

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA H-GRUBU OLUŞTURMA

Gülay DEMİRKAPI GÖÇER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2007
ANKARA**

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada aldığım her türlü kaynağa eksiksiz olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Gülay DEMİRKAPI GÖÇER

Gülay DEMİRKAPI GÖÇER tarafında hazırlanan FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA H-GRUBU OLUŞTURMA adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Üye :Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye :Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye :Doç. Dr. Duran TÜRKÖĞLU

Üye :Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL

Tarih : 26.04.2007

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA H-GRUBU OLUŞTURMA**(Yüksek Lisans Tezi)****Gülay DEMİRKAPI GÖÇER****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Nisan 2007****ÖZET**

Bu tezde, homotopi kavramı, eğrilerin homotopisi ve fonksiyonların homotopisi topolojik uzaylarda ele alınmış, ihtiyaç duyulduğu kadarı ile ayrıntıya girilmiştir. Bu kavramlar fuzzy topolojik uzaylarda ele alınmış ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca fuzzy topolojik gruplar fuzzy topolojik uzaylarda incelenmiştir. Grup işlemlerine benzer homotopi grup işlemleri ile H-Grupları üzerinde durulmuş ve nihayet her fuzzy topolojik grubun bir fuzzy H-Grubu olduğu ifade edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Homotopi, fuzzy topolojik grup, H-grupları,
Sayfa Adedi : 48
Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Cemil YILDIZ

CREATION OF H-GROUPS IN FUZZY SPACES**(M.Sc. Thesis)****Gülay DEMİRKAPI GÖÇER****GAZI UNIVERSTY****INSTITUTE OF CSIENCE AND TECHNOLOGY****April 2007****ABSTRACT**

In this study, homotopy concept has been handled as homotopy of circles and homotopy of functions in topological spaces and it has elaborated as far as its necessity. These concepts have been handled in fuzzy topological spaces and examined comprehensively. Furthermore, fuzzy topological groups have been examined in fuzzy topological spaces. H-groups have been investigated with homotopy group operations which are similar to group operations and consequently it has been emphasized that each fuzzy topological group is a fuzzy H-group.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Homotopy, fuzzy topological group, H-groups,****Page Number: 48****Adviser : Prof.Dr. Cemil YILDIZ**

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ 'a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve eőim Erdoğan GÖÇER'e ve tezimin oluőum aőamasında yapmış olduğu yardımlarından dolayı Serkan GÜMÜŐ' e ve Nermin AVŐAR'a teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. HOMOTOPI KAVRAMI	15
2.3.Eğrilerin homotopisi	15
2.3. Fonksiyonların homotopisi	17
4.FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA HOMOTOPI	23
5.FUZZY TOPOLOJİK GRUP	27
6.H-GRUPLARI	36
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
\Rightarrow	Gerektirir
\Leftarrow	Yeterlidir
\Leftrightarrow	Çift yönlü gerektirme
I^X	X den I ya tanımlanan fonksiyonların kümesi
$P(X)$	X in kuvvet kümesi
f_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
τ	Fuzzy topolojisi
(A, τ_A)	Alt uzay
A^0	A fuzzy kümesinin içi
\bar{A}	A fuzzy kümesinin kapanışı
A^c	A fuzzy kümesinin tümleyeni
$N(x)$	x noktasının komşuluklar ailesi
$f _A$	f fonksiyonunun A ya kısıtlaması
*	İkili işlem
p'_x	Üyelik değeri r olan fuzzy nokta
$FC(X, Y)$	X den Y ye fuzzy sürekli fonksiyonların kümesi
$\alpha \sim \beta$	α eğrisinin β eğrisine homotopluğu
α^{-1}	α eğrisinin tersi
$[\alpha]_x$	x noktasındaki α eğrisinin homotopi sınıfı
(X, x_0)	Noktalı topolojik uzay
$f \sim g$	f tasvirinin g tasvirine homotopluđu
$f \sim g \text{ rel. } X_0$	f tasvirinin X_0 a nazaran g tasvirine homotopluđu
$(G, *)$	Grup

Simgeler**Açıklama** **$(G, \tau, *)$**

Topolojik grup

 (X, τ, \cdot)

Fuzzy topolojik grup

Kısaltmalar**Açıklama****f.t.u.**

Fuzzy topolojik uzay

1. GİRİŞ

Küme kavramını 1879 yılında tanımlayan Cantor "Bir nesne, kümenin ya elemanıdır ya da elemanı değildir" diyordu ve matematik dünyası bu küme tanımının çerçevesinde bilgilerini örmeye başlıyordu. Cantor' un yaptığı bu tanıma göre matematiksel düşüncede kesin sınırları belirlemek zorunluluğu vardır. Fakat zamanla anlaşıldı ki bu düşünce tarzı hayattaki çoğu olayı açıklayamıyor. Bu yetersizliği gören Azeri bilim adamı Zadeh 1965 yılında Fuzzy (Belirtisiz) küme tanımını yapmış ve alışılmış küme tanımından sıyrılarak küme tanımını daha da genelleştirmiştir. Fuzzy küme kavramı ile Cantor' un yaptığı küme kavramının arasındaki farkı bir örnek ile açıklayacak olursak; ayarlı bir elektrik düğmesi ile kumanda edilen bir lambanın ışığını Cantor'un tanımladığı küme kavramı ile ifade etmek mümkün değildir. Çünkü, Cantor'a göre sadece açık veya kapalı durumu ifade edilir. Ancak ışığın sönük durumu, parlak durumu, çok parlak durumunun üyelik derecesine göre izahı ancak fuzzy kümesi ile ifade edilebilir. Bu nedenle gerçek hayattaki olayları fuzzy kümesi ile ifade etmek klasik küme kavramından kullanışlıdır.

Zadeh'in kesinlik aramayan mantığı yalnızca matematikte kullanılmakla sınırlı kalmayıp istatistikte, fizikte, astronomide, endüstride, mühendislikte, askeri balistikte, genetikte ve daha birçok alanda kullanılır olmuştur. Bunların doğal bir sonucu olarak matematiğin fuzzy küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıkmış ve bu düzenleme ile birlikte birçok yeni makale yayınlanmıştır.

Matematiksel olarak bir fuzzy kümeye ait olma, dünyada olan her bir olay fuzzy küme içindeki üyelik derecesini gösteren bir değer karşılık getirerek tanımlanabilir. Bu değer elemanın fuzzy kümesi ile temsil edilen düşünceye uyma veya benzeme derecesine karşılık gelir. Böylece elemanlar, üyelik derecelerinin büyük veya küçük oluşu oranında fuzzy kümeye çok veya az ait olabilirler. Bu üyelik dereceleri genellikle $[0,1]$ kapalı aralığında bulunan gerçek sayı değerleri ile temsil edilir.

1965 de Zadeh' in Fuzzy Kümeleri adlı makalesinin yayınlanmasından ve 1968 de Chang' in Fuzzy Topolojik Uzay tanımlamasından sonra genel topolojideki kavramlar fuzzy topolojik uzaylara taşınmaya başlanmıştır.

Bu çalışmada, homotopi kavramı, eğrilerin homotopisi ve fonksiyonların homotopisi topolojik uzaylarda ele alınmış, ihtiyaç duyulduğu kadarı ile ayrıntıya girilmiştir. Bu kavramlar fuzzy topolojik uzaylarda ele alınmış ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca fuzzy topolojik gruplar fuzzy topolojik uzaylarda incelenmiştir. Grup işlemlerine benzer homotopi grup işlemleri ile H-Grupları üzerinde durulmuş ve nihayet her fuzzy topolojik grubun bir fuzzy H-Grubu olduğu ifade edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayı boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabiliyorsa X e bağlantısız (irtibatsız) uzay denir, yani

$$X \text{ irtibatsız} \Leftrightarrow \exists A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ ve } A \cap B = \emptyset \text{ için } X = A \cup B.$$

Eğer (X, τ) topolojik uzayı kendisinden ve boş kümeden farklı ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa X e bağlantılı (irtibatlı) uzay denir. Yani,

$$A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ ve } A \cap B = \emptyset \Rightarrow X \neq A \cup B [1].$$

2.2.Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her bir N üst kümesine, A kümesinin komşuluğu denir, yani,

$$N, A \subset X \text{ nin bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \text{ açığı var } \ni A \subset U \subset N.$$

Eğer $A = \{x\}$ ise, bu durumda

$$N, x \in X \text{ noktasının bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \text{ açığı var } \ni x \in U \subset N.$$

x noktasını içeren U açık altkümeye de x in açık komşuluğu denir. Ayrıca N sadece x in komşuluğu değil, U içindeki her noktanın da komşuluğudur. Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini $N(x)$ ile göstereceğiz, yani $P(X)$, X in kuvvet kümesi olmak üzere

$$N(x) = \{N \in P(X) : N, x \text{ in komşuluğu}\} [1].$$

2.3.Tanım

(X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ herhangi noktalar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Şayet $y_0 = f(x_0)$ noktasının her bir N' komşuluğu için, $f(N) \subset N'$ olacak biçimde x_0 noktasının bir N komşuluğu bulunabiliyorsa, bu durumda f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir, yani

$f, x_0 \in X$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall N' \in \mathcal{N}(f(x_0))$ için $\exists N \in \mathcal{N}(x_0)$ var $\ni f(N) \subset N'$ dir.

Eğer f, X in her bir noktasında sürekli ise, bu durumda f fonksiyonuna X de süreklidir denir [1].

2.1.Teorem

Bir fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart görüntü uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsünün tanım uzayında açık olmasıdır [2].

2.2.Teorem

(X, τ) , (Y, τ') ve (Z, τ'') topolojik uzaylar olmak üzere $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ sürekli bir fonksiyon ve $g: (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g \circ f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau'')$ bileşke fonksiyonu da süreklidir [1].

2.3.Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar, $A, B \subset X$ iki kapalı alt küme ve $X = A \cup B$ olsun, $f: A \rightarrow Y$ ve $g: B \rightarrow Y$, $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlar ise, bu durumda $h|_A = f, h|_B = g$ şartlarını sağlayan bir $h: X \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir [3].

2.4.Teorem

(X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar, X irtibatlı ve $f: X \rightarrow Y$ üzerine sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y irtibatlıdır [2].

2.5.Teorem

(X,τ) , (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda X in irtibatlı alt kümelerinin f altındaki görüntüsü Y de irtibatlıdır [1].

2.4.Tanım

X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda (X, x_0) çiftine bir noktalı topolojik uzay denir [1].

2.5.Tanım

X bir topolojik uzay, $I=[0,1] \subset \mathbb{R}$ birim kapalı aralık, I daki topoloji \mathbb{R} den indirgenen alışılmış topoloji olsun. Her $f: I \rightarrow X$ sürekli fonksiyonuna (veya $f(I)=\alpha$ görüntü kümesine) bu topolojik uzayda bir eğri veya yol denir.

Eğer $f(0)=a$ ve $f(1)=b$ ise f fonksiyonuna a den b ye bir eğri denir. a noktasına eğrinin başlangıç noktası, b noktasına da eğrinin bitim noktası denir.

Eğer $f(0)=a=f(1)=b$ ise, yani başlangıç ve bitim noktası çakışiyorsa bu durumda eğriye kapalı eğri denir.

2.6.Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $a, b \in X$ noktaları için bu iki noktayı birbirine birleştiren X de bir α eğrisi varsa bu durumda X topolojik uzayına eğrisel irtibatlı

topolojik uzay denir [1].

2.6. Teorem

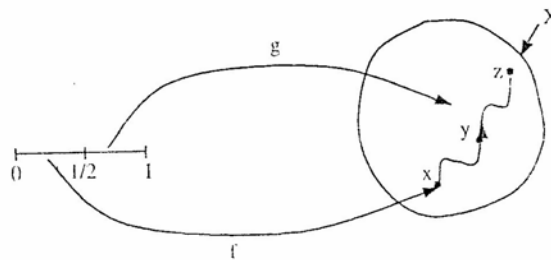
Eğrisel irtibatlı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de eğrisel irtibatlıdır [1].

2.7. Tanım

X eğrisel irtibatlı bir uzay $I=[0,1] \subset \mathbb{R}$ birim kapalı aralık, $f, g: I \rightarrow X$ iki eğri olsun. Eğer $f(1)=g(0)$ ise f ve g eğrileri çarpılabilir denir ve bu çarpım

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.



Burada $h: I \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olup x noktasını z noktasına birleştiren X de bir eğridir [1].

2.8.Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı verilmiş olsun. X de bir A fuzzy kümesi

$$f_A: X \rightarrow [0,1]$$

herhangi bir fonksiyon tarafından karakterize edilen

$$A = \{ (x, f_A(x)) : x \in X \} \subset X \times I$$

kümesine denir. Burada f_A ya A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\forall x \in X$ için $f_A(x) \in I$ değerine de üyelik değeri denir. Bundan sonra f_A yerine A , $f_A(x)$ yerine $A(x)$ alınacaktır.

X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi I^X ile gösterildiğinden, I^X kümesinin her elemanı X de bir fuzzy kümesidir. Yani, $f_A = A \in I^X$ ise, $f_A = A$, X de bir fuzzy kümesidir [4].

2.9.Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere X deki p_x^r fuzzy kümesinin $p_x^r: X \rightarrow I$ üyelik fonksiyonu

$$P_x^r(y) = \begin{cases} r & , y=x \\ 0 & , y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise p_x^r ye X de fuzzy noktası denir. Burada $x \in X$ noktasına p_x^r fuzzy

noktasının desteği (dayanağı) ve $r \in (0,1]$ sayısına p_x^r fuzzy noktasının değeri denir. Yeri geldiğinde p_x^r fuzzy noktasını p ile göstereceğiz [5].

2.10.Tanım

X boştan farklı herhangi bir küme, p , X de bir fuzzy noktası ve A , X in bir fuzzy kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $p(x) \leq A(x)$ ise p , A ya aittir (A , p yi içerir) denir ve $p < A$ ile gösterilir.

2.11.Tanım

X ve \emptyset kümeleri birer fuzzy kümesi olup

$$\forall x \in X \text{ için } f_X(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x,1):x \in X\} \subset X \times I$$

$$\forall x \in X \text{ için } f_{\emptyset}(x) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(x,0):x \in X\} \subset X \times I$$

şeklinde ifade edilir [6].

2.12.Tanım

X deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B olmak üzere, her $x \in X$ için;

$$(1) A \leq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$$

$$(3) A \vee B = C \Leftrightarrow f_C(x) = \max \{ f_A(x), f_B(x) \}$$

$$(4) A \wedge B = D \Leftrightarrow f_D(x) = \min \{ f_A(x), f_B(x) \}$$

$$(5) A^c \Leftrightarrow f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

şeklinde tanımlanır [6].

2.1.Özellikler

X deki fuzzy kümeler A, B ve C olmak üzere

$$(i) A \vee \emptyset = A, A \wedge \emptyset = \emptyset, A \vee X = X, A \wedge X = A$$

$$(ii) A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A, A \vee A = A = A \wedge A$$

$$(iii) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$(iv) A \leq B \Rightarrow A \vee B = B, A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$$

$$(v) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

dir [7].

2.2.Özellikler

A ve B, X de iki fuzzy küme olmak üzere

$$(i) A - \emptyset = A$$

$$(ii) \emptyset^c = X, X^c = \emptyset, (A^c)^c = A$$

$$(iii) A \leq B \Leftrightarrow B^c \leq A^c$$

$$(iv) (A \wedge B)^c = A^c \vee B^c, (A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$$

dir [7].

2.7. Teorem

$X \neq \emptyset$ ve $A \in I^X$ olsun. $A \wedge A^c = \emptyset$ ve $A \vee A^c = X$ olmak zorunda değildir[2].

Bunu bir örnekle gösterelim:

2.1. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ olsun. X deki bir fuzzy kümesi şu şekilde tanımlansın.

$$A = \{(a/0,2), (b/0,9), (c/0,3), (d/0,6)\}$$

Buna göre tümleyen tanımından;

$$A^c = \{(a/0,8), (b/0,1), (c/0,7), (d/0,4)\}$$

$$A \vee A^c = \{(a/0,8), (b/0,9), (c/0,7), (d/0,6)\} \neq X$$

$$A \wedge A^c = \{(a/0,2), (b/0,1), (c/0,3), (d/0,4)\} \neq \emptyset$$

Bu örnekte görüldüğü gibi; fuzzy kümelerinin bu özelliği fuzzy kümeler teorisini Cantor' un kurduğu bilinen kümeler teorisinden ayıran en önemli özelliklerden biridir.

2.13. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve X deki fuzzy kümelerinin bir ailesi $\tau < I^X$ olsun. τ ailesi aşağıdaki

şartları sağlıyorsa τ ya X kümesi üzerinde fuzzy topolojisi, (X, τ) ikilisine fuzzy topolojik uzay denir, kısaca f.t.u. şeklinde yazılır.

$$(ft_1) X, \emptyset \in \tau$$

$$(ft_2) \forall A, B \in \tau \text{ iken } A \cap B \in \tau$$

$$(ft_3) \{A_i\}_{i \in I} \in \tau \text{ iken } \bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$$

τ nun her elemanına fuzzy açık küme, tümleyenine de fuzzy kapalı küme (veya fuzzy kapalı kümenin tümleyenine fuzzy açık küme) denir [6].

2.2.Örnek

Genel topolojik uzayda olduğu gibi τ nun elemanları \emptyset ve X den ibaret ise (X, τ) ikilisine ayrık olmayan (indiskret) fuzzy topolojik uzay, τ nun elemanları X in bütün fuzzy alt kümelerinden oluşuyorsa (X, τ) ikilisine ayrık (discret) fuzzy topolojik uzay denir. Bu uzayların fuzzy topolojik uzay oldukları kolayca gösterilebilir [5].

2.14.Tanım

$X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $g: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subset X$ ve $B \subset Y$ fuzzy kümeler olsun, $g^{-1}(B)$, X de fuzzy kümesi olup üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için

$$f_{g^{-1}(B)}(x) = f_B(g(x))$$

ile tanımlıdır.

$g(A)$, Y de fuzzy küme olup, üyelik fonksiyonu $\forall y \in Y$ için $g^{-1}(y) = \{x: g(x) = y\}$ olmak üzere

$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup\{f(z) \mid z \in g^{-1}(y)\}, & g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \emptyset, & g^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir [5].

2.16.Tanım

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve A , (X, τ) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme olsun. Eğer $p \leq V \leq A$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ varsa A ya p fuzzy noktasının bir komşuluğu denir [8].

2.17.Tanım

$0 < r \leq 1$ olmak üzere p fuzzy noktası A ile çakışımıdır, eğer $r > A^c(x)$ veya $r + A(x) > 1$ ise. Bu durum pqA ile gösterilir [8].

2.18.Tanım

A fuzzy kümesine B fuzzy kümesi ile çakışımıdır denir, eğer $\forall x \in X$ için $A(x) > B^c(x)$ veya $A(x) + B(x) > 1$ ise. Bu durum AqB ile gösterilir.

Eğer A, B ile çakışımı değilse $A \not q B$ ile gösterilir [8].

2.19.Tanım

(X, τ) f.t.u. A bir fuzzy kümesi ve p bir fuzzy nokta olsun. Eğer pqB ve $B \leq A$ olacak şekilde $B \in \tau$ varsa A kümesine p nin çakışımı komşuluğu (Q -neighbourhood) denir [8].

2.8. Teorem

$f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

1. p , X in bir fuzzy noktası, A , X te bir fuzzy kümesi ve B , Y de bir fuzzy kümesi olsun.
 - Eğer $f(p) \in B$ ise, $p \in f^{-1}(B)$ dir.
 - Eğer $p \in A$ ise, $f(p) \in f(A)$ dir.
2. A ve B sırasıyla X ve Y de iki fuzzy kümeleri ve p , X in bir fuzzy noktası olsun.
 - Eğer $f(p) \in B$ ise, $p \in f^{-1}(B)$ dir.
 - Eğer $p \in A$ ise, $f(p) \in f(A)$ dir [8].

2.20. Tanım

(X, τ) ve (Y, τ') iki f.t.u. ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall U \in \tau'$ için $f^{-1}(U) \in \tau$ ise f fonksiyonuna fuzzy süreklidir denir. X den Y ye bütün fuzzy sürekli fonksiyonların kümesi $FC(X, Y)$ ile gösterilir [8].

2.9. Teorem

(X, τ) ve (Y, τ') iki f.t.u. ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f , fuzzy süreklidir.

(2) f için V Y de her bir V komşuluğu için X de p

nin bir U komşuluğu var öyle ki $f(U) \leq V$.

(3) X deki her bir p fuzzy noktası ve Y de $f(p)$ nin her bir fuzzy açık Q -komşuluğu V için X de p nin bir fuzzy açık Q -komşuluğu U var öyle ki $f(U) \leq V$ [8].

2.21.Tanım

(A, τ_A) , (B, τ'_B) sırasıyla (X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylarının fuzzy alt uzayları olsun. $f: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau'_B)$ fonksiyonuna rölatif fuzzy süreklidir denir eğer τ'_B de her bir açık fuzzy kümesi V' için $f^{-1}(V') \wedge A$ kesişimi τ_A da ise.

Tersine, f rölatif fuzzy açıktır eğer τ_A daki her bir açık fuzzy kümesi U' nün görüntüsü $f(U')$, U_B de ise [9].

3. HOMOTOPİ KAVRAMI

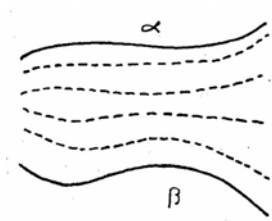
3.1. Eğrilerin homotopisi

3.1. Tanım

α ve β , X topolojik uzayında iki eğri olsun. Eğer α dan β ya sürekli bir deformasyonla geçilebiliyorsa bu iki eğriye homotoptur denir ve $\alpha \sim \beta$ ile gösterilir.

Başka bir ifadeyle

$\alpha, \beta: [0,1] \rightarrow X$ iki eğri olsun. $\alpha \sim \beta$ dır denir eğer, $\exists F = F(x,t) : I \times J \rightarrow X \ni F$ sürekli ve $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \beta(x)$, veya $\forall t \in [0,1]$ için $F_t(x) = \alpha_t(x)$ oluyorsa, burada $J = [0,1]$ dir. [4].



3.2. Tanım

Bir $\alpha: I \rightarrow X$ eğrisinin tersi (inversi) diye $\forall x \in I$ için $\alpha^{-1}(x) = \alpha(1-x)$ şeklinde tanımlanan $\alpha^{-1}: I \rightarrow X$ sürekli fonksiyonuna denir. Açıkça bir eğrinin bitim noktası ile tersinin başlangıç noktası ve bir eğrinin başlangıç noktası ile tersinin bitim noktası çakışır, yani α^{-1} eğrisinin başlangıç noktası $\alpha^{-1}(0) = \alpha(1)$ ve bitim noktası $\alpha^{-1}(1) = \alpha(0)$ dır [10].

3.1. Teorem

$\alpha \sim \beta$ ise $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ dir [10].

İspat

$\alpha \sim \beta$ ise $\exists F(x,t) : I \times J \rightarrow X \ni F(x,t)$ sürekli, $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \beta(x)$ ve $F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$, $F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$ dir. Şimdi $G: I \times J \rightarrow X$ fonksiyonunu $G(x,t) = F(1-x,t)$ ile tanımlayalım. F sürekli olduğundan G de sürekli dir. Diğer taraftan

$$G(x,0) = F(1-x,0) = \alpha(1-x) = \alpha^{-1}(x)$$

$$G(x,1) = F(1-x,1) = \beta(1-x) = \beta^{-1}(x)$$

$$G(0,t) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = \alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0)$$

$$G(1,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = \alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1)$$

olur. O halde $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ dir.

3.3. Tanım

$\alpha: I \rightarrow X$ bir eğri olsun, α sabit bir fonksiyon ise, yani $\alpha(I)$, X de bir tek noktadan ibaret ise α eğrisine sıfır eğri denir.

3.2. Teorem

α , X topolojik uzayında herhangi bir eğri ise $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ sıfır eğriye homotoptur [10].

3.2.Fonksiyonların homotopisi

3.4.Tanım

X ve Y iki topolojik uzay ve $f,g:X \rightarrow Y$ sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$F(x,0)=f(x),$$

$$F(x,1)=g(x)$$

şartlarını sağlayan bir $F = F(x,t) : X \times J \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g ye homotoptur denir ve $f \sim g$ veya $f \stackrel{F}{\sim} g$ ile gösterilir. F fonksiyonuna ise, f den g ye homotopi denir [4].

3.3.Teorem

\sim homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat

i) \sim bağıntısı yansımalıdır:

$f \sim f$ dir. Gerçekten $F(x,t):X \times J \rightarrow Y$ fonksiyonu $F(x,t)=f(x)$ olarak tanımlanırsa,

$$F(x,0)=f(x),$$

$$F(x,1)=f(x) \text{ ve}$$

$F(x,t)$ süreklidir. Dolayısıyla $f \sim f$ dir.

ii) \sim bağıntısı simetriktir:

$f \sim g$ ise, $g \sim f$ dir. Gerçekten $f \sim g$ ise $\exists F(x,t): X \times J \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve $F(x,0)=f(x)$
 $F(x,1)=g(x)$ dir.

Şimdi $G(x,t): X \times J \rightarrow Y$, $G(x,t)=F(x,1-t)$ şeklinde tanımlanan G fonksiyonu sürekli dir
ve

$$G(x,0)=F(x,1)=g(x)$$

$$G(x,1)=F(x,0)=f(x)$$

dir. Bu ise, $g \sim f$ demektir.

iii) \sim bağıntısı geçişmelidir:

$f \sim g$ ve $g \sim h$ ise, $f \sim h$ dir. Gerçekten;

$f \sim g$ ise $\exists F(x,t): X \times J \rightarrow Y \ni F$ sürekli ve $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$,

$g \sim h$ ise $\exists G(x,t): X \times J \rightarrow Y \ni G$ sürekli ve $G(x,0)=g(x)$, $G(x,1)=h(x)$ dir.

Şimdi $H(x,t): X \times J \rightarrow Y$ fonksiyonunu

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 2.3 den $H(x,t)$ sürekli olup,

$$H(x,0)=F(x,0)=f(x),$$

$$H(x,1)=G(x,1)=h(x)$$

dir. Dolayısıyla $f \sim h$ dır.

3.1.Sonuç

Teorem 3.3 den X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün sürekli fonksiyonların kümesi \sim bağıntısıyla ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayrılmış bulunmaktadır. İki fonksiyonun aynı sınıfta olması için gerek ve yeter şart homotop olmasıdır. Bu eşdeğerlik sınıflarına homotopi sınıfları denir ve bütün homotopi sınıflarının kümesi $[X;Y]$ ile gösterilir. Şayet $f:X \rightarrow Y$ sürekli ise, f nin homotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir [10].

3.5.Tanım

X, Y iki topolojik uzay, $X_0 \subset X$ herhangi bir alt küme ve $f, g: X \rightarrow Y$ ye her $x_0 \in X_0$ için $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan sürekli iki fonksiyon olsun, f fonksiyonu X_0 a nazaran g ye homotoptur denir ve $f \sim g \text{ rel. } X_0$ ile gösterilir, eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $F(x, t) : X \times J \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu varsa;

(i) Her $x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

(ii) Her $x_0 \in X_0$ için $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$.

$X_0 = \emptyset$ ise sadece $f \sim g$ yazılır. Demek ki adi homotopi, rölatif homotopinin özel bir halidir [10].

3.4. Teorem

(X, τ) , (Y, τ') , (Z, τ'') topolojik uzaylar, $f, g : X \rightarrow Y$ sürekli iki fonksiyon ve $f \sim g$ olsun. $h : Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyon ise bu durumda $hf, hg : X \rightarrow Z$ fonksiyonları süreklidir ve $hf \sim hg$ dir [10].

İspat

Açık olarak hf ve hg sürekli olduklarından $hf \sim hg$ olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $f \sim g$ olduğundan $\forall x \in X$ için $F(x,0)=f(x)$ ve $F(x,1)=g(x)$ olacak şekilde bir $F=F(x,t) : X \times J \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır. Şimdi $G=G(x,t) : X \times J \rightarrow Z$ fonksiyonu $x \in X$ olmak üzere $G(x,t)=h(F(x,t))$ olarak tanımlayalım. $G=hoF$ süreklidir. Üstelik

$$G(x,0)=h(F(x,0))=hf$$

$$G(x,1)=h(F(x,1))=hg$$

dir. Dolayısıyla $hf \sim hg$ dir.

3.5. Teorem

X, Y, Z topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$, $g, h: Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonlar $\ni g \sim h$ olsun. Bu durumda $gf, hf: X \rightarrow Z$ fonksiyonları süreklidir ve $gf \sim hf$ dir [10].

İspat

Açık olarak gf ve hf sürekli olduklarından $gf \sim hf$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. $g \sim h$ olduğundan $F(y,0)=g(y)$ ve $F(y,1)=h(y)$ olacak şekilde bir $F=F(x,t) : Y \times J \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonu vardır. Şimdi $G=G(x,t) : X \times J \rightarrow Z$ fonksiyonunu $x \in X$ olmak üzere $G(x,t)=F(f(x),t)$ olarak tanımlayalım. F ve f sürekli olduğundan

$G=F \circ f$ süreklidir. Üstelik

$$G(x,0) = F(f(x),0) = gf$$

$$G(x,1) = F(f(x),1) = hf$$

dir. Dolayısıyla $gf \sim hf$ dir.

3.6.Tanım

X, Y iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun, f fonksiyonuna "homotopi eşdeğerlik" denir, şayet aşağıdaki şartları sağlayan bir $f': Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu varsa

$$(i) ff' \sim 1_Y$$

$$(ii) f'f \sim 1_X$$

Bu durumda X ve Y topolojik uzaylarına homotopik eşdeğer uzaylar veya X ile Y aynı homotopi tipindedir denir. $X \sim Y$ ile gösterilir. Açıkça X, Y ye topolojik olarak eşyapılı ise, X ile Y aynı homotopi tipindedir. Fakat aynı homotopi tipindeki uzayların topolojik eşyapılı olması gerekmez [10].

3.6.Teorem

Aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır [11].

İspat

Yansıma ve simetri aksiyomlarının tanımdan sağlandığı açıktır. Geçişme aksiyomunun sağlandığını gösterelim:

$X \sim Y$, $Y \sim Z$ olsun. $X \sim Z$ olduğunu göstermeliyiz.

$X \sim Y$ ise $\exists f: X \rightarrow Y, f' : Y \rightarrow X \ni f, f'$ sürekli ve $ff' \sim 1_Y, f'f \sim 1_X$ dir.

$Y \sim Z$ ise $\exists g: Y \rightarrow Z, g' : Z \rightarrow Y \ni g, g'$ sürekli ve $gg' \sim 1_Z, g'g \sim 1_Y$ dir.

Diğer taraftan $h = gf: X \rightarrow Z, h' = f'g': Z \rightarrow X$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır.

Üstelik $h'h: X \rightarrow X, hh': Z \rightarrow Z$ dir.

Şimdi $h'h \sim 1_X$ ve $hh' \sim 1_Z$ olduğunu gösterelim. Gerçekten $h'h = (f'g')(gf) = f'(g'g)f$ ve $g'g \sim 1_Y$ dir. Teorem 3.4 den dolayı $f'(g'g) \sim f'1_Y = f'$, yani $f'(g'g) \sim f'$. Teorem 3.5 den dolayı $f'(g'g) \sim f'f$. Yani $h'h \sim f'f$ elde edilir. $f'f \sim 1_X$ ve \sim bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $h'h \sim 1_X$ bulunur. Benzer şekilde $hh' \sim 1_Z$ elde edilir. O halde $X \sim Z$ dir.

4.FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARINDA HOMOTOPI

4.1.Teorem

$\text{Supp } A = \{x \in X : f_A(x) > 0\}$ kümesi A fuzzy kümesinin desteği (dayanağı) ve (X, τ^*) bir topolojik uzay olsun.

$$\tilde{\tau} = \{A \mid A, X \text{ de fuzzy küme ve } \text{Supp } A \in \tau^*\}$$

ise $\tilde{\tau}$, X üzerinde bir fuzzy topolojidir, $(X, \tilde{\tau})$ uzayına (X, τ^*) tarafından üretilen fuzzy topolojik uzay adı verilir.

$X = I$ ve I üzerinde \mathbb{R} nin alışımlı topolojisinden indirgenen topoloji ε_1 olmak üzere (I, ε_1) topolojik uzayı tarafından üretilen fuzzy topolojik uzayı $(I, \tilde{\varepsilon}_1)$ ile gösterilir [12].

4.1.Tanım

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar $f, g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer; $F : (X, \tau) \times (I, \varepsilon_1) \rightarrow (Y, \tau')$ sürekli fonksiyonu var ve $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ oluyorsa f fonksiyonu g ye homotoptur denir. F ye ise f den g ye homotopi denir ve $F : f \approx g$ olarak yazılır [13].

4.2.Teorem

(X, τ) , (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar olsun, \approx bağıntısı

$$\Omega((X, \tau), (Y, \tau')) = \{f \mid f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau') \text{ fuzzy sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat

i) Yansıma

$f \in \Omega((X, \tau), (Y, \tau'))$ ve $\forall (x, t) \in X \times I$ için $P_1(x, t) = x \in X$ olarak tanımlanan

$$P_1: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (X, \tau)$$

fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere $F = f.P_1$ şeklinde gösterilen

$$F: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau')$$

dönüşümü fuzzy sürekli fonksiyondur.

$F(x, t) = f.P_1(x, t)$ olduğundan $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = f(x)$ dir. Buradan $F: f \approx f$ dir.

ii) Simetri

$f, g \in \Omega((X, \tau), (Y, \tau'))$ ve $F: f \approx g$ olsun. $F: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau')$ var öyleki $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ dir.

$(x, t) \in X \times I$ için $\xi: X \times I \rightarrow X \times I$, $(x, t) \rightarrow \xi(x, t) = (x, 1-t)$ olmak üzere; $G(x, t) = F.\xi(x, t) = F(x, 1-t)$ olsun. Bu durumda

$$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x) \text{ ve } G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$$

olduğundan $G: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau')$ fuzzy sürekli fonksiyon olup $g \approx f$ dir.

iii)Geçişme

$f, g, h \in \Omega((X, \tau), (Y, \tau'))$,

$F: f \approx g$ olduğundan $\exists F : (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau') \ni F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ dir.

$G: g \approx h$ olduğundan $\exists G : (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau') \ni G(x, 0) = g(x)$ ve $G(x, 1) = h(x)$ dir.

$H: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_1) \rightarrow (Y, \tau')$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlarsak her $x \in X$ için;

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu teorem 2.3 den sürekli olup $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ dir. Dolayısıyla $H: f \approx h$ dir [13].

4.2.Tanım

(X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzayları olsun. Eğer $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ ve $g: (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ fuzzy sürekli fonksiyonlar iken; $gf \approx 1_X$, $fg \approx 1_Y$ oluyorsa (X, τ) ve (Y, τ') uzayları homotopik olarak denktir veya fuzzy aynı homotopi tipindedir denir, f ye (X, τ) dan (Y, τ') ye homotopi eşdeğerlik dönüşümü, g ye de f nin inversi denir, $f: (X, \tau) \approx (Y, \tau')$ veya $(X, \tau) \approx (Y, \tau')$ olarak gösterilir [13].

4.3.Teorem

Fuzzy aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bütün fuzzy topolojik uzayların kümesinde denklik bağıntısıdır.

İspat

Fuzzy homotopi olma bağıntısının simetri ve yansıma özelliklerini tanımdan sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Geçişme özelliğinin sağlandığını gösterelim:

$$(X, \tau) \approx (Y, \tau') \text{ ve } (Y, \tau') \approx (Z, \tau'')$$

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau') \quad h: (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$$

$$g: (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau) \quad k: (Z, \tau'') \rightarrow (Y, \tau')$$

$$fg \approx 1_Y, gf \approx 1_X, \quad hk \approx 1_Z, kh \approx 1_Y$$

$$u = hf: (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau''), \quad v = gk: (Z, \tau'') \rightarrow (X, \tau)$$

olarak alalım.

$$vu = gkhf \approx g \cdot 1_Y \cdot f \approx gf \approx 1_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$$

$$uv = hfgk \approx h \cdot 1_Y \cdot k \approx hk \approx 1_Z : (Z, \tau'') \rightarrow (Z, \tau'')$$

$(X, \tau) \approx (Z, \tau'')$ olduğu bulunur [13].

5.FUZZY TOPOLOJİK GRUP

5.1.Tanım

G boş olmayan bir küme olsun. $*$: $G \times G \rightarrow G$; $(a, b) \rightarrow a * b$ olacak şekilde tanımlı bir fonksiyon olsun. G kümesi aşağıdaki koşulları sağlarsa G ye $*$ işlemine göre bir grup denir.

(1) G nin a, b ve c elemanları için $(a * b) * c = a * (b * c)$ dir.

(2) Her $a \in G$ için $a = a * e = e * a$ olacak şekilde G nin bir e elemanı vardır.

(3) Her $a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ vardır [14].

5.2.Tanım

Bir G grubunda her a, b elemanı için $a * b = b * a$ sağlanıyorsa G ye değişmeli (abel) grup denir [14].

5.3.Tanım

$G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $(G, *)$ bir grup ve (G, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer,

(a) $\theta: G \times G \rightarrow G$

$$(x, y) \rightarrow \theta(x, y) = x * y$$

fonksiyonu $G \times G$ de çarpım topolojisi ve G de τ topolojisi göz önüne alındığında sürekli,

(b) $I : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$

$$x \rightarrow I(x) = x^{-1}$$

fonksiyonu sürekli ise, $(G, \tau, *)$ sıralı üçlüsüne bir topolojik grup denir.

Bu tanımda x^{-1} ile $(G, *)$ grubunda $x \in G$ elemanın inversi (tersi) gösterilmiştir.

5.1.Örnek

$(\mathbb{R}, +)$ toplam grubu ve (\mathbb{R}, τ) alışılmış topolojik uzayını göz önüne alalım.

$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \theta(x, y) = x + y$$

fonksiyonu süreklidir

$$I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow I(x) = -x$$

fonksiyonu da sürekli olduğundan $(\mathbb{R}, \tau, +)$ bir topolojik gruptur.

5.2.Örnek

(\mathbb{R}, τ) alışılmış topolojik uzay ve $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, *)$ çarpım grubu ile

$(\mathbb{R}^*, \tau_{\mathbb{R}^*}, *)$ alışılmış alt uzay topolojisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\theta: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$(x,y) \rightarrow \theta(x,y) = x * y$$

fonksiyonu süreklidir. Öte yandan,

$$I: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \rightarrow I(x) = \frac{1}{x}$$

fonksiyonu da süreklidir. O halde \mathbb{R}^* çarpım grubu bir topolojik gruptur.

5.4.Tanım

(X, \cdot) bir grup, (X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. (X, τ, \cdot) ye fuzzy topolojik grup denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa.

(I) $f: (X, \tau) \times (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$, $f: (x,y) \rightarrow xy$ fonksiyonu fuzzy süreklidir.

(II) $g: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$, $g: x \rightarrow x^{-1}$ fonksiyonu fuzzy süreklidir. [15].

5.5.Tanım

(X, \cdot) bir grup, (X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. (X, τ, \cdot) ye fuzzy topolojik grup denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa.

(I') $\forall a, b \in X$ ve $(ab)_\alpha$ fuzzy noktasının bir W komşuluğu için a_α nın U ve b_α nın V komşulukları var $\ni UV < W$.

(II') $\forall a \in X$ ve a_α^{-1} nın bir V komşuluğu için a_α nın U komşuluğu vardır $\ni U^{-1} < V$ [15].

5.1. Notasyon

(X, \cdot) bir grup, $A, B \in I^X$ ve $C, D \leq X$ olsun. $A \bullet B \in I^X$, $A^{-1} \in I^X$, $C \cdot D \leq X$ ve $C^{-1} \leq X$ aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$(A \bullet B)(x) = \sup \{ \min \{ A(x_1), B(x_2) \} : x_1 \cdot x_2 = x \} \text{ ve}$$

$$A^{-1}(x) = A(x^{-1}), \forall x \in X \text{ için.}$$

$$C \cdot D = \{ c \cdot d : c \in C \text{ ve } d \in D \} \text{ ve}$$

$$C^{-1} = \{ c^{-1} : c \in C \} \text{ [8].}$$

5.6. Tanım

X boştan farklı bir küme olsun. (X, τ, \cdot) üçlüsüne aşağıdaki şartları sağlıyorsa fuzzy topolojik grup denir.

(i) (X, \cdot) bir grup

(ii) (X, τ) bir f.t.u.

(iii) $\forall x, y \in X$ ve $p_{x,y}^r$ nin W fuzzy açık Q -komşuluğu için p_x^r ve p_y^r nin sırasıyla U ve V fuzzy açık Q -komşulukları vardır öyle ki $U \bullet V \leq W$ dir.

(iv) $\forall x \in X$ ve $p_{x^{-1}}^r$ nin V fuzzy açık Q -komşuluğu için p_x^r nin bir U fuzzy açık Q -komşuluğu vardır öyle ki $U^{-1} \leq V$ dir [8].

5.1. Teorem

(Y, τ') bir f.t.u. , (Z, τ'', \cdot) bir fuzzy topolojik grup ve $f, g \in FC(Y, Z)$, $f * g: (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$ ve $f^{-1}: (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$ fonksiyonlar olsun. $\forall y \in Y$ için

$(f * g)(y) = f(y).g(y)$ ve $f^{-1}(y) = (f(y))^{-1}$ fuzzy süreklidir [8].

İspat

$r \in (0, 1]$ ve $y \in Y$ olmak üzere p_y^r , Y de bir fuzzy nokta ve Z de $(f * g)(p_y^r) = p_{f(y).g(y)}^r$ nin bir W fuzzy açık Q -komşuluğu olsun. (Z, τ'', \cdot) topolojik grup olduğundan $p_{f(y)}^r$ ve $p_{g(y)}^r$ nin sırasıyla U ve V fuzzy açık Q -komşulukları vardır $\ni U \bullet V \leq W$ dir. f ve g fuzzy sürekli olduğundan Y de p_y^r nin U_1 ve V_1 fuzzy açık Q -komşulukları vardır $\ni f(U_1) \leq U$ ve $g(V_1) \leq V$ dir. Açıkça $U_1 \wedge V_1 \in I^Y$ fuzzy kümesi Y de p_y^r nin fuzzy açık Q -komşuluğudur. $(f * g)(U_1 \wedge V_1) \leq W$ dir. Gerçekten,

$p_{y_1}^r \in U_1 \wedge V_1$ olsun.

$(f * g)(p_{y_1}^r) = p_{f(y_1).g(y_1)}^r = p_{(f * g)(y_1)}^r \in W$ dir. Gösterelim:

$p_{y_1}^r \in U_1$ ve $p_{y_1}^r \in V_1$ olduğundan $f(p_{y_1}^r) = p_{f(y_1)}^r \in U$ ve $g(p_{y_1}^r) = p_{g(y_1)}^r \in V$. Buradan $r \leq U(f(y_1))$ ve $r \leq V(g(y_1))$ dir.

$$(U \bullet V)(f(y_1).g(y_1)) = \sup \{ \min \{ U(z_1), V(z_2) \} : z_1.z_2 = f(y_1).g(y_1) \} \geq r$$

olduğundan $r \leq (U \bullet V)(f(y_1).g(y_1)) \leq W(f(y_1).g(y_1))$, $p_{f(y_1).g(y_1)}^r = p_{(f * g)(y_1)}^r \in W$.

$(f * g)(U_1 \wedge V_1) \leq W$ dir. O halde $f * g$ fonksiyonu fuzzy süreklidir.

Son olarak f^{-1} fonksiyonunun da fuzzy sürekli olduğunu gösterelim:

Y de p_y^r bir fuzzy nokta ve W, Z de $f^{-1}(p_y^r) = p_{f^{-1}(y)}^r = p_{(f(y))^{-1}}^r$ in fuzzy açık Q -komşuluğu olsun. (Z, τ'', \cdot) fuzzy topolojik grup olduğundan Z de $p_{f(y)}^r$ nin bir fuzzy açık Q -komşuluğu U vardır, öyle ki $U^{-1} \leq W$. U_1 , Y de p_y^r nin fuzzy açık Q -komşuluğu olduğundan $f^{-1}(U_1) \leq W$ dir. Gerçekten $p_{y_1}^r \in U_1$ olsun. $f^{-1}(p_{y_1}^r) \in W$ den $r \leq W(f^{-1}(y_1)) = W((f(y_1))^{-1})$ dir. Buradan $f(p_{y_1}^r) = p_{f(y_1)}^r \in U$.

5.7.Tanım

Y bir küme ve $r \in [0,1]$ olsun. $\forall x \in Y$ için $r(x) = r$ olarak tanımlayalım. O halde $\forall r \in [0,1]$ için $r \in \tau'$ oluyorsa (Y, τ') fuzzy topolojik uzayı fully stratified fuzzy topolojik uzay olarak adlandırılır [8].

5.2.Teorem

(Y, τ') fully stratified fuzzy topolojik uzay, (Z, τ'', \cdot) bir fuzzy topolojik grup ve $e \in (Z, \cdot)$ grubunun özdeş elemanı olsun. $\forall y \in Y$ için $e^* : (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$, $e^*(y) = e$ fonksiyonu fuzzy süreklidir [8].

İspat

$U \in \tau''$ olsun. $(e^*)^{-1}(U) \in \tau'$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall y \in Y$ için $((e^*)^{-1}(U))(y) = (e^*(y)) = U(e)$ dir. Bu ise $(e^*)^{-1}(U)$ fuzzy kümesi sabit anlamına gelir. (Y, τ') fuzzy uzayı fully stratified olduğundan $(e^*)^{-1}(U) \in \tau'$ dir. O halde e^* fuzzy süreklidir.

5.3.Teorem

(Y, τ') fully stratified fuzzy topolojik uzay, (Z, τ'', \cdot) bir fuzzy topolojik grup olsun. $(FC(Y, Z), *)$ çifti gruptur [8].

İspat

$f, g, h \in FC(Y, Z)$ olsun. $\forall y \in Y$ için

$$((f * g) * h)(y) = (f * g)(y) \cdot h(y)$$

$$= (f(y) \cdot g(y)) \cdot h(y)$$

$$= f(y) \cdot (g(y) \cdot h(y))$$

$$= (f * (g * h))(y) \text{ dir.}$$

O halde $(f * g) * h = f * (g * h)$ dir.

$f \in FC(Y, Z)$ olsun. $e^* \in FC(Y, Z)$ için

$$(f * e^*)(y) = f(y) \cdot e^*(y) = f(y) \cdot e = f(y) \text{ ve}$$

$$(e^* * f)(y) = e^*(y) \cdot f(y) = e \cdot f(y) = f(y) \text{ olduğundan}$$

$f * e^* = e^* * f = f$ dir. Buradan $e^* \in FC(Y, Z)$ fonksiyonu özdeş elemandır.

Son olarak $\forall f \in FC(Y, Z)$ için $f^{-1} \in FC(Y, Z)$ vardır \ni

$$(f * f^{-1})(y) = f(y) \cdot f^{-1}(y) = f(y) \cdot (f(y))^{-1} = e = e^*(y) \text{ ve}$$

$$(f^{-1} * f)(y) = f^{-1}(y) \cdot f(y) = (f(y))^{-1} \cdot f(y) = e = e^*(y) \text{ olduğundan}$$

$f * f^{-1} = f^{-1} * f = e^*$ dir. Buradan $f^{-1} \in FC(Y, Z)$ fonksiyonu f nin ters elemanıdır. O halde $(FC(Y, Z), *)$ çifti gruptur.

5.4. Teorem

(Y, τ') fully stratified fuzzy topolojik uzay , (Z, τ'', \cdot) bir fuzzy topolojik grup olsun. Eğer (Z, \cdot) değişmeli (abelian) grup ise $(FC(Y, Z), *)$ çifti de değişmeli (abelian) gruptur [8].

İspat

Teorem 5.3. den $(FC(Y, Z), *)$ çiftinin grup olduğunu göstermiştik. Bu durumda sadece değişmeli olduğunu göstermeliyiz. $\forall f, g, \in FC(Y, Z)$ ve $\forall y \in Y$ için $(f * g)(y) = f(y) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(y) = (g * f)(y)$ dir. Buradan $f * g = g * f$ dir. O halde $(FC(Y, Z), *)$ çifti değişmeli (abelian) gruptur.

5.8. Tanım

(X, \cdot) bir grup ve $G \in I^X$ olsun. G ye, aşağıdaki şartları sağlıyorsa, X de fuzzy grup denir[8].

(i) $G(x \cdot y) \geq \min \{G(x), G(y)\}$, $\forall x, y \in X$ için.

(ii) $G(x^{-1}) \geq G(x)$, $\forall x \in X$ için.

5.5. Teorem

(Y, τ') fully stratified fuzzy topolojik uzay , (Z, τ'', \cdot) bir fuzzy topolojik grup ve $Z_1 \in I^Z$ bir fuzzy grup olsun.

$$G(f) = \inf \{ Z_1 (f(y)) : y \in Y \}, f \in FC(Y, Z)$$

ile tanımlanan $G \in I^{FC(Y, Z)}$ fuzzy kümesi bir fuzzy gruptur.

İspat

Teorem 5.3 den $(FC(Y,Z),*)$ çiftinin grup olduğunu göstermiştik. $f,g \in FC(Y,Z)$ olsun.

$$\begin{aligned}
 G(f*g) &= \inf \{ Z_1 ((f*g)(y)):y \in Y \} \\
 &= \inf \{ Z_1 (f(y).g(y)):y \in Y \} \\
 &\geq \inf \{ \min \{ Z_1(f(y)), Z_1(g(y)) \}: y \in Y \} \\
 &\geq \min \{ \inf \{ Z_1(f(y)): y \in Y \}, \inf \{ Z_1(g(y)): y \in Y \} \} \\
 &= \min \{ G(f), G(g) \}.
 \end{aligned}$$

Şimdi $f^{-1} \in FC(Y,Z)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
 G(f^{-1}) &= \inf \{ Z_1(f^{-1}(y)): y \in Y \} \\
 &= \inf \{ Z_1((f(y))^{-1}): y \in Y \} \\
 &\geq \inf \{ Z_1(f(y)): y \in Y \} \\
 &= G(f).
 \end{aligned}$$

O halde $G \in I^{FC(Y,Z)}$ bir fuzzy gruptur.[8]

6.H-GRUPLARI

6.1.Tanım

(P, p_0) noktalı topolojik uzay olmak üzere $\mu: P \times P \rightarrow P$ sürekli çarpımı ile birlikte $c: P \rightarrow P$ sabit fonksiyonu (bir tek) bir homotopi özdeşlik ise P ye H - uzayı denir. c nin homotopi özdeşlik olması

$$P \xrightarrow{(c,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

$$P \xrightarrow{(1,c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

kompozisyonlarının 1_P ye homotop olmasıdır. Yani

$$\mu \circ (c,1) \sim 1_P \text{ veya } \mu \circ (1,c) \sim 1_P.$$

μ çarpmasına homotopi birleşmelidir denir, eğer

$$\begin{array}{ccc} P \times P \times P & \xrightarrow{\mu \times 1} & P \times P \\ \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\ P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

karesi, homotopi değişmeli ise, yani

$$\mu \circ (\mu \times 1) \sim \mu \circ (1 \times \mu).$$

Bir $\phi: P \rightarrow P$ sürekli fonksiyonuna P ve μ için bir homotopi inverstir denir, eğer

$$P \xrightarrow{(1,\phi)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

$$P \xrightarrow{(\phi,1)} P \times P \xrightarrow{\mu} P$$

kompozisyonlarının her biri $c:P \rightarrow P$ sabit fonksiyonuna homotop ise, yani

$$\mu \circ (1,\phi) \sim c \text{ ve } \mu \circ (\phi,1) \sim c \quad [16].$$

6.2. Tanım

Bir homotopi inversli, homotopi birleşmeli H-uzayı, homotopi grup aksiyomlarını sağlar. Böyle bir noktalı uzaya H-grubu denir.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{(p_0,1)} & P \times P & \xleftarrow{(1,p_0)} & P \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & P & & \end{array}$$

p_0 iki taraflı özdeşliktir. Yani $\mu \circ (1,p_0) \sim 1 \sim \mu \circ (p_0,1)$ ise.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{(\phi,1)} & P \times P & \xleftarrow{(1,\phi)} & P \\ & \searrow p_0 & \downarrow \mu & \swarrow p_0 & \\ & & P & & \end{array}$$

Bir $\phi:(P,p_0) \rightarrow (P,p_0)$ " homotopi invers " olarak adlandırılır, eğer $\mu \circ (\phi,1) \sim p_0 \sim \mu \circ (1,\phi)$ ise.

6.1.Örnek

Herhangi bir topolojik grubun, bir H-grubu olduğu açıktır.

Bir H-uzayında μ çarpmasına "homotopi değişmelidir" denir, eğer $T(p_1, p_2) = (p_2, p_1)$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} P \times P & \xrightarrow{T} & P \times P \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu \\ & P & \end{array}$$

üçgeni homotopi değişmeli ise, yani

$\mu \circ T \sim \mu$ ise [17].

Bir homotopi değişmeli çarpma içeren H-grubuna değişmeli H-grubu denir .

μ ve μ' , sırasıyla P ve P' H uzaylarının çarpmaları ise, bu durumda bir $\alpha: P \rightarrow P'$ sürekli fonksiyonuna homomorfizm denir, eğer

$$\begin{array}{ccc} P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \\ \alpha \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ P' \times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \end{array}$$

karesi homotopi değişmeli ise (yani, $\mu' \circ (\alpha \times \alpha) \sim \alpha \circ \mu$ ise) [16].

6.1.Teorem

Bir H-uzayı (veya bir H-grubu) ile aynı homotopi tipinden olan bir noktalı uzayın kendisi de bir H-uzayıdır (veya bir H-grubudur), homotopi eşdeğerlik bir homomorfizmdir [11].

İspat

$f:P \rightarrow P'$ ve $g:P' \rightarrow P$ homotopi inversler ve P , çarpması $\mu:P \times P \rightarrow P$ bir H-uzayı olsun.

Eğer $\mu':P' \times P' \rightarrow P'$,

$$P' \times P' \xrightarrow{g \times g} P \times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$$

kompozisyonu olarak tanımlanmış ise, bu durumda μ' , P' de bir sürekli çarpmadır ve

$$P' \xrightarrow{(1, c')} P' \times P' \xrightarrow{\mu'} P'$$

kompozisyonu

$$P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(1, c)} P \times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$$

kompozisyonuna eşit olup bu

$$P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} P'$$

Kompozisyonuna homotoptur. Zira $fg \sim 1_{P'}$, $\mu' \circ (1, c') \sim 1_{P'}$.

Benzer şekilde, $\mu' \circ (c', 1)$ tasviri $1_{P'}$ ye homotoptur. Bundan dolayı P' bir H uzayıdır.

$$\begin{array}{ccc}
 P' \times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \\
 \downarrow g \times g & & \downarrow g \\
 P \times P & \xrightarrow{\mu} & P
 \end{array}$$

karesi homotopi komutatiftir, zira

$$\mu' = f \circ \mu \circ (g \times g)$$

olduğundan

$$g \circ \mu' = (g \circ f) \circ (\mu \circ (g \times g)) \text{ ve } g \circ f = g \circ f \circ 1_P$$

olduğundan teorem 3.5 den dolayı

$$(g \circ f) \circ (\mu \circ (g \times g)) \sim 1_P \circ (\mu \circ (g \times g)) = \mu \circ g \times g$$

dir. O halde

$$g \circ \mu' \sim \mu \circ g \times g$$

dir. Dolayısıyla g bir homomorfizmdir. Aynı şekilde f nin de bir homomorfizm olduğu gösterilir. Şayet μ homotopi asosyatif veya homotopi değişmeli ise, μ' de homotopi asosyatif veya homotopi değişmelidir, zira

$$1 \times \mu' = 1 \times (f \circ \mu \circ (g \times g)) \sim f \times f \circ 1 \times \mu \circ g \times g \times g \text{ ve } 1 \times \mu \sim \mu \times 1$$

olduğundan

$$f \times f \circ 1 \times \mu \circ g \times g \times g \sim f \times f \circ \mu \times 1 \circ g \times g \times g = \mu' \times 1$$

O halde $1x\mu' \sim \mu'x1$, yani μ' homotopi asosyatiftir. Aynı şekilde μ' nün homotopi abelian olduğu gösterilir.

Şayet $\phi: P \rightarrow P'$, P ve μ için bir homotopi invers ise bu takdirde $f\phi g: P' \rightarrow P'$, P' ve μ' için bir homotopi inverstir, zira; $f\phi g = \phi'$ dersek

$$\mu' \circ (1, \phi') = (f \circ \mu \circ (g \times g)) \circ (1, \phi') = (f \circ \mu \circ (g \times g)) \circ (1, f\phi g) \sim f \circ \mu \circ (1, \phi) \circ g$$

Hâlbuki $\mu \circ (1, \phi) \sim c$ (sabit tasvir) dir. O halde $f \circ \mu \circ (1, \phi) \circ g \sim c'$ (sabit tasvir). Dolayısıyla $f\phi g$, P' ve μ' için bir homotopi inverstir. Dolayısıyla P' bir H-Grubudur.

Bir P , H uzayı verilmiş olsun, herhangi bir X noktalı uzayı için $[g_1][g_2] = [\mu \circ (g_1, g_2)]$ ile tanımlanan $[X; P]$ çifti şayet P bir H grubu ise $[X; P]$ çifti bir grup olur, şöyle ki:

(i) Birleşme özelliği:

$[g_1], [g_2], [g_3] \in [X; P]$ ise

$$[g_1]([g_2][g_3]) = [g_1]([\mu \circ (g_2, g_3)]) = [\mu \circ (g_1, \mu \circ (g_2, g_3))] = [\mu \circ (1x\mu) \circ (g_1, (g_2, g_3))]$$

Halbuki, $\mu \circ (1x\mu) \sim \mu \circ (\mu x 1)$ idi. Dolayısıyla

$$[g_1]([g_2][g_3]) = [\mu \circ ((\mu x 1) \circ (g_1, g_2), g_3)] = ([g_1][g_2])[g_3]$$

(ii) Özdeş eleman

$[g] \in [X; P]$ ve $[p] \in [X; P] \ni p: X \rightarrow P$ ve $p(x) = p_0$ (taban nokta) $\in G$ olsun.

$$[g][p] = [\mu \circ (g, p)] = [\mu \circ (1, c) \circ g]$$

Halbuki $\mu \circ (1, c) \sim 1_p$ olduğundan $\mu \circ (1, c) \circ g \sim 1_p \circ g = g$. O halde $[g][p] = [g]$. Aynı

şekilde $[p].[g]=[g]$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla $p:X \rightarrow P$ sabit tasvir olmak üzere $[p] \in [X;P]$ özdeş elemandır.

(iii) İnvers eleman

$\phi:P \rightarrow P$, μ ve P için bir homotopi invers olsun. $g:X \rightarrow P$ bir tasvir ise, $\phi \circ g:X \rightarrow P$ bir tasvirdir. O halde

$[\phi \circ g] \in [X;G]$ dir.

$$[g][\phi \circ g] = [\mu \circ (g, \phi \circ g)] = [\mu \circ (1, \phi) \circ g].$$

Halbuki, $\mu \circ (1, \phi) \sim c$ olduğundan $\phi \circ (1, \phi) \circ g \sim c \circ g = p$. Dolayısıyla $[g][\phi \circ g] = [p] \in [X;P]$ dir. Aynı şekilde $[\phi \circ g][g] = [p] \in [X;P]$ ($[p]$ özdeş eleman). Dolayısıyla $[\phi \circ g]$, $[X;P]$ nin invers elemanıdır.

Şayet, $f:X \rightarrow Y$ ise, bu takdirde $f^*:[Y;P] \rightarrow [X;P]$ bir homomorfizmdir. Zira; $[g_1], [g_2] \in [Y;P]$ ise,

$$f^*([g_1][g_2]) = [\mu \circ (g_1, g_2)] \circ [f]$$

$$= [\mu \circ ((g_1, g_2) \circ f)]$$

$$= [\mu \circ (g_1 \circ f, g_2 \circ f)] \tag{6.1}$$

$$f^*([g_1])f^*([g_2]) = ([g_1] \circ [f])([g_2] \circ [f])$$

$$=[g_1 \circ f][g_2 \circ f]$$

$$=[\mu \circ (g_1 \circ f, g_2 \circ f)] \quad (6.2)$$

O halde (6.1) ve (6.2) den $f^*([g_1][g_2]) = f^*([g_1])f^*([g_2])$ [11].

6.1.Sonuç

Bir önceki kesimlerde fuzzy topolojik grup tanımları verilmiştir. (X, \cdot) bir grup, (X, τ) fuzzy topolojik uzayında $e \in X$ ve (X, e) noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. (X, \cdot) grubunda bu “e” taban noktasını grubun birim elemanı olarak alalım. Bu durumda (X, τ, \cdot) fuzzy topolojik grubu bir H-grubudur. Gerçekten ;

(X, τ, \cdot) fuzzy topolojik grup olduğundan

1. $\mu: X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \rightarrow \mu(x, y) = x \cdot y$ çarpması fuzzy süreklidir. Ayrıca $c: X \rightarrow X$, $c(x) = e$ sabit fonksiyonu homotopi özdeşliktir. Yani

$$X \xrightarrow{(c, 1)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

$$X \xrightarrow{(1, c)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

$$\mu \circ (c, 1)(x) = \mu(c(x), 1(x)) = \mu(e, x) = e \cdot x = x$$

$$\mu \circ (1, c)(x) = \mu(1(x), c(x)) = \mu(x, e) = x \cdot e = x$$

olduğundan $\mu \circ (c, 1) \sim 1_X$ veya $\mu \circ (1, c) \sim 1_X$ dir.

2. μ çarpması homotopi birleşmelidir. Gerçekten,

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X \times X & \xrightarrow{\mu \times 1} & X \times X \\
 \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\
 X \times X & \xrightarrow{\mu} & X
 \end{array}$$

$$(\mu \circ (\mu \times 1))(x, y, z) = \mu((\mu \times 1)(x, y, z)) = \mu(\mu(x, y), 1(z)) = \mu(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$(\mu \circ (1 \times \mu))(x, y, z) = \mu((1 \times \mu)(x, y, z)) = \mu(1(x), \mu(y, z)) = \mu(x, (y \cdot z)) = x \cdot (y \cdot z)$$

olduğundan $\mu \circ (\mu \times 1) \sim \mu \circ (1 \times \mu)$ dır.

3. (X, τ, \cdot) fuzzy topolojik grup olduğundan $\phi: X \rightarrow X, x \rightarrow \phi(x) = x^{-1}$ fonksiyonu fuzzy sürekli olup, μ ve X için homotopi inverstir. Gerçekten,

$$X \xrightarrow{(1, \phi)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

$$X \xrightarrow{(\phi, 1)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

bileşkeleri c sabit fonksiyonuna homotoptur. Yani

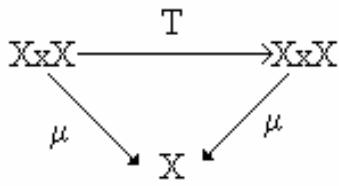
$$\mu \circ (1, \phi)(x) = \mu(1(x), \phi(x)) = \mu(x, x^{-1}) = x \cdot x^{-1} = e$$

$$\mu \circ (\phi, 1)(x) = \mu(\phi(x), 1(x)) = \mu(x^{-1}, x) = x^{-1} \cdot x = e$$

olup $\mu(1,\phi) \sim c$ ve $\mu(\phi,1) \sim c$ dir.

O halde (X, τ, \cdot) fuzzy topolojik grubu bir H-grubudur.

Eğer (X, \cdot) grubu değişmeli ise (X, τ, \cdot) fuzzy topolojik grubu bir değişmeli H-grubudur. Gerçekten, $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ olmak üzere



Üçgeni homotopi değişmelidir. Yani

$$(\mu \circ T)(x_1, x_2) = \mu(T(x_1, x_2)) = \mu(x_2, x_1) = x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 = \mu(x_1, x_2)$$

olduğundan $\mu \circ T \sim \mu$ dir.

KAYNAKLAR

1. Yıldız, C., Genel Topoloji, "Bağlantılı uzaylar", *Gazi Kitabevi Tic. Ltd. Şti.*, Ankara , 295-330 (2005)
2. Uluçay, C., "Modern Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri", *İTÜ Kütüphanesi, Şirketi Mürettibiye Basımevi*, İstanbul, 868:287 (1972)
3. Uluçay, C., "Fonksiyonlar Teorisi ve Rimann Yüzeyleri", *KTÜ. Temel Bil. Fak. Yay.*, 2. Baskı,38-63 (1978)
4. Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", *Inform and Control*, 8: 338-353 (1965).
5. Ming, P. P. and Liu, Ying-Ming, "Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and More-Smith Convergence", *J.Math.Anal.Appl.*, 76: 571-599 (1980).
6. Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J.Math.Anal.Appl.*, 24: 182-190 (1968).
7. Alaca, C., "Fuzzy Uzaylarında Süreklilik", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 6-20 (2001)
- 8.Coker, D.,"On Fuzzy Topological Groups and Fuzzy Continuous Functions" , *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Ankara, 34 : 35-43 (2005)
9. Foster, D.H.,"Fuzzy Topological Groups", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, England, 67: 549-564 (1979)
- 10.Bozhüyük, M.E., Genel Topolojiye Giriş, "Homotopi Teorisi", *Atatürk Üniversitesi Yayınları* , Erzurum , 610:81-93 (1984)
11. Yıldız, C., "H-Gruplar Üzerinde Demetler ve Bazı Karakterizasyonlar", Doktora Tezi, *İ.Ü. Fen-Edebiyat Fak.*, Malatya, 1-11 (1982)
12. Chang You Z., Wang Jin L., "Fundamental Group of Fuzzy Topological Space and Its Fuzzy Topological İnvariance", *Fuzzy Math 4* , Chinese, 27-37 (1984)
13. Chang You Z., Wang Jin L., "Fuzzy Homotopy Type İnvariance of Fundamental Group of Fuzzy Topological Space", *Fuzzy Math 4*, Chinese, 4: 53-56 (1984)
14. Güngöroğlu, G. ve Harmancı, A., Lineer Cebir Dersleri ve Problem Çözümleri, "Gruplar", *Hacettepe Üniv.*, Ankara, 14 (2000)
- 15.Chun-hai YU and Ji- liang MA " On Fuzzy Topological Groups" ,*Fuzzy Sets and Systems* , Nort- Holland , 23 : 281-287 (1987)

- 16.Spanier, E.H., Algebraic Homotopy, “ H-Spaces”, *Mc Graw-Hill Publishing Company, ltd.*, New Delhi, 33-36 (1966)
- 17.Switzer, R.M., Algebraic Topology-Homotopy and Homology, “Homotopy Sets and Groups”, *Springer- Verlag Berlin Heidelberg*, New York, 11-16 (1975)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DEMİRKAPI GÖÇER, Gülay
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 06.08.1980 ANKARA
Medeni hali : Evli

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Hacettepe Üniversitesi/Eğitim Fakültesi	2002
Lise	Bahçelievler Deneme Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2007	Özel Seviye Dergisi Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2002-2006	Özel Ça-Ka Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce-Almanca

Hobiler

Tiyatro, Gezi, Müzik dinlemek ve Kitap okumak