

**DİSKRİMİNASYON VE
HATA ORANLARI TAHMİNİ**

Cemal ATAĞAN

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

1997

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

58434

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

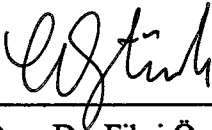
DİSKRİMİNASYON VE HATA ORANLARI TAHMİNİ

Cemal ATAKAN

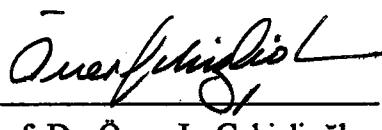
DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10.1.4./1997 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90. (...Doksan.....)
not takdir edilerek Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.



Doç. Dr. Fikri Öztürk
(Danışman)



Prof. Dr. Ömer L. Gebizlioğlu



Doç. Dr. Aydın Erar

Kızım Doğa 'ya



ÖZET

Doktora Tezi

DİSKRİMİNASYON VE HATA ORANLARI TAHMİNİ

Cemal ATAKAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK
1997, Sayfa : 112

Jüri : Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK
Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU
Doç. Dr. Aydın ERAR

Bu çalışmada, diskriminant analizinde hata oranı tahmini problemi üzerinde durulmuştur. Hata oranı tahmin edicilerinin karşılaştırılmasına ilişkin çalışmalar olmasına rağmen, literatürde var olan bir çok tahmin ediciye iki yeni düzenlenmiş tahmin edici eklenerek simülasyon ile karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca tek değişkenli gamma dağılımına sahip kitleler arasındaki sınıflandırma problemine de yer verilmiştir ve optimal hata oranları için analitik ifadeler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER : Sınıflandırma problemi, Hatalı sınıflandırma olasılığı,
Hata oranı tahmin edicileri, Düzenlenmiş tahmin ediciler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DISCRIMINATION AND ERROR RATES ESTIMATION

Cemal ATAKAN

Ankara University
Graduate School of Naturel and Applied Science
Department of Statistics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK
1997, Page: 112

Jury : Assoc. Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK
Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLIOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Aydın ERAR

In this study, an error rate estimation problem in discriminant analysis is considered. Eventhough there have been a lot of studies on comparisons of error rate estimators, many of the estimators worked out in the literature have been compared by simulation including two new smoothed estimators. Also the classification problem for univariate gamma populations is considered and some analytic expressions are obtained for optimal error rates.

KEY WORDS: Classification problem, Probability of misclassification,
Error rate estimators, Smoothed estimators.

TEŞEKKÜR

Bu konuda bana çalışma imkanı sağlayan ve çalışmam süresince her konuda desteğini gördüğüm sayın hocam Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK ' e teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Her zaman destek olan ve kaprislerime katlanan eşim Esin ' e, daima desteklerini gördüğüm yakın çevrem ve arkadaşlarıma ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Değerli zamanlarını ayırarak çalışmamı değerlendiren sayın jüri üyelerine de çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
TABLolar DİZİNİ	vii
GİRİŞ.....	1
 1. SINIFLANDIRMA (DİSKRİMİNASYON) PROBLEMİ.....	 4
1.1. Diskriminant Analizinde Bazı Atama Kuralları	
1.1.1. Fisher Yaklaşımı	6
1.1.2. Toplam Hatalı Sınıflandırma Olasılıklarının Minimizasyonu Yaklaşımı	7
1.1.3. Toplam Hatalı Sınıflandırma Maliyetlerinin Minimizasyonu Yaklaşımı	8
1.1.4. Bayes Teoremi Yaklaşımı	9
1.2. Diskriminant Analizinde Hata Oranları	9
 2. NORMAL DAĞILIMLI KİTLELERDE DİSKRİMİNASYON.....	 11
2.1. Parametreler Bilindiğinde Tek Değişkenli Normallik için Diskriminasyon	11
2.1.1. $U(X)$ ' in Dağılımı	12
2.1.2. Hata Oranları	13
2.2. Parametreler Bilinmediğinde Tek Değişkenli Normallik için Diskriminasyon	14
2.2.1. $W(X)$ ' in Dağılımı	15
2.2.2. Hata Oranları	15
2.3. Parametreler Bilindiğinde Çok Değişkenli Normallik için Diskriminasyon	18
2.3.1. $U(X)$ ' in Dağılımı	20
2.3.2. Hata Oranları	21
2.4. Parametreler Bilinmediğinde Çok Değişkenli Normallik için Diskriminasyon	21
2.4.1. $W(X)$ ' in Dağılımı	22
2.4.2. Hata Oranları	25

3. NORMAL DAĞILIMA SAHİP OLMAYAN KİTLELERDE DİSKRİMİNASYON	29
3.1. Kesikli Diskriminant Analizi	29
3.1.1. Bazı Kesikli Diskriminant Analizi Yöntemleri	30
3.1.1.i. Bağımsızlık Durumu	30
3.1.1.ii. Tam Bağımlılık Durumu	31
3.1.1.iii. Bahadur Modeli	32
3.1.1.iv. Log Lineer Model	34
3.1.3.v. Çokterimli Model	35
3.2. Gamma Dağılımına Sahip Kitlelerde Diskriminant Analizi	36
3.2.1. Parametrelerin Bilindiği Tek Değişkenli Gamma Kitleleri için Diskriminasyon	37
3.2.1.i. Hata Oranları	39
3.2.2. Parametrelerin Bilinmediği Tek Değişkenli Gamma Kitleleri için Diskriminasyon	41
4. HATA ORANI TAHMİN EDİCİLERİ	45
4.1. D Tahmin Edicisi	45
4.2. DS Tahmin Edicisi	48
4.3. R Tahmin Edicisi.....	49
4.4. U Tahmin Edicisi.....	50
4.5. $\bar{U}$ Tahmin Edicisi.....	52
4.6. O Tahmin Edicisi.....	52
4.7. OS Tahmin Edicisi.....	54
4.8. L Tahmin Edicisi.....	55
4.9. LS Tahmin Edicisi.....	57
4.10. M Tahmin Edicisi.....	59
4.11. H Tahmin Edicisi.....	59
4.12. 2H Tahmin Edicisi.....	60
4.13. KH Tahmin Edicisi.....	61
4.14. Düzlenmiş Tahmin Ediciler.....	62
4.14.1. Düzlenmiş Tahmin Edicilerin Elde Edilmesi	64
4.14.2. NS Tahmin Edicisi	66
4.14.3. NSL ve NSLS Tahmin Edicileri	70
4.15. Jacknife ve Bootstarp Tahmin Edicileri	74

5. TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI	75
5.1. Hata Oranı Tahmin Edicilerini Karşılaştırmak için Ölçütler	75
5.2. Daha Önceki Çalışmalardan Tahmin Edicilerin Değerlendirilmesi	76
5.3. Tek ve Çok Değişkenli Normal ve Gamma Dağılımlarından Sayı Üretme	79
5.4. Tek Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Kitlelerde Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması	79
5.5. Çok Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Kitlelerde Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması	86
5.6. Gamma Dağılımına Sahip Kitlelerde Optimal Hata Oranlarının ve Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması	97
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	106
KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ	112

TABLOLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 5.1: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)..	81
Tablo 5.2: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)..	82
Tablo 5.3: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 30$)..	83
Tablo 5.4: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)..	84
Tablo 5.5: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$)	85
Tablo 5.6: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)	87
Tablo 5.7: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)	88
Tablo 5.8: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması Değerleri (UMSE) ($n_1 = n_2 = 30$)	89
Tablo 5.9: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	90
Tablo 5.10: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$).....	91
Tablo 5.11: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)	92
Tablo 5.12: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)	93

Tablo 5.13: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 30$)	94
Tablo 5.14: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	95
Tablo 5.15: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması(UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$)	96
Tablo 5.16: Durum 1 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 25$)	98
Tablo 5.17: Durum 1 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	99
Tablo 5.18: Durum 2 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 25$)	100
Tablo 5.19: Durum 2 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	101
Tablo 5.20: Durum 3 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 25$)	102
Tablo 5.21: Durum 3 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	103
Tablo 5.22: Durum 4 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 25$)	104
Tablo 5.23: Durum 4 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)	105

GİRİŞ

Diskriminasyon, üzerinde ölçüm yapılan bir bireyi bilinen ve farklı olan kitlelerden birine atamasını yapan istatistiksel bir tekniktir. Birey ait olduğu kitleden farklı bir kitleye atandığında bir hata yapılmış olur. Diskriminant analizinde amaç, atama işlemini mümkün olan minimum hatayla yapmaktır. Bu optimizasyon kriterine göre elde edilen diskriminant fonksiyonlarının değerlendirilmesinde hatalı sınıflandırma olasılığının (atama sırasında yapılan hata) bilinmesi önemli bir faktördür. Hatalı sınıflandırma olasılığı (hata oranı); dağılımların ve parametrelerin bilinip bilinmemesine, örneklem hacmi ve atama kuralı gibi değişik kriterlere bağlı olarak hesaplanır.

Diskriminant analizinde hata oranı tahmin problemi, 1930 ' lu yıllardan beri istatistiksel araştırmaların konusu olmuştur. Fisher (1936) ' in çalışmasında yer alan plug-in (parametrelerin yerine örneklem tahminlerinin alınması) ve Smith (1947) ' in çalışmasında bahsedilen yeniden yerine koyma tahmin edicileri bilinen en eski ve en çok kullanılan tahmin edicilerdir. Her iki tahmin edicinin de küçük örneklemelerde yanlı olduğu gözlenmiştir. Lachenbruch (1967), Efron (1979, 1983), McLachlan (1980) ve Page (1985) yeniden yerine koyma tahmin edicisinin değişik modifikasyonlarını çalışmışlardır. Glick (1978), yeniden yerine koyma tahmin edicisine göre daha küçük varyansa sahip olan parametrik olmayan tahmin ediciler sınıfına ait tahmin edicileri önermiştir. Parametrik olmayan tahmin ediciler sınıfını göz önüne alarak, kitlelerin dağılımı tek değişkenli normal olması durumunda yeni bir tahmin edici sınıfı olan düzlenmiş tahmin edicileri elde etmiştir. Snapinn (1983), Glick ' in düşüncesini kullanarak çok değişkenli normal kitleler için düzlenmiş tahmin edicileri elde etmiştir.

Hata oranı tahmini için geliştirilen tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılması, diskriminant analizinde işlenmesi gereken önemli bir konudur. Lachenbruch ve Mickey (1968), Sedransk ve Okamoto (1971), Sorum (1971, 1972, 1973), McLachlan (1974a), Glick (1978), Snapinn (1983), Snapinn ve Knoke (1984,1985) farklı karşılaştırma ölçütlerine göre, hata oranı tahmin edicilerinin performanslarını karşılaştırmışlardır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, sınıflandırma problemi, bazı diskriminant analizi teknikleri ve hata oranı türleri verilmektedir. Bu çalışmada Welch (1939) yaklaşımına göre elde edilen diskriminant tekniği göz önüne alınmaktadır.

İkinci bölümde, literatürde en çok işlenen tek ve çok değişkenli normal dağılımlı kitlelerde sınıflandırma problemi ve hata oranları ayrıntılı olarak verilmektedir.

Örneklemelerin alındığı kitlelerin dağılımları her zaman normal olamayacağından, normal dağılıma sahip olmayan kitleler arasında da sınıflandırma problemi düşünülebilir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, kesikli rasgele değişkenlere sahip kitleler ve tek değişkenli gamma dağılımına sahip kitleler arasındaki sınıflandırma problemi üzerinde durulmaktadır. Gamma dağılımına sahip kitleler arasındaki diskriminasyon problemi için elde edilen bazı sonuçlar bu kısımda sunulmaktadır.

Birçok durumda hata oranı atama kuralındaki diskriminant fonksiyonunun dağılımına bağlı olarak bulunur. Ancak parametreler bilinmediğinde diskriminant fonksiyonunun dağılımını bulmak her zaman mümkün olmamaktadır. Hata oranı tahmini için değişik tahmin ediciler önerilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde literatürde bilinen hata oranı tahmin edicileri verilmektedir. Bu tahmin edicilerden bir çoğu, kitlelerin dağılımlarının normal olduğu varsayımı altında elde edilmişlerdir. Normallik varsayımı altında elde edilen tahmin ediciler D , DS , $\bar{U}$, O , OS , L , LS , M tahmin edicileridir. Bunlar parametrik tahmin ediciler sınıfına ait tahmin edicilerdir.

Hata oranını tahmin etmek için kitlelerin dağılımlarına bağlı olmayan tahmin edicilere, parametrik olmayan tahmin ediciler sınıfına ait tahmin ediciler denmektedir. Bilinen parametrik olmayan tahmin ediciler R , U , H , $2H$ ve KH tahmin edicileridir.

Glick (1978) ve Snapinn (1983) tarafından verilen RS , US , RN , UN ve NS tahmin edicileri de düzlenmiş tahmin ediciler sınıfına ait tahmin edicilerdir. Snapinn tarafından ele alınan NS tahmin edicisinin elde edilmesi mantığına dayalı olarak önerilen NSL ve $NSLS$ düzlenmiş tahmin edicileri de dördüncü bölümde verilmektedir.

Yukarıda bahsedilen tahmin yöntemlerine Jackknife ve Bootstrap tekniklerinin (Efron (1979, 1983)) uygulanmasıyla elde edilen Jackknife ve Bootstrap tahmin edicilerinin mantığı da yine dördüncü bölümde verilmektedir.

Çalışmanın beşinci bölümünde, tahmin edicilerin karşılaştırılması ölçütleri verildikten sonra, literatürdeki çalışmalardan tahmin edicilerin değerlendirilmesine ilişkin sonuçlara yer verilmektedir. Bu çalışmada, daha önceki çalışmalardan farklı olarak dördüncü bölümde verilen tahmin edicilerin $2H$ ve KH dışındaki hepsinin aynı anda simülasyon ile karşılaştırılması yapılmaktadır. Buradaki sonuçlar tek ve çok değişkenli normal dağılıma sahip kitleler için, her bir kitlede eşit gözlem olması

durumunda farklı örneklem hacimlerine ve farklı Mahalanobis kitle uzaklıklarına göre koşulsuz hata kare ortalaması (UMSE) ölçütü ile karşılaştırılmaktadır. Ayrıca tek değişkenli gamma dağılımına ve tek değişkenli normal dağılıma sahip kitleler için de yine her bir kitlede eşit gözlem olması durumunda farklı örneklem hacimlerine ve farklı parametrelere göre optimal hata oranları ve dördüncü bölümde verilen tahmin edicilerden D, U, ve R tahmin edicileri göz önüne alınarak karşılaştırmalar yapılmaktadır.

Çalışmanın genel bir değerlendirilmesi son bölümde verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, ileride yapılabilecek çalışmalardan da bahsedilmiştir.



BÖLÜM 1

SINIFLANDIRMA (DİSKRİMİNASYON) PROBLEMİ

Sınıflandırma problemi, araştırmacının bir birey (denek, birim) üzerinde ölçümler yaptığında, bu ölçümlere bağlı olarak bireyi bilinen gruplardan (kitlelerden) birine atanmasını gerçekleştiren istatistiksel bir teknik olarak tanımlanır. Bireyin gelebileceği (ait olduğu) sonlu sayıda grup veya kitlenin olabileceği kabul edilir, her bir kitle, ölçümlere karşılık gelen rasgele vektörün olasılık dağılımı ile karakterize edilir. Olasılık dağılımları tamamen bilindiğinde problem, atama kuralını belirlemektir. Dağılımlar biçimsel bilindiğinde problem, kitlelerden alınan örneklemeler yardımıyla parametre tahmini ve atama kuralını oluşturmaktır.

$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ r tane farklı kitle olsun. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ birey üzerinde ölçümlere karşılık gelen p boyutlu rasgele değişken olmak üzere, Π_i ($i = 1, 2, \dots, r$) den bir rasgele değişken ise $\underline{X}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(\underline{x}; \underline{\theta}_i)$ biçiminde gösterilir, burada, $\underline{\theta}_i$ parametre vektörüdür.

$\underline{X}$ vektörünün aldığı değerler, p boyutlu $\mathcal{R}^p$ örneklem uzayında olmak üzere sınıflandırma problemi, bu uzayı $B_1, B_2, \dots, B_r$ bölgelerine ayırmaktır; öyleki, $\underline{X}_0$ gözlem vektörü B_i de ise $\underline{X}_0$ 'a ait $I(\underline{x}_0)$ birimi Π_i 'ye atanır. Burada $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r = \mathcal{R}^p$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, r$ ve $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$ dir.

"Birim" ile "Birim üzerinde alınan ölçüm değeri (gözlenen değer, gözlem)" anlatım sırasında konunun içeriğine göre birbirinin yerine geçmektedir.

$q_1, q_2, \dots, q_r$ bireyin sırasıyla $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$ gruplarına (kitlelerine) ait olması olasılıkları olsun. Yani karıştırılmış r tane grubun birleşmesinden oluşan tek bir gruptan rasgele alınan bir birimin Π_i 'den olması olasılığı q_i ' dir ($q_i = P(\underline{X} \in \Pi_i)$). q_i ' ler prior

(önsel) olasılıklardır ve $\sum_{i=1}^r q_i = 1$ dir.

Atama işlemi yapılırken, gözlem ait olduğu gerçek gruptan farklı bir gruba atanabilir. Bu durumda hatalı atama yapılmış olur. Yani gözlem gerçekten Π_j 'ye aittir ancak Π_i 'ye atanmış olabilir. Belirlenen $B_1, B_2, \dots, B_r$ bölgeleri için,

$$\begin{aligned} p_{i/j} &= P(I(\underline{x}_0) \text{ 'in } \Pi_i \text{ 'ye atanması} / I(\underline{x}_0) \in \Pi_j) \\ &= \int_{B_i} f_j(\underline{x}, \underline{\theta}_j) d\underline{x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

olasılığı, $I(\underline{x}_0)$ ile gösterilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birimin Π_j ' ye ait olduğu bilindiğinde Π_i ' denmiş gibi hatalı atanmasının koşullu olasılığı ve

$$c_{ij} = C(I(\underline{x}_0)' \text{ in } \Pi_i \text{ 'ye atanması} / I(\underline{x}_0) \in \Pi_j) \quad (1.2)$$

$\underline{x}_0$ ölçümlü birimin Π_j ' ye ait olduğu bilindiğinde Π_i ' ye hatalı atanmasının maliyetidir.

Böylece Π_i ' ye Π_j ' den bir $\underline{x}_0$ gözleminin yanlış atanması olasılığı,

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(\Pi_i \text{ 'ye } \underline{x}_0 \text{ ' in yanlış atanması}) \\ &= q_j p_{ij} c_{ij} \end{aligned} \quad (1.3)$$

dir. Genelde c_{ij} ' ler eşit alınarak maliyetler ihmal edilmektedir. Bu durumda $\underline{x}_0$ gözleminin Π_i ' ye hatalı atanması olasılığı,

$$p_{ij} = q_j p_{ij} \quad (1.4)$$

dir. Böylece gerçekte Π_j ' ye ait olan gözlemlerin diğer gruplara Hatalı Sınıflandırılması (HS) olasılığı,

$$P(HS, \Pi_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (1.5)$$

dir ve tüm gruplar üzerinden Toplam Hatalı Sınıflandırma (THS) olasılığı,

$$P(THS) = \sum_{j=1}^r P(HS, \Pi_j) \quad (1.6)$$

dir. Ayrıca gerçekten Π_j ' ye ait olduğu bilinen gözlemlerin, diğer gruplara hatalı sınıflandırılması maliyeti,

$$C(HS, \Pi_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r c_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (1.7)$$

dir ve tüm gruplar üzerinden toplam hatalı sınıflandırma maliyeti,

$$C(THS) = \sum_{j=1}^r C(HS, \Pi_j) \quad (1.8)$$

dir (Anderson (1958,1984), Lachenbruch (1975), Karson (1982), Seber (1984)).

Eğer tüm gruplar için hatalı sınıflandırma maliyeti eşit kabul edilir ise $C(THS)$ ' nın minimizasyonu $P(THS)$ ' nın minimizasyonuna eşdeğerdir. Böylece sınıflandırma

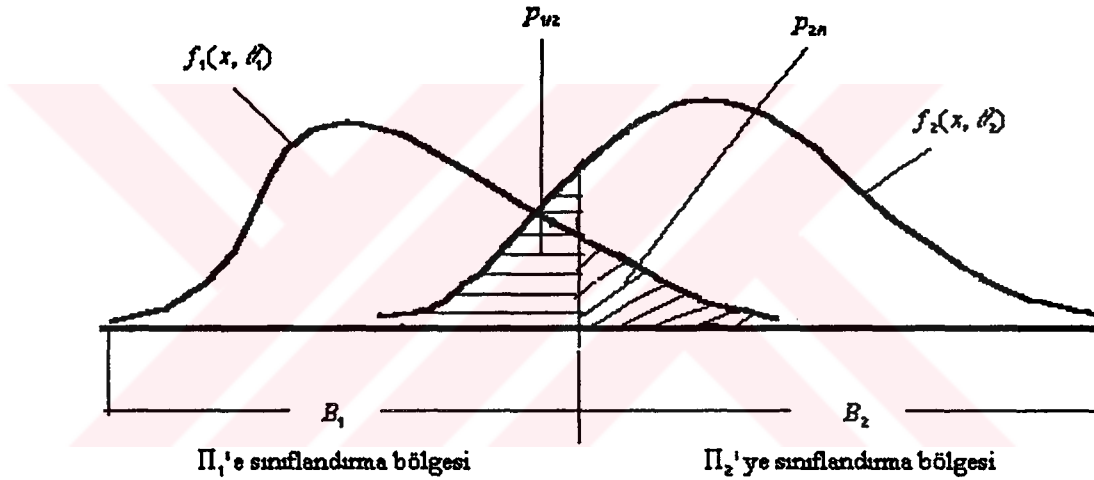
problemi, öyle $B_1, B_2, \dots, B_r$ bölgeleri oluşturulsun ki $P(THS)$ minimum olsun. Bu daha sonra verilecek olan Welch (1939) 'in yaklaşımıdır.

Bu çalışmada kolaylık olsun diye maliyetlerin ihmal edildiği iki gruplu sınıflandırma problemi üzerinde çalışılacaktır. Böylece maliyetler ihmal edildiğinde iki grup üzerinden toplam hatalı sınıflandırma olasılığı,

$$P(THS) = q_1 p_{2/1} + q_2 p_{1/2} \quad (1.9)$$

dir. Amaç toplam hatalı sınıflandırma olasılığını minimum yapacak şekilde B_1 ve B_2 'yi belirlemektir veya gözlemlerin bu bölgelere düşmesini tayin eden bir kuralın oluşturulmasıdır. Bu kurala optimal atama (sınıflandırma) kuralı denir.

$p=1$ olduğunda yani birey üzerinde bir ölçüm yapıldığında, ölçüme karşılık gelen rasgele değişkenin her iki grup üzerinde olasılık yoğunluk fonksiyonlarına bağlı olarak sınıflandırma bölgeleri için hatalı sınıflandırma olasılıkları Şekil 1.1 'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1

1.1 Diskriminant Analizinde Bazı Atama Kuralları

Bu bölümde Π_1 ve Π_2 gibi sadece iki kitle olduğunda bazı atama kuralları kısaca verilmeye çalışılacaktır.

1.1.1 Fisher Yaklaşımı

Fisher (1936), gözlemlerin lineer birleşimi şeklinde olan bir diskriminant fonksiyonunu oluşturmuştur:

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p = \underline{a}' \underline{X} \quad (1.10)$$

olmak üzere Z , Π_1 ' den bir gözlem ise ortalaması $\underline{a}' \underline{\mu}_1$, Π_2 ' den bir gözlem ise ortalaması $\underline{a}' \underline{\mu}_2$ ve her iki kitlenin varyans kovaryans matrisleri eşit ise ($\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$) Z ' nin varyansı her iki grup için de $\underline{a}' \Sigma \underline{a}$ dir.

$$\varphi(\underline{a}) = \frac{(\underline{a}' \underline{\mu}_1 - \underline{a}' \underline{\mu}_2)^2}{\underline{a}' \Sigma \underline{a}} \quad (1.11)$$

ifadesini $\underline{a}$ üzerinden maksimize etmek için $\underline{a}$ ' ya göre $\varphi(\underline{a})$ ' nın türevi alınıp,

$$\frac{\partial \varphi(\underline{a})}{\partial \underline{a}} = \frac{2(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \underline{a}' \Sigma \underline{a} - 2 \Sigma \underline{a} (\underline{a}' \underline{\mu}_1 - \underline{a}' \underline{\mu}_2)}{(\underline{a}' \Sigma \underline{a})^2}$$

ifadesinin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) = \Sigma \underline{a} \left(\frac{\underline{a}' \underline{\mu}_1 - \underline{a}' \underline{\mu}_2}{\underline{a}' \Sigma \underline{a}} \right)$$

elde edilir. Buradan $\underline{a} \propto \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} Z &= \left[\Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \right]' \underline{X} \\ &= \underline{X}' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

olur. Elde edilen bu son fonksiyon Fisher ' in lineer diskriminant fonksiyonudur. Burada, $Z > k$ ise $I(\underline{x}_0)$ ile ifade edilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birey Π_1 ' e aksi halde Π_2 ' ye atanır. Burada

$$k = \frac{(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)}{2} \text{ dir.}$$

Parametreler bilinmiyor ise örneklemlerden elde edilen tahminler Z ' de yerine konularak, örneklem lineer diskriminant fonksiyonu elde edilir.

Fisher ' in yaklaşımı dağılımdan bağımsız (Distribution-free) bir yöntemdir. Eğer kitlelerin dağılımı normal ise bu yaklaşım optimaldir (Lachenbruch (1975)).

1.1.2 Toplam Hatalı Sınıflandırma Olasılıklarının Minimizasyonu Yaklaşımı

Diskriminant fonksiyonunun oluşturulmasında diğer bir yaklaşım, Welch (1939) tarafından verilen olabilirlik oranı kriteridir. $\underline{\theta}_1$ ve $\underline{\theta}_2$ bilindiğinde, toplam hatalı

sınıflandırmaya göre kaybı minimize eden optimal sınıflandırma kuralı Neyman-Pearson Lemmasına göre,

$$R_{opt}: \begin{cases} U = \frac{f_1(\underline{x}_0, \underline{\theta}_1)}{f_2(\underline{x}_0, \underline{\theta}_2)} > k \text{ ise } I(\underline{x}_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases} \quad (1.13)$$

ile verilir; burada, bir sabit olan $k = \frac{q_2}{q_1}$ dir. Bu kural ξ sembolü ile gösterilecektir.

$\underline{\theta}_1$ ve $\underline{\theta}_2$ parametreleri bilinmediğinde Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli rasgele örneklemeler yardımıyla $\hat{\underline{\theta}}_1$ ve $\hat{\underline{\theta}}_2$ tahminleri elde edilir. Böylece örneklemelerden elde edilen tahminlere bağlı optimal kural (Anderson (1958)),

$$R_{opt}(s): \begin{cases} W = \frac{f_1(\underline{x}_0, \hat{\underline{\theta}}_1)}{f_2(\underline{x}_0, \hat{\underline{\theta}}_2)} > k \text{ ise } I(\underline{x}_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases} \quad (1.14)$$

ile verilir. $R_{opt}(s)$ ' deki s harfi örneklemeyi (sampling) vurgulamaktadır. Bu kural da $\hat{\xi}$ sembolü ile gösterilecektir. W rasgele değişkeni genel olarak $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$, $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ örneklemelerine, dağılımın bazı parametrelerine ve $\underline{X}_0$ gözlemine bağlıdır. Bir çok durumda W istatistiğinin dağılımı kolayca elde edilememektedir. Diskriminant analizinde elde edilen sonuçlar W ' nin dağılımına bağlıdır. Burada $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$, Π_1' den n_1 hacimli, $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ Π_2' den n_2 hacimli bağımsız rasgele örneklemelerdir.

1.1.3 Toplam Hatalı Sınıflandırma Maliyetlerinin Minimizasyonu Yaklaşımı

c_{21} ve c_{12} sırasıyla Π_1 ve Π_2 kitlelerine hatalı sınıflandırmanın maliyetleri olsun. Böylece (1.8) ' den hatalı sınıflandırmanın toplam beklenen maliyeti,

$$E(C(THS)) = C_T = c_{21} p_{21} q_1 + c_{12} p_{12} q_2 \quad (1.15)$$

olur. Parametrelerin bilindiği durumda, toplam hatalı sınıflandırma maliyetini minimize eden optimal sınıflandırma kuralı (Anderson (1958), Seber (1984)),

$$R_{opt} : \begin{cases} \frac{f_1(\underline{x}_0, \underline{\theta}_1)}{f_2(\underline{x}_0, \underline{\theta}_2)} > k^* \text{ ise } I(\underline{x}_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases} \quad (1.16)$$

ile verilir, burada $k^* = \frac{q_2 c_{1/2}}{q_1 c_{2/1}}$ dir.

Eğer maliyetler eşit alınırsa, bu kural Welch ' in yaklaşımıyla aynıdır. Bu problem genel karar teorisinin özel bir durumudur. Bazen, C_T ' nin minimizasyonundan dolayı optimal Bayes yöntemi olarak adlandırılır.

Parametrelerin bilinmediği durumda, örneklemelerden elde edilen tahminleri alınarak $R_{opt}(s)$ kuralı aynı yolla elde edilir.

1.1.4 Bayes Teoremi Yaklaşımı

Diğer bir yaklaşım, $\underline{X}_0$ gözleminin büyük posterior (sonsal) olasılığa sahip kitleye atanmasına ilişkin sınıflandırma kuralıdır (Anderson (1958), Lachenbruch (1975)). Tanımdan, Π_i bilindiğinde $\underline{X}_0$ ' in koşullu yoğunluk fonksiyonu $f_i(\underline{x}_0, \underline{\theta}_i / \Pi_i)$ dir. Π_i ' nin prior olasılığı q_i olduğundan, Bayes teoremine göre Π_i ' nin posterior olasılığı,

$$\begin{aligned} P(\Pi_i / \underline{x}_0) &= \frac{P(\Pi_i, \underline{x}_0)}{P(\underline{x}_0)} \\ &= \frac{q_i f_i(\underline{x}_0, \underline{\theta}_i)}{q_1 f_1(\underline{x}_0, \underline{\theta}_1) + q_2 f_2(\underline{x}_0, \underline{\theta}_2)} \quad , \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

dir. $P(\Pi_1 / \underline{x}_0) > P(\Pi_2 / \underline{x}_0)$ ise $I(\underline{x}_0)$ ile ifade edilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birey Π_1 ' e atanır ki bu da toplam hatalı sınıflandırma olasılıklarının minimizasyonu kuralına eşdeğerdir.

1.2 Diskriminant Analizinde Hata Oranları

Diskriminant kurallarına ilişkin optimal hata oranı (optimal error rate), koşullu gerçek hata oranı (conditional actual error rate), beklenen gerçek hata oranı (expected actual error rate) gibi farklı hata oranları tanımlanmıştır (Anderson (1984), Hills (1966), Lachenbruch ve Mickey (1968), Lachenbruch (1975), Snapinn (1983), Seber (1984)). Parametrelerin bilindiği durumda (1.13) ' deki ξ kuralı kullanıldığında Π_i ' den bir birimin hatalı atanması olasılığı $\alpha_i(\xi)$, ($i=1,2$) olarak gösterilsin.

$$\alpha_1(\xi) = P(R_{opt} \leq k / \underline{X}_0 \in \Pi_1) \quad (1.18)$$

ve

$$\alpha_2(\xi) = P(R_{opt} > k / \underline{X}_0 \in \Pi_2) \quad (1.19)$$

olmak üzere bu iki hata oranı optimal hata oranları olarak isimlendirilmektedir.

Π_1 ve Π_2 kitleleri gelişigüzel seçildiğinden, sadece $\alpha_1(\xi)$ 'nin düşünülmesi yeterlidir. $\alpha_2(\xi)$ değeri $\alpha_1(\xi)$ 'ye benzer biçimde elde edilebilir. Böylece bilinmeyen bir $\underline{X}_0$ gözleminin Π_1 'den geldiği bilindiğinde, Π_2 'ye hatalı sınıflandırılması olasılığı α 'nın indisi göz önüne alınmayıp,

$$\alpha(\xi) = P(R_{opt} \leq k) \quad (1.20)$$

ile verilir.

İkinci olarak, koşullu gerçek hata oranı (1.14) 'deki $\hat{\xi}$ kuralı kullanıldığında Π_1 'den rasgele bir gözlemin hatalı atanması olasılığı olan,

$$\alpha(\hat{\xi}) = P(R_{opt}(s) \leq k) \quad (1.21)$$

değeridir. Bu hata oranı örneklemelerden elde edilen parametre tahminleri üzerine koşullandırılmıştır. $\alpha(\hat{\xi})$ koşullu gerçek hata oranına kısaca koşullu hata oranı da denmektedir.

Beklenen gerçek hata oranı olarak tanımlanan hata oranı, (1.21) 'deki koşullu gerçek hata oranının tüm örneklemeler üzerinden,

$$E(\alpha(\hat{\xi})) = E(P(R_{opt}(s) \leq k)) \quad (1.22)$$

beklenen değeridir. $E(\alpha(\hat{\xi}))$ beklenen gerçek hata oranına bazen koşulsuz hata oranı (unconditional error rate) da denmektedir.

Optimal hata oranı, iki kitle için sadece $\underline{X}$ 'in dağılımlarının bir fonksiyonudur. Koşullu gerçek hata oranı $\underline{X}$ 'in dağılımlarının ve seçilen özel deneme örneklemelerinin bir fonksiyonu olmasına rağmen beklenen gerçek hata oranı $\underline{X}$ 'in dağılımlarının ve deneme örneklem hacimlerinin bir fonksiyonudur.

Bu çalışmada her iki kitle için maliyetler eşit alınarak ihmal edilmektedir. Prior olasılıkların da eşit olduğu yani $q_1 = q_2$ olduğu kabul edileceğinden, çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde $k = k^* = 1$ alınacaktır.

BÖLÜM 2

NORMAL DAĞILIMLI KİTLELERDE DİSKRİMİNASYON

Bu bölümde iki normal dağılıma sahip kitle arasındaki diskriminasyon problemi incelenecektir. İlk olarak tek değişkenli normallik durumu gözönüne alınarak, parametrelerin bilinip bilinmemesine göre sırasıyla diskriminant fonksiyonu, diskriminant fonksiyonunun dağılımı ve hata oranları verilecektir.

2.1 Parametreler Bilindiğinde Tek Değişkenli Normallik için Diskriminasyon

Π_1 ve Π_2 konum parametreleri μ_1 , μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$) ve σ^2 ortak varyansı ile tek değişkenli normal kitleler olsun. Böylece X rasgele değişkeni için i ' inci kitleye ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad i=1,2 \quad (2.1)$$

olmak üzere iki yoğunluk fonksiyonunun oranı

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma}\right)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma}\right)^2\right\}} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma}\right)^2\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(\mu_2 - \mu_1)2x + \mu_1^2 - \mu_2^2]\right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

biçiminde elde edilir. Daha önce verilen optimal sınıflandırma kuralı (1.13) de, eğer

$$\frac{f_1(x, \mu_1, \sigma^2)}{f_2(x, \mu_2, \sigma^2)} > 1$$

ise yani $I(x_0)$ ile ifade edilen x_0 ölçümlü birim B_1 ' de ise $I(x_0)$ Π_1 ' e aksi halde Π_2 ' ye atanır. Logaritmik fonksiyon monoton artan olduğundan, yukarıdaki ifadenin logaritması alınarak eşitlik yeniden yazılırsa, sınıflandırma bölgeleri

$$B_1: -\frac{1}{2\sigma^2}[(\mu_2 - \mu_1)2x + \mu_1^2 - \mu_2^2] > 0 \quad (2.3)$$

ve

$$B_2: -\frac{1}{2\sigma^2}[(\mu_2 - \mu_1)2x + \mu_1^2 - \mu_2^2] \leq 0 \quad (2.4)$$

elde edilir. Buna göre parametrelerin bilindiği durum için lineer diskriminant fonksiyonu

$$U(X) = [X - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)] \sigma^{-2} (\mu_1 - \mu_2) \quad (2.5)$$

biçiminde elde edilir. Böylece Π_1 ' e ve Π_2 ' ye sınıflandırma bölgeleri

$$B_1: x - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} < 0 \quad (2.6)$$

ve

$$B_2: x - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \geq 0 \quad (2.7)$$

olarak bulunur. Buradan $I(x_0)$ ile verilen x_0 ölçümlü birim için R_N optimal sınıflandırma kuralı,

$$R_N: \begin{cases} x_0 < \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} & \text{ise } I(x_0), \Pi_1 \text{'e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2 \text{'ye atanır.} \end{cases}$$

ile ya da

(2.8)

$$R_N: \begin{cases} U(x_0) < 0 & \text{ise } I(x_0), \Pi_1 \text{'e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2 \text{'ye atanır.} \end{cases}$$

ile verilir. R_N deki N harfi normal dağılımı göstermektedir.

2.1.1 $U(X)$ ' in Dağılımı

Parametrelerin bilindiği durumda (2.5) de verilen $U(X)$ lineer diskriminant fonksiyonunun dağılımı, X ' in Π_1 ' den veya Π_2 ' den olmasına göre bulunabilir. Eğer X , Π_1 ' den tek değişkenli rasgele bir değişken (gözlem) ise yani $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ise $U(X)$ diskriminant fonksiyonu da

$$E(U(X)/\Pi_1) = \frac{1}{2\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2,$$

ortalamalı ve

$$Var(U(X)/\Pi_1) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2,$$

varyanslı normal dağılıma sahiptir, yani,

$$U(X/\Pi_1) \sim N\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2, \frac{1}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2\right) \quad (2.9)$$

dir. Eğer X , Π_2 ' den tek değişkenli rasgele bir gözlem ise aynı şekilde

$$U(X/\Pi_2) \sim N\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2, \frac{1}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_2)^2\right) \quad (2.10)$$

dağılımına sahiptir.

2.1.2 Hata Oranları

$I(x_0)$ ile ifade edilen x_0 ölçümlü birimin, Π_1 ' den olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned} \alpha_1(\xi) &= p_{2/1} = P(U(X_0) \geq 0 / \Pi_1) \\ &= 1 - P(U(X_0) < 0 / \Pi_1) \\ &= 1 - \Phi\left\{-\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left\{\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sigma}\right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ve Π_2 ' den olduğu bilindiğinde Π_1 ' e hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned} \alpha_2(\xi) &= p_{1/2} = P(U(X_0) < 0 / \Pi_2) \\ &= \Phi\left\{\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sigma}\right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

dir, burada $\Phi(\cdot)$ birikimli standart normal dağılım fonksiyonudur. Böylece toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\begin{aligned}
 P(THS) &= \frac{1}{2}p_{21} + \frac{1}{2}p_{12} \\
 &= \Phi\left\{\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sigma}\right\}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

dır; bu, parametrelerin bilindiği durumda tek değişkenli normallik için optimal hata oranıdır.

2.2 Parametreler Bilinmediğinde Tek Değişkenli Normallik için Diskriminasyon

Parametreler bilinmiyor ise Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli rasgele örneklemeler yardımıyla, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ise

$$R_N(s): \begin{cases} \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \text{ ve } x_0 < \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \text{ ise } I(x_0) \text{ } \Pi_1' \text{e} \\ \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \text{ ve } x_0 \geq \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \text{ ise } I(x_0) \text{ } \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases} \tag{2.14}$$

$\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ ise

$$R_N(s): \begin{cases} \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \text{ ve } x_0 \geq \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \text{ ise } I(x_0) \text{ } \Pi_1' \text{e} \\ \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \text{ ve } x_0 < \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \text{ ise } I(x_0) \text{ } \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases} \tag{2.15}$$

ile verilen $R_N(s)$ örneklemelere bağlı kurallar oluşturulur. $R_N(s)$ kuralı bilinmeyen μ_1 ve μ_2 parametreleri yerine örneklemelerden elde edilen $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ tahminleri alınarak R_N 'den elde edilir. Böylece parametreler bilinmediğinde örneklemelere bağlı lineer diskriminant fonksiyonu

$$W(X) = [X - \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)] S^{-2}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \tag{2.16}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$, Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ ve $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ bağımsız örneklemelerin ortalamaları ve

$$S^2 = \frac{1}{(n_1 + n_2 - 2)} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \right]$$

birleştirilmiş örneklem varyansıdır.

$W(X)$ göz önüne alınarak $R_N(s)$ sınıflandırma kuralı, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ise

$$R_N(s): \begin{cases} \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \text{ ve } W(x_0) < 0 \text{ ise } I(x_0) \Pi_1' \text{e} \\ \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \text{ ve } W(x_0) \geq 0 \text{ ise } I(x_0) \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases} \quad (2.17)$$

ve $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ ise

$$R_N(s): \begin{cases} \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \text{ ve } W(x_0) \geq 0 \text{ ise } I(x_0) \Pi_1' \text{e} \\ \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \text{ ve } W(x_0) < 0 \text{ ise } I(x_0) \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases} \quad (2.18)$$

biçiminde de verilebilir (Sedransk ve Okamoto(1971)).

2.2.1 $W(X)$ ' in Dağılımı

X bir rasgele değişken ve $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2$ verildiğinde $W(X)$ ifadesinin koşullu dağılımı, parametrelerin bilindiği duruma benzer olarak bulunabilir. Eğer X rasgele değişkeni Π_1 ' den ise

$$W(X/\Pi_1) \sim N([\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)]s^{-2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2), (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \sigma^2 / (s^2)^2) \quad (2.19)$$

ve Π_2 ' den ise

$$W(X/\Pi_2) \sim N([\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)]s^{-2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2), (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \sigma^2 / (s^2)^2) \quad (2.20)$$

dir.

$\bar{X}_1, \bar{X}_2$ ve S^2 bağımsız rasgele değişkenler olduğunda (2.16) da verilen $W(X)$ örneklem diskriminant fonksiyonunun koşulsuz dağılımı oldukça karmaşıktır. Genel hali alt bölüm (2.4.1) de verilecektir (Lachenbruch(1975)).

2.2.2 Hata Oranları

Parametreler bilinmediğinde, Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli örneklemelere bağlı olarak $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ise $I(x_0)$ ile ifade edilen x_0 ölçümlü birimin Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye koşullu hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned} \alpha_1(\hat{\xi}) &= P(W(X_0) \geq 0 / \bar{x}_1 < \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2, \Pi_1) \\ &= 1 - P(W(X_0) < 0 / \bar{x}_1 < \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2, \Pi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \Phi \left\{ -\frac{(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/s^2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\sigma/s^2} \right\} \\
&= 1 - \Phi \left\{ -(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))/\sigma \right\}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ve Π_2 ' de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e koşullu hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned}
\alpha_2(\hat{\xi}) &= P(W(X_0) < 0 / \bar{x}_1 < \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2, \Pi_2) \\
&= \Phi \left\{ -(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))/\sigma \right\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

dır. Böylece, toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\begin{aligned}
P(THS / \bar{x}_1 < \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2) &= \frac{1}{2}(\alpha_1(\hat{\xi}) + \alpha_2(\hat{\xi})) \\
&= \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left\{ -(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))/\sigma \right\} \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left\{ -(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))/\sigma \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

dır; bu, parametrelerin bilinmediği durumda tek değişkenli normallik için koşullu gerçek hata oranıdır.

$\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ ise $I(x_0)$ ile ifade edilen x_0 ölçümlü birimin Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye koşullu hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\hat{\xi}) &= P(W(X_0) < 0 / \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2, \Pi_1) \\
&= \Phi \left\{ -(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))/\sigma \right\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

ve Π_2 ' de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e koşullu hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned}\alpha_2(\hat{\xi}) &= P(W(X_0) \geq 0 / \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2, \Pi_2) \\ &= 1 - \Phi\left\{-\left(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\}\end{aligned}\quad (2.25)$$

dir. Buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\begin{aligned}P(THS / \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2) &= \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left\{-\left(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\} \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left\{-\left(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\} \right]\end{aligned}\quad (2.26)$$

dir, bu, da parametrelerin bilinmediği durumda koşullu gerçek hata oranıdır(Sedransk ve Okamoto(1971)).

Parametrelerin bilinmediği durumda tek değişkenli normallik için koşulsuz gerçek hata oranları da bulunabilir. (2.21), (2.22), (2.24) ve (2.25) ' den

$$\alpha_1(\hat{\xi}) = \begin{cases} 1 - \Phi\left\{-\left(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\}, & \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \\ \Phi\left\{-\left(\mu_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\}, & \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\alpha_2(\hat{\xi}) = \begin{cases} \Phi\left\{-\left(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\}, & \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \\ 1 - \Phi\left\{-\left(\mu_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) / \sigma\right\}, & \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2 \end{cases}$$

olmak üzere beklenen gerçek hata oranları $E(\alpha_1(\hat{\xi}))$ ve $E(\alpha_2(\hat{\xi}))$

$$E(\alpha_1(\hat{\xi})) = G(a, -b; \rho) + G(-a, b; \rho) \quad (2.27)$$

ve

$$E(\alpha_2(\hat{\xi})) = G(-a, b; \rho) + G(a, -b; \rho) \quad (2.28)$$

biçiminde elde edilir (John (1961)). Burada,

$$a = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

$$b = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma \sqrt{4 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

$$\rho = \frac{(n_2 - n_1)}{\sqrt{(n_1 + n_2)(4n_1n_2 + n_1 + n_2)}},$$

ve

$$G(t_1, t_2; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_2 dx_1$$

dir. Eğer $n_1 = n_2$ ise

$$E(\alpha_1(\hat{\xi})) = \Phi(a)\Phi(-b) + \Phi(-a)\Phi(b) \quad (2.29)$$

ve

$$E(\alpha_2(\hat{\xi})) = \Phi(-a)\Phi(b) + \Phi(a)\Phi(-b) \quad (2.30)$$

olur.

2.3 Parametreler Bilindiğinde Çok Değişkenli Normallik için Diskriminasyon

Π_1 ve Π_2 ortalamaları $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$ ve varyans-kovaryans matrisleri Σ_1 , Σ_2 olan çok değişkenli normal kitleler olsun. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ rasgele vektörü için i 'inci kitleye ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_i(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu}_i)' \Sigma_i^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}_i)\right\}, \quad i = 1, 2 \quad (2.31)$$

dır; burada, $\underline{\mu}_i \in \mathbb{R}^p$ ve Σ_i pozitif tanımlı kare matrisdir.

İki kitle olduğunda çok değişkenli normallik için diskriminant fonksiyonu, bu iki kitlenin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birbirine oranlanmasıyla bulunabilir. İlk olarak varyans-kovaryans matrislerinin eşit olduğu durumu gözönüne alırsak yani $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ ise iki yoğunluk fonksiyonunun oranı,

$$\begin{aligned} \frac{f_1(\underline{x})}{f_2(\underline{x})} &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu}_1)'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}_1)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu}_2)'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}_2)\right\}} \\ &= \exp\left\{\underline{x}'\Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)-\frac{1}{2}(\underline{\mu}_1+\underline{\mu}_2)'\Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)\right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

olarak elde edilir. En son elde edilen ifadenin logaritması alınarak optimal sınıflandırma kuralına göre sınıflandırma bölgeleri

$$B_1: \left[\underline{x} - \frac{1}{2}(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \right]' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) > 0 \quad (2.33)$$

$$B_2: \left[\underline{x} - \frac{1}{2}(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \right]' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \leq 0 \quad (2.34)$$

elde edilir. Böylece parametrelerin bilindiği durum için lineer diskriminant fonksiyonu(LDF)

$$U(\underline{X}) \left[\underline{X} - \frac{1}{2}(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \right]' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \quad (2.35)$$

biçiminde elde edilir(Fisher (1936), Welch (1939), Anderson (1958)). Buradan, $I(\underline{x}_0)$ ile verilen $\underline{x}_0$ ölçümlü bir birim için R_N optimal sınıflandırma kuralı,

$$R_N: \begin{cases} U(\underline{x}_0) > 0 & \text{ise } I(\underline{x}_0), \quad \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases} \quad (2.36)$$

ile verilir.

Eğer $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ ise aynı yolla iki kitle için

$$Q(\underline{X}) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} - \frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{\mu}_1)'\Sigma_1^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}_1) + (\underline{X} - \underline{\mu}_2)'\Sigma_2^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}_2) \quad (2.37)$$

karesel diskriminant fonksiyonu (QDF) elde edilir. QDF için optimal sınıflandırma kuralına göre sınıflandırma bölgeleri

$$B_1: \underline{x}' \Sigma_2^{-1}(\underline{x} - 2\underline{\mu}_2) - \underline{x}' \Sigma_1^{-1}(\underline{x} - 2\underline{\mu}_1) > c_0 \quad (2.38)$$

$$B_2: \underline{x}' \Sigma_2^{-1}(\underline{x} - 2\underline{\mu}_2) - \underline{x}' \Sigma_1^{-1}(\underline{x} - 2\underline{\mu}_1) \leq c_0 \quad (2.39)$$

biçiminde elde edilir; burada,

$$c_0 = \underline{\mu}_1' \Sigma_1^{-1} \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2' \Sigma_2^{-1} \underline{\mu}_2 + 2 \ln \left(\frac{q_2}{q_1} \frac{|\Sigma_1|^{1/2}}{|\Sigma_2|^{1/2}} \right)$$

dır.

Bu çalışmada LDF gözönüne alınacağından, bundan sonraki bölümlerde QDF için her hangi bir sonuç verilmeyecektir.

2.3.1 $U(\underline{X})$ ' in Dağılımı

Π_1 ve Π_2 kitlelerine ilişkin, $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$ ve Σ parametreleri bilinsin ve $\underline{X}$ de rasgele bir vektör olmak üzere, $\underline{X}$ ' in Π_1 ' den veya Π_2 ' den olmasına göre $U(\underline{X})$ ' in dağılımı bulunabilir. $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir vektör ise $U(\underline{X})$ de ortalaması,

$$\begin{aligned} E(U(\underline{X})/\Pi_1) &= \left[\underline{\mu}_1 - \frac{1}{2}(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \right]' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= \frac{1}{2}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= \frac{1}{2} \Delta^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

ve varyansı

$$\begin{aligned} Var(U(\underline{X})/\Pi_1) &= E((U(\underline{X}) - U(\underline{\mu}_1))^2) \\ &= E(((\underline{X} - \underline{\mu}_1)' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2))^2) \\ &= (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} E((\underline{X} - \underline{\mu}_1)(\underline{X} - \underline{\mu}_2)') \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1}(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= \Delta^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

olan tek değişkenli normal dağılıma sahip rasgele değişkendir; yani

$(U(\underline{X})/\Pi_1) \sim N(\frac{1}{2} \Delta^2, \Delta^2)$ dir. Burada Δ^2 , parametreler bilindiğinde iki kitle arasındaki

Mahalanobis kare uzaklığıdır. Aynı şekilde $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir değişken ise

$(U(\underline{X})/\Pi_2) \sim N(-\frac{1}{2}\Delta^2, \Delta^2)$ dir. (Anderson (1958)).

2.3.2 Hata Oranları

Alt bölüm 2.3.1 de elde edilen sonuçlar kullanılarak $I(\underline{x}_0)$ ile ifade edilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birimin Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned}\alpha_1(\xi) &= p_{21} = P(U(\underline{X}_0) \leq 0 / \Pi_1) \\ &= \Phi\left\{-\frac{\Delta^2/2}{\Delta}\right\} \\ &= \Phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\}\end{aligned}\tag{2.42}$$

ve Π_2 ' de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e hatalı atanması olasılığı

$$\begin{aligned}\alpha_2(\xi) &= p_{12} = P(U(\underline{X}_0) > 0 / \Pi_2) \\ &= 1 - P(U(\underline{X}_0) \leq 0 / \Pi_2) \\ &= 1 - \Phi\left\{\frac{\Delta}{2}\right\} \\ &= \Phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\}\end{aligned}\tag{2.43}$$

olarak bulunur. Böylece

$$P(THS) = \Phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\}\tag{2.44}$$

toplam hatalı sınıflandırma olasılığı, parametrelerin bilindiği durumda çok değişkenli normallik için optimal hata oranıdır.

2.4 Parametreler Bilinmediğinde Çok Değişkenli Normallik için Diskriminasyon

$\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$ ve Σ parametreleri bilinmediğinde onların yerine Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli rasgele örneklemeler yardımıyla elde edilen $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ ve S tahmin edicileri alınarak, örneklemelere bağlı lineer diskriminant fonksiyonu

$$W(\underline{X}) = \left[\underline{X} - \frac{1}{2}(\underline{\bar{X}}_1 + \underline{\bar{X}}_2) \right]' S^{-1} (\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) \quad (2.45)$$

biçiminde elde edilir. $W(\underline{X})$ ' e Anderson W istatistiği de denmektedir (Anderson (1958)). $W(\underline{X})$ istatistiği parametrelerin bilindiği durumda elde edilen $U(\underline{X})$ istatistiğinde bilinmeyen parametreler yerine örneklemelerden elde edilen tahminlerin konulmasıyla elde edilmiştir. Burada $\underline{\bar{X}}_1 = (\bar{X}_{11}, \bar{X}_{12}, \dots, \bar{X}_{1p})'$ ve $\underline{\bar{X}}_2 = (\bar{X}_{21}, \bar{X}_{22}, \dots, \bar{X}_{2p})'$, Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli bağımsız örneklemelerin ortalamaları ve

$$S = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (\bar{X}_i - \underline{\bar{X}}_1)(\bar{X}_i - \underline{\bar{X}}_1)' + \sum_{i=1}^{n_2} (\bar{X}_i - \underline{\bar{X}}_2)(\bar{X}_i - \underline{\bar{X}}_2)' \right]$$

birleştirilmiş örneklem varyans-kovaryans matrisidir.

Böylece $I(\underline{x}_0)$ ile verilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birim için $R_N(s)$ örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı,

$$R_N(s): \begin{cases} W(\underline{x}_0) > 0 & \text{ise } I(\underline{x}_0), \Pi_1 \text{'e} \\ \text{diğer durumda} & \Pi_2 \text{'ye atanır.} \end{cases} \quad (2.46)$$

ile verilir.

2.4.1 $W(\underline{X})$ ' in Dağılımı

Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli bağımsız örneklemelerden elde edilen $W(\underline{X})$ lineer diskriminant fonksiyonu $\underline{X}$, $\underline{\bar{X}}_1$, $\underline{\bar{X}}_2$ ve S ' nin bir fonksiyonu olduğundan, dağılımını elde etmek oldukça karmaşıktır. Bu alt bölümde bazı şartlar altında $W(\underline{X})$ ' in dağılımı verilmeye çalışılacaktır.

$n_1 \rightarrow \infty$ ve $n_2 \rightarrow \infty$ iken $W(\underline{X})$ ' in limit dağılımı $U(\underline{X})$ ' in dağılımıyla aynıdır. Yani

$$\underline{X} \sim N(\underline{\mu}_1, \Sigma) \text{ ise } (W(\underline{X})/\Pi_1) \sim N\left(\frac{\Delta^2}{2}, \Delta^2\right) \quad (2.47)$$

ve

$$\underline{X} \sim N(\underline{\mu}_2, \Sigma) \text{ ise } (W(\underline{X})/\Pi_2) \sim N\left(-\frac{\Delta^2}{2}, \Delta^2\right) \quad (2.48)$$

dir (Wald (1944), Anderson (1958)).

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ve s tahminleri verildiğinde $W(\underline{X})$ ' in koşullu dağılımı, $\underline{X}, \Pi_1$ ' den rasgele bir değişken ise,

$$(W(\underline{X})/\Pi_1) \sim N\left[\left[\underline{\mu}_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right] s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2), (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' s^{-1} \Sigma s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right] \quad (2.49)$$

ve $\underline{X}, \Pi_2$ ' den rasgele bir değişken ise

$$(W(\underline{X})/\Pi_2) \sim N\left[\left[\underline{\mu}_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right] s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2), (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' s^{-1} \Sigma s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right] \quad (2.50)$$

dir (Anderson (1958), Lachenbruch (1975)).

$\underline{X}, \bar{X}_1, \bar{X}_2$ ve S birer rasgele değişken olduğunda (2.45) ile verilen $W(\underline{X})$ ' in koşullu dağılımının ortalama ve varyans ifadelerinin beklenen değerleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} E(E(W(\underline{X})/\bar{X}_1, \bar{X}_2, S, \Pi_1)) &= E\left[\left[\underline{\mu}_1 - \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)\right] S^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right] \\ &= \frac{c_1}{2}(\Delta^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} E(E(W(\underline{X})/\bar{X}_1, \bar{X}_2, S, \Pi_2)) &= E\left[\left[\underline{\mu}_2 - \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)\right] S^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right] \\ &= \frac{c_1}{2}(-\Delta^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

ve

$$\begin{aligned} E(Var(W(\underline{X})/\bar{X}_1, \bar{X}_2, S, \Pi_1 \text{ veya } \Pi_2)) &= E((\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1} \Sigma S^{-1}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)) \\ &= c_2(\Delta^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

dir, burada,

$$c_1 = \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - p - 3} \quad (2.54)$$

ve

$$c_2 = \frac{(n_1 + n_2 - 3)(n_1 + n_2 - 2)^2}{(n_1 + n_2 - p - 2)(n_1 + n_2 - p - 3)(n_1 + n_2 - p - 5)} \quad (2.55)$$

dır (Lachenbruch (1968), Viollaz ve arkadaşları (1995)).

Viollaz ve arkadaşları $\underline{X}$, $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ ve S birer rasgele değişken olduğunda $W(\underline{X})$ ifadesindeki parametrelerin bazılarının bilinip bilinmemesini dikkate alarak, $W(\underline{X})$ ' in koşullu dağılımının ortalama ve varyansı için sonuçlar vermişlerdir. Bu sonuçlardan $W(\underline{X})$ ' in koşullu dağılımı normal olmasına rağmen, koşulsuz dağılımın normal olmadığı görülmektedir. Ancak yeterince büyük n_1 ve n_2 için normale yakındır.

$\underline{X}$, $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ ve S birer rasgele değişken olduğunda $W(\underline{X})$ 'in koşulsuz dağılımının oldukça karmaşık olduğu daha önce belirtilmişti. Sitgreaves (1961) $n_1 = n_2 = n$ koşulu altında $W(\underline{X})$ 'in koşulsuz dağılımı için sonuçlar elde etmiştir. $\underline{X}$, Π_1 ' den bir rasgele değişken ise,

$$f(W(\underline{X}), \Pi_1) = a b h(c, n, n, p, j, l, r, m) \quad (2.56)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 ' den bir rasgele değişken ise,

$$f(W(\underline{X}), \Pi_2) = a b h(-c, n, n, p, j, l, r, m) \quad (2.57)$$

dir; burada,

$$a = \frac{n\Gamma(n - \frac{1}{2}) \exp(-2n\lambda^2(n+1)/(2n+1))}{2(n-1)\sqrt{(2n+1)}\Gamma(n - \frac{1}{2}(p+1))\Gamma(\frac{1}{2}(p-1))\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$b = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g(\lambda^2, n, n, p, j, l, r, k, m)$$

$$c = \frac{nW}{2(n-1)\sqrt{(2n+1)}}$$

$$\lambda^2 = \frac{\Delta^2}{4}$$

$$g(\lambda^2, n_1, n_2, p, j, l, r, k, m)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(p-1) + k + m)(2n_2\lambda^2)^{j+l+r+k+m} 2^l n_2^{r+\frac{1}{2}l+k} n_1^{j+\frac{1}{2}l+m}}{\Gamma(\frac{1}{2}p + j + l + r + k + m) j! l! r! k! m! (n_1 + n_2)^{j+l+r+k+m} (n_1 + n_2)^{r+\frac{1}{2}l+k}}$$

dir.

Wald (1944), Anderson (1951,1973), Sitgreaves (1952,1961), Teichroew ve Sitgreaves (1961), Bowker ve Sitgreaves (1961), Kabe (1963) ve Okamoto (1963), $W(\underline{X})$ ' in dağılımı üzerinde çalışmışlardır. Okamoto $W(\underline{X})$ ' in dağılımı için asimptotik açılımlar elde etmiştir.

2.4.2 Hata Oranları

Parametreler bilinmediğinde, hata oranları Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli örneklemelere ve $W(\underline{X})$ ' in dağılımına bağlı olarak elde edilebilir. $W(\underline{X})$ ' in dağılımı oldukça karmaşık olduğundan, hata oranları için analitik ifadeler bulmak oldukça zordur. Bu nedenle hata oranları, farklı tahmin yöntemleri ile tahmin edilmeye çalışılacaktır. Sözü edilen tahmin yöntemleri Bölüm 4 ' de ayrıntılı olarak verilecektir. Burada bir önceki alt bölümde bazı şartlar altında $W(\underline{X})$ ' in dağılımı için elde edilen sonuçlar gözönüne alınarak, hata oranları için bazı ifadeler verilmeye çalışılacaktır.

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ve s verildiğinde $W(\underline{X}_0)$ ' ın koşullu dağılımından yararlanılarak, koşullu gerçek hata oranı bulunabilir. $\bar{x}_0$ ölçümlü birimin Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye hatalı atanması olasılığı,

$$\begin{aligned} \alpha_1(\hat{\xi}) &= P(W(\underline{x}_0) \leq 0 / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s, \Pi_1) \\ &= \Phi \left\{ - \frac{\left[\underline{\mu}_1 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \right]' s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{((\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' s^{-1} \Sigma s^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2))^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ve Π_2 de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e hatalı atanması olasılığı,

$$\begin{aligned} \alpha_2(\hat{\xi}) &= P(W(\underline{x}_0) > 0 / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s, \Pi_2) \\ &= 1 - \Phi \left\{ - \frac{\left[\underline{\mu}_2 - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \right]' s^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{((\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' s^{-1} \Sigma s^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2))^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

olarak elde edilir ve toplam hatalı sınıflandırma olasılığı,

$$P(THS) = \frac{1}{2}(\alpha_1(\hat{\xi}) + \alpha_2(\hat{\xi}))$$

dir (Lachenbruch (1975), Anderson (1984)).

Σ bilindiğinde koşullu gerçek hata oranının beklenen değeri olan beklenen gerçek hata oranı

$$E(\alpha_1(\hat{\xi})) = P\left(\frac{w_1}{w_2} > \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)}\right) \quad (2.60)$$

dir (John (1961), Moran (1975)); burada, $w_1 \sim \chi^2_{(p,\lambda_1)}$ ve $w_2 \sim \chi^2_{(p,\lambda_2)}$ herbiri p serbestlik dereceli bağımsız merkezsiz olmayan χ^2 rasgele değişkenleridir ve merkezsiz olmama parametreleri,

$$\lambda_1 = \frac{n_1 n_2 \Delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 4n_1 n_2}} \right)^2}{4(1+\rho)},$$

$$\lambda_2 = \frac{n_1 n_2 \Delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 4n_1 n_2}} \right)^2}{4(1-\rho)},$$

$$\rho = \frac{(n_1 - n_2)}{\sqrt{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 4n_1 n_2)}}$$

dir. $E(\alpha_2(\hat{\xi}))$ için de benzer ifade elde edilebilir.

n_1 ve n_2 örneklem hacimleri yeterince büyük olduğunda $W(\underline{X})$ ' in dağılımı normal dağılıma yakındır. Bu sonuçtan $\alpha_1(\hat{\xi})$ ve $\alpha_2(\hat{\xi})$ hata oranları için yaklaşık ifadeler,

$$\begin{aligned} \alpha_1(\hat{\xi}) &\cong \Phi \left\{ \frac{E(-W(\underline{X}_0)/\Pi_1)}{\sqrt{E(Var(W(\underline{X}_0)/\Pi_1))}} \right\} \\ &= \Phi \left\{ - \frac{\frac{c_1}{2}(\Delta^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(\Delta^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_2(\hat{\xi}) &\equiv \Phi \left\{ \frac{E(W(\underline{X}_0)/\Pi_2)}{\sqrt{E(Var(W(\underline{X}_0)/\Pi_2))}} \right\} \\
&= \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(\Delta^2 + \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(\Delta^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

biçiminde elde edilir, burada, c_1 ve c_2 (2.54) ve (2.55) de verilmişti (Lachenbruch (1968), Viollaz ve arkadaşları (1995)). Buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı, bu iki hata oranının ortalaması alınarak bulunur.

Okamoto (1963), n^{-2} sıradan terimler cinsinden $W(\underline{X})$ ' in asimptotik dağılımını elde etmiştir ve bu asimptotik dağılım yardımıyla koşullu gerçek hata oranları için asimptotik ifadeler elde edilmiştir. Böylece $n_1 \rightarrow \infty$ ve $n_2 \rightarrow \infty$ için $I(\underline{x}_0)$ ile gösterilen $\underline{x}_0$ ölçümlü birimin Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye hatalı atanması olasılığı $\alpha_1(\hat{\xi})$ ' yı,

$$\begin{aligned}
P(W(\underline{X}_0) \leq 0 / \Pi_1) &= P\left(\frac{W(\underline{X}_0) - \frac{\Delta^2}{2}}{\Delta} \leq -\frac{\frac{\Delta^2}{2}}{\Delta} / \Pi_1\right) \\
&= \Phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\} + \phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\} \left(\left(\frac{\Delta}{16} + \frac{3(p-1)}{4\Delta}\right)/n_1\right. \\
&\quad \left.+ \left(\frac{\Delta}{16} - \frac{(p-1)}{4\Delta}\right)/n_2 + \left(\frac{\Delta(p-1)}{4}\right)/n + O(n^{-2})\right)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

ve Π_2 ' de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e hatalı atanması olasılığı $\alpha_2(\hat{\xi})$ ' yı,

$$\begin{aligned}
P(W(\underline{X}_0) > 0 / \Pi_2) &= 1 - P\left(\frac{W(\underline{X}_0) - (-\frac{\Delta^2}{2})}{\Delta} \leq -\frac{(-\frac{\Delta^2}{2})}{\Delta} / \Pi_2\right) \\
&= \Phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\} + \phi\left\{-\frac{\Delta}{2}\right\} \left(\left(\frac{\Delta}{16} + \frac{3(p-1)}{4\Delta}\right)/n_2\right. \\
&\quad \left.+ \left(\frac{\Delta}{16} - \frac{(p-1)}{4\Delta}\right)/n_1 + \left(\frac{\Delta(p-1)}{4}\right)/n + O(n^{-2})\right)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

açılımları biçiminde elde etmiştir (Anderson (1984)); burada, $n = n_1 + n_2$, $\phi(\cdot)$ standart normal dağılımın yoğunluk fonksiyonu ve $O(n^{-2})$ ikinci sıradan düzeltme terimidir. Böylece elde edilen bu iki olasılığın ortalaması alınarak, toplam hatalı sınıflandırma olasılığı bulunabilir.

$\underline{X}$, $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ ve S birer rasgele değişken olduğunda $n_1 = n_2$ koşulu altında Sitgreaves (1961) tarafından elde edilen $W(\underline{X})$ ' in dağılımı bir önceki alt bölümde verilmişti. $W(\underline{X})$ ' in elde edilen bu dağılımı gözönüne alınarak hatalı atanma olasılıkları,

$$\begin{aligned}
 P(W(\underline{X}_0) \leq 0 / \Pi_1) &= P(W(\underline{X}_0) > 0 / \Pi_2) \\
 &= \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}) \exp(-\frac{2n\lambda^2(n+1)}{2n+1})}{2\Gamma(n - \frac{p}{2})\Gamma(\frac{p-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \\
 &\times \sum_j \sum_l \sum_r \sum_k \sum_m \left(\frac{\Gamma(\frac{p-1}{2} + k + m) \Gamma(n - \frac{p}{2} + j + \frac{l}{2}) \Gamma(r + \frac{l+1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + j + l + r + k + m) \Gamma(n - \frac{1}{2} + j + \frac{l}{2} + m)} \right. \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + j + \frac{l}{2} + m) (-2)^l (n\lambda^2)^{j+l+r+k+m}}{j! l! r! k! m! (2n+1)^{r+l/2+k}} \\
 &\quad \left. \right)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

biçiminde elde edilir, burada λ^2 bir önceki alt bölümde verimiştir. (2.65) ifadesi aynı zamanda toplam hatalı sınıflandırma olasılığıdır. (2.65) ifadesi oldukça karmaşık olduğundan ileride kullanılmayacaktır.

BÖLÜM 3

NORMAL DAĞILIMA SAHİP OLMAYAN KİTLELERDE DİSKRİMİNASYON

Gerçek hayatta örneklemelerin alındığı kitlelerin dağılımları her zaman normal olmayabilir. Bu nedenle normal dağılıma sahip olmayan kitlelere de diskriminant analizi uygulanabilir. Bu bölümde, bazı kesikli diskriminant analizi yöntemleri ve gamma dağılımına sahip kitlelerde diskriminasyon problemi verilmeye çalışılacaktır. Kesikli diskriminant analizi ile ilgili fazla ayrıntıya girilmeyeceğinden, ileriki bölümlerde kesikli diskriminant analizi için sonuçlar verilmeyecektir.

3.1 Kesikli Diskriminant Analizi

Bir çok durumda gözlemlerin alındığı dağılımın normal olduğu düşünülmektedir. Ancak anket soruları, kredi değerlendirmeleri gibi durumlarda rasgele değişkenin dağılımı kesikli olduğundan, kesikli diskriminant analizi tekniklerinin kullanılması gerekir. Kesikli diskriminant analizinde, $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ her bir bileşeni $s_1, s_2, \dots, s_p$ sayıda

sonlu değerler alan kesikli rasgele bir vektördür. Böylece örneklem uzayı $\mathfrak{R}^p$, $s = \prod_{j=1}^p s_j$ tane sonlu sayıda durum içermektedir. Π_1 ve Π_2 sırasıyla $f_1(\underline{x})$ ve $f_2(\underline{x})$ olasılık fonksiyonlarına ve q_1, q_2 prior olasılıklarına sahip birbirinden farklı iki kitle olsun. Böylece $\underline{X} = \underline{x}$ için koşullu olmayan olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(\underline{x}) &= q_1 f_1(\underline{x}) + q_2 f_2(\underline{x}) \\ &= g_1(\underline{x}) + g_2(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

biçimindedir; burada, $g_1(\underline{x})$ ve $g_2(\underline{x})$ ifadelerine diskriminant değerleri (skorları) denmektedir.

İki grup için diskriminasyon, $\mathfrak{R}^p$ örneklem uzayının sıralı bölünümü $D = \langle D_1, D_2 \rangle$ kuralı ile tanımlanır. Eğer $\underline{x} \in D_i$ ise, D kuralı $\underline{x}$ gözlemini Π_i 'ye atar ($i=1,2$).

Böylece $\underline{X} = \underline{x} \in D_i$ koşullu hatalı sınıflandırma olasılığı

$$P(D / \underline{X} = \underline{x}) = \frac{g_j(\underline{x})}{g(\underline{x})}, \quad i \neq j \quad (3.2)$$

ve koşulsuz hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\begin{aligned}
P(D) &= E(P(D / \underline{X} = \underline{x})) \\
&= \sum_{D_1} g_2(\underline{x}) + \sum_{D_2} g_1(\underline{x})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dir. Eğer kural koşulsuz hatalı sınıflandırma olasılığını minimum ediyorsa optimaldir denir (Goldstein ve Dillon (1978)).

3.1.1 Bazı Kesikli Diskriminant Analizi Yöntemleri

Bu alt kesimde kesikli diskriminant analizi yöntemlerinden bazıları verilmeye çalışılacaktır. Öyleki bütün yöntemler için rasgele değişken X_j 'nin 0,1 gibi sadece iki değer aldığı varsayılacaktır ($j = (1, 2, \dots, p)$).

3.1.1.i Bağımsızlık Durumu

$X_1, X_2, \dots, X_p$ sadece iki değer alan ikili değişkenleri, birbirinden bağımsız rasgele değişkenler olarak gözönüne alınsın ve bağımsızlıktan dolayı sadece p tane parametre olacaktır. Verilen bir $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ gözlem vektörü için olasılık fonksiyonu

$$P(\underline{X} = \underline{x} / \Pi_i) = \prod_{j=1}^p (P(X_j = x_j / \Pi_i))^{x_j} (1 - P(X_j = x_j / \Pi_i))^{1-x_j} \tag{3.4}$$

biçimindedir. Π_i 'den n_i tane bağımsız örneklem için $P(X_j = x_j / \Pi_i)$ 'nin yansız minimum varyanslı tahmin edicisi

$$\hat{P}(X_j = x_j / \Pi_i) = \sum_{s_j} \frac{n_j(\underline{x})}{n_i}, \quad j = 1, 2, \dots, p \tag{3.5}$$

dir ($i = 1, 2$). Bu sonuç kullanılarak örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} q_1 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_1(\underline{x})}{n_1} \right)^{x_j} > q_2 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_2(\underline{x})}{n_2} \right)^{x_j} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_1 \text{'e} \\ q_1 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_1(\underline{x})}{n_1} \right)^{x_j} < q_2 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_2(\underline{x})}{n_2} \right)^{x_j} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_2 \text{'ye} \\ q_1 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_1(\underline{x})}{n_1} \right)^{x_j} = q_2 \prod_{j=1}^p \sum_{s_j} \left(\frac{n_2(\underline{x})}{n_2} \right)^{x_j} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \tag{3.6}$$

ile verilir (Goldstein ve Dillon (1978)).

3.1.1.ii Tam Bağımlılık Durumu

Tam bağımlılık durumunda sınıflandırma kuralı Frechet üst ve alt sınırları gözönüne alınarak oluşturulacaktır. $F_{x_j}(x_j) = P(X_j \leq x_j)$, Π_i kitlesinin j ' inci değişkeninin dağılımını gösterebilir ($i=1,2$). Tam bağımlılık durumu için Frechet üst sınırı

$$F^+(x_1, x_2, \dots, x_p) = \min\{F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_p}(x_p)\} \quad (3.7)$$

ve Frechet alt sınırı

$$\begin{aligned} F^-(x_1, x_2, \dots, x_p) &= \max\left\{\sum_{j=1}^p F_{x_j}(x_j) - (p-1), 0\right\} \\ &= \max\{F_{x_1}(x_1) + F_{x_2}(x_2) + \dots + F_{x_p}(x_p) - (p-1), 0\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlanmıştır; burada, $\sum_{j=1}^p F_{x_j}(x_j) = 1$ dir (Dall'Aglio (1972)).

Frechet sınırları için olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{x_j}(x_j) &= P(X_j = x_j) \\ &= P(X_j \leq x_j) - P(X_j < x_j) \end{aligned} \quad (3.9)$$

formülü ile hesaplanır.

Buradan Frechet üst sınırı için örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} \frac{\hat{f}_1^+(x)}{\hat{f}_2^+(x)} > \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } x \in \Pi_1 \text{ 'e} \\ \frac{\hat{f}_1^+(x)}{\hat{f}_2^+(x)} < \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } x \in \Pi_2 \text{ 'ye} \\ \frac{\hat{f}_1^+(x)}{\hat{f}_2^+(x)} = \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } x \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.10)$$

ve Frechet alt sınırı için örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} \frac{\hat{f}_1^-(\underline{x})}{\hat{f}_2^-(\underline{x})} > \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_1' \text{ e} \\ \frac{\hat{f}_1^-(\underline{x})}{\hat{f}_2^-(\underline{x})} < \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_2' \text{ ye} \\ \frac{\hat{f}_1^-(\underline{x})}{\hat{f}_2^-(\underline{x})} = \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.11)$$

ile verilir (Atakan (1990)). Kesikli dağılımlar için ikiden çok değişken olduğunda Frechet alt sınırı her zaman iyi sonuç vermemektedir.

3.1.1.iii Bahadur Modeli

$\mathfrak{R}^p$, her biri 0,1 değerini alan $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ rasgele vektörünün örneklem uzayını gösterebilir. Eğer j 'inci birimin değeri pozitif ise $x_j = 1$ aksi halde 0 değerini alır ($j = 1, 2, \dots, p$). $P(\underline{x})$, $\mathfrak{R}^p$ örneklem uzayında bir olasılık fonksiyonu olsun öyleki $\forall \underline{x} \in \mathfrak{R}^p$ için,

$$P(\underline{x}) \geq 0$$

ve

$$\sum_{\underline{x} \in \mathfrak{R}^p} P(\underline{x}) = 1$$

özellikleri sağlanmaktadır.

$\mathfrak{R}^p$ örneklem uzayında 2^p tane durum söz konusudur ve olasılık fonksiyonu $(2^p - 1)$ tane parametre içermektedir. ($j = 1, 2, \dots, p$) için $0 \leq \theta_j \leq 1$, $\theta_j = P(X_j = 1) = E(X_j)$ ve $1 - \theta_j = P(X_j = 0)$ olmak üzere

$$Z_j = \frac{(X_j - \theta_j)}{\sqrt{\theta_j(1 - \theta_j)}}$$

olarak tanımlansın; burada, $Z_j \sim N(0,1)$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\rho_{jk} &= E(Z_j Z_k), \quad j < k \\
\rho_{jkm} &= E(Z_j Z_k Z_m), \quad j < k < m \\
&\vdots \\
\rho_{12\ldots p} &= E(Z_1 Z_2 \ldots Z_p)
\end{aligned}$$

değişkenler arasındaki korelasyonlar olmak üzere, modelde $\binom{p}{2}$ tane ikili, $\binom{p}{3}$ tane

üçlü, ..., $\binom{p}{p}$ tane p ' li olmak üzere toplam $2^p - p - 1$ tane korelasyon terimi vardır.

Verilen bir $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dağılımı altında x_j ' ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere

$$f(\underline{x}) = P_{[1]}(\underline{x})P(\underline{x}) \quad (3.12)$$

dir, burada

$$P_{[1]}(\underline{x}) = \prod_{j=1}^p \theta_j^{x_j} (1 - \theta_j)^{1-x_j} \quad (3.13)$$

ve

$$P(\underline{x}) = 1 + \sum_{j < k} \rho_{jk} Z_j Z_k + \sum_{j < k < m} \rho_{jkm} Z_j Z_k Z_m + \dots + \rho_{12\ldots p} Z_1 Z_2 \dots Z_p \quad (3.14)$$

dir (Bahadur (1961)). Bu model bazen genel lineer model olarak da adlandırılır (McCullagh (1989)). Buradan örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} > \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_1' \text{ e} \\ \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} < \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_2' \text{ ye} \\ \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} = \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.15)$$

ile verilir.

3.1.3.iv Log Lineer Model

$f(\underline{x})$ ' in her bir $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ noktasındaki logaritmaları, ana etki ve etkileşimlerin lineer birleşimi şeklindedir. Böylece,

$$\log f(\underline{x}) = \alpha + \sum_{j=1}^p (-1)^{x_j} \alpha_j + \sum_{j < k}^p (-1)^{x_j + x_k} \alpha_{jk} + (-1)^{x_1 + x_2 + \dots + x_p} \alpha_{12\dots p} \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir; burada, α tüm değişkenlerin ortak etkisi; α_j , j ' inci değişkenin etkisi; α_{jk} , j ve k ' ncı değişken arasındaki etkileşim etkisini, $\dots$, $\alpha_{12\dots p}$ tüm değişkenler arasındaki etkileşimi göstermektedir. Bu modelin anti-logaritması Bahadur modelini verir. α ' lar minimum logit ki-kare tahminleri kullanılarak hesaplanabilir (Berkson (1955)). Buradan örneklere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} \log \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} > \log \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_1 \text{ 'e} \\ \log \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} < \log \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \in \Pi_2 \text{ 'ye} \\ \log \frac{\hat{f}_1(\underline{x})}{\hat{f}_2(\underline{x})} = \log \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.17)$$

ile verilir.

Çok boyutlu olumsuzluk tablo (contingance table) analizleri kullanılarak da diskriminasyon yapılabilir (Bishop, Fienberg ve Holland (1975), Fienberg (1977)). Birden çok kategorik değişken gözönüne alındığında, bu değişkenlerin veri tablosu, her bir değişken tablonun bir boyutu olmak üzere çok boyutlu bir olumsuzluk tablo görünümündedir. Log lineer model, olumsuzluk tablonun beklenen sıklıklarının logaritmaları cinsinden ifade edilen ortak etken, kategori etkileri ve etkileşim terimlerini içeren lineer formda bir modeldir. 3 boyutlu bir olumsuzluk tablosu için, x_{jkm} gözlenen sıklık, $p_{jkm} = P(X_j = x_j, X_k = x_k, X_m = x_m)$ çok değişkenli ortak olasılığı, gözlemin (jkm) gözesinde bulunması olasılığı ve $e_{jkm} = np_{jkm}$ beklenen sıklık ve n örneklem hacmi olmak üzere, log lineer model

$$\begin{aligned} L_{jkm} &= \ln e_{jkm} \\ &= V + V_{1(j)} + V_{2(k)} + V_{3(m)} + V_{12(jk)} + V_{13(jm)} + V_{23(km)} + V_{123(jkm)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ile ifade edilir, burada V tüm kategorilerin ortak etkisi, $V_{(j)}$ j ' inci kategorinin etkisi $V_{12(jk)}$ j ' inci ve k ' inci kategorinin etkileşim etkisi, ... ve $V_{123(jkm)}$ tüm kategorilerin etkileşim etkisidir. Bu sonuçlardan örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} \frac{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_1)}{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_2)} > \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_1 \text{'e} \\ \frac{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_1)}{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_2)} < \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_2 \text{'ye} \\ \frac{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_1)}{(\hat{L}_{jkm} / \Pi_2)} = \frac{q_2}{q_1} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.19)$$

ile verilir.

3.1.3.v Çokterimli Model

Çokterimli modelde, 2^p tane durum ve her bir kitle için $(2^p - 1)$ tane parametre vardır. Bu yöntemde tahmini diskriminant fonksiyonu, karıştırılmış kitleden alınan N hacimli bağımsız örneklem yardımıyla ya da Π_1 ve Π_2 kitlelerinin her birinden bağımsız olarak alınan n_1 ve n_2 hacimli örneklemeler yardımıyla oluşturulur.

Örneklem karıştırılmış kitleden alınmış ise olasılık fonksiyonu

$$\hat{f}_i(\underline{x}) = \frac{N_i(\underline{x})}{N_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.20)$$

ile ve diskriminant fonksiyonu

$$\begin{aligned} \hat{g}_i(\underline{x}) &= \hat{q}_i \hat{f}_i(\underline{x}) \\ &= \frac{N_i}{N} \frac{N_i(\underline{x})}{N_i} \\ &= \frac{N_i(\underline{x})}{N} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ile tahmin edilir, burada N_i , i ' inci kitlenin hacmi ve $N_i(\underline{x})$ i ' inci kitleden örneklemeye giren gözlem sayısıdır. Böylece örneklem hacimlerine bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} N_1(\underline{x}) > N_2(\underline{x}) & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_1 \text{'e} \\ N_1(\underline{x}) < N_2(\underline{x}) & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_2 \text{'ye} \\ N_1(\underline{x}) = N_2(\underline{x}) & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.22)$$

ile verilir.

Örneklemler Π_1 ve Π_2 kitlelerinden ayrı ayrı alınmış ise olasılık fonksiyonu

$$\hat{f}_i(\underline{x}) = \frac{n_i(\underline{x})}{n_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.23)$$

ile ve diskriminant fonksiyonu

$$\begin{aligned} \hat{g}_i(\underline{x}) &= q_i \hat{f}_i(\underline{x}) \\ &= q_i \frac{n_i(\underline{x})}{n_i} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ile tahmin edilir, burada q_i ($i=1,2$) önceden belirlenmiş değerdir. Böylece örneklemlere bağlı optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{opt}(s) = \begin{cases} q_1 \frac{n_1(\underline{x})}{n_1} > q_2 \frac{n_2(\underline{x})}{n_2} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_1 \text{'e} \\ q_1 \frac{n_1(\underline{x})}{n_1} < q_2 \frac{n_2(\underline{x})}{n_2} & \text{ise } \underline{x} \text{ } \Pi_2 \text{'ye} \\ q_1 \frac{n_1(\underline{x})}{n_1} = q_2 \frac{n_2(\underline{x})}{n_2} & \text{ise } \underline{x} \text{ rasgele atanır.} \end{cases} \quad (3.25)$$

ile verilir (Goldstein ve Dillon (1978)).

Kesikli diskriminant analizi ile ilgili daha geniş ayrıntı için Goldstein ve Dillon (1978), Moore (1973) ve Atakan (1995) 'nın çalışmalarına bakılabilir.

3.2 Gamma Dağılımına Sahip Kitlelerde Diskriminant Analizi

Normal kitleler için parametreler bilindiğinde elde edilen R_N sınıflandırma kuralının optimal kural olduğu Bölüm 2 de verilmişti. Ancak normal olmayan kitleler için R_N kuralı optimal bir kural olmayabilir. R_N kuralı, Fisher tarafından önerilen dağılımdan bağımsız bir kuraldır. Bu alt kesimde, tek değişkenli gamma dağılımına sahip kitleler için optimal sınıflandırma kuralı, kitle parametrelerinin bilinip bilinmemesi durumları göz önüne alınarak incelenecektir. Yine hem parametrelerin bilindiği, hem de bilinmediği

durumda, iki kitlenin parametreleri arasındaki bazı ilişkiler göz önüne alınarak, ortaya çıkan farklı durumların herbiri için diskriminasyon problemi irdelenecektir. Burada, Adegboye(1993) 'nin gamma'nın özel bir hali olan üstel dağılımlı kitleler için elde ettiği sonuçlar, gamma dağılımına sahip kitlelere genelleştirilmektedir.

3.2.1 Parametrelerin Bilindiği Tek Değişkenli Gamma Kitleleri için Diskriminasyon

Π_1 ve Π_2 , ortalamaları $\delta_1\beta_1$ ve $\delta_2\beta_2$ ($\delta_1\beta_1 < \delta_2\beta_2$) olan ve

$$f_i(x; \delta_i, \beta_i) = \frac{1}{\Gamma(\delta_i)\beta_i^{\delta_i}} x^{\delta_i-1} e^{-x/\beta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.26)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip gamma dağılımına sahip iki kitle olmak üzere, bu iki yoğunluk fonksiyonunun oranı

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x; \delta_1, \beta_1)}{f_2(x; \delta_2, \beta_2)} &= \frac{\frac{1}{\Gamma(\delta_1)\beta_1^{\delta_1}} x^{\delta_1-1} e^{-x/\beta_1}}{\frac{1}{\Gamma(\delta_2)\beta_2^{\delta_2}} x^{\delta_2-1} e^{-x/\beta_2}} \\ &= \frac{\Gamma(\delta_2)\beta_2^{\delta_2}}{\Gamma(\delta_1)\beta_1^{\delta_1}} x^{(\delta_1-\delta_2)} e^{\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1\beta_2}x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu ifade, parametrelerin bilindiği durum için diskriminant fonksiyonudur. (1.13) 'de verilen optimal sınıflandırma kuralına göre

$$\frac{f_1(x; \delta_1, \beta_1)}{f_2(x; \delta_2, \beta_2)} > k^*$$

ise $I(x_0)$ ile ifade edilen x_0 ölçümlü birim Π_1 'e aksi halde Π_2 'ye atanır, burada k^* Bölüm 1, (1.16) da verilen bir sabittir. Böylece optimal sınıflandırma kuralı

$$R_G: \begin{cases} \frac{\Gamma(\delta_2)\beta_2^{\delta_2}}{\Gamma(\delta_1)\beta_1^{\delta_1}} x_0^{(\delta_1-\delta_2)} e^{\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1\beta_2}x} > k^* \text{ ise } I(x_0), \Pi_1 \text{'e} \\ \text{diğer durumda} \end{cases}, \Pi_2 \text{'ye atanır.} \quad (3.28)$$

ile verilir. R_G 'deki G harfi gamma dağılımını göstermektedir. Maliyetler ve prior olasılıkların eşit olduğu kabul edilirse optimal kural R_G

$$R_G: \begin{cases} x_0^{(\delta_1 - \delta_2)} e^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 \beta_2} x} > \frac{\Gamma(\delta_1) \beta_1^{\delta_1}}{\Gamma(\delta_2) \beta_2^{\delta_2}} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} \end{cases}, \Pi_2' \text{ ye atanır.} \quad (3.29)$$

biçiminde elde edilir.

R_G optimal sınıflandırma kuralı, δ_1 , β_1 , δ_2 ve β_2 parametrelerinin farklı durumlarına göre aşağıdaki biçimlerde elde edilir

Durum 1: $\delta_1 < \delta_2$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ise R_G optimal sınıflandırma kuralı,

$$R_G: \begin{cases} x_0 < \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\delta_2)} \beta^{(\delta_1 - \delta_2)} \right) / (\delta_1 - \delta_2) \right\} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} \end{cases}, \Pi_2' \text{ ye atanır.} \quad (3.30)$$

ile verilir.

Durum 2: $\delta_1 = \frac{\nu_1}{2} < \delta_2 = \frac{\nu_2}{2}$ ve $\beta_1 = \beta_2 = 2$ ise gamma dağılımları ν_1 ve ν_2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımlarına dönüşür. ν_1 ve ν_2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımlı Π_1 ve Π_2 kitleleri için R_{χ^2} optimal sınıflandırma kuralı

$$R_{\chi^2}: \begin{cases} x_0 < \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_2}{2})} 2^{\frac{(\nu_1 - \nu_2)}{2}} \right) / \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \right) \right\} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} \end{cases}, \Pi_2' \text{ ye atanır.} \quad (3.31)$$

biçiminde elde edilir. R_{χ^2} 'deki χ^2 sembolü ki-kare dağılımını göstermektedir.

Durum 3: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ve $\beta_1 < \beta_2$ ise R_G optimal sınıflandırma kuralı

$$R_G: \begin{cases} x_0 < \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \ln \left(\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^\delta \right) \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} \end{cases}, \Pi_2' \text{ ye atanır.} \quad (3.32)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\xi) &= P_{R_0}(X_0 \in B_2 / \Pi_1) \\
&= P(X_0 \geq c_1 / \Pi_1) \\
&= \int_{c_1}^{\infty} f_1(x_0; \delta_1, \beta) dx_0 \\
&= 1 - \int_0^{c_1} f_1(x_0; \delta_1, \beta) dx_0 \\
&= 1 - \int_0^{c_1} \frac{1}{\Gamma(\delta_1) \beta^{\delta_1}} x_0^{\delta_1-1} e^{-x_0/\beta} dx_0 \\
&= 1 - \int_0^{c_1/\beta} \frac{1}{\Gamma(\delta_1)} y^{\delta_1-1} e^{-y} dy \\
&= 1 - \Gamma_{\Pi_1}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_1\right)
\end{aligned}$$

dir, burada $x_0 = y\beta$ dönüşümü yapılarak sonuca ulaşılmıştır. $\alpha_2(\xi) = P_{R_0}(X_0 \in B_1 / \Pi_2)$

olasılığı benzer biçimde elde edilir. Böylece $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$ olduğunda

$$\alpha^G = \frac{1}{2} (1 - \Gamma_{\Pi_1}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_1\right) + \Gamma_{\Pi_2}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_2\right))$$

elde edilmiş olur.

Aşağıda verilecek olan teoremlerin ispatı, Teorem 3.1 'in ispatıyla aynı olduğundan bu teoremler ispatsız verilecektir.

Teorem 3.2: Π_1 ve Π_2 , ν_1 ve ν_2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip kitleler olmak üzere R_{χ^2} sınıflandırma kuralına göre toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\alpha^{\chi^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \Gamma_{\Pi_1}\left(\frac{c_2}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right) + \Gamma_{\Pi_2}\left(\frac{c_2}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) \right]$$

yada

(3.37)

$$\alpha^{\chi^2} = \frac{1}{2} \left[1 - F_{\Pi_1}\left(\frac{c_2}{2}, \nu_1\right) + F_{\Pi_2}\left(\frac{c_2}{2}, \nu_2\right) \right]$$

dir, burada,

$$c_2 = \exp \left\{ \frac{\ln \left(\frac{\Gamma(\nu_1/2)}{\Gamma(\nu_2/2)} \right) 2^{(\nu_1 - \nu_2)/2}}{\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}} \right\}$$

ve

$$F_{\Pi_i} \left(\frac{c_2}{2}, \nu_i \right) = \int_0^{c_2/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_i}{2}) 2^{\nu_i/2}} x_0^{\frac{\nu_i}{2}-1} e^{-x_0/2} dx_0, \quad i = 1, 2$$

ν_i serbestlik dereceli birikimli ki-kare dağılım fonksiyonudur.

Teorem 3.3: Π_1 ve Π_2 , $(\delta_1, \beta_1)(\delta_2, \beta_2)$ parametreli gamma dağılımına sahip kitleler olmak üzere $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ve $\beta_1 < \beta_2$ ise R_G kuralı kullanıldığında toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\alpha^G = \frac{1}{2} \left[1 - \Gamma_{\Pi_1} \left(\frac{c_3}{\beta_1}, \delta \right) + \Gamma_{\Pi_2} \left(\frac{c_3}{\beta_2}, \delta \right) \right] \quad (3.38)$$

dir, burada

$$c_3 = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left(\ln \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^\delta \right)$$

dir.

Teorem 3.4: Π_1 ve Π_2 , $\beta_1 < \beta_2$ parametreli üstel dağılıma sahip kitleler olmak üzere R_E sınıflandırma kuralına göre toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\alpha^E = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}} - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}} \right] \quad (3.39)$$

dır.

3.2.2 Parametrelerin Bilinmediği Tek Değişkenli Gamma Kitleleri için Diskriminasyon

Parametreler bilinmediğinde Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ ve $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ bağımsız rasgele örneklemeler yardımıyla

bilinmeyen parametreler tahmin edilebilir. $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ ve (S_1^2, S_2^2) sırasıyla iki kitlenin örneklem ortalamaları ve varyansları, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ve (s_1^2, s_2^2) onların aldığı değerleri gösterebilir. Parametrelerin bilindiği durumda elde edilen diskriminant kurallarında, bilinmeyen parametreler yerine, örneklemelerden elde edilen tahminlerinin direkt olarak kullanılmasıyla (plug-in) örneklemelere bağlı diskriminant kuralları elde edilmiş olur. Böylece örneklemelere bağlı $R_G(s)$ sınıflandırma kuralı

$$R_G(s): \begin{cases} x_0^{(\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2)} e^{\frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2} x} > \frac{\Gamma(\hat{\delta}_1) \hat{\beta}_1^{\hat{\delta}_1}}{\Gamma(\hat{\delta}_2) \hat{\beta}_2^{\hat{\delta}_2}} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases} \quad (3.40)$$

ile verileri burada $\hat{\delta}_i = \frac{\bar{X}_i^2}{S_i^2}$ ve $\hat{\beta}_i = \frac{S_i^2}{\bar{X}_i}$ ($i=1,2$) momentler yöntemiyle örneklemelerden elde edilen tahminlerdir.

Parametrelerin bilindiği durumda, parametrelerin farklı durumlarına göre elde edilen dört farklı durum gözönüne alınarak aşağıdaki biçimlerde örneklemelere bağlı diskriminant kuralları elde edilir.

Durum 1: $R_G(s)$ örneklemelere bağlı sınıflandırma kuralı $\hat{\delta}_1 < \hat{\delta}_2$ ise

$$R_G(s): \begin{cases} x_0 < \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\hat{\delta}_1)}{\Gamma(\hat{\delta}_2)} \hat{\beta}^{(\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2)} \right) / (\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2) \right\} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases}$$

ve $\hat{\delta}_1 \geq \hat{\delta}_2$ ise (3.41)

$$R_G(s): \begin{cases} x_0 \geq \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\hat{\delta}_1)}{\Gamma(\hat{\delta}_2)} \hat{\beta}^{(\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2)} \right) / (\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2) \right\} \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{ e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ ye atanır.} \end{cases}$$

olarak elde edilir, burada $\hat{\beta} = \frac{1}{2}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$, iki kitle için β 'nın birleştirilmiş tahminidir.

Durum 2: $R_{\chi^2}(s)$ örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı $\hat{v}_1 < \hat{v}_2$ ise

$$R_{\chi^2}(s): \begin{cases} x_0 < \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\frac{\hat{v}_1}{2})}{\Gamma(\frac{\hat{v}_2}{2})} 2^{\frac{(\hat{v}_1 - \hat{v}_2)}{2}} \right) / \left(\frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2} \right) \right\} & \text{ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

ve $\hat{v}_1 \geq \hat{v}_2$ (3.42)

$$R_{\chi^2}(s): \begin{cases} x_0 \geq \exp \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma(\frac{\hat{v}_1}{2})}{\Gamma(\frac{\hat{v}_2}{2})} 2^{\frac{(\hat{v}_1 - \hat{v}_2)}{2}} \right) / \left(\frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2} \right) \right\} & \text{ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

ile verilir, burada $\hat{v}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{v}_2 = \bar{X}_2$ dir.

Durum 3: $R_G(s)$ örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı $\hat{\beta}_1 < \hat{\beta}_2$ ise

$$R_G(s): \begin{cases} x_0 < \frac{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} (\ln(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2})^{\hat{\delta}}) & \text{ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

ve $\hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2$ ise (3.43)

$$R_G(s): \begin{cases} x_0 \geq \frac{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} (\ln(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2})^{\hat{\delta}}) & \text{ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

biçiminde bulunur, burada $\hat{\delta} = \frac{1}{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2)$, iki kitle için δ 'nın birleştirilmiş tahminidir.

Durum 4: $R_E(s)$ örneklemelere bağlı optimal sınıflandırma kuralı $\hat{\beta}_1 < \hat{\beta}_2$ ise

$$R_E(s): \begin{cases} x_0 < \frac{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} \ln\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}\right) \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

ve $\hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2$ ise (3.44)

$$R_E(s): \begin{cases} x_0 \geq \frac{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} \ln\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}\right) \text{ ise } I(x_0), \Pi_1' \text{e} \\ \text{diğer durumda} & , \Pi_2' \text{ye atanır.} \end{cases}$$

ile verilir, burada $\hat{\beta}_1 = \bar{X}_1$ ve $\hat{\beta}_2 = \bar{X}_2$ dir.

Parametrelerin bilinmediği durumlarda elde edilen sınıflandırma kuralları için hata oranlarının analitik ifadeleri oldukça karmaşık olduğundan, bunların elde edilmesi zordur. Adegboye (1993), üstel kitleler için hata oranlarını oldukça karmaşık olan çift katlı integraller cinsinden vermiştir. Bu integrallerin direkt çözümünün zorluğundan, hata oranları Bölüm 4 ' de verilen bazı hata oranı tahmin yöntemleri kullanılarak simülasyon ile tahmin edilmeye çalışılacaktır. Simülasyon sonuçları Bölüm 5 ' de verilecektir.

BÖLÜM 4

HATA ORANI TAHMİN EDİCİLERİ

Parametreler bilinmediğinde, örneklemelerden elde edilen tahminleri kullanılarak oluşturulan örneklem diskriminant fonksiyonunun dağılımından yararlanılarak hata oranları bulunabilir. Ancak örneklem diskriminant fonksiyonunun dağılımını bulmak her zaman kolay değildir. Bu nedenle örneklem diskriminant fonksiyonunun dağılımı bilinmediğinde veya bulunamadığında hata oranları için bir çok tahmin edici söz konusudur. Bu tahmin edicilerin bazıları örneklemelerin alındığı dağılımlara bağlı olmasına rağmen, bazıları dağılımdan bağımsızlardır. Bu bölümde verilecek tahmin edicilerin bir çoğu için normallik varsayımı gözönüne alınacaktır. Bunlardan bazıları D, DS, $\bar{U}$, O, OS, L, LS, M tahmin edicileridir. Diğer yandan R, U, H, 2H, KH, Jackknife ve Bootstrap gibi tahmin edicilere parametrik olmayan tahmin ediciler denmektedir. Jackknife ve Bootstrap tekniğini, bütün tahmin tekniklerine uygulamak mümkündür. Bu bölümde başka bir tahmin edici sınıfı olan düzlenmiş tahmin ediciler de gözönüne alınacaktır. Bunlar RS, US, RN, UN ve NS tahmin edicileridir. Ayrıca önerilen iki yeni düzlenmiş tahmin edici olan NSL ve NSLS tahmin edicilerine de yer verilecektir. Yukarıdaki tahmin ediciler için literatürdeki gösterimler dikkate alınmıştır. Bundan sonraki alt kesimlerde x_0 ölçümlü bir birimin, Π_1 ' de olduğu bilindiğinde Π_2 ' ye hatalı atanması olasılığı için bir tahmin edici $\hat{\alpha}_1$; Π_2 ' de olduğu bilindiğinde Π_1 ' e hatalı atanması olasılığı için bir tahmin edici $\hat{\alpha}_2$ ve toplam hatalı sınıflandırma olasılığı için bir tahmin edici $\hat{\alpha}$ sembolleri ile gösterilecektir. Literatürde bilenen tahmin edicilerden bir çoğu fazla ayrıntısına girilmeden aşağıdaki alt bölümlerde verilmeye çalışılacaktır.

4.1 D Tahmin Edicisi

Fisher (1936) tarafından önerilen bir tahmin edicidir. Plug-in tahmin edicisi olarak da bilinir ve $\hat{\alpha}^D$ ile gösterilir. Bu tahmin edici, parametrelerin bilinmediği durumda elde edilen hata oranı ifadelerinde, bilinmeyen parametrelerin yerine örneklemelerden elde edilen tahminlerinin direkt olarak kullanılmasıyla oluşturulur. Eğer parametreler en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmişler ise, bu tahmin ediciye en çok olabilirlik tahmin edicisi de denir (Karson (1982)).

Tek ve çok değişkenli normallik varsayımı altında Bölüm 2 ' de verilen hata oranları için D tahmin edicisi aşağıdaki gibidir:

Tek değişkenli normallik için $D^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2 / S^2$ olduğundan $(\bar{X}_1 < \bar{X}_2)$ için

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^D &= \hat{\alpha}_2^D = \Phi\left\{\frac{1}{2S}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right\} \\ &= \Phi\left\{\frac{D}{2}\right\}\end{aligned}\quad (4.1)$$

dir, buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı için D tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^D = \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1^D + \frac{1}{2}\hat{\alpha}_2^D \quad (4.2)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde $(\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2)$ için

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^D &= \hat{\alpha}_2^D = \Phi\left\{\frac{1}{2S}(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)\right\} \\ &= \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\}\end{aligned}\quad (4.3)$$

dir ve

$$\hat{\alpha}^D = \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. σ^2 bilindiğinde $\hat{\alpha}_1^D$ 'nin beklenen değeri

$$E(\hat{\alpha}_1^D) = \Phi\{a_1\} + \Phi\{b_1\} - 2G(a_1, b_1; \rho_1) \quad (4.5)$$

dir (Hills (1966)); burada,

$$a_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma\sqrt{1+h_1}},$$

$$b_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma\sqrt{h_1}},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{h_1}{1+h_1}}$$

ve

$$h_1 = \frac{n_1 + n_2}{4n_1n_2}$$

dir, $E(\hat{\alpha}_2^D)$ de benzer şekilde bulunabilir.

Çok değişkenli normallik durumunda D tahmin edicisi

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_1^D &= \Phi \left\{ \frac{\left[\bar{X}_1 - \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \right]' S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1} S S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]^{1/2}} \right\} \\
 &= \Phi \left\{ -\frac{D^2}{2\sqrt{D}} \right\} \\
 &= \Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_2^D &= \Phi \left\{ \frac{\left[\bar{X}_2 - \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \right]' S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1} S S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]^{1/2}} \right\} \\
 &= \Phi \left\{ -\frac{D^2}{2\sqrt{D}} \right\} \\
 &= \Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

dir ve buradan

$$\hat{\alpha}^D = \Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\}$$

dir; burada, $D^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ daha önce verilen Δ^2 için bir tahmin edicidir ve Σ bilindiğinde $\hat{\alpha}_1^D$ 'nin beklenen değeri

$$E(\hat{\alpha}_1^D) = P\left(\frac{w_3}{w_4} > \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\right) \tag{4.8}$$

dir (Moran (1975)); burada, $w_3 \sim \chi^2_{(p, \lambda_3)}$ ve $w_4 \sim \chi^2_{(p, \lambda_4)}$ her biri p serbestlik dereceli bağımsız merkezsiz olmayan χ^2 rasgele değişkenleridir ve merkezsiz olmama parametreleri

$$\lambda_3 = \frac{n_1 n_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 - 4n_1 n_2}} \right\} \Delta^2}{\{2(1 - \rho_1)\}},$$

$$\lambda_4 = \frac{n_1 n_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 - 4n_1 n_2}} \right\} \Delta^2}{\{2(1 + \rho_1)\}}$$

dir; $E(\hat{\alpha}_2^D)$ de aynı yolla bulunabilir.

4.2 DS Tahmin Edicisi

Normallik varsayımı altında örneklemden elde edilen D^2 , Δ^2 için yanlış bir tahmin edicidir. Lachenbruch ve Mickey (1968), Δ^2 'nin yansız bir tahmin edicisi olarak

$$(DS)^2 = \frac{n_1 + n_2 - p - 3}{n_1 + n_2 - 2} D^2 \quad (4.9)$$

tahmin edicisini alarak $\hat{\alpha}^{DS}$ ile gösterilen DS tahmin edicisini elde etmişlerdir. Bu tahmin edicisi, D tahmin edicisinde D yerine DS alınmasıyla elde edilir.

Tek değişkenli normallik için

$$(DS)^2 = \frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2} D^2 \quad (4.10)$$

dir, buradan $(\bar{x}_1 < \bar{x}_2)$ için

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^{DS} = \hat{\alpha}_2^{DS} &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \\ &= \hat{\alpha}^{DS} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve $(\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2)$ için

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^{DS} = \hat{\alpha}_2^{DS} &= \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \\ &= \hat{\alpha}^{DS} \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak bulunur.

Çok değişkenli normallik durumunda DS tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^{DS} = \hat{\alpha}_2^{DS} &= \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - p - 3}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \\ &= \hat{\alpha}^{DS}\end{aligned}\quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

4.3 R tahmin Edicisi

Smith (1947) tarafından önerilen bu tahmin ediciye yeniden yerine koyma (resubstitution) tahmin edicisi veya görünüşte (apparent) hata oranı denilmektedir ve $\hat{\alpha}^R$ ile gösterilir. Karson (1982) bu tahmin ediciye karışık matris yöntemi adını vermiştir. $\hat{\alpha}^R$ tahmin edicisi, Π_1 ' den n_1 gözlem ve Π_2 ' den n_2 gözlem alınarak oluşturulan diskriminant fonksiyonu kullanılarak $n_1 + n_2$ gözlemin tekrar sınıflandırılmasıyla, Π_1 ' den Π_2 ' ye atananların sayısının n_1 ' e ve Π_2 ' den Π_1 ' e atananların sayısının n_2 ' ye oranlanmasıyla elde edilir. Eğer Π_1 ' deki n_1 gözleminden Π_2 ' ye atananların sayısı n_{21} ve Π_2 ' deki n_2 gözleminden Π_1 ' e atananların sayısı n_{12} ise

$$\hat{\alpha}_1^R = \frac{n_{21}}{n_1} \quad (4.14)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^R = \frac{n_{12}}{n_2} \quad (4.15)$$

dır ve buradan

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^R &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1^R + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_2^R \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n_{21}}{n_1} + \frac{n_{12}}{n_2} \right)\end{aligned}\quad (4.16)$$

dır. Tek değişkenli normallik varsayımı altında σ^2 bilindiğinde $\hat{\alpha}_1^R$ ' nin beklenen değeri

$$E(\hat{\alpha}_1^R) = \Phi\{a_2\} + \Phi\{b_2\} - 2G(a_2, b_2; \rho_2) \quad (4.17)$$

dir (Hills (1966)); burada,

$$a_2 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma\sqrt{h_2}},$$

$$b_2 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma\sqrt{1+h_2 - \frac{1}{n_1}}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{4n_1n_2 + n_1 - 3n_2}},$$

ve

$$h_1 = \frac{n_1 + n_2}{4n_1n_2}$$

dir ve Σ bilindiği çok değişkenli normallik varsayımı altında $\hat{\alpha}_1^R$ 'nin beklenen değeri

$$E(\hat{\alpha}_1^R) = P\left(\frac{w_5}{w_6} > \frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}\right) \quad (4.18)$$

dir (Moran (1975)); burada, $w_5 \sim \chi^2_{(p,\lambda_5)}$ ve $w_6 \sim \chi^2_{(p,\lambda_6)}$ her biri p serbestlik dereceli bağımsız merkezsiz olmayan χ^2 rasgele değişkenleridir ve merkezsiz olmama parametreleri

$$\lambda_5 = \frac{n_1n_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 - 3n_2 + 4n_1n_2}} \right\} \Delta^2}{\{2(1+\rho_2)\}},$$

$$\lambda_6 = \frac{n_1n_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} - \frac{1}{\sqrt{n_1 - 3n_2 + 4n_1n_2}} \right\} \Delta^2}{\{2(1-\rho_2)\}}$$

dir.

4.4 U Tahmin Edicisi

Lachenbruch (1967) tarafından verilen bu yöntemle tek gözlemin atılması (leave-one-out) tahmin edicisi de denmektedir ve $\hat{\alpha}^U$ ile gösterilir. Π_1 'deki n_1 gözlemden bir tanesinin çıkarılarak, geriye kalan $n_1 - 1 + n_2$ gözlem yardımıyla diskriminant fonksiyonu oluşturulur. Bu diskriminant fonksiyonu kullanılarak, çıkarılan gözlemin gruplardan birine atanması yapılır. Bu gözlem kendi grubuna da, diğer gruba da atanabilir. Bu işlem

Π_1 ' deki n_1 gözlemin her biri için n_1 defa tekrarlanır ve Π_2 ' ye atananların sayısı n_{21}^* belirlenir. Aynı işlem Π_2 grubu için de yapılarak, Π_1 ' e atananların sayısı n_{12}^* belirlenir. Böylece $\hat{\alpha}^U$ tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^U &= \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^U + \hat{\alpha}_2^U) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n_{21}^*}{n_1} + \frac{n_{12}^*}{n_2}\right)\end{aligned}\quad (4.19)$$

biçiminde elde edilir.

Bu tahmin edici $W(\underline{X})$ lineer diskriminant fonksiyonu kullanılarak elde edildiğinden, her bir gözlem çıkartıldıktan sonra yeni bir diskriminant fonksiyonu oluşturulacağından, her defasında yeni bir matris ters işlemi söz konusudur. Bu da oldukça çok işlem zamanı gerektirmektedir. Bunun için $n_1 + n_2$ gözlem kullanılarak oluşturulan diskriminant fonksiyonu yardımıyla, çıkarılan gözlem hariç geriye kalan $n_1 + n_2 - 1$ gözlem için tek bir matris ters işlemiyle diskriminant fonksiyonu oluşturulabilir. Böylece $\underline{X}_j$ gözlemi hariçken ve $W(\underline{X}_j)$, geriye kalan $n_1 + n_2 - 1$ gözlem kullanılarak hesaplandığında, $W(\underline{X})$ ' nin değeri $W(\underline{X}_j)$ ile gösterilir ve $W(\underline{X}_j)$, eğer $\underline{X}_j$, Π_1 ' de bir gözlem ise

$$\begin{aligned}W(\underline{X}_j / \Pi_1) &= \frac{n_1 + n_2 - 3}{n_1 + n_2 - 2} \left[\underline{X}_j - \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + \frac{\underline{X}_j + \bar{X}_1}{2(n_1 - 1)} \right]' S_{j1}^{-1} \\ &\quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \frac{\underline{X}_j + \bar{X}_1}{(n_1 - 1)}) , j = 1, \dots, n_1\end{aligned}\quad (4.20)$$

ve $\underline{X}_j$, Π_2 ' de bir gözlem ise

$$\begin{aligned}W(\underline{X}_j / \Pi_2) &= \frac{n_1 + n_2 - 3}{n_1 + n_2 - 2} \left[\underline{X}_j - \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + \frac{\underline{X}_j + \bar{X}_2}{2(n_2 - 1)} \right]' S_{j2}^{-1} \\ &\quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + \frac{\underline{X}_j + \bar{X}_2}{(n_2 - 1)}) , j = 1, \dots, n_2\end{aligned}\quad (4.21)$$

biçiminde elde edilir; burada,

$$S_j^{-1} = S^{-1} + \frac{n_i S^{-1} (\underline{X}_j + \overline{X}_i) (\underline{X}_j + \overline{X}_i)' S^{-1}}{(n_i - 1)(n_1 + n_2 - 2) - n_i (\underline{X}_j + \overline{X}_i)' S^{-1} (\underline{X}_j + \overline{X}_i)} \quad , \quad j = 1, \dots, n_i$$

$$i = 1, 2$$

dir. (4.20) ve (4.21) ifadeleri tek değişkenli durum için de geçerlidir.

4.5 $\bar{U}$ Tahmin Edicisi

Lachenbruch ve Mickey (1968) 'in önerdiği bir tahmin edicidir ve $\hat{\alpha}^{\bar{U}}$ ile gösterilir. Bu tahmin edici, normal kitlelere U tahmin edicisinin uygulanmasıyla bulunan değerler gözönüne alınarak hesaplanır. $\underline{X}_j$ gözlemleri yardımıyla hesaplanan $W(\underline{X}_j)$ değerlerinin ortalama ve varyansları $(\overline{W}_1, S_{w_1}^2)$ ve $(\overline{W}_2, S_{w_2}^2)$ olmak üzere, her bir kitle için hata oranı tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\alpha}_1^{\bar{U}} = \Phi \left\{ -\frac{\overline{W}_1}{S_{w_1}} \right\} \quad (4.22)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{\bar{U}} = 1 - \Phi \left\{ -\frac{\overline{W}_2}{S_{w_2}} \right\} \quad (4.23)$$

dir. Buradan

$$\hat{\alpha}^{\bar{U}} = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left\{ -\frac{\overline{W}_1}{S_{w_1}} \right\} - \Phi \left\{ -\frac{\overline{W}_2}{S_{w_2}} \right\} \right] \quad (4.24)$$

olarak elde edilir.

4.6 O Tahmin Edicisi

Normallik varsayımı altında Okamoto (1963) tarafından Bölüm 2 (2.62) ve (2.63) ile verilen hata oranları açılımlarında, bilinmeyen Δ^2 parametresi yerine D^2 tahmin edicisinin alınmasıyla elde edilen bir tahmin edicidir. Bu tahmin edici de $\hat{\alpha}^O$ ile gösterilmektedir.

Tek değişkenli normallik varsayımı altında, $\overline{X}_1 < \overline{X}_2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^o = \hat{\alpha}_2^o &= \Phi\left\{\frac{D}{2}\right\} - \phi\left\{\frac{D}{2}\right\} \frac{D}{16} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right] \\ &= \hat{\alpha}^o\end{aligned}\quad (4.25)$$

ve $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^o = \hat{\alpha}_2^o &= \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} \frac{D}{16} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right] \\ &= \hat{\alpha}^o\end{aligned}\quad (4.26)$$

olarak elde edilir (Sedransk ve Okamoto (1971)).

Çok değişkenli normallik varsayımı altında,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^o &= \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} \left\{ \frac{\left[\frac{D}{16} + \frac{3(p-1)}{4D}\right]}{n_1} + \frac{\left[\frac{D}{16} - \frac{(p-1)}{4D}\right]}{n_2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{D(p-1)}{4(n_1 + n_2)}\right] \right\}\end{aligned}\quad (4.27)$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_2^o &= \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} \left\{ \frac{\left[\frac{D}{16} + \frac{3(p-1)}{4D}\right]}{n_2} + \frac{\left[\frac{D}{16} - \frac{(p-1)}{4D}\right]}{n_1} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{D(p-1)}{4(n_1 + n_2)}\right] \right\}\end{aligned}\quad (4.28)$$

olarak elde edilir, buradan

$$\hat{\alpha}^o = \frac{1}{2} [\hat{\alpha}_1^o + \hat{\alpha}_2^o] \quad (4.29)$$

dır (Anderson (1984)). Eğer $n_1 = n_2$ ise $\hat{\alpha}_1^o = \hat{\alpha}_2^o$ dir

4.7 OS Tahmin Edicisi

Daha önce de verildiği gibi D^2 , Δ^2 'nin yanlı bir tahmin edicisi olduğundan, Δ^2 için yansız bir tahmin edici olan $(DS)^2$ gözönüne alındığında, O tahmin edicisinde D yerine DS alınarak $\hat{\alpha}^{OS}$ ile gösterilen OS tahmin edicisi elde edilmiş olur. Burada da tek ve çok değişkenli normallik varsayımları için sonuçlar verilebilir.

Tek değişkenli normallik varsayımı altında $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^{OS} = \hat{\alpha}_2^{OS} &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} - \phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \\ &\quad \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{16} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right] \\ &= \hat{\alpha}^{OS}\end{aligned}\tag{4.30}$$

ve $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^{OS} = \hat{\alpha}_2^{OS} &= \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} + \phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \\ &\quad \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 4}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{16} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right] \\ &= \hat{\alpha}^{OS}\end{aligned}\tag{4.31}$$

olarak elde edilir (Sedransk ve Okamoto (1971)).

Çok değişkenli normallik varsayımı altında,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1^{OS} &= \Phi \left\{ -\sqrt{c_1} \frac{D}{2} \right\} + \phi \left\{ -\sqrt{c_1} \frac{D}{2} \right\} \left\{ \frac{\left[\frac{\sqrt{c_1} D}{16} + \frac{3(p-1)}{4\sqrt{c_1} D} \right]}{n_1} + \frac{\left[\frac{\sqrt{c_1} D}{16} - \frac{(p-1)}{4\sqrt{c_1} D} \right]}{n_2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sqrt{c_1} D(p-1)}{4(n_1 + n_2)} \right] \right\}\end{aligned}\tag{4.32}$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{os} = \Phi\left\{-\sqrt{c_1} \frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{-\sqrt{c_1} \frac{D}{2}\right\} \left\{ \frac{\left[\frac{\sqrt{c_1} D}{16} + \frac{3(p-1)}{4\sqrt{c_1} D}\right]}{n_2} + \frac{\left[\frac{\sqrt{c_1} D}{16} - \frac{(p-1)}{4\sqrt{c_1} D}\right]}{n_1} + \left[\frac{\sqrt{c_1} D(p-1)}{4(n_1 + n_2)}\right] \right\} \quad (4.33)$$

olarak elde edilir, buradan

$$\hat{\alpha}^{os} = \frac{1}{2} [\hat{\alpha}_1^{os} + \hat{\alpha}_2^{os}] \quad (4.34)$$

dır, burada $c_1 = \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - p - 3}$ dir.

olarak elde edilir (Anderson (1984)). Eğer $n_1 = n_2$ ise $\hat{\alpha}_1^{os} = \hat{\alpha}_2^{os}$ dir.

4.8 L Tahmin Edicisi

Bölüm 2 (2.61) ve (2.62) de $\alpha_1(\hat{\xi})$ ve $\alpha_2(\hat{\xi})$ hata oranları için yaklaşık ifadeler elde edilmişti. Bu ifadelerde bilinmeyen Δ^2 parametresi yerine D^2 tahmin edicisi alınarak $\hat{\alpha}^L$ ile gösterilen L tahmin edicisi elde edilir (Lachanbruch (1968)).

Tek değişkenli normallik varsayımı altında L tahmin edicisi $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$ olduğunda

$$\hat{\alpha}_1^L = 1 - \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2} (D^2 - \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2 (D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.35)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^L = \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(-D^2 - \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.36)$$

dır ve $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$ olduğunda

$$\hat{\alpha}_1^L = \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(D^2 - \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.37)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^L = 1 - \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(-D^2 - \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.38)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$c_1 = \frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 4} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)^2}{(n_1 + n_2 - 4)(n_1 + n_2 - 6)}$$

dir. Böylece her iki durum için L tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^L = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^L + \hat{\alpha}_2^L) \quad (4.39)$$

dir.

Çok değişkenli normallik varsayımı altında iki kitle için hata oranları tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\alpha}_1^L = \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(D^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.40)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^L = \Phi \left\{ - \frac{\frac{c_1}{2} (D^2 + \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.41)$$

dir; burada, c_1 ve c_2 Bölüm 2 (2.54) ve (2.55) de verilen sabitlerdir. Buradan, toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\hat{\alpha}^L = \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_1^L + \hat{\alpha}_2^L) \quad (4.42)$$

olarak elde edilir. Eğer $n_1 = n_2$ ise $\hat{\alpha}_1^L = \hat{\alpha}_2^L$ dir.

4.9 LS Tahmin Edicisi

D^2 , Δ^2 için yanlı bir tahmin edici olduğundan, Δ^2 'nin yansız bir tahmin edicisi olan $(DS)^2$ gözönüne alındığında $\hat{\alpha}^{LS}$ ile gösterilen LS tahmin edicisi elde edilir (Lachanbruch (1968)). Bu tahmin edici için de tek ve çok değişkenli normallik için sonuçlar verilebilir. Tek değişkenli normallik varsayımı altında LS tahmin edicisi $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$ olduğunda

$$\hat{\alpha}_1^{LS} = 1 - \Phi \left\{ - \frac{\frac{1}{2} (D^2 - c_1 \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.43)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{LS} = \Phi \left\{ - \frac{\frac{1}{2} (-D^2 - c_1 \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.44)$$

dir ve $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$ olduğunda

$$\hat{\alpha}_1^{LS} = \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 - c_1 \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.45)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{LS} = 1 - \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(-D^2 - c_1 \frac{(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.46)$$

olarak bulunur, burada c_1 ve c_2 , L tahmin edicisinde verilen sabitlerdir ve toplam hatalı sınıflandırma olasılığı benzer biçimde

$$\hat{\alpha}^{LS} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^{LS} + \hat{\alpha}_2^{LS}) \quad (4.47)$$

dir.

Çok değişkenli normallik varsayımı altında hata oranı tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\alpha}_1^{LS} = \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 - c_1 \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.48)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{LS} = \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 + c_1 \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.49)$$

dir. Buradan LS tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{LS} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^{LS} + \hat{\alpha}_2^{LS}) \quad (4.50)$$

Olarak elde edilir; burada, c_1 ve c_2 Bölüm 2 (2.54) ve (2.55) de verilen sabitlerdir.

Eğer $n_1 = n_2$ ise $\hat{\alpha}_1^{LS} = \hat{\alpha}_2^{LS}$ dir.

4.10 M Tahmin Edicisi

McLachlan (1974b), $\hat{\alpha}^M$ ile gösterilen ve asimptotik yansız bir tahmin edici olan M tahmin edicisini tanımlamıştır. M tahmin edicisi için hata oranları

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1^M = & \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{\frac{D}{2}\right\} \left\{ \frac{p-1}{n_1 D} + \frac{D[4(4p-1)-D^2]}{32(n_1+n_2-2)} \right. \\ & + \frac{D(p-1)(p-2)}{4n_1^2} + \frac{(p-1)[-D^3+8D(2p+1)+16/D]}{64n_1(n_1+n_2-2)} \\ & \left. + \frac{D[3D^6-4(24p+7)D^4+16(48p^2-48p-53)D^2+192(-8p+15)]}{12288(n_1+n_2-2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2^M = & \Phi\left\{-\frac{D}{2}\right\} + \phi\left\{\frac{D}{2}\right\} \left\{ \frac{p-1}{n_2 D} + \frac{D[4(4p-1)-D^2]}{32(n_1+n_2-2)} \right. \\ & + \frac{D(p-1)(p-2)}{4n_2^2} + \frac{(p-1)[-D^3+8D(2p+1)+16/D]}{64n_2(n_1+n_2-2)} \\ & \left. + \frac{D[3D^6-4(24p+7)D^4+16(48p^2-48p-53)D^2+192(-8p+15)]}{12288(n_1+n_2-2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

olarak bulunur, buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\hat{\alpha}^M = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^M + \hat{\alpha}_2^M) \quad (4.53)$$

dir. Eğer $n_1 = n_2$ ise $\hat{\alpha}_1^M = \hat{\alpha}_2^M$ dir.

4.11 H Tahmin Edicisi

Lachenbruch (1967) ve Toussaint (1974) de $\hat{\alpha}^H$ ile gösterilen H (Holdout) tahmin edicisini tanımlamışlardır. Π_1 ' den alınan n_1 birimlik ve Π_2 ' den alınan n_2 birimlik rasgele örneklem, rasgele olarak iki alt gruba ayrılır. Bu alt gruplardan birine holdout

örnekleme adı verilir. Böylece herbir grup için holdout örneklem hacimleri sırasıyla $n_1^* = \frac{n_1}{2}$ ve $n_2^* = \frac{n_2}{2}$ dir. Ancak herbir grup için elde edilen, holdout örnekleme ile diğer alt grubun (holdout örnekleme girmeyen gözlemlerin oluşturduğu alt grup) gözlem sayısı her zaman eşit olmak zorunda değildir. Diskriminant fonksiyonu, holdout örnekleme dışında kalan gözlemler kullanılarak elde edilir. Π_1 ' deki n_1^* ve Π_2 ' deki n_2^* hacimli holdout örneklemelerindeki gözlemlerin, elde edilen diskriminant fonksiyonu yardımıyla yeniden atanması yapılır. Bu atama işlemi sırasında, gözlemin alındığı kitleden başka bir kitleye atanması yapılabilir. Π_1 ' deki n_1^* gözlemden Π_2 ' ye atananların sayısı n_{21}^* ve Π_2 deki n_2^* gözlemden Π_1 ' e atananların sayısı n_{12}^* olmak üzere, herbir grup için H tahmin edicileri

$$\hat{\alpha}_1^H = \frac{n_{21}^*}{n_1^*} \quad (4.54)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^H = \frac{n_{12}^*}{n_2^*} \quad (4.55)$$

olarak elde edilir, buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı için H tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^H = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^H + \hat{\alpha}_2^H) \quad (4.56)$$

dir.

4.12 2H Tahmin Edicisi

2H tahmin edicisinin mantığı, H tahmin edicisiyle aynıdır. H tahmin edicisinde olduğu gibi, Π_1 ' den alınan n_1 ve Π_2 ' den alınan n_2 hacimli rasgele örneklemeler, rasgele olarak iki alt gruba ayrılır ve gruplardan birine holdout örnekleme adı verilir. Burada da alt grupların gözlem sayıları eşit olmak zorunda değildir. İlk olarak holdout örnekleme dışında kalan gözlemler kullanılarak diskriminant fonksiyonu oluşturulur ve hata oranları, holdout örneklemelerindeki gözlemlere göre bulunur. Daha sonra holdout örneklemelerindeki gözlemler kullanılarak diskriminant fonksiyonu oluşturulur ve hata oranları holdout örneklemeleri dışında kalan gözlemlere göre hesaplanır. Böylece herbir grup için 2H tahmin edicileri, yukarıda elde edilen hata oranlarının ortalaması alınarak bulunur (Toussaint (1974)).

Holdout örneklemeleri dışında kalan örneklemelerden, Π_1 ' den Π_2 ' ye hatalı atanan gözlem sayısı n_{21}^{**} ve Π_2 ' den Π_1 ' e hatalı atanan gözlem sayısı n_{12}^{**} ise, herbir alt grup için hata oranları

$$\hat{\alpha}^H = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^H + \hat{\alpha}_2^H) \quad (4.57)$$

ve

$$\hat{\alpha}^{H^*} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_1^{H^*} + \hat{\alpha}_2^{H^*}) \quad (4.58)$$

biçiminde elde edilir, buradan 2H tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{2H} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}^H + \hat{\alpha}^{H^*}) \quad (4.59)$$

olarak bulunur, burada $\hat{\alpha}_1^H$ ve $\hat{\alpha}_2^H$ (4.54) ve (4.55) eşitliklerinde verilen değerler ve

$$\hat{\alpha}_1^{H^*} = \frac{n_{21}^{**}}{n_1 - n_1^*} \quad (4.60)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2^{H^*} = \frac{n_{12}^{**}}{n_2 - n_2^*} \quad (4.61)$$

dir.

4.13 KH Tahmin Edicisi

KH tahmin edicisi, H tahmin edicisinin K tane alt grup için genelleştirilmesiyle elde edilir. Bu tahmin edicide, Π_1 ' den alınan n_1 ve Π_2 ' den alınan n_2 hacimli rasgele örneklemeler, rasgele olarak eşit büyüklükte K tane alt gruba ayrılır. Burada n_1 ve n_2 örneklem hacimlerinin K ' ya tam bölünebilir olması gerekir. Elde edilen alt gruplardan biri holdout örneklemi olmak üzere, tekrar iki alt gruba ayrılır. Böylece $i = 1, 2, \dots, K$

için, holdout örneklem hacimleri Π_1 kitlesi için $n_{1i}^* = \frac{n_1}{K}$ ve Π_2 kitlesi için $n_{2i}^* = \frac{n_2}{K}$ dır. K

tane alt grubun herbiri için, holdout örneklemeleri dışında kalan gözlemler yardımıyla diskriminant fonksiyonları oluşturulur ve bu fonksiyonlar kullanılarak holdout örneklemelerindeki gözlemlerin atanmasıyla, herbir alt grup için hata oranları belirlenir. Böylece K tane hata oranının ortalaması alınarak, KH tahmin edicisi bulunur. 2H tahmin edicisindeki mantık, bu tahmin edici için de geçerlidir. KH tahmin edicisinde, her bir kitle için örneklem hacimlerinin yeterince büyük olması gerekmektedir.

Eğer Π_1 'deki i 'inci alt gruba ait holdout örneklemindeki n_{1i}^* gözlemden, Π_2 'deki i 'inci alt gruba atanınların sayısı n_{21i}^* ve Π_2 'deki i 'inci alt gruba ait holdout örneklemindeki n_{2i}^* gözlemden, Π_1 'deki i 'inci alt gruba atanınların sayısı n_{12i}^* ise, herbir alt grup için hata oranları

$$\hat{\alpha}_{1i}^{KH} = \frac{n_{21i}^*}{n_{1i}^*} \quad (4.62)$$

ve

$$\hat{\alpha}_{2i}^{KH} = \frac{n_{12i}^*}{n_{2i}^*} \quad (4.63)$$

olarak bulunur. Buradan i 'inci alt grup için toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\hat{\alpha}_i^{KH} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{1i}^{KH} + \hat{\alpha}_{2i}^{KH}) \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.64) ifadesinin ortalaması alınarak

$$\hat{\alpha}^{KH} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\alpha}_i^{KH} \quad (4.65)$$

KH tahmin edicisi elde edilmiş olur (Toussaint (1974)).

$n_{1i}^* = \frac{n_1}{K}$ ve $n_{2i}^* = \frac{n_2}{K}$ eşitlikleri gözönüne alınırsa KH tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{KH} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \left(\frac{n_{21i}^*}{n_1} + \frac{n_{12i}^*}{n_2} \right) \quad (4.66)$$

biçiminde de elde edilebilir.

4.14 Düzlenmiş Tahmin Ediciler

Glick (1978), Π_1 ve Π_2 kitleleri için hata oranları tahmin edicilerini, sayma türü tahmin ediciler türünden aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} h_1(\underline{X}_j) \quad (4.67)$$

ve

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} h_2(\underline{X}_j) \quad (4.68)$$

burada $0 \leq h(\underline{X}_j) \leq 1$ ($j=1,2,\dots,n_i$ ve $i=1,2$) dir. Böylece yeniden yerine koyma tahmin edicisi R için $\hat{\xi}$ kuralı kullanıldığında Π_1 ' den alınan $\underline{X}_j$ gözlemi; Π_2 ' ye atanırsa $h_1(\underline{X}_j) = 1$, Π_1 ' e atanırsa $h_1(\underline{X}_j) = 0$ değerini alır. Tek gözlemin atıldığı (leave-one-out) U tahmin edicisi için $\hat{\xi}_j$ kuralı kullanılarak, R tahmin edicisi mantığıyla $h_i(\underline{X}_j)$ değeri hesaplanır ($i=1,2$). Sayma türü tahmin edicilerin büyük varyanslı olması h ' nın bir gösterge fonksiyonu olmasındandır. $\underline{X}_j$ ' deki çok küçük değişiklik, $h(\underline{X}_j)$ de büyük değişikliğe neden olur.

Glick, $\underline{X}_j$ ' nin hatalı atanıp, atanmamasına karar verirken, bu kararın doğruluğu için basamak fonksiyonu yerine, düzlenmiş fonksiyonu önermiştir. $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ olduğunda tek değişkenli normallik için

$$g(X_j) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{[X_j - (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2]}{S} \leq -b \\ \frac{1}{2} - \frac{[X_j - (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2]}{2bS} & , \quad -b < \frac{[X_j - (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2]}{S} < b \\ 0 & , \quad \frac{[X_j - (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2]}{S} \geq b \end{cases} \quad (4.69)$$

olarak tanımlamıştır ve bu fonksiyona düzgün kayma (smooth slide) fonksiyonu adını vermiştir. Burada kaymanın genişliği b (-1/2, 1/2) olarak seçilmiştir. Ayrıca düzlenmiş tahmin edicinin yan ve varyansının, R tahmin edicisinden daha küçük olduğunu bulmuştur.

Glick, aynı $g(X_j)$ ' yi normal düzleme fonksiyonu olarak

$$g(X_j) = \Phi \left\{ \frac{\left[\frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) - X_j \right]}{bS} \right\} \quad (4.70)$$

biçiminde önermiştir, burada bir sabit olan b , oldukça karışık bir düzleme fonksiyonudur.

4.14.1 Düzlenmiş Tahmin Edicilerin Elde Edilmesi

Glick (1978), normallik varsayımı olmadığında, parametrik tahmin edicilerin yanının büyük değişkenlik göstermesi, pratik durumlar için parametrik olmayan tahmin edicilerin tercih edilebilirliği, parametrik olmayan tahmin ediciler karşılaştırıldığında hem yan hem de varyansın düşünülmesi gerektiğini ve U tahmin edicisinin, R tahmin edicisinin yanını indirgemesine rağmen varyansını büyüteceği sorunlarından dolayı yeni bir tahmin edici sınıfı olan düzlenmiş sayma tahmin edicilerini önermiştir. Burada amaç R tahmin edicisinin varyansını indirmektedir. Alt kesim 4.14 ' de verilen düzgün kayma ve normal düzleme tahmin edicilerini önermiştir. Düzleme sadece varyansı küçültmek için yapıldığından, büyük varyanslı ancak küçük yanlı bir sayma tahmin edicisine uygulanması oldukça etkili olacaktır.

$h(\underline{X})$ fonksiyonu, dört tür düzlenmiş tahmin edicinin her biri için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Snappin (1983)). Burada elde edilen sonuçlar Glick (1978) ' in tek değişkenli durum için bulduğu sonuçların çok değişkenli duruma genellenmesidir.

Düzgün kaydırma yeniden yerine koyma metoduna uygulanırsa, her iki kitle için

$$h_1^{RS}(\underline{X}_j) = \begin{cases} 1 & , \quad W(\underline{X}_j) \leq -bD \\ 0 & , \quad W(\underline{X}_j) \geq bD \\ \frac{[W(\underline{X}_j) + bD]}{2bD} & , \quad -bD < W(\underline{X}_j) < bD \end{cases} \quad (4.71)$$

ve

$$h_2^{RS}(\underline{X}_j) = \begin{cases} 0 & , \quad W(\underline{X}_j) \leq -bD \\ 1 & , \quad W(\underline{X}_j) \geq bD \\ \frac{[W(\underline{X}_j) + bD]}{2bD} & , \quad -bD < W(\underline{X}_j) < bD \end{cases} \quad (4.72)$$

olarak elde edilir; burada, $W(\underline{X})$ örneklem lineer diskriminant fonksiyonu ve D^2 örneklem Mahalanobis uzaklığı daha önceki bölümlerde verilmişti ve $k = 0$ alınmıştır. Buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı için RS tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{RS} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} h_1^{RS}(\underline{X}_j) + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} h_2^{RS}(\underline{X}_j) \right] \quad (4.73)$$

olarak elde edilir.

Düzgün kaydırma tek gözlemin atılması (leave-one-out) metoduna uygulanırsa her iki kitle için

$$h_i^{US}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_i) = h_i^{RS}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_i^*) \quad (4.74)$$

biçiminde elde edilir ($i=1,2$); burada, $\underline{\bar{X}}_i^* = \frac{n_i \bar{X}_i - \underline{X}_j}{n_i - 1}$ Π_i ' den $\underline{X}_j$ değeri çıkartıldıktan sonra, geriye kalan $n_i - 1$ gözlemin örneklem ortalamasıdır. Böylece $\hat{\alpha}^{US}$ tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{US} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1 - 1} h_1^{US}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_1) + \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2 - 1} h_2^{US}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_2) \right] \quad (4.75)$$

veya

$$\hat{\alpha}^{US} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1 - 1} h_1^{RS}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_1^*) + \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2 - 1} h_2^{RS}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_2^*) \right] \quad (4.76)$$

olarak elde edilir.

Normal düzleme yeniden yerine koyma metoduna uygulanırsa

$$h_1^{RN}(\underline{X}_j) = \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{bD} \right\} \quad (4.77)$$

ve

$$h_2^{RN}(\underline{X}_j) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{bD} \right\} \quad (4.78)$$

dır ve buradan $\hat{\alpha}^{RN}$ tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{RN} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} h_1^{RN}(\underline{X}_j) + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} h_2^{RN}(\underline{X}_j) \right] \quad (4.79)$$

olarak elde edilir.

Normal düzleme tek gözlemin atılması yöntemine uygulanır ise,

$$h_i^{UN}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_i) = h_i^{RN}(\underline{X}_j; \underline{\bar{X}}_i^*) \quad (4.80)$$

elde edilir ($i=1,2$), burada $\underline{\bar{X}}_i^*$ (4.74) ifadesinde verilen değerdir. Böylece $\hat{\alpha}^{UN}$ tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{UN} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1-1} h_1^{UN}(\underline{X}_j; \bar{X}_1) + \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2-1} h_2^{UN}(\underline{X}_j; \bar{X}_2) \right] \quad (4.81)$$

veya

$$\hat{\alpha}^{UN} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1-1} h_1^{RN}(\underline{X}_j; \bar{X}_1^*) + \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2-1} h_2^{RN}(\underline{X}_j; \bar{X}_2^*) \right] \quad (4.82)$$

biçiminde elde edilir.

$b = 0$ alınırsa, RS ve RN tahmin edicileri R tahmin edicisine, US ve UN tahmin edicileri U tahmin edicisine indirgenmiş olur. Bu tahmin edicilerin bulunması için b sabitinin belirlenmesi gerekir. Snapinn (1983) çalışmasında, bu dört düzlenmiş tahmin edici için, b sabitinin gelişi güzel bir kaç değerini gözönüne alarak sonuçlar elde etmiştir.

b sabitinin değeri 0 ' dan artıkcı, RS ve RN düzlenmiş tahmin edicilerin beklenen değeri monoton olarak 1/2 ' ye ve varyansı monoton olarak 0 ' a yaklaşır. Düzlenmiş tahmin ediciler her zaman R tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahiptir ve b ' nin büyük değeri için bu varyans daha da küçölür. Bu nedenle düzlenmiş tahmin ediciler her zaman R tahmin edicisinden daha iyidir (Snapinn (1983)).

Beklenen gerçek hata oranına göre R tahmin edicisi iyimser yanlıdır (Hills (1966)). Beklenen gerçek hata oranı 1/2 ' den küçük ise, düzlenmiş tahmin ediciler, b ' nin b^* gibi bir değeri kadar artırıldığında daha az iyimser yanlı olacaktır. Tahmin edicilerin herbiri için b^* ' ın değeri farklıdır. Beklenen gerçek hata oranı 1/2 ' ye yakın veya örneklem hacimleri küçük ise b^* ' ın değeri büyük ve beklenen gerçek hata oranı 1/2 ' den uzak veya örneklem hacimleri büyük ise b^* ' ın değeri küçüktür (Snapinn (1983)).

Bir sabit olan düzleme seviyesi b ' ye, tahmin ediciye sağlamlılık (robustness) kazandıran bir değeri olarak bakılabilir.

Buraya kadar verilen sonuçlar, örneklem hacimlerinin ve prior olasılıkların eşit olduğu durumlar içindir. Örneklem hacimlerinin ve prior olasılıkların eşit olmadığı durumlar için de sonuçlar elde edilebilir (Snapinn (1983)).

4.14.2 NS Tahmin Edicisi

Düzlemenin amacı, R tahmin edicisinin koşulsuz hata kare ortalaması (UMSE) değeri maksimum düzeyde indirgeyecek örneklem hacimlerine ve gözlem vektörünün boyutuna bağlı düzleme seviyesi b ' nin belirlenmesidir. Snapinn (1983), bu indirgemeyi maksimum yapan özel bir tahmin edici olan NS tahmin edicisini tanımlamıştır.

$E(\hat{\alpha}^S / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s)$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ve s verildiğinde her hangi bir düzlenmiş tahmin edicinin beklenen değerini gösterebilir. b 'nin küçük değeri için, R tahmin edicisinin hem yanı, hem de varyansı aynı anda indirgenmektedir. Bu nedenle, düzleme sabitinin elde edilmesi için birinci yol, $E(\hat{\alpha}^S / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s)$ ifadesinin beklenen gerçek hata oranına eşitlenerek, b değerinin bulunmasıdır. Ancak bu hata oranı bilinmeyen parametrelerin bir fonksiyonu olduğundan kullanışlı değildir. b 'nin bulunması için ikinci yol, $E(\hat{\alpha}^S / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s)$ ifadesinin, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ve s 'ye koşullandırılmış başka bir hata oranı tahmin edicisinin beklenen değerine eşitlenmesidir. Bu tahmin edicinin beklenen değeri bilinmeyen parametrelerden bağımsız olmalı ve R tahmin edicisinden daha küçük yana sahip olmalıdır.

D ve DS tahmin edicileri, R Tahmin edicisinden daha küçük yana sahip tahmin edicilerdir. Böylece b 'nin belirlenmesi için bu tahmin ediciler kullanılabilir. $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ve s verildiğinde, D ve DS tahmin edicileri birer sabit olacağından, normallik varsayımı altında koşullu beklenen değerleri sırasıyla

$$E(\hat{\alpha}^D / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\} \quad (4.83)$$

ve

$$E(\hat{\alpha}^{DS} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - p - 3}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} \quad (4.84)$$

dir.

Düzlenmiş tahmin ediciler, bağımsız örneklem gözlemlerinin bir fonksiyonunun ortalaması olduğunda, normal düzlemenin R tahmin edicisine uygulanmasıyla Π_1 'den rasgele bir gözlemin hatalı atanması durumunda elde edilen RN tahmin edicisi için

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}^{RN} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) &= E[h^{RN}(\underline{X})] \\ &= E \left[\Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X})}{bD} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

dir. Böylece RN tahmin edicisinin koşullu beklenen değeri yaklaşık olarak, $\underline{X}$, Π_1 'den rasgele bir gözlem ise

$$E(\hat{\alpha}^{RN} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s, \Pi_1) \cong \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1}{n_1 b_1^2 + n_1 - 1}} \frac{D}{2} \right\} \quad (4.86)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 'den rasgele bir gözlem ise

$$E(\hat{\alpha}^{RN} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s, \Pi_2) \cong 1 - \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_2}{n_2 b_2^2 + n_2 - 1}} \frac{D}{2} \right\} \quad (4.87)$$

dir.

Böylece D tahmin edicisinin beklenen değeri, RN tahmin edicisinin beklenen değerine eşitlendiğinde $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1}{n_1 b_1^2 + n_1 - 1}} \frac{D}{2} \right\}$$

$$1 = \frac{n_1}{n_1 b_1^2 + n_1 - 1}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{n_1}} \quad (4.88)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{D}{2} \right\} = 1 - \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_2}{n_2 b_2^2 + n_2 - 1}} \frac{D}{2} \right\}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{n_2}} \quad (4.89)$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde DS tahmin edicisi kullanıldığında $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1 + n_2 - p - 3}{n_1 + n_2 - 2}} \frac{D}{2} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1}{n_1 b_1^2 + n_1 - 1}} \frac{D}{2} \right\}$$

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 3}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1}{n_1 b_1^2 + n_1 - 1}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_1 = \sqrt{\frac{(p+2)(n_1-1) + (n_2-1)}{n_1(n_1 + n_2 - p - 3)}} \quad (4.90)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi\left\{-\sqrt{\frac{n_1+n_2-p-3}{n_1+n_2-2}}\frac{D}{2}\right\}=1-\Phi\left\{-\sqrt{\frac{n_2}{n_2b_2^2+n_2-1}}\frac{D}{2}\right\}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_2 = \sqrt{\frac{(p+2)(n_2-1)+(n_1-1)}{n_2(n_1+n_2-p-3)}} \quad (4.91)$$

dir. Eğer $n_1 = n_2$ ise her iki durum için $b_1 = b_2 = b$ dir.

DS tahmin edicisine göre bulunan düzleme sabiti, D tahmin edicisine göre bulunan düzleme sabitinden daha iyi sonuçlar vermektedir. D tahmin edicisine göre elde edilen düzleme sabitinin kullanıldığı tahmin edicinin UMSE değeri, her zaman R tahmin edicisinden daha küçüktür. DS tahmin edicisine göre elde edilen düzleme sabitini kullanan tahmin edici, D tahmin edicisine göre elde edilen düzleme sabitini kullanan tahmin ediciden daha büyük düzleme seviyesine sahip olduğundan, DS ' ye göre elde edilen düzleme sabitinin değeri, D ' ye göre elde edilen düzleme sabitinden daha büyüktür. Bu nedenle DS ' ye göre elde edilen düzleme sabiti kullanıldığında, düzlemeye göre UMSE ' deki indirgeme miktarı daha büyüktür. Böylece NS tahmin edicisi olarak adlandırılan bu tahmin edici için

$$h_1^{NS}(\underline{X}_j) = \Phi\left\{-\sqrt{\frac{n_1(n_1+n_2-p-3)}{(p+2)(n_1-1)+(n_2-1)}}\frac{W(\underline{X}_j)}{D}\right\} \quad (4.92)$$

ve

$$h_2^{NS}(\underline{X}_j) = 1 - \Phi\left\{-\sqrt{\frac{n_2(n_1+n_2-p-3)}{(p+2)(n_2-1)+(n_1-1)}}\frac{W(\underline{X}_j)}{D}\right\} \quad (4.93)$$

dir. Buradan toplam hatalı sınıflandırma olasılığı için NS tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{NS} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}h_1^{NS}(\underline{x}_j) + \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}h_2^{NS}(\underline{x}_j)\right) \quad (4.94)$$

olarak bulunur (Snapinn (1983)).

Snapinn, tek ve çok değişkenli normal dağılım ailelerini gözönüne alarak düzenlenmiş tahmin edici NS ile D, DS, R ve U tahmin edicilerini UMSE değerlerine göre karşılaştırmıştır.

Tek değişkenli normallik varsayımı altında, örneklem hacimleri artığında bu beş tahmin edicinin hepsinin de UMSE değeri düşmektedir. NS tahmin edicisinin UMSE

değeri, D ve DS tahmin edicilerinden büyük, U ve R tahmin edicilerinden daha küçüktür. Ancak örneklem hacmi beş ve $\Delta < 1$ ise NS tahmin edicisinin UMSE değeri D tahmin edicisinden daha küçüktür. Örneklem hacimleri küçük olduğunda NS tahmin edicisinin UMSE değeri R tahmin edicisinden parametrik tahmin edicilere daha yakındır. Ancak örneklem hacimleri büyük olduğunda tam tersi gözlenmiştir. Örneklem hacimleri arttığında, parametrik tahmin ediciler ile NS tahmin edicisinin UMSE değerleri arasındaki fark, NS ve R tahmin edicilerinin UMSE değerleri arasındaki farka göre daha artmaktadır. Bu sonuç, düzlemenin R tahmin edicisini daha iyi geliştirdiğini göstermektedir.

Çok değişkenli normallik varsayımı altında, elde edilen sonuçlar tek değişkenli durumda elde edilen sonuçlara oldukça benzemektedir. Örneklem hacimleri küçük olduğunda, NS ve DS tahmin edicilerinin UMSE değerleri birbirine oldukça yakın ve her ikisinin UMSE değeri D ve R tahmin edicilerinin UMSE değerlerinden daha küçüktür. Örneklem hacimleri büyük olduğunda, NS tahmin edicisinin UMSE değeri, R tahmin edicisinden küçük ve DS tahmin edicisinden büyüktür. $p = 3$ için, NS tahmin edicisinin UMSE değeri D tahmin edicisinden daha büyük ancak $p = 5$ için daha küçüktür. Daha detaylı sonuçlar Snapinn (1983) 'de bulunabilir.

4.14. 3 NSL ve NSLS Tahmin Edicileri

Bu alt bölümde, Snapinn (1983) tarafından önerilen NS tahmin edicisinin elde edilmesi mantığına dayalı önerilen iki yeni düzlenmiş tahmin edici olan NSL ve NSLS tahmin edicileri verilmeye çalışılacaktır. Bu tahmin ediciler (4.8) ve (4.9) alt kesimlerinde verilen L ve LS tahmin edicileri göz önüne alınarak elde edilmişlerdir. $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ve s verildiğinde L ve LS tahmin edicileri birer sabit olacağından, normallik varsayımı altında L ve LS tahmin edicilerinin beklenen değerleri sırasıyla $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir gözlem ise

$$E(\hat{\alpha}_1^L / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2}(D^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2(D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.95)$$

ve

$$E(\hat{\alpha}_1^{LS} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 - \frac{c_1 p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.96)$$

dir ve $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir gözlem ise

$$E(\hat{\alpha}_2^L / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2} (D^2 + \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.97)$$

ve

$$E(\hat{\alpha}_2^{LS} / \bar{x}_1, \bar{x}_2, s) = \Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2} (D^2 + \frac{c_1 p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1} (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} \quad (4.98)$$

dir; burada, c_1 ve c_2 (2.54) ve (2.55) de verilen sabitlerdir. Normal düzlemenin R tahmin edicisine uygulanması ile elde edilen RN tahmin edicisinin, (4.86) ve (4.87) eşitlikleri ile verilen beklenen değer ifadelerinin L ve LS tahmin edicilerinin beklenen değerlerine eşitlenmesiyle düzleme sabiti b için farklı değerler elde edilmiş olur. b ' nin bu değerleri göz önüne alınarak NSL ve NSLS tahmin edicileri elde edilmiş olur.

L tahmin edicisi göz önüne alındığında $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2} (D^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1}{n_1 b_1^2 + (n_1 - 1)}} \frac{D}{2} \right\}$$

$$n_1 b_1^2 + (n_1 - 1) = \sqrt{n_1} D^2 \frac{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}{\left[c_1 (D^2 - \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2}) \right]^2}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_1 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 c_2 D^2 [n_1 n_2 D^2 + p(n_1 + n_2)]}{[c_1 (n_1 n_2 D^2 - p(n_2 - n_1))]^2} - \frac{n_1 - 1}{n_1}} \quad (4.99)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{\frac{c_1}{2} (D^2 + \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_2}{n_2 b_1^2 + (n_2 - 1)}} \frac{D}{2} \right\}$$

$$n_2 b_1^2 + (n_2 - 1) = \sqrt{n_2} D^2 \frac{c_2 (D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}{[c_1 (D^2 + \frac{p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})]^2}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_2 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 c_2 D^2 [n_1 n_2 D^2 + p(n_1 + n_2)]}{[c_1 (n_1 n_2 D^2 + p(n_2 - n_1))]^2} - \frac{n_2 - 1}{n_2}} \quad (4.100)$$

olarak bulunur. Buradan NSL tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{NSL} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} h_1^{NSL}(\underline{X}_j) + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} h_2^{NSL}(\underline{X}_j) \right) \quad (4.101)$$

dir, burada,

$$h_1^{NSL}(\underline{X}_j) = \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{b_1 D} \right\}$$

ve

$$h_2^{NSL}(\underline{X}_j) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{b_2 D} \right\}$$

dir. Eğer $n_1 = n_2$ ise $b_1 = b_2$ dir.

Aynı şekilde LS tahmin edicisi için $\underline{X}$, Π_1 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 - \frac{c_1 p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1}(D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_1}{n_1 b_1^2 + (n_1 - 1)}} \frac{D}{2} \right\}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_1 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 c_2 D^2 [n_1 n_2 D^2 + p(n_1 + n_2)]}{c_1 [(n_1 n_2 D^2 - c_1 p(n_2 - n_1))]^2} - \frac{n_1 - 1}{n_1}} \quad (4.102)$$

ve $\underline{X}$, Π_2 ' den rasgele bir gözlem ise

$$\Phi \left\{ -\frac{\frac{1}{2}(D^2 + \frac{c_1 p(n_2 - n_1)}{n_1 n_2})}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1}(D^2 + \frac{p(n_1 + n_2)}{n_1 n_2})}} \right\} = \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{n_2}{n_2 b_2^2 + (n_2 - 1)}} \frac{D}{2} \right\}$$

eşitliğinden düzleme sabiti

$$b_2 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 c_2 D^2 [n_1 n_2 D^2 + p(n_1 + n_2)]}{c_1 [(n_1 n_2 D^2 + c_1 p(n_2 - n_1))]^2} - \frac{n_2 - 1}{n_2}} \quad (4.103)$$

olarak bulunur. Buradan NSLS tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}^{NSLS} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} h_1^{NSLS}(\underline{X}_j) + \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} h_2^{NSLS}(\underline{X}_j) \right) \quad (4.104)$$

dir, burada

$$h_1^{NSLS}(\underline{X}_j) = \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{b_1 D} \right\}$$

ve

$$h_2^{NSLS}(\underline{X}_j) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{W(\underline{X}_j)}{b_2 D} \right\}$$

dir. Burada da eğer $n_1 = n_2$ ise $b_1 = b_2$ dir. Bu tahmin edicilerin değerlendirilmesi Bölüm 5 ' de verilecektir.

4.15 Jacknife ve Bootstrap Tahmin Edicileri

Daha önceki alt kesimlerde verilen tahmin yöntemlerine Jacknife ve Bootstrap tekniklerinin uygulanmasıyla(Efron (1979, 1983)) , Jacknife ve Bootstrap tahmin edicileri elde edilmiş olur. Literatürde, yan indirgeme teknikleri olarak bilinen bu tahmin edicilerin, küçük örneklem durumlarında uygulanması mantıklıdır.

Jacknife yönteminde, Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli örneklemdeki toplam $n_1 + n_2$ gözlemden her defasında bir gözlemin çıkarılmasıyla geriye kalan $n_1 + n_2 - 1$ tane gözlem kullanılarak her hangi bir tahmin edici tekniğine göre, hata oranı tahmin edilir. Bu işlem $n_1 + n_2$ gözlemin herbiri için tekrarlanarak $n_1 + n_2$ tane hata oranı tahmini elde edilmiş olur. Buradan Jacknife tahmin edicisi, elde edilen bu $n_1 + n_2$ tane tahmin değerinin toplamının $n_1 + n_2$ 'ye oranlanmasıyla elde edilmiş olur.

Bootstrap yönteminde ise, Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan n_1 ve n_2 hacimli örneklemekten iadeli olarak çekiliş yapılarak n_1 ve n_2 hacimli yeni örneklemeler oluşturulur. Bu yeni örneklemeler yardımıyla, her hangi bir tahmin edici için hata oranı tahmin edilir. Bu işlem Bootstrap tekrar sayısı olan B defa tekrarlanarak, B tane hata oranı tahmin değeri bulunur. Böylece Bootstrap tahmin edicisi, elde edilen bu B tane tahmin değerinin B 'ye oranlanmasıyla tahmin edilmiş olur. Bootstrap tahmin edicisinin değişik modifikasyonları da söz konusudur. Jacknife ve Bootstrap teknikleri için Efron (1979, 1983), Efron ve Gong (1983) 'ın çalışmalarına bakılabilir.

Jacknife ve Bootstrap yöntemleri gerçek verilere uygulandığında anlam kazanmaktadır. Bu çalışmada gerçek veriler ile çalışılmadığından, Jacknife ve Bootstrap yöntemleri göz önüne alınmayacaktır. İleriki çalışmalarda gerçek veriler kullanılarak, Jacknife ve Bootstrap tahmin edicilerinin diğer tahmin edicilere göre değerlendirilmesi verilebilir.

BÖLÜM 5

TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, tahmin edicileri karşılaştırma ölçütleri ve daha önceki çalışmalardan tahmin ediciler için elde edilen sonuçlar verildikten sonra tek ve çok değişkenli normal kitleler için dördüncü bölümde verilen tahmin edicilerin 2H ve KH dışındaki hepsinin simülasyon ile karşılaştırılması yapılmaktadır. Buradaki sonuçlar her bir kitlede eşit gözlem olması durumunda farklı örneklem hacimlerine ve farklı Mahalanobis kitle uzaklıklarına göre, koşulsuz hata kare ortalaması (UMSE) ölçütü ile yapılmaktadır. Ayrıca tek değişkenli gamma dağılımına ve tek değişkenli normal dağılıma sahip kitleler için de yine her bir kitlede eşit gözlem olması durumunda farklı örneklem hacimlerine ve farklı parametrelere göre optimal hata oranları ve D, U, R tahmin edicileri göz önüne alınarak karşılaştırmalar verilmektedir.

5.1 Hata Oranı Tahmin Edicilerini Karşılaştırmak için Ölçütler

$\hat{\alpha}$, koşullu gerçek hata oranı $\alpha(\xi)$ için her hangi bir tahmin edici olmak üzere aşağıdaki ölçütlerden biri kullanılarak tahmin ediciler karşılaştırılabilir. Bu ölçütlerden ilki, koşulsuz hata kare ortalaması (unconditional mean square error ,UMSE) adı verilen

$$E\left[\hat{\alpha} - \alpha(\xi)\right]^2 \quad (5.1)$$

ölçütüdür (Sedransk ve Okamoto (1971)). Diğer iki ölçüt, koşullu hata kare ortalaması

(conditional mean square error) olarak bilinen $E\left\{\left[\hat{\alpha} - \alpha(\xi)\right]^2 / \hat{\theta}\right\}$ ve mutlak hata

ortalaması (mean absolute error) adı verilen $E\left|\hat{\alpha} - \alpha(\xi)\right|$ ölçütleridir.

Koşullu hata kare ortalamasına göre elde edilen sonuçlar $\hat{\theta}$ 'nın fonksiyonlarıdır. Bu ölçüt ancak örneklemlemlere bağlı hata oranı tahmin edicisinin seçimi arzu edildiğinde ve tüm örneklemlemler, parametrelerin aynı tahmin değerlerini verdiğinde kullanılır. Ancak böyle örneklemlemleri elde etmek mümkün değildir.

Bu çalışmanın amacı farklı kitlelerden alınan, bağımsız örneklemlemlere göre elde edilen tahmin edicilerin karşılaştırılması olduğundan, tüm örneklemlemler üzerinden koşullu hata kare ortalamasının beklenen değeri olan UMSE ölçütü tercih edilecektir. Mutlak hata

kare ortalaması ölçütü de mantıklı görünmesine rağmen, koşulsuz hata kare ortalaması gibi değişkenlik gösteren hatalara göre duyarlı olmadığından, bu ölçüt kullanılmamaktadır (Snapinn (1983)).

5.2 Daha Önceki Çalışmalardan Tahmin Edicilerin Değerlendirilmesi

Bu alt kesimde, bir çok araştırmacı tarafından daha önce yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar kısaca verilecektir.

D (plug-in) tahmin edicisi, koşullu gerçek hata oranı için iyimser yanlı yani bu tahmin edicinin beklenen değeri $\alpha(\hat{\xi})$ ' dan daha küçüktür (Dunn ve Varady (1966), Lachenbruch ve Mickey (1968), Glick (1978)).

Das Gupta (1974), p değişkenli normallik durumu için, Σ biliniyor ise $E(\hat{\alpha}^R) < E(\hat{\alpha}^D)$; $n_1 = n_2$ ve Σ biliniyor veya bilinmiyor ise $E(\hat{\alpha}^R) < \alpha(\xi) < E[\alpha(\hat{\xi})]$; Σ biliniyor ve $p = 1$ ise $E(\hat{\alpha}^R) < E[\alpha(\hat{\xi})]$ eşitsizliklerini elde etmiştir. Bu eşitsizliklerin hiç biri R tahmin edicisi ile koşullu gerçek hata oranı $\alpha(\hat{\xi})$ ' yı direkt olarak karşılaştırmamasına rağmen, dolaylı karşılaştırmaktadır. $\alpha(\hat{\xi})$ için $\hat{\alpha}^R$ ' nin yanı $\hat{\alpha}^D$ ' nin yanına göre daha iyimserdir. Bazı çalışmalar (Lachenbruch ve Mickey (1968), Glick (1978)) göstermiştir ki n_1, n_2 ve Δ^2 küçük olduğunda, $\alpha(\hat{\xi})$ için R tahmin edicisinin yanı oldukça büyüktür.

Parametrik tahmin edicilerin en basiti D tahmin edicisi ve parametrik olmayan tahmin ediciler sınıfı için R tahmin edicisi en basit olanıdır. Normallik varsayımı altında R tahmin edicisi, D tahmin edicisinden daha büyük iyimser yana sahip olmasına rağmen, normallikten uzaklaştıkça parametrik olmayan tahmin ediciler, parametrik tahmin edicilere göre daha iyidir (Snapinn (1983)). Glick (1978) çalışmasında, düzgün dağılıma sahip kitleler için R tahmin edicisinin yanının, D tahmin edicisinden daha küçük olduğunu göstermiştir.

Lachenbruch (1967), U tahmin edicisinin en büyük avantajının, beklenen gerçek hata oranı için yansız bir tahmin edici olması olduğunu belirtmiştir. Bunun anlamı, U tahmin edicisinin, koşullu gerçek hata oranına göre küçük yana sahip olduğu değildir. Tahmin ediciler karşılaştırılırken yan ön plana çıkmasına rağmen, varyans da önemli bir etkidir. U tahmin edicisinin varyansının büyük olduğu bulunmuştur. Glick (1978), tek değişkenli normallik durumunda, beklenen gerçek hata oranı göz önüne alındığında, R tahmin edicisinin yanının D tahmin edicisine göre daha büyük olduğunu ve U tahmin

ediciisinin yanının bunlara göre daha küçük olduğunu bulmuştur. Ayrıca tahmin edicilerin varyansları için de $Var(\hat{\alpha}^D) > Var(\hat{\alpha}^U) > Var(\hat{\alpha}^R)$ eşitsizliğini elde etmiştir.

$|\hat{\alpha} - \alpha(\xi)|$ mutlak hatanın dağılımı göz önüne alındığında, Lachenbruch ve Mickey (1968), normallik varsayımı altında U tahmin edicisini önermişlerdir ancak hangi metodun en iyi olduğu kesin değildir. D ve R tahmin edicilerinin zayıf tahmin ediciler olduğu, OS ve U tahmin edicilerinin diğerleri arasında en iyi performansa sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Sorum (1972), mutlak hata kare ortalaması kriterini kullanarak Σ' 'nin bilindiği çok değişkenli normallik varsayımı altında $\alpha(\xi)$ ve $E[\alpha(\hat{\xi})]$ hata oranlarının tahmin edicilerini çalışmıştır. $\alpha(\xi)$ hata oranı için en iyi tahmin edicilerin DS ve O olduğunu, bunları U ve OS tahmin edicilerinin izlediğini, R ve D tahmin edicilerinin ise en zayıf tahmin ediciler olduğunu bulmuştur. Ancak değişken sayısı arttığında bu görünümün değişebileceğini ileri sürmüştür. $E[\alpha(\hat{\xi})]$ hata oranı için en iyi tahmin edicinin OS olduğunu, bunları O, DS ve U tahmin edicilerinin izlediğini ve yine en zayıf tahmin edicilerin R ve D olduğunu bulmuştur. Burada da değişken sayısı arttığında bu sıralamanın değişebileceğini ileri sürmüştür. Lachenbruch ve Mickey (1968) 'in çalışmasına benzer olarak $\alpha(\hat{\xi})$ hata oranı için en iyiden, en kötüye tahmin ediciler için OS, O, DS, U, R ve D sıralamasını önermiştir.

Sorum (1973), yine mutlak hata ortalaması kriterini kullanarak σ^2 'nin bilindiği tek değişkenli normallik varsayımı altında $\alpha(\xi)$ ve $E[\alpha(\hat{\xi})]$ hata oranlarının tahmin edicilerinin karşılaştırılması çalışmasında, DS tahmin edicisinin en iyi olduğunu ve U ile R tahmin edicilerinin aynı düzeyde zayıf olduklarını belirtmiştir.

Efron (1979), R tahmin edicisini göz önüne alarak, bootstrap tekniğinin nasıl çalıştığını göstermek için, Σ' 'nin bilindiği iki değişkenli normal kitleler üzerinde yaptığı çalışmada, bootstrap tahmin edicisinin performansının U tahmin edicisine göre daha zayıf olduğunu ileri sürmüştür. Her iki tahmin edicinin yanlarının küçük olduğunu ve bootstrap tahmin edicisinin varyansının U tahmin edicisinin varyansının 1/3 ' ü kadar olduğunu bulmuştur.

McLachlan (1980), Δ^2 'nin çok küçük olduğu durumda bootstrap tekniğinin, R tahmin edicisinin yanının düzeltilmesinde etkin bir tahmin edici olduğunu ileri sürmüştür.

Glick (1978), tek değişkenli normallik durumunda D, R ve U tahmin edicilerini, düzgün kayma tahmin edicisi ile karşılaştırmıştır. Düzenlenmiş tahmin edicinin, R tahmin edicisine göre daha küçük yan ve varyansa sahip olduğunu bulmuştur. Ayrıca normal

kitleler için, D tahmin edicisinin, düzlenmiş tahmin ediciden ve düzlenmiş tahmin edicinin de R tahmin edicisinden daha üstün olduğu sonucunu elde etmiştir. Ancak U tahmin edicisinin yanının, diğer tahmin edicilere göre en küçük ve varyansının da oldukça büyük olmasından dolayı sıralamadaki yeri açık değildir. Glick (1978), aynı çalışmayı uniform dağılımlar içinde yapmıştır ve bu durumda D tahmin edicisinin oldukça büyük iyimser yana sahip olduğunu, R ve düzlenmiş tahmin edicilerin orta düzeyde yana sahip olduğunu ve U tahmin edicisinin çok küçük yana sahip olduğunu bulmuştur. Bu sonuçlar parametrik olmayan tahmin edicilerin güçlülüğünü göstermektedir.

Sedransk ve Okamoto (1971), tek değişkenli normallik durumunda $E[\hat{\alpha} - \alpha(\hat{\xi})]^2$ koşulsuz hata kare ortalaması için asimptotik açılımları göz önüne alarak yaptıkları çalışmalarında, parametrik tahmin edicilerin, R ve U tahmin edicilerine göre performanslarının daha iyi olduğunu bulmuşlardır. Parametrik tahmin ediciler arasındaki değerlendirmede, σ^2 'nin bilindiği tek değişkenli normallik varsayımı altında, $|\Delta| < 1.51$ ise en iyi tahmin edicinin DS, $1.51 < |\Delta| < 1.79$ ise en iyi tahmin edicinin O ve $1.79 < |\Delta|$ ise D tahmin edicisinin en iyi olduğunu belirtmişlerdir. σ^2 'nin bilinmediği tek değişkenli normallik varsayımı altında $|\Delta| < 1.63$ ise σ^2 'nin bilindiği durumda çalışılmayan OS tahmin edicisinin en iyi, $1.63 < |\Delta| < 2.15$ ise en iyi tahmin edicinin DS ve $2.15 < |\Delta|$ ise D tahmin edicisinin en iyi olduğunu bulmuşlardır. Sonuçlarının, Lachenbruch ve Mickey (1968) 'in sonuçlarıyla bazı durumlarda tutarsız olduğunu ifade etmişlerdir. Lachenbruch ve Mickey çok değişkenli normallik için OS tahmin edicisinin en iyi olduğunu ileri sürmüşlerdir.

Sorum (1973), σ^2 'nin bilindiği tek değişkenli normallik varsayımı altında $\alpha(\xi)$ ve $E[\alpha(\hat{\xi})]$ için elde edilen tahmin edicileri hata kare ortalaması kriterine göre karşılaştırdığında D ve DS tahmin edicilerinin en iyi olduğunu belirtmiştir. Bunları R tahmin edicisi izlemiştir ve U tahmin edicisinin en zayıf tahmin edici olduğunu bulmuştur.

McLachlan (1974a) Σ 'nin bilinmediği çok değişkenli normallik varsayımı altında, koşulsuz hata kare ortalaması için asimptotik açılımlar üzerinde çalışmıştır. Tahmin edicilerin birbirine üstünlüğü için bir sonuç elde edememesine rağmen, $p \geq 7$ olduğunda OS ve M tahmin edicilerinin, $p < 7$ olduğunda OS ve DS tahmin edicilerini en iyi olarak bulmuştur.

McLachlan (1974c), $\alpha(\xi)$, $E[\alpha(\hat{\xi})]$ ve $\alpha(\hat{\xi})$ 'nin her birine göre hata kare ortalaması için asimptotik açılımlar arasındaki ilişkiyi çalışmıştır. p ve Δ değerleri büyüdüğünde hata kareler ortalamasının küçüldüğünü bulmuştur.

Mclachlan (1974b, 1975), UMSE ' nin asimptotik açılımına bağlı olarak M ve OS tahmin edicilerinin karşılaştırılmasında, p ' nin ve Δ^2 ' nin küçük olmasına rağmen OS tahmin edicisinin daha iyi olduğunu ileri sürmüştür.

5. 3 Tek ve Çok Değişkenli Normal ve Gamma Dağılımlarından Sayı Üretme

Bu alt kesimde, çalışmada kullanılan dağılımlar için nasıl sayı üretildiği verilmektedir. Simülasyon çalışması Matlab paket programı kullanılarak yapılmıştır.

Paket programda mevcut randn rasgele sayı üretici fonksiyonu yardımıyla, standart normal dağılımdan çekilen sayılara (Z) , $X = \mu + \sigma Z$ dönüşümü uygulanarak, istenilen normal dağılımdan sayı üretildi.

Çok değişkenli normal dağılımdan sayı üretme işlemi $\underline{X} = \underline{\mu} + S\underline{Z}$ formülü ile yapıldı. Burada,

$\underline{\mu}$: Ortalamalar vektörü,

$\underline{Z}$: $p \times 1$ tipinde standart normal dağılımdan üretilen sayılar vektörü,

S : Σ varyans - kovaryans matrisine Cholesky ayrışımının uygulanmasıyla, $\Sigma = SS'$ eşitliğini sağlayan $p \times p$ tipinde alt üçgensel bir matristir (Ripley (1987)). Cholesky ayrışımı paket programda var olan $Chol(\Sigma)$ fonksiyonudur.

Paket programda mevcut rand rasgele sayı üretici fonksiyon yardımıyla (0,1) aralığındaki düzgün dağılımdan çekilen sayılar (U) bir logaritmik dönüşüm $(V = -\beta \log U)$ ile üstel dağılıma çevrildi ve ardışık δ tanesi toplanarak gamma dağılımından sayı üretildi.

5.4 Tek Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Kitlelerde Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması

Simülasyon ile her bir kitleden $\Delta = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$ değerlerine karşılık 200 defa $n_1 = n_2 = 10, 20, 30, 50, 100$ birimlik üretilen sayılar kullanılarak daha önce verilen tahmin edicilerin koşulsuz hata kare ortalaması (UMSE) değerleri elde edildi. Burada M tahmin edicisi değerlendirmeye alınmadı. Tahmin edicilerin UMSE değerlerini içeren sonuçlar Tablo 5.1 - Tablo 5.5 ' de verildi.

Sonuçlar incelendiğinde parametrik tahmin edicilerin, parametrik olmayan tahmin edicilere göre her zaman daha üstün olduğu görülmektedir. Örneklem hacimleri arttığında, parametrik tahmin edicilerin Δ ' nın tüm düzeylerinde performanslarının aynı olduğu ancak örneklem hacimleri küçüldüğünde; Δ ' nın küçük değerlerinde LS, DS ve L

tahmin edicileri diğerlerine göre daha iyi, Δ' 'nın büyük değerlerinde $\bar{U}$, O ve D tahmin edicilerinin en iyi, bunları DS, OS, L ve LS tahmin edicilerinin izlediği görülmektedir.

Örnekleme hacimlerinin ve Δ' 'nın küçük değerlerinde NS, NSL ve NSLS düzlenmiş tahmin edicilerin performanslarının parametrik tahmin edicilere yakın olduğu hatta bazen daha iyi olduğu ancak Δ' 'nın büyük değerlerinde bu düzlenmiş tahmin edicilerin performanslarının oldukça kötü olduğu görülmektedir. Örnekleme hacimleri arttığında; Δ' 'nın küçük değerlerinde NS, NSL ve NSLS düzlenmiş tahmin edicileri, parametrik tahmin edicilere eşdeğer performansta ancak Δ' 'nın büyük değerlerinde bu düzlenmiş tahmin edicilerin parametrik tahmin edicilere göre daha kötü sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ayrıca bu çalışmada önerilen NSL ve NSLS tahmin edicilerinin NS tahmin edicisine göre simülasyonların çoğunda daha iyi olduğu söylenebilir.

Parametrik olmayan tahmin edicilerden H tahmin edicisi R ve U tahmin edicilerine göre oldukça zayıftır ve R ile U tahmin edicileri aynı düzeyde olmasına rağmen bazen U tahmin edicisi daha iyi sonuç vermektedir.

RS ve US düzlenmiş tahmin edicileri için sonuçların: küçük örneklerde, Δ' 'nın küçük değerlerinde düzleme sabiti b' 'nin 1 ve 1.5 olduğu durumlarda daha iyi olduğu ve Δ' 'nın değeri arttıkça b' 'nin küçük değerlerinde daha iyi olduğu görülmektedir. Örnekleme hacimleri arttıkça, b' 'nin küçük değerinde daha iyi sonuçlar elde edilmekte ve bununla birlikte Δ' 'nın da büyümesiyle b değerinin daha da küçük olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. RN ve UN tahmin edicileri için, küçük örneklem hacimlerinde ve Δ' 'nın küçük değerlerinde b değerinin 1.5 ve 2 olduğu durumlarda ancak Δ' 'nın değeri arttıkça b değerinin 0.5 ile 1 arasında olduğu durumlarda daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Büyük örneklerde Δ ne olursa olsun, b değeri 0.5 ile 1 arasında olduğunda tahmin ediciler daha iyi sonuç vermektedir. Sonuçta bu dört tahmin edici için b değerinin farklı olduğu söylenebilir.

Genel olarak örneklem hacimleri arttığında, tahmin edicilerin koşulsuz hata kare ortalama (UMSE) değerlerinin düştüğü görülmektedir.

**Tablo 5.1: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)**

Tahmin Edici	$\Delta = 0.50$	$\Delta = 1.00$	$\Delta = 1.50$	$\Delta = 2.00$	$\Delta = 3.00$
D	0.0094	0.0085	0.0068	0.0049	0.0020
DS	0.0060	0.0074	0.0065	0.0050	0.0023
R	0.0149	0.0131	0.0098	0.0069	0.0032
U	0.0143	0.0128	0.0098	0.0071	0.0032
$\bar{U}$	0.0105	0.0091	0.0071	0.0049	0.0017
O	0.0092	0.0083	0.0067	0.0049	0.0020
OS	0.0083	0.0076	0.0064	0.0049	0.0023
L	0.0060	0.0083	0.0073	0.0055	0.0025
LS	0.0055	0.0079	0.0073	0.0059	0.0031
H	0.0316	0.0311	0.0242	0.0136	0.0066
RS					
b=0.250	0.0133	0.0111	0.0095	0.0062	0.0031
b=0.50	0.0103	0.0092	0.0091	0.0065	0.0035
b=1.00	0.0082	0.0102	0.0133	0.0134	0.0112
b=1.50	0.0073	0.0170	0.0280	0.0376	0.0339
b=2.00	0.0078	0.0261	0.0486	0.0640	0.0754
US					
b=0.25	0.0129	0.0130	0.0118	0.0076	0.0038
b=0.50	0.0113	0.0118	0.0124	0.0080	0.0047
b=1.00	0.0108	0.0171	0.0214	0.0202	0.0153
b=1.50	0.0135	0.0296	0.0438	0.0530	0.0448
b=2.00	0.0168	0.0444	0.0729	0.0893	0.0978
RN					
b=0.25	0.0088	0.0151	0.0263	0.0442	0.0958
b=0.50	0.0075	0.0067	0.0059	0.0063	0.0154
b=1.00	0.0056	0.0067	0.0079	0.0085	0.0072
b=1.50	0.0044	0.0081	0.0127	0.0164	0.0176
b=2.00	0.0042	0.0106	0.0188	0.0260	0.0312
UN					
b=0.25	0.0086	0.0149	0.0261	0.0438	0.0962
b=0.50	0.0076	0.0068	0.0060	0.0065	0.0160
b=1.00	0.0056	0.0068	0.0079	0.0085	0.0073
b=1.50	0.0045	0.0082	0.0127	0.0164	0.0176
b=2.00	0.0043	0.0106	0.0187	0.0259	0.0311
NS	0.0076	0.0067	0.0062	0.0083	0.0265
NSL	0.0073	0.0073	0.0059	0.0060	0.0197
NSLS	0.0071	0.0077	0.0067	0.0054	0.0087

**Tablo 5.2: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)**

Tahmin Edici	$\Delta = 0.50$	$\Delta = 1.00$	$\Delta = 1.50$	$\Delta = 2.00$	$\Delta = 3.00$
D	0.0046	0.0042	0.0035	0.0026	0.0010
DS	0.0038	0.0040	0.0033	0.0026	0.0011
R	0.0069	0.0069	0.0052	0.0041	0.0015
U	0.0072	0.0064	0.0051	0.0041	0.0015
$\bar{U}$	0.0049	0.0043	0.0036	0.0026	0.0010
O	0.0045	0.0042	0.0035	0.0026	0.0010
OS	0.0043	0.0040	0.0034	0.0026	0.0011
L	0.0041	0.0044	0.0036	0.0027	0.0011
LS	0.0039	0.0043	0.0036	0.0028	0.0013
H	0.0175	0.0131	0.0080	0.0068	0.0030
RS					
b=0.25	0.0060	0.0054	0.0049	0.0034	0.0016
b=0.50	0.0051	0.0050	0.0050	0.0037	0.0023
b=1.00	0.0042	0.0071	0.0106	0.0131	0.0103
b=1.50	0.0053	0.0159	0.0281	0.0365	0.0352
b=2.00	0.0081	0.0268	0.0476	0.0676	0.0763
US					
b=0.25	0.0061	0.0061	0.0025	0.0038	0.0018
b=0.50	0.0056	0.0062	0.0062	0.0044	0.0027
b=1.00	0.0058	0.0102	0.0140	0.0163	0.0120
b=1.50	0.0082	0.0219	0.0354	0.0438	0.0404
b=2.00	0.0126	0.0355	0.0583	0.0796	0.0866
RN					
b=0.25	0.0057	0.0120	0.0237	0.0416	0.0946
b=0.50	0.0040	0.0040	0.0044	0.0056	0.0140
b=1.00	0.0029	0.0044	0.0062	0.0073	0.0068
b=1.50	0.0029	0.0071	0.0122	0.0163	0.0178
b=2.00	0.0034	0.0103	0.0190	0.0267	0.0322
UN					
b=0.25	0.0056	0.0119	0.0236	0.0416	0.0948
b=0.50	0.0039	0.0040	0.0044	0.0056	0.0140
b=1.00	0.0029	0.0044	0.0062	0.0073	0.0068
b=1.50	0.0029	0.0071	0.0122	0.0163	0.0178
b=2.00	0.0034	0.0103	0.0190	0.0267	0.0322
NS	0.0043	0.0071	0.0135	0.0252	0.0649
NSL	0.0035	0.0037	0.0073	0.0171	0.0560
NSLS	0.0037	0.0037	0.0047	0.0090	0.0318

**Tablo 5.3: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 30$)**

Tahmin Edici	$\Delta = 0.50$	$\Delta = 1.00$	$\Delta = 1.50$	$\Delta = 2.00$	$\Delta = 3.00$
D	0.0028	0.0026	0.0021	0.0016	0.0007
DS	0.0024	0.0024	0.0021	0.0016	0.0007
R	0.0041	0.0036	0.0028	0.0025	0.0011
U	0.0041	0.0036	0.0028	0.0024	0.0011
$\bar{U}$	0.0029	0.0027	0.0022	0.0016	0.0006
O	0.0028	0.0025	0.0021	0.0016	0.0007
OS	0.0027	0.0024	0.0021	0.0016	0.0007
L	0.0026	0.0027	0.0022	0.0017	0.0007
LS	0.0026	0.0026	0.0022	0.0017	0.0007
H	0.0111	0.0067	0.0058	0.0044	0.0022
RS					
b=0.25	0.0035	0.0032	0.0027	0.0020	0.0010
b=0.50	0.0031	0.0032	0.0029	0.0025	0.0016
b=1.00	0.0028	0.0065	0.0098	0.0121	0.0087
b=1.50	0.0051	0.0163	0.0277	0.0366	0.0349
b=2.00	0.0076	0.0265	0.0501	0.0688	0.0772
US					
b=0.25	0.0035	0.0037	0.0029	0.0022	0.0011
b=0.50	0.0034	0.0038	0.0035	0.0029	0.0018
b=1.00	0.0039	0.0086	0.0120	0.0141	0.0097
b=1.50	0.0072	0.0203	0.0324	0.0413	0.0383
b=2.00	0.0105	0.0320	0.0572	0.0766	0.0839
RN					
b=0.25	0.0042	0.0107	0.0229	0.0411	0.0939
b=0.50	0.0024	0.0026	0.0034	0.0051	0.0135
b=1.00	0.0019	0.0035	0.0055	0.0069	0.0067
b=1.50	0.0023	0.0067	0.0121	0.0163	0.0181
b=2.00	0.0030	0.0102	0.0192	0.0273	0.0330
UN					
b=0.25	0.0042	0.0106	0.0227	0.0405	0.0936
b=0.50	0.0024	0.0026	0.0034	0.0051	0.0134
b=1.00	0.0019	0.0035	0.0055	0.0069	0.0067
b=1.50	0.0023	0.0067	0.0121	0.0163	0.0181
b=2.00	0.0030	0.0102	0.0192	0.0273	0.0330
NS	0.0037	0.0099	0.0216	0.0394	0.0908
NSL	0.0021	0.0039	0.0129	0.0300	0.0823
NSLS	0.0023	0.0029	0.0076	0.0178	0.0553

Tablo 5.4: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.50$	$\Delta = 1.00$	$\Delta = 1.50$	$\Delta = 2.00$	$\Delta = 3.00$
D	0.0018	0.0016	0.0013	0.0009	0.0004
DS	0.0017	0.0015	0.0013	0.0009	0.0004
R	0.0026	0.0022	0.0019	0.0015	0.0006
U	0.0026	0.0022	0.0018	0.0014	0.0006
$\bar{U}$	0.0018	0.0016	0.0013	0.0009	0.0003
O	0.0017	0.0016	0.0013	0.0009	0.0004
OS	0.0017	0.0015	0.0013	0.0009	0.0004
L	0.0019	0.0016	0.0013	0.0010	0.0004
LS	0.0019	0.0016	0.0013	0.0010	0.0004
H	0.0065	0.0039	0.0031	0.0023	0.0013
RS					
b=0.25	0.0022	0.0020	0.0016	0.0013	0.0006
b=0.50	0.0018	0.0019	0.0021	0.0017	0.0012
b=1.00	0.0025	0.0061	0.0095	0.0111	0.0085
b=1.50	0.0051	0.0159	0.0276	0.0369	0.0337
b=2.00	0.0075	0.0264	0.0499	0.0694	0.0786
US					
b=0.25	0.0022	0.0021	0.0017	0.0014	0.0006
b=0.50	0.0021	0.0023	0.0025	0.0020	0.0013
b=1.00	0.0033	0.0072	0.0108	0.0123	0.0091
b=1.50	0.0065	0.0182	0.0303	0.0397	0.0356
b=2.00	0.0093	0.0297	0.0541	0.0740	0.0827
RN					
b=0.25	0.0034	0.0100	0.0225	0.0410	0.0928
b=0.50	0.0015	0.0020	0.0031	0.0050	0.0133
b=1.00	0.0015	0.0033	0.0054	0.0069	0.0066
b=1.50	0.0022	0.0068	0.0123	0.0168	0.0183
b=2.00	0.0030	0.0104	0.0197	0.0278	0.0335
UN					
b=0.25	0.0034	0.0100	0.0225	0.0410	0.0929
b=0.50	0.0015	0.0020	0.0031	0.0050	0.0133
b=1.00	0.0015	0.0033	0.0054	0.0068	0.0066
b=1.50	0.0022	0.0067	0.0123	0.0168	0.0183
b=2.00	0.0030	0.0104	0.0197	0.0278	0.0335
NS	0.0046	0.0156	0.0345	0.0661	0.1208
NSL	0.0015	0.0072	0.0245	0.0506	0.1142
NSLS	0.0015	0.0051	0.0170	0.0363	0.0901

**Tablo 5.5: Tek Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$)**

Tahmin Edici	$\Delta = 0.50$	$\Delta = 1.00$	$\Delta = 1.50$	$\Delta = 2.00$	$\Delta = 3.00$
D	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
DS	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
R	0.0013	0.0011	0.0009	0.0007	0.0003
U	0.0012	0.0011	0.0009	0.0007	0.0003
$\bar{U}$	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
O	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
OS	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
L	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
LS	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
H	0.0026	0.0022	0.0018	0.0013	0.0005
RS					
b=0.25	0.0010	0.0010	0.0008	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0009	0.0011	0.0013	0.0013	0.0009
b=1.00	0.0018	0.0053	0.0087	0.0108	0.0084
b=1.50	0.0046	0.0153	0.0277	0.0363	0.0336
b=2.00	0.0072	0.0259	0.0494	0.0684	0.0777
US					
b=0.25	0.0010	0.0010	0.0008	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0010	0.0012	0.0014	0.0014	0.0010
b=1.00	0.0022	0.0058	0.0093	0.0113	0.0087
b=1.50	0.0052	0.0164	0.0290	0.0377	0.0345
b=2.00	0.0081	0.0275	0.0514	0.0706	0.0797
RN					
b=0.25	0.0029	0.0099	0.0223	0.0406	0.0910
b=0.50	0.0008	0.0015	0.0028	0.0050	0.0133
b=1.00	0.0011	0.0030	0.0051	0.0067	0.0065
b=1.50	0.0020	0.0066	0.0123	0.0168	0.0183
b=2.00	0.0029	0.0104	0.0198	0.0280	0.0336
UN					
b=0.25	0.0029	0.0099	0.0223	0.0407	0.0916
b=0.50	0.0008	0.0015	0.0029	0.0050	0.0133
b=1.00	0.0011	0.0030	0.0051	0.0067	0.0065
b=1.50	0.0020	0.0061	0.0123	0.0168	0.0183
b=2.00	0.0029	0.0104	0.0198	0.0280	0.0336
NS	0.0063	0.0253	0.0499	0.0822	0.1491
NSL	0.0016	0.0153	0.0418	0.0753	0.1452
NSLS	0.0014	0.0123	0.0342	0.0634	0.1293

5.5 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Kitlelerde Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması

$p = 3$ ve $p = 5$ olduğu çok değişkenli normal kitleler üzerinde çalışılmıştır. Simülasyon ile her bir kitleden $p = 3$ için $\Delta = 0.5005, 1.0011, 1.5016, 2.0022, 3.0033$ ve $p = 5$ için $\Delta = 0.5087, 0.9999, 1.5652, 1.9998, 3.0001$ değerlerine karşılık 200 defa $n_1 = n_2 = 10, 20, 30, 50, 100$ birimlik üretilen sayılar kullanılarak daha önce verilen tahmin edicilerin koşulsuz hata kare ortalaması (UMSE) değerleri elde edildi. Tahmin edicilerin UMSE değerlerini içeren sonuçlar Tablo 5.6 - Tablo 5.15 ' de verildi.

Çok değişkenli durumda da tek değişkenli duruma benzer sonuçlar elde edildi ancak değişken sayısı arttığında tahmin edicilerin UMSE değerlerinin de arttığı ve örneklem hacimleri arttıkça tahmin edicilerin UMSE değerlerini azaldığı görülmektedir.

Örneklem hacimleri küçük olduğunda NS, NSL ve NSLS düzlenmiş tahmin edicilerin UMSE değerlerinin diğer tahmin edicilerin UMSE değerlerine göre daha küçük olduğu ancak örneklem hacimleri ve Δ arttıkça tam tersi bir durumun söz konusu olduğu gözlenmiştir. Ayrıca NSL ve NSLS tahmin edicilerinin NS tahmin edicisine ve NSLS ' nin de NSL ' ye göre daha üstün olduğu söylenebilir. Örneklem hacimleri ne olursa olsun, Δ değeri 0.5 ' e yakın ise bu düzlenmiş tahmin edicileri diğer tahmin edicilere göre daha üstün olduğu ancak Δ ' nın değeri arttıkça bu düzlenmiş tahmin edicilerin iyi sonuç vermediği görülmektedir. Bununla birlikte örneklem hacimlerinin ve Δ ' nın küçük değerlerinde L ile NSL ve LS ile NSLS tahmin edicileri yakın sonuçlar vermektedir.

Burada da parametrik olmayan tahmin edicilerden H ' nin performansının zayıf, U ve R ' nin performanslarının bir birine yakın olduğu ancak U ' nun bazen daha iyi olduğu görülmektedir. Bu tahmin edicilerin, parametrik tahmin edicilere göre daha zayıf oldukları da söylenebilir.

Parametrik tahmin ediciler karşılaştırıldığında, tüm durumlarda sırasıyla LS, L, OS, O ve M tahmin edicilerinin daha iyi ve bunları DS, D ve $\bar{U}$ tahmin edicilerinin izlediği görülmektedir. Δ ' nın büyük değerleri için bu tahmin edicilerin performansları aynıdır.

RS, US, RN ve UN tahmin edicileri için küçük örneklemelerde; Δ ' nın küçük olduğu durumlarda b ' nin büyük ve Δ ' nın değeri arttıkça b ' nin küçük değerlerinde daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Δ ' nın değeri arttıkça RS ve US tahmin edicileri için b değeri 0.25 ile 0.50 arasında ancak RN ve UN tahmin edicileri için 0.50 ile 1 arasında değişmektedir. Örneklem hacimleri arttığında; Δ ' nın küçük değerlerinde RS ve US tahmin edicileri için b değerinin, küçük örneklemelere göre daha da küçük olduğu durumlarda iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Büyük örneklemelerde Δ ' nın değeri arttıkça RS ve US tahmin edicileri için elde edilen b değeri RN ve UN tahmin edicileri için elde edilen b değerinden daha küçüktür.

Tablo 5.6: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5005$	$\Delta = 1.0011$	$\Delta = 1.5016$	$\Delta = 2.0022$	$\Delta = 3.0033$
D	0.0237	0.0164	0.0119	0.0083	0.0032
DS	0.0180	0.0114	0.0080	0.0057	0.0024
R	0.0279	0.0226	0.0154	0.0109	0.0044
U	0.0267	0.0208	0.0153	0.0108	0.0045
$\bar{U}$	0.0234	0.0167	0.0123	0.0085	0.0031
O	0.0155	0.0115	0.0089	0.0065	0.0027
OS	0.0120	0.0085	0.0067	0.0053	0.0028
L	0.0117	0.0086	0.0071	0.0055	0.0026
LS	0.0087	0.0062	0.0057	0.0051	0.0033
M	0.0175	0.0110	0.0084	0.0064	0.0032
H	0.0238	0.0267	0.0257	0.0210	0.0139
RS					
b=0.25	0.0260	0.0189	0.0143	0.0096	0.0040
b=0.50	0.0206	0.0143	0.0118	0.0082	0.0036
b=1.00	0.0101	0.0068	0.0073	0.0087	0.0062
b=1.50	0.0042	0.0073	0.0149	0.0199	0.0217
b=2.00	0.0031	0.0135	0.0308	0.0469	0.0530
US					
b=0.25	0.0176	0.0140	0.0129	0.0092	0.0043
b=0.50	0.0136	0.0120	0.0100	0.0081	0.0043
b=1.00	0.0064	0.0088	0.0112	0.0123	0.0091
b=1.50	0.0060	0.0146	0.0253	0.0323	0.0297
b=2.00	0.0089	0.0269	0.0490	0.0655	0.0689
RN					
b=0.25	0.0081	0.0065	0.0143	0.0309	0.0917
b=0.50	0.0165	0.0087	0.0048	0.0029	0.0115
b=1.00	0.0115	0.0061	0.0047	0.0043	0.0034
b=1.50	0.0063	0.0034	0.0051	0.0077	0.0098
b=2.00	0.0038	0.0034	0.0084	0.0142	0.0204
UN					
b=0.25	0.0088	0.0070	0.0145	0.0318	0.0927
b=0.50	0.0153	0.0086	0.0051	0.0036	0.0131
b=1.00	0.0107	0.0065	0.0048	0.0044	0.0037
b=1.50	0.0060	0.0036	0.0054	0.0079	0.0100
b=2.00	0.0036	0.0036	0.0087	0.0143	0.0203
NS	0.0168	0.0095	0.0059	0.0034	0.0036
NSL	0.0115	0.0082	0.0063	0.0043	0.0026
NSLS	0.0087	0.0061	0.0056	0.0049	0.0032

Tablo 5.7: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5005$	$\Delta = 1.0011$	$\Delta = 1.5016$	$\Delta = 2.0022$	$\Delta = 3.0033$
D	0.0087	0.0052	0.0038	0.0027	0.0011
DS	0.0075	0.0042	0.0030	0.0022	0.0010
R	0.0112	0.0076	0.0057	0.0040	0.0018
U	0.0109	0.0077	0.0055	0.0039	0.0018
$\bar{U}$	0.0089	0.0056	0.0040	0.0029	0.0010
O	0.0057	0.0040	0.0031	0.0024	0.0011
OS	0.0049	0.0034	0.0027	0.0022	0.0012
L	0.0048	0.0035	0.0029	0.0023	0.0011
LS	0.0042	0.0030	0.0026	0.0023	0.0013
M	0.0058	0.0039	0.0031	0.0025	0.0012
H	0.0141	0.0142	0.0109	0.0096	0.0045
RS					
b=0.25	0.0092	0.0063	0.0048	0.0034	0.0016
b=0.50	0.0066	0.0044	0.0035	0.0028	0.0016
b=1.00	0.0035	0.0040	0.0069	0.0082	0.0063
b=1.50	0.0023	0.0104	0.0214	0.0302	0.0267
b=2.00	0.0033	0.0184	0.0416	0.0602	0.0705
US					
b=0.25	0.0071	0.0051	0.0045	0.0032	0.0017
b=0.50	0.0054	0.0044	0.0037	0.0031	0.0019
b=1.00	0.0031	0.0060	0.0097	0.0106	0.0081
b=1.50	0.0041	0.0154	0.0277	0.0370	0.0314
b=2.00	0.0061	0.0256	0.0509	0.0706	0.0800
RN					
b=0.25	0.0039	0.0072	0.0169	0.0342	0.0896
b=0.50	0.0057	0.0029	0.0023	0.0033	0.0118
b=1.00	0.0034	0.0021	0.0031	0.0044	0.0048
b=1.50	0.0018	0.0031	0.0075	0.0118	0.0144
b=2.00	0.0013	0.0052	0.0133	0.0212	0.0279
UN					
b=0.25	0.0040	0.0070	0.0167	0.0342	0.0902
b=0.50	0.0054	0.0028	0.0025	0.0035	0.0121
b=1.00	0.0032	0.0021	0.0032	0.0045	0.0049
b=1.50	0.0017	0.0031	0.0076	0.0119	0.0145
b=2.00	0.0013	0.0053	0.0134	0.0212	0.0279
NS	0.0052	0.0029	0.0035	0.0070	0.0272
NSL	0.0046	0.0030	0.0021	0.0032	0.0179
NSLS	0.0041	0.0029	0.0024	0.0024	0.0058

Tablo 5.8: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 30$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5005$	$\Delta = 1.0011$	$\Delta = 1.5016$	$\Delta = 2.0022$	$\Delta = 3.0033$
D	0.0050	0.0032	0.0023	0.0017	0.0006
DS	0.0045	0.0027	0.0020	0.0014	0.0006
R	0.0060	0.0045	0.0035	0.0025	0.0010
U	0.0060	0.0044	0.0035	0.0025	0.0011
$\bar{U}$	0.0052	0.0033	0.0024	0.0017	0.0006
O	0.0039	0.0027	0.0021	0.0015	0.0006
OS	0.0035	0.0024	0.0019	0.0014	0.0007
L	0.0031	0.0025	0.0020	0.0015	0.0006
LS	0.0028	0.0023	0.0019	0.0015	0.0007
M	0.0044	0.0027	0.0021	0.0016	0.0007
H	0.0081	0.0075	0.0058	0.0052	0.0030
RS					
b=0.25	0.0053	0.0038	0.0030	0.0019	0.0010
b=0.50	0.0042	0.0031	0.0023	0.0017	0.0012
b=1.00	0.0022	0.0041	0.0068	0.0088	0.0070
b=1.50	0.0024	0.0114	0.0230	0.0314	0.0299
b=2.00	0.0041	0.0209	0.0434	0.0621	0.0716
US					
b=0.25	0.0043	0.0036	0.0029	0.0019	0.0010
b=0.50	0.0036	0.0029	0.0024	0.0020	0.0013
b=1.00	0.0023	0.0055	0.0087	0.0108	0.0077
b=1.50	0.0037	0.0144	0.0269	0.0353	0.0328
b=2.00	0.0063	0.0255	0.0490	0.0678	0.0771
RN					
b=0.25	0.0021	0.0071	0.0183	0.0360	0.0908
b=0.50	0.0028	0.0017	0.0021	0.0036	0.0121
b=1.00	0.0017	0.0019	0.0036	0.0050	0.0053
b=1.50	0.0010	0.0040	0.0091	0.0135	0.0158
b=2.00	0.0011	0.0067	0.0155	0.0235	0.0300
UN					
b=0.25	0.0023	0.0071	0.0184	0.0362	0.0914
b=0.50	0.0028	0.0017	0.0022	0.0037	0.0123
b=1.00	0.0017	0.0019	0.0036	0.0050	0.0053
b=1.50	0.0010	0.0040	0.0091	0.0135	0.0157
b=2.00	0.0011	0.0068	0.0155	0.0235	0.0299
NS	0.0020	0.0032	0.0082	0.0175	0.0538
NSL	0.0028	0.0016	0.0026	0.0084	0.0406
NSLS	0.0027	0.0019	0.0019	0.0037	0.0170

Tablo 5.9: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5005$	$\Delta = 1.0011$	$\Delta = 1.5016$	$\Delta = 2.0022$	$\Delta = 3.0033$
D	0.0022	0.0015	0.0012	0.0009	0.0004
DS	0.0020	0.0013	0.0011	0.0008	0.0003
R	0.0029	0.0023	0.0020	0.0014	0.0006
U	0.0031	0.0023	0.0020	0.0014	0.0006
$\bar{U}$	0.0023	0.0016	0.0012	0.0009	0.0003
O	0.0018	0.0013	0.0011	0.0008	0.0004
OS	0.0017	0.0013	0.0011	0.0008	0.0004
L	0.0015	0.0013	0.0011	0.0008	0.0004
LS	0.0014	0.0013	0.0011	0.0009	0.0004
M	0.0020	0.0014	0.0011	0.0009	0.0004
H	0.0048	0.0051	0.0040	0.0029	0.0012
RS					
b=0.25	0.0027	0.0018	0.0015	0.0012	0.0006
b=0.50	0.0020	0.0014	0.0013	0.0014	0.0009
b=1.00	0.0012	0.0040	0.0077	0.0097	0.0080
b=1.50	0.0027	0.0130	0.0248	0.0331	0.0318
b=2.00	0.0049	0.0231	0.0455	0.0649	0.0740
US					
b=0.25	0.0024	0.0017	0.0015	0.0012	0.0005
b=0.50	0.0017	0.0015	0.0016	0.0016	0.0010
b=1.00	0.0016	0.0080	0.0087	0.0107	0.0085
b=1.50	0.0037	0.0148	0.0271	0.0357	0.0337
b=2.00	0.0064	0.0263	0.0492	0.0692	0.0778
RN					
b=0.25	0.0019	0.0083	0.0204	0.0383	0.0907
b=0.50	0.0012	0.0013	0.0024	0.0042	0.0126
b=1.00	0.0069	0.0021	0.0042	0.0058	0.0059
b=1.50	0.0078	0.0050	0.0106	0.0152	0.0171
b=2.00	0.0013	0.0082	0.0175	0.0258	0.0319
UN					
b=0.25	0.0020	0.0084	0.0206	0.0385	0.0909
b=0.50	0.0013	0.0014	0.0024	0.0043	0.0127
b=1.00	0.0007	0.0021	0.0042	0.0058	0.0059
b=1.50	0.0008	0.0050	0.0106	0.0152	0.0171
b=2.00	0.0013	0.0082	0.0178	0.0258	0.0319
NS	0.0019	0.0083	0.0204	0.0382	0.0907
NSL	0.0012	0.0016	0.0080	0.0233	0.0766
NSLS	0.0012	0.0013	0.0063	0.0122	0.0457

Tablo 5.10: $p = 3$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5005$	$\Delta = 1.0011$	$\Delta = 1.5016$	$\Delta = 2.0022$	$\Delta = 3.0033$
D	0.0010	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
DS	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
R	0.0013	0.0010	0.0009	0.0007	0.0003
U	0.0012	0.0010	0.0008	0.0007	0.0003
$\bar{U}$	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0002
O	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
OS	0.0009	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
L	0.0008	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002
LS	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0002
M	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
H	0.0029	0.0021	0.0018	0.0014	0.0006
RS					
b=0.25	0.0011	0.0010	0.0007	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0010	0.0011	0.0011	0.0012	0.0008
b=1.00	0.0014	0.0046	0.0082	0.0100	0.0083
b=1.50	0.0033	0.0142	0.0260	0.0346	0.0325
b=2.00	0.0058	0.0244	0.0477	0.0670	0.0757
US					
b=0.25	0.0011	0.0010	0.0007	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0010	0.0012	0.0012	0.0013	0.0008
b=1.00	0.0016	0.0050	0.0088	0.0104	0.0087
b=1.50	0.0038	0.0152	0.0274	0.0360	0.0335
b=2.00	0.0066	0.0259	0.0498	0.0693	0.0776
RN					
b=0.25	0.0021	0.0091	0.0218	0.0401	0.0916
b=0.50	0.0006	0.0013	0.0026	0.0047	0.0130
b=1.00	0.0006	0.0026	0.0048	0.0065	0.0064
b=1.50	0.0012	0.0060	0.0118	0.0164	0.0181
b=2.00	0.0020	0.0095	0.0191	0.0274	0.0333
UN					
b=0.25	0.0021	0.0091	0.0218	0.0401	0.0917
b=0.50	0.0007	0.0013	0.0026	0.0047	0.0130
b=1.00	0.0006	0.0026	0.0048	0.0064	0.0064
b=1.50	0.0012	0.0060	0.0118	0.0164	0.0181
b=2.00	0.0020	0.0095	0.0191	0.0274	0.0333
NS	0.0041	0.0174	0.0395	0.0681	0.1324
NSL	0.0006	0.0053	0.0236	0.0524	0.1222
NSLS	0.0006	0.0037	0.0161	0.0370	0.0956

Tablo 5.11: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 10$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5087$	$\Delta = 0.9999$	$\Delta = 1.5652$	$\Delta = 1.9998$	$\Delta = 3.0001$
D	0.0409	0.0309	0.0220	0.0158	0.0065
DS	0.0276	0.0190	0.0129	0.0093	0.0045
R	0.0448	0.0364	0.0257	0.0190	0.0079
U	0.0394	0.0313	0.0237	0.0172	0.0079
$\bar{U}$	0.0368	0.0281	0.0205	0.0146	0.0062
O	0.0207	0.0169	0.0146	0.0112	0.0054
OS	0.0126	0.0103	0.0099	0.0083	0.0052
L	0.0176	0.0128	0.0105	0.0084	0.0046
LS	0.0114	0.0076	0.0069	0.0069	0.0056
M	0.0163	0.0140	0.0140	0.0117	0.0068
H	0.0297	0.0306	0.0367	0.0324	0.0305
RS					
b=0.25	0.0412	0.0332	0.0226	0.0117	0.0074
b=0.50	0.0366	0.0252	0.0187	0.0141	0.0066
b=1.00	0.0202	0.0144	0.0098	0.0090	0.0062
b=1.50	0.0072	0.0063	0.0113	0.0152	0.0169
b=2.00	0.0032	0.0087	0.0225	0.0326	0.0410
US					
b=0.25	0.0304	0.0243	0.0175	0.0158	0.0066
b=0.50	0.0270	0.0187	0.0154	0.0128	0.0062
b=1.00	0.0140	0.0114	0.0114	0.0110	0.0078
b=1.50	0.0072	0.0099	0.0194	0.0228	0.0210
b=2.00	0.0064	0.0179	0.0355	0.0472	0.0524
RN					
b=0.25	0.0091	0.0060	0.0131	0.0284	0.0888
b=0.50	0.0267	0.0166	0.0071	0.0033	0.0129
b=1.00	0.0212	0.0135	0.0086	0.0065	0.0034
b=1.50	0.0124	0.0067	0.0052	0.0060	0.0069
b=2.00	0.075	0.0039	0.0057	0.0092	0.0140
UN					
b=0.25	0.0093	0.0068	0.0149	0.0309	0.0924
b=0.50	0.0229	0.0144	0.0071	0.0047	0.0185
b=1.00	0.0192	0.0123	0.0080	0.0063	0.0037
b=1.50	0.0115	0.0064	0.0053	0.0061	0.0071
b=2.00	0.0071	0.0038	0.0058	0.0093	0.0139
NS	0.0262	0.0176	0.0108	0.0079	0.0024
NSL	0.0174	0.0124	0.0096	0.0073	0.0031
NSLS	0.0114	0.0075	0.0068	0.0068	0.0055

Tablo 5.12: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 20$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5087$	$\Delta = 0.9999$	$\Delta = 1.5652$	$\Delta = 1.9998$	$\Delta = 3.0001$
D	0.0160	0.0092	0.0061	0.0042	0.0015
DS	0.0129	0.0066	0.0041	0.0028	0.0011
R	0.0178	0.0105	0.0079	0.0059	0.0024
U	0.0178	0.0103	0.0075	0.0057	0.0023
$\bar{U}$	0.158	0.0091	0.0061	0.0041	0.0014
O	0.0081	0.0053	0.0041	0.0029	0.0012
OS	0.0063	0.0040	0.0032	0.0025	0.0013
L	0.0077	0.0045	0.0036	0.0026	0.0011
LS	0.0061	0.0034	0.0030	0.0024	0.0014
M	0.0078	0.0050	0.0040	0.0030	0.0015
H	0.0142	0.0140	0.0132	0.0109	0.0071
RS					
b=0.25	0.0162	0.0096	0.0068	0.0050	0.0020
b=0.50	0.0128	0.0067	0.0049	0.0033	0.0018
b=1.00	0.0061	0.0031	0.0051	0.0059	0.0054
b=1.50	0.0023	0.0063	0.0174	0.0243	0.0234
b=2.00	0.0024	0.0137	0.0353	0.0515	0.0616
US					
b=0.25	0.0125	0.0071	0.0063	0.0044	0.0019
b=0.50	0.0092	0.0058	0.0044	0.0032	0.0018
b=1.00	0.0043	0.0041	0.0072	0.0078	0.0066
b=1.50	0.0028	0.0098	0.0227	0.0301	0.0278
b=2.00	0.0042	0.0195	0.0438	0.0600	0.0696
RN					
b=0.25	0.0044	0.0054	0.0178	0.0323	0.0875
b=0.50	0.0098	0.0037	0.0019	0.0021	0.0111
b=1.00	0.0065	0.0023	0.0024	0.0029	0.0034
b=1.50	0.0033	0.0017	0.0054	0.085	0.0114
b=2.00	0.0018	0.0029	0.0105	0.0166	0.0236
UN					
b=0.25	0.0046	0.0059	0.0186	0.0334	0.0880
b=0.50	0.0094	0.0035	0.0021	0.0024	0.0118
b=1.00	0.0062	0.0023	0.0025	0.0030	0.0035
b=1.50	0.0031	0.0018	0.0056	0.0087	0.0115
b=2.00	0.0017	0.0030	0.0106	0.0167	0.0236
NS	0.0097	0.0036	0.0019	0.0023	0.0126
NSL	0.0074	0.0038	0.0022	0.0014	0.0070
NSLS	0.0060	0.0032	0.0027	0.0022	0.0022

Tablo 5.13: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 30$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5087$	$\Delta = 0.9999$	$\Delta = 1.5652$	$\Delta = 1.9998$	$\Delta = 3.0001$
D	0.0093	0.0051	0.0034	0.0025	0.0009
DS	0.0080	0.0040	0.0026	0.0018	0.0007
R	0.0109	0.0063	0.0043	0.0037	0.0014
U	0.0110	0.0061	0.0040	0.0035	0.0014
$\bar{U}$	0.0094	0.0051	0.0035	0.0025	0.0009
O	0.0052	0.0033	0.0025	0.0019	0.0008
OS	0.0044	0.0027	0.0022	0.0017	0.0008
L	0.0048	0.0029	0.0024	0.0018	0.0008
LS	0.0041	0.0024	0.0021	0.0017	0.0009
M	0.0054	0.0033	0.0026	0.0020	0.0009
H	0.0101	0.0100	0.0086	0.0072	0.0041
RS					
b=0.25	0.0101	0.0054	0.0037	0.0028	0.0012
b=0.50	0.0072	0.0038	0.0027	0.0020	0.0013
b=1.00	0.0033	0.0026	0.0055	0.0070	0.0066
b=1.50	0.0018	0.0084	0.0211	0.0269	0.0269
b=2.00	0.0027	0.0171	0.0413	0.0569	0.0661
US					
b=0.25	0.0078	0.0047	0.0033	0.0027	0.0013
b=0.50	0.0060	0.0037	0.0026	0.0022	0.0014
b=1.00	0.0028	0.0032	0.0071	0.0089	0.0074
b=1.50	0.0023	0.0113	0.0250	0.0306	0.0296
b=2.00	0.0044	0.0213	0.076	0.0637	0.0710
RN					
b=0.25	0.0026	0.0059	0.0190	0.0341	0.0885
b=0.50	0.0055	0.0020	0.0016	0.0027	0.0115
b=1.00	0.0033	0.0014	0.0027	0.0037	0.0042
b=1.50	0.0015	0.0023	0.0074	0.0109	0.0136
b=2.00	0.0009	0.0044	0.0135	0.0201	0.0269
UN					
b=0.25	0.0027	0.0063	0.0194	0.0348	0.0892
b=0.50	0.0054	0.0020	0.0016	0.0029	0.0120
b=1.00	0.0032	0.0014	0.0027	0.0038	0.0043
b=1.50	0.0015	0.0024	0.0074	0.0109	0.0135
b=2.00	0.0009	0.0045	0.0135	0.0201	0.0268
NS	0.0044	0.0018	0.0040	0.0086	0.0332
NSL	0.0045	0.0020	0.0014	0.0030	0.0214
NSLS	0.0040	0.0021	0.0016	0.0017	0.0063

Tablo 5.14: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen
Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 50$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5087$	$\Delta = 0.9999$	$\Delta = 1.5652$	$\Delta = 1.9998$	$\Delta = 3.0001$
D	0.0043	0.0025	0.0018	0.0013	0.0005
DS	0.0038	0.0021	0.0025	0.0011	0.0004
R	0.0054	0.0029	0.0021	0.0018	0.0007
U	0.0051	0.0029	0.0021	0.0017	0.0007
$\bar{U}$	0.0043	0.0025	0.0018	0.0013	0.0005
O	0.0027	0.0018	0.0014	0.0011	0.0004
OS	0.0024	0.0016	0.0013	0.0010	0.0004
L	0.0024	0.0017	0.0014	0.0010	0.0004
LS	0.0021	0.0015	0.0013	0.0010	0.0004
M	0.0030	0.0018	0.0014	0.0011	0.0004
H	0.0066	0.0052	0.0040	0.0034	0.0018
RS					
b=0.25	0.0045	0.0025	0.0017	0.0014	0.0006
b=0.50	0.0034	0.0019	0.0016	0.0014	0.0008
b=1.00	0.0014	0.0031	0.0067	0.0082	0.0068
b=1.50	0.0019	0.0112	0.0243	0.0302	0.0290
b=2.00	0.0018	0.0202	0.0456	0.0621	0.0708
US					
b=0.25	0.0037	0.0021	0.0017	0.0014	0.0006
b=0.50	0.0029	0.0017	0.0016	0.0016	0.0008
b=1.00	0.0015	0.0039	0.0076	0.0091	0.0075
b=1.50	0.0025	0.0130	0.0268	0.0326	0.0306
b=2.00	0.0050	0.0230	0.0496	0.0663	0.0740
RN					
b=0.25	0.0015	0.0069	0.0208	0.0359	0.0895
b=0.50	0.0023	0.0009	0.0017	0.0033	0.0121
b=1.00	0.0012	0.0013	0.0032	0.0045	0.0049
b=1.50	0.0006	0.0034	0.0092	0.0130	0.0152
b=2.00	0.0007	0.0063	0.0161	0.0230	0.0294
UN					
b=0.25	0.0015	0.0072	0.0210	0.0363	0.0896
b=0.50	0.0023	0.0010	0.0018	0.0034	0.0123
b=1.00	0.0012	0.0013	0.0033	0.0045	0.0049
b=1.50	0.0006	0.0035	0.0092	0.0130	0.0152
b=2.00	0.0007	0.0063	0.0161	0.0230	0.0293
NS	0.0013	0.0042	0.0136	0.0249	0.0688
NSL	0.0021	0.0007	0.0037	0.0117	0.0526
NSLS	0.0020	0.0009	0.0017	0.0047	0.0242

Tablo 5.15: $p = 5$ için Çok Değişkenli Normal Kitleler için Simülasyonla Elde Edilen Koşulsuz Hata Kare Ortalaması (UMSE) Değerleri ($n_1 = n_2 = 100$)

Tahmin Edici	$\Delta = 0.5087$	$\Delta = 0.9999$	$\Delta = 1.5652$	$\Delta = 1.9998$	$\Delta = 3.0001$
D	0.0014	0.0010	0.0007	0.0006	0.0002
DS	0.0013	0.0009	0.0006	0.0005	0.0002
R	0.0020	0.0014	0.0010	0.0008	0.0003
U	0.0021	0.0015	0.0010	0.0008	0.0003
$\bar{U}$	0.0014	0.0010	0.0007	0.0006	0.0002
O	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
OS	0.0009	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
L	0.0009	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
LS	0.0008	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
M	0.0011	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002
H	0.0029	0.0025	0.0022	0.0015	0.0008
RS					
b=0.25	0.0016	0.0012	0.0009	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0007
b=1.00	0.0009	0.0039	0.0076	0.0091	0.0072
b=1.50	0.0025	0.0133	0.0263	0.0337	0.0312
b=2.00	0.0049	0.0231	0.0493	0.0655	0.0743
US					
b=0.25	0.0014	0.0012	0.0008	0.0006	0.0003
b=0.50	0.0009	0.0009	0.0010	0.0010	0.0007
b=1.00	0.0010	0.0044	0.0081	0.0095	0.0076
b=1.50	0.0029	0.0143	0.0276	0.0349	0.0322
b=2.00	0.0056	0.0246	0.0514	0.0676	0.0761
RN					
b=0.25	0.0016	0.0079	0.0228	0.0384	0.0905
b=0.50	0.0007	0.0009	0.0024	0.0041	0.0128
b=1.00	0.0004	0.0019	0.0043	0.0055	0.0057
b=1.50	0.0008	0.0049	0.0112	0.0149	0.0169
b=2.00	0.0014	0.0083	0.0188	0.0257	0.0317
UN					
b=0.25	0.0016	0.0079	0.0028	0.0383	0.0903
b=0.50	0.0007	0.0009	0.0024	0.0041	0.0127
b=1.00	0.0004	0.0019	0.0043	0.0055	0.0057
b=1.50	0.0008	0.0049	0.0112	0.0150	0.0169
b=2.00	0.0014	0.0083	0.0188	0.0257	0.0317
NS	0.0026	0.0126	0.0339	0.0547	0.1162
NSL	0.0007	0.0021	0.0162	0.0361	0.01016
NSLS	0.0007	0.0013	0.0094	0.0217	0.0695

5.6 Gamma Dağılımına Sahip Kitlelerde Optimal Hata Oranlarının ve Hata Oranı Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması

Gamma dağılımına sahip kitleler için parametrelerin bilindiği durumda elde edilen R_G atama kuralının, normal kitleler için elde edilen R_N atama kuralına göre daha üstün olduğu görülmektedir. Özellikle $\delta_1 = \delta_2$ olduğu Durum 3 ve $\delta_1 = \delta_2 = 1$ olduğu Durum 4 de, kitleler birbirinden uzaklaştıkça R_G atama kuralı kullanıldığında elde edilen hata oranlarındaki düşüş, R_N atama kuralı kullanıldığında elde edilen hata oranlarına göre daha hızlıdır.

Parametreler bilinmediğinde gamma dağılımına sahip kitleler için hata oranlarının analitik ifadelerinin elde edilmesinin zor olduğu Bölüm 3 ' de belirtildi. Bu nedenle parametrelerin bilinmediği durumda hata oranları Bölüm 4 ' de verilen hata oranı tahmin edicilerinden D (plug - in), U ve R göz önüne alınarak tahmin edildi. Buradaki D tahmin edicisi; α^G , α^2 ve α^E optimal hata oranlarında bilinmeyen parametreler yerine örneklemelerden elde edilen tahminlerinin kullanılmasıyla elde edildi. Simülasyon ile her bir kitleden farklı parametrelere göre 200 defa rasgele üretilen $n_1 = n_2 = 25, 50$ birimlik sayılar kullanılarak hesaplanan tahmin değerlerinin ortalamaları alınarak tahmin edicilerin değerleri elde edildi. Sonuçlar Tablo 5.16 - Tablo 5.23 ' de verilmiştir.

Tahmin ediciler karşılaştırıldığında, tüm durumlar için U ve R tahmin edicilerinin aynı performansta olduğu görülmektedir. Durum 1, 3 ve Durum 2 ' nin $n_1 = n_2 = 25$ olması durumunda U ve R tahmin edicileri daha iyi , Durum 2 ' nin $n_1 = n_2 = 50$ olması ve Durum 4 ' ün $n_1 = n_2 = 25$ ve $n_1 = n_2 = 50$ olması durumlarında D tahmin edicisi daha iyi sonuçlar vermektedir. Örneklem hacimi 50 olduğunda, tüm durumlar için elde edilen tahmin değerlerinin optimal değerlere daha yakın olduğu görülmektedir.

Parametrelerin bilindiği durumda olduğu gibi, parametrelerin bilinmediği durumda da elde edilen $R_G(s)$ atama kuralının, $R_N(s)$ atama kuralına göre daha üstün olduğu söylenebilir. δ parametreleri büyük olduğunda gamma dağılımı normal dağılıma yaklaşacağından, $R_N(s)$ atama kuralı $R_G(s)$ atama kuralı kadar iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Aynı durum, parametrelerin bilindiği durumda elde edilen R_G ve R_N atama kuralları için de geçerlidir.

Tablo 5.16: Durum 1 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 25$)

δ_1	δ_2	β	α^G	α^N	$\hat{\alpha}^G$			$\hat{\alpha}^N$		
					D	U	R	D	U	R
2	4	1	0.2648	0.2760	0.2885	0.2862	0.2613	0.2955	0.2733	0.2692
2	5	1	0.1914	0.2052	0.2022	0.2088	0.1964	0.2116	0.2060	0.2004
2	6	1	0.1379	0.1532	0.1510	0.1493	0.1413	0.1624	0.1536	0.1485
2	7	1	0.0990	0.1150	0.1148	0.1019	0.0984	0.1295	0.1142	0.1103
2	8	1	0.0709	0.0869	0.0995	0.0714	0.0731	0.1159	0.0833	0.0794
2	10	1	0.0361	0.0506	0.0538	0.0336	0.0348	0.0745	0.0491	0.0456
3	5	1	0.2977	0.3046	0.3109	0.3168	0.2931	0.3146	0.3019	0.2986
3	6	1	0.2263	0.2353	0.2391	0.2604	0.2338	0.2450	0.2407	0.2359
3	8	1	0.1279	0.1394	0.1599	0.1444	0.1326	0.1689	0.1395	0.1351
3	12	1	0.0384	0.0497	0.0602	0.0335	0.0396	0.0743	0.0506	0.0467
3	14	1	0.0206	0.0303	0.0334	0.0244	0.0269	0.0478	0.0302	0.0283
5	8	1	0.2705	0.2755	0.2917	0.3217	0.2756	0.2947	0.2790	0.2748
5	10	1	0.1709	0.1778	0.2059	0.1930	0.1686	0.2105	0.1729	0.1689
5	15	1	0.0484	0.0564	0.0854	0.0403	0.0493	0.0950	0.0564	0.0523
5	20	1	0.0121	0.0180	0.0361	0.0107	0.0131	0.0480	0.0193	0.0175
8	12	1	0.2583	0.2617	0.2877	0.3028	0.2554	0.2893	0.2523	0.2469
8	16	1	0.1172	0.1225	0.1718	0.1398	0.1224	0.1760	0.1220	0.1186
8	32	1	0.0023	0.0044	0.0179	0.0065	0.0046	0.0263	0.0040	0.0036
15	30	1	0.0532	0.0567	0.1065	0.0617	0.0655	0.1098	0.0558	0.0532

Burada,

α^G : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^G$:Gamma dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$:Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.17: Durum 1 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 50$)

δ_1	δ_2	β	α^G	α^N	$\hat{\alpha}^G$			$\hat{\alpha}^N$		
					D	U	R	D	U	R
2	4	1	0.2648	0.2760	0.2789	0.2714	0.2588	0.2872	0.2717	0.2700
2	5	1	0.1914	0.2052	0.2024	0.1999	0.1938	0.2131	0.2067	0.2048
2	6	1	0.1379	0.1532	0.1424	0.1452	0.1405	0.1558	0.1556	0.1535
2	7	1	0.0990	0.1150	0.1057	0.1015	0.0982	0.1209	0.1153	0.1131
2	8	1	0.0709	0.0869	0.0826	0.0715	0.0698	0.0997	0.0862	0.0837
2	10	1	0.0361	0.0506	0.0445	0.0346	0.0346	0.0632	0.0492	0.0474
3	5	1	0.2977	0.3046	0.3089	0.3106	0.2958	0.3136	0.3059	0.3043
3	6	1	0.2263	0.2353	0.2269	0.2392	0.2288	0.2332	0.2366	0.2344
3	8	1	0.1279	0.1394	0.1436	0.1316	0.1288	0.1536	0.1369	0.1346
3	12	1	0.0384	0.0497	0.0488	0.0368	0.0378	0.0627	0.0488	0.0471
3	14	1	0.0206	0.0303	0.0274	0.0207	0.0218	0.0409	0.0302	0.0288
5	8	1	0.2705	0.2755	0.2785	0.2993	0.2756	0.2815	0.2798	0.2781
5	10	1	0.1709	0.1778	0.1787	0.1766	0.1681	0.1838	0.1764	0.1737
5	15	1	0.0484	0.0564	0.0658	0.0448	0.0476	0.0759	0.0547	0.0531
5	20	1	0.0121	0.0180	0.0206	0.0111	0.0128	0.0307	0.0203	0.0193
8	12	1	0.2583	0.2617	0.2810	0.2917	0.2519	0.2831	0.2575	0.2518
8	16	1	0.1172	0.1225	0.1443	0.1175	0.1153	0.1485	0.1205	0.1185
8	32	1	0.0023	0.0044	0.0072	0.0019	0.0021	0.0140	0.0043	0.0039
15	30	1	0.0532	0.0567	0.0821	0.0425	0.0546	0.0857	0.0555	0.0538

Burada,

α^G : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^G$:Gamma dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$:Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Durum 4: $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ve $\beta_1 < \beta_2$ ise gamma dağılımları, konum parametreleri optimal sınıflandırma kuralı β_1 ve β_2 olan üstel dağılımlara dönüşürler. Bu durumda β_1 ve β_2 parametrelili üstel dağılıma sahip Π_1 ve Π_2 kitleleri için R_E optimal sınıflandırma kuralı

$$R_E: \begin{cases} x_0 < \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \text{ ise } I(x_0), \Pi_1 \text{'e} \\ \text{diğer durumda} \quad \quad \quad, \Pi_2 \text{'ye atanır.} \end{cases} \quad (3.33)$$

ile verilir. R_E 'deki E harfi üstel dağılımı göstermektedir. Üstel kitlelerde diskriminasyon problemini Adegboye (1993) ayrıntılı olarak çalışmıştır.

3.2.1.i Hata Oranları

Burada, bir önceki alt bölümde elde edilen sınıflandırma kurallarının her biri için hata oranları elde edilmeye çalışılacaktır.

Teorem 3.1: Π_1 ve Π_2 , (δ_1, β_1) ve (δ_2, β_2) parametreleri ile gamma dağılımına sahip kitleler olmak üzere $\delta_1 < \delta_2$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ise R_G kuralı kullanıldığında toplam hatalı sınıflandırma olasılığı

$$\alpha^G = \frac{1}{2} (1 - \Gamma_{\Pi_1}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_1\right) + \Gamma_{\Pi_2}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_2\right)) \quad (3.34)$$

dır, burada

$$c_1 = \exp\left\{\ln\left(\frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\delta_2)}\beta^{(\delta_1 - \delta_2)}\right) / (\delta_1 - \delta_2)\right\} \quad (3.35)$$

ve

$$\Gamma_{\Pi_i}\left(\frac{c_1}{\beta}, \delta_i\right) = \frac{1}{\Gamma(\delta_i)} \int_0^{c_1/\beta} y^{\delta_i-1} e^{-y} dy, \quad i = 1, 2 \quad (3.36)$$

tam olmayan gamma fonksiyonudur.

İspat : B_1 ve B_2 Bölüm 1 ' de tanımlanan sınıflandırma bölgeleri olmak üzere, $P_{R_G}(X_0 \in B_j / \Pi_i)$ olasılığı, $I(x_0)$ ile gösterilen x_0 ölçümlü birimin Π_i ' de olduğu bilindiğinde, R_G kuralı kullanılarak Π_j ' ye hatalı atanması olasılığı olsun. Böylece

Tablo 5.18: Durum 2 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 25$)

ν_1	ν_2	α^{χ^2}		$\hat{\alpha}^{\chi^2}$			$\hat{\alpha}^N$		
		α^{χ^2}	α^N	D	U	R	D	U	R
2	4	0.3161	0.3327	0.3104	0.3159	0.3125	0.3281	0.3307	0.3275
2	6	0.2065	0.2293	0.2080	0.2091	0.2046	0.2313	0.2285	0.2243
2	8	0.1370	0.1623	0.1391	0.1388	0.1335	0.1645	0.1597	0.1532
2	10	0.0916	0.1173	0.0932	0.0892	0.0861	0.1189	0.1188	0.1131
2	12	0.0617	0.0863	0.0634	0.0652	0.0603	0.0881	0.0875	0.0843
2	20	0.0130	0.0289	0.0145	0.0154	0.0140	0.0305	0.0303	0.0279
4	6	0.3647	0.3717	0.3689	0.3657	0.3632	0.3760	0.3708	0.3687
4	8	0.2648	0.2760	0.2619	0.2607	0.2562	0.2735	0.2702	0.2661
4	10	0.1914	0.2052	0.1968	0.1911	0.1862	0.2105	0.2040	0.1994
4	14	0.0990	0.1150	0.1004	0.1002	0.0959	0.1164	0.1128	0.1078
4	18	0.0506	0.0661	0.0539	0.0515	0.0486	0.0693	0.0662	0.0624
6	8	0.3880	0.3921	0.3939	0.3376	0.3846	0.3979	0.3964	0.3937
6	10	0.2977	0.3046	0.2947	0.2922	0.2885	0.3020	0.2984	0.2955
6	14	0.1707	0.1812	0.1746	0.1731	0.1679	0.1851	0.1806	0.1770
6	20	0.0707	0.0828	0.0723	0.0746	0.0711	0.0844	0.0845	0.0803
10	20	0.1709	0.1778	0.1696	0.1662	0.1623	0.1767	0.1719	0.1674
10	30	0.0482	0.0564	0.0503	0.0505	0.0474	0.0584	0.0604	0.0567
10	40	0.0121	0.0180	0.0129	0.0129	0.0113	0.0187	0.0191	0.0176
20	40	0.0926	0.0973	0.0942	0.0933	0.0873	0.0988	0.0986	0.0942
40	80	0.0315	0.0341	0.0322	0.0320	0.0288	0.0348	0.0359	0.0331

Burada,

α^{χ^2} : Ki-kare dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^{\chi^2}$:Ki kare dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$:Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.19: Durum 2 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 50$)

ν_1	ν_2	α^{χ^2}	α^N	$\hat{\alpha}^{\chi^2}$			$\hat{\alpha}^N$		
				D	U	R	D	U	R
2	4	0.3161	0.3327	0.3126	0.3173	0.3151	0.3299	0.3286	0.3272
2	6	0.2065	0.2293	0.2079	0.2042	0.2020	0.2308	0.2241	0.2221
2	8	0.1370	0.1623	0.1383	0.1379	0.1354	0.1636	0.1616	0.1589
2	10	0.0916	0.1173	0.0916	0.0908	0.0883	0.1175	0.1150	0.1131
2	12	0.0617	0.0863	0.0620	0.0628	0.0613	0.0868	0.0875	0.0856
2	20	0.0130	0.0289	0.0130	0.0132	0.0124	0.0289	0.0306	0.0294
4	6	0.3647	0.3717	0.3685	0.3669	0.3662	0.3754	0.3706	0.3692
4	8	0.2648	0.2760	0.2631	0.2618	0.2591	0.2746	0.2752	0.2734
4	10	0.1914	0.2052	0.1929	0.1924	0.1902	0.2068	0.2050	0.2027
4	14	0.0990	0.1150	0.1014	0.1003	0.0980	0.1174	0.1145	0.1124
4	18	0.0506	0.0661	0.0499	0.0490	0.0474	0.0654	0.0652	0.0632
6	8	0.3880	0.3921	0.3879	0.3885	0.3878	0.3921	0.3921	0.3915
6	10	0.2977	0.3046	0.3010	0.2984	0.2969	0.3079	0.3051	0.3035
6	14	0.1707	0.1812	0.1722	0.1740	0.1713	0.1827	0.1821	0.1801
6	20	0.0707	0.0828	0.0716	0.0731	0.0712	0.0837	0.0831	0.0808
10	20	0.1709	0.1778	0.1714	0.1770	0.1683	0.1784	0.1758	0.1738
10	30	0.0482	0.0564	0.0488	0.0482	0.0466	0.0569	0.0562	0.0547
10	40	0.0121	0.0180	0.0127	0.0127	0.0120	0.0186	0.0195	0.0185
20	40	0.0926	0.0973	0.0927	0.0918	0.0896	0.0975	0.0968	0.0944
40	80	0.0315	0.0341	0.0313	0.0330	0.0313	0.0339	0.0350	0.0338

Burada,

α^{χ^2} : Ki-kare dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^{\chi^2}$: Ki kare dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$: Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.20: Durum 3 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 25$)

δ	β_1	β_2	α^G	α^N	$\hat{\alpha}^G$			$\hat{\alpha}^N$		
					D	U	R	D	U	R
2	2	3	0.3917	0.3918	0.3984	0.3920	0.3902	0.3986	0.3911	0.3892
2	2	4	0.3196	0.3207	0.3268	0.3221	0.3174	0.3286	0.3189	0.3158
2	2	5	0.2682	0.2720	0.2756	0.0752	0.2666	0.2807	0.2744	0.2712
2	2	7	0.2001	0.2146	0.2076	0.2172	0.1976	0.2229	0.2158	0.2116
2	2	10	0.1414	0.1774	0.1487	0.1619	0.1405	0.1825	0.1776	0.1729
2	2	15	0.0913	0.1575	0.0980	0.1097	0.0871	0.1572	0.1566	0.1537
3	2	4	0.2803	0.2821	0.2908	0.2977	0.2717	0.2935	0.2779	0.2738
3	2	5	0.2214	0.2277	0.2331	0.2429	0.2175	0.2404	0.2226	0.2187
3	2	7	0.1481	0.1699	0.1603	0.1697	0.1422	0.1809	0.1673	0.1637
3	2	10	0.0912	0.1378	0.1024	0.1175	0.0854	0.1434	0.1367	0.1342
3	2	15	0.0490	0.1215	0.0579	0.0688	0.0445	0.1218	0.1219	0.1186
5	2	4	0.2237	0.2273	0.0263	0.2636	0.2223	0.2594	0.2274	0.2235
5	2	6	0.1154	0.1364	0.1449	0.1632	0.1163	0.1611	0.1417	0.1369
5	2	10	0.0409	0.0928	0.0599	0.0825	0.0384	0.1023	0.0924	0.0884
5	2	15	0.0154	0.0788	0.0264	0.0396	0.0137	0.0838	0.0784	0.0745
8	2	5	0.1011	0.1173	0.1501	0.1771	0.0984	0.1611	0.1186	0.1151
8	2	10	0.0134	0.0567	0.0308	0.0547	0.0141	0.0710	0.0557	0.0516
8	2	15	0.0030	0.0447	0.0094	0.0201	0.0024	0.0557	0.0445	0.0419
15	2	5	0.0397	0.0594	0.0865	0.1292	0.0384	0.0996	0.0581	0.0553
30	2	4	0.0296	0.0410	0.1039	0.1681	0.0259	0.1105	0.0407	0.0374

Burada,

α^G : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^G$:Gamma dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$:Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.21: Durum 3 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 50$)

δ	β_1	β_2	α^G		$\hat{\alpha}^G$			$\hat{\alpha}^N$		
			α^G	α^N	D	U	R	D	U	R
2	2	3	0.3917	0.3918	0.3880	0.3881	0.3998	0.3882	0.3903	0.3890
2	2	4	0.3196	0.3207	0.3162	0.3196	0.3157	0.3179	0.3185	0.3166
2	2	5	0.2682	0.2720	0.2652	0.2672	0.2627	0.2701	0.2693	0.2677
2	2	7	0.2001	0.2146	0.1978	0.2017	0.1955	0.2134	0.2127	0.2111
2	2	10	0.1414	0.1774	0.1399	0.1457	0.1379	0.1754	0.1768	0.1756
2	2	15	0.0913	0.1575	0.0906	0.0962	0.0877	0.1534	0.1583	0.1568
3	2	4	0.2803	0.2821	0.2970	0.2991	0.2780	0.2989	0.2825	0.2805
3	2	5	0.2214	0.2277	0.2369	0.2387	0.2184	0.2430	0.2259	0.2239
3	2	7	0.1481	0.1699	0.1611	0.1653	0.1462	0.1811	0.1706	0.1686
3	2	10	0.0912	0.1378	0.1010	0.1050	0.0905	0.1442	0.1380	0.1363
3	2	15	0.0490	0.1215	0.0555	0.0596	0.0477	0.1250	0.1202	0.1181
5	2	4	0.2237	0.2273	0.2399	0.2513	0.2223	0.2433	0.2275	0.2258
5	2	6	0.1154	0.1364	0.1308	0.1460	0.1162	0.1491	0.1377	0.1358
5	2	10	0.0409	0.0928	0.0510	0.0616	0.0424	0.0981	0.0933	0.0920
5	2	15	0.0154	0.0788	0.0211	0.0265	0.0155	0.0826	0.0802	0.0789
8	2	5	0.1011	0.1173	0.1014	0.1270	0.0987	0.1209	0.1171	0.1140
8	2	10	0.0134	0.0567	0.0168	0.0252	0.0132	0.0561	0.0561	0.0543
8	2	15	0.0030	0.0447	0.0043	0.0083	0.0025	0.0444	0.0440	0.0427
15	2	5	0.0397	0.0594	0.0663	0.1004	0.0354	0.0822	0.0566	0.0555
30	2	4	0.0296	0.0410	0.0641	0.1212	0.0260	0.0729	0.0388	0.0374

Burada,

α^G : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^G$:Gamma dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$:Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.22: Durum 4 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 25$)

δ	β_1	β_2	α^E	α^N	$\hat{\alpha}^E$			$\hat{\alpha}^N$		
					D	U	R	D	U	R
1	1	2	0.3750	0.3754	0.3728	0.3724	0.3698	0.3740	0.3720	0.3705
1	1	3	0.3075	0.3110	0.3062	0.3029	0.2992	0.3117	0.3126	0.3094
1	1	4	0.2638	0.2734	0.2629	0.2610	0.2561	0.2556	0.2736	0.2707
1	1	5	0.2325	0.2505	0.2319	0.2316	0.2265	0.2534	0.2512	0.2478
1	1	6	0.2088	0.2361	0.2085	0.2075	0.2020	0.2391	0.2360	0.2328
1	1	7	0.1901	0.2268	0.1900	0.1897	0.1842	0.2297	0.2262	0.2225
1	1	8	0.1749	0.2207	0.1749	0.1761	0.1705	0.2232	0.2194	0.2161
1	1	9	0.1623	0.2165	0.1623	0.1632	0.1585	0.2187	0.2140	0.2122
1	1	10	0.1516	0.2136	0.1517	0.1522	0.1463	0.2154	0.2120	0.2091
1	1	11	0.1424	0.2115	0.1425	0.1427	0.1358	0.2129	0.2095	0.2061
1	1	12	0.1343	0.2097	0.1346	0.1333	0.1285	0.2111	0.2082	0.2044
1	1	13	0.1273	0.2086	0.1275	0.1262	0.1217	0.2096	0.2065	0.2031
1	1	14	0.1210	0.2077	0.1213	0.1208	0.1156	0.2084	0.2049	0.2024
1	1	15	0.1154	0.2068	0.1157	0.1157	0.1112	0.2075	0.2036	0.2012
1	1	16	0.1104	0.2062	0.1107	0.1104	0.1053	0.2067	0.2031	0.2001
1	1	17	0.1058	0.2056	0.1061	0.1069	0.1014	0.2060	0.2025	0.1993
1	1	18	0.1016	0.2051	0.1020	0.1036	0.0992	0.2054	0.2019	0.1985
1	1	19	0.0978	0.2046	0.0982	0.0999	0.0953	0.2049	0.2016	0.1981
1	1	20	0.0943	0.2042	0.0947	0.0961	0.0917	0.2045	0.2013	0.1977

Burada,

α^E : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^E$: Üstel dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$: Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

Tablo 5.23: Durum 4 için Optimal Hata Oranları ve Tahmin Değerleri
($n_1 = n_2 = 50$)

δ	β_1	β_2	α^E		$\hat{\alpha}^E$			$\hat{\alpha}^N$		
			α^E	α^N	D	U	R	D	U	R
1	1	2	0.3750	0.3754	0.3754	0.3749	0.3736	0.3761	0.3744	0.3736
1	1	3	0.3075	0.3110	0.3082	0.3070	0.3054	0.3125	0.3109	0.3092
1	1	4	0.2638	0.2734	0.2646	0.2650	0.2629	0.2755	0.2734	0.2718
1	1	5	0.2325	0.2505	0.2334	0.2321	0.2290	0.2527	0.2511	0.2496
1	1	6	0.2088	0.2361	0.2097	0.2072	0.2047	0.2382	0.2363	0.2346
1	1	7	0.1901	0.2268	0.1910	0.1884	0.1855	0.2287	0.2268	0.2257
1	1	8	0.1749	0.2207	0.1759	0.1734	0.1704	0.2223	0.2206	0.2192
1	1	9	0.1623	0.2165	0.1632	0.1612	0.1596	0.2178	0.2167	0.2150
1	1	10	0.1516	0.2136	0.1525	0.1516	0.1495	0.2147	0.2134	0.2115
1	1	11	0.1424	0.2115	0.1432	0.1420	0.1394	0.2123	0.2111	0.2091
1	1	12	0.1343	0.2097	0.1352	0.1337	0.1314	0.2106	0.2092	0.2071
1	1	13	0.1273	0.2086	0.1281	0.1271	0.1247	0.2092	0.2072	0.2062
1	1	14	0.1210	0.2077	0.1219	0.1217	0.1190	0.2081	0.2060	0.2050
1	1	15	0.1154	0.2068	0.1162	0.1162	0.1133	0.2072	0.2054	0.2041
1	1	16	0.1104	0.2062	0.1112	0.1113	0.1089	0.2065	0.2047	0.2032
1	1	17	0.1058	0.2056	0.1066	0.1063	0.1041	0.2059	0.2040	0.2026
1	1	18	0.1016	0.2051	0.1024	0.1023	0.1000	0.2053	0.2035	0.2021
1	1	19	0.0978	0.2046	0.0986	0.0988	0.0961	0.2048	0.2029	0.2017
1	1	20	0.0943	0.2042	0.0950	0.0953	0.0921	0.2044	0.2025	0.2012

Burada,

α^E : Gamma dağılımı için optimal hata oranını,

α^N : Normal dağılım için optimal hata oranını,

$\hat{\alpha}^E$: Üstel dağılımı için hata oranı tahmin değerini,

$\hat{\alpha}^N$: Normal dağılım için hata oranı tahmin değerini

göstermektedir ve D, U, R hata oranı tahmin edicileridir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE TARTIŞMA

Simülasyonla elde edilen sonuçlarının genel bir değerlendirilmesi aşağıdaki gibi verilebilir. Genel olarak normal dağılıma sahip kitleler için tahmin ediciler karşılaştırıldığında, parametrik tahmin edicilerin daha iyi sonuçlar verdiği ancak Δ' 'nın ve örneklem hacimlerinin küçük olması durumunda sırasıyla NSLS, NSL ve NS düzlenmiş tahmin edicilerin performanslarının daha iyi olduğu gözlemlendi. Örneklem hacimleri arttığında; tüm tahmin edicilerin UMSE değerlerinin azaldığı ancak Δ' 'nın büyük değerlerinde düzlenmiş tahmin edicilerin UMSE değerlerinin arttığı söylenebilir.

Parametrik tahmin ediciler karşılaştırıldıklarında, genelde en iyiden en kötüye LS, L, OS, O, M, DS, $\bar{U}$ ve D sıralamasının gözlemlendiği ancak bu sıralamanın bazen değiştiği görüldü. Örneklem hacimleri arttığında bu tahmin edicilerin hemen hemen aynı performansa sahip olduğu söylenebilir.

Parametrik olmayan tahmin ediciler karşılaştırıldıklarında H tahmin edicisi, R ve U tahmin edicilerine göre daha zayıf ve R ile U tahmin edicilerinin aynı performansa sahip olmalarına rağmen bazen U tahmin edicisinin daha iyi olduğu sonucuna varıldı.

RS, US, RN ve UN düzlenmiş tahmin edicileri için, örneklem hacimlerinin ve Δ' 'nın farklı değerleri için düzleme seviyesi b' 'nin de farklı olabileceği gözlemlendi. Ayrıca NSLS, NSL ve NS düzlenmiş tahmin edicileri karşılaştırıldıklarında NSLS 'nin en iyi, bunu NSL 'nin izlediği görülmektedir. Parametrelerin bazı kombinasyonlarında bu sıralamanın değişebileceği söylenebilir.

Gözlem sayıları arttığında, tahmin edicilerin UMSE değerlerinin de arttığı görülmektedir.

Fisher tarafından önerilen alt kesim 1.1.1 de verilen dağılımdan bağımsız kural, gamma dağılımına sahip kitlelerde iyi sonuç vermemektedir. Bu nedenle gamma dağılımına sahip kitlelerden alınan rasgele gözlemlerin atanması durumunda, gamma dağılımlı kitleler için elde edilen R_G optimal atama kuralının kullanılması gerekir.

Gamma dağılımlı kitleler için gözlemlerin atanmasında; gamma dağılımlı kitleler için parametrelerin bilindiği durumda elde edilen R_G atama kuralına göre bulunan optimal hata oranı, her zaman normal kitleler için elde edilen R_N atama kuralına göre bulunan optimal hata oranı değerinden daha küçüktür. Bu da gamma dağılımına sahip gözlemlerin atanmasında R_G atama kuralının kullanılması gerektiğini göstermektedir. Özellikle $\delta_1 = \delta_2$ olduğunda, kitleler birbirinden uzaklaştıkça R_G atama kuralı

kullanıldığında elde edilen optimal hata oranındaki düşüş, R_N atama kuralı kullanıldığında elde edilen optimal hata oranına göre daha hızlıdır. Ancak δ parametresinin büyük olduğu durumda, gamma dağılımı normal dağılıma yaklaşıcağından, R_G ve R_N atama kurallarının performanslarının hemen hemen eşdeğer olduğu söylenebilir. Bu durum $R_G(s)$ ve $R_N(s)$ örneklemelere bağlı atama kuralları için de geçerlidir.

Gamma dağılımlı kitleler için, göz önüne alınan D, U ve R tahmin edicileri karşılaştırıldıklarında, tüm durumlar için U ve R parametrik olmayan tahmin edicilerin performanslarının aynı olduğu ancak örneklem hacimleri arttığında D tahmin edicisinin daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Bununla birlikte örneklem hacimleri arttığında tahmin değerlerinin optimal değerlere daha yakın olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada ele alınmayan bir çok durum ileriki çalışmalara baz teşkil edebilir. Özellikle örneklem diskriminant fonksiyonunun dağılımının çalışılması önemli bir noktadır. Bununla birlikte hata oranları tahmin edicilerinin istatistiksel özelliklerinin ve dağılımlarının çalışılması da önemlidir. Ayrıca tahmin edicilerin asimptotik özelliklerine de bakılabilir. Düzleme seviyesi b ile Δ arasındaki ilişki, varyans analizi ile incelenebilir. b değeri farklı yollarla da bulunabilir. Gerçek veriler kullanılarak da atama kurallarının ve tahmin edicilerin değerlendirilmesi yapılabilir. Tahmin ediciler, UMSE ölçütü yerine başka ölçütler kullanılarak da karşılaştırılabilirler.

Burada normal dağılıma sahip olmayan kitlelerde diskriminasyon problemi; gamma dağılımına sahip kitleler ve kesikli rasgele değişkenlerin dağılımına sahip kitleler göz önüne alınarak verilmeye çalışıldı. Ancak başka dağılımlara sahip kitleler de göz önüne alınarak diskriminasyon problemi irdelenebilir. Yine kesikli ve sürekli rasgele değişkenleri birlikte içeren gözlemlerin, atanması problemi de diskriminant analizinde çalışılması gereken bir konudur.

Mahalanobis uzaklığı yerine, başka uzaklıklar alınarak da diskriminasyon yapılabilir. Ayrıca çoklu diskriminant analizi ve ridge türü diskriminant analizi konuları da irdelenebilir.

Son yıllarda diskriminant analizi ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları: karma normal dağılımlı kitleler arasında diskriminant analizi (Hastie ve Tibshirani(1996)), t dağılımına sahip kitleler arasında diskriminasyon(Sutradher(1990)), ilişkili kesikli ve sürekli değişkenler arasında diskriminasyon(Leung(1996)), diskriminant analizinde olabilirlik oran testinin bootstrap genellemesi(Gray ve arkadaşları(1996)), lineer ve öklid anlamında diskriminant fonksiyonlarının karşılaştırılması(Koolaard ve Lawoko(1996)) ve çok gruplu lineer diskriminant analizinde hata oranları tahmini(Hirst(1996), Park ve Kshirsagar(1996)) dır. Bu çalışmalardan da görüldüğü gibi, diskriminant analizi istatistikte üzerinde çalışılması gereken önemli bir sahadır.

KAYNAKLAR

- ADEGBOYE, O. S., 1993.** The optimal classification rule for exponential populations. *Austral. J. Statist.*, 35, 185-194.
- ANDERSON, T. W., 1951.** Classification by multivariate analysis. *Psychometrika*, 16, 31-50,
- ANDERSON, T. W., 1958.** An introduction to multivariate statistical analysis. New York, John Wiley & Sons. Inc.
- ANDERSON, T. W., 1973.** An asymptotic expansion of the distribution of the studentized classification statistics W. *Annals of Statistics.*, 1, 964-972.
- ANDERSON, T. W., 1984.** An introduction to multivariate statistical analysis. Second edition, New York, John Wiley & Sons. Inc.
- ATAKAN, C., 1990.** Discrete discriminant analysis and dependence. MSc Thesis, Unpublished, METU.
- ATAKAN, C., 1995.** Discrete discriminant analysis and dependence. *Hacettepe Bulletin of Naturel Science and Engineering*, 24, 91-107.
- BAHADUR, R. R., 1961.** A representation of the joint distribution of response to n dichotomous items. In *studies in Item Analysis and Prediction*, H. Solomon ed., Stanford, Calif.: Stanford University Press., 158-168.
- BERKSON, J. T., 1955.** Maximum likelihood and minimum ki-kare estimation of the logistic function. *Journal of the American Stat. Assoc.*, 50,130-162.
- BISHOP, Y. M. M., FIENBERG, S. E. and HOLLAND, P. W., 1975.** Discrete multivariate analysis: Theory and practise. The MIT Press.
- BOWKER, A. H. and SITGREAVES, R., 1961.** An asymptotic expansion for the distribution function of the W classification statistics. In *studies in Item Analysis and Prediction*, H. Solomon ed., Stanford, Calif.: Stanford University Press., 293-310.
- DALL ' AGLIO, G., 1972.** Frechet classes and compatibility of distribution functions. *Symposia Mathematica*, 9, 131-150.
- DAS GUPTA, S., 1974.** Probability inequalities and errors in classification. *Annals of Statistics*, 2, 751-762.
- DUNN, O. J., and VARADY, P. D. 1966.** Probabilities of correct classification in discriminant analysis. *Biometrics*, 22, 908-924.
- EFRON, B., 1979.** Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7, 1-26.

- EFRON, B., 1983.** Estimating the error rate of prediction rule: Improvement of cross validation. *Journal of the American Stat. Assoc.*, 78, 316-331.
- EFRON, B., and GONG, G., 1983.** A leisurely look at the bootstrap, the jackknife and cross validation. *The American Statistician*, 37, 36-48.
- FIENBERG, S. E., 1977.** The analysis of cross classified categorical data. Cambridge Mass. MIT Press.
- FISHER, R. A., 1936.** The use of the multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*, 7, 179-188.
- GLICK, N., 1978.** Additive estimators for probability of correct classification. *Pattern Recognition*, 10, 211-222.
- GOLDSTEIN, M. and DILLON, W. R., 1978.** Discrete discriminant analysis. John Wiley & Sons. Inc.
- GRAY, H. L., BAEK, J., WOODWARD, W. A., MIER, J. and FISK, M., 1996.** A bootstrap generalized likelihood ratio test in discriminant analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, 22, 137-158.
- HASTIE, T. and TIBSHIRANI, R., 1996.** Discriminant analysis by gaussian mixtures. *J. R. Statist. Soc. B*, 58, 155-176.
- HILLS, M., 1966.** Allocation rules and their error rates. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 28, 1-20.
- HIRST, D., 1996.** Error rate estimation in multiple group linear discriminant analysis. *Technometrics*, 38, 389-399.
- JOHN, S., 1961.** Errors in discrimination. *Annals of Mathematical Statistics*, 32, 1125-1144.
- KABE, D. G., 1963.** Some results on the distribution of two random matrices used in classification procedures. *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 181-185.
- KARSON, M. J., 1982.** Multivariate statistical methods. The Iowa State University Press.
- KOOLAARD, J. P. and LAWOKO, C. R. O., 1996.** The Linear and euclidian discriminant functions: A comparison via asymptotic expansions and simulation study. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 25, 2989-3011.
- LACHENBRUCH, P. A., 1967.** An almost unbiased method of obtaining confidence intervals for the probability of misclassification in discriminant analysis. *Biometrics*, 23, 639-645.
- LACHENBRUCH, P. A., 1968.** On expected probability of misclassification in discriminant analysis, necessary sample size and a relation with the multiple correlation coefficient. *Biometrics*, 24, 823-834.

- LACHENBRUCH, P. A. and MICKEY, M. R., 1968.** Estimation of error rates in discriminant analysis. *Technometrics*, 10, 1-11.
- LACHENBRUCH, P. A., 1975.** Discriminant analysis. New York, Hafner Press.
- LEUNG, C. Y., 1996.** Error rates for classifying observations based on binary and continuous variables with covariates. *Computational Statistics and Data Analysis*, 21, 627-645.
- McCULLAGH, P., 1989.** Models for discrete multivariate response. I.S.I. 47th Session, Paris, CI-28, 2, 407-417.
- MCLACHLAN, G. J., 1974a.** Estimation of the errors of misclassification on the criterion asymptotic mean squared error. *Technometrics*, 16, 255-260.
- MCLACHLAN, G. J., 1974b.** An asymptotic unbiased technique for estimation the error rates in discriminant analysis. *Biometrics*, 30, 239-249.
- MCLACHLAN, G. J., 1974c.** The relationship in terms of asymptotic mean squared error between the separate problems of estimating each of three types of error rate of the linear discriminant function. *Technometrics*, 16, 569-575.
- MCLACHLAN, G. J., 1980.** The efficiency of Efron 's bootstrap approach applied to error rate estimation in discriminant analysis. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 11, 273-279.
- MOORE, D. H., 1973.** Evaluation of five discrimination procedures for binary variables. *Journal of the American Stat. Assoc.*, 68, 399-404.
- MORAN, M. A., 1975.** On the estimation of errors of allocation associated with a linear discriminat function. *Biometrika*, 62, 141-148.
- OKAMOTO, M., 1963.** An asymptotic expansion for the distribution of the linear discriminant function. *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 1286-1301.
- PAGE, J. T., 1985.** Error rate estimation in discriminant analysis. *Biometrika*, 63, 239-244.
- PARK, P. S. and KSHIRSAGAR, A. M., 1996.** Chance of misclassification in the case of several normal populations. *Austral. J. Statist.*, 38, 75-82.
- RIPLEY, B. D., 1987.** Stochastic Simulation. New York, John Wiley & Sons. Inc.
- SEDRANSK, N. and OKAMOTO, M., 1971.** Estimation of probabillites of miscalassification for a linear discriminant function in the univariate normal case. *Annls of the Institute of Statistical Mathematics*, 23, 419-435.
- SEBER, G. A. F., 1984.** Multivariate observations. John Wiley & Sons. Inc.
- SITGREAVES, R., 1952.** On the distribution of the random matrices used in classification procedures. *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 263-270.

- SITGREAVES, R., 1961.** Some results on the distribution of the W classification statistics. In studies in Item Analysis and Prediction, H. Solomon ed., Stanford, Calif. Stanford University Press., 241-251.
- SMITH, C. A. B., 1947.** Some examples of discrimination. *Annals of Eugenics*, 18, 272-282.
- SNAPINN, S. M., 1983.** An evaluation of smoothed error rate estimators in discriminant analysis. Institute of Statistics Mimeo Series No. 1438, University of North Carolina at Chapel Hill.
- SNAPINN, S. M. and KNOKE, J. D., 1984.** Classification error rate estimators evaluation by unconditional mean squared error. *Technometrics*, 26, 371-378.
- SNAPINN, S. M. and KNOKE, J. D., 1985.** An evaluation of smoothed classification error rate estimators. *Technometrics*, 27, 199-205.
- SORUM, M. J., 1971.** Estimating the conditional probability of misclassification. *Technometrics*, 13, 333-343.
- SORUM, M. J., 1972.** Estimating the expected and the optimal probabilities of misclassification. *Technometrics*, 14, 935-943.
- SORUM, M. J., 1973.** Estimating the expected probability of misclassification for a rule based on the linear discriminant function: Univariate normal case. *Technometrics*, 15, 329-339.
- SUTRADHER, B. C., 1990.** Discrimination of observations into one of two populations. *Biometrics*, 46, 827-835.
- TEICHROEW, D., and SITGREAVES, R., 1961.** Computation of an empirical sampling distribution for the W classification statistics. In studies in Item Analysis and Prediction, H. Solomon ed., Stanford, Calif. Stanford University Press., 241-251.
- TOUSSAINT, G. T., 1974.** Bibliography on estimation of misclassification. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT - 20, 472-339.
- VIOLLAZ, A. J., SFER, A. M. and SALVATIERRA, S. M., 1995.** An approximation of the unconditional error rates of the sample linear discriminant function. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 24, 1941-1961.
- WELCH, B. L., 1939.** Note on the discriminant functions. *Biometrika*, 31, 218-220.
- WALD, A., 1944.** On a statistical problem arising in the classification of an individual into one of two groups. *Annals of Mathematical Statistics*, 15, 145-162.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Sivas Zara ' da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Sivas ' ta tamamladı. 1986 yılında, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü ' nden İstatistikçi olarak mezun oldu. 1990 yılında, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı ' nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1990 yılında, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı ' nda Doktora öğrenimine başladı.

1988 yılından beri Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü ' nde, Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir kız çocuğu vardır.

