sarkaç mekanizması oluşur.

Eğer $l + s = p + q$ ise birinci durumda bahsedilen dört durum oluşur fakat burada tüm uzuvların bir doğru üzerinde olduğu kritik bir konum oluşur. Kritik konumlarda mekanizmanın hareketi belirsizdir. Paralelogram ve deltoid mekanizmaları bu durumun özel halleridir.

Bir sarkaç, yani sadece salınım yapabilen bir kol, limit konumlara sahiptir. Sarkaç bu limit konumların dışında hareket yapamaz bu konumlara *ölü noktalar* denir. (Dr. Bob)

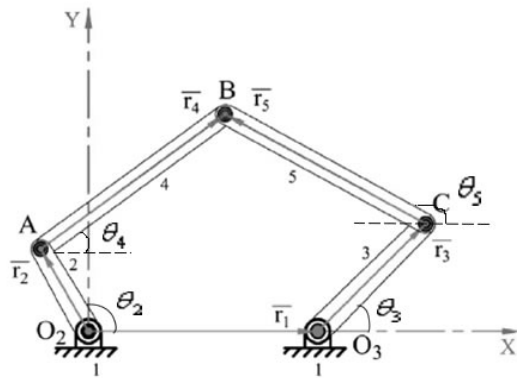
IX.3.Biyel Eğrisi

Bir mekanizmadaki biyel kolunun bulunduğu düzlem üzerindeki noktalar farklı eğriler çizer bu eğrilere *biyel eğrileri* denir. Biyel eğrileri düzlemin mutlak noktalarından 3 defa geçen 6.dereceden bir eğridir (Müller, 1963) .Şekil IX.2 de bir dört kol mekanizmasının biyeli üzerindeki farklı noktaların çizdiği farklı biyel eğrileri verilmiştir.



Şekil IX.2 biyel eğrileri (Söylemez,2000)

IX.4 5-Kol Mekanizması



Şekil IX.3 Düzlemsel 5-kol mekanizması ve vektörel gösterimi

Şekil IX.3 de gösterilen 5-kol mekanizmasında 4 ve 5 uzuvları biyel kollarıdır. 5-kol mekanizmasının birinci ve ikinci dereceden kinematik katsayıları

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = 0 \quad (9.1)$$

vektör devre denkleminde elde edilebilir. θ_2 ve θ_3 2 ve 3 koluna ait giriş açıları, θ_4 ve θ_5 ise 4 ve 5 kollarına ait bilinmeyen açı değişkenleridir. 4-biyel kolunun açısal hızı

$$\omega_4 = d\theta_4/dt = (\partial\theta_4/\partial\theta_2)(d\theta_2/dt) + (\partial\theta_4/\partial\theta_3)(d\theta_3/dt) \quad (9.2a)$$

biçiminde gösterilir. Benzer şekilde 5-biyel kolunun açısal hızı da

$$\omega_5 = d\theta_5/dt = (\partial\theta_5/\partial\theta_2)(d\theta_2/dt) + (\partial\theta_5/\partial\theta_3)(d\theta_3/dt) \quad (9.2b)$$

biçimindedir. (9.2) denklemlerinde θ_4 ve θ_5 biyel açıları θ_2 ve θ_3 gib bağımsız değişkenin fonksiyonlarıdır. (9.2) denklemlerini

$$\omega_4 = \dot{\theta}_4 = \theta'_{42}\dot{\theta}_2 + \theta'_{43}\dot{\theta}_3 \quad (9.3a)$$

$$\omega_5 = \dot{\theta}_5 = \theta'_{52}\dot{\theta}_2 + \theta'_{53}\dot{\theta}_3 \quad (9.3b)$$

biçimde gösterilebilir. Burada üslü notasyon *birinci dereceden kinematik katsayıları* göstermektedir. Yani

$$\begin{aligned} \theta'_{42} &= \partial\theta_4/\partial\theta_2, & \theta'_{43} &= \partial\theta_4/\partial\theta_3, \\ \theta'_{52} &= \partial\theta_5/\partial\theta_2, & \theta'_{53} &= \partial\theta_5/\partial\theta_3 \end{aligned} \quad (9.4)$$

biyel kollarının giriş açılarına göre türevleridir. (9.2) denklemlerinin zamana göre diferansiyeli,

$$\begin{aligned} \alpha_4 = d^2\theta_4/dt^2 &= (\partial\theta_4/\partial\theta_2)(d^2\theta_2/dt^2) + (\partial\theta_4/\partial\theta_3)(d^2\theta_3/dt^2) \\ &+ (\partial^2\theta_4/\partial\theta_2^2)(d\theta_2/dt)^2 + 2(\partial^2\theta_4/\partial\theta_2\partial\theta_3)(d\theta_2/dt)(d\theta_3/dt) \\ &+ (\partial^2\theta_4/\partial\theta_3^2)(d\theta_3/dt)^2 \end{aligned} \quad (9.5a)$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_5 = d^2\theta_5/dt^2 &= (\partial\theta_5/\partial\theta_2)(d^2\theta_2/dt^2) + (\partial\theta_5/\partial\theta_3)(d^2\theta_3/dt^2) \\ &+ (\partial^2\theta_5/\partial\theta_2^2)(d\theta_2/dt)^2 + 2(\partial^2\theta_5/\partial\theta_2\partial\theta_3)(d\theta_2/dt)(d\theta_3/dt) \\ &+ (\partial^2\theta_5/\partial\theta_3^2)(d\theta_3/dt)^2\end{aligned}\quad (9.5b)$$

biyel kollarının açısal ivmeleridir. Üslü ve noktalı notasyon kullanarak (9.5) denklemi

$$\alpha_4 = \ddot{\theta}_4 = \theta'_{42}\ddot{\theta}_2 + \theta'_{43}\ddot{\theta}_3 + \theta''_{422}\dot{\theta}_2^2 + 2\theta''_{423}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \theta''_{433}\dot{\theta}_3^2 \quad (9.6a)$$

$$\alpha_5 = \ddot{\theta}_5 = \theta'_{52}\ddot{\theta}_2 + \theta'_{53}\ddot{\theta}_3 + \theta''_{522}\dot{\theta}_2^2 + 2\theta''_{523}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \theta''_{533}\dot{\theta}_3^2 \quad (9.6b)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

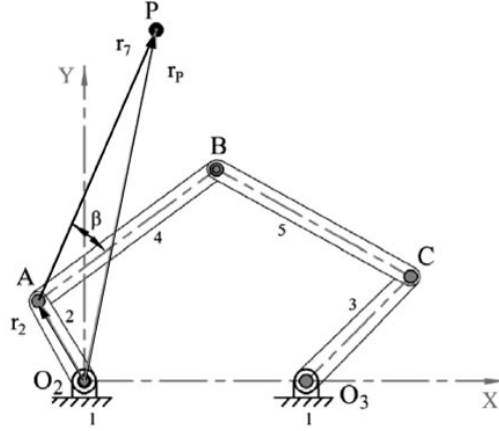
$$\theta''_{422} = \partial^2\theta_4/\partial\theta_2^2, \quad \theta''_{423} = \partial^2\theta_4/\partial\theta_2\partial\theta_3, \quad \theta''_{433} = \partial^2\theta_4/\partial\theta_3^2 \quad (9.7a)$$

$$\theta''_{522} = \partial^2\theta_5/\partial\theta_2^2, \quad \theta''_{523} = \partial^2\theta_5/\partial\theta_2\partial\theta_3, \quad \theta''_{533} = \partial^2\theta_5/\partial\theta_3^2 \quad (9.7b)$$

ifadeleri biyel kollarının *ikinci dereceden kinematik katsayılarıdır*.(Pennock,2007)

IX.4.1 Biyel Kolunun Eğrilik Yörüngesi

4 veya 5 biyel kolları üzerindeki sabit bir noktanın tek bir yörünge izleyebilmesi için 2 bağımsız girdi değeri gereklidir. Bu yüzden sınırsız çeşitlilikte eğri 5-kol mekanizmasının biyel noktası tarafından üretilebilir. Bu amaçla Şekil IX.4 de gösterildiği gibi 4 biyel kolu üzerinde bir P noktası alınsın.



Şekil IX.4 4 biyel kolu üzerindeki P noktasının vektörel gösterimi

P biyel noktası tarafından çizilen eğrinin eğrilik yarıçapı

$$\rho_P = \frac{V_P^2}{A_P^n} \quad (9.8)$$

biçimindedir. $\mathbf{V}_P$, P noktasının hızını gösterir ve

$$V_P^2 = \mathbf{V}_P \cdot \mathbf{V}_P = |\mathbf{V}_P|^2 \quad (9.9a)$$

eşitliği vardır. P noktasının normal ivmesi

$$\mathbf{A}_P^n = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{u}_n = A_{Px}u_{nx} + A_{Py}u_{ny} \quad (9.9b)$$

biçimindedir. P noktası için vektör denklemi

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_7 \quad (9.10a)$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\theta_7 = \theta_4 + \beta \quad (9.10b)$$

eşitliğide vardır.(9.10b) denkleminin iki bağımsız girdi değeri için diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} \theta'_{72} &= \theta'_{42}, & \theta'_{73} &= \theta'_{43} \\ \theta''_{722} &= \theta''_{422}, & \theta''_{733} &= \theta''_{433} \end{aligned} \quad (9.11)$$

birinci ve ikinci kinematik katsayıları elde edilir.

(9.10a) denkleminin P noktasının X ve Y bileşenleri

$$X_P = r_2 \cos \theta_2 + r_7 \cos \theta_7 \quad (9.12a)$$

$$Y_P = r_2 \sin \theta_2 + r_7 \sin \theta_7 \quad (9.12b)$$

biçimindedir. (9.10a) denklemi aynı zamanda

$$\mathbf{r}_P = X_P \mathbf{i} + Y_P \mathbf{j} \quad (9.13)$$

biçiminde yazılabilir. (9.13) denkleminin diferansiyeli alındığında

$$\mathbf{V}_P = (X'_{P2} \mathbf{i} + Y'_{P2} \mathbf{j}) \omega_2 + (X'_{P3} \mathbf{i} + Y'_{P3} \mathbf{j}) \omega_3 \quad (9.14a)$$

P noktasının hızını elde ederiz. (9.14a) denklemini düzenlenirse

$$\mathbf{V}_P = (X'_{P2} \omega_2 + X'_{P3} \omega_3) \mathbf{i} + (Y'_{P2} \omega_2 + Y'_{P3} \omega_3) \mathbf{j} \quad (9.14b)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $X'_{P2}, X'_{P3}, Y'_{P2}$ ve Y'_{P3} P noktasının birinci dereceden kinematik katsayılarıdır.

(9.12) denklemlerini θ_2 ve θ_3 giriş konumları için ayrı ayrı diferansiyelleri alınıp (9.11) denklemindeki P noktasının birinci dereceden kinematik katsayıları kullanılırsa

$$X'_{P2} = -r_2 \sin \theta_2 - r_7 \sin \theta_7 \theta'_{42} \quad (9.15a)$$

$$Y'_{P2} = r_2 \cos \theta_2 + r_7 \cos \theta_7 \theta'_{42} \quad (9.15b)$$

$$X'_{P3} = -r_7 \sin \theta_7 \theta'_{43} \quad (9.15c)$$

$$Y'_{P3} = r_7 \cos \theta_7 \theta'_{43} \quad (9.15d)$$

eşitlikleri elde edilir. P noktasının hızının büyüklüğü

$$|\mathbf{V}_P| = \sqrt{V_{Px}^2 + V_{Py}^2} \quad (9.16a)$$

biçimindedir. (9.14b) denklemini (9.16a) da yerine yazıldığında

$$|\mathbf{V}_P| = \left[(X'_{P2} \omega_2 + X'_{P3} \omega_3)^2 + (Y'_{P2} \omega_2 + Y'_{P3} \omega_3)^2 \right]^{1/2} \quad (9.16b)$$

elde edilir.

P noktasının birim teğet vektörü

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{V}_P}{|\mathbf{V}_P|} \quad (9.17a)$$

biçimindedir. (9.14b) ve (9.16) denklemleri (9.17a) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{u}_t = \frac{(X'_{P2}\omega_2 + X'_{P3}\omega_3)\mathbf{i} + (Y'_{P2}\omega_2 + Y'_{P3}\omega_3)\mathbf{j}}{\left[(X'_{P2}\omega_2 + X'_{P3}\omega_3)^2 + (Y'_{P2}\omega_2 + Y'_{P3}\omega_3)^2\right]^{1/2}} \quad (9.17b)$$

elde edilir. Birim normal vektör birim teğet vektörün saat yönünün tersinde 90° dönmüş halidir. Birim normal vektörü

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{k} \times \mathbf{u}_t = \frac{-(Y'_{P2}\omega_2 + Y'_{P3}\omega_3)\mathbf{i} + (X'_{P2}\omega_2 + X'_{P3}\omega_3)\mathbf{j}}{\left[(X'_{P2}\omega_2 + X'_{P3}\omega_3)^2 + (Y'_{P2}\omega_2 + Y'_{P3}\omega_3)^2\right]^{1/2}} \quad (9.18)$$

biçiminde gösterebiliriz.

(9.14b) denkleminin zamana göre diferansiyeli alındığında P noktasının

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P = & (X''_{P22}\omega_2^2 + 2X''_{P23}\omega_2\omega_3 + X''_{P33}\omega_3^2 + X'_{P2}\alpha_2 + X'_{P3}\alpha_3)\mathbf{i} \\ & + (Y''_{P22}\omega_2^2 + 2Y''_{P23}\omega_2\omega_3 + Y''_{P33}\omega_3^2 + Y'_{P2}\alpha_2 + Y'_{P3}\alpha_3)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (9.19)$$

ivmesi elde edilir. Burada $X''_{P22}, X''_{P23}, X''_{P33}, Y''_{P22}, Y''_{P23},$ ve Y''_{P33} katsayıları P noktasının ikinci dereceden kinematik katsayılarıdır. (9.15a), (9.15b) denklemlerinin θ_2 ye göre, (9.15a)- (9.15d) denklemlerinin θ_3 ye göre diferansiyelleri alıp (9.11) denklemindeki değerler yerine yazılırsa

$$X''_{P22} = -r_2 \cos \theta_2 - r_7 \cos \theta_7 \theta_{42}'^2 - r_7 \sin \theta_7 \theta_{422}'' \quad (9.20a)$$

$$Y''_{P22} = -r_2 \sin \theta_2 - r_7 \sin \theta_7 \theta_{42}'^2 + r_7 \cos \theta_7 \theta_{422}'' \quad (9.20b)$$

$$X''_{P23} = -r_7 \cos \theta_7 \theta_{42}' \theta_{43}' - r_7 \sin \theta_7 \theta_{423}'' \quad (9.20c)$$

$$Y''_{P23} = -r_7 \sin \theta_7 \theta_{42}' \theta_{43}' + r_7 \cos \theta_7 \theta_{423}'' \quad (9.20d)$$

$$X''_{p33} = -r_7 \cos \theta_7 \theta'_{43}{}^2 - r_7 \sin \theta_7 \theta''_{433} \quad (9.20e)$$

$$Y''_{p33} = -r_7 \sin \theta_7 \theta'_{43}{}^2 + r_7 \cos \theta_7 \theta''_{433} \quad (9.20f)$$

P noktasının ikinci dereceden kinematik katsayıları elde edilir. (9.18) ve (9.19) denklemleri (9.9b) denkleminde yerine yazılırsa P noktasının normal ivmesi

$$A_P^n = \frac{\begin{pmatrix} (Y''_{p22}\omega_2^2 + 2Y''_{p23}\omega_2\omega_3 + Y''_{p33}\omega_3^2 + Y'_{p2}\alpha_2 + Y'_{p3}\alpha_3)(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3) \\ -(X''_{p22}\omega_2^2 + 2X''_{p23}\omega_2\omega_3 + X''_{p33}\omega_3^2 + X'_{p2}\alpha_2 + X'_{p3}\alpha_3)(Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3) \end{pmatrix}}{\left[(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3)^2 + (Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3)^2 \right]^{3/2}}$$

elde edilir. Özel durum olarak 2 ve 3 kollarının sabit açısal hızlarla döndüğü kabul edilirse açısal ivmeleri sıfır olur.(9.21) denklemi

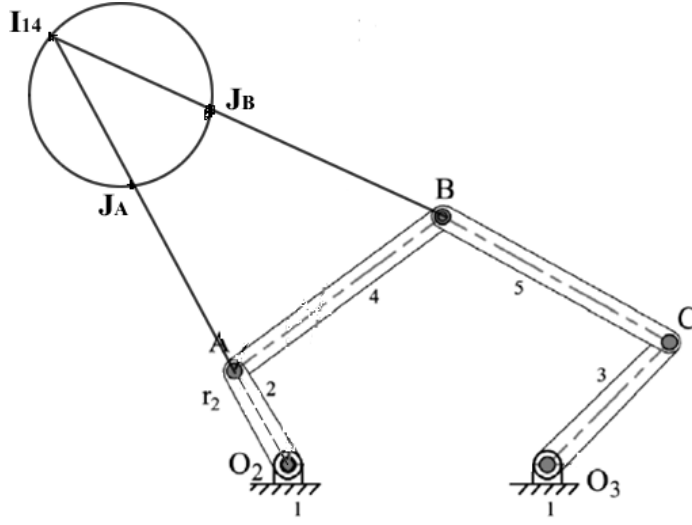
$$A_P^n = \frac{\begin{pmatrix} (Y''_{p22}\omega_2^2 + 2Y''_{p23}\omega_2\omega_3 + Y''_{p33}\omega_3^2)(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3) \\ -(X''_{p22}\omega_2^2 + 2X''_{p23}\omega_2\omega_3 + X''_{p33}\omega_3^2)(Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3) \end{pmatrix}}{\left[(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3)^2 + (Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3)^2 \right]^{3/2}} \quad (9.21)$$

biçimini alır. (9.16b) ve (9.21) denklemleri (9.8) denkleminde yerine yazılırsa P noktasının yörüngesinin eğrilik yarıçapı

$$\rho_P = \frac{\left[(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3)^2 + (Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3)^2 \right]^{3/2}}{\begin{pmatrix} (Y''_{p22}\omega_2^2 + 2Y''_{p23}\omega_2\omega_3 + Y''_{p33}\omega_3^2)(X'_{p2}\omega_2 + X'_{p3}\omega_3) \\ -(X''_{p22}\omega_2^2 + 2X''_{p23}\omega_2\omega_3 + X''_{p33}\omega_3^2)(Y'_{p2}\omega_2 + Y'_{p3}\omega_3) \end{pmatrix}} \quad (9.22)$$

olarak elde edilir.

5-kol mekanizmasının 4 biyel kolunun 1 sabit koluna göre hareketine ait büküm çemberi bulunmak istensin. Şekil IX.4 de büküm çemberi keyfi olarak çizilmiştir.



Şekil IX.5 4 kolunun 1 koluna göre bağlı hareketinde büküm çemberi

Şekil IX.4 de J_A ve J_B büküm çemberi üzerindeki iki noktadır. Euler-Savary denklemine göre aynı doğru üzerinde bulunan I_{14} , J_A ve A noktasının dönme merkezi O_2 arasında

$$J_A A = \frac{(I_{14} A)^2}{O_2 A} \quad (9.23)$$

ilişkisi vardır. O halde J_A bulunabilir. Diğer taraftan benzer bir şekilde I_{14} , J_B ve B noktasının dönme merkezi O_B arasında

$$J_B B = \frac{(I_{14} B)^2}{O_B B} \quad (9.24)$$

ilişkisi vardır. Ama burada J_B ve O_B bilinmemektedir. Bu iki noktadan birinin değerini bulunursa diğeri de bulunabilir. Bunun için (9.22) denkleminde özel olarak P noktası yerine B noktası alınırsa B noktasının eğrilik yarıçapı

$$\rho_B = \frac{\left[(X'_{B2}\omega_2 + X'_{B3}\omega_3)^2 + (Y'_{B2}\omega_2 + Y'_{B3}\omega_3)^2 \right]^{3/2}}{\left((Y''_{B22}\omega_2^2 + 2Y''_{B23}\omega_2\omega_3 + Y''_{B33}\omega_3^2)(X'_{B2}\omega_2 + X'_{B3}\omega_3) - (X''_{B22}\omega_2^2 + 2X''_{B23}\omega_2\omega_3 + X''_{B33}\omega_3^2)(Y'_{B2}\omega_2 + Y'_{B3}\omega_3) \right)} \quad (9.25)$$

biçiminde bulunur. Ayrıca $O_B B = \rho_B$ dir. $I_{14} = (X_I, Y_I)$ alınırsa

$$(I_{14} B)^2 = (X_B - X_I)^2 + (Y_B - Y_I)^2$$

(9.26) ifadesi yazılır. (9.25) ve (9.26) denklemleri (9.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$J_B B = \frac{\left((X_B - X_I)^2 + (Y_B - Y_I)^2 \right) \left((Y''_{B22}\omega_2^2 + 2Y''_{B23}\omega_2\omega_3 + Y''_{B33}\omega_3^2)(X'_{B2}\omega_2 + X'_{B3}\omega_3) - (X''_{B22}\omega_2^2 + 2X''_{B23}\omega_2\omega_3 + X''_{B33}\omega_3^2)(Y'_{B2}\omega_2 + Y'_{B3}\omega_3) \right)}{\left[(X'_{B2}\omega_2 + X'_{B3}\omega_3)^2 + (Y'_{B2}\omega_2 + Y'_{B3}\omega_3)^2 \right]^{3/2}}$$

elde edilir. Buna göre büküm çemberi üzerindeki J_A , J_B ve I_{14} noktaları bulunmuş olur. Çember üzerindeki üç nokta belli olduğu için büküm çemberi çizilebilir. Böylece 4 biyel kolu üzerindeki herhangi bir noktanın hız analizi kolayca yapılabilir.

IX.5 Dört kol Mekanizması Bilgisayar Uygulaması

Bu örnekte kullanıcıyı ekrandan girdiği uzunluk ve açı değerlerine göre konum analizi yapılarak, gerekli verilerin hesaplanması ile 4 kol mekanizması çizdirilmiştir.

```
% dortkol.m
```

```
%-----
```

```
clc; clear; % ekranı temizler
```

```
% girdiler
```

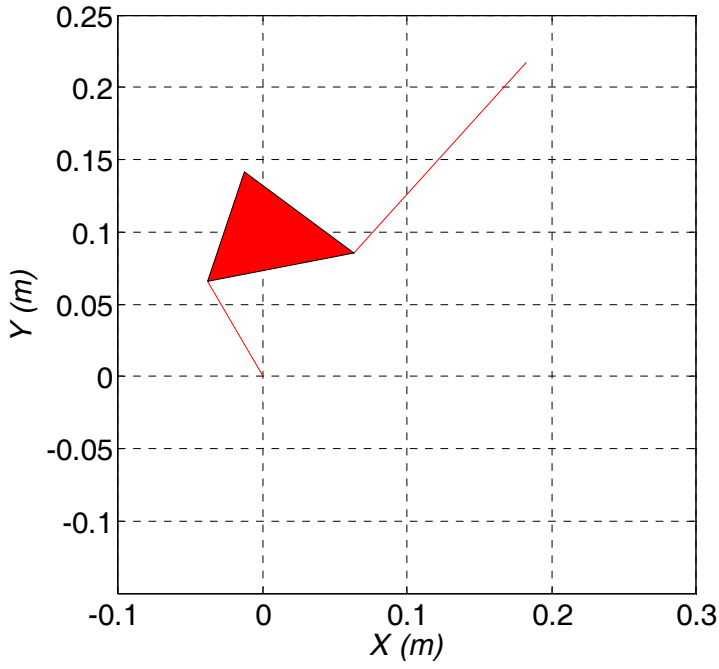
```
DR = pi/180;
```

```

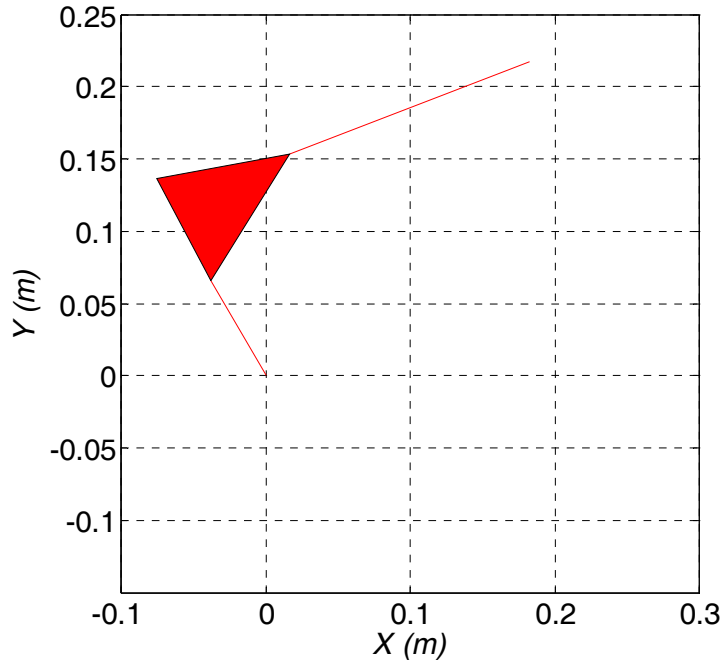
R = input('Enter [r1, r2, r3, r4, rca, th1, th2,
del3] (m and deg): ');
r1 = R(1); r2 = R(2); r3 = R(3); r4 = R(4); rca =
R(5);
th1 = R(6)*DR; th2 = R(7)*DR; del3 = R(8)*DR; %
derece radyana çevriliyor
rlx = r1*cos(th1); rly = r1*sin(th1);
% konum analizi: theta4
E = 2*r4*(r1*cos(th1) - r2*cos(th2));
F = 2*r4*(r1*sin(th1) - r2*sin(th2));
G = r1^2 + r2^2 - r3^2 + r4^2 - 2*r1*r2*cos(th1-th2);
t(1) = (-F + sqrt(E^2 + F^2 - G^2)) / (G-E); %çapraz
kol
t(2) = (-F - sqrt(E^2 + F^2 - G^2)) / (G-E); %açık kol
th4(1) = 2*atan(t(1));
th4(2) = 2*atan(t(2));
% th3, coupler noktası , bağlama açısı; iki durum
için hesaplanıyor
for i = 1:2,
ax = r2*cos(th2); % theta3
ay = r2*sin(th2);
bx = r4*cos(th4(i)) + rlx;
by = r4*sin(th4(i)) + rly;
th3(i) = atan2(by-ay,bx-ax);
bet = th3(i) + del3; % coupler noktası
pcx(i) = r2*cos(th2) + rca*cos(bet);
pcy(i) = r2*sin(th2) + rca*sin(bet);
mu(i) = abs(th4(i)-th3(i)); % bağlama açısı
end
% 4-kol konum sonuçlarını çizdir
for i = 1:2,
x2 = [0 r2*cos(th2)]; % 2 kolunun koordinatları
y2 = [0 r2*sin(th2)];
x3 = [r2*cos(th2) rlx+r4*cos(th4(i)) pcx(i)]; % 3
kolunun koordinatları
y3 = [r2*sin(th2) rly+r4*sin(th4(i)) pcy(i)];
x4 = [rlx rlx+r4*cos(th4(i))]; % 4 kolunun
koordinatları
y4 = [rly rly+r4*sin(th4(i))];
figure;
plot(x2,y2,'r',x4,y4,'r'); patch(x3,y3,'r');
axis('square'); set(gca,'FontSize',18);
xlabel('\itX (\itm)'); ylabel('\itY (\itm)');
axis([-0.1 0.3 -0.15 0.25]); grid;
end

```

Programda “Enter [r1, r2, r3, r4, rca, th1, th2, del3] (m and deg):
[0.284 0.076 0.103 0.178 0.08 50 120 60]” girdi değerleri için aşağıdaki çıktılar oluşur.(Şekil IX.6 ve Şekil IX.7)



Şekil IX.6 Program çıktısı 1



Şekil IX.7 Program çıktısı 2

X. SONUÇ

Bu çalışma ile mekanizmalar konusunda bir bilgi birikimi verilmiştir. Kinematiğin bazı unsurları incelenmiş, böylece ileride daha kompleks mekanizmaların hareketlerinin hem uzay hem de küresel olarak incelenmesinde geometrinin daha verimli olarak kullanılması hedeflenmiştir. Bu sebeple ayrıca bilgisayar programları ile programlanabilir özelliği de kazandıracağından, ileriki aşamalarda robotik konudaki çalışmalara bir yönden bazı katkılarının yapılabileceği umulmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Hartenberg, R. S., Denavit, J., 1964, Kinematic Synthesis of Linkages, McGraw-Hill Book. Co.,New York

Söylemez, E., 2000, Mekanizma Tekniği, ODTÜ,Ankara

Akçalı, İ. D., 2002, Mekanizma Tekniği, Birsen yayınevi, İstanbul

Müller, H.R, 1963, Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi, Ankara

Gaston, J., Kinematik, (çev. Biran L),İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, İstanbul.

Roseneuer,N and Willis, A.H., 1980, Mekanizmaların Kinematiği (Çev Yüksel, B.), Ege Üniversitesi Matbaası, İzmir

Pennock G.R,2007, Curvature theory for a two-degree-of-freedom planar linkage, Mechanism and Machine Theory

Pennock G.R., Sankaranarayanan H., 2003, Path curvature of a geared seven-bar mechanism, Mechanism and Machine Theory 38 (12)

Dr. Bob, Kinematics & Dynamics of Machines Class Notes ,
<http://www.ent.ohiou.edu/~bobw/>

Dynamic and Vibration,
www.engin.brown.edu/courses/en4/notes/RigidKinematics/rigkin.htm

ÖZGEÇMİŞ

Fatih KANDEMİR 1979 yılı Manisa doğumlu olup, ilkokul ve ortaokulu İzmir de, liseyi, İzmir Atatürk Lisesinde bitirmiştir.1997 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazanarak, 2001 yılında Bilgisayar Ağırlıklı Matematik opsiyonundan “iyi” derece ile mezun olup, aynı sene Milli Eğitimde öğretmenliğe başlamıştır, 2003 yılında Geometri Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlayan KANDEMİR evli olup, halen Manisa Alaşehir de lise öğretmenliğine devam etmektedir