



T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Faruk KARAASLAN

Danışman: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

2007 -TOKAT

**HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

FARUK KARAASLAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2007 -TOKAT

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER

FARUK KARAASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, 20/07 / 2007 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.

<u>Ünvanı</u>	<u>Adı soyadı</u>	<u>İmza</u>
Başkan	: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN	
Üye	: Doç. Dr. Orhan UZUN	

ONAY:

Bu tez, 17/07/2007 tarih ve 28 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen jüri üyelerince kabul edilmiştir.

.... / /

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Metin YILDIRIM

ÖZET

HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Faruk KARAASLAN

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim DalıYüksek Lisans Tezi
2007, 39 sayfa

Danışman	: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Jüri	: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Jüri	: Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR
Jüri	: Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ
Jüri	: Yrd. Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN
Jüri	: Doç. Dr. Orhan UZUN

Altı bölüm olarak düzenlenen bu çalışmanın ilk bölümünde çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde hemen hemen f -cebiri ve d -cebirlerinin temel özellikleri incelendi. Çalışmanın üçüncü bölümünde f -cebir, hemen hemen f -cebir ve d -cebir sınıfları arasındaki bağıntılar ele alındı. Dördüncü bölümde hemen hemen f -cebirlerinin nilpotent elemanları irdelendi. Beşinci bölümde değişmeli olmayan d -cebirlerinin durumları ele alındı. ve çalışmanın son bölümünde, tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Latis uzayı, Latis cebiri, f -cebiri, Hemen hemen f -cebiri, d -cebiri, Archimedean, Yarı asal, Nilpotent eleman.

ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN f -ALGEBRAS AND d -ALGEBRAS

Faruk KARAASLAN

Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Master Thesis
2007, 39 Pages

Supervisor: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Jury: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Jury: Assist. Prof. Dr. Osman ÖZDEMİR

Jury: Assist. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ

Jury: Assist. Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Jury: Assoc.Prof. Orhan UZUN

In the first chapter of this study which arranged as six chapters, basic definitions and theorems which will be used throughout the study have been given. In the second chapter, fundamental properties of almost f -algebras and d -algebras have been investigated. Third chapter, the relations between f -algebra, almost f -algebra, and d -algebra have been discussed. In the fourth chapter the nilpotent elements of almost f -algebras have been studied. In the fifth chapter, the non-commutative d -algebras have been investigated. Finally, in the sixth chapter, results and discussing have been given.

Key Words: Lattice Space, Lattice algebra, f -algebra, almost f -algebra, d -algebra, Archimedean, Semiprime, Nilpotent element.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Çalışmama Yrd.Doç.Dr.Ruşen YILMAZ danışmanlığında başladım. Daha sonra Yrd.Doç.Dr.Ruşen YILMAZ'ın başka bir Üniversiteye geçmesi nedeniyle Yüksek Lisans Tez Danışmanlığıma Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU tayin edildi ve tez çalışmalarımı Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU danışmanlığında tamamladım.

Şunu da belirtmem gerekir ki, tez çalışmalarım bitene kadar Yrd.Doç.Dr.Ruşen YILMAZ bana her türlü manevi ve bilimsel desteklerini esirgememiş ve tez çalışmalarımın tamamlanmasında çok önemli bilimsel katkılar sağlamıştır. Bu nedenle kendisine sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU'na tez yazım safhasında danışmanlık görevini üstlendiği ve değerli fikir ve tecrübeleriyle bana manevi ve bilimsel destek sağladığı için teşekkür ederim. Ayrıca bölümde ki tüm öğretim üyeleri ve Arş.Gör. Serkan DEMİRİZ'e, Arş.Gör. Serdar ENGİNOĞLU'na ve çalışmalarım boyunca manevi desteklerini esirgemeyen eşim Emine KARAASLAN'a teşekkür ederim.

Faruk KARAASLAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER LİSTESİ.....	v
GİRİŞ.....	1
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2. HEMEN HEMEN f – CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ.....	6
3. f – CEBİR, HEMEN HEMEN f – CEBİR VE d – CEBİR SINIFLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR.....	19
4. HEMEN HEMEN f – CEBİRLERİNİN NİLPOTENT ELEMANLARI.....	27
5. DEĞİŞMELİ OLMAYAN d – CEBİRLERİNİN NİLPOTENT ELEMANLARI.....	31
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Cümlesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cümlesi
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\emptyset$	Boş küme
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Mantıksal denk
$\neq$	Eşit değil
$\leq$	Büyük Olmayan
$\subseteq$	Alt Cümle
$\in$	Elemanıdır
$\perp$	Dik
$\sup$	En küçük üst sınır
$\inf$	En büyük alt sınır
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in modülü
A^+	A 'nın pozitif kısmı
I	İdeal
$(X, \leq)$	Kısmi sıralı küme
$N(A)$	Nilpotent elemanların kümesi
$Hom(X)$	X 'ten X içine tanımlı bütün lineer operatörlerin cümlesi
$Oto(X)$	X 'ten X içine tanımlı Otomorfizmaların uzayı
$\{e\}^d$	Sıralı zayıf birim
$[a, b]$	a ile b 'nin komütatörü

$C([0,1])$	$[0,1] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
$A / N(A)$	A uzayının $N(A)$ alt uzayına göre bölüm uzayı.
$L_b(X)$	Bütün sıralı sınırlı operatörler uzayı.

GİRİŞ

Sıralı vektör latis uzaylarının tarihi, Riesz'e ve 1928'de Bologna'da yapılan Uluslararası Matematikçiler Kongresine dayanır. 1951'de latis sıralı cebirlerinin en önemli sınıfı olan, f -cebirleri (yarı-normal latis terimi ile) çalışması, σ – Dedekind tam sıralı vektör uzayı için Nakano (1950) tarafından başlatıldı. 1953'te Amemiya (1953) tarafından devam edildi. Daha sonra Birkhoff ve Pierce (1956) tarafından 1956'da bugünkü tanımı ortaya konuldu. Latis sıralı cebirlerinin ilk tanımının tarihini kesin olarak söylemek zordur. Fakat yukarıdaki üç tarih etrafında bir zaman olduğu söylenebilir. Şu an ortalama yada Reynolds operatörleri diye adlandırılan konu, Frink (1950) tarafından sıralı latis halkası olarak ele alındı. Birkhoff bizzat kendisi, sıralı latis halkalarının gerekliliğini, sıralı latis gurupları üzerine 1942 yılında gerçekleştirdiği bir seminerinin sonunda listelediği problemler arasında vurgulamıştır (Birkhoff and Pierce, 1956). Riesz uzayları analiz çalışan araştırmacılar tarafından büyük bir dikkatle ele alındı. Sıralı latis gurupları daha yaygın olarak cebirle uğraşanlar tarafından incelendi.

f -halkaları üzerine güzel bir çalışma, 1995 yılında Henriksen tarafından yapıldı. Tarihsel olarak f -cebirleri teoresinin yeniden gündeme getirilmesi Lüksemburg (1979) tarafından Alkansas Lecture Notlarında ve 1981'de Pagter (1981)'in doktora tez çalışmasında ciddi olarak ele alındı. f -cebirleri alanındaki diğer bir araştırma, vektör latisleri için temsil teoremlerini kullanmaksızın Riesz uzayları teorisinde bir çok elementer sonucu kanıtlamak için bir program geliştiren Zaanen'in isteği üzerine başlamıştır. f -ceberi ilk olarak 1950 yılında yarı-normal latis cebirlerini kullanan Nakano (1950) tarafından çalışıldı ve cebirler sıralı σ – tam olarak varsayıldı. Bu varsayım 1953 yılında Amemiya (1953) tarafından yayınlana bir makalede kaldırıldı. İleride tanımı verilecek f -cebir kavramı ilk olarak Birkhoff ve Pierce (1956) tarafından 1956 yılından yayınlana bir makalede ortaya konuldu.

Hemen hemen f -ceberi kavramı 1967 yılında Birkhoff (1967) tarafından ve Banach hemen hemen f -cebirleri üzerine yoğun bir çalışma Scheffold (1981) tarafından yapıldı.

d -ceberi kavramı 1967 yılında Kudláček (1967) tarafından ortaya konuldu. Bu sınıf Steinberg (1977), Quint (1981) ve Marrigton (1978) tarafından çalışıldı. Bu latis cebir

sınıfların daha geniş tarihçesi Boulair, Gerard ve Triki (2003)'nin inceleme makalesinde bulunabilir.

Bu çalışmada hemen hemen f -cebiri ve d -cebiri sınıflarını ele aldık. Bu konuyla ilgili iyi bilinen özelliklerden bu cebir sınıflarının bazı yeni özelliklerinin verildiği Bernau ve Huijsmans(1990)'ın makalesini inceledik. Bunların aralarındaki ilişkiler ve f -cebirleri ile olan bağlantıları araştırıldı. Son olarak, bu cebir sınıflarının nilpotent elemanları Bernau ve Huijsmans (1990)'a göre irdelendi.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve bu X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip “ $\leq$ ” bağıntısı varsa X ’e bir *kısmi sıralı küme* veya *kısmi sıralanmış küme* denir ve $(X, \leq)$ ile gösterilir.

- (a) $\forall x \in X, x \leq x$ (yansıma)
- (b) $\forall x, y \in X, x \leq y \wedge y \leq x$ ise $x = y$ (ters simetri)
- (c) $\forall x, y, z \in X, x \leq y \wedge y \leq z$ ise $x \leq z$ (geçişme)

Eğer kısmi sıralanmış bir kümenin her eleman çifti, üzerinde tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabilirse bu kümeye *tam sıralı küme* denir (Çakıllı, 1997).

Tanım 1.2. $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subset X$ olsun. $\forall a \in A$ için eğer $x \leq a$ olacak şekilde bir x elemanı varsa x ’e A ’nın *alt sınırı* denir. A ’nın alt sınırı varsa, bu alt sınırların en büyüğüne A ’nın *infimumu* denir ve $\inf A = x$ diye gösterilir. $\forall a \in A$ için $a \leq y$ varsa y ’ye bir *üst sınırı* denir. A ’nın bir en küçük üst sınırı varsa bu en küçük üst sınırı A ’nın *supremumu* denir ve $\sup A = y$ diye gösterilir. Eğer $\forall a, b \in X$ için $a \vee b = \sup\{a, b\}$ ve $a \wedge b = \inf\{a, b\} \in X$ mevcutsa $(X, \leq, \vee, \wedge)$ yapısına kısaca, *latis* (veya *örgü*) denir. $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin boştan farklı her altkümesinin supremumu veya infimumu varsa X ’e *tam latıs* denir. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ özelliği sağlanırsa X latisine *dağılmalıdır* denir (Çakıllı, 1997).

Örnek 1.3. $(\mathbb{R}^2, <)$ ($<$, $\mathbb{R}^2$ ’de noktasal sıralama, yani $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için $(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow x \leq u, y \leq v$) bir kısmi sıralı latıstir, fakat tam latıs değildir.

Teorem 1.4. X bir latıs ise $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ve $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (birleşme özelliği).
- (ii) $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$ (değişme özelliği).
- (iii) $x \wedge (x \vee y) = x$ ve $x \vee (x \wedge y) = x$ (yutan eleman).
- (vi) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ ve $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
- (v) $x \leq y \Rightarrow x \vee (x \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$.

(vi) $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ ve $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

(vii) $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Latisler hakkında daha geniş bilgi (Luxemburg, 1971; Zaanen, 1983; Birkhoff, 1967; Çakıllı, 1997)'de bulunabilir.

Tanım 1.5. X bir (reel) vektör uzayı olsun. $(X, \leq)$ kısmi sıralı ve $\forall x, y \in X$ için

(i) $x \leq y \Rightarrow \forall z \in X$ için $x + z \leq y + z$ ve

(ii) $x \geq 0 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^+$ için $ax \geq 0$

özellikleri sağlanırsa, X 'e bir *sıralı vektör uzayı* denir. Eğer $\forall x, y \in X$ için $\sup\{x, y\}$ X 'te mevcutsa, X sıralı vektör uzayına bu kısmi sıralama bağıntısına göre bir *sıralı vektör latisi*, veya kısaca, *latis uzayı* (*l-uzayı* veya *Riesz uzayı*) denir. $\forall a, b \in X^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $na \leq b$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa bu özelliği sağlayan X latis uzayına *Archimedean* denir (Zaanen, 1983).

Bu çalışmamızda, aksi belirtilmedikçe, tüm latis uzayları Archimedean kabul edilecektir.

Tanım 1.6. A bir latis uzayı olsun. Herhangi bir $x \in A$ için $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ ve $|x| = x \vee (-x)$ olarak gösterilen A 'nın bu x^+ , x^- ve $|x|$ elamanlarına x 'in, sırasıyla, *pozitif kısmı*, *negatif kısmı* ve *modülüsü* denir (Zaanen, 1983).

Teorem 1.7. Bir A latis uzayında, $\forall x, y, z \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$, $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$ ve $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$.

(ii) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.

(iii) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ ve $x^+ \wedge x^- = 0$.

(vi) $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $x^+ = y$ ve $x^- = z$; başka bir ifadeyle, $x = x^+ - x^-$ ayrışması tektir.

(v) $x = (x - y)^+ + (x \wedge y)$.

- (ix) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ ve $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$.
- (xi) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ ve $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$; *başka bir ifadeyle, her latis uzayı dağılmalıdır.*

Yukardaki ifadelerin ispatları (Luxemburg, 1971; Zaanen, 1997; Çakıllı, 1997)'de bulunabilir.

2. HEMEN HEMEN f – CEBİRLERİ VE d -CEBİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1. A bir latıs uzayı olsun. $\forall a, b \in A^+$ için $ab \geq 0$ ve aynı zamanda A bir birleşmeli cebir ise A 'ya *latıs sıralı cebiri*, veya kısaca, *latıs cebiri* (*l- cebiri* veya *Riesz cebiri*) denir (burada $A^+ = \{a \in A : a \geq 0\}$ kümesine A 'nın *pozitif kısmı* denir) (Zaanen, 1983).

Örnek 2.2. $V \neq \emptyset$ bir küme ve $A = \{f \mid f: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ bir fonksiyon}\}$ ve $\forall f, g \in A, \forall x \in V$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha \times f)(x) = \alpha f(x)$$

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

şeklinde tanımlanan işlemlere göre $((A, \oplus), (\mathbb{R}, +, \cdot), \times, \preceq, \vee)$ yapısı (veya kısaca, A) bir latıs uzayıdır. Bu işlemlere ek olarak, eğer A 'nın elemanları arasında

$$(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$$

şeklinde bir çarpma işlemi tanımlanırsa $((A, \oplus), (\mathbb{R}, +, \cdot), \times, \preceq, \vee, \otimes)$ yapısının, veya kısaca, A 'nın bir latıs cebiri olduğu görülür.

Teorem 2.3. A bir latıs cebiri ise aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i) $\forall a, b \in A$ için $|ab| \leq |a| |b|$

(ii) $\forall a, b \in A$ için $(ab)^+ \leq a^+ b^+ + a^- b^-$

(iii) $\forall a, b \in A$ için $(ab)^- \leq a^+ b^- + a^- b^+$

(Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) $|ab| = (ab)^+ + (ab)^- \leq a^+ b^+ + a^- b^- + a^+ b^- + a^- b^+$

$$= a^+ (b^+ + b^-) + a^- (b^+ + b^-)$$

$$=(a^+ + a^-)(b^+ + b^-) = |a| |b|.$$

(ii) $\forall a, b \in A$ için $a^+b^- + a^-b^+ \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} ab &= (a^+ - a^-)(b^+ - b^-) \\ &= a^+(b^+ - b^-) + (-a^-)(b^+ - b^-) \\ &= a^+b^+ + a^-b^- - (a^+b^- + a^-b^+) \\ &\leq a^+b^+ + a^-b^-. \end{aligned}$$

(iii) $(ab)^- = -(ab) \vee 0$ olduğundan $-(ab) = a^+b^- + a^-b^+ - (a^+b^+ + a^-b^-)$ eşitsizliğinden $-(ab) \leq a^+b^- + a^-b^+$ ve $-(ab) \vee 0 \leq (a^+b^- + a^-b^+) \vee 0$, yani $(ab)^- \leq a^+b^- + a^-b^+$ elde edilir.

Tanım 2.4. A bir latis cebiri, $a, b \in A$ ve $a \wedge b = 0$ olsun.

- (i) $\forall c \in A^+$ için $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ ise A' 'ya bir f -ceberi,
- (ii) $ab = 0$ ise A' 'ya bir *hemen hemen* f -ceberi,
- (iii) $\forall c \in A^+$ için $c(a \vee b) = ca \vee cb$ ve $(a \vee b)c = ac \vee bc$ ise A' 'ya bir d -ceberi, ve
- (iv) $ab \wedge ba = 0$ ise A' 'ya r -ceberi denir (Yılmaz, 2001).

f -cebirleri ilk kez 1950 yılında yarı normal latis terimini kullanan Nakano (1950) tarafından ortaya konuldu ve cebirler sıralı σ -tam olarak farz edildi. Daha sonra son şart Amemiya (1953)'nin yazdığı bir makalesinde kaldırıldı. yukarıda verilen f -cebirinin tanımı. İlk olarak Birkhoff ve Pierce (1956)'nin yazdıkları bir makalede görülmüştür. Hemen hemen f -cebirlerinin sınıfı Birkhoff (1967) tarafından tanımlandı ve Banach hemen hemen f -cebirlerinin Scheffold (1981) tarafından yoğun bir şekilde çalışıldı. d -cebirlerinin tanımı Kudláček (1967)'e aittir. Bu sınıf üzerine Stainberg (1977), Quint (1981) ve Martignon (1978) tarafından çalışıldı. Yılmaz (2001) tarafından tanımlandı. Bu sınıflar ile r -cebir sınıfı farklı olmasına rağmen aralarında bazı ilişkiler vardır; örneğin, f -cebir, hemen hemen f -cebir ve d -cebir sınıflarının her biri birer r -cebirdir (detaylar için bakınız (Yılmaz, 2001)). Bu çalışmamızda f -cebir, hemen hemen f -cebir ve d -cebir sınıflarını inceleyeceğiz.

Teorem 2.5. *A bir latis cebiri ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

- (i) *Her f -cebiri bir hemen hemen f -cebidir.*
- (ii) *Her f -cebiri bir d -cebidir (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat: (i) $a, b \in A$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. Bu durumda $a, b \in A^+$ ve A bir f -cebiri olduğundan $b \wedge a = 0$ için $b \wedge ab = 0$ olur. Benzer şekilde $a \in A^+$ ve A bir f -cebiri olduğundan $ab \wedge ab = 0$ 'dır. Bu $ab = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla A bir hemen hemen f -cebidir.

(ii) $a, b \in A$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. A bir f -cebiri olduğundan $\forall c \in A^+$ için $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ ise $ca \wedge cb = ac \wedge ab = 0$ 'dır. Dolayısıyla A bir d -cebidir.

Örnek 2.6. $A = IR^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in A$ olsun. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$, $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$ ve $xy = (0, x_1 y_1)$ işlemlerine göre A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve d -cebidir, fakat f -cebiri değildir. Çünkü $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ ve $z = (1, 0)$ olarak alınırsa, $x \wedge y = 0$ olmasına rağmen $zx \wedge y = (0, 1) \neq (0, 0)$.

Örnek 2.7. $A = IR^2$ yukarıdaki örnek gibi ve $x, y \in A$ için

$$xy = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2)$$

olarak tanımlanırsa A bir d -cebiri fakat hemen hemen f -cebiri değildir. Gerçekten,

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow cx \wedge cy = 0, xc \wedge yc = 0 \quad (\forall c \in A^+).$$

Fakat $a = (0, 1)$, $b = (0, 1)$ alırsak $a \wedge b = (1, 0) \wedge (0, 1) = (0, 0) \Rightarrow a \wedge b = 0$ olmasına rağmen

$$ab = (1, 0)(0, 1) = (0, 1) \neq (0, 0) \Rightarrow ab \neq 0.$$

Şimdi her hemen hemen f -cebirinin bir d -cebi olmadığını gösterelim.

Örnek 2.8. $A = IR^3$ ve yukarıdaki gibi doğal toplam, skaler çarpım ve kısmi sıralama işlemleri verilsin. $xy = (x_2 y_2 + x_3 y_3, x_2 y_2, x_3 y_3)$ işlemine göre A bir hemen hemen f -cebiri, fakat bir d -cebi değildir. Çünkü $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 0, 1)$ ise

$$a \wedge b = (1,1,0) \wedge (0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow a \wedge b = 0.$$

Diğer taraftan, $c = (1,1,1) \in A^+$ için

$$\begin{aligned} ca \wedge cb &= (1,1,1)(1,1,0) \wedge (1,1,1)(0,0,1) \\ &= (1+0, 1, 0) \wedge (0+1, 0, 1) \\ &= (1, 1,0) \wedge (1, 0,1) \\ &= (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Tanım 2.9. A bir latıs uzayı ve $a \in A$ olsun. Eğer bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k = 0$ olduğunda $a = 0$ sağlanıyorsa A 'ya *yarı asal* denir.

Teorem 2.10. Bir Archimedean f -cebiri A 'da aşağıdaki özellikler sağlanır. $\forall a, b \in A$ ve $\forall c \in A^+$ için

- (i) $c(a \vee b) = ca \vee cb$, $(a \vee b)c = ac \vee bc$ ve $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$, $(a \wedge b)c = ac \wedge bc$.
- (ii) $a \perp b$ ise $ac \perp b$ ve $ca \perp b$.
- (iii) $a \perp b$ ise $ab = 0$. Özel olarak, $\forall a \in A$ için $a^+ a^- = a^- a^+ = 0$.
- (iv) A yarı asal ise $a \perp b \Leftrightarrow ab = 0$.
- (v) $a^+ \geq 0$ ve $aa^+ = (a^+)^2 \geq 0$.
- (vi) A değişmeli ve birleşmedir.

Yukarda ki ifadelerin ispatları (Birkhoff, 1956; Huijsmans and Pagter, 1986; Zaanen, 1983)' de bulunabilir.

Teorem 2.11. Bir Archimedean hemen hemen f -cebiri A 'da aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $\forall a \in A$ için $a^2 \geq 0$ (pozitif kare), özel olarak $|a^2| = |a|^2$.
- (ii) $\forall a \in A$ için $aa^+ \geq 0$ ve $a^+ a \geq 0$.

(iii) $e \in A$ 'nın bir birim elemanı ise $e > 0$.

(iv) $\forall a \in A$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a^{2n}| = |a|^{2n}$.

(v) $\forall a, b \in A^+ \vee \forall n \in \mathbb{N}$ için $a(b - na)^+ \leq \frac{1}{n}b^2$.

(vi) $\forall a, b \in A^+ \vee \forall n \in \mathbb{N}$ için $(b - na)^+ a \leq \frac{1}{n}b^2$

(Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) $a^2 = (a^+ - a^-)^2 = (a^+)^2 - a^+a^- - a^-a^+ + (a^-)^2 = (a^+)^2 + (a^-)^2 \geq 0$.

(ii) $\forall a \in A$ için $aa^+ = (a^+ - a^-)a^+ = (a^+)^2 \geq 0$ dır. Benzer şekilde $a^+a \geq 0$ dır.

(iii) Eğer $e \in A$ 'nın birim elemanı ise $e = ee = e^2 > 0$ 'dır. Yani $A \neq \{0\}$ ise $e > 0$ 'dır. Eğer $A = \{0\}$ ise $e = 0$ olmak zorundadır.

(iv) $a \in A$ olmak üzere $a^{2n} = (a^+ - a^-)^{2n} = (a^+)^{2n} + (a^-)^{2n} \geq 0$. $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ için $a^{2n} \geq 0$ olduğundan $|a^{2n}| = a^{2n}$. Diğer taraftan

$$|a|^{2n} = (a^+ + a^-)^{2n} = (a^+)^{2n} + (a^-)^{2n} = a^{2n}$$

olduğundan $|a|^{2n} = a^{2n} = |a^{2n}|$ elde edilir.

(v) (ii)'ye göre $(b - na)(b - na)^+ \geq 0$. Buradan $b(b - na)^+ - na(b - na)^+ \geq 0$ olur. Bu yüzden $a(b - na)^+ \leq \frac{1}{n}b(b - na)^+ \leq \frac{1}{n}bb^+ = \frac{1}{n}b^2$ ($a, b \geq 0$).

Benzer şekilde (vi) ispat edilir.

Önerme 2.12. *Bir A latis cebirinde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) A bir hemen hemen f -cebiridir.

(ii) $\forall a, b \in A$ için $a \perp b \Rightarrow ab = 0$ dır.

(iii) $\forall a, b \in A$ için $(a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = 0$

(iv) $\forall a \in A$ için $a^+ a^- = 0$

(v) $\forall a \in A$ için $a^- a^+ = 0$

(vi) $\forall a \in A$ için $a^2 = |a|^2$

(Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii). Olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}. \quad 0 \leq |a - a \wedge b| \wedge |b - a \wedge b| &\leq (|a| + |a \wedge b|) \wedge (|b| + |a \wedge b|) = (|a| \wedge |b|) + (|a \wedge b|) \\ &\leq (|a| \wedge |b|) + (|a| \wedge |b|) = 0 \end{aligned}$$

yani, $|a - a \wedge b| \perp |b - a \wedge b|$. Bu yüzden (i)'e göre $(a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). $a, b \in A$ için $(a - a \wedge b) = (a - a) \vee (a - b)$

$$= (0 \vee (a - b))$$

$$= (a - b)^+$$

$$(b - a \wedge b) = (b - a) \wedge (b - b)$$

$$= -(a - b) \vee 0$$

$$= (a - b)^-$$

$(a-b)^+ \wedge (a-b)^- = 0$ (i)' den dolayı $(a-b)^+(a-b)^- = 0$ dır.

Dolayısıyla $(a-(a \wedge b))(b-(a \wedge b)) = 0$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). $a^+ \wedge a^- = a^- \wedge a^+ = 0$ olduğundan açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (v). (iii) $\Rightarrow$ (iv)'e benzer şekilde elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (vi). $a^2 = (a^+ - a^-) = (a^+ - a^-)(a^+ - a^-) = (a^+)^2 - a^+a^- - a^-a^+ + (a^-)^2$

$$= (a^+)^2 + (a^-)^2$$

$$= (a^+)^2 + a^+a^- + a^-a^+ + (a^-)^2$$

$$= (a^+ + a^-)^2$$

$$= |a|^2$$

(vi) $\Rightarrow$ (i). Eğer $a^2 = |a|^2$ ise $(a^+)^2 - a^+a^- - a^-a^+ + (a^-)^2 = (a^+)^2 + a^+a^- + a^-a^+ + (a^-)^2$

$\forall a \in A$ için $2(a^+a^- + a^-a^+) = 0$ elde edilir. Böylece $\forall a \in A$ için

$a^+a^- \geq 0$, $a^-a^+ \geq 0$ ise $a^+a^- = a^-a^+ = 0$ ' dır. $a, b \in A$ için $a \wedge b = 0$.

Burada $c = (a-b)$ olsun , $c^+ = a$ ve $c^- = b$

$$0 = a \wedge b = (a - (a-b)^+) = a - c^+ \Rightarrow a = c^+$$

$$0 = a \wedge b = b - (b-a)^+ = b - (a-b)^- = b - c^- \Rightarrow b = c^-$$

$c = c^+ - c^- = a - b \Rightarrow c^+c^- = 0$ elde edilir $c^+ = a$ ve $c^- = b$ olduğundan $ab = 0$ 'dır.

Önerme 2.13. *A bir değişmeli hemen hemen f-cebiri ise $\forall a, b \in A$ için $ab = (a \vee c)(a \wedge b)$ sağlanır (Bernau and Huijsmans,1990).*

İspat: A bir hemen hemen f -cebiri ve $\forall a, b \in A$ için $(a - a \wedge b) = (a - b)^+$ ve $(b - a \wedge b) = (a - b)^-$ olduğundan $(a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = 0$. Buradan A değişmeli olduğundan

$$ab - a(a \wedge b) - (a \wedge b)b + (a \wedge b)^2 = 0 \Rightarrow ab = (a + b - a \wedge b)(a \wedge b) = (a \vee b)(a \wedge b).$$

A Archimedean bir f -cebiri ve $a, b \in A^+$ ise

$$n|ab - ba| \leq a^2 + b^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ ve}$$

$$n|(ab)c - a(bc)| \leq ab(a + b + ab) + a(a + a^2 + ba) + cb(c + b + cb) + c(c + c^2 + bc)$$

eşitsizlikleri yardımıyla Archimedean hemen hemen f -cebirlerinin değişme ve birleşme özelliklerini sağladığı Birkhoff ve Pierce tarafından gösterilmiştir (Birkhoff and Pierce, 1956). Bu eşitsizliklerin ispatlarının tamamı (Birkhoff, 1967)'de Birkhoff tarafından verilmiştir. Diğer alternatif yaklaşım, otomorfizmalar yardımıyla (detaylar için bakınız (Huijsmans and Pagter, 1986)). Benzer şekilde her Archimedean hemen hemen f -cebirinin genel olarak değişme özelliğine sahip olduğu ispatlanmıştır. Bu önemli sonucu aşağıda teorem olarak ifade ediyoruz (norm durumu için (Scheffold, 1981) ve genel şekli için (Bernau and Huijsmans, 1990), (Basly and Triki, 1988)'e bakınız).

Teorem 2.14. *Her Archimedean hemen hemen f -cebiri değişmelidir (Bernau and Huijsmans, 1990).*

Archimedean olmayan hemen hemen f -cebirlerinin değişmeli olması gerekmez.. Aynı şekilde, bu Archimedean olmayan f -cebirleri için de geçerlidir.

Örnek 2.15. $A = IR^2$, $\forall a, b \in A$ için

$a \leq b \Leftrightarrow$ ya $a_1 < b_1$ ya da $a_1 = b_1$ ve $a_2 \leq b_2$ (lexicographical sıralı)

$$a * b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere Örnek 2.6'daki gibi verilirse A bir f -cebiri, fakat ne Archimedean ne de değişmelidir. Burada, bu sıralama bağıntısının tam olduğuna, ve dolayısıyla $a \wedge b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Bu bölümün başında ele aldığımız gibi bir Archimedean f -cebiri otomatik olarak hem değişmeli hem de birleşmelidir. Fakat bu durum Archimedean hemen hemen f -cebirleri için geçerli değildir. Diğer bir deyişle, bir Archimedean hemen hemen f -cebirinin değişmeli olmasına rağmen genel olarak birleşmeli olması gerekmez.

Örnek 2.16. $A = C([0,1])$ olsun ve $\forall a, b \in A$ için,

$$(a * b)(x) = a(0)b(0) + a(1)b(1) \quad (x \in [0,1])$$

şeklinde tanımlansın. A 'nın bir Archimedean hemen hemen f -cebirinin bütün özelliklerini sağladığı fakat birleşmeli olmadığı kolayca görülür. (Burada, $\forall x \in [0,1]$ için $(a * a)(x) = a(0)^2 + a(1)^2$ olduğundan, A ne bir birim elemanına sahip ne de yarı asalır).

Önerme 2.17. A bir *latis cebiri* olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A bir *d-cebiridir*.

(ii) $\forall a \in A, c \in A^+ \text{ için } c|a| = |ca| \text{ ve } |a|c = |ac|$.

(iii) $\forall a, b \in A \text{ için } |ab| = |a||b|$.

(iv) $\forall a, b \in A \text{ için } (ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^-$

(v) $\forall a, b \in A \text{ için } (ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$

(vi) $\forall c \in A \text{ için } a \perp b \text{ ise } ca \perp cb \text{ ve } ac \perp ab = 0$

$$(vii) \forall c \in A^+ \text{ için } a \wedge b = 0 \text{ ise } ca \wedge cb = ac \wedge ab = 0$$

$$(viii) \forall a, b \in A, c \in A^+ \text{ için } c(a \wedge b) = ca \wedge cb \text{ ve } (a \wedge b)c = ac \wedge bc$$

(Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii). A bir d -cebiri $a \in A$ ve $c \in A^+$ olsun. Bu durumda

$$c|a| = c(a^+ + a^-) = ca^+ + ca^- = c(a \vee 0) + c(-a \vee 0)$$

$$= (ca \vee 0) + (-ca \vee 0)$$

$$= (ca)^+ + (ca)^-$$

$$= |ca|,$$

$$|a|c = (a^+ + a^-)c = a^+c + a^-c = (a \vee 0)c + (-a \vee 0)c$$

$$= (ac \vee 0) + (-ac \vee 0)$$

$$= (ac)^+ + (ac)^-$$

$$= |ac|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Bir latis cebirinde $|ab| \leq |a||b|$ olduğunu biliyoruz.

$$|a||b| = \|a|b|\| = \|a|(b^+ - b^-)|\| = \|a|b^+ - |a|b^-\|$$

$$= \|ab^+ - ab^-\| \leq \|ab^+ - ab^-\| = \|a(b^+ - b^-)\| = |ab|.$$

Dolayısıyla $|ab| = |a||b|$.

$$(iii) \Rightarrow (iv). \quad ab = (a^+ - a^-)(b^+ - b^-) = (a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^-)$$

$$= a^+b^+ + a^-b^- - (a^+b^- + a^-b^+)$$

Buradan $(a^+b^+ + a^-b^-) \wedge (a^+b^- + a^-b^+) = 0$. Bu yüzden $(ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^-$ ve $(ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$ elde edilir.

$$(iv) \Leftrightarrow (v). \quad ab = (ab)^+ - (ab)^- = (a^+b^+ + a^-b^-) - (ab)^- \text{ ve } ab = (a^+ - a^-)(b^+ - b^-)$$

$$= a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^-$$

$$= (a^+b^+ + a^+b^-) - (a^+b^- + a^-b^+).$$

$$\text{Bu yüzden } (a^+b^+ + a^-b^-) - (ab)^- = (a^+b^+ + a^-b^-) - (a^+b^- + a^-b^+).$$

Dolayısıyla $(ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$ elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (iv). Benzer şekilde gösterilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Açıktır.

(v) $\Rightarrow$ (vi). $a, b \in A$ ve $c \in A^+$ olsun. (vi)' ten dolayı $(a - a \wedge b) \wedge (b - a \wedge b) = 0$ ve $(ca - c(a \wedge b)) \wedge (cb - c(a \wedge b)) = 0$ dır. Buradan $ca \wedge cb = c(a \wedge b)$ elde edilir.

(vii) $\Rightarrow$ (viii). $a, b \in A$ ve $c \in A^+$ olsun. $(a \vee b) - (a \vee b) = 0$ olduğundan

$$(a - (a \vee b)) \vee (b - (a \vee b)) = -(a - (a \vee b)) \wedge -(b - (a \vee b))$$

$$= -c(a - (a \vee b)) \wedge -c(b - (a \vee b))$$

$$= -(ca - c(a \vee b)) \wedge -(cb - c(a \vee b))$$

$$= -((ca - c(a \vee b)) \vee (cb - c(a \vee b)))$$

$$= -((ca \vee cb) - c(a \vee b))$$

$$= -(ca \vee cb) + c(a \vee b) = 0,$$

yani $c(a \vee b) = ca \vee cb$ ve benzer şekilde $(a \vee b)c = ac \vee bc$ elde edilir.

(viii) $\Rightarrow$ (ii). $c \in A^+$ ve $a \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} c|a| &= c(a^+ + a^-) = c((a \vee 0) + (-a \vee 0)) = c(a \vee 0) + c(-a \vee 0) \\ &= (ca \vee 0) + (-ca \vee 0) \\ &= (ca)^+ + (ca)^- = |ca|. \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (vi). $|a| \wedge |b| = 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} |ca| &\leq |c||a| = |c|(|a| - |a| \wedge |b|) = |c|(|a| \wedge |b|)^+ = (|c|(|a| - |b|))^+ \\ &= (|c||a| - |c||b|)^+ \end{aligned}$$

Benzer şekilde $|cb| \leq (|c||a| - |c||b|)^-$ dir.

$$0 \leq |ca| \wedge |cb| \leq (|c||a| - |c||b|)^+ \wedge (|c||a| - |c||b|)^- = 0 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $ca \perp cb$ dir. Benzer şekilde $ac \perp bc$ ifadesini de gösterebiliriz.

Quint (1981) tezinde, bir (birleşmeli) d-cebirinde $a \wedge b = 0$ ise $(ab)^3 = 0$ sağlandığını göstermiştir. Bernau ve Huijsmans (1990) ise bu sonucu aşağıdaki gibi ispatlamışlardır.

Teorem 2.18. *Bir d-cebirinde $a \wedge b = 0$ ise $(ab)^2 = 0$ (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat: A bir d-cebiri ve $a \wedge b = 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq (ab)^2 &= ab(ab) \wedge (ab)ab \\ &\leq (a + ab)b(b + ab) \wedge (a + ab)a(b + ab) \\ &= (a + ab)(b(b + ab) \wedge a(a + ab)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a + ab)(b \wedge a)(b + ab) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. f – CEBİR, HEMEN HEMEN f – CEBİR VE d – CEBİR SINIFLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Tanım 3.1. A bir latis cebiri ve $a \in A$ olsun. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $a^n = 0$ eşitliğini sağlayan elemanlara *nilpotent* denir (Bernau and Huijsmans,1990) ve bütün nilpotent elemanların kümesi $N(A)$ ile gösterilir. O halde, A bir latis cebiri ise

$$N(A) = \{a \in A : a^n = 0, \exists n \in \mathbb{N}\} \quad (n, a' \text{ ya bağılı})$$

olarak ifade edilir. Burada, eğer $N(A) = \{0\}$ ise A 'nın yarı asal olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 3.2. (i) Her yarı asal d -cebiri bir f -cebiridir.

(ii) $e > 0$, birim elemana sahip her d cebiri bir f -cebiridir (Bernau and Huijsmans,1990).

İspat: A bir d -cebiri olsun. $a, b \in A^+$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. $\forall c, d \in A^+$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq d(ca \wedge b) &= dca \wedge db \leq [(d \vee dc)a] \wedge [(d \vee dc)b] \\ &= (d \vee dc)(a \wedge b) = 0 \quad \text{yazılır.} \end{aligned}$$

Buradan $d(ca \wedge b) = 0$ 'dır.

Benzer şekilde $(ac \wedge b)d = 0$ olduğu gösterilebilir.

(i) $d = ca \wedge b$ alalım. O halde $(ca \wedge b)^2 = 0$ 'dır. Fakat A yarı asal olduğunda

$ca \wedge b = 0$ 'dır. Dolayısıyla A bir f -cebiridir. Benzer şekilde $ac \wedge b = 0$ 'dır.

(ii) $d = e$ alırsak $e > 0$ olduğundan $ca \wedge b = 0$ olması gerekir. Benzer şekilde $ac \wedge b = 0$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla A bir f -cebiridir.

Tanım 3.3. A bir latîs cebiri ve $a \in A$ olsun. $a \perp e$ olduğunda $a = 0$ veya $a \wedge e = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa bu e elemanına A 'nın *sıralı zayıf birim elemanı*, veya kısaca, *zayıf birim elemanı* denir. Aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\{e\}^d = \{a \in A : a \perp e\} = \{0\}.$$

Tanım 3.4. Bir A latîs uzayının bir alt vektör uzayı X olsun. $x \in X$, $y \in A$ için $|y| \leq |x|$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa X 'e bir *sıralı ideal*, veya kısaca *ideal* denir (X bir idealdir $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ için $x \wedge y \in X$) (Yılmaz, 2001).

Lemma 3.5. A , $e > 0$ olacak şekilde sıralı zayıf birim elemana sahip bir latîs cebiri olsun.

(i) $a \in A^+$ ve $(a \wedge 2e)^2 = 0$ ise $a \leq e$

(ii) $a \in A^+$ ve $a^2 = 0$ ise $a \leq e$.

(Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) e tarafından üretilen sıralı ideal $I_e (= \{a \in A : \exists n \in \mathbb{N} \text{ öyleki } |a| \leq ne\})$ olsun. I_e 'nin bir f -cebiri olduğuna dikkat edelim. $b = a \wedge 2e$ olarak alınırsa $b^2 = 0$ olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq b - b \wedge e &= (b - b \wedge e) \wedge b = (b - b \wedge e) \wedge (b - b^2 \wedge b) \\ &= (b - b \wedge e) \wedge b(e - b \wedge e) \\ &\leq (b - b \wedge e) \wedge 2(e - b \wedge e) = 0 \end{aligned}$$

(I_e bir f -cebiri olduğundan $b \in I_e$ için $b^2 \wedge b = b(b \wedge e)$). Buradan $b \leq e$, yani $a \wedge 2e \leq e$ olur. Böylece $(a - e) \wedge e \leq 0$ ve dolayısıyla $(a - e)^+ \wedge e = 0$. Fakat e bir sıralı zayıf birim eleman olduğundan $(a - e)^+ = 0$, yani $a \leq e$.

(ii) (i)'den açıktır.

Lemma 3.6. *A bir latis cebiri ve $a \in A^+$ olsun. $A, e > 0$ olacak şekilde sıralı zayıf birim elemana sahip ise $(a-e)^+(e-a)^+ \leq e$ ve $(e-a)^+(a-e)^+ \leq e$ ' dir (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat: $c = (a-e)^+(e-a)^+ \wedge 2e$ alalım. Bu durumda $0 \leq c \leq (a-e)^+$ ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla $0 \leq (e-a)^+c \leq c \leq (a-e)^+$ ve $(e-a)^+c \leq 2(e-a)^+$. Böylece

$$0 \leq c^2 \leq (a-e)^+(e-a)^+ \leq (a-e)^+ \{(a-e)^+ \wedge 2(e-a)^+\} = 0,$$

yani $c^2 = 0$ ve Lemma 3.5'ten $(a-e)^+(e-a)^+ \leq e$ elde edilir. Benzer şekilde $(e-a)^+(a-e)^+ \leq e$ olduğu görülür..

Teorem 3.7. *A, $e > 0$ olacak şekilde bir birim elemana sahip latis cebiri ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *A bir hemen hemen f- cebiridir.*

(ii) *e bir sıralı zayıf birim elemandır (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii). *A bir hemen hemen f-cebiri ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \perp e$ ise $|a|e = 0 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow a = 0$.*

(ii) $\Rightarrow$ (i). *$a, b \in A$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. O halde*

$$0 \leq (a \wedge e)(b \wedge e) \leq a \wedge b \Rightarrow (a \wedge e)(b \wedge e) = 0$$

ve dolayısıyla, $e > 0$ bir birim elemana olduğundan,

$$a(b \wedge e) = (a - a \wedge e)(b \wedge e) \text{ ve } b \wedge e = (e - a \wedge e)(b \wedge e)$$

elde edilir. Lemma 3.6'ya göre

$$0 \leq a(b \wedge e) = (a - a \wedge e)(e - a \wedge e)(b \wedge e) = (a - e)^+(e - a)^+(b \wedge e) \leq b.$$

Bu nedenle $0 \leq a(b \wedge e) \leq a \wedge b$ ifadesinden $a(b \wedge e) = 0$ sağlanır. Benzer şekilde $(a \wedge e)b = 0$ ve Lemma 3.6'dan

$$0 \leq ab = a(b - b \wedge e) = a(e - b \wedge e)(b - b \wedge e) = a(e - a)^+ (b - e)^+ \leq a.$$

O halde $0 \leq ab \leq a \wedge b = 0$ eşitsizliğinden $ab = 0$ elde edilir.

Teorem 3.8. *A , $e > 0$ birim elemanlı Archimedean latis cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *A bir f -cebiridir.*

(ii) *e bir sıralı zayıf birim elemandır.*

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğu açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $a \in A^+$ ve $a^2 = 0$ kabul edelim. Bu durumda $n = 1, 2, \dots$ için $(na)^2 = 0$. Buradan Lemma 3.5'e göre $n = 1, 2, \dots$ için $na \leq e$ 'dir. Archimedean özelliğinden $a = 0$ (*) elde edilir.

Eğer $a \wedge b = 0$ ve $c \in A^+$ ise $ab = 0$.

Dolayısıyla Teorem 3.7'ye göre bir hemen hemen f -cebiridir.

$$0 \leq (ca \wedge b)^2 = (ca \wedge b)(ca \wedge b) \leq ca(ca \wedge b) \leq cab = 0,$$

yani $(ca \wedge b)^2 = 0$. (*)'dan $ca \wedge b = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $ac \wedge b = 0$ olduğu görülür.

Bu sonuç Birkhoff ve Pierce (1956) tarafından geliştirildi. Farklı bir ispatı Bigard, Keimel ve Wolfenstein (1977) veya Basly ve ark., (baskıda)'da bulunabilir.

Teorem 3.9. *A bir yarı asal l -cebiri olsun. A bir f -cebiridir $\Leftrightarrow \forall a, b \in A^+$ için $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow ab = 0$ (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat : A bir f -cebiri ve $a \wedge b = 0$ ise Teorem 2.10'dan $ab = 0$ olduğu açıktır. Eğer $ab = 0$ ise

$$0 \leq (a \wedge b)^2 = (a \wedge b)(a \wedge b) \leq ab = 0,$$

yani $(a \wedge b)^2 = 0$. A yarı asal olduğundan $a \wedge b = 0$ elde edilir.

Tersine olarak, $\forall a, b \in A^+$ için $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow ab = 0$ olsun. $x \wedge y = 0$ ve $z \in A^+$

$$0 \leq (zx \wedge y)^2 = (zx \wedge y)(zx \wedge y) \leq (zx)y = z(xy) = z0 = 0,$$

yani $(zx \wedge y)^2 = 0$. A yarı asal olduğundan $zx \wedge y = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $xz \wedge y = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.10. (i) Her yarı asal hemen hemen f -cebiri bir f -cebiridir.

(ii) Birim elemanı e olan her Archimedean hemen hemen f -cebiri bir f -cebiridir.

(Bernau and Huijsmans, 1990)

İspat: (i) Teorem 3.9'a göre bir yarı asal f -cebiri A , $a, b \in A^+$ için $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow ab = 0$ olarak karakterize edilir. O halde A bir yarı asal hemen hemen f -cebiri ve $a, b \in A^+$ için $ab = 0$ ise $a \wedge b = 0$ olduğunu göstermek yeter (çünkü, hemen hemen f -cebir tanımında $a \wedge b = 0 \Rightarrow ab = 0$ olduğu açıktır).

$$0 \leq (a \wedge b)^2 \leq ab \Rightarrow (a \wedge b)^2 = 0 \text{ ve } A \text{ yarı asal olduğundan } a \wedge b = 0.$$

(ii) Teorem 3.7' ve 3.8'den elde edilir.

Uyarı 3.11. Eğer A bir birleşmeli latis cebiri değilse Teorem 3.2 ve 3.10 genel olarak sağlanmaz. Örneğin, $A = C([0,1])$ noktasal toplamalı, skaler çarpımlı ve bir kısmi sıralı latis uzayı olsun. $\forall a, b \in A$ için

$$(a * b)(x) = \int_0^x a(t)b(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

olarak tanımlansın. A 'nın birleşme özelliği dışında bir Archimedean, değişmeli, yarı asal ve hemen hemen f -cebirlerinin tüm özelliklerini sağladığını kolaylıkla gösterilebilir. Fakat A f -ceberi özelliğini sağlamadığını aşağıdaki örnekle açıklayalım.

$$a(x) = \begin{cases} -2x+1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad b(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $a \wedge b = 0$ olduğu görülür. Özel olarak $0 \leq x \leq 1$ için $c(x) = 1$ alınırsa $(c * a \wedge b)(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$ elde edilir. Bu ise $(c * a \wedge b) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle A bir f -ceberi değildir.

Burada yapmış olduğumuz çalışmayı özetlemek gerekirse, bu latıs cebir sınıfları arasında aşağıdaki ilişkileri verebiliriz.

Sonuç 1. A bir Archimedean yarı asal (birleşmeli) latıs cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) A bir hemen hemen f -cebidir

(ii) A bir f -cebidir.

(iii) A bir d -cebidir.

Sonuç 2. A , $e > 0$ birim elemanlı bir Archimedean (birleşmeli) latıs cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) A bir hemen hemen f -cebidir

(ii) A bir f -cebidir.

(iii) A bir d -cebiri.

(vi) e bir sıralı zayıf birim elemandır.

Teorem 3.12. A bir d -cebiri olsun A 'nın pozitif ayrık elemanları değişmeli ise A hemen hemen f -cebiri. Özel olarak, herhangi bir değişmeli d -cebiri hemen hemen f -cebiri (Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: $a, b \in A^+$, $a \wedge b = 0$ ve $ab = ba$ olsun. Buradan $a^2, b^2 \in A^+$ ve $ab \in A^+$. Bu yüzden

$$\begin{aligned} 0 &= (a \vee b)(a \wedge b) = (a \vee b)a \wedge (a \vee b)b \\ &= (a^2 \vee ba) \wedge (ab \vee b^2) \\ &\geq ba \wedge ab = ab \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise $ab = 0$.

Teorem 3.13. A herhangi bir pozitif kareli d -cebiri ise hemen hemen f -cebiri.

İspat: $a, b \in A^+$ ise

$$0 \leq ab \leq ab + ba = a^2 + b^2 - (a - b)^2 \leq a^2 + b^2$$

ve bu yüzden, eğer $a \wedge b = 0$ ise

$$0 \leq ab = ab \wedge (a^2 + b^2) = ab \wedge a^2 + ab \wedge b^2 = a(b \wedge a) + b(a \wedge b) \leq 0.$$

Dolayısıyla $ab = 0$, yani A bir hemen hemen f -cebiri.

Teorem 3.14. A bir değişmeli Archimedean d -cebiri ise $\forall a, b \in A^+$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için $ab \leq na^2$ (Yılmaz, 2001).

İspat: Teorem 3.12'ye göre değişmeli her d -cebiri hemen hemen f -cebiri olduğundan dolayı Önerme 2.11(vi)'den $\forall a, b \in A^+$ ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$a(b - na)^+ \leq \frac{1}{n}b^2.$$

A Archimedean olduğundan dolayı $a(b - na)^+ = 0$. $a \in A^+$ ve A bir d -cebiri olduğundan dolayı

$$a(b - na) \vee 0 = a((b - na) \vee 0) = 0.$$

Bu yüzden $a(b - na) \leq 0$ ve $ab \leq na^2$ elde edilir.

Teorem 3.15. *A bir Archimedean d -cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Yılmaz, 2001).*

- (i) A değişmelidir.
- (ii) A pozitif karedir.
- (iii) A bir hemen hemen f -cebiridir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) olduğu sırasıyla Teorem 3.12, Teorem 2.14, Teorem 3.13 ve Önerme 2.11 (i)'den görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). $\forall a \in A$ için $a^+ a^- = a^- a^+ = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Şayet $b \wedge c = 0$ ve $a = b - c$ ise o halde $b = a^+$ ve $c = a^-$, alınırsa $bc = cb$ elde edilir. Teorem 3.12'ye göre A bir hemen hemen f -cebiridir.

4. HEMEN HEMEN f – CEBİRLERİNİN NİLPOTENT ELEMANLARI

Tanım 4.1. X , bir A latis uzayının bir ideali olsun. Eğer X aynı zamanda bir halka ideali ise X 'e bir *latis ideal* denir. Eğer, X 'in herhangi bir alt kümesinin supremumu A 'da mevcut ve bu supremum X 'in elemanı ise X 'e bir *band* denir. Başka bir ifadeyle, bir X ideali A latis uzayında bir bandtır $\Leftrightarrow \{a_\lambda\} \subset X$ ve $0 \leq a_\lambda \uparrow a$ ($a \in A$) ise $x \in X$.

Bir latis uzayı A 'da $\{0\}$ ve A 'nın kendisi daima birer bandtırlar (Yılmaz, 2001).

Bir Archimedean f -cebiri A 'da $N(A)$ yalnızca bir latis ideal değil aynı zamanda bir bandtır ve

$$N(A) = \{a \in A : a^2 = 0\} = \{a \in A : ab = 0, \forall b \in A\}$$

olduğu bilinmektedir (Zaanen (1997) veya Henriksen ve Isbell (1962)). Bu sonuç; Henriksen ve Isbell (1962) tarafından verilmiştir. Scheffold (1981), A 'nın bir (birim elemansız) hemen hemen Banach f -cebiri olması durumunda $N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\}$ olduğu ispatladı. Basly ve Triki (1988) bu sonucu, gösteri teorisi yardımıyla, herhangi bir Archimedean hemen hemen f -cebiri genişlettiler. Bu çalışmamızda, Bernau ve Huijsmans (1990)'ın daha elementer ispatıyla herhangi bir Archimedean hemen hemen f -cebiri A 'nın nilpotent elemanlarını karakterizesini çalışacağız. Ayrıca, benzer bir çalışmanın Diem (1968)'in bir makalesinde görüyoruz.

Önerme 4.2. A bir değişmeli hemen hemen f -cebiri ise $N(A)$, A 'da bir latis idealidir (Yılmaz, 2001).

İspat: $N(A)$ 'nın bir alt vektör uzayı ve A 'nın bir halka ideali olduğu açıktır. Bu yüzden $N(A)$ 'nın A 'nın bir sıralı ideali olduğunu göstermiyoruz. $0 \leq b \leq a$, $a \in N(A)$ ise $b \in N(A)$ olduğu açıktır. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $a^n = 0$ ve $0 \leq b^n \leq a^n$ ise $b^n = 0$ sağlanır. Geriye $N(A)$ 'nın A 'nın bir alt latisi olduğunu göstermek kalıyor. $a \in N(A)$ ise $\exists n \in \mathbb{N}$ için $a^n = 0$ ve Teorem 2.11(iv)'den $|a|^n = |a^n| = 0$ sağlanır. Bu ise $|a| \in N(A)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.3. *A bir Archimedean hemen hemen f-cebiri ise*

$$\begin{aligned} N(A) &= \{a \in A : a^3 = 0\} \\ &= \{a \in A : a^2c = 0, \forall c \in A\} \\ &= \{a \in A : abc = 0, \forall b, c \in A\}. \end{aligned}$$

(Bernau and Huijsmans, 1990)

İspat: İlk olarak $\forall b, c \in A$ için $a \in N(A)$ 'nin $abc = 0$ ifadesini gerektirdiğini göstereceğiz. A 'nın değişmeli ve pozitif kareli olduğundan $\forall n \in \mathbf{Z}$ ve $k \in \mathbf{IN}$ için

$$0 \leq (2b - na^{k-1}c)^2 = 4b^2 - 4na^{k-1}bc + n^2a^{2k-2}c^2.$$

Burada $k=1$ ise $a^{k-1}c = c$ olarak alınmalıdır. Böylece $k \geq 2$ ve $a^kbc = 0$ ise $\forall b, c \in A$ için $a^{2k-2}c^2 = a^k(a^{k-2}c)c = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $\forall n \in \mathbf{Z}$ için $na^{k-1}bc \leq b^2$. Archimedean özelliğinden $\forall b, c \in A$ için $a^{k-1}bc = 0$.

Şimdi $a \in N(A)$, yani $\exists r \in \mathbf{IN} : a^r = 0$ ise, $\forall b, c \in A$ için $a^rbc = 0$ 'dır. Böylece yukarıdaki ifadeye göre $\forall b, c \in A$ için $a^{r-1}bc = 0$ 'dır. Bu işlem $r-2$ kez tekrarlanırsa, $\forall b \in A$ için $abc = 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} N(A) &\subset \{a \in A : abc = 0, \forall b, c \in A\} \\ &\subset \{a \in A : a^2c = 0, \forall c \in A\} \\ &\subset \{a \in A : a^3 = 0\} \subset N(A). \end{aligned}$$

Örnek 4.4. $A, \alpha = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ biçimindeki alıılmış toplamı, skaler çarpımlı, ve kısmi

sıralı bütün 3×3 tipindeki reel sayı matrislerinin kümesi olsun. Bu durumda A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri, fakat bir f -cebiri değildir. Ayrıca $N(A) = A$.

$$\{\alpha \in A : \alpha^2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in R \right\}$$

kümesi $N(A) = A$ 'nın bir özaltkümesidir (Bernau and Huijsmans, 1990).

Aşağıdaki örnekte Archimedean hemen hemen f -cebiri A 'nın bütün nilpotent elemanların kümesinin, yani $N(A)$ 'nın, bir band olmasına gerek olmadığı gösterilecektir.

Örnek 4.5. $A = C([0,1])$ alalım. $\forall a, b \in A$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$(a * b)(x) = a(0)b(0)$$

olarak verilen çarpıma göre A bir Archimedean birleşmeli hemen hemen f -cebiri ve d -cebiridir, fakat bir f -cebiri değildir. Teorem 3.2 ve 3.10'a göre, A ne yarı asal ne de birim elemana sahiptir. Ayrıca, $N(A) = \{a \in A : a(0) = 0\}$ A 'da bir band değildir (Aliprantis, 1985).

Bir f -cebiri A 'da I latis ideali ise A/I bir f -cebiri olduğunu biliyoruz. Üstelik $a, b \in A$ ve $a \wedge b \in I$ ise $\forall c \in A^+$ için $ca \wedge b \in I$ ve $ac \wedge b \in I$. Bu özellik supremum içinde aynen geçerlidir. Benzer şekilde, aşağıdaki sonuç bu sonuçların hemen hemen f -cebirleri için de doğru olduğunu göstermektedir (Bernau and Huijsman, 1990).

Önerme 4.6. A bir hemen hemen f -cebiri ve I , A 'nın bir latis ideali olsun. O halde

(i) A/I bir hemen hemen f -cebiridir.

(ii) $a \wedge b \in I$ veya $a \vee b \in I$ ise $ab \in I$.

(Bernau and Huijsmans, 1990)

İspat: (i) $[a]$, a 'nın $a + I$ koseti olmak üzere, A/I latis cebirinde $[a] \wedge [b] = [0]$ olsun. $a \wedge b \in I$ olduğundan $[a] = [a - a \wedge b]$ ve $[b] = [b - a \wedge b]$. Bu yüzden $a \wedge b = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. A hemen hemen f -cebiri olduğundan $ab = 0$ 'dır. Buradan $[a][b] = [ab] = [0]$ elde edilir.

(ii) (i)' in doğrudan bir sonucudur.

Simdi, A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri olsun. Önerme 3.7'ye göre $N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\}$ latis ideali bir hemen hemen f -cebiri ve $A/N(A)$ Archimedean ve yarı asal olduğundan Teorem 3.10.(i)'den dolayı göre $A/N(A)$ bir f -cebiri (Zaanen, 1983) .

Teorem 4.7. *Eğer A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ise $A/N(A)$ bir Archimedean yarı asal f -cebiri (Bernau and Huijsmans, 1990).*

İspat: Teorem 4.6(i)'e göre, $N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\}$ A 'nın bir latis ideali olduğundan, $A/N(A)$ bir Archimedean hemen hemen f -cebiri. Yani $(A/N(A))^+$ 'da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n[a] \leq [b]$ 'dir. $a_1 \in [a]$ ve $b_1 \in [b]$ ise tanıma göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için A^+ 'da $na_1 \leq b_1$ elde edilir. A Archimedean olduğundan dolayı, $a_1 = 0$ ve dolayısıyla $[a_1] = [0]$ 'dir. O halde $A/N(A)$ yarı asaldır. Bu göre $A/N(A)$ 'da $[a]^3 = [0]$ ise $[a][a][a] = [0]$ ve $[a^3] = [0]$, yani $a^3 = 0$ sağlanır.

Örnek 4.8. $A = C([0,1])$ daha önceki gibi verilsin. $\Phi \in C([0,1])$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1-2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak verilsin ve $\forall a, b \in A$ için

$$a * b = \begin{cases} \Phi(x)a(x)b(x) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ \int_{1-x}^{\frac{1}{2}} a(t)b(t)dt & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda A yarı asal olmayan bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve bu durumda $N(A) = \{a \in A : a(x) = 0, \forall x \in [0, \frac{1}{2}]\}$ bir banddır (detaylar için (Bernau and Huijsmans, 1990)'a bakınız).

5. DEĞİŞMELİ OLMAYAN d – CEBİRLERİNİN NİLPOTENT ELEMANLARI

Teorem 3.12'ye göre, her değişmeli d -cebiri bir hemen hemen f -cebiri olduğundan Archimedean hemen hemen f -cebiri için yukarıda elde ettiğimiz bütün sonuçlar Archimedean değişmeli d -cebiri için de geçerlidir. Quint tezinde herhangi bir Banach d -cebiri A için

$$N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\} = \{a \in A : bac = 0, \forall b, c \in A\}$$

olduğunu göstermiştir (Quint, 1981). Bernau ve Huijsmans (1990) bu sonucu keyfi bir d -cebiri için genelleştirmişlerdir. Bu bölümde Bernau ve Huijsmans (1990)'ın bu çalışmasını inceleyeceğiz.

X Archimedean latis uzayı olsun. $\forall a, b \in X$ için $a \wedge b = 0$ ise $Ta \wedge Tb = 0$ özelliğini sağlayan bir $T : X \rightarrow X$ lineer operatör bir *latis homomorfizm* denir ve bütün latis homomorfizmleri $Hom(X)$ ile gösterilir. $0 \leq S \leq T$ ve $T \in Hom(X)$ ise $S \in Hom(X)$ (Luxemburg, 1979).

Teorem 5.1. X bir Archimedean latis uzayı ve $0 \leq S, T : X \rightarrow X$ olsun .

(i) $S + ST \in Hom(X)$ ve (ii) $\exists k \geq 2 : ST^k = 0$ ise $ST = 0$ (Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: Yukarıdaki nottan $S \in Hom(X)$ ve $ST \in Hom(X)$ çünkü, eğer X 'de $a \wedge b = 0$ ise

$$\begin{aligned} (ST)a \wedge (ST)b &= S(Ta) \wedge S(Tb) \\ &= S(Ta \wedge Tb) = S(0) = 0 \end{aligned}$$

İspatı tamamlamak için $ST^{k-1} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. (i)'den

$$(Sa + STa) \wedge (Sb + STb) = 0$$

ve bu yüzden

$$\begin{aligned} 0 \leq Sa \wedge STb &\leq (Sa + STa) \wedge (Sb + STb) \\ &= (S + ST)a \wedge (S + ST)b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bu sonuç sabit bir $c \in X^+$ için

$$a = T^{k-1}c - T^{k-2}c \wedge T^{k-1}c, \quad b = T^{k-2}c - T^{k-3}c \wedge T^{k-2}c$$

olduğu elemanlarına uygulanırsa ($k = 2$ ise $T^{k-2} = I$, X üzerinde birim operatör)

$$(ST^{k-1}c - ST^{k-2}c \wedge ST^{k-1}c) \wedge (ST^{k-1}c - ST^{k-1}c \wedge ST^k c) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(ST^{k-1}c - ST^{k-2}c \wedge ST^{k-1}c) \wedge (ST^{k-1}c) = 0$$

ve dolayısıyla

$$0 \leq ST^{k-1}c \leq ST^{k-2}c$$

sağlanır (i) ve (ii) her nT ($n \in \mathbb{N}$) için de sağlandığından.

$$0 \leq nST^{k-1}c \leq ST^{k-2}c \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Archimedean özelliğinden $ST^{k-1}c = 0$ elde edilir. Bu $\forall c \in X^+$ için doğru olduğundan $ST^{k-1} = 0$ elde edilir.

X bir Archimedean latis uzayı ve $\pi : X \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. π sıralı sınırlı ve $\forall a, b \in X$ için $a \wedge b = 0$ ise $\pi a \perp b$ (yani $|\pi a| \wedge |b| = 0$) sağlanıyorsa π 'ye bir *otomorfizm* denir ve bütün otomorfizmaların uzayı $Oto(X)$, $L_b(X)$ (bütün sıralı sınırlı operatörler uzayı)'nın bir alt latis uzayıdır.

Sonuç 5.2.

(i) $0 \leq S, T : X \rightarrow X$, $S + ST \in Hom(X)$ ve $T^k = 0$ ise $ST = 0$ dir.

(ii) Eğer $0 \leq T : X \rightarrow X$, $T^{k-2} + T^{k-1} \in Hom(X)$ ve $T^k = 0$ ise $T^{k-2} = 0$ dir.

$k = 2$ için, Sonuç 5.2.(ii) $0 \leq T : X \rightarrow X$ olmak üzere $T^2 = 0$ ve $I + T \in Hom(X)$ ise $T = 0$ olur. $I + T \in Hom(X) \Leftrightarrow T \in Oto(X)$ (Scorza, 1962) Fakat $Oto(X)$, birim elemanı I olan Archimedean f -cebiri olduğundan yarı asaldir, yani $T^2 = 0$ ise $T = 0$ (Zaanen, 1983). Dolayısıyla, sonuç 5.2(ii) bu sonucun bir genellemesi olarak göz önüne alınabilir.

(Quint, 1981) $T + T^2 \in Hom(X)$ için X üzerinde pozitif bir T operatöründen bahseder. ($k = 3$ için de tam olarak doğrudur). Yani sabiti bir D -operatörü olması durumunda $T^3 = 0$ ise $T^2 = 0$ olur.

Yukarıdaki sonuç 5.2(ii) bir Archimedean d -cebiri A 'ya uygulanırsa, her bir $a \in A^+$ için $\pi_a(c) = ac$ ($c \in A$) ve açık olarak $\pi_a \in Hom(A)$. Ayrıca $\forall a, b \in A^+$ için $\pi_a \pi_b = \pi_{ab} \in Hom(A)$. Özel olarak $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\pi_a^k = \pi_b^k \in Hom(A)$. Üstelik $\forall a, b \in A^+$ için $\pi_a + \pi_b = \pi_{a+b} \in Hom(A)$ sağlanır.

Bu bölümün temel teoremini vermeden önce aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 5.3. A bir d -cebiri ve $a \in A$ ise $(a^+)^{2n} \leq (a^{2n})^+$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

İspat: Önerme 2.17'ye göre $\forall a, b \in A$ için $(ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^- \geq a^+b^+$ olduğundan, özel olarak $a = b$ alınırsa, $(a^+)^2 \leq (a^2)^+$ elde edilir. Buradan, n üzerinde tümevarımla, $(a^+)^{2n} \leq (a^{2n})^+$ ise

$$\begin{aligned} (a^+)^{2n+2} &= (a^+)^{2n} (a^+)^2 \leq (a^{2n})^+ (a^2)^+ \\ &\leq (a^{2n})^+ (a^2)^+ + (a^{2n})^- (a^2)^- \\ &= (a^{2n} a^2)^+ = (a^{2n+2})^+. \end{aligned}$$

Theorem 5.4. A bir Archimedean d -cebiri ise

$$\begin{aligned} N(A) &= \{a \in A : bca = 0, \forall b, c \in A\} \\ &= \{a \in A : a^2 c = 0, \forall c \in A\} \\ &= \{a \in A : ba^2 = 0, \forall b \in A\} \\ &= \{a \in A : a^3 = 0, \forall a \in A\} \quad (\text{Bernau and Huijsmans, 1990}). \end{aligned}$$

İspat:

Öncelikle $\forall b, c \in A$ için $a \in N(A)$ ise $bac = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Yukarıdaki lemmaya göre $0 \leq (a^+)^{2n} \leq (a^{2n})^+ = 0$. Yani $a^+ \in N(A)$ 'dir. Bu yüzden $a \geq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Sabit bir $b \in A^+$ ve $\forall c \in A$ için $bac = 0$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. A bir d -cebiri olduğundan dolayı π_a, π_b ve $\pi_b + \pi_a \pi_b \in Hom(A)$ 'dir. Üstelik $\pi_a^k = \pi_{a^k} = 0$. Bazı $k > 0$ ve $a \in N(A)$ için sonuç 5.2 (i) ye göre $\pi_b \pi_a = 0$.

Dolayısıyla $\forall c \in A$ ve $\forall b \in A^+$ için $\pi_b \pi_a(c) = bac = 0$ 'dır.

Genel olarak $\forall b, c \in A$ için $\pi_b = \pi_{b^+ - b^-} = \pi_{b^+} - \pi_{b^-}$.

Bu yüzden $N(A) \subset \{a \in A : bac = 0 \ \forall b, c \in A\}$ ve aşağıdaki ifadeler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} N(A) &\subset \{a \in A : bac = 0 \ \forall b, c \in A\} \\ &\subset \{a \in A : a^2 c = 0, \ \forall c \in A\} \cup \{a \in A : ba^2 = 0, \ \forall b \in A\} \\ &\subset \{a \in A : a^3 = 0\} \subset N(A) \end{aligned}$$

ispat tamamdır.

Teorem 5.4'deki $N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\}$ tanımı Örnek 4.3 'ün bir sonucu olarak karşımıza çıkar. (En azından değişmeli Archimedean d -cebiri için)

Archimedean hemen hemen f -cebiri olduğu gibi, herhangi bir Archimedean d -cebiri A için $A/N(A)$ bir Archimedean yarı asal d -cebiri ve Teorem 2.10(i)'ye göre bir Archimedean yarı asal f -cebiri (Bernau and Huijsmans, 1990). Buna göre aşağıdaki gibi A 'nın komütatörleri ile ilgili bir sonuç verilebilir.

Teorem 5.5. A bir Archimedean d -cebiri ise $\forall a, b \in A$ için $[a, b]^3 = (ab - ba)^3 = 0$ olur (Bundan dolayı A güçlü değişmelidir yada küp değişmelidir.) (Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: $A/N(A)$ bir Archimedean f -cebiri. Ve bu yüzden değişmelidir. $\forall a, b \in A$ için $[a][b] = [b][a]$ olur. Yani $\forall a, b \in A$ için $ab - ba \in N(A)$ 'dır. Teorem 5.4'e göre $\forall a, b \in A$ için $(ab - ba)^3 = 0$ elde edilir.

Sonuç 5.6. A bir Archimedean d -cebiri ise

- (i) $\forall a, b, c, d \in A$ için $c[a, b]d = c(ab - ba)d = 0$ 'dır
- (ii) $\forall a, b \in A$ için $(ab)^2 = a^2 b^2$ (Bernau and Huijsmans, 1990).

İspat: (i) Teorem 5.4'ün ispatına göre $\forall c, d \in A$ için $a \in A$, $a^3 = 0$ ise $cad = 0$ 'dır. Teorem 5.5'e göre $\forall a, b \in A$ için $(ab - ba)^3 = 0$ ve bu nedenle $\forall a, b, c, d \in A$ için $c(ab - ba)d = 0$ elde edilir.

(ii) (i)'de $c = a$, $d = b$ alırsak (ii) elde edilir.

Aşağıdaki örnek yukarıdaki teoremden küpün kesin gerekliliğini açıklamaktadır.

Örnek 5.7. $A = IR^4$ 'deki vektör uzayı işlemlerini düşünelim. A kısmi sıralı ve baz vektörleri arasındaki çarpım

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	0	0	0	0
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	0	0	0	0

şeklinde tanımlansın. Diğer bir deyişle ;

$$\forall a, b \in IR^4 \text{ için } ab = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_2 \end{pmatrix} \text{ şeklinde de yazılabilir.}$$

Basit bir işlem A 'nın bir Archimedean d -cebiri olduğunu gösterir. Bu yüzden A küp değişmelidir. Fakat kare değişmeli değildir.

Aslında,

$$a = e_1 + e_2, \quad b = e_1 + e_2 \text{ ise } ab = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \quad ba = e_1$$

$$ab - ba = e_2 + e_3 + e_4 \text{ olur. Bu yüzden } (ab - ba)^2 = e_4 \neq 0 \text{ 'dır.}$$

Ayrıca $N(A) = \{a \in A : a^3 = 0\}$ 'dır. Çünkü $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} : \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in IR \right\}$ 'dır.

Örneğin $e_2 + e_3 + e_4 \in N(A)$ fakat $(e_2 + e_3 + e_4)^2 = e_4 \neq 0$ dır.

Sonuç olarak Teorem 5.4'ya göre $\forall b, c \in A$ için $a \in N(A)$ ise $bca = 0$ dır. Fakat $abc = 0$ olmasına gerek yoktur. Aslında $a = e_2 + e_3 + e_4$, $b = e_1$, $c = e_1 + e_2$ ise $a \in N(A)$ 'dır. (Bu yüzden $bac = 0$ 'dır). Fakat $abc = e_3 + e_4 \neq 0$ 'dır (Bernau and Huijsmans, 1990).

6.TARTIŞMA VE SONUÇ

Altı bölüm olarak düzenlenen bu çalışma bir derlemedir. Çalışmanın ilk bölümünde çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde hemen hemen f -cebirleri ve d -cebirlерinin temel özellikleri incelendi. Aynı zamanda bir f -cebirinin hem hemen hemen f -ceberi hem de bir d -ceberi olduğu, bunu tersinin her zaman doğru olmadığı gösterilip örneklerle açıklandı. Çalışmanın üçüncü bölümünde f -cebir, hemen hemen f -cebir ve d -cebir sınıfları arasındaki bağıntılar ele alındı. Ve aşağıdaki sonuçlar Bernau ve Huijsmans'a göre elde edildi (Bernau and Huijsmans, 1990).

Sonuç 1. *A bir Archimedean yarı asal (birleşmeli) latis cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *A bir hemen hemen f -cebidir*

(ii) *A bir f -cebidir.*

(iii) *A bir d -cebidir.*

Sonuç 2. *A, $e > 0$ birim elemanlı bir Archimedean (birleşmeli) latis cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) *A bir hemen hemen f -cebidir*

(ii) *A bir f -cebidir.*

(iii) *A bir d -cebidir.*

(vi) *e bir sıralı zayıf birim elemandır.*

Dördüncü bölümde hemen hemen f -cebirlерinin nilpotent elemanları irdelendi. Beşinci bölümde değişmeli olmayan d -cebirlерinin durumları ele alındı. Ve çalışmanın son bölümünde, tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

- ALIPRANTIS, C.D., BURKHINSHAW, O., 1985.** *Positive Operators*, Academic Pres, Orlando.
- AMEMIYA, I., 1953.** A general spectral theory in semi-ordered linear spaces, J.Fac. Sci.Hokkaido Univ., Ser. I, 12, 111-156.
- BASLY, M., TRIKI, A., 1988.** FF-Algèbres Archimédiennes réticulées, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen Series A-Mathematical Sciences, 91, 231-234.
- BASLY, M., HUIJSMANS, C.B., PAGTER, B.DE., TRIKI, A.,** On unital Archimedean lattice ordered algebras. *J.Fac. Sci. Tunis (to appear)*.
- BERNAU. S.J., 1965.** On semi-normal lattice rings. Cambridge Philos. Soc., 61:613-616.
- BERNAU. S.J., HUIJSMANS, C.B., 1990.** Almost f -algebras and d -algebra, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 107, 287-308.
- BIRKHOFF, G., 1967.** *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., No.25
- BIRKHOFF, G., PIERCE, R.S., 1956.** Lattice-ordered rings, An. Acad. Brasil. Ciênc., 28, 41-49.
- BIGARD, A., KEIMEL, K., WOLFENSTEIN, S., 1977.** *Groupes et Anneaux Réticulés*, Lecture Notes in Math., vol. 608, Springer-Verlag.
- BUSKES, G., BOULABIAR, K., TRIKI, A., 2003.** Some recent trends and advance in certain lattice ordered algebras, Contemporary Mathematics, 328, 99-133.
- ÇAKALLI, H., 1997.** Genel Topolojiye Giriş, İstanbul Üniversitesi Yayınları.
- DIEM, J. E., 1968.** A radical for lattice-ordered rings, Pacific J. Math., 25, 71-82.
- FRINK, O., MR 13,718c,** Review of Birkhoff's 1950 address to the International Congress of Mathematicians in Cambridge, Massachusetts.
- HENRIKSEN, M., AND ISBELL, J.R., 1962.** Lattice-ordered rings and function rings, Pacific J. Math., 12, 533-565
- HUIJSMANS, C.B., 1991.** Lattice ordered algebras and f -algebras: A survey. Studies in Economic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics (C.D. Aliprantis, K.C. Border and W.A.J. Luxemburg, eds.) Springer, Berlin, 151-169.
- HUIJSMANS, C.B. AND PAGTER, B.DE., 1986.** Averaging operators and positive

contractive projections. *J.Math. Anal. Appl.*, 113 , 163-184.

KUDLÁČEK, V., 1962. O některých typech I-okruhu (on some types of l-rings). *Sborní Vysokého Učení Techn u Brne*, 1-2:179-181.

LUXEMBURG, W.A.J., A.C.ZAANEN, 1971. *Riesz Spaces I*, North-Holland,

LUXEMBURG, W.A.J., 1979. *Some Aspects of the Theory of Riesz Spaces*, Univ. Arkansas Lecture Notes Math. vol. 4, Fayetteville.

MARTIGNON, L.F., 1978. *Banachverbandsalgebren*, Ph.D. Thesis, Universität Tübingen.

NAKANO, H., 1950. *Modern Spectral Theory*, Tokyo Math. Book Series II, Maruzen, Tokyo.

PAGTER, B. DE., 1981. *f-algebras and Orthomorphisms*, Ph.D Thesis, Leiden.

QUINT, C., 1981. Zur Darstellng von Banachverbandsalgebran. Ph.D. Thesis, University of Leiden.

SCORZA, G., 1962. Le algebre del 4^0 ordine, Mem. Real Accad. Scienze Fis. Mat.Napoli (2) 20 (1935), n. 14; Opere Scelte III (Edizioni Cremonese.), 259-361.

SCHEFFOLD, E., 1981. FF-Banachverbandsalgebren. *Math. Z.*, 177:193-2005.

STEINBERG, S.A., 1977. Radical theory in lattice-ordered rings, In Gruppi e Anelli Ordinati. Symposia math. (Academic Pres), XXI, 379-400.

ZAANEN, A.C., 1983. *Riesz Spaces II*, North-Holland.

ZAANEN, A.C., 1997. *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer-Verlay Berlin Heidelber, New York.

YILMAZ, R., 2001. *On Lattice Ordered Algebras*, Ph.D. Thesis, University of Wales.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Çorum'un İskilip ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Çorum merkezde tamamladıktan sonra 1999 yılında Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2003 Haziranında bölümden mezun oldu. 2003 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün Bilim sınavını geçerek enstitüye kaydını yaptırdı. Bazı sebeplerden dolayı aynı yıl enstitüden ayrıldı. 2005 yılında çıkan aftan yararlanarak enstitüye geri döndü ve topoloji alanında yüksek lisansa başladı. 2005 yılında Tokat'ın Yeşilyurt ilçesinde Yeşilyurt Ç.P.Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı. Halen Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansına devam etmektedir.

