

T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilim Dalı
Finansman Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Kuadratik Programlama Yaklaşımıyla Etkin Portföy
Seçimi ve İMKB Verileri Üzerine Bir Uygulama

Ali İBRAHİMOV

2501040674

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Tülin ATAKAN

İstanbul 2007

ÖZ

“Kuadratik Programlama Yaklaşımıyla Etkin Portföy Seçimi ve İMKB Verileri Üzerine Bir Uygulama”

Ali İBRAHİMOV

Bu çalışmada, Ortalama Varyans Modeli’nin İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetleri üzerine uygulaması yapılmıştır.

Markowitz tarafından geliştirilen model, kuadratik programlama yardımıyla çözülerek çalışmanın kapsamına alınan hisse senetlerinden oluşturulabilecek etkin portföyler belirlenmiş ve etkin sınır çizilmiştir. Ayrıca, söz konusu model Türkiye’deki alım satım maliyetleri, menkul kıymet kazançlarının vergilendirilmesi ve açığa satış koşulları göz önünde bulundurularak, Pogue tarafından geliştirilen model esasında üç aşamada genişletilmiştir. Oluşturulan modeller yine kuadratik programlama ile çözülerek bireysel yatırımcının alım satım maliyeti, vergi ve açığa satış dikkate alındığında oluşturabileceği etkin portföyler belirlenmiştir. Yatırım fırsatları kümesi ile ilgili farklı varsayımlar altında belirlenen etkin portföyler karşılaştırılmış ve alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın etkin sınır üzerindeki etkisi ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Sonuç olarak, etkin portföylerin alım satım maliyeti, vergi ve açığa satış da dikkate alınarak kuadratik programlama ile belirlenebileceği ortaya konulmuş; alım satım maliyetinin etkin sınırı aşağıya, verginin orijine doğru kaydırıldığı, açığa satışın ise sola doğru genişlettiği sonucuna varılmıştır.

ABSTRACT

“Efficient Portfolio Selection by Quadratic Programming and an Application on ISE Data”

Ali İBRAHİMOV

In this study, Mean Variance Model has been applied in İSE-30. The model developed by Harry Markowitz has been solved by quadratic programming thus, efficient portfolios and efficient frontier have been determined. In addition, the model has been extended in tree steps on the base of the model developed by Pogue to include brokerage fees, taxes and short sales in Turkey. Constructed models have been solved by quadratic programming and efficient portfolios that an individual investor can form in the existence of brokerage fees, taxes and short sales have been determined. Determined different efficient frontiers have been compared and effects of brokerage fees, taxes and short sales have been tried to explain.

As a conclusion, it has been shown that efficient portfolios can be determined by quadratic programming taking into consideration brokerage fees, taxes and short sales. It has been concluded that brokerage fees shift efficient frontier down, taxes shift it toward origin and short sales expanded efficient frontier toward left.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı, yatırım fırsatları kümesi ile ilgili farklı varsayımlar altında Ortalama Varyans Modeli'ne göre oluşturulabilecek etkin portföylerin kuadratik programlama yardımıyla belirlenmesi ve alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın etkin sınır üzerindeki etkilerinin araştırılmasıdır.

Bu amaç doğrultusunda çalışmanın kapsamına, hisse senedi sayısındaki artışla gelen işlem fazlalığı nedeniyle, 2006 yılının üçüncü çeyreğinde İMKB-30 endeksinde yer alan 30 hisseden 08.2003-09.2006 tarihleri arasında aylık kapanış fiyatları bulunan 25 hisse senedi alınmıştır. Bu hisse senetlerinin söz konusu dönemdeki aylık kapanış fiyatları, temettü dağıtımı ve sermaye artırım bilgileri kullanılarak bir sonraki dönem için alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda etkin portföyler belirlenmiştir.

Başta tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tülin ATAKAN ve İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Finansman Bilim Dalında görev yapan saygıdeğer hocalarım olmak üzere, tezimin hazırlanması sürecinde doğrudan veya dolaylı katkısı olan herkese ve şimdiye kadar olduğu gibi tez çalışmam süresince de maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	III
ABSTRACT	IV
ÖNSÖZ	V
İÇİNDEKİLER	VI
TABLolar	IX
ŞEKİLLER	X
GİRİŞ	1
1. PORTFÖY SEÇİM PROBLEMİ	3
1.1. Risk ve Getiri.....	3
1.1.1. Getiri Oranı.....	3
1.1.2. Risk Kavramı.....	5
1.1.3. Beklenen Getiri.....	7
1.1.4. Riskin Ölçülmesi.....	9
1.1.5. Riskin Kaynakları.....	10
1.1.5.1. Sistematik Risk.....	11
1.1.5.2. Sistematik Olmayan Risk.....	12
1.2. Geleneksel Portföy Seçimi.....	14
1.3. Ortalama Varyans Modeli.....	16
1.3.1. Portföyün Beklenen Getirisi.....	17
1.3.2. Portföyün Riski.....	19
1.3.3. İki Varlıktan Oluşan Portföylerde Markowitz Çeşitlendirmesi....	23
1.3.3.1. Tam Pozitif Korelasyon Durumu.....	24
1.3.3.2. Tam Negatif Korelasyon Durumu.....	25
1.3.3.3. Korelasyon Katsayısının Sıfır Olması Durumu.....	27
1.3.4. Etkin Sınır.....	29
1.3.5. Açığa Satışın Olması Durumunda Etkin Sınır.....	32

1.3.6. Risksiz Borç Alma ve Borç Verme Olanaklarının Olması	
Durumunda Etkin Sınır.....	33
1.4. Fayda Analizi.....	37
1.4.1. Fayda Fonksiyonu.....	38
1.4.2. Kayıtsızlık Eğrileri ve Optimal Portföyün Belirlenmesi.....	40
2. DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA.....	43
2.1. Doğrusal Olmayan Programlama Problemi.....	43
2.2. Konkavlık ve Konvekslik.....	44
2.2.1. Konkav ve Konveks Fonksiyonlar.....	45
2.2.2. Kuadratik Form.....	47
2.2.3. Konveks Küme.....	48
2.3 Kısıt İçermeyen Optimizasyon.....	50
2.3.1. Ekstremumlar.....	50
2.3.2. Gerek ve Yeter Koşullar.....	52
2.4. Kısıt Altında Optimizasyon.....	54
2.4.1. Lagrange Çarpanları Yöntemi.....	54
2.4.2. Açığa Satışın Olması Durumunda Etkin Portföylerin Belirlenmesi.....	57
2.4.3. Kuhn-Tucker Koşulları.....	59
2.5. Kuadratik Programlama.....	61
2.5.1. Standart Durumda Etkin Portföylerin Belirlenmesi.....	65
3. İMKB-30 ENDEKSİNDE YER ALAN HİSSE SENETLERİNDEN OLUŞAN ETKİN PORTFÖYLERİN BELİRLENMESİNE YÖNELİK UYGULAMA.....	67
3.1. Çalışmanın Konusu ve Amacı.....	67
3.2. Çalışmanın Kapsamı ve Kısıtları.....	68
3.3. Çalışmada Kullanılan Veri Seti.....	70
3.4. Markowitz Modeline Göre Etkin Portföylerin Belirlenmesi.....	71
3.4.1. Model.....	71
3.4.2. Çözüm Süreci.....	74

3.5. Markowitz Modelinin Alım Satım Maliyeti, Vergi ve Açığa Satışı	
Kapsayacak Şekilde Genişletilmesi.....	77
3.5.1. Alım Satım Maliyetini İçeren Model.....	78
3.5.1.1. Modelin Çözümü.....	81
3.5.2. Vergi ve Alım Satım Maliyetini İçeren Model.....	84
3.5.2.1 Modelin Çözümü.....	87
3.5.3. Vergi, Alım Satım Maliyeti ve Açığa Satışı İçeren Model.....	91
3.5.3.1. Çözüm Süreci.....	97
SONUÇ	100
KAYNAKÇA	102
EKLER	107

TABLÖLAR

Tablo 3.1:	Araştırmanın Kapsamına Alınan Hisse Senetlerinin Adları ve İşlem Kodları.....	69
Tablo 3.2:	Hisse Senetlerinin Dönem Başı ve Beklenen Dönem Sonu Değerleri	75
Tablo 3.3:	Markowitz Modeline Göre Belirlenen Etkin Portföylerin Varyansları, Standart Sapmalar ve Beklenen Dönem Sonu Değerleri.....	76
Tablo 3.4:	Hisse Senetlerinin Birim Başına Alım Satım Maliyetleri ve Revizyon Öncesi Elde Bulunan Hisse Sayıları.....	81
Tablo 3.5:	Alım Satım Maliyeti Dikkate Alındığında Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Değerleri ve Riskleri.....	82
Tablo 3.6:	Hisse Senetlerinin Beklenen Dönem Sonu Fiyatları, Beklenen Temettüleri ve Ağırlıklı Ortalama Alış Fiyatları.....	88
Tablo 3.7:	Vergi ve Alım Satım Maliyetinin Olduğu Durumda Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Net değerleri, Varyansları ve Standart Sapmaları	90
Tablo 3.8:	Alım Satım Maliyeti, Vergi ve Açığa satışın Olduğu Durumda Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Net Değerleri, Varyansları ve Riskleri.....	99

ŞEKİLLER

Şekil 1.1:	Basit Çeşitlendirmenin Portföy Riskine Etkisi.....	15
Şekil 1.2:	İki Menkul Kıymetin Getirileri Arasındaki Korelasyon Katsayısı	21
Şekil 1.3:	Tam Pozitif Korelasyon Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki.....	25
Şekil 1.4:	Tam Negatif Korelasyon Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki.....	26
Şekil 1.5:	Korelasyon Katsayısının Sıfır Olması Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki.....	27
Şekil 1.6:	Yatırım Fırsatları Kümesi ve Etkin Sınır	29
Şekil 1.7:	Açığa Satışın Olduğu ve Olmadığı Durumda Etkin Sınır.....	33
Şekil 1.8:	Risksiz Varlıkla Değişik Etkin Portföylerin Kombinasyonları	36
Şekil 1.9:	Fayda Fonksiyonları.....	39
Şekil 1.10	Riskten Kaçınan Yatırımcının Kayıtsızlık Eğrileri.....	41
Şekil 1.11	Optimal Portföy Seçimi.....	42
Şekil 2.1:	Konveks ve Konkav Fonksiyonlar.....	45
Şekil 2.2:	Konveks ve Konkav Olmayan Küme.....	49
Şekil 2.3:	Ekstremler.....	51
Şekil 3.1:	Çalışmanın Kapsamına Alınan Hisse Senetlerinden Markowitz Modeline Göre Belirlenen Etkin Portföylerin Oluşturduğu Etkin Sınır.....	77
Şekil 3.2:	Markowitz Etkin Sınırı ve Alım Satım Maliyetini İçeren Modele Göre Belirlenen Etkin Sınır.....	83
Şekil 3.3:	Verginin Olduğu ve Olmadığı Durumda Etkin Sınır.....	91
Şekil 3.4:	Açığa Satışın Olduğu ve Olmadığı Durumda Etkin Sınır.....	98

GİRİŞ

Portföy oluşturulmasındaki amaç basit olarak, çeşitli finansal varlıklara yatırım yaparak riskin dağıtılmasıdır. Yatırımcıların karşılaştıkları sorun, portföylerinde hangi varlıklara ve hangi oranlarda yer vereceklerinin belirlenmesidir.

Optimal portföyün oluşturulması ve yönetilmesinde yatırımcılara yardımcı olmayı hedefleyen Geleneksel Portföy Teorisi ve Modern Portföy Teorisi olmak üzere iki temel yaklaşım geliştirilmiştir. Geleneksel Portföy Teorisi, “tüm yumurtaların aynı sepete konulmaması” prensibinden hareketle portföydeki menkul kıymet çeşit sayısı arttıkça portföyün riskinin azalacağını savunmakta ve yatırımcılara beklenen getirisi yüksek olan çok çeşit menkul kıymete yatırım yapmayı önermektedir. 1950’li yıllara kadar hakim olan bu görüş, 50’li yıllarda Harry Markowitz tarafından Ortalama Varyans Modeli’nin geliştirilmesi ve böylece Modern Portföy Teorisi’nin temellerinin atılması ile birlikte terk edilmeye başlanmıştır.

Harry Markowitz, yatırımcıların kendi optimal portföylerini belirli bir beklenen getiri düzeyinde riski minimum ve belirli bir risk düzeyinde getirisi maksimum olan portföyler arasından seçmeleri gerektiğini ileri sürmüştür. Etkin portföyler olarak adlandırılan bu portföylerin oluşturulabilmesi için portföydeki menkul kıymet çeşit sayısının artırılmasının yeterli olmadığını, menkul kıymetlerin getirileri arasındaki ilişkilerinin de dikkate alınması gerektiğini ortaya koymuştur. Portföyün riskini getirilerin standart sapması ile ölçmüş ve etkin portföy seçimini matematiksel olarak, hedeflenen getiri düzeyinde portföy varyansının minimizasyonu şeklinde bir kuadratik programlama problemi olarak ifade etmiştir.

Menkul kıymetlerin getirileri arasındaki kovaryansların tahmin edilmesinin zorluğu ve hisse senedi sayısı fazla olduğunda modelin elle çözülmesinin pratik olarak imkansızlığı nedeniyle, bu model uzun süre sınırlı bir uygulama alanı bulabilmiştir. Ancak özellikle son dönemlerde bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte bu tip modellerin çözülmesi kolaylaşmış ve Ortalama Varyans Modeli araştırmacıların ilgi odağına dönüşmüştür. Türkiye’de ve dünyada Ortalama Varyans

Modeli üzerine çok sayıda araştırma yapılmış, farklı modeller ve yöntemler geliştirilmiştir.

Markowitz tarafından geliştirilen model, alım satım maliyetlerinin, verginin ve açığa satışın olmadığını varsayar. Türkiye’de yapılan çalışmalarda da genelde bu varsayımlardan hareket edilmiş ve piyasalarda karşılaşılan alım satım maliyetleri, realize edilen sermaye kazancı ve temettü gelirleri üzerinden ödenen vergiler, yatırımcıların açığa satış olanakları göz ardı edilmiştir. Oysa sağlıklı yatırım kararlarının alınabilmesi için söz konusu maliyet ve olanakların da dikkate alınması gerekmektedir.

Bu çalışmada, alım satım maliyetleri, vergi ve açığa satış olanakları da göz önünde bulundurularak İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetlerinden Ortalama Varyans Modeli’ne göre oluşturulabilecek etkin portföylerin kuadratik programlama yardımıyla belirlenmesi ve alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın etkin sınır üzerindeki etkilerinin açıklanması amaçlanmaktadır.

Çalışma üç ana bölümden oluşacaktır. Birinci bölümde, risk ve getiri gibi temel kavramlar açıklandıktan sonra, Geleneksel portföy Teorisi ve Ortalama Varyans Modeli incelenecektir.

İkinci bölümde, doğrusal olmayan programlama algoritmalarından biri olan kuadratik programlama ele alınacak ve kuadratik programlama yardımıyla etkin portföylerin matematiksel olarak nasıl belirlenebileceği açıklanacaktır.

Üçüncü ve son bölümde, ilk iki bölümde anlatılan teorik bilgiler doğrultusunda İMKB–30 Endeksindeki hisse senetlerinden yatırım fırsatları kümesi ile ilgili farklı varsayımlar altında Ortalama Varyans Modeli’ne göre etkin portföyler belirlenecektir.

1. PORTFÖY SEÇİM PROBLEMİ

Yatırımcılar finansal varlıklara belirli bir getiri beklentisi ile yatırım yaparlar. Finansal varlık yatırımlarının en belirgin özelliği, yatırımın sağlayacağı getirinin önceden kesin olarak bilinmemesi, yani riskli olmalarıdır. Tipik yatırımcılar yatırımlarının beklenen getirisinin yüksek olmasının yanında üstlendikleri riskin de mümkün olduğunca düşük olmasını isterler. Riskten kaçınan yatırımcılar olarak bilinen bu tip yatırımcılar için rasyonel davranış, tek bir menkul kıymete yatırım yapmak yerine birden fazla menkul kıymete yatırım yaparak riski dağıtmaktır. Farklı nitelikteki finansal varlıklara yatırım yaparak riski azaltma stratejisine çeşitlendirme¹, bu finansal varlıklardan oluşan, belirli bir kişi veya kurum tarafından elde tutulan varlık bileşimine portföy denir.²

Finansal piyasalarda yatırımcıların yatırım yapabilecekleri çok sayıda, farklı nitelikte finansal varlıklar bulunmaktadır. Yatırımcılar bu finansal varlıklara değişik ağırlıklarda yatırım yaparak sınırsız sayıda portföy oluşturabilirler. Bu durumda, yatırımcı sınırsız sayıda portföy içerisinde hangisine yatırım yapacağına nasıl karar verecektir? Başka bir deyişle, yatırımcı portföyünde hangi menkul kıymetlere ve hangi oranlarda yer vereceğine nasıl karar verecektir? Bu problem portföy seçim problemi olarak bilinir.³ Bu bölümün amacı, bu probleme çözüm getirmeye çalışan temel yaklaşımların açıklanmasıdır. Bu amaçla önce risk ve getiri gibi temel kavramlar açıklanacaktır.

1.1. Risk ve Getiri

1.1.1. Getiri Oranı

Belirli bir dönemde bir varlığa yapılan yatırımın karşılığında elde edilen kazanç veya kaybın yüzdesel ifadesi “getiri oranı” olarak adlandırılır. Getiri oranı yatırımın değerindeki artış hızını gösterir ve finansal varlık yatırımlarında en önemli

¹ Richard A. Brealey, Stewart C. Myers, Alan J. Marcus, **İşletme Finansının Temelleri**, Çev: Ünal Bozkurt, Tükan Arıkan, Hatice Doğukanlı, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1997, s.245

² Jerry M. Rosenberg, **Dictionary of Investing**, John Wiley and Sons , USA, 1993, s. 247

³ Gordon J. Alexander, William F. Sharpe and Jeffery V. Barley, **Fundamentals of Investments**, 2nd ed. , PrenticeHall, Englewood Cliffs, 1993, s. 119

değişkendir. Yatırım dönemi tek dönem olduğunda, getiri oranı yatırımın dönem sonundaki değeri ile dönem başındaki değeri arasındaki farkın yatırımın dönem başındaki değerine bölünmesi ile bulunur.⁴

$$r = \frac{\text{dönem sonundaki değer} - \text{dönem başındaki değer}}{\text{dönem başındaki değer}}$$

Yatırımcılar hisse senedi, tahvil gibi menkul kıymetlere yatırım yaptıklarında iki çeşit gelir elde ederler. Bunlardan birincisi sermaye kazancı (kaybı) olarak adlandırılan finansal varlığın dönem sonu fiyatı ile dönem başı fiyatı arasındaki olumlu (olumsuz) fark, ikincisi ise kar payı veya faiz şeklinde elde edilen gelirdir. Kar payı ya da faizin dönem sonunda elde edildiği varsayılırsa, bir menkul kıymetin getirisi bu iki çeşit geliri içerecek şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.⁵

$$r_t = \frac{P_{t+1} - P_t + C_t}{P_t} \quad (1.1)$$

Burada;

r_t = Elde tutma dönemindeki getiri oranını,

P_{t+1} = Menkul kıymetin dönem sonundaki piyasa fiyatını,

P_t = Menkul kıymetin dönem başındaki piyasa fiyatını,

C_t = Elde tutma döneminde kar payı veya faiz şeklinde elde edilen tutarı

temsil etmektedir.

Hisse senetlerinin getirisi hesaplanırken dikkate alınması gereken bir diğer nokta, yatırım dönemi içinde ihraççı şirketin sermaye artırımını yapıp yapmadığıdır. Eğer, söz konusu dönem içinde sermaye artırımını yapılmış ve eski ortaklar bedelli ve/veya bedelsiz yeni hisse senetleri almışlarsa, getiri bu durumu yansıtacak şekilde düzeltilmelidir. Bedelli ve/veya bedelsiz sermaye artırımının yapılması durumunda getiri oranı aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanabilir.⁶

⁴ Gürel Konuralp, **Sermaye Piyasaları: Analizler, Kuramlar ve Portföy Yönetimi**, 2. bs. ,Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001, s. 55

⁵ Jack Clark Francis, **Investment Analysis and Management**, 5th ed. , McGrawHill, New York, 1991, p. 2.

⁶ Cevat Sarıkamış, **Sermaye pazarları**, 4 bs., Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul, 2000, s.47

$$r_t = \frac{(P_{t+1} - P_t) + n_1 P_{t+1} + n_2 (P_{t+1} - P_0) + d_t}{P_t} \quad (1.2)$$

Formülde,

n_1 = Dönem içinde bir hisseye verilen bedelsiz hisse senedi sayısını,

n_2 = Ortağın rüçhan hakkı kullanarak satın aldığı bedelli hisse senedi sayısını,

P_0 = Satın alınan hisse senedinin bedelini,

P_{t+1} = Hisse senedini dönem sonu fiyatını,

P_t = Hisse senedinin dönem başı fiyatını,

d_t = Döneme ait kar payı tutarını göstermektedir.

1.1.2 Risk Kavramı

Risk, tanımlanması ve ölçülmesi zor ve tartışmalı olan bir kavramdır. Genel anlamda risk, arzu edilmeyen bir olay ve etkinin ortaya çıkma olasılığı olarak tanımlanabilir.⁷ Finansal varlık yatırımlarında ise risk, yatırımın beklenen getiriden daha az bir getiri sağlama olasılığı olarak tanımlanır.⁸ Risk esas olarak karar alma ile ilgili bir kavramdır. Bu açıdan bakıldığında, risk kavramı yatırımın sağlayacağı getirinin yatırım kararı alınırken önceden kesin olarak bilinmemesi, yani getirinin değişkenlik göstermesi anlamına gelmektedir.

Belirlilik durumunda, yani yatırımın hiçbir risk taşımaması durumunda, yatırımın dönem sonunda sağlayacağı getiri önceden kesin olarak bilinir. Başka bir deyişle, risksiz yatırımın gerçekleşmesi muhtemel tek bir getirisi olup, bu getirinin gerçekleşme olasılığı %100'dür. Örneğin, hazine bonosu satın alındığında ve vadesine kadar elde tutulduğunda elde edilecek getiri önceden bilinmektedir. Yatırımın dönem sonunda sağlayacağı getirinin önceden kesin olarak bilinmesi riski ortadan kaldırmaktadır. Tüm yatırım alternatiflerinin getirilerinin önceden kesin

⁷ A.e. , s. 163

⁸ Eugene F. Brigham, **Finansal Yönetimin Temelleri**, Çev: Özdemir Akmut, Halil Sarıaslan, Ankara Üniversitesi Yayınları No: 206, 1996, s. 106

olarak bilinmesi durumunda, rasyonel yatırımcı getirisi en yüksek olan yatırım alternatifini seçer.

Ancak yatırımcılar hisse senedi, tahvil gibi riskli menkul kıymetlere yatırım yaptıklarında elde edecekleri getiriye önceden bilemezler. Bu menkul kıymetlerin getirisini etkileyen sınırsız sayıda etken vardır. Yatırım dönemi içerisinde meydana gelebilecek farklı durumlara göre menkul kıymetlerin getirisi de değişkenlik göstermektedir.⁹ Finansal varlık yatırımlarında risk, getiriye bu değişkenliği ifade etmektedir.

Risksiz bir yatırımın bir tek olası getirisi varken, riskli yatırımın sağlayabileceği birden fazla getiri vardır. Olası getiriler $r_1, r_2, \dots, r_n$ ile, bu getirilerin gerçekleşme olasılıkları da sırasıyla $0 < p_1, p_2, \dots, p_n < 1$ ve $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ ile gösterilirse, her bir riskli yatırım (r_j, p_j) çiftleri ile karakterize edilir. Bu (r_j, p_j) çiftlerinin listesine de getirilerin olasılık dağılımı denir.¹⁰

Burada olasılık dağılımlarının nasıl belirlenebileceği konusuna girilmeyecektir. Menkul kıymetlerin getirilerinin olasılık dağılımlarının belirlenmesi menkul kıymet analizinin konusu olup, bu çalışmanın konusu portföy analizidir. Olasılık dağılımları menkul kıymet analizinin çıktısını, portföy analizinin girdisini oluşturmaktadır. Başka bir deyişle, portföy analizi menkul kıymet analizinin bittiği yerden başlar.¹¹

Finans literatüründe risk ve belirsizlik kavramlarının sıkça birbirinin yerine kullanıldığı görülmektedir. Fakat bu iki kavram arasında ihmal edilmeyecek bir fark bulunmaktadır. Riskli durumda olayların alternatif sonuçları ve bu sonuçların gerçekleşme olasılıkları objektif olarak bilinir. Belirsizlik durumunda ise olayların alternatif sonuçları bilinir ama bu sonuçların gerçekleşme olasılıkları bilinmez. Yatırımcılar veya menkul kıymet analistleri hisse senetlerinin getirileri ile ilgili objektif olasılık dağılımları belirleyemezler. Ekonomik göstergeler gibi hisse senetlerinin getirilerinin de gerçek olasılık dağılımları bilinmez. Yatırımcılar ve menkul kıymet analistleri tarihi verileri de dikkate alarak veya sadece geleceğe

⁹ Öztin Akgüç, **Finansal Yönetim**, 7.bs., Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1998, s. 869.

¹⁰ Haim Levy, **Stochastic Dominance: Investment Decision Making Under Uncertainty**, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998, s.6

¹¹ Harry M. Markowitz, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, John Wiley & Sons, 2nd ed., USA, 1991, p. 28

dönük beklentilerine dayanarak hisse senetlerinin getirileri ile ilgili objektif değil, sübjektif olasılık dağılımları belirleyebilirler. Olayların alternatif sonuçlarının gerçekleşme olasılıklarının sübjektif olarak belirlenebildiği durum, karar alma yöntemlerinde “kısmi ihmal durumu” olarak adlandırılır.¹² Fakat finans teorisinde, yatırımların sonuçları ile ilgili sübjektif de olsa, olasılıkların belirlenebildiği varsayılmakta ve yatırım kararlarının alınması, risk altında karar alma problemi olarak ele alınmaktadır.

Sübjektif olarak belirlense dahi, olasılık dağılımları yatırım analizinin temelini oluşturmaktadır. Olasılık dağılımı, yatırım ile ilgili tüm bilgileri kapsamaktadır. Ancak olasılık dağılımlarının birbiri ile kıyaslanması ve buna göre yatırım kararının alınması son derece zordur. Yatırımcılar yatırım kararları alırken olasılık dağılımlarını kıyaslamak yerine, bu dağılımları karakterize eden beklenen getiri ve yatırımın riski olarak kabul edilen değişkenlik ölçütlerinden hareket ederler.¹³

1.1.3 Beklenen Getiri

Beklenen getiri, riskli bir varlığın getirilerinin olasılık dağılımının orta değerini ölçmeye yarayan bir ölçüttür. Bir varlığın beklenen getirisi, olası sonuçların bu sonuçların gerçekleşme olasılıklarına göre ağırlıklı ortalamasıdır.¹⁴ Beklenen getiri, olası getirilerle bu getirilerin gerçekleşme olasılıklarının çarpımının toplanması ile bulunur ve matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:¹⁵

$$E(r) = \sum_{j=1}^n r_j p_j \quad (1.3)$$

Burada,

$E(r)$ = Beklenen getiri oranını,

¹² Kemal Kurtuluş, **Pazarlama Araştırmaları**, 8. bs. , Literatür Yayıncılık, 2004, s.26

¹³ Edwin J. Elton v.d, **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**, 6th ed. , John Wiley and Sons, NewYork, 2003, p. 45

¹⁴ Brigham, **a.g.e.** , s.107

¹⁵ Olasılık dağılımının sürekli olması halinde, sonsuz sayıda olası getiri olduğundan her bir getirin gerçekleşme olasılığı sıfıra yaklaşır. Bu durumda, p_j olasılıkları yerine $f(r)$ - olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak beklenen getiri $E(r) = \int f(r)rdr$ entegral işlemiyle bulunabilir.

r_j = j. durumun gerçekleşmesi halinde elde edilecek getiri oranını,

p_j = j. durumun gerçekleşme olasılığını,

n = Mümkün olan durum sayısını göstermektedir.

Gerçek hayatta riskli bir varlığın, örneğin bir hisse senedinin gerçekleşmesi muhtemel çok fazla sayıda getirisi bulunmaktadır. Tüm olası sonuçların ve bu sonuçların her birine bir olasılığın belirlenmesi son derece zordur. Bu yüzden beklenen getiri tahmin edilirken ilkin veri olarak tarihi verilerden yararlanılır. Olasılık dağılımlarının zaman geçtikçe değişmediği ve tarihi getiriler arasında korelasyon olmadığı varsayılırsa, beklenen getiri tarihi verilere göre aşağıdaki şekilde tahmin edilebilir.¹⁶

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \quad (1.4)$$

Burada,

$\bar{r}$ = Ortalama getiriye,

r_t = t döneminde gerçekleşen getiriye,

n = Dönem sayısını göstermektedir.

Yukarıdaki varsayımlar altında ortalama getiri beklenen getirinin tarafsız tahminleyenidir. Fakat bu, beklenen getirinin tarihi verilere dayanarak hatasız olarak tahmin edilebildiği anlamına gelmemektedir. Beklenen getiri ile ortalama getiri arasındaki fark, örnekleme hatasından kaynaklanır. Dikkate alınan dönem sayısı arttıkça bu hata azalarak düşer.

Ne var ki olasılık dağılımları statik değildir ve zaman geçtikçe olasılık dağılımlarının şekli değişmektedir. Bu yüzden beklenen getiri tahmin edilirken ortalama getirinin geleceğe dönük beklentileri de yansıtacak şekilde düzeltilmesi gerekir.¹⁷

¹⁶ Robert A. Haugen, **Modern Investment Theory**, 3rd ed. , Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993, p.43

¹⁷ Edwin J. Elton, **a.g.e.** , p. 90

1.1.4 Riskin Ölçülmesi

Daha önce de belirtildiği gibi, risk anlaşılması ve ölçülmesi zor olan bir kavramdır. Riski ölçmek için girişilen çabalar birçok tartışmayı da beraberinde getirmiş ve değişik risk ölçütleri geliştirilmiştir.¹⁸ Riski ölçmenin zor olmasının nedeni, riskin sübjektif bir kavram olmasıdır. Örneğin, A ve B yatırımları ile ilgili olasılık dağılımları verildiğinde bir yatırımcının A yatırımını riskli bulurken, diğer yatırımcının B yatırımını daha riskli bulması mümkündür. Bu yüzden genelde herhangi bir ölçüte dayanarak riskin objektif olarak ölçülmesi ve yatırımların riskliliklerine göre tüm yatırımcıların kabul edeceği şekilde sıralanması olanaksızdır. Bununla birlikte, olasılık dağılımları veya yatırımcı tercihleri ile ilgili belirli varsayımlarda bulunarak riski ölçmek ve yatırımları riskliliklerine göre belirli grup yatırımcıların kabul edeceği şekilde sıralamak mümkündür.¹⁹

Geliştirilen risk ölçütleri içerisinde en fazla kabul göreni varyans veya onun karekökü olan standart sapmadır. Markowitz belirli varsayımlar altında varyans veya standart sapmanın risk ölçütü olarak kullanılabileceğini ortaya koymuş ve bu ölçüte dayanarak geliştirdiği Ortalama Varyans Modeli, ona 1990 yılında Nobel ödülünü kazandırmıştır.

Bir yatırım ile ilgili olasılık dağılımı verildiğinde, varyans aşağıdaki biçimde hesaplanır.²⁰

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^n p_j [r_j - E(r)]^2 = E[r - E(r)]^2 \quad (1.5)$$

Varyans, olası getirilerin beklenen getiri etrafında dağılımını ölçen analitik bir kavramdır. Varyansın büyük olması, dağılım aralığının geniş olduğu ve dolayısıyla riskin büyük olduğu anlamına gelmektedir. Varyansın birimi yüzde kare olduğundan

¹⁸ Farklı risk ölçütleri için bkz: Levy, **a.g.e.** , pp. 8-18; Markowitz, **a.g.e.** , pp. 286-297; Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, **Investments**, 6th ed., McGraw Hill, 2005, pp.151-153

¹⁹ Haim Levy, **a.e.** , p. 19

²⁰ Olasılık dağılımının sürekli olması durumunda varyans $\sigma^2 = \int f(r)[r - E(r)]^2 dr$ formülüyle hesaplanabilir.

yorumlanması zordur. Standart sapmanın beklenen getiri ile aynı birim üzerinden ifade edilmesi gibi bir üstünlüğü bulunmaktadır.²¹ Bu yüzden risk ölçütü olarak standart sapma kullanılmaktadır. Standart sapma varyansın karekökü alınarak bulunur.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j [r_j - E(r)]^2} = \sqrt{E[r - E(r)]^2} \quad (1.6)$$

Standart sapma varyansın karekökü olduğundan, risk ölçütü olarak bu ölçütlerden herhangi birinin kullanılması yatırımların riske göre sıralamasını değiştirmeyecektir. Dolayısıyla yatırım kararı alınırken risk ölçütü olarak varyans ya da standart sapmanın kullanılması yatırım kararını etkilemez.

Tarihi veriler dikkate alındığında varyans aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}{n-1} \quad (1.7)$$

Varyans tarihi verilere göre hesaplandığı zaman geçmiş dönemlerde gerçekleşen getirilerin ortalama getiriden farklarının kareleri toplamı (n) yerine (n-1)'e bölünür. Bunun nedeni (n)'e bölünerek hesaplanan varyansın öngörülen varyansın taraflı tahminleyeni olmasıdır.²²

1.1.5 Riskin Kaynakları

Bir varlığın sağladığı getirinin beklenen getiriden farklı gerçekleşmesine yol açabilecek sınırsız sayıda unsur vardır. Riskin kaynakları olarak adlandırılan bu unsurlar, genel olarak piyasadaki bütün varlıkları etkileyen risk kaynakları ve yalnızca söz konusu varlığın kendi özelliklerinden ileri gelen risk kaynakları olarak

²¹ Akgüç a.g.e. , s. 870

²² Neyran Orhunbilge, **Tanımsal İstatistik, Olasılık ve Olasılık Dağılımları**, İşletme Fakültesi Yayın No: 279, İstanbul, 2000, s.120

iki ana başlık altında toplanabilir. Bu şekilde sınıflandırılan risk türleri sırasıyla sistematik risk ve sistematik olmayan risk olarak adlandırılmaktadır.²³

1.1.5.1 Sistematik Risk

Sistematik risk, tüm menkul kıymetlerin getirilerini etkileyen ekonomik, politik ve sosyal çevrede meydana gelen değişimlerden kaynaklanan risk türüdür. Piyasadaki menkul kıymetlerin hepsi, farklı oranlarda olmakla birlikte, genelde sistematik riskten aynı doğrultuda etkilenir. Bu nedenle menkul kıymetler arasında çeşitlendirme yaparak sistematik riskin ortadan kaldırılması mümkün değildir.

Başlıca sistematik risk kaynakları faiz oranı riski, satın alma gücü (enflasyon) riski ve piyasa riskidir.

Faiz oranı riski, piyasa faiz oranındaki değişimler sonucunda menkul kıymetlerin getirilerinde meydana gelen değişkenliği ifade etmektedir. Genel faiz oranındaki yükselme, hem sabit getirili borçlanma kağıtlarının hem de hisse senetlerinin fiyatlarının düşmesine neden olmaktadır.²⁴ Uzun vadeli borçlanma kağıtları, kısa vadeli kağıtlara göre faiz oranındaki değişimlerden daha fazla etlenirler.

Enflasyon riski de denilen satın alma gücü riski, enflasyondaki değişimlerin neden olduğu reel getiriye değişkenlik olarak tanımlanabilir. Bir varlığın reel getirisi, nominal getiriden enflasyon oranı düşülerek bulunur.

$$r_r = \frac{1 + r_{nom}}{1 + e} - 1 \quad (1.8)$$

Formülde;

r_r = Reel getiriyi,

r_{nom} = Nominal getiriyi,

e = Enflasyon oranını göstermektedir.

²³ Erdinç Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları No: 40, İstanbul, 2004, s. 4

²⁴ Sarıkamış, **a.g.e.**, s. 177

Enflasyon oranının yükselmesi, sabit getirili menkul kıymetlerin reel getirisinin düşmesine neden olur. Enflasyon oranındaki değişmelerin hisse senetleri üzerindeki etkisi ise tartışmalıdır.²⁵

Ekonomideki genel yön değişikliklerinin, tüketim eğilimindeki değişmelerin, siyasi kararların, seçimlerin, savaşların vb. etkenlerin neden olduğu menkul kıymetlerin getirilerindeki değişkenlikler, piyasa riski olarak adlandırılır. Piyasa riski, etkisini daha çok hisse senetleri üzerinde gösterir. Kalitesi düşük hisse senetleri kalitesi yüksek hisse senetlerine göre piyasa riskinden daha çok etkilenirler.²⁶

1.1.5.2 Sistematiik Olmayan Risk

Sistematiik olmayan risk, toplam riskin finansal varlıkların ait oldukları firmalara ya da bu firmaların faaliyette bulundukları endüstriye ait birtakım özelliklerden ve değişmelerden kaynaklanan kısmıdır. Sistematiik olmayan risk çeşitlendirme ile ortadan kaldırılabilir. Bu yüzden sistematiik olmayan riske çeşitlendirilebilir risk de denilmektedir.

Başlıca sistematiik olmayan risk kaynakları iş riski, finansal risk ve yönetim riskidir.

İş riski faiz ve vergi öncesi kardaki değişkenliği ifade etmektedir. Bu risk sektörden sektöre ve bir sektörde faaliyet gösteren firmalar arasında değişkenlik gösterir. İş riskinin bağlı olduğu temel etkenler aşağıdaki gibi sıralanabilir.²⁷

1- Talep Değişkenliği: Diğer şeyler aynı kalmak koşuluyla bir firmanın mallarına olan talep ne kadar istikrarsız ise firmanın iş riski o kadar yüksektir.

2- Satış Fiyatı Değişkenliği: Satış fiyatları fazla değişkenlik gösteren firmalar, satış fiyatları istikrarlı olan firmalara göre daha fazla iş riski taşırlar.

3- Girdi Fiyatları Değişkenliği: Girdi fiyatları büyük ölçüde değişkenlik gösteren firmalar yüksek iş riski taşırlar.

²⁵ Altay a.g.e. , s. 7

²⁶ Ali Ceylan, Turhan Korkmaz, **Sermaye Piyasası ve Menkul Değer Analizi**, Etkin Kitapevi, Bursa, 2000, s. 273

²⁷ Brigham, a.g.e. , s.208

4- Çıktı Fiyatlarının Girdi Fiyatlarındaki Değişmelere Göre Ayarlanabilme Olanığı: Bazı firmalar girdi maliyetleri yükseldiği zaman ürünlerinin fiyatlarını yükseltmekte zorluk çekerler. Bu tür firmaların iş riski daha yüksektir.

5-Faaliyet Kaldırıcı: Toplam maliyetler içerisinde sabit maliyetlerin payı yüksek olduğunda satışlardaki küçük dalgalanmalar faiz ve vergi öncesi karda büyük dalgalanmalara neden olur. Bu yüzden sabit maliyet/toplam maliyet oranı arttıkça firmanın iş riski de artar.

Bu etkenlerin her biri kısmen firmanın faaliyette bulunduğu sektörün özellikleri tarafından belirlenir. Ancak firma yöneticilerinin sınırlı da olsa, bu etkenler üzerinde kontrol olanakları bulunmaktadır. Firmaların taşıdıkları iş riski, finansal varlık yatırımcıları açısından çeşitlendirilebilir risk olarak nitelendirilir.

Finansal risk, firmaların borç kullanımı sonucunda ortaya çıkan risk türüdür. Bilindiği gibi, borç özsermayeye göre daha düşük maliyetli kaynak olduğundan, borç kullanımı finansal kaldıraç etkisiyle özsermaye karlılığı üzerinde olumlu etkide bulunur. Aynı zamanda borç firmaya sabit mali yükümlülükler getirdiğinden borç/öz sermaye oranı yüksek olan firmaların faaliyet gelirlerindeki küçük dalgalanmalar, hisse başına net karda büyük dalgalanmalara neden olur. Başka bir deyişle, borç kullanımı, hisse senedinin hem beklenen getirisini hem de riskini artırır.

Yönetim riski, firma yöneticilerinin hatalı yönetim kararları alma veya alınan kararları uygularken hata yapma olasılığından kaynaklanır. Hatalı yönetim kararları, firmanın karlılığını olumsuz yönde etkileyebilir ve hatta firmanın iflasına neden olabilir. Bir hisse senedinin taşıdığı yönetim riskinin büyüklüğünü belirleyebilmek için ilgili firmanın yönetimini değerlendirmek gerekir. Bu değerlendirmenin nasıl yapılacağı ise tartışmalıdır.

Buraya kadar menkul kıymetlerin getirilerinin değişkenlik göstermesine neden olan başlıca risk kaynakları açıklanmıştır. Belirtilmelidir ki, riskin kaynakları burada açıklananlarla sınırlı değildir ve riskin sınırsız sayıda kaynağı bulunmaktadır. Bir menkul kıymetin taşıdığı tüm riskler menkul kıymetin standart sapma ile ölçülen toplam riskini oluşturur.²⁸

²⁸ Francis, a.g.e. , s.9

1.2 Geleneksel Portföy Seçimi

Geleneksel portföy çeşitlendirmesi basit çeşitlendirme düşüncesine dayanır. Basit çeşitlendirme, ‘bütün yumurtaların aynı sepete konulmaması’ prensibinden hareketle, portföy riskini düşürmek amacıyla portföydeki varlık çeşidinin artırılması şeklinde tanımlanabilir. Geleneksel yaklaşıma göre, portföyü oluşturan varlıkların getirileri aynı yönde hareket etmeyeceğinden, bazıları zarar ederken bazıları kar sağlayacağından, portföydeki varlık çeşidi arttıkça portföyün riski düşecektir.²⁹ Geleneksel portföy teorisi bu prensipten hareketle portföyde beklenen getirisi yüksek olan çok sayıda menkul kıymete yer verilmesini önermektedir. Ayrıca hisse senedi portföylerinde aynı sektörde faaliyet göstermeyen firmaların hisse senetlerine yer verilmesi ile riskin daha fazla düşürülebileceği ifade edilmektedir.

Finansal varlıkların getirileri arasında hiçbir ilişkinin olmadığı varsayıldığında (N) sayıda menkul kıymetten oluşan eşit ağırlıklı bir portföyün varyansı şöyle hesaplanacaktır:³⁰

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sigma_1^2 + \frac{1}{N^2} \sigma_2^2 + \dots + \frac{1}{N^2} \sigma_N^2$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2}{N}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \overline{\sigma^2}$$

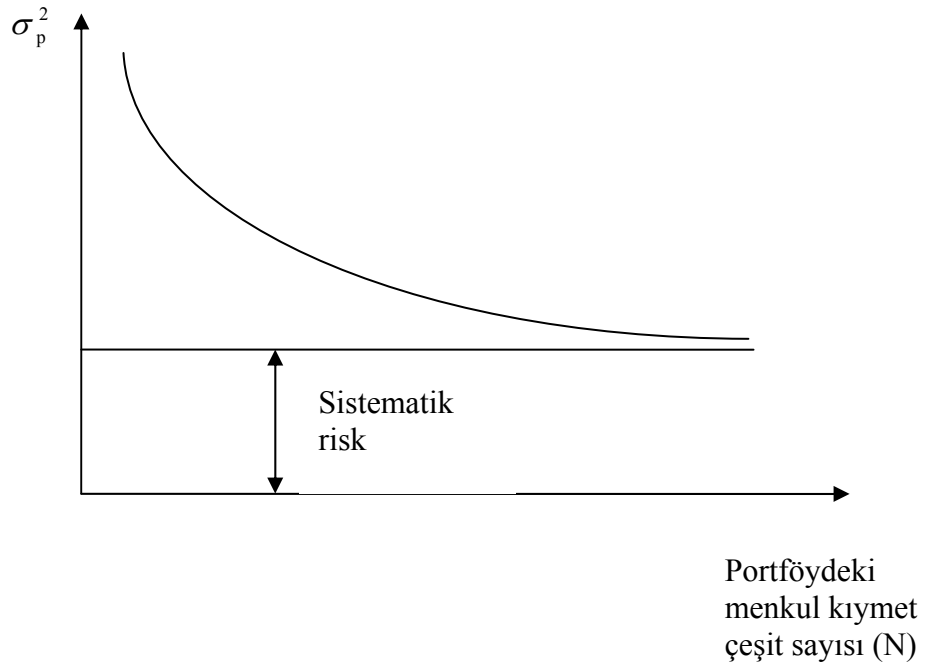
Görüldüğü gibi, portföyde yer alan varlıkların sonlu varyansı olduğu varsayılırsa varlıkların getirileri arasında hiçbir ilişki bulunmadığında portföydeki menkul kıymet sayısı arttıkça risk düşmekte, (N) yeterince büyük olduğunda risk sifıra yaklaşmaktadır. Ancak gerçek hayatta menkul kıymetlerin getirileri arasında genelde pozitif ilişki bulunduğundan riskin bu denli düşürülmesi veya ortadan kaldırılması mümkün değildir. Daha önce de belirtildiği gibi, menkul kıymetlerin

²⁹ Ceylan, **a.g.e.** , s. 280

³⁰ Elton, **a.g.e.** , p. 58

taşıdıkları riskin bir kısmı sistematik risktir ve bu risk basit çeşitlendirme ile azaltılamaz.

Şekil 1.1 (N) sayıda menkul kıymetten eşit ağırlıklar verilerek 1, 2, ... ,N sayıda menkul kıymet içerecek şekilde oluşturulabilecek portföylerin ortalama riski ile portföydeki menkul kıymet sayısı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Görüldüğü gibi, portföydeki menkul kıymet çeşit sayısı arttıkça sistematik olmayan risk ve dolayısıyla toplam risk azalarak düşmekte ve sistematik risk düzeyine yaklaşmaktadır.



Şekil 1.1 Basit Çeşitlendirmenin Portföy Riskine Etkisi

Kaynak: Jack Clark Francis, **Investment Analysis and Management**, 5th ed., McGrawHill, New York, 1991, p. 229

Çok sayıda menkul kıymete yatırım yapma aşırı çeşitlendirme sorununu da beraberinde getirmektedir. Aşırı çeşitlendirmenin sakıncaları aşağıdaki gibi sıralanabilir:³¹

1. Portföyde taşıdığı riske karşın gerekli getiriye sağlamayan menkul kıymetlere de yer verilmesi,

³¹ Niyazi Berk, **Finansal Yönetim**, 8. bs. , Türkmen Kitabevi, 2005, s. 374

2. Portföyün iyi şekilde yönetilmesinin zor olması,
3. Çok sayıda menkul kıymetle ilgili bilgi edinmenin maliyetli olması,
4. İşlem giderlerinin yüksek olması.

Yapılan araştırmalar yaklaşık olarak 10 – 15 hisse senedinin iyi çeşitlendirme için yeterli olduğunu göstermektedir.³² Türkiye’de bu konu ile ilgili yapılan bir tez çalışmasında iyi çeşitlendirilmiş bir portföyün 6 ila 16 arasında menkul kıymet içermesi gerektiği sonucuna varılmıştır.³³

1.3 Ortalama Varyans Modeli

Ortalama Varyans Modeli, Modern Portföy Teorisi’nin kurucusu sayılan Harry Markowitz tarafından geliştirilen bir portföy seçim modelidir. Markowitz 1952’de yayınlanan ünlü makalesi³⁴ ile ve daha sonra 1959’da yayınlanan kitabı³⁵ ile ortalama varyans modelini ortaya koymuş ve böylece Modern Portföy Teorisi’nin temelini atmıştır.

1950’li yıllara kadar yatırımcılar finansal varlıklara yatırım yaparken üstlendikleri bir takım riskler olduğunu farkındaydılar. Ancak riskin nasıl ölçülebileceği ile ilgili herhangi bir fikirleri yoktu. Yatırım kararları beklenen getiriye göre alınmakta ve çok sayıda menkul kıymete yatırım yaparak riskin düşürülebileceği düşünülmekteydi. Markowitz, yatırım kararı alınırken beklenen getiri ile birlikte riskin de dikkate alınması gerektiğini ileri sürmüş ve riski getirilerin varyansı veya standart sapması şeklinde istatistiksel olarak tanımlamıştır. Bu çerçevede, belirli bir beklenen getiri düzeyinde portföyün riskinin portföydeki menkul kıymetlerin getirileri arasındaki ilişkiler dikkate alınarak minimize edilebileceğini kantitatif olarak ortaya koymuştur.³⁶

³² Francis, **a.g.e.**, p. 229

³³ Gökçe Alp Gökçe, “Risk, Çeşitlendirme ve İMKB-30 Endeksinde İyi Çeşitlendirilmiş Portföy Büyüklüğünün Hesaplanması”, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İ.Ü Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Finansmanı Anabilim Dalı, İstanbul, 2001

³⁴ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **Journal of Finance**, Vol VII, No.1, March 1952, pp. 77-91

³⁵ Markowitz, **a.g.e.**

³⁶ Cheng R. Lee, Joseph E. Finnerty, Donald H. Wort, **Security Analysis and Portfolio Management**, Scott Foresman and Company, 1990, p.210

Ortalama Varyans Modeli'nin dayandığı varsayımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:³⁷

1. Yatırımcı, servetinin dönem sonu değerinin veya portföyünün getirisinin beklenen faydasını maksimize etmeğe çalışır. Bu varsayım, yatırımcının her yatırım alternatifini yatırımın sağlayabileceği getirilerin olasılık dağılımı ile ifade ettiğini ve portföyün değerinin servetin değerine eşit olduğunu ima eder.

2. Yatırım dönemi tek dönemdir.

3. Yatırımcının fayda fonksiyonu, servetin değerinin azalarak artan fonksiyonudur. Bu, yatırımcının getiriye doyumsuz veya riskten kaçınan olduğu anlamına gelmektedir.

4. (a) Getirilerin olasılık dağılımı normaldir veya

(b) Yatırımcının fayda fonksiyonu kuadrattır. İleride görüleceği gibi getiriler normal dağıldığında veya fayda fonksiyonu kuadratik olduğunda yatırımcı sadece beklenen getiri ve varyansa dayanarak beklenen faydasını maksimize eder. Başka bir deyişle, bu durumda yatırımcının beklenen faydası, sadece beklenen getiri ve varyansın bir fonksiyonudur.

5. Varlıklar sonsuz bölünebilir, vergi ve işlem maliyeti yoktur.

Ortalama Varyans Modeli'ne göre, yukarıdaki varsayımlar altında rasyonel yatırımcı, Markowitz etkin sınırı üzerindeki portföylerden birine yatırım yapar. Etkin sınır, belirli bir beklenen getiri düzeyinde riski minimum olan ve belirli bir risk düzeyinde beklenen getirisi maksimum olan portföyler kümesi olarak tanımlanır. Yatırımcının etkin portföyler içerisinde hangisini seçeceği ise yatırımcının risk getiri tercihiyle bağlıdır.

1.3.1 Portföyün Beklenen Getirisi

Beklenen değerin özellikleri göz önünde bulundurularak portföyün beklenen getirisi kolayca formüle edilebilir. Beklenen değerin iki önemli özelliği bulunmaktadır.³⁸

³⁷ Alexander, a.g.e. , p. 191; Lee, a.g.e. ,p.210; Jack Clark Francis, Stephen H. Archer, **Portfolio Analysis**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971, p.7

³⁸ Elton, a.g.e. , p. 46

1. İki tesadüfî değişkenin toplamının beklenen değeri, bu değişkenlerin beklenen değerlerinin toplamına eşittir.

$$E (R_1+R_2) = E (R_1) + E (R_2)$$

2. Sabitle tesadüfî değişkenin çarpımının beklenen değeri, sabitle tesadüfî değişkenin beklenen değerinin çarpımına eşittir.

$$E (C \cdot R) = C E (R)$$

Portföy, menkul kıymetlerin bir topluluğu olduğundan portföyün getirisi portföyde yer alan menkul kıymetlerin getirilerinin ağırlıklı ortalamasına eşittir.³⁹

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_N r_N = \sum_{i=1}^N x_i r_i \quad (1,9)$$

Burada,

r_p = Portföyün getirisini,

x_i = i. varlığın portföy içindeki ağırlığını,

r_i = i. varlığın getirisini,

N = Portföydeki varlık sayısını temsil etmektedir.

$r_1, r_2, \dots, r_N$ tesadüfî değişkenler olduğundan, r_p de tesadüfî bir değişkendir.

Beklenen değer özelliklerini dikkate alınarak portföyün beklenen getirisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E(r_p) = E(x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_N r_N) = E(x_1 r_1) + E(x_2 r_2) + \dots + E(x_N r_N)$$

$$E(r_p) = x_1 E(r_1) + x_2 E(r_2) + \dots + x_N E(r_N) = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) \quad (1.10)$$

³⁹ Markowitz, **a.g.e.** , p. 70

Bu formül genel bir formüldür. Portföyün beklenen getirisi, portföyü oluşturan menkul kıymetlerin beklenen getirilerinin ağırlıklı ortalamasına eşittir.

1.3.2 Portföyün Riski

Daha önce de belirtildiği gibi, Ortalama Varyans Modeli varyans veya onun karekökü olan standart sapmanın riskin uygun bir ölçüsü olduğunu varsayar. Portföyün varyansının hesaplanması, beklenen getiriye göre daha karmaşıktır. Bir yatırımın varyansının yatırımın olası getirileri ile beklenen getirisi arasındaki farkların karelerinin beklenen değerleri olduğu daha önce belirtmişti. Buna göre portföyün varyansı olasılık dağılımına göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^n p_j (r_{pj} - E(r_p))^2 = E(r_p - E(r_p))^2 \quad (1.11)$$

Bu formülde(1.9) ve (1.10) ile verilen ifadeler (1.11)'de yerine yazılırsa,

$$\sigma_p^2 = E \left[\sum_{i=1}^N x_i r_i - \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) \right]^2 = E \left[\sum_{i=1}^N x_i (r_i - E(r_i)) \right]^2$$

parantezin karesi açılırsa ve yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 (r_i - E(r_i))^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N x_i x_k (r_i - E(r_i))(r_k - E(r_k)) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^2 E(r_i - E(r_i))^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N x_i x_k E(r_i - E(r_i))(r_k - E(r_k)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede

$$E(r_i - E(r_i))^2 = \sigma_i^2$$

$$E(r_i - E(r_i))(r_k - E(r_k)) = \sigma_{ik}$$

olduğuna göre

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N x_i x_k \sigma_{ik}$$

veya (1.13)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik}$$

sonucuna ulaşılır.⁴⁰ Burada σ_i^2 portföydeki i. varlığın varyansını, σ_{ik} i. varlığın getirileri ile k. varlığın getirileri arasındaki kovaryansı göstermektedir.

Kovaryans, iki tesadüfi değişken arasındaki ilişkinin yönünü gösteren sayısal bir ölçüttür. Bu ölçüt pozitif olduğunda getirilerin aynı yönde, negatif olduğunda ise ters yönde hareket ettiği anlaşılmaktadır. Kovaryansın sıfıra eşit olması ise getiriler arasında herhangi bir ilişkinin olmadığı anlamına gelir.

Tarihi veriler dikkate alındığında iki varlığın getirileri arasındaki kovaryans aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [(r_{it} - \bar{r}_i)(r_{kt} - \bar{r}_k)]$$

Formülde,

σ_{ik} = i varlığı ile k varlığı arasındaki kovaryansı,

r_{it} = i varlığının t döneminde sağladığı getiriye,

r_{kt} = k varlığının t döneminde sağladığı getiriye,

$\bar{r}_i$ = i varlığının ortalama getirisini,

$\bar{r}_k$ = k varlığının ortalama getirisini,

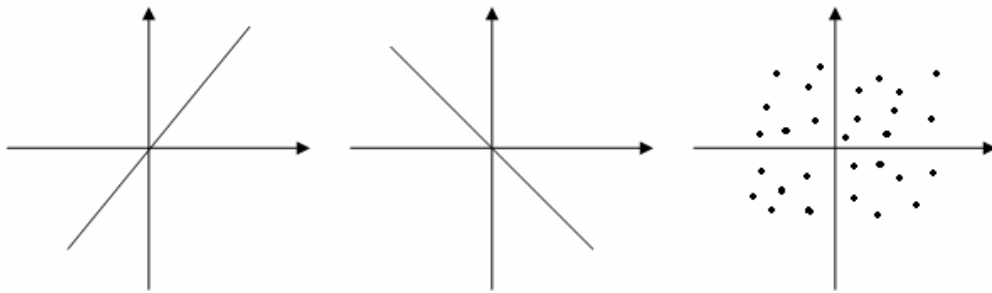
⁴⁰ Markowitz, a.e. , p. 94

n = dönem sayısını göstermektedir.

Kovaryansa dayanarak getiriler arasındaki ilişkinin yönü belirlenebilir, ancak ilişkinin gücü ile ilgili bir şey söylenemez. Getiriler arasında ilişkinin gücü korelasyon katsayısı (ρ) ile ölçülür. Korelasyon katsayısı, varlıkların getirileri arasındaki kovaryansın varlıkların getirilerinin standart sapmalarının çarpımına bölünmesi ile bulunur.

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k} \quad (1.14)$$

Kovaryans $-\infty$ ile $+\infty$ arasında bir değer alırken, korelasyon katsayısı (-1) ile (+1) arasında bir değer alır. Varlıkların standart sapmaları negatif olamayacağından korelasyon katsayısının negatif veya pozitif bir değer alması kovaryansın negatif veya pozitif olmasına bağlıdır. Korelasyon katsayısının (-1) olması getiriler arasında tam negatif, (1) olması ise tam pozitif ilişki olduğunu ifade eder. Korelasyon katsayısı (0) olması ise getiriler arasında herhangi bir ilişki olmadığı anlamına gelir. Şekil 1.2’de korelasyon katsayısının +1, -1 ve 0 olduğu durumlar grafik olarak gösterilmiştir.



a) tam pozitif
korelasyon

b) tam negatif
korelasyon

c) ilişki yok

Şekil 1.2 İki Menkul Kıymetin Getirileri Arasındaki Korelasyon Katsayısı
Kaynak: Gordon J. Alexander, William F. Sharpe and Jeffery V. Barley,
Fundamentals of Investments, 2nd ed., PrenticeHall, Englewood Cliffs, 1993,
p. 133

Portföyün varyansı korelasyon katsayılarına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_p^2 = x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N x_i x_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

veya (1.15)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

Portföyün standart sapması varyansın karekökü alınarak bulunur.

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N x_i x_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k} \quad (1.16)$$

Formülden de görüldüğü gibi, portföyün riski portföyde yer alan varlıkların riskine, portföy içerisindeki ağırlıklarına ve varlıkların getirileri arasındaki kovaryanslara bağlıdır. Basit çeşitlendirmede varlıkların getirileri arasındaki ilişkiler dikkate alınmaz. Bu yüzden basit çeşitlendirme ile risk belirli bir düzeye kadar indirilebilir, fakat basit çeşitlendirme belirli bir beklenen getiri düzeyinde riskin minimize edildiğini garanti etmez. Markowitz çeşitlendirmesi varlıkların getirileri arasındaki ilişkilere dayandığından, basit çeşitlendirmeye kıyasla daha fazla risk düşüşü sağlanabilmekte ve belirli bir beklenen getiri düzeyinde minimum riskli portföylere ulaşmak mümkün olmaktadır. Çok sayıda menkul kıymete yatırım yaparak portföy riski en fazla piyasa sistematik risk düzeyine kadar düşürülebilir. Ancak Markowitz çeşitlendirmesi ile portföyün riskinin piyasa sistematik risk düzeyinin altına düşürülmesi, hatta aralarında tam negatif korelasyon olan varlıkların bulunması halinde riskin teorik olarak ortadan kaldırılması mümkün olmaktadır.⁴¹

Beklenen getiri ve risk arasındaki ilişki göz önünde bulundurularak bu bölümde anlatılanlar analitik bir şekilde gösterilebilir. Bu amaçla, önce iki varlıktan oluşan portföyler ele alınacaktır.

⁴¹ Francis, **a.g.e.** , s. 234

1.3.3 İki Varlıktan Oluşan Portföylerde Markowitz Çeşitlendirmesi

(N) sayıda varlıktan oluşan portföylerin beklenen getirisi ve riski için yazılan ifadeler, (A) ve (B) ile gösterilen iki varlıktan oluşan bir portföyün beklenen getirisi ve riski için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$E(x_p) = x_A E(r_A) + x_B E(r_B)$$
$$\sigma_p = (x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B)^{\frac{1}{2}}$$

İfadelerde,

x_A = A varlığının portföy içerisindeki ağırlığını,

x_B = B varlığının portföy içerisindeki ağırlığını,

$E(r_A)$ = A varlığının beklenen getirisini,

$E(r_B)$ = B varlığının beklenen getirisini,

σ_A = A varlığının standart sapmasını,

σ_B = B varlığının standart sapmasını,

ρ_{AB} = A varlığı ile B varlığı arasındaki korelasyon katsayısını

göstermektedir. Varlıkların portföy içerisindeki ağırlıklarının toplamının bire eşit olması, varlıklardan birinin ağırlığının diğer varlığın ağırlığı cinsinden yazılabilmesine olanak sağlamaktadır.

$$x_A + x_B = 1 \Rightarrow x_B = 1 - x_A$$

olduğundan, portföyün beklenen getirisi ve riski tekrar aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$E(x_p) = x_A E(r_A) + (1 - x_A) E(r_B) \quad (1.17)$$

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

Görüldüğü gibi, (A) ve (B) varlıklarının beklenen getirileri ve riskleri verildiğinde, bu varlıklardan değişik ağırlıklar verilerek oluşturulabilecek portföylerin beklenen getirisi bu varlıkların beklenen getirilerinin ağırlıklı ortalamasına eşitken, riski bu varlıklar arasındaki korelasyon katsayısına bağlıdır.

1.3.3.1 Tam Pozitif Korelasyon Durumu

Portföydeki varlıkların getirileri arasındaki korelasyon katsayısının bire eşit olması, iki varlığın getirilerinin aynı yönde ve aynı oranda değişim gösterdiği anlamına gelmektedir.

(1.18) ile verilen ifadede $\rho_{AB}=1$ yazılırsa, risk formülü

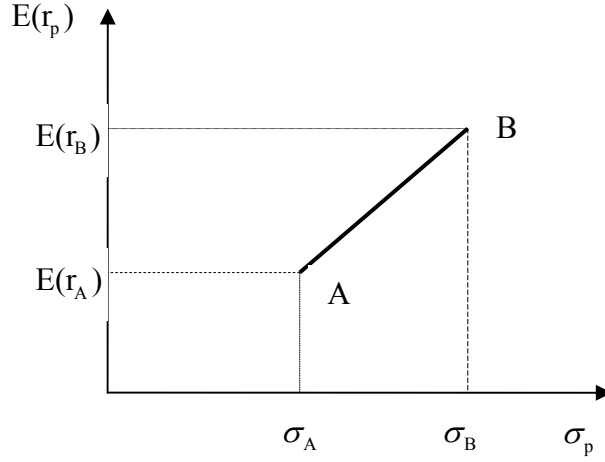
$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\sigma_A\sigma_B \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_p = \left[(x_A\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(x_A\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B) \geq 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\sigma_p = (x_A\sigma_A + (1-x_A)\sigma_B) \quad (1.19)$$

şekline düşer. Korelasyon katsayısının 1'e eşit olması durumunda, portföyün riski portföydeki varlıkların risklerinin ağırlıklı ortalamasına eşittir. Bu da varlıklar arasında tam pozitif korelasyon olduğunda çeşitlendirme ile herhangi bir risk indirimi sağlanamayacağı anlamına gelmektedir. Bu durumda (A) ve (B) varlıklarından değişik ağırlıklar verilerek oluşturulabilecek portföylerin beklenen getirisi ve riski arasında doğrusal bir ilişki bulunmaktadır.



Şekil 1.3 Tam Pozitif Korelasyon Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki

Şekil 1.3’de AB doğrusu, (A) ve (B) varlıkları arasında tam pozitif korelasyon olduğu durumda, bu iki varlıktan değişik ağırlıklar verilerek oluşturulabilecek portföyleri göstermektedir. Korelasyon katsayısının maksimum değeri (1) olduğundan, bu doğru aynı zamanda (A) ve (B) varlıklarından oluşturulabilecek portföylerin risklerinin üst sınırıdır. Başka bir deyişle, iki varlıktan oluşan bir portföyün riski bu varlıkların risklerinin ağırlıklı ortalamasından daha büyük olamaz.

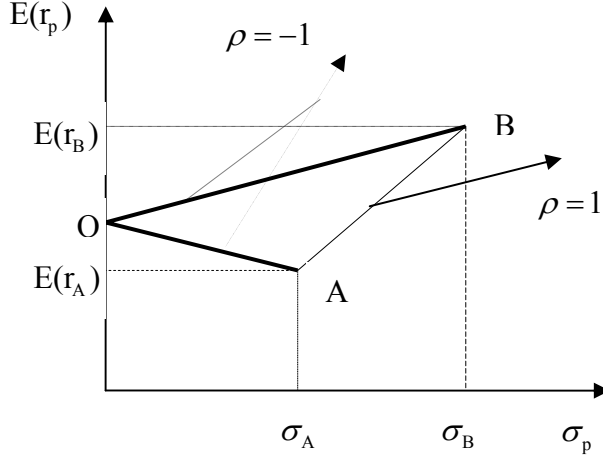
1.3.3.2 Tam Negatif Korelasyon Durumu

Korelasyon katsayısının -1 olması durumunda varlıkların verimleri arasında tam ters yönde bir ilişki söz konusudur. Bu durumda portföydeki varlıklardan biri beklenen getiriden belirli oranlarda daha fazla getiri sağladığında, diğeri beklenen getiriden eşit oranlarda daha az getiri sağlamaktadır.

(1.18) ile verilen risk ifadesinde $\rho = -1$ yazılırsa risk formülü

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2 - 2x_A(1-x_A)\sigma_A\sigma_B \right]^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_p &= \left[(x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_p &= |x_A\sigma_A - (1-x_A)\sigma_B| \quad (1.20)\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu durumda (A) varlığına değişik ağırlıklar verilerek oluşturulabilecek portföyler beklenen getiri risk ekseninde Şekil 1.4'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.4 Tam Negatif Korelasyon Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki

Şekilden de görüldüğü gibi, tam negatif korelasyon durumunda oluşturulabilecek portföylerin riski, aynı ağırlıklar verilerek tam pozitif korelasyon durumunda oluşturulan portföylerin riskinden daha düşüktür. Varlıkların arasında negatif korelasyon bulunduğu anda, bu varlıklardan oluşan portföylerin riski minimum değerini alır. Yani çeşitlendirme ile en fazla risk düşüşü, getiriler arasında tam negatif korelasyon olduğu durumda sağlanır. Bu yüzden AO ve OB doğruları (A) ve (B) varlıklarından oluşan portföylerin risklerinin alt sınırıdır. Böylece, korelasyon katsayısı -1 ile +1 arasında bir değer aldığı anda bu iki varlıktan oluşturulabilecek tüm portföyler beklenen getiri risk ekseninde AOB üçgenin sınırları içerisinde kalacaktır.

Varlıkların getirileri arasında tam negatif korelasyon bulunduğu anda bu iki varlıktan riski sıfır olan bir portföy oluşturulabilir. Riski sıfır olan portföyün ağırlıkları (1.20) ile verilen ifade sıfıra eşitlenerek bulunur.

$$|x_A \sigma_A + (1-x_A) \sigma_B| = 0$$

$$x_A \sigma_A + (1-x_A) \sigma_B = 0$$

$$x_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

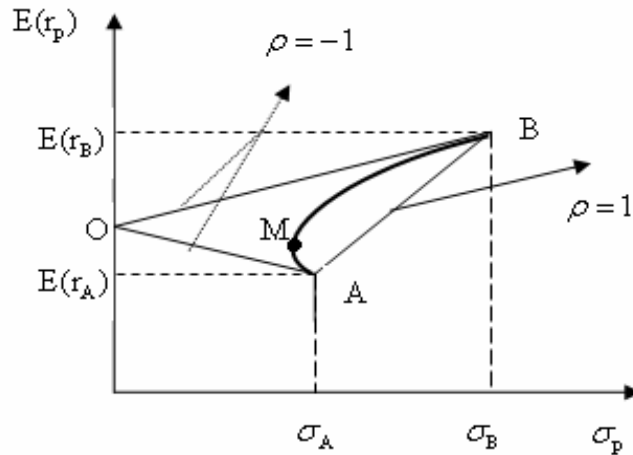
1.3.3.3 Korelasyon Katsayısının Sıfır Olması Durumu

İki riskli varlığın getirileri arasındaki korelasyonun sıfır olması, varlıkların getirileri arasında herhangi bir ilişkinin olmadığı anlamına gelir. Bu durumda çeşitlendirme ile risk azalışı sağlanabilir ve bu menkul kıymetlerin her birinden daha az riskli bir portföy oluşturulabilir.

(1.18) ile verilen ifadede $\rho_{AB} = 0$ yazılırsa risk formülü aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\sigma_p = \left[x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.21)$$

Bu durumda (A) ve (B) varlıklarından oluşturulabilecek portföyler beklenen getiri risk ekseninde şekil 1.5'te gösterildiği gibi bir eğri oluşturmaktadır.



Şekil 1.5 Korelasyon Katsayısının Sıfır Olması Durumunda Portföyün Beklenen Getirisi ve Riski Arasındaki İlişki

Kaynak: Jack Clark Francis, **Investment Analysis and Management**, 5th ed., McGrawHill, New York, 1991, p. 239

Şekilde M noktası bu iki varlıktan oluşturulabilecek minimum riskli portföyü göstermektedir. Bu portföyün ağırlıkları (1.21) ile verilen ifadenin x_A 'ya göre türevini sıfıra eşitleyerek bulunabilir.

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial x_A} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{2x_A \sigma_A^2 - 2\sigma_B^2 + 2x_A \sigma_B^2}{x_A^2 \sigma_A^2 + (1-x_A)^2 \sigma_B^2} = 0$$

$$2x_A \sigma_A^2 - 2\sigma_B^2 + 2x_A \sigma_B^2 = 0$$

Yukarıdaki eşitlikten x_A çekildiğinde varlıkların minimum riskli portföy içerisindeki ağırlıkları bulunur.

$$x_A = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad x_B = 1 - x_A = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Şekilden de görüldüğü dibi, (A) varlığının portföy içerisindeki ağırlığı azaldıkça, önce portföyün beklenen getirisi artmakta riski ise azalmaktadır. $x_A = \sigma_B^2 / (\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$ olduğunda (M noktası) risk minimum olmakta, bu noktadan sonra A varlığının portföy içerisindeki ağırlığı arttıkça, portföyün hem beklenen getirisi hem de riski artmaktadır.

Buraya kadar iki varlığın getirileri arasındaki korelasyon katsayısının (1), (-1), ve sıfır olma durumlarına göre bu varlıklardan oluşan portföylerin beklenen getirisi ve riski incelenmiştir. Özetlenecek olursa, iki varlığın beklenen getirileri ve riskleri verildiğinde, varlıklar arasındaki korelasyon katsayısı düştükçe, bu varlıklardan oluşan bir portföyün beklenen getirisi sabit kalırken riski düşmektedir. Bu da portföyde aralarında düşük korelasyon bulunan varlıklara yer verilerek beklenen getiriden feda etmeksizin riskin düşürülebileceği anlamına gelmektedir.

etkin portföylerden oluşan küme ise “etkin sınır” olarak adlandırılır. Etkin olmayan portföyler hiçbir yatırımcı tarafından tercih edilmeyeceği için, yatırım kararı alınırken bu portföylerin değerlendirilmesine gerek kalmamaktadır. Ortalama Varyans Modeli etkin olmayan portföyleri eleyerek yatırımcılara etkin portföyler arasından kendi optimal portföylerini seçme olanağı sağlamaktadır.⁴³

Şekil 1.6’da (V) ve (Z) noktaları sırasıyla beklenen getirisi en yüksek ve en düşük portföyleri göstermektedir. Değişik beklenen getiri düzeyleri için minimum riske sahip portföyler “minimum varyans portföyler” olarak adlandırılır (şekilde VZ eğrisi). Minimum varyans portföyler içerisinde riski en düşük olan portföy “global minimum varyans” portföy olarak adlandırılır.⁴⁴ Beklenen getirileri global minimum varyans portföyün beklenen getirisinden düşük olan minimum varyans portföyler (YZ kısmı) ikinci koşulu sağlamadıklarından etkin değildirler. Minimum varyans portföylerin global minimum varyans portföyün üzerindeki kısmı (YV eğrisi) etkin sınırı göstermektedir.

Etkin sınır her zaman Şekil 1.6’da gösterildiği gibi konkavdır. Herhangi iki etkin portföyden değişik ağırlıklar verilerek oluşturulabilecek portföyler, beklenen getiri risk ekseninde bu iki portföyü birleştiren doğrunun sağında kalamayacağından etkin sınır üzerinde konveks bir bölge olamaz.

Markowitz etkin portföylerin belirlenmesini bir optimizasyon problemi çerçevesinde ele almıştır. Oluşturulan modelde amaç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik}$$

Standart Markowitz modelinde üç kısıt bulunmaktadır. Bunlardan birincisi hedeflenen getiri düzeyinin ($E(r_p^*)$) sağlanmasıdır.

$$\sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = E(r_p^*)$$

⁴³ Alexander **a.g.e.** , p. 149

⁴⁴ Haugen, **a.g.e.** , s. 95

Modelde ikinci kısıt, menkul kıymetlerin portföy içerisindeki ağırlıklarının toplamının bir'e eşit olmasıdır.

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

Üçüncü kısıt, menkul kıymetlerin portföy içerisindeki ağırlıklarının negatif olmamasıdır. Bu kısıt da eklendiğinde aşağıdaki genel model elde edilir.⁴⁵

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik} \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = E(r_p^*) \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Model, beklenen getiri kısıdı dikkate alınmadan çözüldüğünde yatırım fırsatları kümesi içerisinde riski en düşük portföyün, yani global minimum varyans portföyün ağırlıkları belirlenir. Daha sonra modelin global minimum varyans portföyün beklenen getirisinden daha büyük beklenen getiri değerleri için her defa tekrar çözülmesi ile etkin portföylerin ağırlıkları ve böylece etkin sınır belirlenir.

Modelde amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin, yani menkul kıymetlerin portföy içerisindeki ağırlıklarının kuadratik fonksiyonu, kısıtlar ise bu değişkenlerin doğrusal fonksiyonları olduğundan, model kuadratik programlama problemidir. Bu modelin ve bu bölümde açıklanacak olan diğer modellerin matematiksel olarak nasıl çözülebileceği ikinci bölümde ele alınacaktır.

⁴⁵ Aydın Ulucan, **Portföy Optimizasyonu**, Siyasal Kitabevi, Ankara, 2004, s.19

1.3.5. Açığa Satışın Olması Durumunda Etkin Sınır

Açığa satış, sahip olunmayan menkul kıymetlerin ödünç alınmak suretiyle satışdır.⁴⁶ Eğer yatırımcı bir menkul kıymetin fiyatının düşeceğini bekliyorsa, söz konusu menkul kıymete negatif tutarda sahip olmak ister. Yatırımcı bunu sahip olmadığı bir menkul kıymeti ödünç almak suretiyle bugünkü fiyattan satarak gerçekleştirebilir. Yatırımcının beklentisi doğru çıkarsa daha önce yüksek fiyattan sattığı menkul kıymeti düşük fiyattan alarak geri verecek ve alım fiyatı ile satış fiyatı arasındaki fark kadar kar edecektir. Aksi durumda ise zarar edecektir.

Standart Markowitz modelinde yatırımcıların açığa satış olanağının olmadığı varsayılmaktadır. Açığa satış işlemi Ortalama Varyans Modeli'ne Black Fischer tarafından modeldeki karar değişkenlerinin negatif olmaması koşulunun kaldırılması şeklinde dahil edilmiştir.⁴⁷ Bu durumda herhangi bir menkul kıymetin portföy içerisindeki ağırlığının negatif olması, söz konusu varlığın açığa satıldığı anlamına gelmektedir. Açığa satışı içeren model aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik} \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = E(r_p^*) \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{aligned}$$

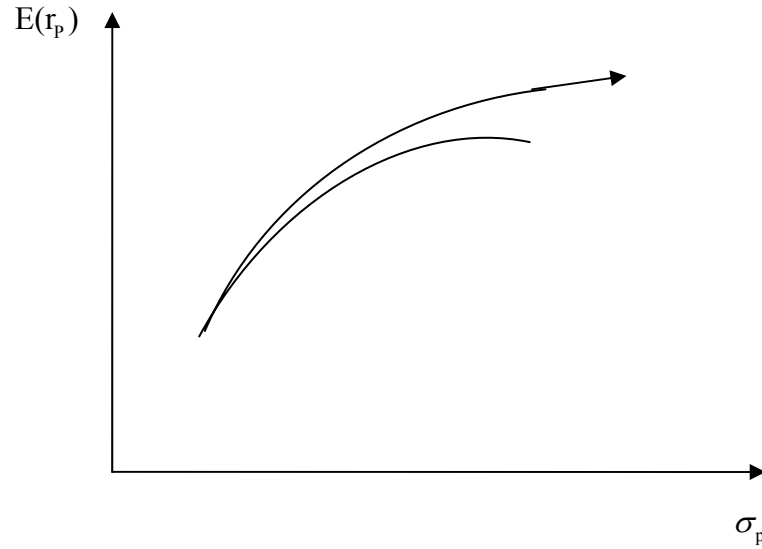
Açığa satışın modele bu şekilde dahil edilmesi, açığa satışın miktarı ile ilgili herhangi bir kısıtlamanın olmadığı, ödünç alınan menkul kıymetlerin karşılığında herhangi bir ücretin ödenmediği, teminat gerekmediği ve açığa satıştan elde edilen gelirin tamamının diğer menkul kıymetlerin alınmasında kullanılabildiği varsayımlarına dayanmaktadır. Yatırımcılar böyle bir açığa satış olanağına sahip olduklarında, her beklenen getiri düzeyinde Markowitz etkinlik sınırı üzerindeki

⁴⁶ Muharrem Karşlı, **Sermaye Piyasası Borsa Menkul Kıymetler**, Alfa Basım Yayın, İstanbul, 2003, s. 592

⁴⁷ Lee, **a.g.e.**, s.228

portföylere kıyasla daha düşük riskli portföyler oluşturabilirler. Ayrıca açığa satış miktarı ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmadığında, yatırımcı beklenen getirisi düşük olan menkul kıymetleri açığa satıp elde ettiği geliri beklenen getirisi yüksek olan menkul kıymetlere yatırarak portföyünün beklenen getirisini sınırsız olarak artırabilir. Bu durumda portföyün riski de beklenen getiri ile birlikte artar. Şekil 1.7’de açığa satışın olduğu ve olmadığı durumda etkin sınır aynı beklenen getiri risk ekseninde gösterilmiştir. Şekilde üstteki eğri açığa satışın olduğu durumda etkin sınırı göstermektedir.

Açığa satışa izin verilmesi durumunda da etkin sınır, daha önce belirtilen nedenlerden dolayı beklenen getiri risk ekseninde konkav bir eğri olacaktır.



Şekil 1.7 Açığa Satışın Olduğu ve Olmadığı Durumda Etkin Sınır

Kaynak: Cheng R. Lee, Joseph E. Finnerty, Donald H. Wort, **Security Analysis and Portfolio Management**, Scott Foresman and Company, 1990, p.229

1.3.6 Risksiz Borç Alma ve Verme Olanaklarının Olması Durumunda Etkin Sınır

Markowitz yaklaşımında (N) sayıda riskli menkul kıymetin olduğu durum ele alınmakta ve yatırımcıların risksiz faiz üzerinden borç alma ve borç verme

olanaklarının olmadığı varsayılmaktadır. Ortalama Varyans Modeli risksiz varlığı da kapsayacak şekilde James Tobin tarafından genişletilmiştir.⁴⁸

Risksiz varlık, sağlayacağı getiri önceden kesin olarak bilinen varlıktır. Bu varlığın getirisinin değişkenlik göstermesi, yani beklenen getiriden farklı bir getiri sağlaması söz konusu değildir. Devletin borçlanmadan doğan yükümlülüklerini karşılayamama olasılığının ve enflasyonun olmadığı varsayımı altında hazine bonusu, risksiz varlık olarak kabul edilmektedir. Fakat vadesi yatırımcının yatırım dönemi ile aynı olmayan hazine bonusu yatırımcı için tamamen risksiz bir varlık değildir. Örneğin, yatırım dönemi üç ay olan bir yatırımcının vadesine dört ay kalan hazine bonusu satın aldığını düşünelim. Faiz oranındaki öngörülemez değişimler hazine bonosunun piyasa fiyatını etkileyeceğinden yatırımcı üç ay sonra hazine bonosunu hangi fiyattan satacağını önceden kesin olarak bilemez. Bu durumda hazine bonusu faiz oranı riski taşımaktadır ve dolayısıyla risksiz bir varlık değildir. Yatırımcı vadesi yatırım döneminden kısa olan hazine bonosuna yatırım yaptığında ise yeniden yatırma oranı riski ile karşı karşıya kalacaktır. Bu varlık yatırımcı için yalnız vadesi yatırım dönemi ile aynı olduğunda risksiz bir varlıktır.⁴⁹

Risksiz faiz üzerinden borç verme ve sınırsız borçlanmanın olanaklı olduğu durumda, yatırımcı parasının tamamını riskli varlıklara yatırabileceği gibi, bu varlıklarla risksiz varlığın herhangi bir kombinasyonuna da yatırabilir veya risksiz faiz üzerinden istediği kadar borçlanarak eldeki parayla birlikte riskli varlıklara yatırabilir. Bu şekilde oluşturulan, yani risksiz varlık içeren portföyün beklenen getirisi ve riski aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E(r_p) = x_f r_f + (1 - x_f) E(r_r) \quad (1.22)$$

$$\sigma_p = \sqrt{x_f^2 \sigma_f^2 + (1 - x_f)^2 \sigma_r^2 + 2x_f(1 - x_f) \rho_{fr} \sigma_f \sigma_r} \quad (1.23)$$

İfadelerde,

$E(r_p)$ = Portföyün beklenen getirisini,

⁴⁸ James Tobin, "Liquidity Preferences as Behavior Toward Risk", **Review of Economic Studies**, Vol XXV, Feb, 1958, pp.65-86

⁴⁹ Alexander, **a.g.e.**, p. 170

x_f = Risksiz varlığın portföy içerisindeki ağırlığını,
 r_f = Risksiz faiz oranını,
 $E(r_r)$ = Riskli varlığın (veya portföyün) beklenen getirisini,
 σ_r = Riskli varlığın riskini,
 σ_f = Risksiz varlığın riskini,
 ρ_{fr} = Risksiz varlıkla riskli varlık arasındaki korelasyon katsayısını

göstermektedir.

Tanım gereği risksiz varlığın varyansı ve riskli varlıkla arasındaki kovaryans sıfırdır.

$$\sigma_f = 0 \Rightarrow \sigma_{fr} = \rho_{fr} \sigma_f \sigma_r = 0$$

Bu ifadeler (1.23)'de yerine yazılırsa, risk formülü

$$\sigma_p = \sqrt{(1-x_f)^2 \sigma_r^2}$$

$$\sigma_p = (1-x_f) \sigma_r \quad (1.24)$$

şekline dönüşür.

Görüldüğü gibi, risksiz varlığın portföyün riskine hiçbir katkısı bulunmamaktadır. Yatırımcı riskli portföyle risksiz varlığın herhangi bir kombinasyonuna yatırım yaptığında parasının sadece riskli portföye yatırdığı kısmını riske etmiş olacaktır. Bu yüzden risksiz varlık içeren portföyün riski, riskli varlıkların riski ile bu varlıkların portföy içerisindeki ağırlığının çarpımına eşittir.

(1.24) ile verilen ifade x_f 'ye göre çözülürse

$$1 - x_f = \frac{\sigma_p}{\sigma_r} \quad x_f = 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_r}$$

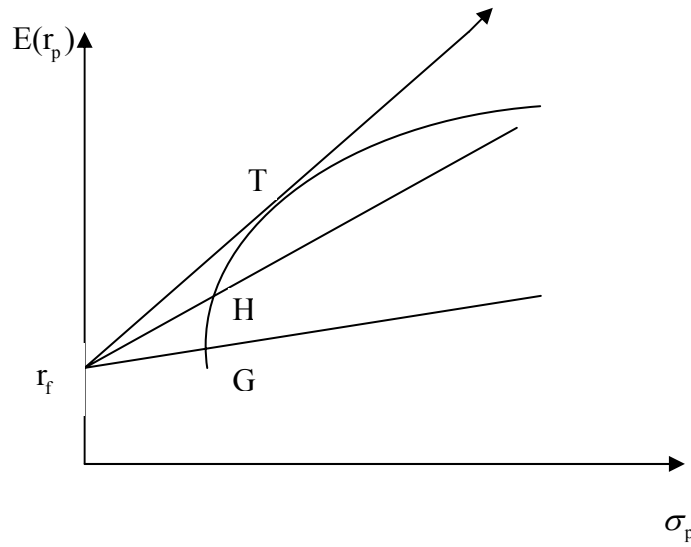
ve (1.22) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$E(r_p) = (1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_r})r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_r}E(r_r)$$

$$E(r_p) = r_f + \frac{(E(r_r) - r_f)}{\sigma_r} \sigma_p$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki eşitlik portföyün beklenen getirisi ile riski arasında doğrusal bir ilişki olduğunu göstermektedir.

Şekil 1.8 yatırımcının parasının bir kısmını risksiz varlığa yatırarak veya risksiz faiz üzerinden borçlanarak eldeki parayla birlikte etkin sınır üzerindeki değişik portföylere yatırarak oluşturabileceği kombinasyonları göstermektedir.



Şekil 1.8 Risksiz Varlıkla Değişik Etkin Portföylerin Kombinasyonları

Kaynak: Erdiñ Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları No: 40, İstanbul, 2004, s. 57

Yatırımcı, belirli bir risk düzeyinde beklenen getirisi maksimum olan portföylerden birini tercih edeceğinden, eğimi maksimum olan, yani (r_f T) doğrusu üzerindeki portföyleri yatırım uzayındaki tüm diğer portföylere tercih edecektir. Başka bir deyişle, bu doğru risksiz faiz üzerinden borç verme ve sınırsız borç almanın olanaklı olduğu durumda etkin sınırı göstermektedir. Bu doğrunun (r_f) ile

(T) noktaları arasındaki parçası risksiz varlıkla (T) portföyünden oluşan kombinasyonları, (T) noktasının sağında kalan kısmı risksiz faiz oranı üzerinden borçlanıp (T) portföyüne yatırılarak oluşturulabilecek kombinasyonları temsil etmektedir. Görüldüğü gibi, risksiz varlık analize dahil edildiğinde Markowitz etkinlik sınır üzerindeki portföylerden sadece bir tanesi (T portföyü) etkindir. Bu durumda yatırımcılar risk getiri tercihlerine bakılmaksızın riskli varlıkların aynı kombinasyonunu tercih ederler.

Etkin sınır bir doğru olduğundan, bu doğru üzerindeki herhangi bir portföyün ağırlıkları belirlendikten sonra portföydeki risksiz varlığın oranı $-\infty$ ile 1 arasında değiştirilerek tüm etkin portföyler belirlenebilir. Etkin sınır üzerindeki bir portföyün ağırlıkları aşağıdaki şekilde verilen modelin herhangi bir $E(r_p^*) > r_f$ değerine göre çözülmesi ile belirlenebilir.⁵⁰

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \sigma_{ik} \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) + x_f r_f = E(r_p^*) \\ & \sum_{i=1}^N x_i + x_f = 1 \\ & x_f < 1 \quad x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, N \end{aligned}$$

1.4 Fayda Analizi

Risk altında yatırım kararının alınması iki aşamada ele alınabilir. Bunlardan birincisi yatırım olanaklarının belirlenmesi, ikincisi ise alternatif yatırımlar içerisinde optimum olanın seçilmesidir.⁵¹ Buraya kadar, yatırım olanakları tartışılmıştır ve belirli varsayımlar altında tüm yatırımcıların etkin sınır üzerindeki

⁵⁰ Ulucan, a.g.e. , s. 43

⁵¹ Eton, a.g.e. , s.210

portföylerden birine yatırım yapacağı ifade edilmiştir. Burada ise yatırımcı davranışları ele alınacak ve yatırımcının etkin portföyler içerisinde hangisine yatırım yapacağına nasıl karar vereceği tartışılacaktır.

1.4.1 Fayda Fonksiyonu

Fayda teorisine göre yatırımcılar yatırım olanakları içerisinde beklenen faydası maksimum olan yatırım alternatifini seçerler. Buna göre, optimal yatırımın belirlenebilmesi için her yatırımla ilgili olasılık dağılımının ve fayda fonksiyonun bilinmesi gerekir. Yatırım dönemi tek bir dönem olduğunda, yatırımcının fayda fonksiyonu yatırımcının servetinin dönem sonu değerinin ve yatırımın getirisinin artan bir fonksiyonudur.⁵²

$$u=U(W) \quad \text{veya} \quad u=U(r)$$

Burada,

u = Yatırımcının faydasını,

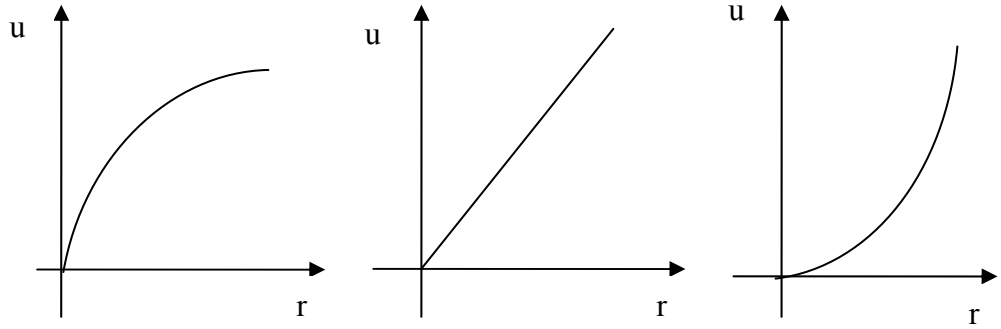
W = Yatırımcının servetinin dönem sonu değerini göstermektedir.

Yatırımcının fayda fonksiyonu servetin veya getirinin konkav, konveks ve doğrusal fonksiyonu olabilir. Fayda fonksiyonu konveks olan yatırımcılar risk seven yatırımcılar olarak bilinir. Bu tür yatırımcılar aynı beklenen getiri düzeyinde değişkenliği daha fazla olan yatırım alternatifini tercih ederler. Başka bir deyişle, risk seven yatırımcıların fayda fonksiyonun beklenen değeri, hem beklenen getirinin hem riskin artan fonksiyonudur. Bu yüzden risk seven yatırımcılar için çeşitlendirme uygun bir strateji değildir.

Fayda fonksiyonu doğrusal olan yatırımcılar riske karşı kayıtsız yatırımcılar olarak bilinir. Bu tip yatırımcılar sadece beklenen getiriye göre karar alırlar ve alternatif yatırımlar içerisinde beklenen getirisi maksimum olanı seçerek beklenen faydalarını maksimize ederler. Dolayısıyla riskten kaçınan yatırımcıların çeşitlendirme yaparak riski düşürmelerine gerek yoktur.

⁵² Francis a.g.e. ,s. 593

Fayda fonksiyonu konkav olan yatırımcılar ise riskten kaçınan yatırımcılar olarak adlandırılır. Riski seven ve riske karşı kayıtsız kalan yatırımcı tipi azdır. Yatırımcıların tipik özellikleri riskten kaçınan olmalarıdır. Bu tip yatırımcıların fayda fonksiyonunun beklenen değeri beklenen getirinin artan, riskin ise azalan fonksiyonudur.



a) Riskten kaçınan

b) Riske kayıtsız

c) Riski seven

Şekil 1.9 Fayda Fonksiyonları

Kaynak: Cheng R. Lee, Joseph E. Finnerty, Donald H. Wort, **Security Analysis and Portfolio Management**, Scott Foresman and Company, 1990, p.214

Getirilerin normal dağılması durumunda her bir olasılık dağılımı beklenen getiri ve standart sapma ile karakterize edilebilir. Bu durumda yatırımcı tüm olasılık dağılımını değerlendirmek yerine, sadece beklenen getiri ve standart sapmaya dayanarak beklenen faydasını maksimize edebilir. Başka bir deyişle, getirilerin normal dağılması durumunda riskten kaçınan yatırımcının beklenen faydası beklenen getirinin artan, standart sapmanın azalan bir fonksiyonudur. Bu yüzden riskten kaçınan yatırımcı, belirli bir beklenen getiri düzeyinde standart sapması minimum ve belirli bir standart sapma düzeyinde beklenen getirisi maksimum olan portföylerden birine, yani etkin bir portföye yatırım yaparak beklenen faydasını maksimize eder.

Olasılık dağılımı normal olmasa dahi, yatırımcının fayda fonksiyonu kuadratik olduğunda beklenen fayda, beklenen getirinin artan ve varyansın azalan fonksiyonudur. Bu matematiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.⁵³

⁵³ Eton, a.g.e. s.220

$$u(r)=r-br^2 \quad r < \frac{1}{2b}, b>0 \Rightarrow E(u(r))=E(r)-bE(r^2)$$

$$E(r^2)=\sigma^2 + [E(r)]^2 \text{ olduğundan}$$

$$E[u(r)] = E(r)-b[\sigma^2 + (E(r))^2]$$

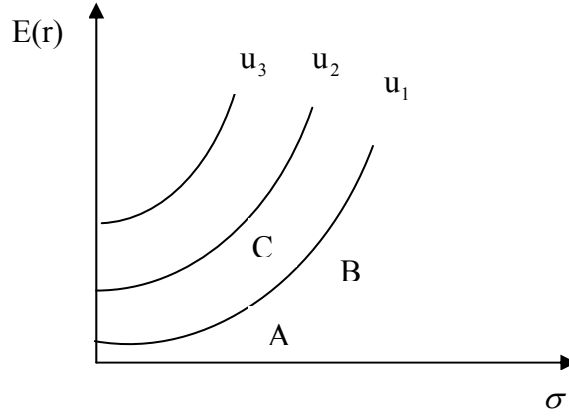
Görüldüğü gibi, getiriler normal dağıldığında veya yatırımcının fayda fonksiyonu kuadratik olduğunda, yatırımcı kendi optimal portföyünü beklenen getiri ve riske göre belirler ve beklenen faydasını maksimize eder. Ancak bu, getirilerin normal dağılmadığı ve yatırımcının fayda fonksiyonunun kuadratik olmadığı durumda Ortalama Varyans Modeli'nin yanlış sonuçlar vereceği anlamına gelmemektedir. Kroll, Levy ve Markowitz tarafından yapılan bir araştırmada⁵⁴, getirilerin normal dağılmaması durumunda da riskten kaçınan bir yatırımcının sadece beklenen getiri ve riske dayanarak beklenen faydasını yaklaşık olarak maksimize edebileceği ortaya konulmuştur.

1.4.2 Kayıtsızlık Eğrileri ve Optimal Portföyün Belirlenmesi

Herhangi bir yatırımcının fayda fonksiyonu verildiğinde, söz konusu yatırımcının aralarında kayıtsız kalacağı sınırsız sayıda $(E(r), \sigma)$ kombinasyonu belirlenebilir. Bu kombinasyonların beklenen getiri-standart sapma ekseninde gösterilmesi ile yatırımcının kayıtsızlık eğrileri elde edilebilir. Şekil 1.10'da riskten kaçınan hipotetik bir yatırımcının kayıtsızlık eğrileri gösterilmektedir.

Şekilde birinci kayıtsızlık eğrisi üzerindeki (A) ve (B) portföylerinin beklenen getiri ve riskleri farklı olmakla birlikte, aynı kayıtsızlık eğrisi üzerinde yer aldıklarından yatırımcı için beklenen faydaları eşittir. Aynı kayıtsızlık eğrisi üzerinde yer alan tüm portföyler yatırımcının eşit düzeyde istek duyduğu portföylerdir. Şekilde ikinci kayıtsızlık eğrisi daha yüksek beklenen fayda düzeyini temsil ettiğinden yatırımcı bu eğri üzerinde yer alan portföyleri birinci kayıtsızlık eğrisi üzerindeki portföylere tercih eder.

⁵⁴ Yoram Kroll, Haim Levy, Harry M. Markowitz, "Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization", **Journal of Finance**, Vol. 39, No. 1, March 1984, pp. 47-61



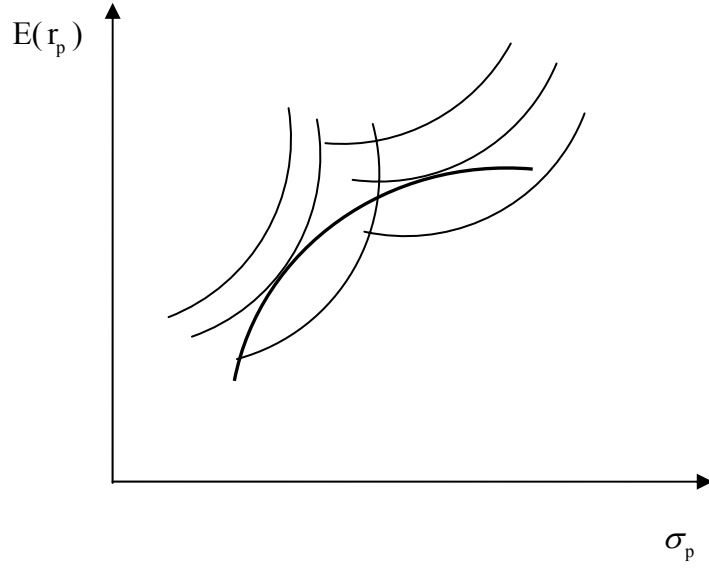
Şekil 1.10 Riskten Kaçınan Yatırımcının Kayıtsızlık Eğrileri

Kaynak: Jack Clark Francis, **Investment Analysis and Management**, 5th ed., McGrawHill, New York, 1991, p. 604

Riskten kaçınan yatırımcının kayıtsızlık eğrileri, Şekil 1.10’da gösterildiği gibi her zaman konvektir. Kayıtsızlık eğrilerinin eğimi yatırımcının risk-getiri tercihini gösterir. Yatırımcının riskten kaçınma düzeyi ne kadar yüksekse kayıtsızlık eğrileri de o kadar dik olur.

Optimum portföy yatırımcının beklenen faydasını maksimum kılan portföydür. Bu portföy yatırımcının kayıtsızlık eğrisinin etkin sınıra teğet olduğu noktadaki portföydür.

Kayıtsızlık eğrileri yardımıyla optimal portföy seçimi grafik olarak Şekil 1.11 gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, riskten daha fazla kaçınan, yani kayıtsızlık eğrileri daha dik olan yatırımcı, riski ve aynı zamanda beklenen getirisi daha düşük olan bir portföyü tercih ederken, riskten daha az kaçınan bir yatırımcı beklenen getirisi ve riski daha büyük olan bir portföyü tercih edecektir.



Şekil 1.11 Optimal Portföy Seçimi

Kaynak: Erdiñ Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**,
Derin Yayınları No: 40, İstanbul, 2004, s. 32

2. DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

Ortalama Varyans Modeli'ne göre riskten kaçınan rasyonel bir yatırımcı, etkin sınır üzerindeki portföylerden birine yatırım yapar. Yatırımcının etkin portföylerden hangisini tercih edeceği ise kendi risk-getiri tercihinine göre belirlenecektir. Optimal portföyün belirlenebilmesi için, öncelikle etkin portföylerin beklenen getirilerinin ve risklerinin, ayrıca her etkin portföyde hangi varlıkların hangi oranlarda yer aldığıının belirlenmesi gerekir.

Etkin portföylerin belirlenmesinde kuadratik programlamadan yararlanılabilir. Kuadratik programlama doğrusal olmayan programlama türlerinden biridir. Bu bölümde doğrusal olmayan programlama problemleri ve bu problemlerin çözüm teknikleri ele alınacak, ayrıca bu çözüm teknikleri ile etkin portföylerin nasıl belirlenebileceği tartışılacaktır.

2.1 Doğrusal Olmayan Programlama Problemi

Doğrusal olmayan programlama problemi genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \max (\text{veya min}) \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{kısıtlar} \quad & \\ & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) (\leq, = \text{veya} \geq) b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) (\leq, = \text{veya} \geq) b_2 \\ & \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) (\leq, = \text{veya} \geq) b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ problemin amaç fonksiyonu, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) (\leq, = \text{veya} \geq) b_i$, $i=1, 2, \dots, m$ ise kısıtlayıcılar olarak adlanır.

Hiçbir kısıtlayıcısı olmayan doğrusal olmayan probleme “kısıtlanmamış doğrusal olmayan programlama problemi” denir.⁵⁵

Bütün kısıtları sağlayan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarına uygun çözüm, bütün mümkün uygun çözümlerin oluşturduğu sete ise uygun çözüm bölgesi denir. Bütün mümkün çözümler için $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şartını sağlayan uygun $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ noktasına ise optimal çözüm denir. (minimizasyon için $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Eğer modeldeki $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ fonksiyonlarının hepsi doğrusalsa, problem doğrusal programlama problemi, bu fonksiyonlardan en az biri doğrusal değilse, problem doğrusal olmayan programlama problemi olarak adlandırılır.⁵⁶ Ortalama Varyans Modeli’nde amaç fonksiyonu doğrusal olmadığından problem bir doğrusal olmayan programlama problemidir.

Doğrusal programlama problemlerinden farklı olarak, doğrusal olmayan programlama problemlerini çözebilen bir algoritma bulunmamaktadır. Bununla birlikte, amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılarla ilgili bazı varsayımlar yaparak bu tür problemlerin bazıları çözülebilmektedir. Burada doğrusal olmayan programlama problemleri, hiçbir kısıdın olmaması, bütün kısıtların eşitlik olması ve eşitsizlik kısıtlarının da olması durumuna göre incelenecektir. Bunun için önce doğrusal olmayan programlama ile ilgili bazı kavramların incelenmesi gerekmektedir.

2.2 Konkavlık ve Konvekslik

Konkavlık ve konvekslik kavramları doğrusal olmayan programlamada önemli bir yere sahiptir. Başlangıçta amaç fonksiyonun ve çözüm bölgesinin konkav mı, yoksa konveks mi olduğunun bilinmesi, problemin çözümünü önemli ölçüde basitleştirmektedir. Bu noktada sırasıyla fonksiyonlar ve setler için bu kavramlar açıklanmaktadır.

⁵⁵ Wayne L. Winston, **Operation Research Applications and Algorithms**, 3th ed., Duxbury Press, USA, 1994, p. 639.

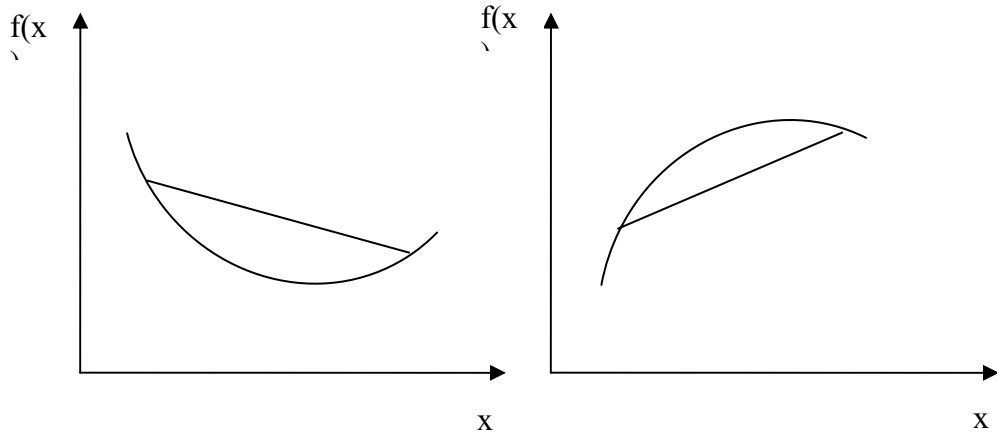
⁵⁶ Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. M. Shetty, **Nonlinear Programming**, John Wiley and Sons Inc. , 1993, p. 2

2.2.1 Konkav ve Konveks Fonksiyonlar

$f(x)$ fonksiyonu, S konveks kümesinde bulunan herhangi x' ve x'' değerleri için,

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leq \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x''), \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.2)$$

ise, $f(x)$ fonksiyona “konveks fonksiyon” adı verilir. Bu koşulda “ $\leq$ ” yerine “ $<$ ” geçerliyse, $f(x)$ fonksiyonu tam konveks olur.⁵⁷ Yine bu koşulda “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” geçerliyse, $f(x)$ fonksiyonu konkav ve “ $>$ ” geçerliyse tam konkav fonksiyon olur. Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonunun herhangi iki noktasını birleştiren doğru, $y=f(x)$ eğrisinin üzerinde değilse (altındaysa), $f(x)$ fonksiyonunu konkav (tam konkav), altında değilse (üzerinde ise) konveks (tam konveks) adlandırılır.



a) tam konveks fonksiyon

b) tam konkav fonksiyon

Şekil 2.1 Konveks ve Konkav Fonksiyonlar

Kaynak: Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Introduction to Operation Research**, 7th ed. , McGraw Hill, 2001, p. 663

⁵⁷ Paul A. Jensen, Jonathan F. Brad, **Operations Research Models and Methods**, John Wiley and Sons Inc. , 2003, p. 321

Tek değişkenli bir fonksiyonun konkav mı yoksa konveks mi olduğu onun ikinci dereceden turevleri ile belirlenir. Bir fonksiyon farklı bölgelerde konveks veya konkav olabileceğinden belirli bir bölgenin alınması daha anlamlı olmaktadır.

$f(x)$ fonksiyonu S konveks kümesinde tanımlı ve tüm $x \in S$ 'lerde ikinci dereceden turevi olan fonksiyon olsun. Eğer tüm $x \in S$ 'ler için $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) > 0$) ise, $f(x)$ fonksiyonu S kümesinde konvekstir (tam konvekstir). Eğer tüm $x \in S$ 'ler için $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) ise $f(x)$ fonksiyonu konkavdır (tam konkavdır).⁵⁸

Tek değişkenli fonksiyonlar için yapılan açıklamalar çok değişkenli fonksiyonlar için de genişlendirilebilir.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $S \subset R^n$ konveks kümesinin tüm $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarında tanımlı fonksiyon olsun. Eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu herhangi iki $X' \in S, X'' \in S$ noktaları için,

$$f(\lambda X' + (1-\lambda)X'') \leq \lambda f(X') + (1-\lambda)f(X'') \quad (2.3)$$

koşulunu $0 < \lambda < 1$ aralığında gerçekliyorsa konveks, " $\leq$ " yerine " $\geq$ " geçerliyse konkavdır. Tanımdan da anlaşılabileceği gibi, doğrusal bir fonksiyon hem konveks hem de konkavdır. $f(X)$ fonksiyonu konveks ise $-f(X)$ konkavdır. Aynı şekilde $f(X)$ konkavsa $-f(X)$ konvekstir.

Çok değişkenli bir fonksiyonun konveks mi yoksa konkav mı olduğu Hessian matrisine göre belirlenir. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun ikinci dereceden kısmı turevleri,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i=1, 2, \dots, n \text{ ve } j=1, 2, \dots, n \text{ olmak üzere,}$$

bu fonksiyonun ikinci mertebeden kısmı turevlerinden oluşan $n \times n$ boyutlu

⁵⁸ Winston, **a.g.e.**, p. 656

$$H_{f(X)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matrisine “Hessian matrisi” denir. Hessian matrisinin son (n-k) satır ve sütunun göz ardı edilmesi ile elde edilen k×k boyutlu matrisinin determinantına Hessian matrisinin k. asal minörü adı verilir.⁵⁹

Eğer Hessian matrisinin asal minörler determinantları tüm $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ ’ler için pozitifse (negatif değilse), Hessian matrisinin elde edildiği $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu tam konvektir (konvektir). Bu durumda Hessian matrisinin pozitif definit (pozitif yarı definit) olduğu söylenir.

Eğer Hessian matrisinin k. asal minör determinantlarının değeri k=1, 2, ..., n için $(-1)^k$ işaretine sahipse (veya sıfırsa), $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu tam konkavdır (konkavdır).⁶⁰

2.2.2 Kuadratik Form

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

⁵⁹ A.e., s. 657

⁶⁰ Yılmaz Tulunay, **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları**, İşletme Fakültesi Yayın No:244, İstanbul, 1991, s. 541

verildiğinde,

$$Q(X)=X^TAX=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nx_ix_ja_{ij}$$

fonksiyonu “kuadratik form” olarak adlandırılır.⁶¹ A matrisinin simetrik olduğu düşünülebilir. Çünkü a_{ij} ve a_{ji} elemanları $(a_{ij} + a_{ji})/2$ ile değiştirildiğinde $Q(X)$ fonksiyonunun değeri değişmez.

Yukarıda verilen kuadratik form için şunlar söylenebilir:⁶²

1. Her $X \neq 0$ için $Q(X) > 0$ ise kuadratik form pozitif definittir.
2. Her X için $Q(X) \geq 0$ ise ve $Q(X)=0$ yapan bir $X \neq 0$ varsa, kuadratik form pozitif yarı definittir.
3. $-Q(X)$ pozitif definit ise, kuadratik form negatif definittir.
4. $-Q(X)$ pozitif yarı definit ise, kuadratik form negatif yarı definittir.
5. Yukarıdaki durumlardan hiçbirine uymuyorsa, definit olmayandır.

Kuadratik form pozitif (pozitif yarı) definit olduğunda $Q(X)$ fonksiyonu tam konveks (konveks), negatif (negatif yarı) definit olduğunda ise tam konkav (konkav) fonksiyondur.

Ortalama Varyans Modeli’nde amaç fonksiyonu, yani, portföyün varyansı kuadratik form belirler. Portföyün varyansı negatif olamayacağından bu kuadratik form pozitif yarı tanımlıdır ve dolayısıyla portföyün varyansı, portföyde yer alan varlıkların ağırlıklarının konveks fonksiyonudur.

2.2.3 Konveks Küme

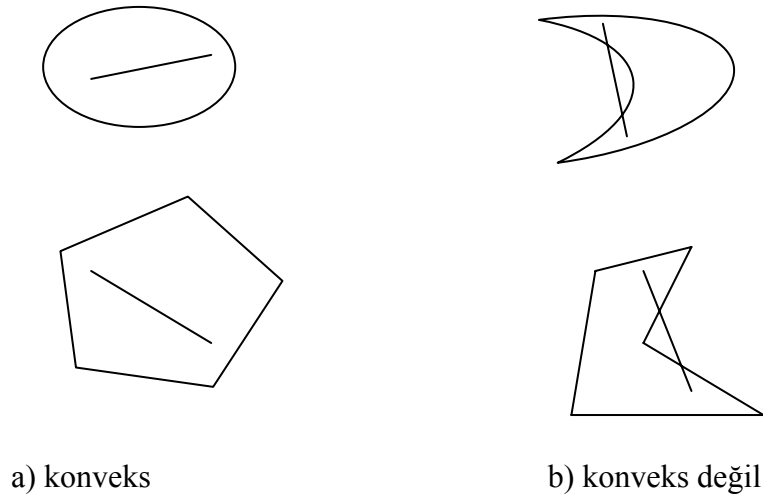
$S \subset R^n$ kümesinin herhangi iki $X' \in S, X'' \in S$ noktasını birleştiren doğru parçası $\lambda X' + (1-\lambda)X''$ $\lambda \in [0, 1]$, S kümesinin içinde kalıyorsa, bu küme

⁶¹ Hamdi A.Taha, **Yöneylem Araştırması**, Çev. Ş. Alp Baray, Şakir Esnaf, Literatür Yayıncılık, 2000, s. 820

⁶² Yılmaz Tulunay, **a.g.e.**, s. 541

konvektir. $X = \lambda X' + (1-\lambda)X''$ $\lambda \in [0, 1]$ noktaları ise X' ve X'' noktalarının doğrusal kombinasyonları adlandırılır.⁶³

Eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konveks bir fonksiyon ise, belirli bir aralıkta bu eğrinin üzerinde bulunan noktalar bir konveks küme oluştururlar. Benzer şekilde, belirli bir aralıkta, konkav bir eğrinin altında bulunan noktalar konveks bir küme oluştururlar.⁶⁴



Şekil 2.2 Konveks ve Konveks Olmayan Küme

$S_1, S_2, \dots, S_n \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri konveksse, bu kümelerin kesişimi de konvektir.

Doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözüm bölgesinin konveks olup olmadığı önemlidir. Uygun çözüm bölgesinin konveks olmaması çözümü zorlaştırabilir.

Portföy seçim modelinde tüm kısıtlar doğrusal olduğundan çözüm bölgesi her zaman konvektir.

⁶³ Bazaraa, **a.g.e.**, p. 34

⁶⁴ Tulunay, **a.g.e.**, s.542

2.3 Kısıt İçermeyen Optimizasyon

Kısıtsız doğrusal olmayan programlama problemi genel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \max (\text{veya min}) \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in & \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bu tip problemlere pratikte sıkça rastlanmamaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi, etkin portföylerin belirlenmesi kısıtlı doğrusal olmayan programlama problemidir. Bununla birlikte, kısıtlanmış problemlerin optimallık koşulları kısıtlanmamış problemlerin optimallık koşullarının genişlendirilmesi ile elde edildiği için, burada kısıtlanmamış problemlerin ekstremumları incelenecek, gerekli ve yeterli koşullar verilecektir.

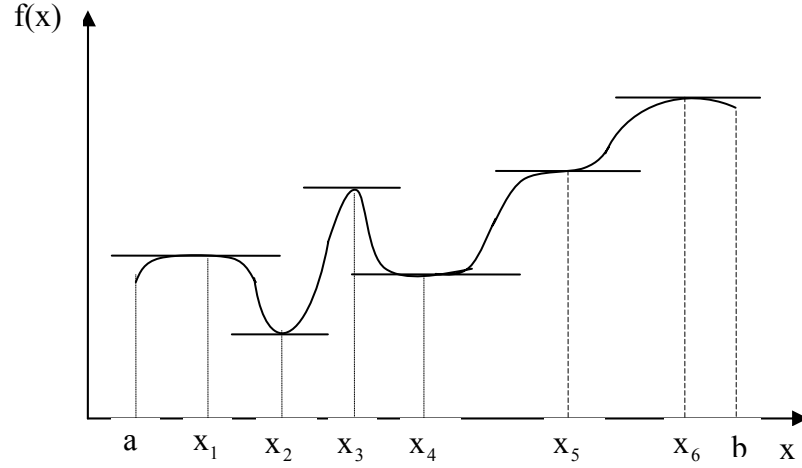
2.3.1 Ekstremumlar

(2.4) ile verilen problemin optimum çözümünün bulunabilmesi için, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun ekstremumlarının belirlenmesi gerekir.

Eğer $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ noktasının öyle bir $N_E(X_0)$ komşuluğu varsa ki tüm $X \in N_E(X_0)$ noktaları için $f(X_0) \leq f(X)$ doğrudur, o zaman X_0 noktası $f(X)$ fonksiyonunun yerel minimumu olarak adlandırılır. Benzer şekilde tüm $X \in N_E(X_0)$ noktaları için $f(X_0) \geq f(X)$ ise, o zaman X_0 noktası söz konusu fonksiyonun yerel maksimumudur.⁶⁵ Başka bir deyişle, X_0 noktasının komşuluğundaki hiçbir noktada fonksiyonun değeri $f(X_0)$ 'dan büyük değilse X_0 noktası bir yerel maksimum, küçük değilse bir yerel minimumdur. Fonksiyonun en küçük (en büyük) değerini aldığı yerel minimum (maksimum) noktaya global veya mutlak minimum (maksimum) denir.

⁶⁵ Bazaraa, a.g.e. , p. 132

Şekil 1.1’de tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında maksimum ve minimumları gösterilmektedir.



Şekil 2.3 Ekstremler

Kaynak: Hamdi A. Taha, **Yöneylem Araştırması**, Çev. Ş. Alp Baray, Şakir Esnaf, Literatür Yayıncılık, 2000, s. 738

Şekilde x_1, x_2, x_3, x_4 ve x_6 noktaları $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarıdır. Bunlardan x_1, x_3 ve x_6 fonksiyonun maksimum noktaları, x_2 ve x_4 ise minimum noktalarıdır.

$$f(x_6) = \max[f(x_1), f(x_3), f(x_6)]$$

olduğundan, $f(x_6)$ global veya mutlak maksimum, $f(x_1)$ ile $f(x_3)$ yerel minimumlardır. Benzer şekilde, $f(x_4)$ yerel minimum, $f(x_2)$ de global minimumdur. x_3 ve x_6 maksimum noktalarından farklı olarak, x_1 noktasının komşuluğunda en az bir noktada fonksiyonun değeri $f(x_1)$ ’e eşittir. Bu bakımdan x_1 zayıf maksimum, x_3 ve x_6 ise güçlü veya kesin maksimum olarak adlandırılır. Benzer şekilde x_4 zayıf minimum, x_2 güçlü minimum tanımlar.

2.3.2 Gerek ve Yeter Koşullar

Şekil 2.1’den görüldüğü gibi, tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun tüm ekstremum noktalarında eğriye çizilen teğet doğruların eğimi sıfıra eşittir. Bu da tüm ekstremum noktalarda fonksiyonun birinci türevinin sıfıra eşit olduğu anlamına gelmektedir. Fonksiyonun birinci türevinin sıfıra eşit olduğu noktalar fonksiyonun “sabit noktaları” olarak adlandırılır. Bununla birlikte, bu özellik x_5 gibi eyer noktalarında da sağlanır. Eğer sıfır eğimli bir nokta ekstremum (maksimum veya minimum) değilse, otomatik olarak eyer noktasıdır.

Böylece, x_0 noktasının birinci dereceden sürekli türevi olan tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktası olması için gerekli koşul, $f'(x)=0$ olmasıdır. Genelde $f'(x)=0$ denkleminin çözülmesi ile birden fazla x_0 bulunur. Bulunan sabit noktaların hangisinin maksimum, hangisinin minimum nokta gösterdiği fonksiyonun ikinci türevlerine göre belirlenir. Ayrıca, bulunan nokta, bir eyer noktası da olabilir.

$f(x)$ fonksiyonun x_0 sabit noktası verildiğinde, $f''(x_0)>0$ ise x_0 bir lokal minimum, $f''(x_0)<0$ ise bir lokal maksimumdur.⁶⁶ $f''(x_0)=0$ olduğunda x_0 bir ekstremum veya bir eyer noktası olabilir. Bu durumda daha yüksek dereceden türevlerin incelenmesi gerekir.

Max (min) $f(x)$ ’in bulunması için tüm lokal maksimum (minimum) noktalarda fonksiyonun değerinin hesaplanması gerekir.

Tek değişkenli fonksiyonlar için yapılan açıklamalar, çok değişkenli fonksiyonlar için genişletilebilir. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ R^n ’de tanımlı, birinci ve ikinci dereceden sürekli türevleri olan bir fonksiyon olsun.

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

⁶⁶ Winston, a.g.e. ,p. 661

ifadelerine, $f(X)$ fonksiyonunun kısmi türevleri denir. Fonksiyonun tüm kısmi türevlerinin sıfır olduğu $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktası, $f(X)$ fonksiyonunun sabit noktası olarak adlandırılır.

$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktasının $f(X)$ fonksiyonun ekstremum noktası olması için gerekli koşul

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

olmasıdır.⁶⁷ Fakat bu koşulun sağlanması X_0 noktasının ekstremum olduğu anlamına gelmez. Çünkü X_0 bir eyer noktası da olabilir. Sabit noktaların hangisinin maksimum veya minimum, hangisinin eyer noktası olduğu Hessian matrisi yardımı ile belirlenir.

X_0 noktasının $f(X)$ fonksiyonunun ekstremumu olması için yeter koşul, $H_{f(x_0)}$ 'in;

- 1) X_0 yerel minimum nokta olduğunda pozitif definit,
- 2) X_0 yerel maksimum olduğunda negatif definit olmasıdır.

Eğer $H_{f(x_0)}$ definit değilse X_0 bir ekstremum olabilir de olmayabilir de ve bu durumda yeterlilik koşulunun çıkarılması epeyce karmaşık hale gelir.⁶⁸

Başlangıçta fonksiyonun konkav mı yoksa konveks mi olduğu biliniyorsa yapılan analizler basitleşecektir. Eğer $f(X)$ fonksiyonu konveks (konkav) ise (2.5) koşulunu gerçekleyen herhangi bir X_0 noktası doğrudan doğruya global minimum (maksimum) gösterecektir. Başka bir deyişle, (2.5) koşulu global minimumun veya maksimumun bulunmasında sadece gerekli koşul değil, aynı zamanda yeterli koşul olacaktır. $f(X)$ fonksiyonu tam konveks (tam konkav) olduğunda ise X_0 noktası kesin global minimum (maksimum) gösterecektir.⁶⁹

⁶⁷ A.e. , p.674

⁶⁸ Taha, a.g.e. , p. 741

⁶⁹ Tulunay a.g.e. , s. 545

2.4 Kısıt Altında Optimizasyon

Bu alt bölümde kısıtlı doğrusal olmayan programlama problemleri ele alınacaktır. Tüm kısıtların eşitlik olması durumunda problemin çözümü için “Lagrange Çarpanları Yöntemi”, eşitsizlik kısıtlarının da bulunması durumu için “Kuhn-Tucker Koşulları” açıklanacaktır.

2.4.1 Lagrange Çarpanları Yöntemi

Tüm kısıtları eşitlik şeklinde olan doğrusal olmayan programlama problemi genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\max (\text{veya min}) \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kısıtlar

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \quad (2.6)$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m$$

Burada, $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ fonksiyonları R^n 'de tanımlı, birinci ve ikinci dereceden sürekli türevleri alınabilen fonksiyonlar olduğunda problemin çözümü için Lagrange çarpanları yöntemi kullanılabilir. Bunun için, önce Lagrange fonksiyonunun oluşturulması gerekir. Bu fonksiyon

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ değerler Lagrange çarpanlarını gösterir. $b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i=1, 2, \dots, m$ koşullarını gerçekleyen herhangi bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olduğundan, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ seti Lagrange fonksiyonu için bir maksimum (minimum) gösterirken, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktası da asıl amaç fonksiyonunun maksimumu (minimumu) olacaktır.⁷⁰ O halde, (2.6) ile verilen problemin çözümüne, Lagrange fonksiyonu maksimize (minimize) edilerek ulaşılabilir.

Lagrange fonksiyonunun tüm kısmi türevleri sıfıra eşitlenirse $n+m$ sayıda eşitlikten oluşan aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & j=1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bu eşitlikler sistemi $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ setinin ekstremum nokta olması için gerekli koşullardır. Bu denklemler sisteminin çözülmesi ile Lagrange fonksiyonunun sabit noktaları bulunur.

Yeterli koşullar ise Sınırlı Hessien matrisi yardımı ile verilir.

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^T & Q \end{pmatrix}$$

$(n+m) \times (n+m)$ ölçülü matris Sınırlı Hessian matrisi olarak adlandırılır.⁷¹ Burada,

⁷⁰ A.e. , s.547

⁷¹ Taha, a.g.e. , s. 759

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$m \times m$ ölçülü sıfır matrisini,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$g_1, g_2, \dots, g_m$ fonksiyonlarının birinci kısmı türevlerinden oluşan $m \times n$ ölçülü matrisi,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

ise Lagrange fonksiyonunun $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerine göre ikinci dereceden kısmı türevlerinden oluşan $n \times n$ ölçülü matrisi göstermektedir.

Lagrange fonksiyonunun $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ sabit noktası ve bu noktada değerlendirilmiş sınırlı Hessian matrisi verildiğinde,

1) Eğer H^B matrisinin $(2m+1)$ 'inci asal minörü ile başlayan son $(n-m)$ asal minör determinantlarının işareti $(-1)^{m+1}$ ile değişiyorsa söz konusu nokta bir maksimum,

2) Eğer H^B matrisinin son $(n-m)$ adet asal minör determinantlarının işareti $(-1)^m$ ile aynı ise, bu nokta bir minimumdur.⁷²

Eğer (6) ile verilen problemde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu konkav (konveks), $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, m$ fonksiyonları ise doğrusalsa, o zaman gerekli koşulları sağlayan $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ noktası optimal çözümdür.⁷³ Başka bir deyişle, bu durumda gerekli koşullar aynı zamanda yeter koşullardır.

2.4.2 Açığa Satışın Olması Durumunda Etkin Portföylerin Belirlenmesi

Açığa satışa izin verilmesi durumunda belirli bir $E(r_p^*)$ beklenen getiri düzeyinde minimum riskli portföyün belirlenebilmesi için,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik} \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = E(r_p^*) \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde verilen minimizasyon probleminin çözülmesi gerekir. Problemdeki kısıtlar eşitlik şeklinde olduğundan, problem Lagrange çarpanları yöntemi ile çözülebilir.

Problemin Lagrange fonksiyonu,

⁷² Taha, **a.e.**, s. 759

⁷³ Winston, **a.g.e.**, s. 685

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik} + \lambda_1 \left[E(r_p^*) - \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) \right] + \lambda_2 \left[1 - \sum_{i=1}^N x_i \right]$$

şeklinde yazılabilir. Lagrange fonksiyonunun $x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2$ 'ye göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1\sigma_{11} + 2x_2\sigma_{12} + \dots + 2x_N\sigma_{1N} - \lambda_1 E(r_1) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1\sigma_{12} + 2x_2\sigma_{22} + \dots + 2x_N\sigma_{2N} - \lambda_1 E(r_2) - \lambda_2 = 0$$

•

•

$$\frac{\partial L}{\partial x_N} = 2x_1\sigma_{1N} + 2x_2\sigma_{2N} + \dots + 2x_N\sigma_{NN} - \lambda_1 E(r_N) - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 E(r_1) + x_2 E(r_2) + \dots + x_N E(r_N) - E(r_p^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + \dots + x_N - 1 = 0$$

doğrusal denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemler sistemi matris notasyonları ile aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1N} & -E(r_1) & -1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2N} & -E(r_2) & -1 \\ M & M & \dots & M & M & M \\ 2\sigma_{N1} & 2\sigma_{N2} & \dots & 2\sigma_{NN} & -E(r_N) & -1 \\ E(r_1) & E(r_1) & \dots & E(r_N) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \\ E(r_p^*) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Bu denklemler sisteminin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1N} & E(r_1) & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2N} & E(r_2) & 1 \\ M & M & \dots & M & M & M \\ 2\sigma_{N1} & 2\sigma_{N2} & \dots & 2\sigma_{NN} & E(r_N) & 1 \\ E(r_1) & E(r_1) & \dots & E(r_N) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \\ E(r_p^*) \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde çözülmesiyle bulunan $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)$ seti Lagrange fonksiyonunu minimize ederken $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$ seti de asıl amaç fonksiyonunu minimize edecektir. Ayrıca, amaç fonksiyonu konveks ve kısıtlar doğrusal olduğundan bulunan $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$, problemin optimal çözümü olacaktır. Yani, yukarıda verilen doğrusal denklemler sisteminin çözülmesi ile beklenen getirisi $E(r_p^*)$ olan minimum riskli portföyün ağırlıkları bulunacaktır.

Açığa satışın olması durumunda herhangi iki etkin portföyden oluşturulabilecek tüm portföyler de etkin olacağından, (2.10) ile verilen denklemler sisteminin iki farklı $E(r_p^*)$ değeri için çözülmesi tüm etkin portföylerin belirlenmesi için yeterli olacaktır.

Açığa satışla birlikte, borç verme ve sınırsız borçlanmaya da izin verilmesi durumunda problem benzer şekilde çözülecektir.

2.4.3 Kuhn-Tucker Koşulları

Eşitsizlik kısıtları bulunan doğrusal olmayan programlama problemlerinin sabit noktalarının belirlenmesinde Kuhn-Tucker gerekli koşulları önemli bir yer tutmaktadır. Bu koşullar aynı zamanda belirli varsayımlar altında yeterli koşullardır.

Doğrusal olmayan programlama problemi aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\max (\text{veya}) \min z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kısıtlar

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada verilecek olan Kuhn-Tucker koşullarının uygulanabilmesi için, $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ fonksiyonları sürekli türevleri bulunan ve düzenlilik koşullarını⁷⁴ sağlayan fonksiyonlar olmalıdır.

(2.11) problemi maksimizasyon problemi olduğunda, eğer $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktası problemin optimal çözümü ise, o zaman öyle $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ Lagrange çarpanları var ki aşağıdaki koşullar doğrudur:⁷⁵

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} &= 0 & j=1, 2, \dots, n \\ \lambda_i^0 [b_i - g_i(X^0)] &= 0 & i=1, 2, \dots, m \\ g_i(X^0) - b_i &\leq 0 & i=1, 2, \dots, m \\ \lambda_i^0 &\geq 0 & i=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Bu koşullar X^0 noktasının problemin optimum çözümü olması için Kuhn-Tucker gerekli koşullarıdır. Yani, X^0 noktasının bu koşulları sağlaması, bu noktanın optimum çözüm olduğu anlamına değil, olabileceği anlamına gelmektedir.

Problemin minimizasyon problemi olması durumunda ise Kuhn-Tucker koşulları aşağıdaki gibi verilir.⁷⁶

⁷⁴ Düzenlilik koşulları için bkz: Bazaraa, **a.g.e.**, s. 184-198. Portföy seçim probleminde tüm kısıtlar doğrusal olduğunda bu koşullar otomatik sağlanır.

⁷⁵ Winston, **a.g.e.**, p.692

⁷⁶ Kuhn-Tucker koşulları Lagrange çarpanları yöntemine dayanır. Bu koşulların nasıl türetildiğini görmek için bkz: Taha, **a.g.e.**, s. 766-767

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} &= 0 & j=1, 2, \dots, n \\
\lambda_i^0 [b_i - g_i(X^0)] &= 0 & i=1, 2, \dots, m \\
g_i(X^0) - b_i &\leq 0 & i=1, 2, \dots, m \\
\lambda_i^0 &\leq 0 & i=1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

(2.11) ile verilen problem maksimizasyon problemi olduğunda, eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu konkav ve $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, m$ fonksiyonları konveksse, Kuhn-Tucker koşullarını sağlayan $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktası problemin optimum çözümüdür. Benzer şekilde, problem minimizasyon problemi olduğunda, eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu ve $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, m$ fonksiyonları konveksse, Kuhn-Tucker koşullarını sağlayan $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noktası problemin optimum çözümüdür.⁷⁷

2.5 Kuadratik Programlama

Kuadratik amaç fonksiyonu doğrusal kısıtlardan oluşan doğrusal olmayan programlamaya kuadratik programlama denir. Kuadratik programlama problemlerinin doğrusal programlama problemlerinden tek farkı, amaç fonksiyonunun kuadratik bir fonksiyon olmasıdır.

Kuadratik programlama problemi genel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}
\max \text{ (veya min) } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{kj} x_j x_k \\
\text{kısıtlar} & & (2.12) \\
\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & i=1, 2, \dots, m \\
x_j &\geq 0 & j=1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

⁷⁷ Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Introduction to Operation Research**, 7th ed., McGraw Hill, 2001, p. 680

Problem matris notasyonları kullanılarak,

$$\max (\text{veya min}) \quad z=CX+X^T QX$$

kısıtlar

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$b=(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ M & M & \dots & M \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ M & M & \dots & M \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

dir. Kuadratik programlama problemlerinde tüm kısıtlar doğrusal olduğundan uygun çözüm bölgesi konvekstir. Amaç fonksiyonundaki $X^T QX$, kuadratik form belirler. Q matrisi maksimizasyon durumunda negatif, minimizasyon durumunda pozitif tanımlı olması gerekir. Bu da maksimizasyon durumunda amaç fonksiyonunun tam konkav, minimizasyon durumunda tam konveks olması gerektiği anlamına gelmektedir.

Bu varsayımlar altında Kuhn-Tucker gerekli koşulları aynı zamanda yeterli koşullardır. Başka bir deyişle, Kuhn-Tucker koşullarını sağlayan çözüm, problemin optimum çözümü olacaktır.

Kuadratik programlama problemi bir maksimizasyon problemi olduğunda Kuhn-Tucker koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir.⁷⁸

$$\lambda \geq 0, \quad U \geq 0$$

$$\nabla z - (\lambda^T, U^T) \nabla G(X) = 0$$

$$\lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0 \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j x_j = 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$AX \leq b$$

$$-X \leq 0$$

Burada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m)^T$ ve $U = (\mu_1, \mu_2, \mu_n)^T$ sırasıyla $AX \leq b$ ve $-X \leq 0$ kısıtlarına karşılık gelen Lagrange çarpanlarıdır. $G(X) \leq 0$, $AX \leq b$ ve $-X \leq 0$ kısıtlarının

$$G(X) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$$

şeklinde birleştirilmesi ile elde edilmiştir.

$$\nabla z = C + 2X^T Q \quad \text{ve} \quad \nabla G = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$$

ifadeleri ve $Q^T = Q$ olduğu dikkate alınırsa Kuhn-Tucker koşulları tekrar aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-2QX + A^T \lambda - U = C^T$$

$$AX + S = b$$

$$\lambda_i S_i = 0 = \mu_j x_j \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\lambda, U, X, S \geq 0$$

⁷⁸ Taha, **a.g.e.**, s.790

Burada $S=b-AX \leq 0$, $AX \leq b$ kısıtlarına eklenen aylak değişkenlerdir.⁷⁹

Minimizasyon durumu için bu koşullar benzer şekilde elde edilir. Minimizasyon durumunda Kuhn-Tucker koşulları şöyle yazılır.⁸⁰

$$\begin{aligned} -2QX - A^T \lambda + U &= C^T \\ AX + S &= b \\ \lambda_i S_i &= 0 = \mu_j x_j \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n \\ \lambda, U, X, S &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bu koşullar aşağıdaki gibi birleştirilebilir.

$$\begin{pmatrix} -2Q & -A^T & I & 0 \\ A & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ U \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i S_i &= 0 = \mu_j x_j \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n \\ \lambda, U, X, S &\geq 0 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, hem maksimizasyon hem de minimizasyon durumunda $\lambda_i S_i = 0 = \mu_j x_j$ koşullarını dışında tüm diğer koşullar λ, U, X, S 'de doğrusaldır. Böylece (2.12) ile verilen problemin çözümü, $\lambda_i S_i = 0 = \mu_j x_j$ koşullarını da sağlayan doğrusal denklemler sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. Bu denklemler sistemi iki aşamalı simpleks yöntemin birinci aşaması kullanılarak çözülebilir.⁸¹ $\lambda_i S_i = 0 = \mu_j x_j$ koşullarının sağlanması için S ile λ 'nın ve μ_j ile x_j 'nin eş zamanlı

⁷⁹ Aylak değişkenler için bkz: Mehpere Timor, **Yöneylem Araştırması ve İşletmecilik Uygulamaları**, İşletme Fakültesi Yayın No:280, 2001, s.40

⁸⁰ Bazaraa **a.g.e.**, s. 504

⁸¹ İki aşamalı simpleks yöntem için bkz: Tulunay **a.g.e.**, s. 441-450

olarak temele girmemesi gerekir. Problem uygun çözüme sahipse, birinci aşamada tüm yapay değişkenler sıfıra eşitlenecektir.⁸²

2.5.1 Standart Durumda Etkin Portföylerin Belirlenmesi

Standart portföy seçim modeli aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N x_i x_k \sigma_{ik} \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = E(r_p^*) \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Daha önce de belirtildiği gibi, amaç fonksiyonu kuadratik, kısıtlar doğrusal olduğundan bu problem bir kuadratik programlama problemidir. Amaç fonksiyonu konveks, tüm kısıtlar doğrusal olduğundan Kuhn-Tucker koşullarını sağlayan $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ seti problemin optimum çözümü olacaktır.

Bu problem için Kuhn-Tucker koşullarının yazılabilmesi için, eşitlik kısıtlarının eşitsizlik kısıtlarına dönüştürülmesi gerekir. Birinci kısıt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) &\leq E(r_p^*) \\ -\sum_{i=1}^N x_i E(r_i) &\leq -E(r_p^*) \end{aligned}$$

ikinci kısıt

⁸² Taha, **a.g.e.**, s.791

$$\sum_{i=1}^N x_i \leq 1$$

$$-\sum_{i=1}^N x_i \leq -1$$

şeklinde yazılabilir. Bu kısıtlara karşılık gelen Lagrange Çarpanları λ_j , bu kısıtlara eklenen aylak değişkenler $S_j, x_i \geq 0$ kısıtlarına karşılık gelen Lagrange Çarpanları μ_i ile gösterilirse bu problem için Kuhn-Tucker koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$2 \sum_{i=1}^N x_i \sigma_{ki} + E(r_k) \lambda_1 - E(r_k) \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \mu_k = 0 \quad k=1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i E(r_i) + S_1 = E(r_p^*)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i E(r_i) - S_2 = E(r_p^*)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i + S_3 = 1$$

$$\sum_{i=1}^N x_i - S_4 = 1$$

$$\lambda_j S_j = 0 \quad j=1, 2, 3, 4$$

$$\mu_i x_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$\lambda_j \geq 0, S_j \geq 0 \quad j=1, 2, 3, 4$$

$$x_i \geq 0, \mu_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

Bu denklemler sisteminin iki aşamalı simpleks yöntemin birinci aşaması ile çözülmesiyle $E(r_p^*)$ beklenen getiri düzeyinde varyansı minimum olan portföyün ağırlıkları bulunacaktır. Denklemler sisteminin farklı beklenen getiri düzeyleri için çözülmesi ile etkin sınır belirlenecektir.

3. İMKB-30 ENDEKSİNDE YER ALAN HİSSE SENEDLERİNDEN OLUŞAN ETKİN PORTFÖYLERİN BELİRLENMESİNE YÖNELİK UYGULAMA

3.1. Çalışmanın Konusu ve Amacı

Ortalama Varyans Modeli'ne göre, riskten kaçınan ve rasyonel davranan bir yatırımcı, kendi risk-getiri tercihinine göre belirli bir beklenen getiri düzeyinde riski minimum olan ve belirli bir risk düzeyinde beklenen getirisi maksimum olan portföylerden birine yatırım yaparak beklenen faydasını maksimize eder. Başka bir deyişle, bu normatif yaklaşım yatırımcının kendi optimal portföyünü etkin portföyler içerisinde seçeceğini ileri sürmektedir. Buna göre optimal portföyün seçilebilmesi için öncelikle etkin portföylerin beklenen getirilerinin, risklerinin ve her bir etkin portföyde hangi menkul kıymetlerin hangi oranlarda yer aldığı belirlenmesi gerekir.

Daha önce de belirtildiği gibi, etkin portföylerin belirlenmesi bir optimizasyon problemidir. Menkul kıymetlerin beklenen getirileri (veya beklenen dönem sonu değerleri) ve bu menkul kıymetlerin olası getirileri (veya olası dönem sonu değerleri) arasındaki kovaryanslar verildiğinde etkin portföyler kuadratik programlama yardımıyla belirlenebilir. Bu çalışmanın konusu, yatırım fırsatları kümesi ile ilgili değişik varsayımlar altında etkin portföylerin kuadratik programlama yardımıyla belirlenmesidir.

Bilindiği gibi, Ortalama Varyans Modeli alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın olmadığını varsayar. Ancak gerçek hayatta bu varsayımların geçerli olduğu söylenemez. Yatırımcıların aldıkları ve sattıkları menkul kıymetler üzerinden ödedikleri alım satım maliyeti, elde ettikleri kar üzerinden ödeyecekleri vergi ve açığa satış olanakları dikkate alındığında, Markowitz etkin sınırı üzerinde yer alan portföyler aslında etkin olmayabilir. Bu çalışmanın amacı, Ortalama Varyans Modeli'nin Türkiye'deki alım satım maliyetleri, vergilendirme ve açığa satış koşulları göz önünde bulundurularak genişletilmesi ve bu maliyet ve olanakların Markowitz etkin sınırı üzerindeki etkilerinin ortaya konulmasıdır.

3.2. Çalışmanın Kapsamı ve Kısıtları

Bu çalışmanın kapsamına İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetleri dahil edilmiştir. İMKB–30 Endeksinin tercih edilmesinin iki temel nedeni vardır.

Bunlardan birincisi İMKB–30 Endeksinin pazarı temsil etme gücünün yüksek olmasıdır. 29 Eylül 2006 tarihi itibarıyla İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetlerinin toplam piyasa değerinin İMKB–50 Endeksinde yer alan hisse senetlerinin toplam piyasa değerine oranı %84,23, İMKB–100 Endeksinde yer alan hisse senetlerinin toplam piyasa değerine oranı ise %75,90 olarak gerçekleşmiştir. İMKB–30 Endeksine dahil olan hisse senetlerinin toplam piyasa değerinin İMKB’de işlem gören tüm hisse senetlerinin (yatırım ortaklıkları ve Gözaltı Pazarı da dahil olmak üzere 328 hisse senedinin) toplam piyasa değerine oranı ise %64,89 olarak gerçekleşmiştir.⁸³ Oranların yüksek olması, İMKB–30 Endeksinin pazarı temsil etme gücünün yüksek olduğunu göstermektedir.

İkinci tercih sebebi ise İMKB–30 Endeksinin içerdiği hisse senedi sayısının az olması nedeniyle, çalışmada kullanılacak etkin portföy seçim modellerinin uygulanmasında menkul kıymet sayısındaki artışla gelen işlem fazlalığına bir çözüm olmasıdır.

İMKB–30 Endeksinde yer alan menkul kıymetler belirli kural ve kıstaslara göre belirlenmektedir. Söz konusu kural ve kıstaslara uymayan menkul kıymetler Ocak, Nisan, Temmuz ve Ekim aylarında olmak üzere yılda dört kez yenilenen endeksten çıkarılır ve yerlerine yeni menkul kıymetler konur.⁸⁴ Çalışma 2003 yılının Eylül ayıyla 2006 yılının Eylül ayı arasındaki 36 aylık dönemi kapsamaktadır. İlgili dönem 12 adet üç aylık dönemi içermektedir ve bu dönemlerde İMKB–30 Endeksinde yer alan menkul kıymetlerin değişkenlik gösterdiği görülmektedir. Bu araştırmanın kapsamına söz konusu dönemde sürekli endekte yer alan 18 hisse senedi yerine, 2006 yılının üçüncü çeyreğinde İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetleri alınmıştır.

⁸³ İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, **İMKB Aylık Bülten Dergisi**, Eylül 2006, (Çevrimiçi) <http://www.imkb.gov.tr/veri.htm>, 10 Temmuz 2007

⁸⁴ İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, **Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu**, 16. bs., Anka Basım, İstanbul, 2001, s.369-371

Etkin portföylerin belirlenmesinde gerekli olan kovaryans matrisinin hesaplanabilmesi için, menkul kıymetlere ilişkin veri sayısının eşit olması zorunluluğu diğer bir kısıtlayıcı olarak karşımıza çıkmaktadır. 2006 yılının üçüncü çeyreğinde İMKB–30 Endeksinde yer alan hisse senetlerinden işlem kodları DENİZ, DOAS, ULKER ve VAKBN olan hisse senetlerinin İMKB’de ilk işlem gördükleri tarihler, sırasıyla 01.10.2004, 17.06.2004, 23.02.2004 ve 18.11.2005’dir. Bu hisse senetlerine ilişkin gerekli 37 adet aylık kapanış fiyatı bulunmamaktadır. Bu dört hisse senedi yeteri kadar geçmiş dönem verisi bulunmadığından, ISCTR işlem kodlu hisse senedi ise sermaye artırım ve temettü dağıtım ile ilgili verilere ulaşamadığı için araştırmanın kapsamı dışında bırakılmıştır. Çalışmanın kapsamına geriye kalan 25 adet hisse senedi alınmış ve bu hisselerin adları ve işlem kodları Tablo 4,1’de gösterilmiştir.

Tablo 3.1 Araştırmanın Kapsamına Alınan Hisse Senetlerinin Adları ve İşlem Kodları

NO	ADI	KODU	NO	ADI	KODU
1	AKBANK	AKBNK	14	PETKİM	PETKM
2	ARÇELİK	ARCLK	15	PETROL OFİSİ	PTOFS
3	DOĞAN HOLDİNG	DOHOL	16	SABANCI HOLDİNG	SAHOL
4	DOĞAN YAYIN HOL.	DYHOL	17	ŞİŞE CAM	SISE
5	EREĞLİ DEMİR ÇELİK	EREGL	18	ŞEKERBANK	SKBNK
6	FİNANSBANK	FINBN	19	TURKCELL	TCELL
7	FORTIS BANK	FORTS	20	TÜRK HAVA YOL	THYAO
8	GARANTİ BANKASI	GARAN	21	TOFAŞ OTO. FAB.	TOASO
9	GSD HOLDİNG	GSDHO	22	T.S.K.B	TSKB
10	İHLAS HOLDİNG	IHLAS	23	TÜPRAŞ	TUPRS
11	İŞ GMYO	ISGYO	24	VESTEL	VESTL
12	KOÇ HOLDİNG	KCHOL	25	YAPI VE KREDİ BANK.	YKBNK
13	MİGROS	MIGRS			

3.3 Çalışmada Kullanılan Veri Seti

Veri olarak çalışmanın kapsamındaki hisse senetlerinin Eylül 2003-Eylül 2006 dönemindeki aylık kapanış fiyatları, temettü dağıtımı ve sermaye artırımını ile ilgili veriler kullanılmıştır. Söz konusu verilerle her bir hisse senedinin aylık sermaye kazançları ve temettü verimleri hesaplanmıştır. Sermaye kazançları

$$SK_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

formülüyle, temettü verimleri ise

$$TV_t = \frac{d_t}{P_t}$$

formülüyle hesaplanmıştır. Bedelli ve/veya bedelsiz sermaye artırımının yapılması durumunda sermaye kazancı

$$SK_t = \frac{(P_{t+1} - P_t) + n_1 P_{t+1} + n_2 (P_{t+1} - P_0)}{P_t}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Geçmiş dönemlerde gerçekleşen sermaye kazançları ve temettü verimleri, yatırım kararının alındığı dönem için hisse senetlerinin olası sermaye kazançları ve olası temettü verimleri olarak kabul edilmiştir. Sermaye kazançları ve temettü verimleri hisse senetlerinin yatırım dönemindeki dönem başı fiyatları (Eylül 2006 kapanış fiyatları) ile çarpılarak her bir hisse senedi için olası dönem sonu fiyatları (2006 Ekim sonu için) ve olası temettü serileri belirlenmiştir. Elde edilen seriler EK-1’de verilmiştir.

3.4 Markowitz Modeline Göre Etkin Portföylerin Belirlenmesi

Bu bölümde çalışmanın kapsamına alınan 25 adet hisse senedinden Markowitz modeline göre oluşturulabilecek etkin portföyler belirlenecektir. İşlem maliyetleri, vergi ve açığa satışı içeren modellerin geliştirilmesinde sağladığı bir takım kolaylıklar nedeniyle, etkin portföylerin belirlenmesinde hisse senetlerinin getirileri yerine dönem sonu değerlerinden hareket edilecektir. Bu yüzden Markowitz modeli, hisse senetlerinin dönem sonu değerlerine göre burada tekrar yazılacaktır.

3.4.1 Model

Hisse senedi portföyü hisse senetlerinin bir topluluğu olduğundan, portföyün dönem sonu değeri, portföyde yer alan hisse senetlerinin dönem sonu değerlerinin toplamına eşittir. Temettü gelirlerinin dönem sonunda elde edildiği varsayılırsa, portföyün yatırım dönemi sonundaki değeri matematiksel olarak şu şekilde gösterilebilir.

$$W_p = \sum_{i=1}^N X_i (P_i + d_i) = \sum_{i=1}^N X_i W_i$$

İfadede,

W_p = Portföyün dönem sonu değerini,

N = Portföyde yer alan hisse senedi çeşit sayısını,

X_i = Portföydeki i. hisse senedinin sayısını,

P_i = i. hisse senedinin yatırım dönemi sonundaki fiyatını,

d_i = i. hisse senedinden yatırım döneminde elde edilen temettü miktarını,

W_i = i. hisse senedinin dönem sonu değerini ($=P_i + d_i$) göstermektedir.

Buna göre portföyün beklenen dönem sonu değeri

$$E(W_p) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i W_i\right) = \sum_{i=1}^N X_i E(W_i), \quad (3.1)$$

dönem sonu değerinin varyansı

$$\sigma_p^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i W_i\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \text{Cov}(W_i, W_k) \quad (3.2)$$

olacaktır. Portföyün standart sapması ise varyansını karekökü alınarak belirlenir.

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \text{Cov}(W_i, W_k)} \quad (3.3)$$

Birinci bölümde, belirli bir beklenen getiri düzeyinde portföy getirisinin varyansının minimizasyonu şeklinde ifade edilen Markowitz modeli, benzer şekilde portföyün belirli bir beklenen dönem sonu değeri düzeyinde portföyün dönem sonu değerinin varyansının minimizasyonu şeklinde ifade edilebilir.

Sağlanması gereken iki kısıt daha vardır. Bunlardan birincisi, portföyün değerinin (dönem başında) yatırıma aktarılan kaynağa eşit olması, yani aktarılan kaynağın tamamının yatırıma dönüşmesinin sağlanması kısıdıdır. Bütçe kısıdı olarak adlandırılan bu kısıt aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\sum_{i=1}^N X_i P_i(0) = F(0) + W_{ep}(0)$$

Burada,

$P_i(0)$ = i. hisse senedinin dönem başı fiyatını,

$W_{ep}(0)$ = Eldeki portföyün yatırım dönemi başındaki değerini,

$F(0)$ = Pozitif değer aldığında eldeki portföye ek olarak yatırıma tahsis edilen nakit miktarını, negatif değer aldığında eldeki portföyün değerinin yatırıma dönüşmeyen kısmını göstermektedir.⁸⁵

Sağlanması gereken diğer kısıt, hisse senetlerin portföy içerisindeki sayısının negatif olmamasıdır.

$$X_i \geq 0 \quad i=1,2, \dots, N$$

Bu kısıt da eklendiğinde Markowitz modeli matris notasyonlarıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Min} \quad X^T C X \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2} X^T H X$$

kısıtlar

$$P(0)X = F(0) + W_{ep}(0)$$

$$\overline{W}X = E(W_p)^*$$

$$X \geq 0$$

Burada,

$X^T = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ portföyde yer alan hisse senetlerinin sayılarını gösteren portföy vektörü,

C = Kovaryans matrisi,

H = Hessian matrisi ($=2C$),

$P(0) = (P_1(0), P_2(0), \dots, P_N(0))$ hisse senetlerinin dönem başı fiyatlarını gösteren satır vektörü,

$E(W_p)^*$ = Portföyün hedeflenen dönem sonu değeri,

$\overline{W} = (E(W_1), E(W_2), \dots, E(W_N))$ hisse senetlerinin beklenen dönem sonu değerlerinden oluşan satır vektörüdür.

⁸⁵ Ortalama Varyans Modeli'nde vergi ve işlem maliyetinin olmadığı varsayıldığından yatırımcının elindeki varlığın nakit mi yoksa portföy mü olduğu önemli değildir. Fakat vergi ve işlem maliyeti dikkate alındığında bu durum önemlidir ve bu yüzden böyle bir ayırım yapılmıştır.

3.4.2 Çözüm Süreci

Etkin portföylerin belirlenebilmesi için, hisse senetlerinin dönem başı değerlerine, beklenen dönem sonu değerlerine ve kovaryans matrisine ihtiyaç vardır. Hisse senetlerinin dönem başı değerleri olarak Eylül 2006'nın kapanış fiyatları kullanılmıştır. Tüm sonuçların gerçekleşme olasılıkları eşit (1/36) kabul edilerek hisse senetlerinin beklenen dönem sonu değerleri

$$E(W_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (W_{ij}) \quad i=1, 2, \dots, N,$$

varyansları

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [W_{ij} - E(W_i)]^2 \quad i=1, 2, \dots, N,$$

hisse senetlerinin dönem sonu değerleri arasındaki kovaryanslar ise

$$\text{Cov}(W_i, W_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(W_{ij} - E(W_i))(W_{kj} - E(W_k))] \\ i=1, 2, \dots, N, \quad k=1, 2, \dots, N$$

formülüyle hesaplanmıştır.

Formüllerde,

n = olası sonuç sayısını,

W_{ij} = i. hisse senedinin j. durumdaki dönem sonu değerini,

W_{kj} = k. hisse senedinin j. durumdaki dönem sonu değerini,

σ_i^2 = i. hisse senedinin varyansını göstermektedir.

Hisse senetlerin dönem başı değerleri ve dönem sonu beklenen değerleri Tablo3.2'de kovaryans matrisi ise EK-2'de verilmiştir. Dönem başı itibariyle

yatırımcının elinde, çalışmanın kapsamına alınan hisse senetlerinden oluşan 100000 YTL değerinde eşit ağırlıklı bir portföy olduğu varsayılmıştır ($W_{ep}(0) = 100000$).

Tablo 3.2 Hisse Senetlerinin Dönem Başı ve Beklenen Dönem Sonu Değerleri

HİSSE KODU	$P_j(0)$	$E(W_j)$	HİSSE KODU	$P_j(0)$	$E(W_j)$
AKBNK	7,75	8,019958	PETKM	5,05	5,087391
ARCLK	9,45	9,709501	PTOFS	4,74	4,841617
DOHOL	5,85	6,202151	SAHOL	5,35	5,521186
DYHOL	4,72	4,908546	SISE	4,88	5,101526
EREGL	6,75	7,008471	SKBNK	4,86	5,249551
FINBN	6,05	6,684987	TCELL	7,7	8,041595
FORTS	4,3	4,612265	THYAO	5,85	5,885472
GARAN	4,48	4,706359	TOASO	4,06	4,204981
GSDHO	1,17	1,235299	TSKB	2,76	2,984849
IHLAS	0,58	0,575639	YUPRS	23,3	24,04098
ISGYO	2,64	2,760886	VESTL	3,54	3,550849
KCHOL	4,86	4,939847	YKBNK	2,62	2,753255
MIGRS	15,2	15,6894			

Bu model ve bu bölümde ele alınacak diğer modeller kuadratik programlama ile MATLAB 7.0.4 paket programı kullanılarak çözülmüştür. Modellerin çözümü için amaç fonksiyonunun Hessian matrisine gerek duyulmaktadır. Ele alınan modelin amaç fonksiyonunun Hessian matrisi $2 \times C$ 'ye eşittir.

Model değişik $E(W_p)^*$ değerlerine göre çözümlerse, minimum varyans portföylerde yer alan hisse senetlerinin sayısı belirlenir. Fakat bu portföylerden yalnız beklenen dönem sonu değerleri global minimum varyans portföyün beklenen dönem sonu değerinden büyük olanlar etkindir. Başka bir deyişle, risk- dönem sonu beklenen değer ekseninde, minimum varyans sınırın global minimum varyans portföyün üzerindeki kısmı etkindir. Bu yüzden, öncelikle global minimum varyans portföyün belirlenmesi gerekir.

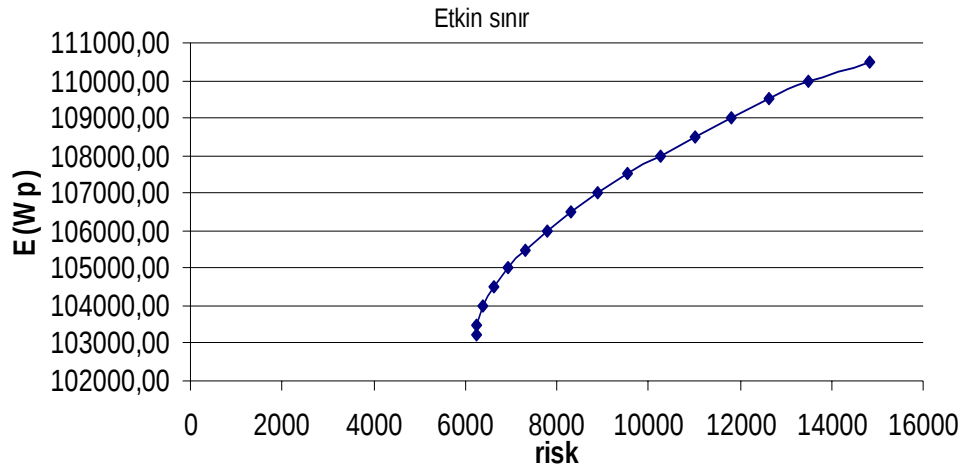
Global minimum varyans portföy, modelin ikinci kısıt dikkate alınmadan çözülmesiyle belirlenmiştir. Bu portföyün beklenen dönem sonu değeri (3.1), riski (3.3)'le verilen formülle hesaplanmış, beklenen dönem sonu değeri 103.230, riski 6232,81 YTL olarak bulunmuştur. Daha sonra, model $E(W_p)^*$ 'ye 103.500'den başlayarak, 500 YTL aralıklarla değişik değerler verilerek tekrar çözülmüş ve 16 adet etkin portföy belirlenmiştir. Bulunan etkin portföylerde yer alan hisse senetlerinin sayıları EK-3'de, beklenen dönem sonu değerleri ve riskleri Tablo 3.3'de gösterilmiştir.

Tablo 3.3 Markowitz Modeline Göre Belirlenen Etkin Portföylerin Varyansları, Standart Sapmalar ve Beklenen Dönem Sonu Değerleri

	σ_p^2	σ_p	$E(W_p)$
Portföy 1	38.848.000,00	6.232,82	103.230,00
Portföy 2	39.182.000,00	6.259,55	103.500,00
Portföy 3	40.783.000,00	6.386,16	104.000,00
Portföy 4	43.693.000,00	6.610,07	104.500,00
Portföy 5	48.008.000,00	6.928,78	105.000,00
Portföy 6	53.655.000,00	7.324,96	105.500,00
Portföy 7	60.574.000,00	7.782,93	106.000,00
Portföy 8	68.912.000,00	8.301,33	106.500,00
Portföy 9	79.048.000,00	8.890,89	107.000,00
Portföy 10	91.202.000,00	9.549,97	107.500,00
Portföy 11	105.370.000,00	10.264,99	108.000,00
Portföy 12	121.560.000,00	11.025,43	108.500,00
Portföy 13	139.770.000,00	11.822,44	109.000,00
Portföy 14	160.010.000,00	12.649,51	109.500,00
Portföy 15	182.530.000,00	13.510,37	110.000,00
Portföy 16	219.848.371,01	14.827,28	110.495,00

Tablo 3.3'den de görüldüğü gibi, etkin portföylerin beklenen dönem sonu değerleri 103.230 YTL ile 110.495 YTL arasında, riskleri 6232,82 YTL ile 14827,28 YTL arasında değişmektedir. Çözüm sonuçlarına bakıldığında etkin portföylerin, işlem kodları AKBNK, FINBN, MIGRS, PTOFS, TCELL, TSKB ve TUPRS olan hisse senetlerinin değişik kombinasyonlarından oluştuğu görülmektedir.

Etkin portföylerin oluşturduğu etkin sınır Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Çalışma Kapsamına Alınan Hisse Senetlerinden Markowitz Modeline Göre Belirlenen Etkin Portföylerin Oluşturduğu Etkin Sınır

3.5 Markowitz Modelinin Alım-Satım Maliyeti, Vergi ve Açığa Satışı Kapsayacak Şekilde Genişletilmesi

Çalışmanın bu bölümünde Markowitz modeli, Pogue tarafından geliştirilen model⁸⁶ esas alınarak alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışı kapsayacak şekilde genişletilecektir. Model genişletilirken Türkiye'deki alım satım maliyetleri, vergilendirme ve açığa satış koşulları göz önünde bulundurulacaktır.

Model üç aşamada genişletilecektir. Önce alım satım maliyeti, sonra vergi ve en sonunda açığa satış modele dahil edilecektir. Her aşamada model kuadratik

⁸⁶ G. A. Pogue, "An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions' Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes", **Journal of Finance**, Vol 25, No:5, December 1970, pp.1005–1025

programlama yardımıyla çözümlenerek çalışma kapsamına alınan hisse senetlerinden oluşturulabilecek etkin portföyler belirlenecek ve alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın Markowitz etkin sınırı üzerindeki etkileri sorgulanacaktır.

3.5.1 Alım Satım Maliyetini İçeren Model

Daha önce de belirtildiği gibi, Markowitz modeli alım satım maliyetinin olmadığını ve dolayısıyla yatırımcının, elindeki portföyü geleceğe dönük beklentilerindeki değişimlere göre herhangi bir maliyete katlanmadan revize edebildiğini varsayar. Oysa yatırımcılar hisse senetlerini aldıklarında ve sattıklarında alım satım maliyetine katlanmak, yani belirli bir komisyon ödemek durumundadırlar.

i. hisse senedinden bir adet alınması veya satılması durumunda ödenecek komisyonu c_i ile gösterilirse, bu hisse senedinden x_i^+ adet satın alındığında ödenecek komisyon $x_i^+c_i$, x_i^- adet satıldığında $x_i^-c_i$ olacaktır. Buna göre eldeki portföyün revize edilmesi sonucunda ödenecek toplam komisyon

$$\sum_{i=1}^N (x_i^+c_i + x_i^-c_i)$$

olacaktır. Alım satım maliyeti kaynak kullanımı olduğundan dönem başı itibariyle bir nakit çıkışıdır ve bu tutarın bütçe kısıdının sol tarafına eklenmesi gerekir.

$$\sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N (c_i x_i^+ + c_i x_i^-) = F(0) + W_{ep}(0)$$

Sağlanması gereken bir diğer koşul, revizyon sonucunda hisse senedi sayılarındaki değişimin bu hisse senetlerinden alınanların sayısı ile satılanların sayısı arasındaki farka eşit olmasıdır. Dönem başı itibariyle (revizyon öncesi) portföyde bulunan i. hisse senedi sayısını $X_i(0)$ ile gösterilirse, bu kısıt matematiksel olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$X_i - X_i(0) = x_i^+ - x_i^- \Rightarrow X_i - x_i^+ + x_i^- = X_i(0) \quad i=1, 2, \dots, N$$

Aynı hisse senedinin hem alınması hem de satılması fazladan komisyon ödenmesine neden olacağından bu duruma izin verilmemesi gerekir. Bu koşul, alım değişkeni ile satım değişkeninin çarpımı tüm hisse senetleri için sıfıra eşitlenerek sağlanabilir.

$$x_i^+ x_i^- = 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

Fakat problemin kuadratik programlama ile çözümlenebilmesi için, daha önce de belirtildiği gibi, tüm kısıtların doğrusal olması gerekmektedir. Problemin kuadratik programlama ile çözümlenebilmesi için bu koşul,

$$M \sum_{i=1}^N x_i^+ x_i^-$$

ifadesinin amaç fonksiyonun eklenmesi ile dolaylı yoldan sağlanabilir. İfadede M büyük bir adettir (10^8 veya 10^{10} gibi). Bu durumda amaç fonksiyonu

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \text{Cov}(W_i, W_k) + M \sum_{i=1}^N x_i^+ x_i^-$$

şekline düşecektir.

Modelin kısıtları ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N c_i x_i^+ + \sum_{i=1}^N c_i x_i^- = F(0) + W_{ep}(0)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i E(W_i) = E(W_p)^*$$

$$X_i - x_i^+ + x_i^- = X_i(0) \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$X_i \geq 0, \quad x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

Böylece alım satım maliyetini içeren model, matris notasyonlarıyla aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\text{Min} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M\dot{I} \\ 0 & M\dot{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix}$$

Kısıtlar

$$\begin{bmatrix} P(0) & c & c \\ \overline{W} & 0 & 0 \\ \dot{I} & -\dot{I} & \dot{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) + W_{ep}(0) \\ E(W_p)^* \\ X(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix} \geq 0$$

Modelde,

(x^+) = $(x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+)^T$ alınan hisse senetlerinin sayısını gösteren sütun vektörünü,

(x^-) = $(x_1^-, x_2^-, \dots, x_N^-)^T$ satılan hisse senetlerinin sayısını gösteren sütun vektörünü,

H = Hessian matrisini,

$\dot{I}$ = $N \times N$ ölçülü birim matrisini,

c = $(c_1, c_2, \dots, c_N)$ hisse senetlerinin bir birim alınması veya satılması durumunda ödenecek komisyonu gösteren satır vektörünü,

0 = $N \times N$ ölçülü sıfır matrisini,

$X(0) = (X_1(0), X_2(0), \dots, X_N(0))^T$ dönem başı itibariyle (revizyon öncesi) elde bulunan hisse senetleri sayını gösteren sütun vektörünü göstermektedir.

3.5.1.1 Modelin Çözümü

Yatırımcının, elindeki eşit ağırlıklı portföyü revize etmek istediğini düşünüldüğünde ve bir hissenin alınması veya satılması durumunda ödenecek komisyon o hissenin fiyatının %0.15'i olduğu durumda⁸⁷, modelin çözümü için gerekli ek veriler hisse senetlerinin bir birim alınması veya satılması durumunda ödenecek komisyonlar ve dönem başı itibariyle elde bulunan hisse sayılarıdır. Bu veriler Tablo 3.4'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4 Hisse Senetlerinin Birim Başına Alım Satım Maliyetleri ve Revizyon Öncesi Elde Bulunan Hisse Sayıları

HİSSE KODU	c_j	$X_j(0)$	HİSSE KODU	c_j	$X_j(0)$
AKBNK	0,011625	516	PETKM	0,007575	792
ARCLK	0,014175	423	PTOFS	0,00711	844
DOHOL	0,008775	684	SAHOL	0,008025	748
DYHOL	0,00708	847	SISE	0,00732	820
EREGL	0,010125	593	SKBNK	0,00729	823
FINBN	0,009075	661	TCELL	0,01155	519
FORTS	0,00645	930	THYAO	0,008775	684
GARAN	0,00672	893	TOASO	0,00609	985
GSDHO	0,001755	3419	TSKB	0,00414	1449
IHLAS	0,00087	6893	YUPRS	0,03495	172
ISGYO	0,00396	1515	VESTL	0,00531	1130
KCHOL	0,00729	823	YKBNK	0,00393	1527
MIGRS	0,0228	263			

⁸⁷ Aracı kurumların yaptıkları işlem karşılığında talep ettikleri komisyonlar farklılık göstermektedir. Ayrıca işlem hacmi çok büyük olduğunda ödenecek komisyon yatırımcıyla aracı kurum arasında yapılan pazarlıkla belirlenmektedir. Burada %0.15 piyasadaki ortalama maliyet olarak alınmıştır.

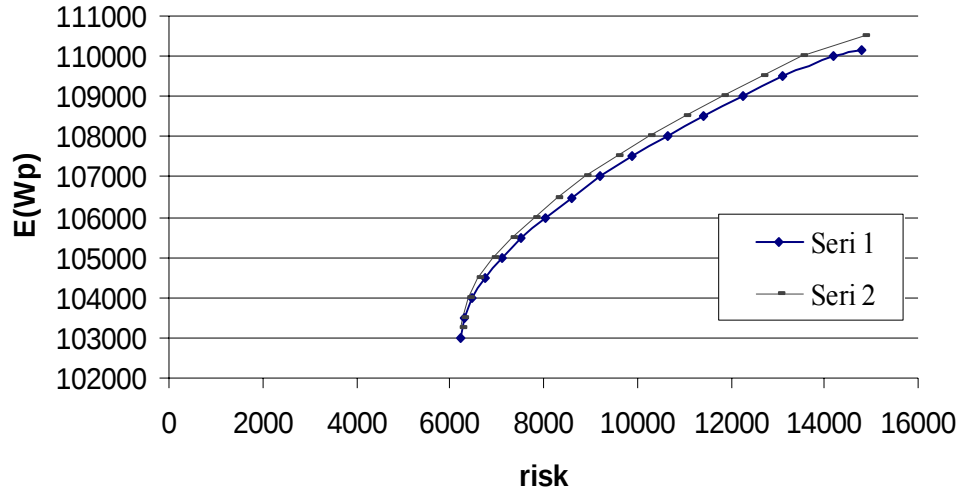
Model, öncelikle ikinci kısıt dikkate alınmadan çözülmüş ve global minimum varyans portföy bulunmuştur. Bu portföyün beklenen dönem sonu değeri 102.980 YTL, riski ise 6217,88 YTL olarak belirlenmiştir. Daha sonra portföyün hedeflenen dönem sonu değeri 500 YTL aralıklarla artırılarak model tekrar tekrar çözülmüş ve 16 adet etkin portföy belirlenmiştir. Belirlenen portföylerdeki hisse sayıları EK-4’de verilmiştir. Portföylerin riskleri (3.3) formülüyle hesaplanmış ve Tablo 3.5’de gösterilmiştir.

Tablo 3.5 Alım Satım Maliyeti Dikkate Alındığında Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Değerleri, Varyansları ve Riskleri

	σ_p^2	σ_p	$E(W_p)$
Portföy 1	38.662.000,00	6.217,88	102.980,00
Portföy 2	39.602.000,00	6.293,01	103.500,00
Portföy 3	41.858.000,00	6.469,78	104.000,00
Portföy 4	45.464.000,00	6.742,70	104.500,00
Portföy 5	50.411.000,00	7.100,07	105.000,00
Portföy 6	56.688.000,00	7.529,14	105.500,00
Portföy 7	64.358.000,00	8.022,34	106.000,00
Portföy 8	73.735.000,00	8.586,91	106.500,00
Portföy 9	84.929.000,00	9.215,69	107.000,00
Portföy 10	98.142.000,00	9.906,66	107.500,00
Portföy 11	113.370.000,00	10.647,53	108.000,00
Portföy 12	130.640.000,00	11.429,79	108.500,00
Portföy 13	150.120.000,00	12.252,35	109.000,00
Portföy 14	172.000.000,00	13.114,88	109.500,00
Portföy 15	201.440.000,00	14.192,96	110.000,00
Portföy 16	218.480.000,00	14.781,07	110.495,00

Bu modele göre belirlenen etkin portföyler Markowitz modeline göre belirlenen etkin portföyler karşılaştırıldığında aynı hedeflenen dönem sonu değerlerinde portföy risklerinin daha yüksek olduğu görülmektedir. Karşılaştırma

amacı ile bu modele göre belirlenen etkin portföylerden oluşan etkin sınır ve Markowitz etkin sınırı Şekil 3.2’de aynı risk-dönem sonu beklenen değer ekseninde gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Markowitz Etkin Sınırı ve Alım Satım Maliyetini İçeren Modele Göre Belirlenen Etkin Sınır

Şekilde seri1 olarak gösterilen eğri alım satım maliyeti dikkate alındığı durumda etkin sınırı, seri2 Markowitz etkin sınırını göstermektedir. Grafikten de görüldüğü gibi, alım satım maliyeti Markowitz etkin sınırını hafif aşağıya doğru kaydırmıştır.

Dönem başında alım satım maliyeti ödenmesi, hisse senetlerinin alınmasında kullanılabilecek kaynağı kısıtlamakta, bu da her bir hedeflenen dönem sonu değer düzeyinde portföylerin risklerinin artmasına neden olmaktadır. Burada dönem başı itibariyle yatırımcının elinde eşit ağırlıklı bir portföy olduğu varsayılmıştı. Genelleştirilecek olursa, dönem başında yatırımcının elinde ister nakit, isterse herhangi bir portföy olsun ödenecek toplam alım satım maliyetine bağlı olarak her hedeflenen dönem sonu değer düzeyinde etkin portföylerin riski az veya çok artacak, etkin sınır aşağıya doğru kayacaktır.

3.5.2 Vergi ve Alım Satım Maliyetini İçeren Model

2006 yılının başından itibaren yürürlüğe giren 5281 ve 5527 sayılı kanunlarla Geçici 67'nci maddenin Gelir Vergisi Kanun'una eklenmesiyle menkul kıymetlerden elde edilen gelirlerin vergilendirilmesi esasları önemli ölçüde değiştirilmiştir. Söz konusu düzenlemelerle tam mükellef gerçek kişilerin İMKB'de işlem gören hisse senetlerinden elde ettikleri sermaye kazancı %10, temettü gelirleri ise %15 stopaja tabi tutulmuştur.⁸⁸

Sağlıklı yatırım kararlarının alınabilmesi için, ödenecek bu vergilerin de hesaba katılması gerekmektedir. Yatırımcıların, portföylerinin net (vergi sonrası) dönem sonu değeri ile ilgilendikleri varsayılmaktadır. Dolayısıyla, oluşturulan modelle portföyün belirli bir beklenen net dönem sonu değeri düzeyinde net dönem sonu değerinin varyansı minimize edilecektir.

Bilindiği gibi, sermaye kazancı realize olduğu zaman yani, hisse senedi satıldığında vergilendirilir. Buna göre eldeki portföyde yer alan i . hisse senedinden x_i^- adet satıldığında ödenecek vergi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x_i^- [P_i(0) - P_i(A)] T_s$$

İfadede, $P_i(A)$ i . hisse senedinin ortalama alım fiyatını, T_s sermaye kazancı üzerinden ödenen vergi oranını göstermektedir.⁸⁹ O zaman portföyün revizyonu sonucunda ödenecek toplam vergi

$$\sum_{i=1}^N x_i^- [P_i(0) - P_i(A)] T_s$$

⁸⁸ Niyazi Çömez, "Menkul Sermaye Gelirleri: 2007 Yılı Vergi Rehberi", (Çevirimiçi) <http://www.verginet.net/UserFiles/File/Gundem/2007/Menkul%20sermaye%20gelirleri%20-%202007%20Vergi%20Rehberi.pdf>, 22 Haziran

⁸⁹ Söz konusu düzenlemeye göre, tam mükellef gerçek kişilerin, tam mükellef kurumların İMKB'de işlem gören hisse senetlerini bir yıldan fazla süreyle elde tuttuktan sonra satışından elde ettikleri sermaye kazancı stopaj dışıdır. Ayrıca, aynı hisse senedinden değişik tarihlerde alımlar yapıldıktan sonra bunların bir kısmının elden çıkarılması durumunda, alış bedeli ilk giren ilk çıkar yöntemi ile belirlenmektedir. Fakat modelin oluşturulmasında sağladığı kolaylıklar nedeniyle bir yıl istisnasının olmadığı ve verginin, satış fiyatıyla ağırlıklı ortalama alım fiyatı arasındaki fark üzerinden ödendiği varsayılmıştır.

olacaktır.

Verginin portföy revize edildiği zaman hemen yani, dönem başında ödenileceği varsayılırsa, ödenecek vergi dönem başı itibariyle bir fon kullanımıdır (zarar edilmesi durumunda fon kaynağıdır) ve dolayısıyla bütçe kısıdının sol tarafına eklenmesi gerekir.

$$\sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N x_i^+ c_i + \sum_{i=1}^N x_i^- c_i + \sum_{i=1}^N x_i^- [P_i(0) - P_i(A)] T_s = F(0) + W_{ep}(0)$$

c

$$\sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N c_i x_i^+ + \sum_{i=1}^N x_i^- [[P_i(0) - P_i(A)] T_s + c_i] = F(0) + W_{ep}(0)$$

Yine temettü gelirlerinin dönem sonunda elde edileceği varsayılırsa ve temettü geliri üzerinden ödenecek vergi oranını T_d ile gösterilirse, yatırım dönemi boyunca elde tutulacak portföyün dönem sonundaki net (vergi sonrası) değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_p^V = \sum_{i=1}^N X_i d_i (1 - T_d) + \sum_{i=1}^N X_i P_i - T_s \left[\sum_{i=1}^N X_i (P_i - P_i(0)) + \sum_{i=1}^N (X_i(0) - x_i^-) (P_i(0) - P_i(A)) \right] \quad (3.4)$$

İfadedeki birinci terim yatırım döneminde elde edilecek toplam net temettü miktarını, ikinci terim hisse senetlerinin dönem sonunda satışından elde edilecek geliri, sonuncu terim ise sermaye kazancı üzerinden dönem sonunda ödenecek vergiyi göstermektedir. Parantez içindeki ilk terim yatırım döneminde elde edilen toplam sermaye kazancını, ikinci terim ise önceki dönemlerden kalan realize edilmemiş toplam sermaye kazancını göstermektedir.

(3.4)'la verilen ifadede

$$X_i - X_i(0) = x_i^+ - x_i^- \quad \Leftrightarrow \quad X_i(0) - x_i^- = X_i - x_i^+$$

yerine yazılır ve tekrar düzenlenirse,

$$W_p^V = \sum_{i=1}^N X_i [P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d) + P_i(A)T_s] + \sum_{i=1}^N x_i^+ [P_i(0) - P_i(A)]T_s \quad (3.5)$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre portföyün beklenen net dönem sonu değeri

$$E(W_p^V) = \sum_{i=1}^N X_i [E(P_i)(1-T_s) + E(d_i)(1-T_d) + P_i(A)T_s] + \sum_{i=1}^N x_i^+ [P_i(0) - P_i(A)]T_s \quad (3.6)$$

portföyün net dönem sonu değerinin varyansı ise

$$\begin{aligned} (\sigma_p^V)^2 &= \text{Var}(W_p^V) = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^N X_i (P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d)) \right] = \\ (\sigma_p^V)^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \text{Cov} [P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d), P_k(1-T_s) + d_k(1-T_d)] \\ (\sigma_p^V)^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \sigma_{ik}^V \end{aligned}$$

olacaktır. Burada, $\sigma_{ik}^V = \text{Cov} [P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d), P_k(1-T_s) + d_k(1-T_d)]$ i. hissenin net dönem sonu değeriyle k. hissenin net dönem sonu değeri arasındaki kovaryansı göstermektedir.

Standart sapması varyansın karekökü olduğundan portföyün riski

$$\sigma_p^V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N X_i X_k \sigma_{ik}^V} \quad (3.7)$$

olacaktır. Böylece alım satım maliyeti ve vergiyi dikkate alan Ortalama Varyans Modeli matris notasyonlarıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\text{Min} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2C^V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M\bar{I} \\ 0 & M\bar{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix}$$

Kısıtlar

$$\begin{bmatrix} P(0) & c & (P(0)-P(A))T_s + c \\ \bar{P}(1-T_s) + \bar{d}(1-T_d) + P(A)T_s & (P(0)-P(A))T_s & 0 \\ \bar{I} & -\bar{I} & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) + W_{ep}(0) \\ E(W_p^V)^* \\ X(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ x^+ \\ x^- \end{bmatrix} \geq 0$$

Modelde,

$C^V = (\sigma_{ik}^V)_{N \times N}$ kovaryans matrisini,

$\bar{I} = N \times N$ ölçülü birim matrisini,

$0 = N \times N$ ölçülü sıfır matrisini,

$P(A) = [E(P_1(A)), E(P_2(A)), \dots, E(P_N(A))]$ hisse senetlerinin ağırlıklı

ortalama alım fiyatlarından oluşan satır vektörünü,

$\bar{P} = (E(P_1), E(P_2), \dots, E(P_N))$ hisse senetlerinin beklenen sonu değerlerinden

oluşan satır vektörünü,

$\bar{d} = (E(d_1), E(d_2), \dots, E(d_N))$ hisse senetlerinin beklenen temettülerinden

oluşan satır vektörünü,

$E(W_p^V)^* =$ Portföyün hedeflenen net dönem sonu değerini göstermektedir.

3.5.2.1 Modelin Çözümü

Modelden de görüldüğü gibi, alım satım maliyeti ve verginin dikkate alındığı durumda etkin portföylerin belirlenebilmesi için, buraya kadar kullanılan verilere ek olarak hisselerin ağırlıklı ortalama alım fiyatlarına, beklenen dönem sonu fiyatlarına ve beklenen temettülerine gerek duyulmaktadır.

Tüm sonuçların gerçekleşme olasılıkları eşit kabul edilerek hisse senetlerinin beklenen dönem sonu fiyatları ve beklenen temettüleri

$$E(P_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{ij} \quad E(d_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}$$

formülleriyle hesaplanmıştır. Formüllerde P_{ij} i. hissenin j. durumda dönem sonu fiyatını, d_{ij} yatırım döneminde i. hissenin j. durumda sağladığı temettü gelirini göstermektedir. Hisse senetlerinin ortalama alım fiyatı olarak hisse senetlerinin 2006 yılının Haziran, Temmuz ve Ağustos ayları kapanış fiyatlarının ortalaması kullanılmıştır. Hisse senetlerinin beklenen dönem sonu fiyatları, beklenen temettüleri ve ortalama alım fiyatları Tablo 3.6’da verilmiştir.

Tablo 3.6 Hisse Senetlerinin Beklenen Dönem Sonu Fiyatları, Beklenen Temettüleri ve Ağırlıklı Ortalama Alış Fiyatları

HİSSE KODU	$E(P_i)$	$E(d_i)$	$P_i(A)$	HİSSE KODU	$E(P_i)$	$E(d_i)$	$P_i(A)$
AKBNK	7,99962	0,020342	7,60000	PETKM	5,08739	0	5,25000
ARCLK	9,67391	0,035594	9,26667	PTOFS	4,83910	0,002515	5,58333
DOHOL	6,19738	0,004772	6,08333	SAHOL	5,51154	0,009649	4,86333
DYHOL	4,90855	0	5,09333	SISE	5,09447	0,007053	4,49333
EREGL	6,97390	0,034575	7,45000	SKBNK	5,24955	0	5,14667
FINBN	6,68499	0	5,80000	TCELL	8,02712	0,014476	6,91667
FORTS	4,60340	0,008867	4,05333	THYAO	5,88547	0	5,25000
GARAN	4,70511	0,001244	4,17333	TOASO	4,19823	0,006746	4,06000
GSDHO	1,23476	0,000542	1,31333	TSKB	2,98485	0	2,33000
IHLAS	0,57559	0,000049	0,64667	YUPRS	23,83470	0,206278	27,16667
ISGYO	2,75745	0,003435	2,56667	VESTL	3,55085	0	3,70000
KCHOL	4,93873	0,001113	5,12333	YKBNK	2,75326	0	2,53667
MIGRS	15,67504	0,014363	12,96667				

Hisse senetlerinin net dönem sonu değerlerinin varyansları

$$(\sigma_i^v)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[P_{ij}(1-T_s) + d_{ij}(1-T_d) - E(P_{ij}(1-T_s) + d_{ij}(1-T_d)) \right]^2 \quad i=1, 2, \dots, N$$

net dönem sonu değerleri arasındaki kovaryanslar

$$(\sigma_{ik}^v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[P_{ij}(1-T_s) + d_{ij}(1-T_d) - E(P_{ij}(1-T_s) + d_{ij}(1-T_d)) \right] \times \\ \left[P_{kj}(1-T_s) + d_{kj}(1-T_d) - E(P_{kj}(1-T_s) + d_{kj}(1-T_d)) \right] \\ i=1, 2, \dots, N \quad , \quad k=1, 2, \dots, N$$

şeklinde hesaplanmış ve oluşturulan varyans kovaryans matrisi EK-5’te verilmiştir.

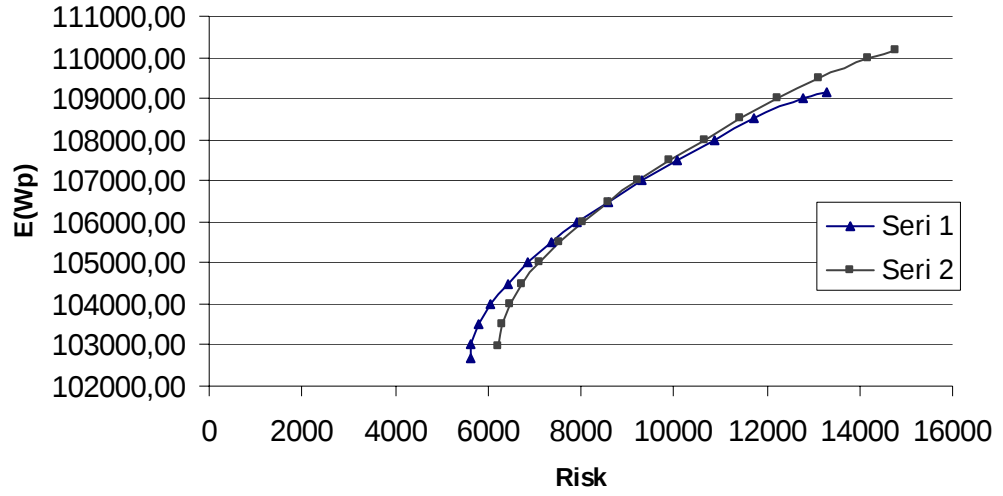
Model, önce ikinci kısıt dikkate alınmadan çözülerek global minimum varyans portföy belirlenmiştir. Bu portföyün beklenen dönem sonu net değeri (3.6), risk ise (3.7) ile verilen formülle hesaplanmış ve beklenen dönem sonu net değeri 102.660 YTL, riski 5610,35 YTL olarak belirlenmiştir. Daha sonra portföyün hedeflenen dönem sonu net değerine 103.000’den başlayarak 500 YTL aralıklarla değişik değerler verilerek model tekrar tekrar çözülmüş ve etkin portföyler belirlenmiştir. Belirlenen 15 adet portföyün beklenen dönem sonu net değerleri, varyansları ve standart sapmaları Tablo 3.7’de, Modelin çözüm sonuçları EK-6’da gösterilmiştir.

Çözüm sonuçlarına bakıldığında yine etkin portföylerde işlem kodları AKBNK, FINBN, MIGRS, PTOFS, TCELL, TSKB ve TUPRS olan hisse senetlerinin yer aldığı görülmektedir. Etkin portföylerin beklenen dönem sonu net değerleri 102.260–109.158 aralığında, riskleri 5610,35–13307,52 aralığında değişmektedir.

Tablo 3.7 Vergi ve Alım Satım Maliyetinin Olduğu Durumda Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Net Değerleri, Varyansları ve Standart Sapmaları

	$(\sigma_p^V)^2$	σ_p^V	$E(W_p^V)$
Portföy 1	31.476.000	5.610,35	102.660,00
Portföy 2	31.916.000	5.649,42	103.000,00
Portföy 3	33.651.000	5.800,95	103.500,00
Portföy 4	36.731.000	6.060,61	104.000,00
Portföy 5	41.162.000	6.415,76	104.500,00
Portföy 6	46.924.000	6.850,11	105.000,00
Portföy 7	54.114.000	7.356,22	105.500,00
Portföy 8	62.988.000	7.936,50	106.000,00
Portföy 9	73.749.000	8.587,72	106.500,00
Portföy 10	86.505.000	9.300,81	107.000,00
Portföy 11	101.260.000	10.062,80	107.500,00
Portföy 12	118.110.000	10.867,84	108.000,00
Portföy 13	137.350.000	11.719,64	108.500,00
Portföy 14	163.090.000	12.770,67	109.000,00
Portföy 15	177.090.000	13.307,52	109.158,00

Belirlenen etkin portföylerin oluşturduğu etkin sınır ve alım satım maliyetini içeren modele göre belirlenen etkin sınır Şekil 3.3’de gösterilmiştir. Şekilde seri 1 vergi ve alım satım maliyetinin olduğu durumda etkin sınırı, seri 2 yalnız alım satım maliyetinin olduğu durumda etkin sınırı göstermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi, vergi etkin sınırı orijine doğru kaydırmıştır.



Şekil 3.3 Verginin Olduğu ve Olmadığı Durumlarda Etkin Sınır

3.5.3 Vergi, Alım Satım Maliyeti ve Açığa Satışı İçeren Model

Açığa satış işleminin Markowitz modeline Black Fischer tarafından karar değişkenlerinin negatif olmamasını sağlayan kısıdın kaldırılması şeklinde dahil edildiği birinci bölümde belirtilmişti. Açığa satışın modele bu şekilde dahil edilmesi, açığa satıştan elde edilen gelirlerin diğer menkul kıymetlerin alınmasında kullanılabildiği, herhangi bir teminatın gerekmediği vs. gibi gerçekçi olmayan varsayımlara dayanmaktadır. Oysa menkul kıymetlerin açığa satışından elde edilen hasılat, kısa pozisyon kapatılıncaya kadar aracı kurum tarafından tutulmakta, ayrıca belirli bir miktar teminat talep olunmaktadır. Çalışmanın bu kısmında Türkiye’deki açığa satış koşulları göz önünde bulundurularak ve daha gerçekçi varsayımlara dayanarak Markowitz modeli vergi ve alım satım maliyetleri ile birlikte açığa satışı de kapsayacak şekilde genişletilecektir.

Sermaye piyasası mevzuatına göre, müşteri açığa satış işleminde başlangıçta %50 oranında özkaynak yatırmak zorundadır. Bu oranın hesaplanmasında,

(İşleme konu kıymetlerin cari piyasa değeri – açığa satışa konu sermaye piyasası araçlarının piyasa değeri)/ işleme konu kıymetlerin cari piyasa değeri

formülü kullanılmaktadır.⁹⁰ İşleme konu kıymetlerin cari piyasa değeri, açığa satıştan elde edilen satış hasılatı ile özkaynak olarak yatırılan nakit ve sermaye piyasası araçlarının toplamından oluşmaktadır.

Bu formüle göre hesaplanan özkaynak oranının %50 olması, yatımcının açığa satıştan elde edilen hasılatı ek olarak açığa satılan menkul kıymetlerin piyasa değerinin tamamı kadar özkaynak yatırmak zorunda olduğu anlamına gelmektedir. Buna göre portföy revizyonu sonrasında yatırmcının kredi hesabında bulunması gereken tutar, yani işleme konu kıymetlerin cari piyasa değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$C(1)=2\sum_{i=1}^N X_{N+i}P_i(0) \quad (3.8)$$

Burada,

$C(1)$ = İşleme konu kıymetlerin cari piyasa değerini,

X_{N+i} = Yatırım dönemi boyunca yatırmcının kısa pozisyon aldığı i. hisse senedi sayısını göstermektedir.

Revizyon öncesi aracı kurum tarafından tutulan açığa satıştan elde edilen hasılatla özkaynak toplamı ($C(0)$) ile gösterilirse, $C(1)-C(0)$ dönem başı itibariyle bir nakit çıkışıdır ve bu yüzden bütçe kısıdının sol tarafına eklenmesi gerekir.⁹¹

Revizyon öncesi yatırmcının kısa pozisyonunda olduğu i. hisse senedinin sayısı $X_{N+i}(0)$ 'la gösterilirse, revizyon sonucunda elde edilen toplam açığa satış hasılatı

$$\sum_{i=1}^N (X_{N+i} - X_{N+i}(0))P_i(0)$$

⁹⁰ Açığa satış işlemlerinin ilke ve esasları 14.07.2003 tarihli ve 25168 sayılı Resmi Gazetede yayımlanan “Sermaye Piyasası Araçlarının Kredili Alım, Açığa Satış ve Ödünç Alma ve Verme İşlemleri Hakkında Tebliğ” ve bu tebliğe değışiklik yapılmasına dair 2003–2005 yolları arasında çıkarılan dört farklı tebliğle düzenlenmiştir.

⁹¹ Burada, basitlik için teminatın tamamının nakit olarak yatırılacağı varsayılmaktadır.

olacaktır. Bu tutar bir nakit girişidir (negatif olduğunda daha önce açığa satılmış hisselerin geri alınması için kullanılan nakit çıkışıdır) ve dolayısıyla bütçe kısıdının sağ tarafına eklenmesi gerekmektedir.

Açığa satış işlemleri sonucunda ödenecek toplam işlem maliyeti

$$\sum_{i=1}^n x_{N+i}^+ c_i + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^- c_i ,$$

dönem başı itibarıyla ödenecek vergi ise

$$T_s \sum_{i=1}^N x_{N+i}^- [P_{N+i}(A) - P_i(0)]$$

olacaktır.

Bu ifadelerde,

x_{N+i}^+ = Açığa satılan i. hisse senedi sayısını,

x_{N+i}^- = Daha önce açığa satılan i. hisseden geri alınanların sayısını,

$P_{N+i}(A)$ = i. hisse senedinin ortalama açığa satış fiyatını göstermektedir.

İşlem maliyeti ve ödenecek vergi de dikkate alındığında, açığa satışın olduğu durumda bütçe kısıdı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N c_i x_i^+ + \sum_{i=1}^N x_i^- [[P_i(0) - P_i(A)] T_s + c_i] + \\ & + C(1) - C(0) + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^+ c_i + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^- [[P_{N+i}(A) - P_i(0)] T_s + c_i] = \\ & = F(0) + W_{ep}(0) + \sum_{i=1}^N (X_{N+i} - X_{N+i}(0)) P_i(0) \end{aligned}$$

Bu ifadede $C(1)$ yerine (3.8)'le verilen ifade yerine yazılır ve tekrar düzenlenirse, bütçe kısıdı

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N X_{N+i} P_i(0) + \sum_{i=1}^N x_i^+ c_i + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^+ c_i + \sum_{i=1}^N x_i^- \left[[P_i(0) - P_i(A)] T_s + c_i \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^- \left[[P_{N+i}(A) - P_i(0)] T_s + c_i \right] = F(0) + W_{ep}(0) + C(0) - \sum_{i=1}^N X_{N+i}(0) P_i(0) \end{aligned}$$

şekline dönüşür.

Açığa satılan hisselerin toplam dönem sonu net değeri ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.⁹²

$$\begin{aligned} & C(1) - \sum_{i=1}^N X_{N+i} d_i (1 - T_d) - \sum_{i=1}^N X_{N+i} P_i - \\ & T_s \left[\sum_{i=1}^N X_{N+i} (P_i(0) - P_i) + \sum_{i=1}^N (X_{N+i} - x_{N+i}^+) (P_{N+i}(A) - P_i(0)) \right] \end{aligned}$$

Açığa satılan hisselerin sahiplerine temettü dağıtılması durumunda, açığa satan tarafından söz konusu temettünün net tutarının ödünç veren tarafa ödenmesi gerekir. Yukarıda verilen ifadedeki ikinci terim ödünç verenlere ödenecek toplam net temettü miktarını göstermektedir. İfadedeki üçüncü terim açığa satılan hisselerin dönem sonundaki toplam alış bedelini, sonuncu terim ise ödenecek vergi miktarını göstermektedir.

Bu ifadede (3.8) dikkate alınır ve tekrar düzenlenirse,

$$- \sum_{i=1}^N X_{N+i} \left[P_i (1 - T_s) + d_i (1 - T_d) + P_{N+i}(A) T_s - 2P_i(0) \right] + \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ \left[P_i(0) - P_{N+i}(A) \right] T_s$$

elde edilir. Portföyün dönem sonu net değeri, dönem boyunca elde tutulan hisselerin dönem sonu net değerleri ile açığa satılan hisselerin dönem sonu net değerlerinin toplamına eşit olacaktır.

⁹² Özkaynak oranı sürdürme teminatı olan %35'in altına düştüğü takdirde yatırımcının, özkaynak oranını belirli bir süre içerisinde başlangıç özkaynak oranı düzeyine (%50) tamamlaması gerekmektedir. Fakat Markowitz modeli ve dolayısıyla burada açıklanan modeller statik olduğundan teminat tutarının dönem başında portföy revize edilirken ayarlandığı ve bu tutarın bir sonraki revizyona kadar değişmediği yani, $C(1)$ 'in sabit kaldığı varsayılmaktadır.

$$W_p^V = \sum_{i=1}^N X_i [P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d) + P_i(A)T_s] + \sum_{i=1}^N x_i^+ [P_i(0) - P_i(A)]T_s -$$

$$\sum_{i=1}^N X_{N+i} [P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d) + P_{N+i}(A)T_s - 2P_i(0)] + \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ [P_i(0) - P_{N+i}(A)]T_s$$

Buna göre portföyün beklenen dönem sonu net değeri

$$E(W_p^V) = \sum_{i=1}^N X_i [E(P_i)(1-T_s) + E(d_i)(1-T_d) + P_i(A)T_s] + \sum_{i=1}^N x_i^+ [P_i(0) - P_i(A)]T_s -$$

$$\sum_{i=1}^N X_{N+i} [E(P_i)(1-T_s) + E(d_i)(1-T_d) + P_{N+i}(A)T_s - 2P_i(0)] + \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ [P_i(0) - P_{N+i}(A)]T_s \quad (3.9)$$

portföyün dönem sonu net değerinin varyansı ise

$$(\sigma_p^V)^2 = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^N X_i (P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d)) - \sum_{i=1}^N X_{N+i} (P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d)) \right] =$$

$$= \text{Var} \left[\sum_{i=1}^N (X_i - X_{N+i}) (P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d)) \right]$$

$$(\sigma_p^V)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i - X_{N+i})(X_k - X_{N+k}) \times$$

$$\text{Cov}[P_i(1-T_s) + d_i(1-T_d), P_k(1-T_s) + d_k(1-T_d)]$$

$$(\sigma_p^V)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i - X_{N+i})(X_k - X_{N+k}) \sigma_{ik}^V$$

olacaktır. Portföyün riski varyansın karekökü alınarak bulunur.

$$\sigma_p^V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i - X_{N+i})(X_k - X_{N+k}) \sigma_{ik}^V} \quad (3.10)$$

Portföy revize edilirken aynı hisse senedinin hem açığa satılması hem de açığa satılan hisselerin satın alınmasını kısıtlamak amacıyla $M \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ x_{N+i}^-$ ifadesi de eklendiğinde, modelin amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i - X_{N+i})(X_k - X_{N+k}) \sigma_{ik}^V + M \sum_{i=1}^N x_i^+ x_i^- + M \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ x_{N+i}^-$$

Bütçe ve hedeflenen net dönem sonu değer kısıtlarına ek olarak, yatırımcının hem kısa hem de uzun pozisyonda olduğu hisse senetleri için

$$X_i - x_i^+ + x_i^- = X_i(0) \quad i=1, 2, \dots, 2N$$

koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşullar da dikkate alındığında alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışı içeren Ortalama Varyans Modeli aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i - X_{N+i})(X_k - X_{N+k}) \sigma_{ik}^V + M \sum_{i=1}^N x_i^+ x_i^- + M \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ x_{N+i}^-$$

Kısıtlar

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N X_i P_i(0) + \sum_{i=1}^N X_{N+i} P_i(0) + \sum_{i=1}^N x_i^+ c_i + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^+ c_i + \sum_{i=1}^N x_i^- \left[[P_i(0) - P_i(A)] T_s + c_i \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n x_{N+i}^- \left[[P_{N+i}(A) - P_i(0)] T_s + c_i \right] = F(0) + W_{ep}(0) + C(0) - \sum_{i=1}^N X_{N+i}(0) P_i(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N X_i \left[E(P_i)(1-T_s) + E(d_i)(1-T_d) + P_i(A) T_s \right] + \sum_{i=1}^N x_i^+ \left[P_i(0) - P_i(A) \right] T_s + \\ & + \sum_{i=1}^N X_{N+i} \left[2P_i(0) - E(P_i)(1-T_s) - E(d_i)(1-T_d) - P_{N+i}(A) T_s \right] + \sum_{i=1}^N x_{N+i}^+ \left[P_i(0) - P_{N+i}(A) \right] T_s = E(W_p^V)^* \end{aligned}$$

$$X_i - x_i^+ + x_i^- = X_i(0) \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$X_{N+i} - x_{N+i}^+ + x_{N+i}^- = X_{N+i}(0) \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$X_{N+i} \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$x_i^+ \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$x_{N+i}^+ \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$x_i^- \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$x_{N+i}^- \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

3.5.3.1 Çözüm Süreci

Yukarıda verilen modelin amaç fonksiyonu kuadratik, kısıtları doğrusal olduğundan bu model de bir kuadratik programlama problemidir. Modelin çözümünde gerek duyulan amaç fonksiyonunun Hessian matrisi aşağıdaki gibidir.

$$H = \begin{bmatrix} 2C^V & -2C^V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2C^V & 2C^V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M\dot{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M\dot{I} \\ 0 & 0 & M\dot{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M\dot{I} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

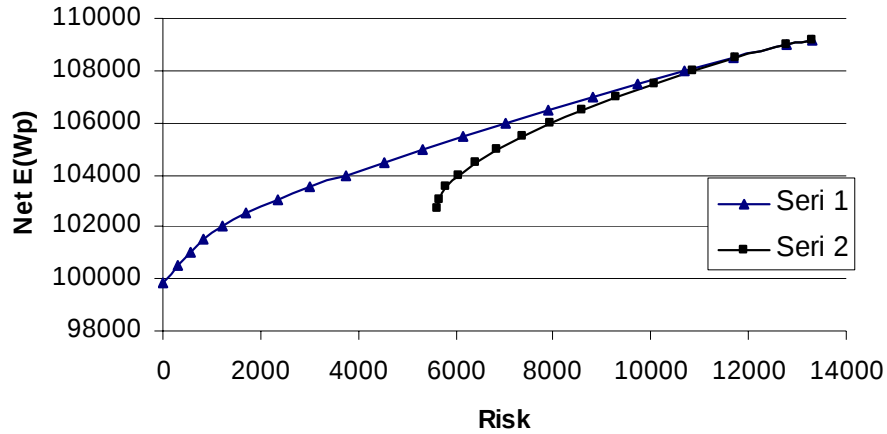
Yine dönem başı itibariyle, yatırımcının elinde 100.000 YTL değerinde çalışmanın kapsamına alınan hisse senetlerinden oluşan eşit ağırlıklı bir portföy olduğu ve bunu revize etmek istediği varsayılmıştır. Dolayısıyla

$$F(0)=0, C(0)=0, X_{N+i}(0)=0 \quad P_{N+i}(A)=0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

kabul edilmiştir.

Model, öncelikle ikinci kısıt dikkate alınmadan çözülerek global minimum varyans portföy belirlenmiştir. Bu portföyün beklenen dönem sonu net değeri (3.9), riski (3.10) formülüyle hesaplanmış, beklenen dönem sonu net değeri 99.873,91YTL, riski sıfır olarak belirlenmiştir.⁹³ Daha sonra portföyün hedeflenen dönem sonu net değerine 500 YTL aralıkla değişik değerler verilerek tekrar tekrar çözülmüş 20 etkin portföy belirlenmiştir. Bulunan etkin portföylerin beklenen dönem sonu net değerleri varyansları ve standart sapmaları Tablo 3.8’de, modelin çözüm sonuçları EK-7’de verilmiştir.⁹⁴

Bu modele göre belirlenen etkin portföylerin oluşturduğu etkin sınır ve alım satım maliyeti ve verginin olduğu durumda etkin sınır, Şekil 3.4’de verilmiştir. Şekilde seri1 açığa satışa izin verildiği durumda etkin sınırı, seri2 izin verilmediği durumda etkin sınırı göstermektedir. Görüldüğü gibi, açığa satış etkin sınırı sola doğru genişleterek her bir hedeflenen dönem sonu net değer düzeyinde daha düşük riskli portföyler oluşturma olanağı sağlamaktadır.



Şekil 3.4. Açığa Satışın Olduğu ve Olmadığı Durumda Etkin Sınır

⁹³ Bir hisse senedinin dönem sonu net değeriyle açığa satılmış aynı hissenin dönem sonu net değeri arasında tam negatif korelasyon bulunduğundan, hisse senetlerinde hem uzun hem de aynı sayıda hissede kısa pozisyon alarak riski sıfırlamak olanaklıdır.

⁹⁴ Ekte X_s , x_s^- ve x_s^+ sırasıyla yatırımcının kısa pozisyon aldığı hisse sayılarını, geri alınan açığa satılmış hisse sayılarını, revizyon zamanı açığa satılan hisselerin sayılarını göstermektedir.

Tablo 3.8 Alım Satım Maliyeti, Vergi ve Açığa satışın Olduğu Durumda Etkin Portföylerin Beklenen Dönem Sonu Net Değerleri, Varyansları ve Riskleri

	$(\sigma_p^V)^2$	σ_p^V	$E(W_p^V)$
Portföy 1	0,00	0,00	99873,914
Portföy 2	90.664,00	301,10	100.500,00
Portföy 3	299.110,00	546,91	101.000,00
Portföy 4	687.020,00	828,87	101.500,00
Portföy 5	1.453.800,00	1.205,74	102.000,00
Portföy 6	2.941.500,00	1.715,08	102.500,00
Portföy 7	5.480.400,00	2.341,03	103.000,00
Portföy 8	9.154.200,00	3.025,59	103.500,00
Portföy 9	14.142.000,00	3.760,59	104.000,00
Portföy 10	20.503.000,00	4.528,02	104.500,00
Portföy 11	28.387.000,00	5.327,95	105.000,00
Portföy 12	37.950.000,00	6.160,36	105.500,00
Portföy 13	49.217.000,00	7.015,48	106.000,00
Portföy 14	62.386.000,00	7.898,48	106.500,00
Portföy 15	77.507.000,00	8.803,81	107.000,00
Portföy 16	94.754.000,00	9.734,17	107.500,00
Portföy 17	114.290.000,00	10.690,65	108.000,00
Portföy 18	136.250.000,00	11.672,62	108.500,00
Portföy 19	163.090.000,00	12.770,67	109.000,00
Portföy 20	177.090.000,00	13.307,52	109.158,00

SONUÇ

Portföy teorilerine göre, bir yatırımcı için optimal portföy, o yatırımcının beklenen faydasını maksimize eden portföydür. Tipik bir yatırımcının faydasının, portföyün dönem sonu değerinin veya getirisinin azalarak artan fonksiyonu olduğu, yani yatırımcının getiriye doyumsuz ve riskten kaçınan olduğu düşünülmektedir. Riskten kaçınan yatırımcı olarak bilinen bu tip yatırımcılar için rasyonel davranış, tek bir menkul kıymete yatırım yapmak ve o menkul kıymetin taşıdığı tüm riski üstlenmek yerine, birden fazla menkul kıymete yatırım yaparak sistematik olmayan riski ve dolayısıyla portföyün toplam riskini en aza indirmektir.

1950'lere kadar Geleneksel Portföy Teorisi çerçevesinde, portföydeki menkul kıymet çeşit sayısı arttıkça portföyün riskinin düşeceği, buna göre portföyde beklenen getirisi yüksek olan çok sayıda menkul kıymete yer verilmesi gerektiği düşünülmekteydi. 1950'lerde Markowitz, geliştirdiği Ortalama Varyans Modeli ile yatırımcıların kendi optimal portföylerini etkin portföyler arasından seçeceklerini ve bu portföylerin oluşturulabilmesi için menkul kıymetlerin getirileri arasındaki ilişkilerin de dikkate alınması gerektiğini ortaya koymuştur. Ayrıca etkin portföy seçimini, hedeflenen getiri düzeyinde portföy varyansının minimizasyonu şeklinde bir kuadratik programlama problemi olarak ifade etmiştir.

Portföyün getirisi ile dönem sonu değeri arasında doğrusal bir ilişki bulunduğundan, etkin portföyler, portföyün hedeflenen dönem sonu değeri düzeyinde dönem sonu değerin varyansının minimize edilmesiyle de belirlenebilir. Bu çalışmada, sağladığı bir takım kolaylıklar nedeniyle, etkin portföyler belirlenirken getiri yerine dönem sonu değerden hareket edilmiştir.

Çalışmada, önce Markowitz modeli kuadratik programlamayla çözülerek İMKB-30 Endeksinde yer alan hisse senetlerinden oluşturulabilecek etkin portföyler belirlenmiştir. Daha sonra, söz konusu model alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışı da kapsayacak şekilde üç aşamada genişletilmiş ve oluşturulan modeller yardımıyla, elinde eşit ağırlıklı bir portföy bulunan bireysel yatırımcının İMKB-30 Endeksindeki hisse senetlerinden oluşturabileceği etkin portföyler belirlenmiştir.

Birinci aşamada alım satım maliyetleri modele dahil edilmiş ve oluşturulan model kuadratik programlamayla çözümlenerek etkin portföyler belirlenmiştir. Bu modele göre belirlenen etkin portföyler Markowitz etkin sınırı üzerindeki portföylerle karşılaştırılmış ve alım satım maliyeti dikkate alındığında her hedeflenen dönem sonu değer düzeyinde etkin portföylerin risklerinin daha büyük olduğu ve Markowitz etkin sınırının aşağıya doğru kaydığı görülmüştür.

İkinci aşamada alım satım maliyetleriyle birlikte, sermaye kazancı ve temettü gelirleri üzerinden ödenen vergilerin de dikkate alındığı bir model oluşturulmuştur. Oluşturulan model yardımıyla etkin portföyler belirlenmiş ve verginin dikkate alınmadığı durumla karşılaştırıldığında etkin sınırın orijine doğru kaydığı görülmüştür.

Üçüncü aşamada yatırımcıların açığa satış olanaklarının da dikkate alındığı bir model oluşturulmuştur. Bu model de kuadratik programlamayla çözülmüş ve alım satım maliyeti, vergi ve açığa satışın olduğu durumda etkin portföyler belirlenmiştir. Diğer modellere göre belirlenen etkin portföylerle karşılaştırıldığında, açığa satışın etkin sınırı sola doğru genişlettiği ve yatırımcılara her bir hedeflenen getiri düzeyinde daha düşük riskli portföyler oluşturma olanağı sağladığı sonucuna varılmıştır.

Bireysel yatırımcılar için geliştirilen bu modeller, benzer şekilde kurumsal yatırımcılar için de geliştirilebilir. Ayrıca, modeller risksiz borç verme, borç alma olanaklarını ve marjlı işlemleri de kapsayacak şekilde kuadratik programlama çerçevesinde genişletilebilir

KAYNAKÇA

- Akgüç, Öztin: **Finansal Yönetim**, 7.bs., Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1998
- Alexander, Gordon J.;
Sharpe, William F.;
Barley, Jeffery V.: **Fundamentals of Investments**, 2nded., PrenticeHall, Englewood Cliffs, 1993
- Altay, Erdinç: **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları No: 40, İstanbul, 2004
- Bazaraa, Mokhtar S.;
Sherali, Hanif D.;
Shetty, C. M.: **Nonlinear Programming**, John Wiley and Sons Inc., 1993
- Berk, Niyazi: **Finansal Yönetim**, 8. bs., Türkmen Kitabevi, 2005
- Bodie, Zvi; Kane, Alex; Marcus, Alan J.: **Investments**, 6th ed., McGraw Hill, 2005
- Brealey, Richard A.;
Myers, Stewart C.;
Marcus, Alan J.: **İşletme Finansının Temelleri**, Çev: Ünal Bozkurt, Türkan Arıkan, Hatice Doğukanlı, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1997
- Brigham, Eugene F.: **Finansal Yönetimin Temelleri**, Çev: Özdemir Akmud, Halil Sarıaslan, Ankara Üniversitesi Yayınları No: 206, 1996
- Ceylan, Ali;
Korkmaz, Turhan: **Sermaye Piyasası ve Menkul Değer Analizi**, Etkin Kitapevi, Bursa, 2000

- Çömez, Niyazi: “Menkul Sermaye Gelirleri: 2007 Yılı Vergi Rehberi”, (Çevirimiçi)
<http://www.verginet.net/UserFiles/File/Gündem/2007/Menkul%20sermaye%20gelirleri%20%202007%20Vergi%20Rehberi.pdf>, 22 Haziran
- Elton, Edwin J.; v.d.: **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**, 6th ed., John Wiley and Sons, New York, 2003
- Francis, Jack Clark: **Investment Analysis and Management**, 5th ed., McGrawHill, New York, 1991
- Francis, Jack Clark; Archer, Stephen H.: **Portfolio Analysis**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971
- Gökçe, Alp Gökçe: “Risk, Çeşitlendirme ve İMKB–30 Endeksinde İyi Çeşitlendirilmiş Portföy Büyüklüğünün Hesaplanması”, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İ.Ü Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Finansmanı Anabilim Dalı, İstanbul, 2001
- Haugen, Robert A.: **Modern Investment Theory**, 3rd ed. , Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993
- Hillier, Frederick S.: Gerald J. Lieberman, **Introduction to Operation Research**, 7th ed., McGraw Hill, 2001
- İstanbul Menkul Kıymetler Borsası: **İMKB Aylık Bülten Dergisi**, Eylül 2006, (Çevrimiçi)
<http://www.imkb.gov.tr/veri.htm>, 10 Temmuz 2007
- İstanbul Menkul Kıymetler Borsası: **Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu**, 16. bs., Anka Basım, İstanbul, 2001

- Jensen, Paul A.;
Brad, Jonathan F.: **Operations Research Models and Methods**, John Wiley and Sons Inc. , 2003
- Karslı, Muharrem: **Sermaye Piyasası Borsa Menkul Kıymetler**, Alfa Basım Yayın, İstanbul, 2003
- Konuralp, Gürel: **Sermaye Piyasaları: Analizler, Kuramlar ve Portföy Yönetimi**, 2. bs.,Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2001
- Kroll, Yoram;
Levi, Haim;
Markowitz, Harry M.: “Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization”, **Journal of Finance**, Vol. 39, No:1, March 1984, pp. 47-61
- Kurtuluş, Kemal: **Pazarlama Araştırmaları**, 8. bs., Literatür Yayıncılık, 2004
- Lee, Cheng R.;
Finnerty, Joseph E.;
Wort, Donald H.: **Security Analysis and Portfolio Management**, Scott Foresman and Company, 1990
- Levy, Haim: **Stochastic Dominance: Investment Decision Making Under Uncertainty**, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998
- Markowitz, Harry M.: **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, John Wiley & Sons, 2nd ed., USA, 1991
- Markowitz, Harry M.: “Portfolio Selection”, **Journal of Finance**, Vol. VII, No:1, March 1952, pp. 77–91
- Orhunbilge, Neyran: **Tanımsal İstatistik, Olasılık ve Olasılık Dağılımları**, İşletme Fakültesi Yayın No: 279, İstanbul, 2000

- Pogue, G. A.: “An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions’ Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes”, **Journal of Finance**, Vol. 25, No:5, December 1970, pp.1005–1025
- Rosenberg, Jerry M.: **Dictionary of Investing**, John Wiley and Sons , USA, 1993
- Sarıkamış, Cevat: **Sermaye pazarları**, 4.bs., Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul, 2000
- Sermaye Piyasası Kurulu “Sermaye Piyasası Araçlarının Kredili Alım, Açığa Satış ve Ödünç Alma ve Verme İşlemleri Hakkında Tebliğ” Seri: V, No:65, **Resmi Gazete**, Sayı: 25168, 14.07.2003,(Çevirimiçi)
http://www.spk.gov.tr/mevzuat/html/bölüm_4/4_1_3_6_seriv_no65.htm.
- Taha, Hamdi A.: **Yöneylem Araştırması**, Çev. Ş. Alp Baray, Şakir Esnaf, Literatür Yayıncılık, 2000
- Timor, Mehpare: **Yöneylem Araştırması ve İşletmecilik Uygulamaları**, İşletme Fakültesi Yayın No:280, 2001
- Tobin, James: “Liquidity Preferences as Behavior Toward Risk”, **Review of Economic Studies**, Vol XXV, Feb, 1958, pp.65–86
- Tulunay, Yılmaz: **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları**, İşletme Fakültesi Yayın No:244, İstanbul, 1991
- Ulucan, Aydın: **Portföy Optimizasyonu**, Siyasal kitabevi, Ankara, 2004

Winston, Wayne L.: **Operation Research Applications and Algoritms**,
3th ed., Duxbury Press, USA, 1994

EKLER

EK-1. Hisse Senetlerinin Olası Dönem Sonu Fiyatları ve Temettüleri:

	AKBNK		ARCLK		DOHOL		DYHOL		EREGL	
Durum	P ₁	d ₁	P ₂	d ₂	P ₃	d ₃	P ₄	d ₄	P ₅	d ₅
1	7,508	0	9,450	0	5,476	0	4,622	0	6,372	0
2	8,611	0	9,602	0	5,945	0	4,496	0	6,309	0
3	7,342	0	9,711	0	6,150	0	4,423	0	6,839	0
4	7,741	0	8,727	0	6,581	0	4,248	0	7,664	0
5	6,552	0,2114	8,269	0,4219	4,829	0,1718	4,227	0	5,682	0,1609
6	7,544	0	9,535	0	5,993	0	5,101	0	6,503	0
7	6,535	0	8,528	0	5,140	0	4,645	0	6,219	0
8	9,030	0	9,374	0	7,800	0	4,796	0	6,530	0
9	8,102	0	12,466	0	6,980	0	5,470	0	6,939	0
10	7,894	0	10,210	0	6,217	0	6,100	0	6,904	0
11	9,964	0	10,213	0	7,165	0	5,714	0	8,091	0
12	7,274	0	9,816	0	5,259	0	4,612	0	5,537	0
13	8,725	0	9,212	0	5,669	0	4,564	0	8,229	0
14	8,383	0	9,275	0	5,880	0	4,593	0	7,523	0
15	8,877	0	9,628	0	6,721	0	5,226	0	7,623	0
16	8,175	0	10,434	0	6,260	0	5,083	0	7,118	0
17	8,508	0	10,800	0,8595	6,206	0	4,601	0	6,292	0,9038
18	7,868	0	7,633	0	4,919	0	4,261	0	6,174	0
19	6,345	0,2422	8,521	0	5,565	0	4,596	0	6,356	0
20	7,425	0	9,450	0	6,013	0	4,901	0	7,113	0
21	7,750	0	9,908	0	7,364	0	5,209	0	7,193	0
22	9,517	0	10,125	0	6,746	0	5,235	0	6,920	0
23	7,925	0	8,130	0	5,454	0	4,945	0	6,865	0
24	7,579	0	9,611	0	5,763	0	4,812	0	7,180	0
25	8,234	0	10,594	0	6,134	0	4,501	0	7,209	0
26	8,198	0	9,450	0	6,356	0	5,098	0	7,640	0
27	8,603	0	10,093	0	6,698	0	5,187	0	8,136	0
28	8,585	0	9,923	0	6,055	0	4,937	0	6,755	0,1800
29	7,222	0	8,704	0	5,571	0	4,345	0	6,289	0
30	7,307	0	8,653	0	4,837	0	4,289	0	5,461	0
31	7,806	0,2788	10,320	0	5,992	0	4,884	0	8,092	0
32	8,287	0	10,965	0	7,182	0	5,330	0	7,324	0
33	6,854	0	7,936	0	5,522	0	3,890	0	6,221	0
34	8,763	0	11,608	0	9,151	0	6,332	0	10,095	0
35	7,248	0	8,393	0	5,349	0	4,606	0	5,994	0
36	9,705	0	12,994	0	8,164	0	6,832	0	7,670	0

EK-1. Devamı:

	FINBN		FORTS		GARAN		GSDHO		IHLAS	
Durum	P ₆	d ₆	P ₇	d ₇	P ₈	d ₈	P ₉	d ₉	P ₁₀	d ₁₀
1	6,366	0	4,202	0	4,689	0	1,086	0	0,551	0
2	5,998	0	4,851	0	4,459	0	1,161	0	0,553	0
3	5,996	0	4,345	0	4,889	0	1,054	0	0,538	0
4	6,170	0	3,517	0	3,740	0	1,170	0	0,556	0
5	6,620	0	3,469	0	3,880	0	1,071	0	0,486	0
6	5,421	0	3,993	0	4,883	0,0448	1,133	0	0,560	0
7	6,470	0	3,636	0	3,765	0	0,963	0	0,615	0
8	5,808	0	4,576	0	4,370	0	1,276	0	0,573	0
9	7,563	0	4,526	0	5,577	0	1,165	0	0,548	0
10	6,600	0	4,889	0	4,814	0	1,443	0	0,629	0
11	8,116	0	5,601	0	5,082	0	1,532	0	0,609	0
12	6,553	0	4,318	0	4,480	0	1,098	0	0,559	0
13	6,179	0	4,675	0	4,739	0	1,662	0	0,595	0
14	7,354	0	4,380	0	4,651	0	1,404	0	0,552	0
15	5,947	0	4,280	0	4,990	0	1,229	0	0,658	0
16	7,360	0	4,260	0	5,002	0	1,054	0	0,467	0
17	7,763	0	4,111	0	4,661	0	1,493	0,0195	0,667	0,0018
18	7,015	0	5,248	0	4,331	0	0,969	0	0,469	0
19	5,700	0	4,323	0	3,855	0	1,015	0	0,491	0
20	6,978	0	4,598	0	4,982	0	1,522	0	0,570	0
21	7,500	0	5,857	0	5,626	0	1,674	0	0,633	0
22	9,038	0	6,742	0	5,453	0	1,268	0	0,580	0
23	6,622	0	4,354	0	3,980	0	0,989	0	0,527	0
24	5,969	0	4,047	0	5,102	0	1,240	0	0,566	0
25	7,195	0	4,540	0	4,594	0	1,600	0	0,667	0
26	6,340	0	4,376	0	4,849	0	1,194	0	0,595	0
27	6,561	0	4,362	0	4,607	0	1,248	0	0,634	0
28	6,515	0	4,993	0	4,895	0	1,053	0	0,535	0
29	5,119	0	3,380	0,3192	4,171	0	1,009	0	0,530	0
30	5,944	0	4,476	0	4,124	0	0,983	0	0,488	0
31	7,079	0	5,437	0	4,433	0	1,273	0	0,683	0
32	6,789	0	4,796	0	5,218	0	1,233	0	0,603	0
33	5,048	0	3,900	0	4,480	0	1,236	0	0,545	0
34	8,687	0	5,733	0	5,878	0	1,494	0	0,702	0
35	6,443	0	4,402	0	4,029	0	1,044	0	0,514	0
36	7,833	0	6,528	0	6,105	0	1,413	0	0,673	0

EK-1. Devamı:

	ISGYO		KCHOL		MIGRS		PETKM		PTOFS	
Durum	P ₁₁	d ₁₁	P ₁₂	d ₁₂	P ₁₃	d ₁₃	P ₁₄	d ₁₄	P ₁₅	d ₁₅
1	2,620	0	4,334	0	16,386	0	4,858	0	4,048	0
2	2,660	0	5,094	0	17,712	0	4,910	0	4,615	0
3	2,904	0	5,354	0	14,482	0	5,347	0	4,912	0
4	2,446	0	4,137	0	14,849	0	4,859	0	3,499	0
5	1,999	0,0374	4,089	0	12,350	0	4,352	0	4,179	0,0905
6	2,703	0	4,928	0	16,747	0	4,969	0	4,500	0
7	2,333	0	4,344	0	14,589	0	4,294	0	6,070	0
8	2,935	0	5,326	0	18,115	0	4,789	0	5,831	0
9	3,032	0	5,587	0	16,940	0	4,986	0	4,285	0
10	2,831	0	4,641	0	15,085	0	5,182	0	5,752	0
11	3,023	0	6,413	0	17,003	0	5,898	0	5,194	0
12	2,428	0	4,015	0	15,733	0	4,864	0	4,995	0
13	3,263	0	4,743	0	15,068	0	5,820	0	4,145	0
14	2,544	0	5,561	0	16,648	0	4,966	0	5,079	0
15	2,676	0	5,066	0	15,346	0	5,179	0	5,476	0
16	2,808	0	4,944	0	14,913	0	5,522	0	5,346	0
17	3,284	0,0863	5,421	0	16,871	0,2387	5,361	0	5,662	0
18	2,255	0	4,283	0	15,443	0	4,314	0	4,004	0
19	2,304	0	4,173	0	13,608	0	3,274	0	4,254	0
20	2,652	0	4,888	0	15,346	0	5,438	0	4,284	0
21	3,011	0	4,777	0	14,114	0	6,515	0	5,713	0
22	3,041	0	5,448	0	18,404	0	5,335	0	4,740	0
23	2,546	0	4,263	0	15,536	0	4,120	0	4,406	0
24	2,495	0	4,943	0	16,474	0	6,733	0	4,394	0
25	3,638	0	5,248	0	15,669	0	5,331	0	5,272	0
26	2,911	0	5,246	0	15,684	0	5,145	0	5,046	0
27	2,860	0	5,477	0	16,572	0	5,098	0	5,120	0
28	2,640	0	5,295	0	15,861	0	5,050	0	4,715	0
29	2,501	0	4,563	0,0401	14,772	0,2783	4,910	0	4,164	0
30	2,347	0	4,107	0	12,848	0	4,470	0	4,335	0
31	3,225	0	5,090	0	17,733	0	5,758	0	5,232	0
32	2,448	0	4,860	0	14,992	0	4,429	0	5,024	0
33	3,066	0	4,325	0	13,801	0	5,221	0	4,788	0
34	3,365	0	6,417	0	17,359	0	5,959	0	5,654	0
35	2,448	0	4,312	0	13,114	0	4,550	0	4,420	0
36	3,025	0	6,082	0	18,133	0	5,339	0	5,052	0

EK-1. Devamı:

	SAHOL		SISE		SKBNK		TCELL		THYAO	
Durum	P ₁₆	d ₁₆	P ₁₇	d ₁₇	P ₁₈	d ₁₈	P ₁₉	d ₁₉	P ₂₀	d ₂₀
1	5,157	0	5,316	0	4,983	0	8,719	0	6,710	0
2	6,238	0	4,671	0	4,430	0	7,815	0	5,738	0
3	5,950	0	5,287	0	4,595	0	7,116	0	5,582	0
4	4,673	0	4,543	0	3,362	0	9,196	0	5,450	0
5	4,194	0,0599	3,871	0	4,741	0	6,600	0,2516	4,720	0
6	5,280	0	4,965	0	6,001	0	7,521	0	5,731	0
7	4,887	0	4,490	0	4,364	0	6,971	0	5,063	0
8	5,455	0	5,922	0	5,067	0	8,083	0	6,063	0
9	7,133	0	5,347	0	6,853	0	8,498	0	5,712	0
10	5,053	0	5,097	0	4,673	0	7,472	0	5,782	0
11	6,879	0	5,660	0	6,382	0	9,164	0	7,356	0
12	4,850	0	4,424	0	4,026	0	7,388	0	5,525	0
13	6,249	0	4,482	0	4,722	0	7,752	0	5,579	0
14	5,536	0	4,699	0	4,270	0	7,753	0	5,487	0
15	5,973	0	6,056	0	6,873	0	8,517	0	6,237	0
16	5,887	0	5,802	0	6,014	0	7,158	0	6,956	0
17	6,198	0,1324	5,265	0,1156	5,082	0	8,090	0,1537	6,943	0
18	4,618	0	4,389	0	4,507	0	7,076	0	4,852	0
19	4,511	0	3,946	0	4,661	0	7,537	0	5,031	0
20	5,255	0	5,024	0	5,564	0	7,425	0	5,850	0
21	5,758	0	5,326	0	7,459	0	8,028	0	5,519	0
22	6,214	0	5,403	0	7,607	0	8,272	0	5,672	0
23	4,520	0	4,555	0	5,624	0	7,445	0	4,845	0
24	5,300	0	5,324	0	4,800	0	10,401	0	6,734	0
25	5,926	0	4,843	0	5,711	0	9,380	0	6,799	0
26	5,609	0	5,421	0	4,656	0	7,058	0	5,772	0
27	5,654	0	5,501	0	5,792	0	7,446	0	5,969	0
28	5,572	0	5,315	0,1383	4,556	0	8,975	0,1159	5,658	0
29	4,887	0,1550	4,774	0	4,977	0	7,850	0	5,700	0
30	4,751	0	4,567	0	4,023	0	6,341	0	5,098	0
31	5,350	0	5,361	0	5,096	0	8,727	0	6,504	0
32	5,765	0	5,873	0	6,929	0	9,411	0	6,364	0
33	4,666	0	5,141	0	4,306	0	7,425	0	5,586	0
34	6,469	0	6,764	0	5,596	0	9,625	0	6,922	0
35	4,671	0	4,305	0	5,230	0	7,632	0	5,677	0
36	7,327	0	5,673	0	5,453	0	9,111	0	6,693	0

EK-1. Devamı:

	TOASO		TSKB		TUPRS		VESTL		YKBNK	
Durum	P ₂₁	d ₂₁	P ₂₂	d ₂₂	P ₂₃	d ₂₃	P ₂₄	d ₂₄	P ₂₅	d ₂₅
1	4,121	0	2,930	0	20,295	0	3,247	0	2,400	0
2	4,020	0	3,134	0	22,063	0	3,615	0	3,175	0
3	3,962	0	3,010	0	24,839	0	3,867	0	2,587	0
4	4,355	0	2,100	0	23,300	0	3,002	0	2,456	0
5	3,696	0,0958	2,197	0	22,052	1,6112	3,022	0	2,155	0
6	4,041	0	2,859	0	27,527	0	3,077	0	2,884	0
7	3,949	0	2,329	0	21,870	0	3,386	0	2,416	0
8	4,234	0	2,907	0	21,394	0	3,877	0	2,745	0
9	6,004	0	3,390	0	25,837	0	3,702	0	3,057	0
10	4,004	0	2,847	0	24,279	0	3,612	0	2,846	0
11	4,677	0	3,497	0	24,006	0	3,690	0	3,015	0
12	4,060	0	2,684	0	22,710	0	3,481	0	2,358	0
13	4,765	0	3,493	0	26,806	0	3,440	0	2,530	0
14	4,060	0	2,819	0	24,741	0	3,396	0	2,620	0
15	4,233	0	3,770	0	23,666	0	3,736	0	2,980	0
16	4,876	0	2,720	0	25,576	0	3,645	0	2,595	0
17	4,170	0,1471	2,817	0	23,167	2,8286	3,496	0	2,656	0
18	3,024	0	2,667	0	21,348	0	3,147	0	2,465	0
19	3,556	0	3,268	0	26,178	0	3,607	0	2,461	0
20	3,742	0	3,538	0	24,756	0	3,507	0	2,790	0
21	4,534	0	4,108	0	27,212	0	3,642	0	3,337	0
22	4,120	0	3,228	0	22,014	0	3,682	0	2,908	0
23	3,062	0	2,760	0	24,842	0	3,133	0	3,015	0
24	4,037	0	2,688	0	25,763	0	3,419	0	2,202	0
25	4,463	0	3,272	0	24,706	0	3,800	0	2,875	0
26	4,324	0	2,812	0	25,260	0	3,958	0	2,403	0
27	4,896	0	3,220	0	25,570	0	3,793	0	2,897	0
28	4,060	0	2,787	0	25,383	0	3,521	0	2,953	0
29	3,235	0	2,534	0	23,171	0	3,483	0	2,728	0
30	3,967	0	2,617	0	18,892	2,9862	2,790	0	2,142	0
31	4,507	0	2,992	0	23,512	0	3,697	0	3,258	0
32	4,697	0	2,983	0	21,358	0	3,637	0	2,809	0
33	3,340	0	2,484	0	23,897	0	3,300	0	2,507	0
34	5,721	0	3,892	0	26,726	0	4,857	0	4,269	0
35	3,785	0	2,909	0	19,641	0	3,291	0	2,242	0
36	4,839	0	3,191	0	23,692	0	4,280	0	3,385	0

EK-2. Hisse Senetlerinin Dönem Sonu Değerlerinin Varyans Kovaryans Matrisi:

NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	0,678	0,557	0,512	0,299	0,433	0,427	0,414	0,281	0,086	0,025	0,160	0,405	0,905	0,220	0,149	0,481	0,315	0,363	0,355	0,306	0,254	0,174	0,127	0,161	0,189
2	0,557	1,372	0,765	0,518	0,527	0,636	0,422	0,518	0,115	0,044	0,247	0,531	1,012	0,327	0,281	0,738	0,457	0,531	0,556	0,513	0,581	0,235	0,699	0,288	0,286
3	0,512	0,765	0,855	0,423	0,587	0,428	0,390	0,387	0,101	0,035	0,182	0,447	0,763	0,264	0,256	0,489	0,458	0,463	0,471	0,342	0,402	0,242	0,486	0,277	0,296
4	0,299	0,518	0,423	0,366	0,309	0,309	0,290	0,261	0,050	0,021	0,078	0,250	0,440	0,131	0,159	0,288	0,235	0,302	0,220	0,193	0,222	0,141	0,300	0,153	0,172
5	0,433	0,527	0,587	0,309	0,780	0,394	0,262	0,273	0,111	0,037	0,190	0,393	0,604	0,319	0,159	0,384	0,351	0,261	0,442	0,324	0,351	0,213	0,839	0,222	0,248
6	0,427	0,636	0,428	0,309	0,394	0,805	0,470	0,296	0,085	0,022	0,136	0,334	0,607	0,199	0,176	0,387	0,216	0,444	0,265	0,235	0,292	0,172	0,193	0,155	0,192
7	0,414	0,422	0,390	0,290	0,262	0,470	0,558	0,290	0,067	0,018	0,116	0,263	0,575	0,176	0,117	0,321	0,198	0,366	0,213	0,143	0,151	0,198	0,013	0,148	0,195
8	0,281	0,518	0,387	0,261	0,273	0,296	0,290	0,328	0,063	0,017	0,109	0,259	0,436	0,239	0,108	0,342	0,259	0,353	0,247	0,211	0,225	0,167	0,413	0,140	0,149
9	0,086	0,115	0,101	0,050	0,111	0,085	0,067	0,063	0,042	0,009	0,052	0,068	0,100	0,089	0,047	0,085	0,046	0,068	0,075	0,067	0,058	0,057	0,173	0,033	0,039
10	0,025	0,044	0,035	0,021	0,037	0,022	0,018	0,017	0,009	0,004	0,015	0,022	0,047	0,020	0,023	0,025	0,022	0,020	0,029	0,023	0,020	0,014	0,029	0,014	0,016
11	0,160	0,247	0,182	0,078	0,190	0,136	0,116	0,109	0,052	0,015	0,127	0,145	0,271	0,140	0,096	0,181	0,121	0,123	0,121	0,144	0,121	0,084	0,287	0,080	0,084
12	0,405	0,531	0,447	0,250	0,393	0,334	0,263	0,259	0,068	0,022	0,145	0,392	0,660	0,214	0,168	0,406	0,281	0,267	0,280	0,272	0,248	0,153	0,418	0,176	0,176
13	0,905	1,012	0,763	0,440	0,604	0,607	0,575	0,436	0,100	0,047	0,271	0,660	2,270	0,355	0,238	0,723	0,509	0,405	0,682	0,533	0,374	0,199	0,212	0,283	0,349
14	0,220	0,327	0,264	0,131	0,319	0,199	0,176	0,239	0,089	0,020	0,140	0,214	0,355	0,424	0,117	0,258	0,221	0,194	0,285	0,261	0,181	0,127	0,540	0,095	0,102
15	0,149	0,281	0,256	0,159	0,159	0,176	0,117	0,108	0,047	0,023	0,096	0,168	0,238	0,117	0,367	0,155	0,199	0,170	0,030	0,155	0,119	0,081	0,161	0,124	0,101
16	0,481	0,738	0,489	0,288	0,384	0,387	0,321	0,342	0,085	0,025	0,181	0,406	0,723	0,258	0,155	0,568	0,297	0,384	0,318	0,317	0,348	0,205	0,442	0,187	0,188
17	0,315	0,457	0,458	0,235	0,351	0,216	0,198	0,259	0,046	0,022	0,121	0,281	0,509	0,221	0,199	0,297	0,377	0,311	0,291	0,296	0,229	0,132	0,225	0,162	0,161
18	0,363	0,531	0,463	0,302	0,261	0,444	0,366	0,353	0,068	0,020	0,123	0,267	0,405	0,194	0,170	0,384	0,311	0,976	0,253	0,226	0,252	0,288	0,358	0,125	0,198
19	0,355	0,556	0,471	0,220	0,442	0,265	0,213	0,247	0,075	0,029	0,121	0,280	0,682	0,285	0,030	0,318	0,291	0,253	0,839	0,404	0,252	0,120	0,179	0,138	0,165
20	0,306	0,513	0,342	0,193	0,324	0,235	0,143	0,211	0,067	0,023	0,144	0,272	0,533	0,261	0,155	0,317	0,296	0,226	0,404	0,440	0,226	0,108	0,163	0,134	0,109
21	0,254	0,581	0,402	0,222	0,351	0,292	0,151	0,225	0,058	0,020	0,121	0,248	0,374	0,181	0,119	0,348	0,229	0,252	0,252	0,226	0,381	0,135	0,412	0,137	0,133
22	0,174	0,235	0,242	0,141	0,213	0,172	0,198	0,167	0,057	0,014	0,084	0,153	0,199	0,127	0,081	0,205	0,132	0,288	0,120	0,108	0,135	0,195	0,325	0,099	0,121
23	0,127	0,699	0,486	0,300	0,839	0,193	0,013	0,413	0,173	0,029	0,287	0,418	0,212	0,540	0,161	0,442	0,225	0,358	0,179	0,163	0,412	0,325	3,846	0,197	0,279
24	0,161	0,288	0,277	0,153	0,222	0,155	0,148	0,140	0,033	0,014	0,080	0,176	0,283	0,095	0,124	0,187	0,162	0,125	0,138	0,134	0,137	0,099	0,197	0,137	0,111
25	0,189	0,286	0,296	0,172	0,248	0,192	0,195	0,149	0,039	0,016	0,084	0,176	0,349	0,102	0,101	0,188	0,161	0,198	0,165	0,109	0,133	0,121	0,279	0,111	0,171

EK-3. Markowitz Modeline Göre Belirlenen Etkin Portföylerde Yer Alan Hisse Senetlerinin Sayıları:

	Port1	Port2	Port3	Port4	Port5	Port6	Port7	Port 8	Port 9	Port10	Port11	Port12	Port13	Port14	Port15	Port16
AKBNK	892,45	645,72	154,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
FINBN	0,00	580,58	1668,60	2740,10	3791,20	4646,80	5510,50	6421,40	7345,80	8270,10	9194,50	10119,00	11043,00	11946,00	13041,00	16528,93
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
IHLAS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
MIGRS	1276,90	1228,30	1161,90	978,92	744,02	534,75	307,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PTOFS	2792,50	2517,40	2077,00	1563,50	1016,30	467,46	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TCELL	1609,50	1695,10	1785,90	1840,30	1875,20	1870,50	1872,30	1884,10	1550,70	1217,20	883,68	550,20	216,71	0,00	0,00	0,00
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TSKB	0,00	0,00	0,00	0,00	43,45	744,28	1444,50	2156,10	3054,50	3953,00	4851,40	5749,80	6648,20	7533,60	7645,40	0,00
TUPRS	2062,00	2052,70	2036,40	2015,50	1990,50	1935,00	1870,60	1746,40	1510,20	1274,00	1037,70	801,51	565,29	297,59	0,00	0,00
VESTL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Ek-4. Alım Satım Maliyeti Dikkate Alındığında Etkin Portföylerde Yer Alan Hisse Senetlerinin Sayıları:

	Portföy1			Portföy2			Portföy3			Portföy4			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	890,32	374,32	0,00	514,41	0,00	1,59	125,42	0,00	390,58	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	0,00	0,00	661,00	1087,10	426,14	0,00	2190,00	1529,00	0,00	3266,50	2605,50	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	1273,90	1010,90	0,00	1159,00	896,02	0,00	1052,70	789,68	0,00	858,07	595,07	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	2785,80	1941,80	0,00	2282,00	1438,00	0,00	1808,90	964,92	0,00	1285,80	441,75	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1605,60	1086,60	0,00	1723,00	1204,00	0,00	1803,30	1284,30	0,00	1854,70	1335,70	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	1449
TUPRS	2057,10	1885,10	0,00	2038,90	1866,90	0,00	2020,70	1848,70	0,00	1999,10	1827,10	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

Ek-4. Devamı:

	Portföy5			Portföy6			Portföy7			Portföy8			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X(0)
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	4122,90	3461,90	0,00	4973,60	4312,60	0,00	5965,00	5304,00	0,00	6900,70	6239,70	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	628,89	365,89	0,00	390,31	127,31	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	844,00	0,00	0,00	439,24	0,00	404,76	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1858,30	1339,30	0,00	1861,30	1342,30	0,00	1747,40	1228,40	0,00	1700,70	1181,70	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	688,79	0,00	760,21	1449,00	0,00	0,00	1871,00	421,98	0,00	2632,20	1183,20	0,00	1449
TUPRS	1933,60	1761,60	0,00	1859,70	1687,70	0,00	1762,00	1590,00	0,00	1615,40	1443,40	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

Ek-4. Devamı:

	Portföy9			Portföy10			Portföy11			Portföy12			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	7825,00	7164,00	0,00	8749,40	8088,40	0,00	9673,70	9012,70	0,00	10570,00	9909,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1367,20	848,19	0,00	1033,70	514,70	0,00	700,21	181,21	0,00	519,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	3530,60	2081,60	0,00	4429,00	2980,00	0,00	5327,50	3878,50	0,00	6208,90	4759,90	0,00	1449
TUPRS	1379,20	1207,20	0,00	1143,00	970,97	0,00	906,74	734,74	0,00	629,48	457,48	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

Ek-4. Devamı:

	Portföy13			Portföy14			Portföy15			Portföy16			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	11433,00	10772,00	0,00	12550,00	11889,00	0,00	15138,00	14477,00	0,00	16474,00	15813,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	519,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	519,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	7070,20	5621,20	0,00	7592,50	6143,50	0,00	2948,30	1499,30	0,00	16,20	0,00	1432,80	1449
TUPRS	303,38	131,38	0,00	122,23	0,00	49,77	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	172,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

EK-5. Hisse Senetlerinin Dönem Sonu Net (Vergi sonrası) Değerlerinin Varyans Kovaryans Matrisi:

NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	0,551	0,452	0,416	0,243	0,351	0,346	0,336	0,228	0,070	0,020	0,130	0,328	0,734	0,179	0,121	0,391	0,255	0,295	0,288	0,248	0,206	0,141	0,106	0,130	0,153
2	0,452	1,109	0,620	0,420	0,425	0,514	0,343	0,420	0,093	0,035	0,199	0,430	0,820	0,265	0,227	0,597	0,370	0,431	0,450	0,415	0,470	0,191	0,564	0,233	0,232
3	0,416	0,620	0,693	0,343	0,476	0,347	0,316	0,313	0,082	0,029	0,148	0,362	0,619	0,214	0,207	0,396	0,371	0,375	0,382	0,278	0,326	0,196	0,401	0,224	0,240
4	0,243	0,420	0,343	0,296	0,251	0,251	0,235	0,211	0,040	0,017	0,063	0,202	0,356	0,106	0,128	0,234	0,191	0,244	0,178	0,156	0,180	0,114	0,248	0,124	0,140
5	0,351	0,425	0,476	0,251	0,632	0,318	0,213	0,221	0,090	0,030	0,153	0,318	0,489	0,258	0,128	0,311	0,284	0,212	0,358	0,262	0,285	0,173	0,685	0,180	0,201
6	0,346	0,514	0,347	0,251	0,318	0,652	0,382	0,240	0,069	0,018	0,110	0,270	0,492	0,161	0,143	0,313	0,175	0,360	0,215	0,190	0,237	0,139	0,156	0,126	0,155
7	0,336	0,343	0,316	0,235	0,213	0,382	0,453	0,235	0,054	0,015	0,094	0,213	0,466	0,143	0,095	0,260	0,161	0,297	0,173	0,116	0,123	0,161	0,015	0,120	0,158
8	0,228	0,420	0,313	0,211	0,221	0,240	0,235	0,266	0,051	0,014	0,089	0,210	0,353	0,193	0,088	0,277	0,210	0,286	0,200	0,171	0,183	0,135	0,339	0,113	0,121
9	0,070	0,093	0,082	0,040	0,090	0,069	0,054	0,051	0,034	0,007	0,042	0,055	0,081	0,072	0,038	0,069	0,038	0,055	0,061	0,055	0,047	0,046	0,140	0,027	0,032
10	0,020	0,035	0,029	0,017	0,030	0,018	0,015	0,014	0,007	0,003	0,012	0,018	0,038	0,017	0,019	0,020	0,017	0,016	0,023	0,019	0,016	0,011	0,024	0,012	0,013
11	0,130	0,199	0,148	0,063	0,153	0,110	0,094	0,089	0,042	0,012	0,102	0,117	0,219	0,114	0,078	0,146	0,098	0,099	0,098	0,117	0,098	0,068	0,233	0,064	0,068
12	0,328	0,430	0,362	0,202	0,318	0,270	0,213	0,210	0,055	0,018	0,117	0,317	0,534	0,173	0,136	0,329	0,228	0,216	0,227	0,220	0,201	0,124	0,341	0,143	0,142
13	0,734	0,820	0,619	0,356	0,489	0,492	0,466	0,353	0,081	0,038	0,219	0,534	1,839	0,287	0,193	0,586	0,412	0,329	0,553	0,431	0,303	0,161	0,184	0,229	0,283
14	0,179	0,265	0,214	0,106	0,258	0,161	0,143	0,193	0,072	0,017	0,114	0,173	0,287	0,344	0,094	0,209	0,179	0,157	0,231	0,212	0,147	0,103	0,440	0,077	0,083
15	0,121	0,227	0,207	0,128	0,128	0,143	0,095	0,088	0,038	0,019	0,078	0,136	0,193	0,094	0,297	0,126	0,161	0,138	0,024	0,126	0,097	0,066	0,131	0,101	0,082
16	0,391	0,597	0,396	0,234	0,311	0,313	0,260	0,277	0,069	0,020	0,146	0,329	0,586	0,209	0,126	0,461	0,241	0,311	0,258	0,257	0,282	0,166	0,361	0,151	0,152
17	0,255	0,370	0,371	0,191	0,284	0,175	0,161	0,210	0,038	0,017	0,098	0,228	0,412	0,179	0,161	0,241	0,306	0,252	0,236	0,240	0,185	0,107	0,185	0,131	0,130
18	0,295	0,431	0,375	0,244	0,212	0,360	0,297	0,286	0,055	0,016	0,099	0,216	0,329	0,157	0,138	0,311	0,252	0,791	0,205	0,183	0,205	0,233	0,296	0,101	0,160
19	0,288	0,450	0,382	0,178	0,358	0,215	0,173	0,200	0,061	0,023	0,098	0,227	0,553	0,231	0,024	0,258	0,236	0,205	0,680	0,327	0,204	0,097	0,153	0,112	0,134
20	0,248	0,415	0,278	0,156	0,262	0,190	0,116	0,171	0,055	0,019	0,117	0,220	0,431	0,212	0,126	0,257	0,240	0,183	0,327	0,357	0,183	0,087	0,134	0,108	0,089
21	0,206	0,470	0,326	0,180	0,285	0,237	0,123	0,183	0,047	0,016	0,098	0,201	0,303	0,147	0,097	0,282	0,185	0,205	0,204	0,183	0,309	0,109	0,335	0,111	0,107
22	0,141	0,191	0,196	0,114	0,173	0,139	0,161	0,135	0,046	0,011	0,068	0,124	0,161	0,103	0,066	0,166	0,107	0,233	0,097	0,087	0,109	0,158	0,266	0,080	0,098
23	0,106	0,564	0,401	0,248	0,685	0,156	0,015	0,339	0,140	0,024	0,233	0,341	0,184	0,440	0,131	0,361	0,185	0,296	0,153	0,134	0,335	0,266	3,120	0,164	0,230
24	0,130	0,233	0,224	0,124	0,180	0,126	0,120	0,113	0,027	0,012	0,064	0,143	0,229	0,077	0,101	0,151	0,131	0,101	0,112	0,108	0,111	0,080	0,164	0,111	0,090
25	0,153	0,232	0,240	0,140	0,201	0,155	0,158	0,121	0,032	0,013	0,068	0,142	0,283	0,083	0,082	0,152	0,130	0,160	0,134	0,089	0,107	0,098	0,230	0,090	0,138

EK-6. Vergi ve Alım Satım Maliyeti Dikkate Alındığı Durumda Etkin Portföylerde Yer Alan Hisse Senetlerinin Sayıları:

	Portföy1			Portföy2			Portföy3			Portföy4			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	901,42	385,42	0,00	558,22	42,22	0,00	203,13	0,00	312,87	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	0,00	0,00	661,00	789,05	128,05	0,00	2005,00	1344,00	0,00	3207,40	2546,40	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	1268,80	1005,80	0,00	1210,30	947,34	0,00	1067,50	804,51	0,00	873,39	610,39	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	2805,80	1961,80	0,00	2454,80	1610,80	0,00	1919,40	1075,40	0,00	1354,30	510,28	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1596,40	1077,40	0,00	1697,60	1178,60	0,00	1779,80	1260,80	0,00	1845,50	1326,50	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1449,00	1449
TUPRS	2055,40	1883,40	0,00	2042,00	1870,00	0,00	2018,80	1846,80	0,00	1993,70	1821,70	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

EK-6. Devamı:

	Portföy5			Portföy6			Portföy7			Portföy8			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X(0)
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	4185,50	3524,50	0,00	5144,40	4483,40	0,00	6208,30	5547,30	0,00	7242,80	6581,80	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	622,56	359,56	0,00	343,26	80,26	0,00	251,61	0,00	11,39	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	844,00	0,00	0,00	478,64	0,00	365,36	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1856,20	1337,20	0,00	1871,40	1352,40	0,00	1693,10	1174,10	0,00	1599,60	1080,60	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	656,51	0,00	792,49	1449,00	0,00	0,00	2064,50	615,52	0,00	2945,00	1496,00	0,00	1449
TUPRS	1927,30	1755,30	0,00	1838,80	1666,80	0,00	1707,00	1535,00	0,00	1526,20	1354,20	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

EK-6. Devamı:

	Portföy9			Portföy10			Portföy11			Portföy12			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	8257,70	7596,70	0,00	9272,60	8611,60	0,00	10287,00	9626,00	0,00	11233,00	10572,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	1238,40	719,44	0,00	877,27	358,27	0,00	519,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	3951,70	2502,70	0,00	4958,50	3509,50	0,00	5964,80	4515,80	0,00	6933,20	5484,20	0,00	1449
TUPRS	1262,80	1090,80	0,00	999,37	827,37	0,00	735,18	563,18	0,00	374,83	202,83	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

EK-6. Devamı:

	Portföy13			Portföy14			Portföy15			X(0)
	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	X	x ⁺	x ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	516,00	516
ARCLK	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	423,00	423
DOHOL	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
DYHOL	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	847,00	847
EREGL	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	593,00	593
FINBN	12431,00	11770,00	0,00	15109,00	14448,00	0,00	16478,00	15817,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	930,00	930
GARAN	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	893,00	893
GSDHO	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	3419,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	6893,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	1515,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
MIGRS	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	263,00	263
PETKM	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	792
PTOFS	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	844,00	844
SAHOL	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	748,00	748
SISE	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	820,00	820
SKBNK	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	823
TCELL	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	519,00	519
THYAO	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	684,00	684
TOASO	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	985,00	985
TSKB	7577,90	6128,90	0,00	3048,80	1599,80	0,00	22,02	0,00	1427,00	1449
TUPRS	156,75	0,00	15,25	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	172,00	172
VESTL	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	1130,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	1527

EK-7. Alım Satım Maliyeti, Vergi ve Açığa Satışın Olduğu Durumda Etkin Portföylerde Yer Alan Hisselerin Sayıları:

	Portföy1						Portföy2						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	230,66	0,00	230,66	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	181,03	0,00	0,00	0,00	241,97	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	250,36	0,00	0,00	0,00	433,64	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	412,68	0,00	0,00	0,00	434,32	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	400,62	0,00	0,00	0,00	192,38	0,00	593
FINBN	0,00	0,00	0,00	0,00	661,00	0,00	303,51	0,00	0,00	0,00	357,49	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930,00	1218,50	0,00	1218,50	0,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	39,37	0,00	39,37	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	722,48	0,00	722,48	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	6893,00	15366,00	0,00	15366,00	0,00	0,00	6893
ISGYO	764,88	764,88	0,00	764,88	750,12	0,00	1172,60	0,00	0,00	0,00	342,36	0,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823,00	1345,70	0,00	1345,70	0,00	0,00	823
MIGRS	263,00	263,00	0,00	263,00	0,00	0,00	137,16	0,00	0,00	0,00	125,84	0,00	263
PETKM	792,00	792,00	0,00	792,00	0,00	0,00	792,00	892,86	0,00	892,86	0,00	0,00	792
PTOFS	844,00	844,00	0,00	844,00	0,00	0,00	573,26	0,00	0,00	0,00	270,74	0,00	844
SAHOL	748,00	748,00	0,00	748,00	0,00	0,00	232,54	0,00	0,00	0,00	515,46	0,00	748
SISE	820,00	820,00	0,00	820,00	0,00	0,00	262,08	0,00	0,00	0,00	557,92	0,00	820
SKBNK	823,00	823,00	0,00	823,00	0,00	0,00	823,00	1087,70	0,00	1087,70	0,00	0,00	823
TCELL	519,00	519,00	0,00	519,00	0,00	0,00	330,51	0,00	0,00	0,00	188,49	0,00	519
THYAO	684,00	684,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	491,58	0,00	491,58	684,00	0,00	684
TOASO	985,00	985,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	577,34	0,00	577,34	985,00	0,00	985
TSKB	1449,00	1449,00	0,00	1449,00	0,00	0,00	1208,20	70,33	0,00	70,33	240,81	0,00	1449
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	40,62	0,00	40,62	172,00	0,00	172
VESTL	1130,00	1130,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	0,00	1312,30	0,00	1312,30	1130,00	0,00	1130
YKBNK	1527,00	1527,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	1527,00	2133,90	0,00	2133,90	0,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy3						Portföy4						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	465,91	0,00	465,91	516,00	0,00	0,00	192,90	0,00	192,90	516,00	0,00	516
ARCLK	227,85	0,00	0,00	0,00	195,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	376,59	0,00	0,00	0,00	307,41	0,00	372,30	0,00	0,00	0,00	311,70	0,00	684
DYHOL	765,92	0,00	0,00	0,00	81,08	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847
EREGL	567,64	0,00	0,00	0,00	25,36	0,00	286,01	0,00	0,00	0,00	306,99	0,00	593
FINBN	607,42	0,00	0,00	0,00	53,58	0,00	1019,10	0,00	358,11	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	428,75	0,00	428,75	930,00	0,00	0,00	615,11	0,00	615,11	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	303,83	0,00	303,83	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	679,76	0,00	679,76	3419,00	0,00	0,00	499,70	0,00	499,70	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	14254,00	0,00	14254,00	6893,00	0,00	0,00	17428,00	0,00	17428,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	1837,40	0,00	322,43	0,00	0,00	0,00	2354,60	0,00	839,62	0,00	0,00	0,00	1515
KCHOL	823,00	1843,90	0,00	1843,90	0,00	0,00	0,00	1430,00	0,00	1430,00	823,00	0,00	823
MIGRS	253,45	0,00	0,00	0,00	9,55	0,00	274,74	0,00	11,74	0,00	0,00	0,00	263
PETKM	306,47	546,36	0,00	546,36	485,53	0,00	0,00	578,43	0,00	578,43	792,00	0,00	792
PTOFS	861,47	0,00	17,47	0,00	0,00	0,00	1037,90	0,00	193,93	0,00	0,00	0,00	844
SAHOL	576,04	0,00	0,00	0,00	171,96	0,00	384,54	0,00	0,00	0,00	363,46	0,00	748
SISE	798,93	0,00	0,00	0,00	21,07	0,00	1144,50	0,00	324,49	0,00	0,00	0,00	820
SKBNK	0,00	460,33	0,00	460,33	823,00	0,00	0,00	656,49	0,00	656,49	823,00	0,00	823
TCELL	575,01	0,00	56,01	0,00	0,00	0,00	853,69	0,00	334,69	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	866,14	0,00	866,14	684,00	0,00	0,00	954,65	0,00	954,65	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	948,68	0,00	948,68	985,00	0,00	0,00	761,14	0,00	761,14	985,00	0,00	985
TSKB	1846,40	0,00	397,37	0,00	0,00	0,00	2346,40	0,00	897,41	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	0,00	25,43	0,00	25,43	172,00	0,00	76,99	0,00	0,00	0,00	95,01	0,00	172
VESTL	0,00	2133,70	0,00	2133,70	1130,00	0,00	0,00	2489,90	0,00	2489,90	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	1039,80	0,00	1039,80	1527,00	0,00	0,00	942,53	0,00	942,53	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy5						Portföy6						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	266,53	0,00	0,00	0,00	417,47	0,00	192,86	0,00	0,00	0,00	491,14	0,00	684
DYHOL	341,47	0,00	0,00	0,00	505,53	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	1448,50	0,00	787,46	0,00	0,00	0,00	1989,20	0,00	1328,20	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	334,93	0,00	334,93	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	20411,00	0,00	20411,00	6893,00	0,00	0,00	22804,00	0,00	22804,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	2163,70	0,00	648,71	0,00	0,00	0,00	1731,70	0,00	216,71	0,00	0,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	1709,70	0,00	1709,70	823,00	0,00	0,00	2163,90	0,00	2163,90	823,00	0,00	823
MIGRS	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263
PETKM	0,00	860,71	0,00	860,71	792,00	0,00	0,00	997,65	0,00	997,65	792,00	0,00	792
PTOFS	1038,60	0,00	194,58	0,00	0,00	0,00	885,78	0,00	41,78	0,00	0,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	1592,20	0,00	772,18	0,00	0,00	0,00	1626,00	0,00	806,02	0,00	0,00	0,00	820
SKBNK	0,00	682,08	0,00	682,08	823,00	0,00	0,00	462,87	0,00	462,87	823,00	0,00	823
TCELL	1002,80	0,00	483,78	0,00	0,00	0,00	1014,20	0,00	495,24	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	806,98	0,00	806,98	684,00	0,00	0,00	450,83	0,00	450,83	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	343,28	0,00	343,28	985,00	0,00	0,00	31,24	0,00	31,24	985,00	0,00	985
TSKB	2649,20	0,00	1200,20	0,00	0,00	0,00	2787,40	0,00	1338,40	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	202,50	0,00	30,50	0,00	0,00	0,00	307,40	0,00	135,40	0,00	0,00	0,00	172
VESTL	0,00	2721,00	0,00	2721,00	1130,00	0,00	0,00	2705,20	0,00	2705,20	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	308,97	0,00	308,97	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy7						Portföy8						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	158,34	0,00	0,00	0,00	525,66	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	2681,70	0,00	2020,70	0,00	0,00	0,00	3576,90	0,00	2915,90	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	26283,00	0,00	26283,00	6893,00	0,00	0,00	27010,00	0,00	27010,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	2435,20	0,00	2435,20	823,00	0,00	0,00	2293,40	0,00	2293,40	823,00	0,00	823
MIGRS	241,53	0,00	0,00	0,00	21,47	0,00	78,58	0,00	0,00	0,00	184,42	0,00	263
PETKM	0,00	902,80	0,00	902,80	792,00	0,00	0,00	681,65	0,00	681,65	792,00	0,00	792
PTOFS	763,18	0,00	0,00	0,00	80,82	0,00	248,53	0,00	0,00	0,00	595,47	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	1277,40	0,00	457,38	0,00	0,00	0,00	1454,20	0,00	634,23	0,00	0,00	0,00	820
SKBNK	0,00	74,07	0,00	74,07	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	1044,60	0,00	525,58	0,00	0,00	0,00	1103,70	0,00	584,67	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	134,55	0,00	134,55	684,00	0,00	0,00	403,95	0,00	403,95	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	3004,90	0,00	1555,90	0,00	0,00	0,00	3496,80	0,00	2047,80	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	347,03	0,00	175,03	0,00	0,00	0,00	316,87	0,00	144,87	0,00	0,00	0,00	172
VESTL	0,00	2266,10	0,00	2266,10	1130,00	0,00	0,00	1874,90	0,00	1874,90	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy9						Portföy10						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	4449,60	0,00	3788,60	0,00	0,00	0,00	5327,80	0,00	4666,80	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	30024,00	0,00	30024,00	6893,00	0,00	0,00	32851,00	0,00	32851,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	1427,40	0,00	0,00	0,00	87,59	0,00	693,59	0,00	0,00	0,00	821,41	0,00	1515
KCHOL	0,00	2369,50	0,00	2369,50	823,00	0,00	0,00	2300,20	0,00	2300,20	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	511,22	0,00	511,22	792,00	0,00	0,00	29,76	0,00	29,76	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	1131,00	0,00	311,04	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	1031,90	0,00	512,89	0,00	0,00	0,00	995,08	0,00	476,08	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	4212,80	0,00	2763,80	0,00	0,00	0,00	4967,50	0,00	3518,50	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	300,67	0,00	128,67	0,00	0,00	0,00	251,84	0,00	79,84	0,00	0,00	0,00	172
VESTL	0,00	1579,90	0,00	1579,90	1130,00	0,00	0,00	1183,70	0,00	1183,70	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy11						Portföy12						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	6220,10	0,00	5559,10	0,00	0,00	0,00	7106,70	0,00	6445,70	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	33187,00	0,00	33187,00	6893,00	0,00	0,00	34875,00	0,00	34875,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	1965,00	0,00	1965,00	823,00	0,00	0,00	1574,00	0,00	1574,00	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	195,37	0,00	0,00	0,00	624,63	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	828,76	0,00	309,76	0,00	0,00	0,00	764,15	0,00	245,15	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	5660,90	0,00	4211,90	0,00	0,00	0,00	6207,50	0,00	4758,50	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	179,64	0,00	7,64	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	172
VESTL	0,00	916,86	0,00	916,86	1130,00	0,00	0,00	278,17	0,00	278,17	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy13						Portföy14						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	7993,10	0,00	7332,10	0,00	0,00	0,00	8794,30	0,00	8133,30	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	34838,00	0,00	34838,00	6893,00	0,00	0,00	35105,00	0,00	35105,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	1061,00	0,00	1061,00	823,00	0,00	0,00	401,49	0,00	401,49	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	519,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	6558,20	0,00	5109,20	0,00	0,00	0,00	6975,90	0,00	5526,90	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	172,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	47,11	0,00	0,00	0,00	124,89	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy15						Portföy16						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	9701,70	0,00	9040,70	0,00	0,00	0,00	10764,00	0,00	10103,00	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	31680,00	0,00	31680,00	6893,00	0,00	0,00	24461,00	0,00	24461,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	376,03	0,00	0,00	0,00	142,97	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	7210,00	0,00	5761,00	0,00	0,00	0,00	7434,80	0,00	5985,80	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy17						Portföy18						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	11753,00	0,00	11092,00	0,00	0,00	0,00	12742,00	0,00	12081,00	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	14785,00	0,00	14785,00	6893,00	0,00	0,00	5108,40	0,00	5108,40	6893,00	0,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	7300,10	0,00	5851,10	0,00	0,00	0,00	7165,30	0,00	5716,30	0,00	0,00	0,00	1449
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527

EK-7. Devamı:

	Portföy19						Portföy20						X(0)
	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	X	X _s	x ⁺	x _s ⁺	x ⁻	x _s ⁻	
AKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	516,00	0,00	516
ARCLK	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	423,00	0,00	423
DOHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	847,00	0,00	847
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	593,00	0,00	593
FINBN	15109,00	0,00	14448,00	0,00	0,00	0,00	16478,00	0,00	15817,00	0,00	0,00	0,00	661
FORTS	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	930,00	0,00	930
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	893,00	0,00	893
GSDHO	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3419,00	0,00	3419
IHLAS	0,00	0,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6893,00	0,00	6893
ISGYO	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1515,00	0,00	1515
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
MIGRS	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	263,00	0,00	263
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	792,00	0,00	792
PTOFS	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	844,00	0,00	844
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	748,00	0,00	748
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	820,00	0,00	820
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	823,00	0,00	823
TCELL	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	519,00	0,00	519
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	684,00	0,00	684
TOASO	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	985,00	0,00	985
TSKB	3048,80	0,00	1599,80	0,00	0,00	0,00	22,02	0,00	0,00	0,00	1427,00	0,00	1449
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	172,00	0,00	172
VESTL	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1130,00	0,00	1130
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1527,00	0,00	1527