

**T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL MODELLERİN
OLUŞTURULMASINDA KULLANILAN
YÖNTEMLERİN İNCELENMESİ VE PEARSON TİP IV
DAĞILIŞININ KOŞULLU BELİRLEME YÖNTEMİ İLE
ELDE EDİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

GÜLNUR MAY

**DANIŞMAN
PROF.DR. ALİ KEMAL ŞEHİRLİOĞLU**

İZMİR - 2019

TEZ ONAY SAYFASI



YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İki Değişkenli İstatistiksel Modellerin Oluşturulmasında Kullanılan Yöntemlerin İncelenmesi ve Pearson Tip IV dağılışının Koşullu belirleme Yöntemi İle Elde Edilmesi Üzerine Bir Çalışma” adlı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**İki Değişkenli İstatistiksel Modellerin Oluşturulmasında Kullanılan
Yöntemlerin İncelenmesi ve Pearson Tip IV dağılışının Koşullu belirleme
Yöntemi İle Elde Edilmesi Üzerine Bir Çalışma**

Gülnur MAY

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

Ekonometri Programı

İki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonlarının oluşturulmasında birçok istatistik yöntem kullanılmıştır. Bu tezde yöntemlerden bazıları incelenmiştir. Özellikler koşullu dağılımlar ile belirleme yöntemi ele alınarak Pearson Tip IV dağılımı için iki değişkenli bir model elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Pearson Tip IV Dağılımı, İki Değişkenli Dağılımlar, İstatistiksel Modellerin Koşullu Belirlenmesi.

ABSTRACT

Master's Thesis

A study on the methods used in the construction of two-variable statistical models and obtaining Pearson type IV distribution by conditional specification method.

Gülnur MAY

Dokuz Eylül University

Graduate School of Social Sciences

Department of Econometrics

Econometrics Program

Many statistical methods have been used to construct two variable probability density functions. In this study, some of the methods were examined. In particular, a two-variable model for Pearson Type IV distribution was obtained by considering the method of specification with conditional distributions.

Keywords: Pearson Type IV distribution, Bivariate distribution, Conditional specification of statistical models.

**İKİ DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL MODELLERİN
OLUŞTURULMASINDA KULLANILAN YÖNTEMLERİN İNCELENMESİ
VE PEARSON TİP IV DAĞILIŞININ KOŞULLU BELİRLEME YÖNTEMİ
İLE ELDE EDİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA
İÇİNDEKİLER**

TEZ ONAY SAYFASI	ii
YEMİN METNİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLER LİSTESİ	ix
EKLER LİSTESİ	x
GİRİŞ	1

**BİRİNCİ BÖLÜM
BAĞIMLILIK ÖLÇÜMLERİ**

1.1. TOPLAM BAĞIMLILIK	3
1.1.1. Ortak Tam Bağımlılık	3
1.1.2. Monoton Bağımlılık	4
1.1.3. Fonksiyonel ve Kapalı Bağımlılık	5
1.2. BAĞIMLILIĞIN KÜRESEL ÖLÇÜMLERİ	6
1.3. PEARSON'IN ÇARPIM MONENT KORELASYON KATSAYI	8
1.3.1. Negatif Olmayan Değişkenler Arasındaki Korelasyon	9
1.3.2. Korelasyonun Yorumlanması	11
1.3.3. Korelasyon Katsayısının Birçok Yüzü	14
1.3.4. Korelasyon Katsayısının Kübü	16
1.4. MAKSİMUM KORELASYON	19
1.5. MONOTON KORELASYON	20

1.6. SIRA KORELASYONU	21
1.6.1. Kendall'ın Tau'su	21
1.6.2. Spearman'ın Rho'su	22
1.7. BAĞIMLILIĞIN YEREL ÖLÇÜMLERİ	23
1.7.1. Yerel Bağımlılığın Tanımı	23
1.7.1.1. Korelasyon Eğrisi	23
1.7.2. Holland ve Wang'ın Yerel Bağımlılık Fonksiyonu	25
1.7.2.1. İki Değişkenli Kesikli Rassal Değişkenler İçin Yerel Bağımlılık Ölçümleri	25
1.7.2.2. İki Değişkenli Sürekli Rassal Değişken Yoğunlukları için Yerel Bağımlılık Fonksiyonu	26
1.7.3. Yerel Bağımlılık Fonksiyonunun özellikleri	27
1.7.4. Sabit Yerel Bağımlılık Fonksiyonu	28

İKİNCİ BÖLÜM

İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLARIN OLUŞTURULMASI

2.1 İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI AMACIYLA KULLANILAN MARJİNAL YER DEĞİŞTİRME ALGORİTMASI	31
2.2. PEARSON AİLESİ	34
2.3. JOHNSON'IN DÖNÜŞÜM AİLESİ	40
2.4. DOĞRUSAL OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİ İLE DEJENERE KERNEL YÖNTEMİ	40
2.4.1. İki Değişkenli Yoğunluğun Analitik Yapısı	41
2.4.2. Dejenere Kernel Yöntemi	42
2.4.3. Sayısal İntegral Yöntemi	43
2.4.4. İki Değişkenli Dağılımların oluşturulması ile ilgili Örnekler	45

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
KOŞULLU DAĞILIM YAKLAŞIMI İLE İKİ DEĞİŞKENLİ
DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ

3.1.UYUMLULUK	51
3.2.TEKLİK	53
3.3. TEMEL TEOREMLER	54
3.4. ÜSTEL DAĞILIŞ AİLESİ	57
3.4.1. Normal Koşullu Dağılımlar	58
3.4.2. Gama Koşullu dağılımlar	63
3.4.3. Beta Koşullu Dağılımlar	66
3.5. KOŞULLU OLARAK BELİRLENMİŞ DİĞER AİLELER	68
3.5.1. Pearson Tip VI Koşulluları	68
3.5.2. Weibull Koşullu Dağılımı	71

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
PEARSON TİP IV DAĞILIMININ KOŞULLU YAKLAŞIMLAR İLE ELDE
EDİLMESİ

4.1. TEK DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ	75
4.2. KOŞULLU VE İKİ DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMI	76
4.3. İKİ DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMININ OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ	77
SONUÇ	81
KAYNAKÇA	82
EKLER	

ŞEKİLER LİSTESİ

- Şekil 1:** Monoton Olmayan Fonksiyon Grafiği. s. 5
- Şekil 2:** İngilteredeki Evlilik Kiliselerindeki Evlilikler Ve Standartlaştırılmış Ölüm Oranı Verileri Üzerine Uygulanan Regresyon Grafiği. s 12
- Şekil 3:** $\rho = 0$ için şekilsel bir örnek. Burada yaklaşık $e_i^2 + e_j^2 = r^2$ şekline eğrisel ilişki mevcuttur. s 14
- Şekil 4:** X ve Y nin Büyük Değerleri İçin Güçlü, Küçük Değerleri İçin Zayıf Korelasyon İlişkisi. s 24
- Şekil 5:** Pozitif ve Negatif Değerler Arasında Farklılık Gösteren İlişki. s 24

EKLER LİSTESİ

Ek 1: Dejenere Kernel ile Fredholm Denklemleri

ek s. 1

Ek 2: Weibull Dağılımı

ek s.6



GİRİŞ

Bir deney yapıldığında, aynı deney ile ilgili birçok rassal değişkenin aynı andaki durumunu düşünmek gerekebilir. Böyle durumlarda iki yada daha yüksek boyutlu rassal değişkenler ele alınır. Örneğin bir fabrikada üretilen bir çelik parçasının sertliği ve dayanıklılığı ile ilgilenilip, bir tek deneysel netice olarak (sertlik, dayanıklılık) ikisi göz önüne alınabilir. Bu şekilde iki veya daha fazla şans değişkeninden oluşan sistemler incelendiğinde modellemede çok değişkenli dağılımların kullanılması uygun bir yaklaşımdır.

Değişkenler arasındaki bağımlılık durumu incelendiğinde kesikli iki değişkenli olasılık fonksiyonları için olasılık tabloları kullanılmıştır. Fakat hiçbir dağılım ailesi uygulamada kullanılan sürekli iki değişkenli olasılık fonksiyonunda bulunan tüm bağımlılık yapısını tanımlayacak kadar geniş bir yelpaze sunamamıştır. Bjerve ve Doksum (1993), kontur grafiklerinin armut ve elips gibi şekillendikleri yerde iki değişkenli deneyler için korelasyon katsayısının iki değişkenin arasındaki ilişkinin gücü için çok temel ve uygun bir ölçüm olduklarını söylemişlerdir. Fakat ilişkinin tüm tanım aralığı için yetersiz kalabileceğini açıklamışlardır.

Plackett (1965) çalışmasında, bağımlılık ölçümü için 2×2 'lik olasılık tablolarını kullanmıştır. Aynı şekilde Wang(1993) çalışmasında, Holland ve Wang (1987a) iki değişkenli kesikli rassal değişkenler için bağımlılık ölçümünü tanımlamada olasılık tablosunu, sürekli rassal değişkenlerde bağımlılık ölçümünü tanımlamak için yerel bağımlılık fonksiyonunu kullanmışlardır. Bu bağımlılık fonksiyonunun oluşturulmasında kullanılan yöntemlerden bazılarını Molenberghs ve Lesaffre (1997) çalışmasında incelemiştir.

Sürekli iki değişkenli olasılık fonksiyonunun oluşturulmasına farklı yöntemlerden yaklaşılmıştır. Bu yöntemlerden olan, Normal dağılımları ve marjinal dağılımları temel olarak kullanan seri açılımları, Johnson'ın Dönüşüm yöntemleri ve Pearson diferansiyel denklem sisteminin çözümü (Van Uven 1947-1948) gibi yöntemleri Mardia (1970) çalışmasında sınıflandırmıştır. Kullback (1968); Csiszar(1975) ile Speed ve Kiiveri (1986) yöntemlerden biri olan marjinal yer değiştirme algoritmasını incelemiştir.

Sürekli iki değişkenli yoğunluk fonksiyonunun oluşturulmasında marjinal dağılımlar yerine koşullu dağılımları seçmek daha uygundur çünkü görselleştirme ve

inceleme daha kolaydır. Koşullu dağılımlar ile iki değişkenli olasılık fonksiyonuna yaklaşımı Arnold, Castillo ve Sarabia (1999) çalışmasında incelemişlerdir. Yaklaşımın uyumluluk durumunu Arnold ve Press (1989) ve teklik durumunu is Gourieroux ve Monfert (1979) çalışmışlardır.

Tez çalışmasının birinci bölümünde; X ve Y olarak tanımlanan iki değişkenin ne kadar yakından ilişkili olduğunu gösteren toplam bağımlılık, bağımlılığın küresel ölçümü, Pearson'ın çarpım moment korelasyon katsayısı, maksimum korelasyon, monoton korelasyon ve sıra korelasyonu gibi bağımlılık ölçütlerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; iki değişkenli dağılımların oluşturulmasında kullanılan, marjinal yer değiştirme algoritması, Pearson ailesi, Johnson'ın dönüşüm ailesi ve doğrusal olmayan integral denklemleri ile dejenere kernel yöntemleri anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; koşullu dağılımlar ile ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi incelenmiştir. Üstel dağılış ailesine uyan, normal koşullu dağılımlar, gama koşullu dağılımlar, beta koşullu dağılımlar ve üstel dağılış formunda tanımlanamayan Pearson tip VI koşulları ile Weibull koşullu dağılımı anlatılmıştır.

Son olarak dördüncü bölümde ise bölüm üç de anlatılan yöntemler Pearson tip IV koşullu dağılımları üzerine uygulanarak iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

BAĞIMLILIK ÖLÇÜMLERİ

Bağımlılık ölçütü, X ve Y değişkenlerinin ne kadar yakından ilişkili olduğunu gösterir. Bir uçta tam bir doğrusal bağımlılık durumu diğer uçta bağımsızlık durumu vardır. İki değişkenli veri analizinde korelasyon ölçümü yapmak alışılmış bir durum olsa da, tek bir indeks bağımlılık durumunu tamamen açıklamaya yetmez. Bu nedenle farklı yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaç için kullanılan bazı ölçütler aşağıdaki bölümde ele alınmıştır (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.1. TOPLAM BAĞIMLILIK

1.1.1. Ortak Tam Bağımlılık

İki rassal değişken X ve Y 'nin her biri diğeri tarafından tahmin edilebiliyorsa, X , Y 'nin ve Y 'de X 'in bir fonksiyonudur. Bu sebeple X ve Y birbirine bağımlıdır. Bunu daha iyi anlayabilmek için şu tanımlara ihtiyaç vardır.

Tanım 1.1.

$$Pr[y = b(x)] = 1 \quad (1.1)$$

olacak şekilde bir $b(x)$ fonksiyonu varsa rassal değişken Y , X 'e bağılıdır. Bu eşitlik olasılığın sıfır olduğu durum hariç $y = b(x)$ 'tir.

Tanım 1.2.

Ölçülebilir ve “1” olasılıklı tüm rassal X değerleri için tek bir değere karşılık gelen $Y = f(X)$ fonksiyonu mevcut ise Y değişkeninin X değişkenine tamamen bağımlı olduğu söylenebilir. Ayrıca X in Y değişkenine tamamen bağımlı olması durumunda iki değişkenin karşılıklı olarak tamamen bağımlı olduğu söylenir. Örneğin; X aşağıdaki örneklerin her birinde $(0,1)$ açık aralığında uniform olsun, $X > 1/2$ olduğunda $Y = +1$, $X \leq 1/2$ olduğunda $Y = -1$ olsun. Bu durumda Y tamamen X 'e bağımlıdır, fakat X tamamen Y 'ye bağı değildir. Aşağıdaki örneklerde X ve Y tamamen bağımlıdır.

- $y = ax + b$. Burada, $a \neq 0$ ve a ve b sabitlerdir.
- Y , X 'in herhangi bir monotonik fonksiyonu olsun.

X ve Y herhangi bir ikili tek dönüşümle ilişkili olsun (Lancaster, 1963).

Ortak tam bağımlılık kavramı, stokastik bağımsızlığın bir zıddıdır. Ortak tam bağımlılık rassal değişkenin diğerinden tam olarak tahmin edilir olmasını gerektirir, stokastik bağımsızlık ise X ve Y 'nin birbirini tahmin etme durumunda tamamen kullanışsızdır (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.1.2. Monoton Bağımlılık

Bağımsız rassal değişken çiftlerinin bir dizisi olan $\{(X_n, Y_n)\}$, (X, Y) dağılımına yaklaşırsa, X ve Y birbirinden bağımsız olmalıdır.

Teorem: X_n ve Y_n rassal değişkenlerin her biri $(0,1)$ üzerinde uniform dağılıma sahip olsun. Her bir n için X_n ve Y_n rassal değişkenleri ortak olarak tamamen bağımlı olsun. $\{(X_n, Y_n)\}$ dizisi bağımsız uniform değişken olan (X, Y) çiftine yakınsar.

Kanıt: Her bir n için, açıkça görülür ki X_n ve Y_n ortak olarak tamamen bağımlıdır. Ayrıca X_n ve Y_n 'nin her biri, her bir $((i-1)/n, i/n)$ aralığına n^{-1} kütlesini atadığı için X_n ve Y_n $(0,1)$ üzerinde uniform dağılıma sahip olur. Son olarak, (X_n, Y_n) n^2 elemanlı büyük karenin her bir karesine toplam kütle n^{-2} 'yi atadığından, birim karede her bir (x, y) noktası için $\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n \leq x, Y_n \leq y] = xy$ olur (Kimeldorf ve Sampson, 1978).

Yukarıdaki açıklamadan anlaşılacağı üzere, ortak tam bağımlılık bağımsızlığın tam zıddı bir durum değildir. Ortak tam bağımlılığın bu eksikliği nedeniyle Kimeldorf ve Sampson (1978) tarafından, monoton bağımlılık olarak adlandırılan istatistiksel bağımlılık kavramı sunulmuştur.

Tanım 1.3. X ve Y sürekli rassal değişkenler olsun.

$Pr[y = b(x)] = 1$ için kesin monoton bir $b(x)$ fonksiyonu varsa, Y , X 'e monoton olarak bağımlıdır. Açıktır ki, ancak X 'in monoton olarak Y 'ye bağımlı

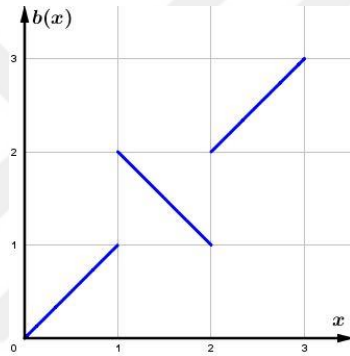
olması durumunda Y monoton olarak X 'e bağımlıdır. Matematikten bilindiği üzere monoton artan ya da monoton azalan fonksiyonlar bire-bir ilişkiyi tanımlarlar.

Tanım 1.4. Eğer yukarıda verilen tanımdaki $b(x)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon ise, X ve Y 'nin artan bağımlı olduğu söylenebilir. Eğer $b(x)$ azalan bir fonksiyon ise X ve Y 'nin azalan bağımlı olduğu söylenir.

Bir $b(x)$ fonksiyonu bire bir olabilir ama monoton olmayabilir. Örneğin;

Şekil 1: Monoton olmayan fonksiyon grafiği.

$$b(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3-x & 1 \leq x < 2 \\ x & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Bu nedenle monoton bağımlılık ortak bağımlılıktan daha güçlüdür. Kimeldorf ve Sampson (1978), X ve Y 'nin monoton bağımlı olarak artması (veya azalması) için gerek ve yeterli koşulun, (X,Y) 'nin ortak dağılım fonksiyonunun Fréchet sınırları olan H^+ (H^-) olması gerektiğini göstermiştir (Balakrishnan ve Lai, 2009)

1.1.3. Fonksiyonel ve Kapalı Bağımlılık

İki değişken arasında görünen diğer bağımlılık yapılarından biri fonksiyonel ve kapalı bağımlılıktır.

Tanım 1.5. Bazı $a(y)$ ve $b(x)$ fonksiyonları için $Y = b(x)$ ya da $X = a(y)$ ise X ve Y fonksiyonel olarak bağımlıdır (Rényi (1959) ve Jogdeo (1982)).

X , Y 'ye tamamen bağımlı ise X ve Y fonksiyonel olarak bağımlıdır ya da tam tersi geçerlidir. Örneğin; $y = \ln x$ (Balakrishnan ve Lai, 2009).

Tanım 1.6. $\text{Var}[a(x)] > 0$ olan $a(x)=b(y)$ şeklinde a ve b fonksiyonları var ise X ve Y kapalı olarak bağımlıdır (Rényi (1970:283)).

Diğer bir deyişle X ve Y 'yi birbirine bağlayan bir fonksiyon olmasa da bunlar ilişkili olabilir. Örneğin; $X^2 + Y^2 = r^2$ ele alınsın. $a(x) = X^2$ ve $b(y) = r^2 - Y^2$ olsun. $a(x) = b(y)$ olur. Ancak, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ bir fonksiyon değildir. X 'in bir değeri Y 'nin iki değerine atanır (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.2. BAĞIMLILIĞIN KÜRESEL ÖLÇÜMLERİ

X ve Y tamamen bağımlı değillerse, aralarındaki bağımlılığın gücünü veya derecesini ölçebilen bazı ölçümler bulunmalıdır. Böyle bir ölçüm skaler olarak ifade edile biliniyorsa, bir indeks ile göstermek daha uygundur. Bu indeksin hangi şartları yerine getirmesi gerektiğini veya yararlı olabilmesi için hangi özelliklere sahip olması gerektiği sorulabilir. Bu indekslere Drouet-Mari ve Kotz (2001)'de 'Küresel Ölçümler' denir.

Rényi (1959) bu amaçla yedi tane koşul önermiştir ve tüm koşulların maksimum korelasyonu karşılayacağını göstermiştir. Lancaster (1982b), Rényi'nin koşullarını aşağıda açıklanan dokuz koşula dönüştürmüştür ve genişletmiştir.

$\delta(X, Y)$, X ve Y arasındaki bağımlılık indeksini gösterebilir. Aşağıdaki şartlar, sonuncusu dışında, Lancaster'ın Rényi şartlarının bir versiyonunu temsil eder. Son koşul Lancaster(1982b) yerine Schweizer ve Wolff'tan (1981) alındığı için teknik açıdan ifade edilmektedir.

(1) $\delta(X, Y)$, 1 olasılıklı her ikisi de sabit olmayan rassal değişkenlerin her hangi bir çifti için tanımlanmıştır.

(2) $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$. Bağımsızlık simetrik bir özellik iken, toplam bağımlılık değildir. Çünkü bir değişken diğeri tarafından tanımlanabilir fakat tersi doğru değildir.

(3) $0 \leq \delta(X, Y) \leq 1$. Lancaster bu eşitsizliğin açık bir seçim olduğunu söyler fakat herkes tarafından kabul görmeyebilir.

(4) $\delta(X, Y) = 0$. Eşitliği ancak X ve Y ortak olarak bağımsız ise oluşur.

(5) a ve b fonksiyonları X ve Y uzaylarını tek başına ve bire bir şekilde gösterebiliyorsa, o zaman $\delta(a(x), b(y)) = \delta(X, Y)$ olur. Bu koşul, indeksin marjinal rassal değişkenlerin bire bir dönüşümü altında değişmez olduğu anlamına gelir.

(6) X ve Y ancak ve ancak tamamen birbirine bağımlı ise $\delta(X, Y) = 1$.

(7) X ve Y şans değişkenleri ρ korelasyon katsayılı normal ise, $\delta(X, Y) = |\rho|$ olur.

(8) Vektör parametresi θ ile tanımlanan her hangi bir dağılım ailesinde $\delta(X, Y)$, θ 'nın bir fonksiyonu olmalıdır.

(9) (X, Y) ve (X_n, Y_n) , $n=1, 2, \dots$, sırasıyla H ve H_n ortak dağılımlı rassal değişken çiftleri ise ve $\{H_n\}$, H 'ye yakınsıyor ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(X_n, Y_n) = \delta(X, Y)$ 'dir.

Yukarıda verilen koşullar için yorumlar;

- Koşullar listesinin en ilginç özelliği, önemsiz ve/veya yararsız koşulların güçlü ve/veya derin koşullar ile karışmasıdır. Koşul (1),(3),(7) ve (8) birinci kategoriye, koşul (2),(4),(5),(6) ve (9) ikinci kategoriye girer.

- Özetlenirse, koşul (2),(4),(5) ve (6) X ve Y rankları ile tanımlanan, X ve Y de simetrik olan, bağımsızlık durumunda sadece 0'a tam bağımlılık durumunda 1'e ulaşan bir ölçümün araştırıldığını belirtir.

- Koşul (3) genel olarak -1 ile +1 arasında olduğundan korelasyon için çok kısıtlayıcıdır.

- Koşul (6) bazı a ve b fonksiyonları için ya $X = a(y)$ ya da $Y = b(x)$ ise $\delta(X, Y) = 1$ olarak tanımlanan orijinal koşuldan daha güçlüdür. Örneğin, X ve Y fonksiyonel olarak bağımlı ise $\delta(X, Y) = 1$ dir. Rényi çok kısıtlayıcı olduğunu düşündüğü için tam tersini, yani yalnızca X ve Y fonksiyonel olarak bağımlı ise $\delta(X, Y) = 1$ olduğu durumu bilerek dışarıda bırakmıştır. Fonksiyonel bağımlılıktan ortak bağımlılığa kadar kuvvetlendirme muhtemelen Lancaster'ın kendisinden kaynaklanıyor.

- Koşul (7) korelasyonları sıralamak için uygun değildir. Schweizer ve Wolff'unda yaptığı gibi $|\rho|$ 'nin kesin olarak artan bir fonksiyonu olan δ ile değiştirilmelidir.

- Schweizer ve Wolff (1981) en azından parametrik olmayan ölçümler için Rényi'nin orijinal koşullarının çok güçlü olduğunu iddia etmişlerdir.

- Bu aksiyomlar bağımlılığın ne olduğu ve nasıl ölçülmesi gerektiği konusunda bizi düşünmeye iter ve farklı ölçütlere sahip bağımlılık ölçümlerinin birbiri ile kıyaslanmasını sağlar.

Bağımlılığın simetrik parametrik olmayan bir ölçümü için Rényi'nin aksiyomlarının bir başka versiyonu Schweizer ve Wolff (1981)'de verilmiştir. Benzer bir ilişki ölçütü için benzer durumlar Gibbons (1971)'de verilmiştir. Kendall ve Spearman'ın sıra korelasyonları gibi parametrik olmayan bağımlılık ölçümleri de Kısım 1.6 da ele alınacaktır.

Yukarıda açıklandığı üzere pek çok farklı bağımlılık ölçümü geliştirilmiştir. Bununla birlikte, bağımlılığın üç belirgin küresel ölçümü vardır. Bunlar, korelasyon katsayısı, Kendall'ın tau'su ve Spearman'ın korelasyon katsayısıdır.

1.3. PEARSON'IN ÇARPIM MOMENT KORELASYON KATSAYI

Pearson'ın çarpım-moment korelasyon katsayısı, rassal iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin gücünün bir ölçümüdür ve

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}} \quad (1.2)$$

ile tanımlanır. Burada, $\text{cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$, $\text{var}(X)$ ve $\text{var}(Y)$ sırasıyla X ve Y 'nin varyansıdır. İki değişkenden biri sabit ise, korelasyon tanımsız olur. Değişkenlerden biri sonsuz varyansa sahip ise, bu tanıma *iki değişkenli sabit* dağılımlarda olduğu gibi genişletmek mümkün olabilir. Tanımdan koşul (1) ve (2)'nin sağlandığı açıktır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $|\rho(X, Y)| \leq 1$ dir. Eşitlik yalnızca X ve Y tam doğrusal bağımlı olduğunda oluşur. ρ regresyon çizgisinin eğimi ile aynı işareti alır. $F(x)$ ve $G(y)$ marjinallerinin verildiği varsayılın. Dağılımlar ortalamaları etrafında simetrik ve X ile aynı dağılıma sahip $\alpha Y + \beta$ gibi α ve β sabitleri var ise ancak o zaman ρ , -1 ve +1 arasındaki tüm değerleri alabilir (Moran, 1967).

X ve Y bağımsız ise $\rho(X,Y)=0$ dır. Fakat ‘sıfır’ korelasyon bağımsızlığı ifade etmez. Bu sebeple koşul (4) sağlanmaz. İlişkisizlik ve bağımsızlık arasında yarı bağımsızlık vardır. Yani, $E(Y/X)=E(Y)$ ve $E(X/Y)=E(X)$ olduğu anlamına gelir (Jensen (1988)). X ve Y ’ye aynı sabitler eklemek ve aynı işaretli sabitler ile çarpmak $\rho(X,Y)$ ’yi etkilemez. ρ negatif olabileceği için koşul (3) ihlal edilir. Marjinallerin monoton dönüşümü ile $\rho(X,Y)$ değişmez değildir. Bu nedenle koşul (5) sağlanmaz. $\rho(X,-X)=-1$ olduğu için koşul (6)’nın eğer kısmı sağlanmaz. Koşul (7) ve (8) sağlanır. İki boyutlu karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremi [Cramér (1954)] ve bu tür karakteristik fonksiyonların çarpım momentleri açısından genişlemeleri [Bauer (1972)] kullanılarak oluşturulabilen durum ile koşul (9) sağlanır.

İki değişkenli n gözlemin bir örneğinden $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ korelasyon katsayısı ρ ’nun tahmini için örnek korelasyon katsayısı

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1.3)$$

kullanılmalıdır. Burada $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ sırasıyla örnek ortalamalarıdır.

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ n tane gözlem çifti iki değişkenli normal dağılımdan alınıyorsa, r maksimum olabilirlik tahminleyicisidir ve ρ ’nun sapmasız bir tahminleyicisidir. r ’nin bir dezavantajı örneğin aykırı değerlerle etkileşimine karşı çok hassastır. Devlin ve diğerleri (1975) sağlamlılığı bakımından r ’yi diğer çeşitli ρ tahmincileri ile karşılaştırmıştır.

1.3.1.Negatif Olmayan Değişkenler Arasındaki Korelasyon

X ve Y ikinci momentleri sonlu olan ve ortak dağılım fonksiyonları $H(X,Y)$ olan iki şans değişkeni olsun. Genel olarak korelasyon katsayısı, ρ , $[-1,1]$ kapalı aralığında tüm değerleri alabilir. Ayrıca, $F_1(x)=H(x,\infty)$, $F_2(y)=H(\infty,y)$ marjinallerinin belirtildiğini varsayalım. Bu verilen marjinal

dağılımlarla tüm $H(x, y)$ sınıfında, ρ 'nun -1,1 değerleri elde edilemeye bilir. -1ve 1 'e eşit olan ρ ile $H(x, y)$ 'nin varyasyonlarının gerek ve yeter koşulları:

- X ile aynı dağılıma sahip olan $\alpha Y + \beta$ olacak şekilde α ve β sabitleri vardır.
- X 'in dağılımı ortalaması etrafında simetriktir
şeklindedir.

Bunu görmek için Y , X ile aynı ortalama ve varyansa sahip olacak şekilde yeniden boyutlandırılır. Eğer, $\rho = 1$ olacak şekilde bir $H(x, y)$ varsa, $Y = -X$ olasılığı bir ise $E(X + Y)^2 = 0$ olur. Böylece her iki sınırın ulaşılabilir olması durumunda X simetrik bir dağılıma sahip olmalıdır.

Sonlu ikinci momentler ile $F_1(x)$, $F_2(y)$ genel marjinal dağılımları göz önüne alındığında, ρ 'nun olası değeri üzerindeki sınırlar aşağıdaki gibi bulunabilir.

Frechet (1951), $H(x, y)$ herhangi iki değişkenli dağılım ise,

$$\begin{aligned} H_0(x, y) &= \max \{H(x, \infty) + H(\infty, y) - 1, 0\} \\ H_1(x, y) &= \min \{H(x, \infty), H(\infty, y)\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

şeklinde olan iki fonksiyonunda $H(x, y)$ ile aynı marjinal dağılımlara sahip iki değişkenli dağılımlar olduğunu, ve $F(x, y)$ 'nin aynı marjinal dağılımlarına sahip herhangi diğer iki değişkenli dağılımın ise,

$$H_0(x, y) \leq F(x, y) \leq H_1(x, y) \quad (1.5)$$

olduğunu göstermiştir (aktaran Moran, 1967).

Buradan, $H(x, \infty), H(\infty, y)$ marjinal dağılımları göz önüne alındığında olası ρ değerleri için sınırlar, $H_0(x, y), H_1(x, y)$ için ρ_0, ρ_1 ve herhangi bir $H(x, y)$ için $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$ ile elde edildiği parçalar tarafından kısmi integrasyon ile kolayca elde edilebilir. Basitlik için, $H_1(x) = H(x, \infty), H_2(y) = H(\infty, y)$ marjinal dağılımlarının, türevlerinin integralleri ve $H_1(0) = H_2(0) = 0$ olacak şekilde $H(x, y)$ dağılımları ele alınsın. Türevleri $H_1'(x), H_2'(y)$ $x > 0, y > 0$ için pozitif olduğu varsayılınsın. Ayrıca, değişkenlerin birim varyanslarına sahip olacak şekilde ölçeklendiği varsayılınsın.

$G_1(u), G_2(v); H_1(x)$ ve $H_2(y)$ 'nin ters fonksiyonları olsun. Örneğin;

$$H_i \{G_i(x)\} = x \quad (0 \leq x < 1, i=1, 2) \quad (1.6)$$

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısı

$$\rho = \int_0^\infty \int_0^\infty xy dH(x, y) - E(X)E(Y) \quad (1.7)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 G_1(u)G_2(v) dK(u, v) - E(X)E(Y) \quad (1.8)$$

eşitliği ile bulunur. Burada $K(u, v), U = H_1(X)$ ve $V = H_2(Y)$ niceliklerinin ortak dağılımıdır. U ve V , $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ karesel bölge üzerinde ortak olarak dağılır. Öyle ki marjinal dağılımlar birim aralıklarda eşittir. Eşitlik (1.4) ile olasılık $u + v = 1$ çizgisinde uniform olarak yoğunlaştırıldığında minimum korelasyon elde edilir. Minimum değer,

$$\rho_{\min} = \int_0^1 G_1(x)G_2(1-x)dx - E(X)E(Y) \text{ olur.}$$

$H(x, y)$ tüm olasılıkların $H_1(x) + H_1(y) = 1$ regresyon doğrusu üzerinde olduğu tekil bir dağılıma karşılık gelir (Moran, 1967).

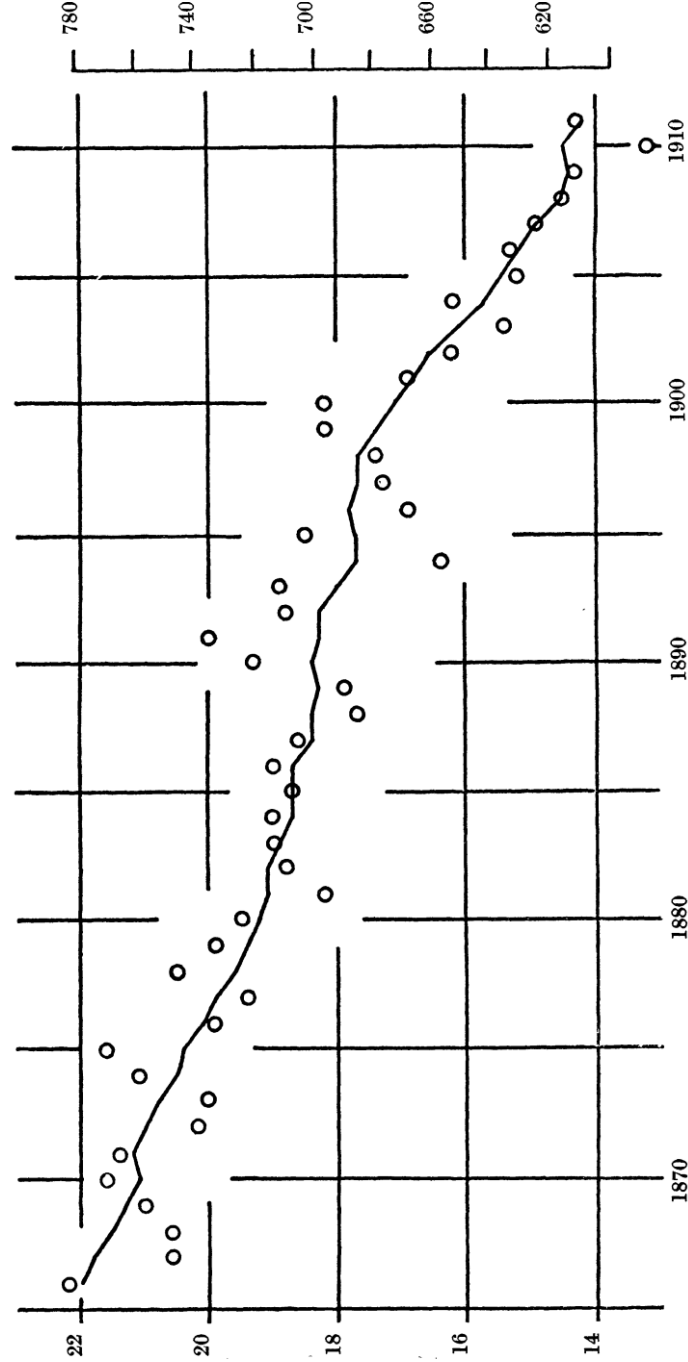
1.3.2. Korelasyonun Yorumlanması

Karl Pearson, iki değişken arasındaki yüksek korelasyonun üçüncü bir değişkene bağlı olabileceğini düşünmesine rağmen Yule (1926)'nin makalesine kadar bunun genel olarak kabul edilemeyeceğini belirtmiştir. Yule(1926) makalesinde 1866-1911 yılları arasında İngiltere Evlilik Kiliseleri ile tüm evliliklerin arasındaki oranı ve aynı yıllar boyunca bin kişi için standartlaştırılmış ölüm oranını içeren çalışmada İngiltere evlilik kilisesinin oranında düşüş olduğunu söylemiştir. Bu düşüşün sebebi 1866'dan bu yana bilimsel düşüncenin yayılması olduğudur. Aynı şekilde ölümün düşüşünde bilimdeki ilerleyiş ile yorumlanabileceğini belirtmiştir. Bu nedenle, her iki değişkende büyük ölçüde ya da esas olarak ortak bir faktör tarafından etkilenmektedir ve sonuç olarak yüksek düzeyde korelasyonlu olması beklenir.

Aşağıdaki resimde tam çizgi 1866-1911 yılları arasında İngiltere Evlilik Kiliseleri ile tüm evliliklerin arasındaki oranı gösterir. Küçük daireler aynı yıllar

boyunca 1000 kişi için standartlaştırılmış ölüm oranını verir. Korelasyon katsayısı +0,9512 dir, bkz. Şekil 2.

Şekil 2: İngiltere’deki evlilik kiliselerindeki evlilikler ve standartlaştırılmış ölüm oranı verileri üzerine uygulanan regresyon grafiği.



Korelasyonun yorumlanmasındaki zorluklardan biri onun neden-sonuç ilişkisi ile karıştırılmasıdır. Rodriguez(1982), hesaplanmış bir korelasyonun yorumlanması

için, verilerin şans değişimine eşlik eden bir olasılık modelinin gerekli olabileceğini savunmuştur. Bunlardan en yaygın olan iki model şöyledir,

- İki değişkenli normal dağılım: Bu durumda , ρ 'yu tahmin eden r için güven aralıkları oluşturulabilir ve hipotez testleri yapılabilir.
- Basit regresyon modeli $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon$.Burada belirlilik katsayısı r^2 Y 'deki (kareler toplamı ile ölçülen) doğrusal regresyon ile açıklanabilen toplam değişkenliğin oranını temsil eder,

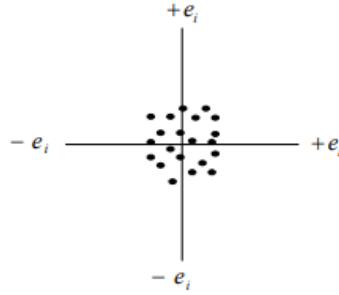
$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Burada $\hat{y}_i$, tahminlenmiş regresyon denkleminde hesaplanan y_i 'nin tahmin değeridir. Regresyon modelinde, X 'ler genellikle önceden sabitlenmiş değerlerdir ve rassal değildir. Dolayısıyla r 'nin bir parametrenin tahmini olabileceği temel iki değişkenli dağılım yoktur. Buna rağmen Effers (1980), (i) belirli bir ρ değerinin verilen bir amaç için yeterince güçlü bir ilişkiyi ne zaman tanımladığına, (ii) aralarındaki bağımlılık yapısı daha güçlü olan değişkenlerin elde edilmesinde ortaya çıkan kayıpların kazançlara karşı ağırlıklandırılması zor olabileceğini belirtmiştir. Bu nedenle Effers, belirli durumlarda yanlış bir karar verme olasılığı olarak yorumlanabilen korelasyon fonksiyonlarını ortaya koymuştur.

Temel noktalar:

- Bazı iki değişkenli dağılımlar için ρ olmayabilir. Örneğin; iki değişkenli Pareto dağılımında, $0 < c \leq 2$ iken ρ yoktur.
 - $r = 0$ eşitliği X ve Y 'ler arasında hiç ilişki olmadığı anlamına gelmez. Doğrusal olmayan dağılım grafiği bir ilişki ortaya koyabilir.
- Aşağıdaki şekilde iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı sıfırdır, iki değişken arasında doğrusal bir ilişki olmasa da eğrisel bir ilişki vardır.

Şekil 3: $\rho = 0$ için şekilsel bir örnek. Burada yaklaşık $e_i^2 + e_j^2 = r^2$ şeklinde eğrisel ilişki mevcuttur.



- Noktaların farklı görünümlü bir çok kümesi aynı r değerlerini üretebilir. Örneğin; Chambers (1983) tümü $r=0,7$ değerine sahip sekiz tane dağılım grafiği göstermiştir.

- Küçük bir örnekten hesaplanan r değeri, olası örnekleme hatası dikkate alınmazsa, tamamen yanıltıcı olabilir.

r 'nin hesaplanmasında dağılım grafikleri gibi araçlar da kullanılmalıdır. Veri iki değişkenli normal anakütleden olmadığında, r gözlemler hakkında sınırlı bilgi sağlar. Barnett(1985), Barnett(1979)'daki çalışmasında iki dağılım grafiğinden bahsederek, üstel şans değişkenli marjinallere sahip, büyük derecede çarpık iki değişkenli dağılımlar için, sıradan bir korelasyon katsayısının, çok yararlı bir ilişki ölçüsü olmadığı görüşünü dile getirmiştir.

1.3.3. Korelasyon Katsayısının Birçok Yüzü

Pearson korelasyon katsayısını “doğrusal ilişkinin bir ölçümü” olarak sınırlamak, korelasyon anlayışını oldukça fakirleştirir. Farklı düzeyde tartışılan sorunlara göre uyarlanmış yeni yorumlar sunulabilir. Korelasyon katsayısı ile ilgili bazı yorumlar, özel kısıtlamalara tabi olup her durumda yapılan bir yorumun eldeki tüm veriler için geçerli olup olmadığı kontrol edilmelidir. Bu yorumların uygulanabilirliği belirlenirken, (i) r olası tüm değerler için mi yoksa sadece negatif olmayan değerler için mi geçerli? (ii) Her hangi iki marjinal için geçerli mi yoksa yorum sadece özdeş marjinallere mi dayanır? (iii) Her hangi bir $n \times n$ dağılımı mı, yoksa sadece 2×2 dağılımlar için mi yapılmalı? gibi birkaç durum incelenebilir (Falk ve Well, 1997).

Korelasyon katsayısına bakmanın on üç yolu Rodgers ve Nicewander(1988) tarafından tartışılmış. Listeye Rovine ve Von Eye (1997) tarafından on dördüncü eklenmiştir.

- Ham veriler ve ortalamaların bir fonksiyonu olarak korelasyon.
- Regresyon doğrusunun standart bir eğimi olarak korelasyon.
- Standartlaştırılmış değişkenlerin çarpımlarının ortalaması olarak korelasyon.
- Standartlaştırılmış iki regresyon doğrusu arasındaki açının fonksiyonu olarak korelasyon.
- İki değişken vektör arasındaki açının bir fonksiyonu olarak korelasyon.
- İki standart eğrinin arasındaki farkın yeniden ölçeklendirilmiş bir varyansı olarak korelasyon.
- Balon kuralı ile tahmin edilen korelasyon.
- İzokonsantrasyonun iki değişkenli elipsleri ile ilişkili korelasyon.
- Tasarlanan deneylerden elde edilen test istatistiğinin bir fonksiyonu olarak korelasyon.
- İki ortalamaların oranı olarak korelasyon (Balakrishnan ve Lai, 2009:150).
- Standartlaştırılmış bir kovaryans olarak korelasyon,

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \text{ ile tanımlanır.} \quad (1.9)$$

Çünkü; $r_{xy} = Cov(z_x, z_y)$ 'dir. Burada, z_x standartlaştırılmış X ve z_y standartlaştırılmış Y 'yi temsil eder.

- Regresyon eğimlerinin geometrik ortalaması olarak korelasyon, b_{yx} X üzerine Y 'nin regresyon katsayısı ve b_{xy} Y üzerinde X 'in regresyon katsayısı olsun. r_{xy} bu değerler arasında sınırlıdır. $r_{xy}^2 = b_{yx} b_{xy}$ buradan, $r_{xy} = \sqrt{b_{yx} b_{xy}}$ olur.
- Y 'nin açıkladığı ya da X tarafından açıklanan Y varyansının oranı, değişkenlik oranının hesaplanmasında kullanılan korelasyon, $r^2 = \sigma_y^2 / \sigma_x^2$.
- Eşleştirmenin oranı olarak korelasyon, eşitlik (1.4)'e eş değer, z_x ve z_y 'nin yakınlık derecesini ifade eden formül,

$$r_{xy} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sum (z_x - z_y)^2}{N}.$$

Burada N , eşleştirilmiş gözlem sayısıdır. Korelasyon yorumu için bu yaklaşımın temeli Cohen ve Cohen (1975) ve Welkowitz, Even ve Cohen (1976) tarafından tamamen açıklanmıştır.

1.3.4. Korelasyon Katsayısının Kübü

Dodge ve Rousson (2000) korelasyon katsayısının bazı yeni yüzlerini eklemiştir. Bunlardan bir tanesi korelasyon katsayısının küpüdür. Bu yanıt değişkeni ile açıklayıcı değişkenin çarpıklık oranıdır. Bu sonuç basit regresyon doğrusundaki yönlü bağımlılığı bulmakta kullanılır.

X ve Y iki rassal değişken olsun.

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon \quad (1.10)$$

Burada ε , X 'den bağımsız rassal değişken olan hata terimidir. X ve Y arasındaki kovaryans, $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ ile ve korelasyon katsayısı,

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (1.11)$$

ile tanımlansın.

Dodge ve Rousson (2000) iki değişken arasındaki kovaryans kavramını üç değişkene dönüştürerek doğrusal ilişki durumunda iki rassal değişken arasındaki ilişkiyi ifade etmek için bazı basit formüller türetmişlerdir. Hata dağılımının simetrik olduğu varsayımı altında

$$\rho_{xy}^3 = \frac{\gamma_Y}{\gamma_X}, \quad \gamma_X \neq 0 \text{ ise} \quad (1.12)$$

Burada γ_X ve γ_Y sırası ile X ve Y 'nin

$$\gamma_X = \frac{E[(X - E(X))^3]}{\sigma_X^3} \text{ ve } \gamma_Y = \frac{E[(Y - E(Y))^3]}{\sigma_Y^3}$$

çarpıklık katsayılarıdır. Eşitlik (1.10) kullanılarak,

$$Y - E(Y) = \alpha + \beta X + \varepsilon - \alpha - \beta E(Y) - E(\varepsilon)$$

$$Y - E(Y) = \beta[X - E(X)] + [\varepsilon - E(\varepsilon)] \quad (1.13)$$

elde edilir. Sadece beklenen değeri altında sıfır olmayan terimler yazılır ve aşağıdaki üç denklem dikkate alınır,

$$\begin{aligned} [Y - E(Y)]^2 &= \beta^2 [X - E(X)]^2 + [\varepsilon - E(\varepsilon)]^2 \\ [Y - E(Y)]^3 &= \beta^3 [X - E(X)]^3 + [\varepsilon - E(\varepsilon)]^3 \\ [Y - E(Y)]^4 &= \beta^4 [X - E(X)]^4 + 6[X - E(X)]^2 [\varepsilon - E(\varepsilon)]^2 + [\varepsilon - E(\varepsilon)]^4. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Sonuç 1: σ_ε^2 , hatanın varyansı ise,

$$1 - \rho_{XY}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_Y^2}$$

Kanıt: Eşitlik (1.14) kullanılarak,

$$E[\{Y - E(Y)\}^2] = E[\beta^2 [X - E(X)]^2] + E[\{\varepsilon - E(\varepsilon)\}^2]$$

$\sigma_Y^2 = \beta^2 \sigma_X^2 + \sigma_\varepsilon^2$ her iki taraf σ_Y^2 ye bölündüğünde,

$$1 = \frac{\beta^2 \sigma_X^2}{\sigma_Y^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_Y^2} \text{ olur.}$$

Eşitlik (1.11) kullanılarak

$$1 = \rho_{XY}^2 \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_Y^2}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$1 - \rho_{XY}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_Y^2} \text{ bulunur.}$$

Sonuç 2: Eğer $\mu_3(.)$ değişkenlerin üçüncü merkezi momentini belirtiyorsa,

$$\rho_{XY}^3 = \frac{\gamma_Y}{\gamma_X}$$

Kanıt: Eşitlik (1.14) kullanılarak,

$$\beta^3 = \frac{E[Y - E(Y)]^3 - E[\varepsilon - E(\varepsilon)]^3}{E[X - E(X)]^3} = \frac{\mu_3(Y) - \mu_3(\varepsilon)}{\mu_3(X)}$$

ε simetrik olarak dağıldığı için $\mu_3(\varepsilon) = 0$, böylece

$$\beta^3 = \frac{E[Y - E(Y)]^3}{E[X - E(X)]^3} = \frac{\mu_3(Y)}{\mu_3(X)} \quad \mu_3(X) \neq 0 \text{ ise}$$

$\mu_3(Y) = \beta^3 \mu_3(X)$ her iki taraf σ_Y^3 'e bölündüğünde

$$\frac{\mu_3(Y)}{\sigma_Y^3} = \frac{\beta^3 \mu_3(X)}{\sigma_Y^3} \text{ olur.}$$

Eşitlik (1.11) kullanılarak

$$\gamma_Y = \rho_{XY}^3 \frac{\sigma_Y^3}{\sigma_X^3} \frac{\mu_3(X)}{\sigma_Y^3}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\gamma_Y = \rho_{XY}^3 \gamma_X$$

bulunur, sonuç olarak $\rho_{XY}^3 = \frac{\gamma_Y}{\gamma_X}$ olur.

Sonuç 3: $\varepsilon \sim N(0,1)$ ve $\kappa(.) = \frac{\mu_4(.)}{\sigma^4}$ ile $\kappa(.)$ basıklık katsayısını belirtiyor ise,

$$\rho_{XY}^4 = \frac{\kappa(Y)}{\kappa(X)} - 3 \left[\frac{2\sigma_X^2 - 1}{\sigma_Y^4 \kappa(X)} \right]$$

Kanıt: Eşitlik (1.14) kullanılarak,

$$E \left[\{Y - E(Y)\}^4 \right] = \beta^4 E \left[\{X - E(X)\}^4 \right] + 6E \left[\{X - E(X)\}^2 \{ \varepsilon - E(\varepsilon) \}^2 \right] + E \left[\{ \varepsilon - E(\varepsilon) \}^4 \right]$$

$$\mu_4(Y) = \beta^4 \mu_4(X) + 6\mu_2(X) \mu_2(\varepsilon) + \mu_4(\varepsilon)$$

her iki taraf σ_Y^4 ile bölündüğünde,

$$\frac{\mu_4(Y)}{\sigma_Y^4} = \frac{\beta^4 \mu_4(X)}{\sigma_Y^4} + \frac{6\mu_2(X)}{\sigma_Y^4} + \frac{3}{\sigma_Y^4}$$

olur. Eşitlik(1.11) kullanılarak

$$\kappa(Y) = \rho_{XY}^4 \frac{\sigma_Y^4}{\sigma_X^4} \frac{\mu_4(X)}{\sigma_Y^4} + \frac{6\mu_2(X) + 3}{\sigma_Y^4}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa(Y) = \rho_{XY}^4 \kappa(X) + \frac{6\mu_2(X) + 3}{\sigma_Y^4}$$

bulunur,

Sonuç olarak,

$$\rho_{XY}^4 = \frac{\kappa(Y)}{\kappa(X)} - 3 \left[\frac{2\sigma_X^2 - 1}{\sigma_Y^4 \kappa(X)} \right]$$

elde edilir (Muddapur, 2003).

Dodge ve Rousson (2000) regresyon doğrusunun eğimini, Y 'nin X 'e ya da X 'in Y 'ye bağımlı olup olmadığını, belirlemek için $(\rho_{XY}^2)^3 = \frac{\gamma_Y^2}{\gamma_X^2}$ 'nin kullanılabileceğini savunmuştur. Denklemin sol tarafı daima 1'den küçük veya eşit olduğundan

$\gamma_Y^2 \leq \gamma_X^2$ 'dir. Bu nedenle Y , X 'e doğrusal olarak bağımlıdır, X 'in Y üzerindeki doğrusal regresyon bağımlılığı içinde benzer bir durum tanımlanabilir. X ve Y 'nin uniform olduğu durumlarda çarpıklık katsayıları sıfırdır. Bu nedenle yön bağımlılığını tanımlamak için kullanılan bu yaklaşım kopulalar için uygun değildir. Dodge ve Rousson'nun ölçütü sadece çarpık X ve Y için işe yarar.

1.4. MAKSİMUM KORELASYON

İki rassal değişken X ve Y arasındaki bağımlılığın sıkça belirtilen bir ölçümü Maksimum korelasyondur (Balakrishnan ve Lai, 2009:152).

$$\rho'(X, Y) = \sup \rho[a(X), b(Y)]$$

Burada supremum, sıfırdan farklı a ve b fonksiyonları borel ölçülebilir tüm fonksiyonlar üzerinden supremumu alınır, $\text{var}[a(X)]$ ve $\text{var}[b(X)]$ sonludur. ρ , pearson çarpım momenti korelasyon katsayısıdır. Maksimum korelasyon supremum korelasyon olarak da bilinir. Bu ölçüm aşağıdakileri karşılamalıdır.

1. $0 \leq \rho'(X, Y) \leq 1$
2. $\rho'(X, Y) = \rho'(Y, X)$
3. $\rho'(X, Y) = 0$ ancak X ve Y bağımsız ise.
4. X ve Y ortak tam bağımlı ise, $\rho'(X, Y) = 1$ olur. Fakat tersi doğru değildir, (Lancster 1963).
5. $|\rho(X, Y)| = \rho'(X, Y)$
6. (X, Y) iki değişkenli normal dağılım ise, $\rho'(X, Y) = |\rho(X, Y)| = |\rho|$.

Bunun nedeni, $|\rho[a(X),b(Y)]| = |\rho'(X,Y)|$ eşitliği sadece a ve b özdeş fonksiyon olduğunda.

7. Kısım (1.2.) deki koşul (9) sağlanmamıştır. Kısım (1.1.2.) de belirtildiği gibi Kimeldorf ve Sampson (1978) X ve Y 'nin bağımsız olduğu bir dağılım için birleşmiş dağılımda birbirine tamamen bağımlı rassal değişkenler dizisi $\{(X_n, Y_n)\}$ örneğini sunmuşlardır. Bu durumda, $\rho(X_n, Y_n) = 1$, olmakla birlikte $\rho'(X, Y) = 0$ dır.

Bu ölçüm bir çok iyi özelliklere sahiptir. Hall (1970)'a göre bir takım dezavantajları da vardır. Örneğin 1'e eşittir ve aynı zamanda hesaplanabilir değildir.

1.5. MONOTON KORELASYON

X ve Y rassal değişkenlerin aralarında mükemmel bir monoton ilişki varsa, X ve Y monoton bağımlıdır. Rassal değişkenler mükemmel monoton bir ilişkiye sahip değilse, aralarındaki monoton bağımlılığın derecesini sayısal olarak ölçmek kullanışlı olabilir. Monoton korelasyon denilen bu ölçüm;

$$\rho^*(X, Y) = \sup \rho[a(X), b(Y)] \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Burada $0 < \text{Var}[a(x)] < \infty$ ve $0 < \text{Var}[b(x)] < \infty$, (Kimeldorf ve Sampson, 1978).

Monoton korelasyon aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1. $0 \leq \rho^*(X, Y) \leq 1$
2. $\rho^*(X, Y) = \rho^*(Y, X)$
3. $\rho^*(X, Y) = 0$ ancak X ve Y bağımsız ise.
4. $|\rho(X, Y)| \leq \rho^*(X, Y) \leq \rho'(X, Y)$
5. (X, Y) iki değişkenli normal dağılışa sahip ise $|\rho(X, Y)| = \rho^*(X, Y) = \rho'(X, Y)$
6. X ve Y monoton olarak bağımlı ise $\rho^*(X, Y) = 1$. Tersini doğru değildir. Örneği Kimeldorf ve Sampson (1978) verilmiştir. (V, W) , (X, Y) ile aynı uniform dağılıma sahipse, $\rho^*(X, Y) = \rho^*(V, W)$.
7. $\rho^*(X, Y) = \sup\{|\rho(V, W)| : (V, W), (X, Y)\}$ ile aynı uniform temsillerine sahiptirler.

8. $\rho_s(X,Y) \leq \rho^*(X,Y) \leq \rho'(X,Y)$ burada ρ_s Spearman'ın sıra korelasyonudur. Spearman'ın sıra korelasyonu uniform dağılışın tipik bir korelasyon katsayısıdır.

9. ρ^* , X ve Y 'nin derecesini koruyan ya da tersine çeviren dönüşümler altında değişmezdir. Bu nedenle, kısım (1.2) deki koşul (5) sağlanmış olur (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.6. SIRA KORELASYONU

Kendall'ın Tau'su (τ) ve Spearman'ın Rho'su (ρ_s) en iyi bilinen sıra korelasyon katsayılarıdır. Bunlar, X ve Y 'nin gerçek değerleri yerine, sıralarının arasındaki korelasyon ölçümleridir. Sonuç olarak X ve Y 'nin her hangi artan bir dönüşümünden etkilenmezler. Oysa ki, Pearson'ın çarpım moment korelasyon katsayısı ρ yalnızca doğrusal dönüşümlerden etkilenmez (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.6.1. Kendall'ın Tau'su

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) , (X, Y) 'den bağımsız rassal seçilen iki elemanın değerleri olsun. $(x_1 > x_2, y_1 < y_2)$ veya $(x_1 < x_2, y_1 > y_2)$ ise ya da; $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ ise Kendall'ın (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) terimleri uyumsuz bir çift oluşturuyorsa, bir sıralama hatası vardır.

Bağımsız ve rassal seçilen iki eleman karşılaştırıldığında böyle bir hatanın meydana gelme olasılığı $\phi_0 = P((x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0)$ ile tanımlanır. Kendall'ın sıra korelasyon katsayısı τ ise,

$$\phi_0 = \frac{1}{2}(1 - \tau)$$

olarak tanımlanır.

Daha karmaşık hata özelliklerini inceleyebilmek amacıyla ϕ_0 'ın ayrıntıları ele alınsın. ϕ_0 ile ölçülen hataların çoğu küçük hatalardır. Örneğin; $|x_1 - x_2|$

küçüktür. Bazı durumlarda, bu hatalar çok önemli olmayabilir. X ile ilgili “açıkça farklı” olan unsurların doğru şekilde sıralanması çok daha önemli olacaktır. Bu gibi durumlarda, daha dikkatli bir yöntem, gözlemlenen $y_1 - y_2$ farkı “yeterince büyük” ise, örneğin yalnızca $|y_1 - y_2| \geq c(\alpha)$ ise sıralama yapılır, değil ise sıralama yapılmaz.

Burada, $c(\alpha)$ X' lerin (koşullu) sıralama olasılığının, $|y_1 - y_2| = c(\alpha)$ ise, önceden belirlenmemiş bir olasılık olan α ‘ya eşit olma gerekliliğini tanımlar. α için 0.10 uygun bir seçim olabilir. Böylece; $c(\alpha)$,

$$P((x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \quad |y_1 - y_2| = c(\alpha)) = \alpha \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Bunula birlikte, $|y_1 - y_2| < c(\alpha)$ ise bir sıralama gerçekleştirilmez. Bu hata özelliği, rassal seçilmiş bir çiftin sıralanamama olasılığıdır: $\phi_1(\alpha) = P(|y_1 - y_2| < c(\alpha))$.

Eşitlik (1.15) in sol tarafında verilen (x, y) nin dağılımı $c(\alpha)$ ’nın bir fonksiyonu olarak azalıyorsa ve eşitlik (1.15)’in bir çözümü varsa ϕ_1 ’in anlamlandırılabilir (Elffers, 1980).

1.6.2. Spearman’ın Rho’su

Kendall’ın Tau’su gibi, ilişki ölçümünün anakütle versiyonu olarak bilinen Spearman’ın Rho’su da uyum ve uyumsuzluğa dayanır. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ ve (X_3, Y_3) ortak dağılım fonksiyonu H ’ın rassal değişkenlerinin üç bağımsız çifti olsun. ρ_S , (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_3) ’ün uyum olasılığı eksi uyumsuzluk olasılığı ile orantısal tanımlanabilir.

$$\rho_S = 3\{P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\}$$

Bu derece korelasyonudur. Kopula ile şu şekilde tanımlanır.

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 \\
&= 12E(UV) - 3
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Spearman'ın X ve Y arasındaki sıra korelasyonu, uniform değişken olan U ve V arasındaki Pearson'ın çarpım moment korelasyon katsayısıdır (Balakrishnan ve Lai, 2009).

1.7. BAĞIMLILIĞIN YEREL ÖLÇÜMLERİ

Drouet-Mari ve Kotz (2001), Küresel ölçümler tüm düzlemdeki dağılımın momentlerinden tanımlanır ve X ile Y değişkenleri bağımsız olmadığında sıfır olabilir. Bu nedenle bağımlılık için yerel ölçüm değerlerine ihtiyaç duyulacağını söylemişlerdir.

1.7.1. Yerel Bağımlılığın Tanımı

Eğer, $V(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) noktasının açık bir komşuluğu ise, $F(x, y)$ dağılımı $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$ için $H(x, y) \geq F(x)G(y)$ koşulu tarafından sağlanan $V(x_0, y_0)$ komşuluğunda yerel olarak Pozitif Çeyrek Bağımlıdır.

Eğer, $V(x_0, y_0) = (x_0, \infty) \times (y_0, \infty)$ ise, kalan (remaining) pozitif çeyrek bağımlılığa ulaşılır (Mari ve Kotz, 2001:171).

1.7.1.1. Korelasyon Eğrisi

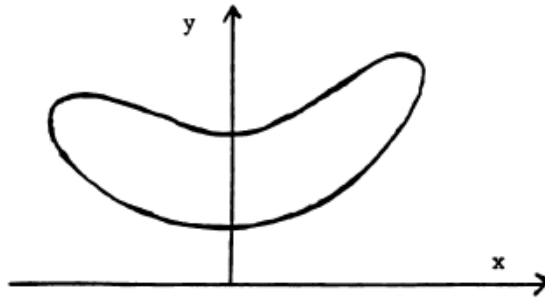
Kontur grafiklerinin limon ve elips gibi şekillendikleri yerde iki değişkenli deneyler için korelasyon katsayısı rassal iki değişken olan X ve Y arasındaki ilişkinin gücü için çok temel ve uygun bir ölçümdür.

Şekil 4: X ve Y nin Büyük Değerleri İçin Güçlü, Küçük Değerleri İçin Zayıf Korelasyon İlişkisi



Yukarıdaki şekil 4’de X ’in büyük değerleri için değişkenler arasındaki ilişki güçlü, küçük x ler için ise var olmayabilir ya da zayıftır.

Şekil 5: Pozitif ve Negatif Değerler Arasında Farklılık Gösteren İlişki



Şekil 5’de X in negatif değerden pozitif değere doğru değişmesiyle, aynı şekilde negatiften pozitif değere doğru giden bir ilişki vardır. X değerleri değiştikçe ilişkinin gücü değişir.

Birçok durumda kontur grafikleri eliptik olarak ölçülemeyebilir. Örneğin Fisher (1959) psikoloji ve diğer alanlardaki çalışmalarda $X=x$ ‘in büyük değerleri için X ve Y arasındaki ilişkiyi güçlü olarak, fakat küçük X ’ler için zayıf veya var olamayacağını belirtmiştir.

Bu tür durumlarla başa çıkmak için önerilen yöntemler arasında X ve Y ‘lerin bazı kriterler dikkate alınarak uygulanan dönüşüm teknikleri bulunur. Buda ilişkinin gücünün X değerleri ile değişmediği durumdur. Başka bir yaklaşım, verilen $X=x$ için Y ’nin koşullu ortalaması veya medyanın tahminlerini içeren parametrik olmayan regresyondur. Bu yöntem sadece ortalamanın (veya medyanın) koşullu davranışını dikkate alır. Y yönünde kontur çiziminin genişliğini dikkate almaz. Bu nedenle

regresyon yöntemlerinin $X=x$ 'de Y için bir yayılım ölçüsüyle tanımlanması gerekir (Bjerve ve Doksum, 1993).

Korelasyon eğrisi Pearson korelasyon katsayısının genelleştirilmiş bir yapısıdır. Varsayalım ki, X ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olsun. X 'in bir fonksiyonu olan korelasyon eğrisi $c(x)$ regresyon eğrisi tarafından açıklanan varyans miktarının yerel olarak nasıl değiştiğini açıklar.

$$c^2(x) = \frac{\sigma_x^2 \{\mu'(x)\}^2}{\sigma_x^2 \{\mu'(x)\}^2 + \sigma^2(x)}$$

Burada, $\mu(x) = E(Y | X = x)$ regresyon ortalama fonksiyonu, $\sigma^2(x) = \text{var}(Y | X = x)$ varyans fonksiyonu ve $\sigma_x^2 = \text{var}(x)$ 'tir. $c(x)$, X ve Y 'yi eşit bir temel üzerinde değerlendiremediğinden, yanıt değişkeni olan Y ve tahmin değişkeni olan X 'e ihtiyacı olduğu için korelasyon eğrisi gerçek bir regresyon kavramıdır. Hem X hem de Y 'nin bir fonksiyonu olan yerel bir korelasyon fonksiyonu veya yüzeyi, değişkenin simetrik olarak incelenmesini sağlayarak ilişkinin kuvvetini ve yönünü yerel olarak ölçmelidir. Korelasyon katsayısının yerelleştirilmesiyle, $f^{ij}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$ çıkar.

Gerekli olan $f(x, y)$ 'nin kısmi türevi olmalı ve Kartezyen çarpım kümesinde tanımlanmalıdır (Jones, 1996).

1.7.2. Holland ve Wang'ın Yerel Bağımlılık Fonksiyonu

Holland ve Wang (1987a) iki değişkenli kesikli rassal değişkenler için bağımlılık ölçümünü tanımlamada olasılık tablosunu, sürekli rassal değişkenlerde bağımlılık ölçümünü tanımlamak için yerel bağımlılık fonksiyonunu kullanmışlardır.

1.7.2.1. İki Değişkenli Kesikli Rassal Değişkenler İçin Yerel Bağımlılık Ölçümleri

P_{ij} 'lerin olasılıkları belirttiği $r \times c$ olasılık tablosu, iki kesikli rassal değişken S ve T nin ortak olasılık dağılımını belirler.

$$P_{ij} = \Pr(S = i, T = j) \quad 1 \leq i \leq r \text{ ve } 1 \leq j \leq c \text{ için,}$$

S ve T değişkenlerinin marjinal dağılımları sırası ile,

$$\Pr(S = i) = \sum_{j=1}^c p_{ij} = p_{+i}$$

$$\Pr(T = j) = \sum_{i=1}^r p_{ij} = p_{+j}$$

ile tanımlansın.

Yule ve Kendall (1950) ve Goodman (1969) çapraz çarpım oranlarını

$$\alpha_{ij} = \frac{p_{ij} p_{i+1j+1}}{p_{ij+1} p_{i+1j}} \quad 1 \leq i < r \quad 1 \leq j < c \text{ olarak göstermişlerdir.}$$

$\gamma_{ij} = \ln \alpha_{ij}$ için, γ_{ij} ve α_{ij} 2×2 lik olasılık tablosunda ki ilişkileri ölçer. $(r-1) \times (c-1)$ boyutlu 2×2 lik tablolar Yule ve Kendall tarafından tetradeler olarak adlandırılmıştır. Yerel çapraz çarpım oranları pozitif a_{ij} 'ler için $\{p_{ij} a_{ij}\}$ yi ve pozitif b_j 'ler için $\{p_{ij} b_j\}$ yi $\{p_{ij}\}$ ye dönüştüren satır ve sütun çarpım işlemlerinden etkilenmezler. Marjinal olasılıklar $\{p_{i+}\}$ ve $\{p_{+j}\}$ ile anakütle olasılık tablosu $\{p_{ij}\}$ leri belirleyen α_{ij} ya da eşdeğer olarak γ_{ij} lerdir.

1.7.2.2.İki Değişkenli Sürekli Rassal Değişken Yoğunlukları için Yerel Bağımlılık Fonksiyonu

X ve Y $K = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ kümesinde tanımlı türevlenebilir $f(x, y)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip iki sürekli rassal değişken olsun.

X 'in marjinal yoğunluğu; $f_1(x) = \int f(x, y) dy$ ve

Y 'nin marjinal yoğunluğu; $f_2(y) = \int f(x, y) dx$ olsun. (a, b) $f_1(x)$ 'in (c, d) ise $f_2(y)$ 'nin sınırlarıdır. Burada a, b, c ve d sonsuz değerler alabilir. Dikdörtgensel bir bölge olan K kümesi $(a, b) \times (c, d)$ kartezyan çarpımının alt kümesidir. (x, y) noktasının olasılığı $f(x, y) dx dy$ ile elde edilir.

Bu olasılık iki yönlü bir tablonun hücre olasılığı olarak görülebilir. Bu iki yönlü tablo için yerel çarpaz çarpım oranı;

$$\alpha(x, y) = \frac{f(x, y) f(x + dx, y + dy)}{f(x + dx, y) f(x, y + dy)}$$

olarak ifade edilir.

Holland ve Wang(1987a) $\ln \alpha(x, y)$ 'nin limit durumu olarak dikdörtgensel bölgenin sonsuz küçük parçalara ayrıldığı durumu dikkate almışlardır. Yerel bağımlılık fonksiyonu $\gamma f(x, y)$;

$$\gamma(f(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x, y)$$

ile gösterilir.

Burada $\gamma(f(x, y))$ nin yoğunluk fonksiyonu olması gerekli değildir, türevlenebilir bir fonksiyon olarak tanımlanabilir.

K 'nın Kartezyen çarpım kümesi olması koşulu ile, $\gamma(f(x, y))=0$ sonucu X ve Y değişkenlerinin bağımsız olduğu durumda gerçekleşir.

- **Tanım:** $f(x, y)$, $f_1(x)$ ve $f_2(y)$ marjinal yoğunluklara sahip iki değişkenli olasılık fonksiyonu olsun. $g_1(x)$ ve $g_2(y)$ de $f_1(x)$ ve $f_2(y)$ nin sürekli tek değişkenli yoğunluğunu tanımlasın.

$$\Omega_1(f(x, y), g_1(x)) = \frac{f(x, y)g_1(x)}{f_1(x)}, g_1(x) \text{ ile } x\text{'in marjinal değişimidir.}$$

$$\Omega_2(f(x, y), g_2(y)) = \frac{f(x, y)g_2(y)}{f_2(y)}, g_2(y) \text{ ile } y\text{'nin marjinal değişimidir.}$$

1.7.3. Yerel Bağımlılık Fonksiyonunun özellikleri

$R(h)$ ve $\mathfrak{R}^2$ 'nin dikdörtgensel bir alan olduğu varsayalım.

- $-\infty < \gamma(x, y) < \infty$
- $\forall (x, y) \in R(h)$ için ancak ve ancak X ve Y bağımsız ise $\gamma(x, y) = 0$.
- $\gamma(x, y)$ simetriktir.
- Holland ve Wang(1987b), $\gamma(x, y)$ sabit olduğunda bu sabitin herhangi bir monoton fonksiyonun “iyi” bir ilişki ölçüsü olacağını belirtmiştir. Fakat

$\gamma(x, y)$ $R(h)$ 'de işaretini değiştirdiğinde çoğu ilişkinin ölçüleri yetersiz hatta yanıltıcı olabilir.

- X ve Y korelasyon katsayısı ρ olan iki değişkenli normal dağılımlar ise,

$$\gamma(x, y) = \rho / (1 - \rho^2)$$

bir sabittir. Diğer taraftan, $\gamma(x, y)$ sabit ise Jones(1998) iki değişkenli yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ 'nin üstel dağılış ailesi formuna sahip olması gerektiğini belirtmiştir.

- $\gamma(x, y)$ verilen y için X 'in veya verilen x için Y 'nin koşullu dağılım fonksiyonudur.
- Normal dağılımda, yerel bağımlılık fonksiyonu Y değişkenine göre doğrusaldır.
- Yalnız X 'in bir fonksiyonu olan regresyon tipi bir yaklaşım değişen bağımlılık yapısının hemen hemen tamamını özetler, (Jones, 1996).
- **Tanım:** İki değişkenli olasılık fonksiyonundan hesaplanan bir fonksiyon, hem x in marjinal değişimi hem de y 'nin marjinal değişimi iki değişkenli olasılık fonksiyonuna uygulandığında değişmez ise bu fonksiyon *margin-free* olarak adlandırılır.

Yerel bağımlılık fonksiyonu sadece *margin-free* değil aynı zamanda X -marjinal ve Y -marjinal değişimler altında maksimum değişmezdir (Wang, 1993).

1.7.4. Sabit Yerel Bağımlılık Fonksiyonu

Sabit yerel bağımlılığı olan tüm dağılımlar, koşullu üstel dağılış ailesine ve bu aileye ait doğal parametrenin doğrusal bir fonksiyonuna sahip olmalıdır. Keyfi çizilen marjinal ile normal eşit varyanslı doğrusal regresyon bunun en önemli özel bir durumudur. Bu durum aşağıda açıklanmıştır.

$\theta \in R$ yerel bağımlılık fonksiyonu için sabit bir değer olsun.

$$\frac{\partial^2 \ln f(x, y)}{\partial x \partial y} = \theta$$

İfadesi iki değişkenli yoğunluğun

$$f(x, y) = a(x; \theta)b(y; \theta) \exp(\theta xy)$$

(1.17)

formuna sahip olması gerektiğini söylemekle eşdeğerdir. Burada, $a(x; \theta)$ ve $b(y; \theta)$

$$f_x(x) = a(x; \theta) \int_{c_2} b(y; \theta) e^{\theta xy} dy$$

$$f_y(y) = b(y; \theta) \int_{c_2} a(x; \theta) e^{\theta xy} dx$$

marjinal kısıtlamaları tahmin eden, keyfi ve negatif olmayan fonksiyonlardır. eşitlik (1.17) den sabit doğrusal bağımlı bir dağılımda verilen X için Y 'nin koşullu dağılımı

$$b(y; \theta) e^{\theta xy} \quad (1.18)$$

ile orantılıdır.

Ortak dağılımın yerel bağımlılık fonksiyonu sadece bu koşullu dağılıma bağlıdır (verilen y için X in dağılımı içinde geçerli). y 'nin bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde eşitlik (1.18),

$$\exp\left(\frac{y\psi}{v(\phi)} + h(y, \phi)\right)$$

ile orantılı üstel aile formuna sahiptir, (Jones, 1998).

$\psi/v(\phi) = \theta x + \alpha(\theta)$ ve $\phi = \beta(\theta)$ yazılır. Böylece α ve β nin bazı fonksiyonları için $h(y, \phi) = \log b(y; \theta) - y\alpha(\theta)$ elde edilir. Bu sonuç önemli bir yoruma sahiptir:

Ancak ve ancak ortak genelleştirilmiş doğrusal model durumunda, kanonik parametresi X 'in doğrusal bir fonksiyonu olan, sabitlenmiş yayılım parametresi $v(\phi)$ için $Y|x$ doğrusal bir üstel dağılım ailesine sahipse yerel bağımlılık fonksiyonu, sabittir.

Alternatif bir parametre olarak, $v(\phi) = 1/\theta$ için $\psi = x + \alpha(\theta)/\theta$ ve θ yayılım parametresinin tersidir. Diğer bir alternatif parametre, $v(\theta) = 1$ alınırsa $\psi = \theta x + \alpha(\theta)$ eşitliğindeki eğim θ olur.

γ nın *margin-free* özelliği biraz yanıltıcıdır: yukarıdaki herhangi bir marjinalle üstel bir ailenin koşullanacağı söylenirse, X 'in kanonik doğrusal modele uygun olacak şekilde düzenlenmesi gerekmektedir (Jones, 1998).

İKİNCİ BÖLÜM

İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLARIN OLUŞTURULMASI

Sürekli iki değişkenli yoğunluk fonksiyonunun oluşturulmasına farklı yöntemler ile yaklaşmıştır. Fakat oluşum yöntemlerini sınıflandırmak için matematiksel bir şema veya düzen bulunmamaktadır. Mardia (1970) göre olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumu için sistematik yöntemlerin bazıları şu şekilde sıralanabilir; Pearson diferansiyel denklem sisteminin çözümü (Van Uven 1947-1948), Normal dağılım ve marjinal dağılımları temel olarak kullanan seri açılımları ve Johnson'ın dönüşüm yöntemleri.

Hiçbir dağılım fonksiyonu ailesi, uygulamada kullanılan sürekli iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonunda bulunan tüm bağımlılık yapısını tanımlayacak kadar geniş bir yelpaze sunamamaktadır.

Plackett (1965) sürekli iki değişkenli frekans yüzeyini 2×2 sürekli kesikli olasılık tablolarına ayırmıştır ve 2×2 olasılık oranlarını iki sürekli rassal değişken arasındaki bağımlılığın bir ölçümü olarak değerlendirmiştir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşturulmasına farklı bir bakış açısı ile yaklaşan ilk kişiler arasında yer almaktadır. Ancak Plackett'in sistemi ile iki değişkenli normal dağılımın nasıl oluşturulabileceği hala bilinmemektedir. Yaklaşımın tam bir başarı olmamasının nedeni kesikli hale getirme şekli ile ilgili olabilir (Wang, 1993).

İki değişkenli dağılımların oluşturulmasında kullanılan başlıca yöntemler;

- Marjinal dönüştürme yöntemleri,
- Kopula oluşum yöntemleri,
- Karma ve birleştirme yöntemleri,
- Ortak üç değişkenli dağılımlarda indirgeme teknikleri
- Koşullu olarak belirlenen dağılımlar.

Bazı diğer yöntemlere de Balakrishnan ve Lai (2009) kitaplarında değinmişlerdir. Bu bölümde,

- İki değişkenli yoğunluk fonksiyonunun oluşturulması amacıyla kullanılan Marjinal yer değiştirme algoritması,
- Pearson ailesi,

- Johnson'ın dönüşüm ailesi,
- Doğrusal Olmayan İntegral Denklemleri ile Dejenere Kernel Yöntemi anlatılmıştır. Konuyla ilgili örnekler alt başlıkta verilmiştir.

2.1 İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI AMACIYLA KULLANILAN MARJİNAL YER DEĞİŞTİRME ALGORİTMASI

Her hangi iki tek değişkenli yoğunluk fonksiyonları olan (a,b) de sınırlı $g(x)$ ve (c,d) de sınırlı $h(y)$ için $\{g,h\}$ $(a,b) \times (c,d)$ üzerinde sınırlı tüm olasılık yoğunluk fonksiyonları kümesi olsun. Burada, $g(x)$, x 'in marjinal yoğunluğu ve $h(y)$, y 'nin marjinal yoğunluğu olarak tanımlansın. Diğer bir deyişle

$$\{g,h\} = \{f(x,y) : f_1(x) = g(x) \text{ ve } f_2(y) = h(y), (x,y) \in (a,b) \times (c,d)\}$$

olur. R^2 'nin herhangi bir S alt kümesi ve S de tanımlı $\gamma(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu için, $\{\gamma, S\}$ S de tanımlı iki değişkenli fonksiyonların (olasılık yoğunluk fonksiyonu olmasına gerek yok) kümesi olsun. Örneğin,

$$\{\gamma, S\} = \{f : f, S \text{ de tanımlı ve } \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x,y) = \gamma(x,y) \quad \forall (x,y) \in S\}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun ve yerel bağımlılık fonksiyonu olarak adlandırılsın. Yerel bağımlılık fonksiyonunun sınırlardan bağımsızlık (ölçekten bağımsız) özelliği iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonunun üç bileşene ayrılabilceğini gösterir. Bunlar, yerel bağımlılık fonksiyonu $\gamma(x,y)$, marjinal yoğunluklar $f_1(x)$ ve $f_2(y)$ dir.

Teorem 2.1: Herhangi sürekli yoğunluklar olan (a,b) aralığında tanımlı $g(x)$ ve (c,d) aralığında tanımlı $h(y)$ ile $K = (a,b) \times (c,d)$ de tanımlı integrallenebilir $\gamma(x,y)$ için,

$$\int f(x,t)dt = g(x) \tag{2.1}$$

$$\int f(t,y)dt = h(y) \tag{2.2}$$

ve

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x, y) = \gamma(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \quad (2.3)$$

olacak şekilde D kümesinde tanımlı tek bir sürekli $f(x, y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu vardır.

Kanıt: D kümesinde tanımlı herhangi $f(x, y)$ iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu için önceden belirlenen marjinal $g(x)$ ve $h(y)$ ile $v(x, y) = A(x)B(y)f(x, y)$ formunun iki değişkenli bir yoğunluğunun varlığı ve tekliği Kullback (1968) tarafından ispatlanmıştır. Kullback $v(x, y)$ 'nin $f(x, y)$ fonksiyonu ve $\{g(x), h(y)\}$ kümesi arasındaki Kullback bilgi aralığını en aza indirgeyen iki değişkenli yoğunluk olduğunu veya eşdeğer olarak $v(x, y)$ 'nin $\{g(x), h(y)\}$ için $f(x, y)$ 'nin Kullback bilgi izdüşümü olduğunu göstermiştir.

Verilen bir $\gamma(x, y)$ için $v(x, y) = C \exp[\Gamma(x, y)]$ formunda iki değişkenli yoğunluk oluşturulabilir. Burada, $\exp[\Gamma(x, y)]$ D üzerinden integrali alınabilir bir fonksiyondur ve $\gamma(x, y)$ 'nin integraline eşittir. C ise D üzerinden $\exp[\Gamma(x, y)]$ 'nin integral sonucudur. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ 'nin çözümü $\{g(x), h(y)\}$ için $v(x, y)$ 'nin Kullback izdüşümüdür.

Kesikli iki değişkenli dağılımlar için ardışık oranlı uyum süreci, (the iterative proportional fitting process) belirlenen marjinal ve çapraz çarpım oranlarına sahip iki yönlü tablo oluşturmak için kullanılır, (Plackett'den aktaran Wang, 1993). Kullback(1968); Csiszar(1975) ile Speed ve Kiiveri(1986) belirlenen marjinal yoğunlukları ardışık olarak elde etmek için, x marjinal yer değişim Ω_1 ve y marjinal yer değişim Ω_2 yi kullanmıştır. Benzer şekilde, $f(x, y)$ aşağıda tanımlanan ardışık marjinal yer değiştirme ile $v(x, y) = C \exp(\Gamma(x, y))$ den tahmin edilebilir.

$$f^{(0)}(x, y) = C \exp(\Gamma(x, y)), \quad f^{(2k+1)} = \Omega_1(f^{(2k)}, g(x)) \quad \text{ve} \quad f^{(2k+2)} = \Omega_2(f^{(2k+1)}, h(y)),$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

$\{f^{(n)}(x, y), n > 0\}$ dizisi ardışık marjinal yer değiştirme olarak adlandırılır. Yukarıdaki yazarlar $\{f^{(n)}(x, y), n > 0\}$ dizisinin tek bir yoğunluğa ulaştığını göstermişlerdir. Ardışık marjinal yer değiştirmenin sayısal uygulaması Teorem 2.1 'den sürekli iki

değişkenli olasılık fonksiyonu için kesikli bir yaklaşım sağlayabilir. Örneğin kesikli dağılımlar için,

$$\gamma(x, y) = \theta \quad 0 \leq x, y \leq 1,$$

$$g(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ ve}$$

$$h(y) = 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

olmak üzere sayısal çözüm,

$$\left\{ \left(x_i = \frac{2i-1}{2n}, y_j = \frac{2j-1}{2n} \right) \right\} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

kesikli noktalarda hesaplanabilir.

Bu ardışık araştırma $f^{(0)}(x, y) = \exp(\theta xy)$ ile başlar ve $f^{(1)}(x_i, y) = f^{(0)}(x_i, y) / f^{(0)}(x_i)$ hesabıyla devam eder. Burada $f^{(0)}(x_i) = \int_0^1 f^{(0)}(x_i, t) dt$ dir. Bu satır marjinal yer değiştirme ölçümüdür. Sütun marjinal yer değiştirme ise, $f^{(2)}(x_i, y_j) = f^{(1)}(x_i, y_j) / f^{(1)}(y_j)$ de $f^{(1)}(x_i, y)$ ile ölçülür. Burada $f^{(1)}(y_j) = \int_0^1 f^{(1)}(t, y_j) dt$ dir. Yinelemeler genellikle birkaç döngü sonrası yakınsar. Bu sonuç istenen olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı bir gösterimidir.

Farklı iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonları aynı marjinallere sahip olabilirler. Örneğin, Gumbel (1960) ve Marshall ile Olkin (1967) iki değişkenli üstel dağılım tanımlamışlardır. Bu dağılımlar aynı üstel marjinal yoğunluklara sahip olmasına rağmen yerel bağımlılık fonksiyonları farklıdır. İki değişkenli normal dağılımlar şu şekilde belirtilebilir,

$f(x, y)$, R^2 de tanımlı iki değişkenli bir yoğunluk olsun.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x, y) = \eta$$

bir sabite eşit,

$$\int f(x, t) dt = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$$

$$\int f(s, y) ds = (2\pi)^{-1/2} \exp(-y^2/2)$$

ise, $f(x, y)$,

$$\rho = \left\{ (1 + 4\eta^2)^{1/2} - 1 \right\} / (2\eta)$$

korelasyon katsayısına sahip iki değişkenli normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Benzer şekilde, iki değişkenli Cauchy yoğunlukları tek değişkenli Cauchy marjinallerine ve

$$\gamma(x, y) = 3xy / (x^2 + y^2 + c^2) \quad c > 0$$

sahiptir. Yerel bağımlılık fonksiyonları, Cauchy dağılımı olan X ve Y için 1-inci ve 3. bölgede pozitif, 2. ve 4. bölgede negatif olarak bağımlı olduklarını gösterir. İki değişkenli Gama dağılımları, tek değişkenli Gama marjinallerine ve

$$\gamma(x, y) = (1 - q)(y - x)^2 \quad q > 0$$

sahiptir (Wang, 1993).

2.2. PEARSON AİLESİ

Pearson tek değişkenli yoğunluklar oluşturmak için diferansiyel denklem yaklaşımını kullanmıştır (Pearson 1895). Van Uven(1947-1948) iki değişkenli olasılık fonksiyonu oluşturmak için bir çift Pearson tipi diferansiyel denklem ele almıştır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, y) = \frac{L_1(x, y)}{Q_1(x, y)} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln f(x, y) = \frac{L_2(x, y)}{Q_2(x, y)} \quad (2.5)$$

Tek değişkenli olarak ele alındığında eşitlik (2.4) ve (2.5) birer Pearson diferansiyel denklemdir. Burada L_j ler (x, y) nin doğrusal fonksiyonları, Q_j ler ise (x, y) nin karesel fonksiyonlarıdır, bu fonksiyonlar aşağıdaki ilişkiye sahiptirler,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \ln f \\ \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{L_1}{Q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L_2}{Q_2} \right) \end{aligned}$$

veya

$$Q_2 \frac{\partial L_1}{\partial y} - Q_1 \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{Q_2}{Q_1} L_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} - \frac{Q_1}{Q_2} L_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x} \quad (2.6)$$

olup verilen eşitlik sağlanmalıdır, bu nedenle L_j ve Q_j ler keyfi seçilemez. Ayrıca $f(x,y)$ nin pozitifliğinin sağlanması için L_j ve Q_j katsayılarıyla ilgili bazı kısıtlamalar gerekir. Bu kısıtlamaların elde edilişi aşağıda verilmiştir;

Eşitlik (2.4) kullanılarak,

$$\int_a^b Q_1 \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_a^b L_1 f dx$$

ve eşitliğin soluna kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned} [Q_1 f]_a^b - \int_a^b \frac{\partial Q_1}{\partial x} f dx &= \int_a^b L_1 f dx \\ \int_a^b \left(L_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \right) f dx &= [Q_1 f]_a^b \end{aligned} \quad (2.7)$$

ve eşitlik (2.5) ten benzer şekilde,

$$\int_c^d \left(L_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) f dy = [Q_2 f]_c^d \quad (2.8)$$

elde edilir. L_i ve Q_i nin tanımları ile

$$L_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = R = r_0 + r_1 x + r_2 y, \quad L_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = S = s_0 + s_1 x + s_2 y \quad (2.9)$$

olarak alınıp eşitlik (2.7) ve (2.8) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \int_a^b R f dx &= [Q_1 f]_a^b \quad \text{ve} \quad \int_c^d S f dy = [Q_2 f]_c^d \\ (2.10) \quad r_0 \int_a^b f dx + r_1 \int_a^b x f dx + r_2 \int_a^b y f dx &= [Q_1 f]_a^b \\ s_0 \int_c^d f dy + s_1 \int_c^d x f dy + s_2 \int_c^d y f dy &= [Q_2 f]_c^d \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} r_0 + r_1 E(x)_y + r_2 y &= \frac{[Q_1 f]_a^b}{W_y} = \Omega_2(y) \\ s_0 + s_1 x + s_2 E(y)_x &= \frac{[Q_2 f]_c^d}{W_x} = \Omega_1(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada, $W_y = \int_a^b f dx$, $W_x = \int_c^d f dy$, $E(X|Y) = \frac{\int_a^b x f dx}{\int_a^b f dx}$ (y sabit iken x in koşullu

ortalaması) ve

$$E(Y|X) = \frac{\int_c^d y f dy}{\int_c^d f dy} \quad (x \text{ sabit iken } y \text{ nin koşullu ortalaması}) \text{ şeklindedir.}$$

Geçerli olan regresyon denklemleri ise,

$$E(X|Y) = \frac{1}{r_1}(\Omega_2 - r_0 - r_2 y) \quad \text{ve} \quad E(Y|X) = \frac{1}{s_2}(\Omega_1 - s_0 - s_1 x) \quad r_1 \neq 0, s_2 \neq 0 \quad (2.12)$$

şeklindedir. Eşitlik (2.10) kullanılarak,

$$\hat{R} = \int_c^d [Q_1 f]_c^d dy = \int_c^d \Omega_2 W_y dy = \hat{\Omega}_2, \quad \hat{S} = \hat{\Omega}_1 \quad (2.13)$$

Yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \int_a^b x Q_1 \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \int_a^b x L_1 f dx, \quad \int_a^b y Q_1 \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_a^b y L_1 f dx, \\ \int_c^d x Q_2 \frac{\partial f}{\partial y} dy &= \int_c^d x L_2 f dy, \quad \int_c^d y Q_2 \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_c^d y L_2 f dy \end{aligned}$$

Denklemin sol tarafındaki integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa, ilk olarak;

$$\begin{aligned} \int_a^b (Q_1 + xR) f dx &= [x Q_1 f]_a^b, \quad \int_a^b y R f dx = [y Q_1 f]_a^b \\ \int_c^d x S f dy &= [x Q_2 f]_c^d, \quad \int_c^d (Q_2 + yS) f dy = [y Q_2 f]_c^d \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci olarak,

$$\hat{Q}_1 + \langle x, R \rangle = \int_c^d [x Q_1 f]_a^b dy, \quad \langle y, R \rangle = \int_c^d [y Q_1 f]_a^b dy \quad (2.14)$$

$$\langle x, S \rangle = \int_a^b [x Q_2 f]_c^d dx, \quad \hat{Q}_2 + \langle y, S \rangle = \int_a^b [y Q_2 f]_c^d dx$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\langle \rangle$ iç çarpımı göstermektedir. Bu denklemlerden,

$$\langle (Q_1 + xR), f \rangle_{(y)} = \frac{[xQ_1 f]_a^b}{W_y} \equiv \Omega_2^{1,0}$$

$$\langle (Q_2 + yS), f \rangle_{(x)} = \frac{[yQ_2 f]_c^d}{W_x} \equiv \Omega_1^{0,1}$$

elde edilen $\Omega_2^{1,0}$ ve $\Omega_1^{0,1}$ denklemleri regresyon denklemleridir.

$$t_1 = x - \bar{x}, \quad t_2 = y - \bar{y}$$

genel ortalamadan sapmalar olsun,

$$\begin{aligned} r_1 t_1 + r_2 t_2 &= R - \hat{R}, \\ s_1 t_1 + s_2 t_2 &= S - \hat{S} \end{aligned} \quad (2.15)$$

eşitlik (2.14) deki denklemler sırası ile $\bar{x}\hat{R}, \bar{y}\hat{R}, \bar{x}\hat{S}, \bar{y}\hat{S}$ kullanılarak indirgenirse,

$$\begin{aligned} \langle t_1, R \rangle &= \int_c^d [t_1 Q_1 f]_a^b dy - \hat{Q}_1 \equiv R_0^{1,0}, \\ \langle t_2, R \rangle &= \int_c^d [t_2 Q_1 f]_a^b dy \equiv R_0^{0,1} \\ \langle t_1, S \rangle &= \int_a^b [t_1 Q_2 f]_c^d dx \equiv S_0^{1,0}, \\ \langle t_2, S \rangle &= \int_a^b [t_2 Q_2 f]_c^d dx - \hat{Q}_2 \equiv S_0^{0,1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

yada,

$$\begin{aligned} r_1 \langle t_1, t_1 \rangle + r_2 \langle t_1, t_2 \rangle &= R_0^{1,0}, \\ r_1 \langle t_1, t_2 \rangle + r_2 \langle t_2, t_2 \rangle &= R_0^{0,1} \\ s_1 \langle t_1, t_1 \rangle + s_2 \langle t_1, t_2 \rangle &= S_0^{1,0}, \\ s_1 \langle t_1, t_2 \rangle + s_2 \langle t_2, t_2 \rangle &= S_0^{0,1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

böylece,

$$\begin{aligned}
m^{2,0} &\equiv \langle t_1, t_1 \rangle = \frac{s_2 R_0^{1,0} - r_2 S_0^{1,0}}{r_1 s_2 - r_2 s_1}, \\
m^{1,1} &\equiv \langle t_1, t_2 \rangle = \frac{s_2 R_0^{0,1} - r_2 S_0^{0,1}}{r_1 s_2 - r_2 s_1} = \frac{r_1 S_0^{1,0} - s_1 R_0^{1,0}}{r_1 s_2 - r_2 s_1} \\
m^{0,2} &\equiv \langle t_2, t_2 \rangle = \frac{r_1 S_0^{0,1} - s_1 R_0^{0,1}}{r_1 s_2 - r_2 s_1}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

eşitlikleri elde edilir. Ω_1 ve Ω_2 doğrusal fonksiyonları göz önüne alındığında,

$$\Omega_2 = w_0 + w_2 y, \quad \Omega_1 = w_0' + w_1 x$$

eşitlik (2.13) ile,

$$\hat{R} = w_0 + w_2 \bar{y}, \quad \hat{S} = w_0' + w_1 \bar{x} \tag{2.19}$$

yazılabilir. Ayrıca, eşitlik (2.12) deki denklemler,

$$\begin{aligned}
E(X | Y) &= \frac{1}{r_1} \{ (w_0 - r_0) + (w_2 - r_2) y \}, \\
E(Y | X) &= \frac{1}{s_2} \{ (w_0' - s_0) + (w_1 - s_1) x \}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda regresyon denklemleri doğrusaldır.

$$\begin{aligned}
[f]_a^b &= \Omega_2 W_y, \\
[f]_c^d &= \Omega_1 W_x
\end{aligned}$$

ile eşitlik (2.6), (2.7), (2.8) ve (2.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\langle y, R \rangle &= \int_c^d y [Q_1 f]_a^b dy = \int_c^d y \left(\Omega_2 \int_a^b f dx \right) dy \\
&= \langle y, \Omega_1 \rangle = w_0 \bar{y} + w_2 \langle y, y \rangle, \quad \langle x, S \rangle = w_0' \bar{x} + w_1 \langle x, x \rangle
\end{aligned} \tag{2.21}$$

yazılabilir. Eşitlik (2.19) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\bar{y} \hat{R} &= w_0 \bar{y} + w_2 \bar{y}^2, \\
\bar{x} \hat{S} &= w_0' \bar{x} + w_1 \bar{x}^2
\end{aligned}$$

yazılabilir, veri setinden elde edildikleri için $\bar{x}$ şekline ifade edilmiştir. Eşitlik (2.21) deki denklemlerden,

$$\langle t_2, R \rangle = w_2 (\langle y, y \rangle - \bar{y}^2) = w_2 \langle t_2, t_2 \rangle = w_2 m^{0,2},$$

$$\langle t_1, S \rangle = w_1 (\langle x, x \rangle - \bar{x}^2) = w_1 \langle t_1, t_1 \rangle = w_1 m^{2,0}$$

yada,

$$r_0 \hat{t}_2 + r_1 \langle t_1, t_2 \rangle + r_2 \langle t_2, t_2 \rangle = 0 + r_1 m^{1,1} + r_2 m^{0,2} = w_2 m^{0,2}$$

$$s_0 \hat{t}_1 = s_1 \langle t_1, t_1 \rangle + s_2 \langle t_1, t_2 \rangle = 0 + s_1 m^{2,0} + s_2 m^{1,1} = w_1 m^{2,0}$$

buradan,

$$\frac{w_2 - r_2}{r_1} = \frac{m^{1,1}}{m^{0,2}} = \gamma \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

$$\frac{w_1 - s_1}{s_2} = \frac{m^{1,1}}{m^{2,0}} = \gamma \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

elde edilir (Van Uven 1947).

Pearson dağılım ailesi için yerel bağımlılık fonksiyonu, eşitlik (2.4) ve (2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &= \left(\frac{1}{Q_2} \right)^2 \left(Q_2(x, y) \left(\frac{\partial L_2(x, y)}{\partial x} \right) - L_2(x, y) \left(\frac{\partial Q_2(x, y)}{\partial x} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{Q_1} \right)^2 \left(Q_1(x, y) \left(\frac{\partial L_1(x, y)}{\partial x} \right) - L_1(x, y) \left(\frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir.

Sagrsta (1952) Pearson'ın temel birinci dereceden diferansiyel denklemlerinin kısmi diferansiyel denklemler sistemine doğrudan uygulanmasının pratik olmadığını, çünkü denklem çözümlerinin zor olduğunu ve çoğu durumda çözümlerin çok genel olduğunu belirtmiştir. Kotz (1974) aynı zamanda "Pearson 'ında belirttiği gibi bu yüzeylerin, teorik frekanslara uymadığı için pratik bir öneme sahip olmadıklarını söylemiştir."

Eşitlik (2.4) ve (2.5), $\gamma(x, y)$ ile ilgili gereğinden fazla bilgi içerdiği için bu eşitlikler değişkenlikten bağımsız değildir.

İntegral denklemleri (2.1) ve (2.2) ile birleştirilen tek diferansiyel denklem (2.3), Pearson ailesinden daha esnektir. Eşitlik (2.22) da gösterilen L_1 , L_2 , Q_1 ve Q_2 üzerindeki karmaşık kısıtlamaları ortadan kaldırır ve marjinal yoğunlukları açık bir şekilde sunar (Wang, 1993).

2.3. JOHNSON'IN DÖNÜŞÜM AİLESİ

Johnson(1949), $Z_1 = a_I((X - \zeta_1)/\lambda_1)$ ve $Z_2 = a_J((Y - \zeta_2)/\lambda_2)$ 'nin ortak iki değişkenli normal dağılımına sahip olan (X,Y) dağılımını ele almıştır. Burada, a_I ve a_J hem türevlenebilir hem de birebir olan marjinal dönüşümlerdir.

Johnson dönüşüm ailesi Teorem 2.1. koşulları altında yazılırsa eşitlik (2.3),

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x, y) = c \left(\frac{da_I(x)}{dx} \right)^{-1} \left(\frac{da_J(y)}{dy} \right)^{-1} \quad (2.23)$$

şeklini alır. Eşitlik (2.1) ve (2.2),

$$\int h(x, y) dy = (2\pi)^{-1/2} \exp(-a_I^2(x)/2) (da_I(x)/dx), \quad (2.24)$$

ve

$$\int h(x, y) dx = (2\pi)^{-1/2} \exp(-a_J^2(y)/2) (da_J(y)/dy) \quad (2.25)$$

sınır koşulları haline gelir. Eşitlik (2.23), (2.24) ve (2.25) a göre, Johnson dönüşüm ailesinin iki açıdan sınırlı olduğu sonucuna varılabilir: Birincisi, yerel bağımlılık fonksiyonu yalnızca x 'in ve yalnızca y 'nin bir fonksiyon çarpımıdır. İkincisi, yerel bağımlılık fonksiyonu tamamen marjinal yoğunluklar ile belirlenir. Kısaca, ortak yoğunluk iki marjinal dönüşüm ile tamamen belirlenir. İki değişkenli Cauchy ve iki değişkenli Gama dağılımları kesinlikle Johnson dönüşüm ailesi üyesi değildir.

Johnson dönüşüm ailesinin basit bir genellemesi, marjinal yoğunlukların yerel bağımlılık fonksiyonu üzerine oluşturduğu kısıtlamaları kısmen ortadan kaldırmaktadır. Kısmi diferansiyel denklem (2.23),

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln f(x, y) = \alpha(x)\beta(y) \quad (2.26)$$

ile değiştirilebilir. Bu yaklaşım Goodman(1985,p:39) tarafından önerilmiştir (Wang, 1993).

2.4. DOĞRUSAL OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİ İLE DEJENERE KERNEL YÖNTEMİ

Marjinaller ve yerel bağımlılık fonksiyonu göz önüne alındığında iki değişkenli yoğunluğa yaklaşmak için nümerik tekniklerde önerilmiştir. Bu teknikler

doğrusal olmayan integral denklemlerinin çözümüne dayanır. Önemli özelliklerinden birisi tüm alan üzerinde yoğunluk tanımlanmasını sağlayan açık fonksiyonlara yaklaşımı sağlar. İki değişkenli yoğunluğu tanımlamak için önerilen üç sayısal teknik, Dejenere Kernel Yöntemi, Genişletme Yöntemi ve Sayısal İntegral yöntemidir. Genişleme yöntemi ve sayısal integral yöntemi yinelemeli marjinal değiştirme algoritmasının belirli uygulamaları olarak görülür. Yöntemlerin avantajları fonksiyonel bir formun kullanılabilirliğidir (Molenberghs ve Lesaffre, 1997).

2.4.1. İki Değişkenli Yoğunluğun Analitik Yapısı

$\gamma(x, y)$ ve marjinal dağılımların Teorem 2.1 'in gereklerini yerine getirdiği varsayılın.

Tanım: $\gamma(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln K(x, y)$ ise, $\gamma(x, y)$ için, D üzerinde tanımlı olan $K(x, y)$

fonksiyonu bağımlılık (dependence) kerneli olarak adlandırılır. $f(x, y)$ nin tekliğinden dolayı, f in Teorem 2.1 i karşılayan $f(x, y) = K(x, y) \phi_1(x) \phi_2(y)$ iki değişkenli yoğunluğu vardır. Sabit bir yerel bağımlılık fonksiyonu için bağımlılık kerneli , $K(x, y) = \exp \gamma(x, y)$ dir. Ayrıca her hangi bir yerel bağımlılık fonksiyonu için basit bir integral,

$$K(x, y) = \exp \left(\iint \gamma(x, y) dx dy \right)$$

bağımlılık kernelini verir.

$f(x, y)$ biliniyor ise, $K'(x, y) = f(x, y) / g(x)h(y)$ de bağımlılık kernelini verir. $f(x, y)$, $f(x|y)$ ve $f(y|x)$ de bağımlılık kernelleridir. Genel olarak iki değişkenli yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x, y) = \phi_1(x) \phi_2(y) K(x, y) \quad (2.27)$$

olarak genişletilebilir ve marjinal koşullar

$$f_1(x) = \phi_1(x) \int_c^d \phi_2(s) K(x, s) ds ,$$

$$f_2(y) = \phi_2(y) \int_a^b \phi_1(s) K(s, y) ds$$

(2.28)

olarak yazılabilir. Her iki marjinalinde aynı olduğu özel fakat önemli durumda $f(x)$ ve K simetrik bir fonksiyondur, eşitlik (2.28),

$$f(x) = \phi(x) \int_a^b \phi(s) K(x, s) ds \quad (2.29)$$

eşitliğine dönüşür. Eşitlik (2.28) ve (2.29) integral denklem örnekleridir (Molenberghs ve Lesaffre, 1997).

2.4.2. Dejenere Kernel Yöntemi

Eğer $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ eşitliği hemen hemen her yerde tüm a_i lerin sıfır olduğunu ifade ediyorsa, $b_i(x), (i=1, 2, \dots, n)$, fonksiyon kümesi doğrusal bağımsız olarak adlandırılır.

Tanım:

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i(y) b_i(x) \quad (2.30)$$

eşitliği sonlu bir toplam olarak ifade edilebiliyorsa bir bağımlı Kernel dejenere olarak adlandırılır. Burada, $a_i(y)$ ve $b_i(x)$ integrallenebilir fonksiyonlardır.

$\{b_i(x) (i=1, 2, \dots, n)\}$ doğrusal olarak bağımsız fonksiyonlar dizisi olduğunu varsayalım. Bu özellik her iki değişken içinde gereklidir. Böylece Kernel alternatif olarak

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^m q_j(x) p_j(y) \quad (2.31)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. $\{p_j(y) j=1, 2, \dots, n\}$ doğrusal bağımsızdır. Dejenere Kernel genel kernelin kesikli bir seri genişlemesi olarak düşünülebilir. Kullanılan temel teknik ise genel olarak sonsuz seriler ile kernele yaklaşımdır. Dejenere Kernel dizisi oluşturmak için kesilebilecek (trunceted) doğru bir genişlemenin nasıl seçileceğidir. Bunun için, kare integrallenebilir ve simetrik Kernel kullanılabilir. Bu durumda,

$$K(x, y) = \sum_i \alpha_i \phi_i(x) \phi_i(y)$$

olarak genişletilebilir (Molenberghs ve Lesaffre ,1997).

Burada α_i , K 'nın öz değeri φ_i ise K 'nın öz fonksiyonlarıdır ve bunları tanımlamak zordur.

Teorem 2.2. $K(x,y)$, eşitlik (2.30) ve (2.31) gibi ayrıştırılmış dejenere Kernel olsun.

Eşitlik (2.28) için çözüm $\phi_k(x) = f_k(x)/P_k(x)$ ($k=1,2$) şeklindedir. Burada,

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^n \mu_i b_i(x)$$

$$P_2(y) = \sum_{j=0}^m v_j p_j(y)$$

olarak tanımlanmıştır. Bilinmeyen μ_i ve v_j katsayıları

$$\mu_i = \int_c^d \frac{h(s)q_i(s)}{P_2(s)} ds \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$v_j = \int_a^b \frac{g(s)q_j(s)}{P_1(s)} ds \quad (0 \leq j \leq m)$$

çözümü ile bulunabilir.

Sonuç: $(h_i)_i$ doğrusal olarak bağımsız bir dizi ile $K(x,y) = \sum_{i=0}^n b_i(x)b_i(y)$ simetrik dejenere kernel olsun. eşitlik (2.29) için çözüm, $\phi(x) = f(x)/P(x)$ şeklindedir. Burada,

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \mu_i b_i(x)$$

ve bilinmeyen katsayı

$$\mu_i = \int_a^b \frac{f(s)b_i(s)}{P(s)} ds \quad (0 \leq i \leq n)$$

çözümü ile bulunabilir (Molenberghs ve Lesaffre, 1997).

2.4.3. Sayısal İntegral Yöntemi

Bağımlı kernele bir yaklaşımda bulunmaksızın, parametrik integral ile sayısal integral değiştirilerek problem yaklaşık olarak çözülebilir. Bu yaklaşım yöntemi matematiksel olarak Ek 1 de açıklanmıştır. Sırasıyla $[a,b]$ ve $[c,d]$ üzerinde tanımlı integrallenebilir a ve b fonksiyonları için,

$$\int_a^b a(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i a(x_i) ,$$

$$\int_c^d b(y)dy = \sum_{j=0}^m u_j b(y_j) , \quad (2.32)$$

eşitliklerin geçerli olduğu varsayalım. Burada, w_i ve u_j ağırlıklar ve x_i ile y_j kareleştirme kuralının düğümleridir (the nodes of the quadrature rule). Eşitlik (2.32) ve (2.28) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{\phi_1(x)} &= \int_c^d \phi_2(y)K(x,y)dy \simeq \sum_{j=0}^m u_j \phi_2(y_j)K(x,y_j) \\ \frac{h(y)}{\phi_2(y)} &= \int_a^b \phi_1(x)K(x,y)dx \simeq \sum_{i=0}^n w_i \phi_1(x_i)K(x_i,y) \end{aligned} \quad (2.33)$$

eşitliklerine yaklaşılabılır. X ve Y nin tüm değerlerinin x_i ve y_i olarak alınması ile yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. $\mu_i = \phi_1(x_i)$ ve $v_j = \phi_2(y_j)$ konularak, aynı bilinmeyen ile $m+n+2$ doğrusal olmayan denklem sistemine geçilir:

$$\begin{aligned} \frac{g(x_i)}{\mu_i} &= \sum_{j=0}^m u_j v_j K(x_i, y_j), \quad (0 \leq i \leq n) \\ \frac{h(y_j)}{v_j} &= \sum_{i=0}^n w_i \mu_i K(x_i, y_j), \quad (0 \leq j \leq m). \end{aligned}$$

Bu sistemi çözmek ve eşitlik (2.33) deki çözümleri değiştirmek,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &\simeq \frac{g(x)}{\sum_{j=0}^m u_j v_j K(x, y_j)} \\ \phi_2(y) &\simeq \frac{h(y)}{\sum_{i=0}^n w_i \mu_i K(x_i, y)} \end{aligned}$$

yaklaşık formüllerini verir. w_i ve u_j ağırlıkları sadece kareselleştirme kuralları ve integral aralıklarına bağlıdır ve bu sebeple integralden bağımsızdır. Ayrıca, yineleme boyunca sabit kalırlar. Eşit aralıklı x_i ve $n=3k$ ile tekrarlanan Newton kareselleştirme kuralları seçilsin. $I = (3/8)(b-a)/n$ olsun,

$l=1, \dots, k-1$ için $w_0 = w_n = I$, $w_{3l} = 2I$ ve $l=0, \dots, k-1$ için $w_{3l+1} = w_{3l+2} = 3I$. Bu durumda μ_i sayıları tektir. Benzer oluşum y_j, u_j ağırlıkları ve v_j bilinmeyeni içinde yapılır. Sıfır vektörü başlangıç değerleri olarak seçilir ve orta girdiler için 1 seçilir. t -inci yinelemede $\mu_i^{(t)}$ ve $v_j^{(t)}$ hesaplanır.

Basit güncelleme şeması,

$$\mu_i^{(t+1)} = \frac{g(x_i)}{\sum_{j=0}^m u_j v_j K(x_i, y_j)}, \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$v_j^{(t+1)} = \frac{h(y_j)}{\sum_{i=0}^n w_i u_i K(x_i, y_j)}, \quad (0 \leq j \leq m)$$

şeklinde olur. Bu yöntem yakınsaklığı sağlar (Molenbergs ve Lesaffre, 1997).

2.4.4. İki Değişkenli Dağılımların oluşturulması ile ilgili Örnekler

Bu kısımda bağımlılık fonksiyonlarının kullanılması ile, Lomax dağılımı ve Normal dağılımın iki değişkenli formu ispatlarıyla verilmiştir.

Örnek 1. Lomax Dağılımı

$\mathbf{x}$ şans vektörü'nün yerel bağımlılık fonksiyonu $\gamma(x_1, x_2)$ için, $f(x_i | x_j)$, verilen $X_j = x_j$ için X_i nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu belirttiğinde

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \ln f(x_i | x_j)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

şeklinde olur. Yukarıdaki eşitlik yerel bağımlılık fonksiyonunu belirten $\gamma(x_1, x_2)$ nin sadece x_j için x_i nin koşullu dağılımına dayandığı anlamına gelir.

$\mathbf{x}$ in dağılımı,

$$f(x_1, x_2) = p(p+1)b_1b_2(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} \quad x_1, x_2 > 0, p, b_1, b_2 > 0 \quad (2.34)$$

ortak olasılık dağılım fonksiyonu ile birlikte iki değişkenli Lomax dağılımıdır.

Ancak ve ancak

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{b_1b_2(p+2)}{(1+b_1x_1+b_2x_2)^2} \quad (2.35)$$

ve

$$m_i(x_j) = \frac{1+b_jx_j}{pb_i} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (2.36)$$

Burada, $m_i(x_j) = E[X_i | X_j = x_j]$ dir.

Kanıt: Eşitlik (2.35) in elde edildiği varsayalım. X_1 ve X_2 değişkenlerinin koşullu dağılımları sırası ile,

$$f(x_1 | x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} \quad (2.37)$$

ve

$$f(x_2 | x_1) = c_1(x_1)c_2(x_2)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} \quad (2.38)$$

şeklindedir. $p_i(x_i)$ ve $c_i(x_i)$ sadece $(i = 1, 2)$ için x_i değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

Eşitlik (2.37) ve (2.38) den,

$$\frac{f(x_1 | x_2)}{f(x_2 | x_1)} = \frac{p_1(x_1)p_2(x_2)}{c_1(x_1)c_2(x_2)}$$

eşitliği elde edilir. Buda,

$$\frac{p_1(x_1)}{c_1(x_1)f_1(x_1)} = \frac{c_2(x_2)}{p_2(x_2)f_2(x_2)} = \theta \quad (2.39)$$

eşitliğini sağlar.

Burada, $f_i(x_i)$ X_i nin marjinal dağılımlarıdır $(i = 1, 2)$ ve θ bir sabittir. $i = 1$ için, eşitlik (2.36)

$$\int_0^\infty x_1 p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} dx_1 = \frac{1+b_2x_2}{pb_1}$$

eşitliğini verir, buda

$$\int_0^\infty x_1 b_1 p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} dx_1 = \frac{1+b_2x_2}{p} \quad (2.40)$$

eşitliğini sağlar. Eşitlik (2.40) den ve

$$\int_0^\infty p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} dx_1 = 1$$

ilişkisinden,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_2x_2)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} dx_1 \\ & + \int_0^\infty b_1x_1 p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)} dx_1 \\ & = (1+b_2x_2) \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \end{aligned}$$

ya da

$$\int_0^\infty p_1(x_1) p_2(x_2) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(1+p)} dx_1 = \frac{1+p}{p} (1+b_2x_2) \quad (2.41)$$

elde edilir. Eşitlik (2.41) de x_2 ye göre türev alındığında,

$$\int_0^\infty p_2(x_2) p_1(x_1) (1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(1+p)} dx_1$$

$$-\int_0^{\infty} p_1(x_1)p_2(x_2)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)}(p+1)dx_1 = \frac{b_2(1+p)}{p} \quad (2.42)$$

$$\int_0^{\infty} p_2(x_2)p_1(x_1)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)}dx_1 = 1 \quad (2.43)$$

olduğu için, eşitlik (2.41) ve (2.43) ile,

$$\frac{p'_2(x_2)}{p_2(x_2)} \frac{1+p}{p} (1+b_2x_2) = \frac{b_2(1+p)^2}{p} \quad \text{veya} \quad \frac{p'_2(x_2)}{p_2(x_2)} = \frac{b_2(1+p)}{1+b_2x_2} \quad (2.44)$$

yazılır. Eşitlik (2.44) in diferansiyel denklem çözümü;

$$p_2(x_2) = k(1+b_2x_2)^{p+1} \quad (2.45)$$

ile verilir. Burada k bir sabittir. Eşitlik (2.40) ve (2.45) dan,

$$k \int_0^{\infty} b_1x_1p_1(x_1)(1+b_1x_1+b_2x_2)^{-(2+p)}dx_1 = \frac{(1+b_2x_2)^{-p}}{p} \quad (2.46)$$

elde edilir. $x_2 \rightarrow 0$ iken, eşitlik (2.46),

$$\int_0^{\infty} b_1x_1p_1(x_1)(1+b_1x_1)^{-(2+p)}dx_1 = \frac{1}{kp} \quad (2.47)$$

olur. Kısmi integral ile eşitlik (2.47),

$$\int_0^{\infty} [p_1(x_1) + x_1p_1^*(x_1)](1+b_1x_1)^{-(1+p)}dx_1 = \frac{(1+p)}{kp} \quad (2.48)$$

şekline dönüşür. Burada, $p_1^*(x_1)$, $p_1(x_1)$ in x_1 'e göre türevidir. $x_2 \rightarrow 0$ iken, eşitlik (2.41) ve (2.45) den

$$\int_0^{\infty} p_1(x_1)(1+b_1x_1)^{-(1+p)}dx_1 = \frac{(1+p)}{kp} \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.48) den eşitlik (2.49) çıkartılırsa,

$$\int_0^{\infty} p_1^*(x_1)g(x_1)dx_1 = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir. Burada,

$$g(x_1) = \frac{x_1}{B(2, p)} (1+b_1x_1)^{-(1+p)}$$

ikinci tip beta dağılışının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Beta ailesinin tamlık özelliği ile eşitlik (2.50),

$$p_1^*(x_1) = 0 \text{ ya da } p_1(x_1) = k_1 \quad (2.51)$$

bir sabit olur. Benzer şekilde $i = 2$ için eşitlik (2.36),

$$c_1(x_1) = k_2(1+b_1x_1)^{p+1} \quad \text{ve} \quad c_2(x_2) = k_3$$

(2.52)

ifadelerini verir, k_2 ve k_3 birer sabittir. Eşitlik (2.45) ve (2.52) kullanılarak eşitlik (2.39), $f_2(x_2) = k_4(1+b_2x_2)^{-(p+1)}$ fonksiyonunu verir. k_4 bir sabittir. Eşitlik (2.45) ve (2.51) eşitlik (2.37) 'e yazılarak ve $f(x_1, x_2) = f(x_1 | x_2) f(x_2)$ kullanılarak,

$$f(x_1, x_2) = k^* (1+b_1x_1 + b_2x_2)^{-(2+p)} \quad (2.53)$$

elde edilir. k^* bir sabittir.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad \text{olduğu için eşitlik (2.53) } \mathbf{X} \text{ in dağılışının eşitlik}$$

(2.34) şeklinde olduğunu belirtir.

Örnek 2.

Şans değişkeni $\mathbf{x}$ in dağılımı,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2] \right\}, \quad -\infty < x < \infty, |\rho| < 1 \quad (2.54)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iki değişkenli normaldir.

Ancak ve ancak,

$$r(x_1, x_2) = \frac{\rho}{1-\rho^2} \quad (2.55)$$

ve

$$m_i(x_j) = \rho x_j, \quad i, j = 1, 2, i \neq j \quad \text{dir.} \quad (2.56)$$

Kanıt: Eşitlik (2.55) elde edildiğinde, verilen x_2 için X_1 in ve verilen x_1 için X_2 nin koşullu dağılımları sırası ile,

$$f(x_1 | x_2) = p_1(x_1) p_2(x_2) \exp \left\{ \frac{\rho}{1-\rho^2} x_1 x_2 \right\} \quad (2.57)$$

$$f(x_2 | x_1) = c_1(x_1) c_2(x_2) \exp \left\{ \frac{\rho}{1-\rho^2} x_1 x_2 \right\} \quad (2.58)$$

şeklidedir. Burada $p_i(x_i)$ ve $c_i(x_i)$ x_i e bağlı fonksiyonlardır. $i = 1, 2$ $i=1$ için eşitlik (2.56) daki ilişki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) p_2(x_2) \exp\left\{\frac{\rho}{1-\rho^2} x_1 x_2\right\} dx_1 = \rho x_2 \quad (2.59)$$

olur. Eşitlik (2.57) dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) p_2(x_2) \exp\left\{\frac{\rho}{1-\rho^2} x_1 x_2\right\} dx_1 = 1 \quad (2.60)$$

eşitliği gelir. Eşitlik (2.60) te x_2 değişkenine göre türev alınıp eşitlik (2.59) de yerine konulduğunda,

$$\frac{p_2'(x_2)}{p_2(x_2)} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} x_2 = 0 \quad (2.61)$$

elde edilir. burada $p_2'(x_2)$, $p_2(x_2)$ nin türevidir. Diferansiyel denklem çözümü,

$$p_2(x_2) = k_1 \exp\left\{-\frac{\rho^2 x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.62)$$

olarak elde edilir. k_1 bir sabittir. Eşitlik (2.57) ve (2.62) ten

$$k_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \exp\left\{\frac{\rho}{1-\rho^2} x_1 x_2\right\} dx_1 = \exp\left\{\frac{\rho^2 x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.63)$$

elde edilir. x_2 sabit olduğu için $\theta = \frac{\rho}{1-\rho^2} x_2$ yazılabilir böylece eşitlik (2.63)

$$k_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \exp\{\theta x_1\} dx_1 = \exp\left\{\frac{\theta^2 (1-\rho^2)}{2}\right\} \quad (2.64)$$

olur. Laplace dönüşümünün teklik özelliği ile eşitlik (2.64)

$$p_1(x_1) \propto \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.65)$$

sonucu gelir. Benzer şekilde $i=2$ için eşitlik (2.56) dan

$$c_1(x_1) \propto \exp\left\{-\frac{\rho^2 x_1^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.66)$$

ve

$$c_2(x_2) \propto \exp\left\{-\frac{x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.67)$$

olduğu gösterilir. Eşitlik (2.39), (2.65) ve (2.66) dan $f_1(x_1) \propto \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)$ ifadesi gelir

ve buda

$$f(x_1, x_2) = A \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2]\right\}, -\infty < x < \infty, |\rho| \leq 1$$

olduğunu kanıtlar (Sankaran ve Gupta, 2004).



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KOŞULLU DAĞILIM YAKLAŞIMI İLE İKİ DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ

Gerçek hayatta olan birçok durumda marjinal dağılımlardansa koşullu dağılımlar açısından ortak bir dağılımı görselleştirmek daha kolaydır. Bu nedenle, (X,Y) değişkenleri için bir model sunmak yerine, verilen y değeri için X 'in ve verilen x değeri için Y 'nin koşullu dağılımlarının varsayılan aileleri önerilebilir. Marjinal yoğunluklar yerine koşullu yoğunluklar ya da koşullu yoğunlukların özellikleri ile uğraşmak daha kolaydır. Tek modlu oldukları için bu dağılımları görselleştirmekte daha kolaydır. Fakat bu tür modeller ile (X,Y) değişkenleri için ortak bir dağılım bulunsa da, uyumlu olduğu garantisizdir. Örneğin;

$$X | Y \sim \text{Normal}(\alpha y + \beta y^2, \sigma_1^2(y))$$

$$Y | X \sim \text{Normal}(\gamma x + \delta x^2, \sigma_2^2(x))$$

koşulluları önerildiği varsayalım. $\delta = 0$ olduğunda bu koşullu dağılımlar uyumsuzdur. Sadece bikuadratik regresyonları uyumludur (Arnold ve Press, 1989b). Aşağıda, elde edilen iki değişkenli bir dağılımın sağlaması gereken uyumluluk ve teklik durumlarından bahsedilmiştir.

3.1.UYUMLULUK

(X,Y) ikilisinin, $S_x \times S_y$ üzerinde $\mu_1 \times \mu_2$ olasılık çarpım ölçümlerine göre sürekli olan rassal bir vektör olduğu varsayalım. S_x ve S_y , X ve Y değişkenlerinin tanımlı olduğu aralıklardır.

$$a(x, y) = f_{x|y}(x|y) \quad x \in S_x \quad \text{ve } y \in S_y \quad (3.1)$$

ve

$$b(x, y) = f_{y|x}(y|x) \quad x \in S_x \quad \text{ve } y \in S_y \quad (3.2)$$

aday koşullu dağılımlar olarak belirtilsin ve

$$N_a = \{(x, y) : a(x, y) > 0\}$$

$$N_b = \{(x, y) : b(x, y) > 0\}$$

olsun.

Teorem 3.1. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ ile koşullu yoğunlukları $a(x, y)$ ve $b(x, y)$

$$i) N_a = N_b = N$$

$$ii) \forall (x, y) \in N \text{ için}$$

$$a(x, y)/b(x, y) = u(x)v(y) \quad (3.3)$$

olacak şekilde $u(x)$ ve $v(y)$ fonksiyonları vardır. Burada $\int u(x)dx < \infty$ ise $f(x, y)$ vardır. $\int u(x)dx < \infty$ ve $\int [1/v(y)]dy < \infty$ birbirine eşit ifadelerdir. Herhangi birinin kontrolü yeterli olur.

Kanıt: $a(x, y)$ ve $b(x, y)$ dağılımlarının uyumlu olabilmesi için uygun marjinal yoğunlukları $f(x)$ ve $g(y)$ olmalıdır. Eşitlik (3.3) de $u(x) \propto f(x)$ ve $v(y) \propto 1/g(y)$ ile elde edilir. İntegrallenebilme koşulu marjinal yoğunlukların integrallerinin 1'e eşitliğini ifade eder. X ve Y için tanım kümelerinin her iki uçtan sınırlı olması integrallenebilme gerekliliğini ortadan kaldırır.

$\int v(y)d\mu_2(y) < \infty$ doğru ise, $c(x, y) = a(x, y)/b(x, y)$ eşitliği elde edilebilir. Bu ifade X ve Y nin bir fonksiyonuna dönüştürülmelidir. Eşitlik (3.3) ün elde edildiğini doğrulamak için,

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \text{ için } (x_1, y_1) \in N, (x_1, y_2) \in N, (x_2, y_1) \in N, (x_2, y_2) \in N$$

$$\frac{a(x_1, y_1)a(x_2, y_2)}{b(x_1, y_1)b(x_2, y_2)} = \frac{a(x_1, y_2)a(x_2, y_1)}{b(x_1, y_2)b(x_2, y_1)}$$

yani

$$c(x_1, y_1)c(x_2, y_2) = c(x_1, y_2)c(x_2, y_1)$$

eşitliği gösterilmelidir.

Abrahams ve Thomas(1984) eşitlik (3.3) ün tek başına yeterli olmadığını iddia etmişlerdir. Bu iddialara karşı örneği Gourieroux ve Monfort (1979) vermiştir (Arnold ve Press, 1989).

3.2.TEKLİK

Kısın 3.1 de verilen $a(x, y)$ ve $b(x, y)$ uyumlu olarak tanımlansa bile, iki değişkenli ortak yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ nin tek olup olmadığı kesin değildir.

Teorem 3.2. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için, $\mu_i; \left(R^{\sum p_i}, \mathfrak{R}^{\sum p_i}\right)$ üzerinde tanımlı σ -sonlu bir olasılık ölçümü olsun.

P ise $f(x_1, \dots, x_n)$ ile belirtilen $\mu = \otimes_{i=1}^n \mu_i$ 'ye göre kesin olarak pozitif bir yoğunluğa sahip $\left(R^{\sum p_i}, \mathfrak{R}^{\sum p_i}\right)$ üzerinde tanımlı bir olasılık ölçümü olsun, o zaman P tüm tek değişkenli koşullu yoğunluklar $n = 1, 2, \dots, n$ için $f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ile tek olarak tanımlanır.

Kanıt: $n = 2$ için,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1) f(x_2 | x_1) \\ &= f(x_2) f(x_1 | x_2) \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) \text{ pozitif olduğu için aynı şey } f(x_1 | x_2) \text{ ve } f(x_2) = f(x_1) \frac{f(x_2 | x_1)}{f(x_1 | x_2)}$$

fonksiyonları da pozitiftir.

Her iki tarafın μ_2 ölçümüne göre integrali alındığında

$$1 = f(x_1) \int \frac{f(x_2 | x_1)}{f(x_1 | x_2)} d\mu_2(x_2)$$

$$f(x_1) = 1 / \left(\int \frac{f(x_2 | x_1)}{f(x_1 | x_2)} d\mu_2(x_2) \right)$$

ve

$$f(x_1, x_2) = f(x_2 | x_1) / \left(\int \frac{f(x_2 | x_1)}{f(x_1 | x_2)} d\mu_2(x_2) \right)$$

elde edilir. $n-1$ için teoremin doğru olduğunu varsayalım. $i \neq j$ için,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= f(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

ve

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \frac{f(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}{f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

her iki tarafın μ_j ye göre integrali alındığında,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \int \frac{f(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}{f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} d\mu_j(x_j)$$

elde edilir. Böylece,

$$f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}$$

tüm koşullu yoğunluklar elde edilebilir.

$n-1$ için bu teorem kullanıldığında marjinal yoğunluklar, $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ve böylece $f(x_1, \dots, x_n)$ elde edilebilir. μ_i ölçümleri, sürekli durumlar için Lebesgue ölçümleri veya kesikli durumlar için sayma ölçümleri olabilir. $f(x_1, \dots, x_n)$ neredeyse her yerde pozitif olduğu varsayılırsa teorem hala geçerlidir ve $f(x_1, \dots, x_n)$ bulmak için kullanılabilecek bir yöntemdir (Gourieroux ve Monfort, 1979).

3.3. TEMEL TEOREMLER

Koşullu yoğunlukların bir ailesi,

$$f(x; \theta) = \phi \left(\sum_{i=1}^k T_i(x) \theta_i \right) \quad x \in S(X)$$

şeklinde ifade edilsin. Burada ϕ fonksiyonu tersi alınabilir. Böyle bir ailedeki koşullu dağılımlar ile ilgileniliyorsa problemin bir çözümü olabilir. Çözümün elde edilmesinde önemli bir araç Aczél (1996) ile sunulan aşağıdaki teoremdir.

Teorem 3.3.

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(y) = 0 \quad (3.4)$$

$x \in S(X)$ ve $y \in S(Y)$ denkleminin tüm çözümleri;

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_r(x) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \dots \\ g_n(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1r+1} & b_{1r+2} & \dots & b_{1n} \\ b_{2r+1} & b_{2r+2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nr+1} & b_{nr+2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r+1}(y) \\ \psi_{r+2}(y) \\ \dots \\ \psi_n(y) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $r = 0, 1, \dots, n$ için $\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ ve $\psi_{r+1}(x), \dots, \psi_n(x)$ fonksiyonları birbiri ile doğrusal olarak bağımsız fonksiyonlardır. a_{ij} ve b_{ij} sabitlerinin oluşturduğu matrisler,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1r+1} & b_{1r+2} & \dots & b_{1n} \\ b_{2r+1} & b_{2r+2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nr+1} & b_{nr+2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

ortogoneldir.

$$\textbf{Teorem 3.4.} \quad \sum_{i=1}^r f_i(x) \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^s g_j(y) \psi_j(x) \quad x \in S(X), y \in S(Y) \quad (3.7)$$

denkleminin tüm çözümleri,

$$\mathbf{f}(x) = C\psi(x) \quad (3.8)$$

ve

$$\mathbf{g}(y) = D\phi(y) \quad (3.9)$$

şeklinde. Burada, $\{\varphi_i\}_{i=1}^r$ ve $\{\psi_j\}_{j=1}^s$ ortak olarak doğrusal bağımsız fonksiyonların bir sistemi şeklinde verilir.

Teorem 3.5. $g(x, y) = \gamma \left(\sum_{i=1}^r f_i(x) \varphi_i(y) \right)$

(3.10)

$$= \gamma \left(\sum_{j=1}^s g_j(y) \psi_j(x) \right) \quad x \in S(X), y \in S(Y)$$

γ tersi alınabilir bir fonksiyon ise,

$$g(x, y) = \gamma(\phi'(y) C\psi(x)) \quad (3.11)$$

eşitliği elde edilir, (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

Yukarıdaki teoremlerin kullanıldığı bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek: Her $y > 0$, verilen $Y=y$ için X , $\mu(y)$ yoğunluklu üstel ve her $x > 0$, verilen $X=x$ için Y , $\nu(x)$ yoğunluklu üstel dağılımlar oldukları varsayalım.

(X, Y) ikililerinin ortak yoğunlukları, koşullu yoğunluklar ve marjinallerinin çarpımları olarak yazılsın.

$$f_X(x) \nu(x) e^{-\nu(x)y} = f_Y(y) \mu(y) e^{-\mu(y)x}, \quad \forall x > 0, y > 0 \quad (3.12)$$

Teorem 3.5 uygulanarak eşitlik (3.12),

$$\exp\{h_1(x) \cdot 1 - \nu(x)y\} = \exp\{h_2(y) \cdot 1 - \mu(y)x\} \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Burada $h_1(x) = \ln[f_x(x)v(x)]$ ve $h_2(y) = \ln[f_y(y)\mu(y)]$ dir.

Eşitlik (3.13) eşitlik (3.10) formundadır. Bu yüzden Teorem 3.5 uygulanabilir. Bu iki eşitlik arasındaki uygun özleştirme aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= e^{-u}, & r, s &= 2, \\ f_1(x) &= h_1(x), & \varphi_1(y) &= 1, \\ f_2(x) &= v(x), & \varphi_2(y) &= -y, \\ g_1(y) &= h_2(y), & \psi_1(x) &= 1, \\ g_2(y) &= \mu(y), & \psi_2(x) &= -x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

c_{ij} sabitlerine getirilen uygun kısıtlamalar ile ortak yoğunluğun,

$$f_{x,y}(x,y) = \exp(c_{11} - c_{21}x - c_{12}y + c_{22}xy) I(x > 0) I(y > 0) \quad (3.15)$$

formunda olması beklenir (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

3.4. ÜSTEL DAĞILIŞ AİLESİ

Bu bölümde üstel dağılış ailesine ait koşullu dağılımlar ele alınmıştır.

Tanım:

$$f_1(x; \theta) = r_1(x) \beta_1(\theta) \exp \left\{ \sum_{i=1}^{l_1} \theta_i q_{1i}(x) \right\} \quad (3.16)$$

şeklindeki $\{f_1(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ yoğunluklarının l_1 parametrelili ailesine üstel dağılım ailesi adı verilir. Burada, Θ doğal parametre uzayı ve $q_{1i}(x)$ lerin doğrusal olarak bağımsız olduğu varsayılır.

$$f_2(y; \tau) = r_2(y) \beta_2(\tau) \exp \left\{ \sum_{j=1}^{l_2} \tau_j q_{2j}(y) \right\} \quad (3.17)$$

şeklindeki $\{f_2(y; \tau) : \tau \in \Upsilon\}$ yoğunluklarının başka bir l_2 parametrelili ailesi düşünölsün, burada Υ doğal parametre uzayı ve $q_{2j}(y)$ lerin doğrusal olarak bağımsız olduğu varsayılır.

Y değişkenine bağlı bir θ parametreleri için eşitlik (3.16) da verilen aileye ait $f(x|y)$ koşullu dağılımı ve X değişkenine bağlı τ parametreleri için eşitlik (3.17) de verilen aileye ait $g(y|x)$ koşullu dağılımı verildiği varsayılın, bu durumda iki değişkenli yoğunluk;

$$f(x, y) = r_1(x)r_2(y)\exp\{\mathbf{q}^{(1)}(x)M\mathbf{q}^{(2)}(y)\} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\mathbf{q}^{(1)}(x) = (q_{10}(x), q_{11}(x), \dots, q_{1l_1}(x)),$$

$$\mathbf{q}^{(2)}(y) = (q_{20}(y), q_{21}(y), \dots, q_{2l_2}(y))$$

$q_{10}(x) = q_{20}(y) \equiv 1$ ve M , $(l_1+1) \times (l_2+1)$ şeklinde sabit parametreler matrisidir. İki değişkenli ortak yoğunluk $\iint f(x, y) dx dy = 1$ şartını sağlamaktadır (Balakrishnan ve Lai, 2009).

Üstel dağılış ailesinden olan koşullu dağılımlar ile ilgili olan uygulamalar aşağıda verilmiştir. Bu dağılış ailesine uymayan koşullu dağılımlar ise Bölüm 3.5 te incelenmiştir.

3.4.1. Normal Koşullu Dağılımlar

İki değişkenli $f(x, y)$ dağılımının normalliğinin sağlanması için Bhattacharya (1943) aşağıdaki tanımları vermiştir.

1. Kümedeki değişkenlerden X in verilen her sabit y için koşullu dağılımı normal ve $f(x, y)$ aynı ortak merkezli ve eşlenebilir konturlara sahip ise iki değişkenli yoğunluk normaldir.

2. Kümedeki değişkenlerden X in verilen her sabit y için koşullu dağılımı normal ve sabit varyanslı, X in Y üzerindeki regresyonu doğrusal ve Y değişkeninin marjinal dağılımı normal ise, $f(x, y)$ iki değişkenli normaldir.

3. Kümedeki her iki değişkeninde koşullu dağılımları normal ve bir değişkenin koşullu dağılımı sabit varyanslı ise $f(x, y)$ iki değişkenli normaldir.

4. Kümedeki her iki değişkenin de koşullu dağılımları normal ve bir değişkenin marjinal dağılımı normal ise $f(x, y)$ iki değişkenli normaldir.

5. Kümedeki her iki değişkenin koşullu dağılımları normal ve regresyonları doğrusal ve birinin eğimi sıfıra eşit değil ise, $f(x, y)$ ya normal ya da (orijin ve ölçeğin uygun seçimi ile)

$$f(x, y) \propto \exp\left\{-\left(x^2 + a^2\right)\left(y^2 + b^2\right)\right\} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2}$$

şeklin de yazılabilir (Bhattacharyya, 1943).

İki değişkenli normal dağılımın tanımlanması ise aşağıda verilmiştir;

$f(x, y)$ dağılımı, tek değişkenli normal dağılımlar olan $f_x(y)$ ve $g_y(x)$ koşullarına sahip iki değişkenli yoğunluk olsun. Beklenen değer ve varyans parametreleri, $g_y(x)$ için $\mu_1(y)$ ve $\sigma_1^2(y)$, $f_x(y)$ için $\mu_2(x)$ ve $\sigma_2^2(x)$ alınsın.

Teorem 3.6. İki değişkenli $f(x, y)$ dağılımı ancak ve ancak,

1. $\sigma_1(y)$ veya $\sigma_2(x)$ sabittir.
2. $y \rightarrow +\infty$ iken $y^2 \sigma_1^2(y) \rightarrow +\infty$ veya $x \rightarrow +\infty$ iken $x^2 \sigma_2^2(x) \rightarrow +\infty$
3. $y \rightarrow \infty$ iken $\liminf \sigma_1(y) \neq 0$ veya $x \rightarrow \infty$ iken $\liminf \sigma_2(x) \neq 0$,

özelliklerinden herhangi biri elde edilirse normaldir. Bu koşulların herhangi biri altında $\mu_1(y)$ ve $\mu_2(x)$ doğrusaldır.

Kanıt: $f(x, y)$ iki değişkenli normal ise koşul 1 elde edilir, böylece koşul 2 de elde edilmiş olur. Dolayısıyla zıt durumun kanıtı yeterlidir.

$$f(x, y) = f_x(y) f(x) = g_y(x) g(y)$$

eşitliğinden

$$\frac{f(x)}{\sigma_2(x)} \exp\left\{-\frac{[y - \mu_2(x)]^2}{2\sigma_2^2(x)}\right\} = \frac{g(y)}{\sigma_1(y)} \exp\left\{-\frac{[x - \mu_1(y)]^2}{2\sigma_1^2(y)}\right\} \quad (3.19)$$

yazılır. Buradaki ilgili tüm fonksiyonlar reel sayılar üzerinde tanımlıdır ve $f(x), g(y), \sigma_1(y), \sigma_2(x)$ pozitifdir. Yukarıdaki eşitlik ln olarak alınıp,

$$u(x) = \ln[f(x)/\sigma_2(x)]$$

$$v(y) = \ln[g(y)/\sigma_1(y)]$$

yazıldığında

$$\begin{aligned} & \left[2u(x)\sigma_2^2(x) - \mu_2^2(x) \right] \sigma_1^2(y) + \sigma_2^2(x) \left[\mu_1^2(y) - 2v(y)\sigma_1^2(y) \right] \\ & - y^2\sigma_1^2(y) + x^2\sigma_2^2(x) + 2\mu_2(x)\sigma_1^2(y)y \\ & - 2x\sigma_2^2(x)\mu_1(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.20),

$$\sum_{k=1}^n r_k(x) s_k(y) = 0 \quad (3.21)$$

formundadır. Castillo ve Galambos, (1989) bu eşitliğin genel çözümü için Aczél (1966) e bakılabileceğini söylemiştir. Eşitlik (3.20) de X ve Y değişkenleri simetrik ve $n=6$ olduğu için, Teorem 3.4 kullanılarak X değişkeninin $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ ve Y değişkeninin $\psi_1(y), \psi_2(y)$ ve $\psi_3(y)$ olacak şekilde üç tane bağımsız fonksiyonları vardır. Bu fonksiyonlar $r_k(x)$ ve $s_k(y)$ yerine yazıldığında, eşitlik (3.21) sırasıyla $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ ile $\psi_1(y), \psi_2(y)$ ve $\psi_3(y)$ nin doğrusal bir bileşimi olur. Simetrik olması nedeniyle eşitlik (3.20) nin sadece $r_k(x)$ leri tanımlanması yeterli olup aynı işlemler $s_k(y)$ içinde yapılabilir.

$$\begin{aligned} r_1(x) &= 2u(x)\sigma_2^2(x) - \mu_2^2(x) & r_4(x) &= x^2\sigma_2^2(x) \\ r_2(x) &= \sigma_2^2(x) & r_5(x) &= 2\mu_2(x) \\ r_3(x) &= 1 & r_6(x) &= x\sigma_2^2(x) \\ s_1(y) &= \sigma_1^2(y) & s_4(y) &= 1 \\ s_2(y) &= \mu_1^2(y) - 2v(y)\sigma_1^2(y) & s_5(y) &= 2y\sigma_1^2(y) \\ s_3(y) &= -y^2\sigma_1^2(y) & s_6(y) &= -2\mu_1(y) \end{aligned}$$

Bu altı fonksiyondan üçü bağımsızdır.

$\sigma_2(x)$ (pozitif) ne olursa olsun, $r_2(x), r_4(x)$ ve $r_6(x)$ doğrusal olarak bağımsızdır. $r_2(x) = \varphi_1(x)$, $r_4(x) = \varphi_2(x)$ ve $r_6(x) = \varphi_3(x)$ olarak seçilebilir ve $r_1(x), r_3(x)$ ve $r_5(x)$ eşitlikleri $r_2(x), r_4(x)$ ve $r_6(x)$ nin doğrusal bir bileşimi olmalıdır, (Castillo ve Galambos, 1989). Eşitlik (3.5) kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} 2u(x)\sigma_2^2(x) - \mu_2^2(x) \\ \sigma_2^2(x) \\ 1 \\ x^2\sigma_2^2(x) \\ \mu_2(x) \\ x\sigma_2^2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \\ G & H & J \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2^2(x) \\ x\sigma_2^2(x) \\ x^2\sigma_2^2(x) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2(y) \\ \mu_1^2(y) - 2v(y)\sigma_1^2(y) \\ -y^2\sigma_1^2(y) \\ 1 \\ 2y\sigma_1^2(y) \\ -2\mu_1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & L & M \\ 0 & 0 & -1 \\ N & P & Q \\ 0 & 2 & 0 \\ R & S & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2(y) \\ y\sigma_1^2(y) \\ y^2\sigma_1^2(y) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ve eşitlik (3.6) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} A & 1 & D & 0 & G & 0 \\ B & 0 & E & 0 & H & 1 \\ C & 0 & F & 1 & J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & L & M \\ 0 & 0 & -1 \\ N & P & Q \\ 0 & 2 & 0 \\ R & S & T \end{bmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir. Burada A,B,C,D,E,F,G,H ve J sabitlerdir. Eşitlik (3.24) den,

$$A = -K, \quad L = -2G, \quad M = D, \quad B = -R, \quad 2H = -S, \quad E = T, \quad C = -N, \quad P = -2J, \quad Q = F \quad (3.25)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.22) ve (3.23) te eşitlik (3.25) kullanıldığında eşitlik (3.20) deki fonksiyonlar,

$$\mu_1(y) = -\frac{B/2 + Hy - Ey^2/2}{C + 2Jy - Fy^2}$$

$$\sigma_1^2(y) = \frac{-1}{C + 2Jy - Fy^2}$$

$$\mu_2(x) = \frac{G + Hx + jx^2}{D + Ex + Fx^2}$$

$$\sigma_2^2(x) = \frac{1}{D + Ex + Fx^2}$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[A + Bx + Cx^2 + \frac{(G + Hx + Jx^2)^2}{D + Ex + Fx^2} \right]$$

$$v(y) = \frac{1}{2} \left[A + 2Gy - Dy^2 - \frac{(B/2 + Hy - Ey^2/2)^2}{C + 2Jy + Fy^2} \right]$$

elde edilir ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[A + Bx + 2Gy + Cx^2 - Dy^2 + 2Hxy + 2Jx^2y - Exy^2 - Fx^2y^2 \right] \right\} \quad (3.26)$$

şekline dönüşür. Bu noktada, daha yüksek boyutları için de kullanılabilecek yeni bir parametrisasyon yapısını kullanmak daha uygundur, eşitlik (3.26) yerine;

$$f(x, y) = \exp \left\{ \left(1, x, x^2 \right) \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.27)$$

yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} m_{00} &= A/2, & m_{01} &= G, & m_{02} &= -D/2, \\ m_{10} &= B/2, & m_{11} &= H, & m_{12} &= -E/2, \\ m_{20} &= C/2, & m_{21} &= J, & m_{22} &= -F/2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklindedir. İki değişkenli normal dağılım marjinaleri ise,

$$f_x(x) = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} \left[2(m_{20}x^2 + m_{10}x + m_{00}) - \frac{(m_{21}x^2 + m_{11}x + m_{01})^2}{2(m_{22}x^2 + m_{12}x + m_{02})} \right] \right\}}{\sqrt{-2(m_{22}x^2 + m_{12}x + m_{02})}} \quad (3.29)$$

$$f_y(y) = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} \left[2(m_{02}y^2 + 2m_{01}y + m_{00}) - \frac{(m_{12}y^2 + m_{11}y + m_{10})^2}{2(m_{22}y^2 + m_{21}y + m_{20})} \right] \right\}}{\sqrt{-2(m_{22}y^2 + m_{21}y + m_{20})}} \quad (3.30)$$

şeklinde yazılır. Geriye sadece, $f(x, y)$ dağılımının negatif olmama durumunu sağlamak için eşitlik (3.27) de m_{ij} , $(i, j = 0, 1, 2)$ sabitleri üzerine uygun koşulları ve marjinal ile marjinallerinin integrallenebilirliğini belirlemek kalır. Tüm durumlarda m_{00} sabiti eşitlik (3.26), (3.27), (3.29) ve (3.30) un integrali bir olacak şekilde seçilen

parametrelerin bir fonksiyonudur. $f(x, y)$ fonksiyonunun her sabit x için Y ye göre ve her sabit y için X e göre integrallenebilmesi için (marjinallerin negatif olmama durumunu garantilemek için) eşitlik (3.27) deki katsayılar;

$$m_{22} = m_{12} = m_{21} = 0, \quad m_{20} < 0, \quad m_{02} < 0 \quad (3.31)$$

$$m_{22} < 0, \quad 4m_{22}m_{02} > m_{12}^2, \quad 4m_{20}m_{22} > m_{21}^2 \quad (3.32)$$

koşullarının iki kümesinden birini karşılamalı. Eğer eşitlik (3.31) elde edildi ise, bu duruma ek olarak eşitlik (3.26), (3.27), (3.29) ve (3.30) un integrallenebilirliğini garantilemek için ,

$$m_{11}^2 < 4m_{02}m_{20}$$

eşitliği varsayılmalıdır. Eğer eşitlik (3.32) elde edildi ise, $(m_{22}x^2 + m_{12}x + m_{02})$ değeri sıfırdan uzakta sınırlandırılır ve bu değer eşitlik (3.29) da ki kare parantez için deki $|x|$ in büyük değeri için $x^2(4m_{20}m_{22} + m_{21}^2)/2m_{22}$ gibi davranır ve sonuç olarak eşitliki (3.29) integrallenebilir, (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

3.4.2. Gama Koşullu dağılımlar

Ölçek ve şekil parametrelili gama dağılım ailesi;

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = x^{-1} e^{\theta_1 \log x - \theta_2 x} \theta_2^{\theta_1} [\Gamma(\theta_1)]^{-1}, \quad x > 0 \quad (3.33)$$

formunda iki parametrelili üstel dağılım ailesini aittir.

X değişkeni bu formda bir dağılıma sahipse $X \sim \Gamma(\theta_1, \theta_2)$ şeklinde gösterilir (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999). Verilen x için Y 'nin ve verilen y için X 'in koşullu dağılımları sırası ile,

$$f(Y | X) = \Gamma(\theta_2)^{-1} y^{-1} \theta_1^{\theta_2} y^{\theta_2} e^{-\theta_1 y} \quad (3.34)$$

$$f(X | Y) = \Gamma(\theta_1)^{-1} x^{-1} \theta_2^{\theta_1} x^{\theta_1} e^{-\theta_2 x} \quad (3.35)$$

şeklinde verilsin. $f_x(x) f(Y | X) = f_y(y) f(X | Y)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\frac{f_x(x)}{\Gamma(\theta_2)} y^{-1} \theta_1^{\theta_2} y^{\theta_2} e^{-\theta_1 y} = \frac{f_y(y)}{\Gamma(\theta_1)} x^{-1} \theta_2^{\theta_1} x^{\theta_1} e^{-\theta_2 x} \quad (3.36)$$

eşitliği yazılır. Burada, $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ marjinal dağılımlardır. Eşitlik (3.36) 'nın her iki tarafı $\ln$ olarak alındığında,

$$\ln \left\{ \frac{f_x(x)}{\Gamma(\theta_2)} x \theta_1^{\theta_2} \right\} + \theta_2 \ln y - \theta_1 y = \ln \left\{ \frac{f_y(y)}{\Gamma(\theta_1)} y \theta_2^{\theta_1} \right\} + \theta_1 \ln x - \theta_2 x \quad (3.37)$$

ya da

$$\exp \{h_1(x) + \theta_2 \ln y - \theta_1 y\} = \exp \{h_2(y) + \theta_1 \ln x - \theta_2 x\}$$

yazılabilir. Burada, $h_1(x) = \ln \left\{ \frac{f_x(x)}{\Gamma(\theta_2)} x \theta_1^{\theta_2} \right\}$ ve $h_2(y) = \ln \left\{ \frac{f_y(y)}{\Gamma(\theta_1)} y \theta_2^{\theta_1} \right\}$

şeklinde dir. Eşitlik (3.8) ve (3.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= h_1(x) & \psi_1(y) &= 1 & f_1(y) &= h_2(x) & \varphi_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= \theta_2 & \psi_2(y) &= \ln y & f_2(y) &= \theta_2 & \varphi_2(x) &= -x \\ f_3(x) &= \theta_1 & \psi_3(y) &= -y & f_3(y) &= \theta_1 & \varphi_3(x) &= \ln x \end{aligned} \quad (3.38)$$

İfadeleri elde edilir. Teorem 3.5 kullanılarak iki değişkenli gama dağılımı;

$$f(x, y) = (xy)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -x & \ln x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -y \\ \ln y \end{bmatrix} \right\} \quad x > 0, y > 0 \quad (3.39)$$

ile verilir. Eşitlik (3.39) çözümlenirse iki değişkenli yoğunluk,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (xy)^{-1} \exp \left\{ \begin{aligned} &m_{00} - m_{01}y + m_{02} \ln y - m_{10}x + m_{11}xy - m_{12}x \ln y \\ &+ m_{20} \ln x - m_{21}y \ln x + m_{22} \ln y \ln x \end{aligned} \right\} \\ &= (xy)^{-1} \exp \left\{ \begin{aligned} &(m_{00} - m_{10}x - m_{20} \ln x) - (m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x)y \\ &+ (m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x) \ln y \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.40) da Y değişkenine göre integral alındığında,

$$f_x(x) = \int_0^\infty (xy)^{-1} e^A e^{-By} e^{C \log y} dy$$

elde edilir. Burada, A , B ve C ifadeleri

$$\begin{aligned} A &= m_{00} - m_{10}x - m_{20} \ln x \\ B &= m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x \\ C &= m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x \end{aligned} \quad (3.41)$$

yerine yazılmıştır.

$$f_x(x) = x^{-1} e^A \int_0^\infty y^{-1} e^{-By} y^C dy ,$$

$$= x^{-1} e^A \int_0^\infty y^{C-1} e^{-By} dy$$

$By = z$ dönüşümü yapıldığında, $y = z/B$ ve $dy = \frac{1}{B} dz$ eşitlikleri yerine yazıldığında,

X değişkeninin marjinal dağılımı,

$$\begin{aligned} f_x(x) &= x^{-1} e^A \int_0^\infty z^{C-1} \frac{1}{B^{C-1}} e^{-z} \frac{1}{B} dz \\ &= x^{-1} e^A \frac{1}{B^C} \Gamma(C) \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.42) de eşitlik (3.41) deki A , B ve C ifadelerini yerine yazıldığında marjinal dağılım aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$f_x(x) = x^{-1} \frac{\Gamma(m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x) e^{m_{00} - m_{10}x - m_{20} \ln x}}{(m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x)^{m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x}} \quad (3.43)$$

Eşitlik (3.40) ve (3.43) kullanılarak Y değişkeninin koşullu dağılımı,

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{(xy)^{-1} \exp \left\{ (m_{00} - m_{10}x - m_{20} \ln x) - (m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x)y \right\} \\ &\quad + (m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x) \ln y}{x^{-1} \frac{\Gamma(m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x) e^{m_{00} - m_{10}x - m_{20} \ln x}}{(m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x)^{m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x}}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir. Eşitlik (3.41) deki ifadeler bu eşitlikte kullanıldığında,

$$\begin{aligned} f(Y|X) &= \frac{(xy)^{-1} \exp \{A - By + C \ln y\}}{x^{-1} \Gamma(C) e^A \frac{1}{B^C}} \\ &= \frac{y^{-1} e^{-By} y^C}{\Gamma(C) B^{-C}} \\ &= y^{C-1} e^{-By} B^C \Gamma(C)^{-1} \end{aligned} \quad (3.45)$$

yazılabilir ve bu eşitlik

$$f(Y|X) \propto \Gamma(C, B)$$

$$f(Y|X) \propto \Gamma(m_{02} - m_{12}x + m_{22} \ln x, m_{01} - m_{11}x + m_{21} \ln x)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (3.40),

$$f(x, y) = (xy)^{-1} \exp \left\{ (m_{00} - m_{01}y + m_{02} \ln y) - (m_{10} + m_{11}y - m_{12} \ln y)x \right\} \\ + (m_{20} - m_{21}y + m_{22} \ln y) \ln x$$

olarak yazılıp X değişkenine göre integral alındığında Y değişkeninin marjinali ve X değişkeninin koşullu dağılımı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_y(y) = y^{-1} \frac{\Gamma(m_{20} - m_{21}y + m_{22} \ln y) e^{m_{00} - m_{01}y - m_{02} \ln y}}{(m_{10} - m_{11}y + m_{12} \ln y)^{m_{20} - m_{21}x + m_{22} \ln y}}$$

$$f(X|Y) \propto \Gamma(m_{20} - m_{22} \ln y - m_{21}y, m_{10} - m_{11}y + m_{12} \ln y)$$

Eşitlik (3.39) daki iki değişkenli ortak yoğunluk için gerekli olan koşullar şu şekilde özetlenebilir;

MODEL I (X ve Y bağımsız)

$$\begin{aligned} m_{11} &= 0, m_{12} = 0, m_{21} = 0, m_{22} = 0 \\ m_{10} &> 0, m_{20} > 0, m_{01} > 0, m_{02} > 0 \end{aligned}$$

MODEL II

$$\begin{aligned} m_{11} &< 0, m_{12} = 0, m_{21} = 0, m_{22} = 0 \\ m_{10} &> 0, m_{20} > 0, m_{01} = 0, m_{02} > 0 \end{aligned}$$

MODEL IIIA

$$\begin{aligned} m_{11} &< 0, m_{12} = 0, m_{21} < 0, m_{22} = 0 \\ m_{10} &> 0, m_{20} > 0, m_{02} > 0, m_{01} > m_{21} \left(1 - \log \frac{m_{21}}{m_{11}} \right) \end{aligned}$$

MODEL IIIB

$$\begin{aligned} m_{11} &< 0, m_{12} < 0, m_{21} = 0, m_{22} = 0 \\ m_{20} &> 0, m_{01} > 0, m_{02} > 0, m_{10} > m_{12} \left(1 - \log \frac{m_{12}}{m_{11}} \right) \end{aligned}$$

(Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

3.4.3. Beta Koşullu Dağılımlar

Beta dağılımına sahip X şans değişkeninin α ve β parametrelili yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

şeklindedir. Verilen x için Y nin ve verilen y için X in koşullu dağılımları sırası ile

$$\begin{aligned} f(Y|X) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{-1} (1-y)^{-1} y^\alpha (1-y)^\beta \\ f(X|Y) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{-1} (1-x)^{-1} x^\alpha (1-x)^\beta \end{aligned} \quad (3.46)$$

olarak verilsin. $f_x(x) f(Y|X) = f_y(y) f(X|Y)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\frac{f_x(x)}{B(\alpha, \beta)} y^{-1} (1-y)^{-1} y^\alpha (1-y)^\beta = \frac{f_y(y)}{B(\alpha, \beta)} x^{-1} (1-x)^{-1} x^\alpha (1-x)^\beta \quad (3.47)$$

yazılabilir. Burada, $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ marjinal dağılımlardır. Eşitlik (3.47) 'nin her iki tarafı $\ln$ olarak alındığında,

$$\begin{aligned} \ln f(x, y) &= \ln \left\{ \frac{f_x(x)}{B(\alpha, \beta)} x(1-x) \right\} + \alpha \ln y + \beta \ln(1-y) \\ &= \ln \left\{ \frac{f_y(y)}{B(\alpha, \beta)} y(1-y) \right\} + \alpha \ln x + \beta \ln(1-x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

ya da

$$\exp \{h_1(x) + \alpha \ln y + \beta \ln(1-y)\} = \exp \{h_2(y) + \alpha \ln x + \beta \ln(1-x)\}$$

yazılır. Burada $h_1(x) = \frac{f_x(x)}{B(\alpha, \beta)} x(1-x)$ ve $h_2(y) = \frac{f_y(y)}{B(\alpha, \beta)} y(1-y)$ şeklindedir.

Eşitlik (3.8) ve (3.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= h_1(x) & \psi_1(y) &= 1 & f_1(y) &= h_2(y) & \varphi_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= \alpha & \psi_2(y) &= \ln y & f_2(y) &= \alpha & \varphi_2(x) &= \ln x \\ f_3(x) &= \beta & \psi_3(y) &= \ln(1-y) & f_3(y) &= \beta & \varphi_3(x) &= \ln(1-x) \end{aligned} \quad (3.49)$$

ifadeleri elde edilir. Teorem 3.5 kullanılarak iki değişkenli beta dağılımı;

$$f(x, y) = [x(1-x)y(1-y)]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \ln x & \ln(1-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \ln y \\ \ln(1-y) \end{bmatrix} \right\}$$

yukarıdaki matris çözümlediğinde iki değişkenli beta olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x, y) = [x(1-x)y(1-y)]^{-1} \exp \left\{ \begin{aligned} &m_{11} \ln x \ln y + m_{12} \ln x \ln(1-y) \\ &+ m_{21} \ln(1-x) \ln y + m_{22} \ln(1-x) \ln(1-y) \\ &+ m_{10} \ln x + m_{20} \ln(1-x) + m_{01} \ln y \\ &+ m_{02} \ln(1-y) + m_{00} \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

$$I(0 < x, y < 1)$$

şeklinde elde edilir. Beta koşullarının beta üstel ailesinin doğal parametre alanında parametrelere sahip olabilmesi için;

$$\begin{aligned} m_{10} + m_{11} \ln y + m_{12} \ln(1-y) &> 0, & \forall y \in (0,1), \\ m_{20} + m_{21} \ln y + m_{22} \ln(1-y) &> 0, & \forall y \in (0,1), \\ m_{01} + m_{11} \ln x + m_{21} \ln(1-x) &> 0, & \forall x \in (0,1), \\ m_{02} + m_{12} \ln x + m_{22} \ln(1-x) &> 0, & \forall x \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.51)$$

koşulları sağlanmalıdır. $i, j \geq 1$ için m_{ij} pozitif ise eşitlik (3.51) sağlanmaz. Marjinal dağılımların integrallenebilirliği için $m_{10} > 0, m_{20} > 0, m_{01} > 0, m_{02} > 0$ eşitsizlikleri sağlanmalıdır (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

3.5. KOŞULLU OLARAK BELİRLENMİŞ DİĞER AİLELER

Kısım 3.4’de koşullu olarak belirlenen dağılımlar üstel dağılış ailesine aitti. Bu bölümde üstel aile modeline uymayan ve koşullu olarak belirlenmiş modeller incelenmiştir. Çözüm yöntemleri için eşitlik (3.18) mevcut değildir. Bu nedenle Teorem 3.3 ile Teorem 3.4 esas alınmıştır. Bu da birçok koşullu modelleri tanımlayan fonksiyonel denklemin çözümüne izin vermektedir. Aşağıda örnek olarak Pearson Tip VI ve Weibull dağılımları verilmiştir.

3.5.1. Pearson Tip VI Koşulluları

II. Tip beta olarak adlandırılan Pearson Tip VI ile ilgili yoğunluklar;

$$f(x; p, q) = \frac{\sigma^q}{B(p, q)} x^{p-1} (\sigma + x)^{-(p+q)} \quad (3.52)$$

$x, p, q, \sigma > 0$ şeklindedir ve bu aile $B_2(p, q, \sigma)$ ile belirtilir.

$X | Y = y \square B_2(p, q, \sigma_1(y))$ ve $Y | X = x \square B_2(p, q, \sigma_2(x))$ olacak şekilde tanımlanan koşullu yoğunluklar sırası ile;

$$f(x|y) = \frac{\sigma_1(y)^q}{B(p, q)} x^{p-1} (\sigma_1(y) + x)^{-(p+q)} \quad x > 0 \quad (3.53)$$

$$f(y|x) = \frac{\sigma_2(x)^q}{B(p, q)} y^{p-1} (\sigma_2(x) + y)^{-(p+q)} \quad y > 0 \quad (3.54)$$

şeklinde yazılabilir. $f_x(x) f(y|x) = f_y(y) f(x|y)$ bağıntısından aşağıdaki ifade elde edilir,

$$f_x(x) \frac{\sigma_2(x)^q}{B(p, q)} y^{p-1} (\sigma_2(x) + y)^{-(p+q)} = f_y(y) \frac{\sigma_1(y)^q}{B(p, q)} x^{p-1} (\sigma_1(y) + x)^{-(p+q)}. \quad (3.55)$$

$$\left\{ \frac{g_1(x)}{(\sigma_2(x) + y)^{(p+q)}} \right\} = \left\{ \frac{g_2(y)}{(\sigma_1(y) + x)^{(p+q)}} \right\} \quad (3.56)$$

Burada,

$$g_1(x) = f_x(x) \frac{\sigma_2(x)^q}{B(p, q)} x^{1-p} \quad \text{ve} \quad g_2(y) = f_y(y) \frac{\sigma_1(y)^q}{B(p, q)} y^{1-p} \quad (3.57)$$

yerine yazılmıştır. Eşitlik (3.56) da her iki tarafında $-1/p+q$ kuvveti alınsın,

$$\left\{ \frac{g_1(x)}{(\sigma_2(x) + y)^{(p+q)}} \right\}^{-1/p+q} = \left\{ \frac{g_2(y)}{(\sigma_1(y) + x)^{(p+q)}} \right\}^{-1/p+q} \quad (3.58)$$

$$\frac{\sigma_2(x)}{g_1(x)^{1/p+q}} + \frac{y}{g_1(x)^{1/p+q}} = \frac{\sigma_1(y)}{g_2(y)^{1/p+q}} + \frac{x}{g_2(y)^{1/p+q}} \quad (3.59)$$

Eşitlik (3.59) da Teorem 3.3 ve 3.4 uygulanarak,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{\sigma_2(x)}{g_1(x)^{1/p+q}} & \psi_1(y) &= 1 & f_1(y) &= \frac{\sigma_1(y)}{g_2(y)^{1/p+q}} & \varphi_1(x) &= 1 \\
f_2(x) &= \frac{1}{g_1(x)^{1/p+q}} & \psi_2(y) &= y & f_2(y) &= \frac{1}{g_2(y)^{1/p+q}} & \varphi_2(x) &= x
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_2(x)/g_1(x)^{1/p+q} \\ 1/g_1(x)^{1/p+q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{10} \\ m_{01} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

eşitlik (3.61) çözümlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_2(x)}{g_1(x)^{1/p+q}} &= m_{00} + m_{10}x, & \sigma_2(x) &= \frac{m_{00} + m_{10}x}{m_{01} + m_{11}x}, \\
\frac{1}{g_1(x)^{1/p+q}} &= m_{01} + m_{11}x, & g_1(x) &= \left\{ \frac{1}{m_{01} + m_{11}x} \right\}^{p+q}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

elde edilir. Bu ifadeler eşitlik (3.57) de yerine yazıldığında X değişkeninin marjinal dağılımı,

$$f_X(x) \propto \frac{x^{p-1}}{(m_{00} + m_{10}x)^q (m_{01} + m_{11}x)^p} \tag{3.63}$$

ve aynı işlemler Y değişkeni için uygulandığında,

$$f_Y(y) \propto \frac{y^{p-1}}{(m_{10} + m_{11})^p (m_{00} + m_{01}y)^q} \tag{3.64}$$

Y değişkeninin marjinali elde edilir. Eşitlik (3.60) da ki ifadeler ile Teorem 3.5. kullanılarak iki değişkenli yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir

$$f(x, y) \propto \frac{x^{p-1} y^{p-1}}{(m_{00} + m_{10}x + m_{01}y + m_{11}xy)^{p+q}}. \tag{3.65}$$

Burada $m_{00}, m_{11} \geq 0$ ve $m_{10}, m_{01} \geq 0$. $m_{00} = 0$ ise $q < p$ ve $m_{11} \neq 0$ şeklide, eğer $m_{11} = 0$ ise $1 < p < q$ ve $m_{00} \neq 0$ şeklindedir. Eğer $m_{10}m_{01} = m_{00}m_{11}$ şeklinde olduğunda $X \square \text{beta2}(p, q, m_{00}/m_{10})$ ve $Y \square \text{beta2}(p, q; m_{00}/m_{01})$ dağılımlarının bağımsızlık durumunu ifade eder (Arnold, Castillo ve Sarabia, 1999).

3.5.2. Weibull Koşullu Dağılımı

Şans değişkeni X 'in üç parametrelili Weibull dağılımı

$$f(x) = ac \{a(x-L)\}^{c-1} \exp\{-[a(x-L)]^c\} \quad (3.66)$$

şeklindedir. Verilen y için X şans değişkeninin ve verilen x için Y şans değişkeninin koşullu dağılımları sırası ile;

$$f(x|y) = d(y)e(y)[d(y)(x-L)]^{e(y)-1} \exp\{-[d(y)(x-L)]^{e(y)}\} \quad x > L \quad (3.67)$$

$$f(y|x) = a(x)c(x)[a(x)(y-K)]^{c(x)-1} \exp\{-[a(x)(y-K)]^{c(x)}\} \quad y > K$$

olduğu varsayılın. Burada, K ve L yer parametreleri, $a(x)$, $c(x)$, $d(y)$ ve $e(y)$ varsayılan weibull dağılımının sırası ile ölçek ve şekil parametreleridir.

$f(x, y) = f(y|x)f_x(x) = f(x|y)f_y(y)$ bağıntısından eşitlik (3.67) kullanılarak;

$$\begin{aligned} f(x, y) &= m(x) \exp\{-[a(x)(y-K)]^{c(x)}\} [a(x)(y-K)]^{c(x)-1} \\ &= n(y) \exp\{-[d(y)(x-L)]^{e(y)}\} [d(y)(x-L)]^{e(y)-1} \quad x > L, y > K \end{aligned} \quad (3.68)$$

yazılabilir. Burada, $m(x) = a(x)c(x)f_1(x)$, $n(y) = d(y)e(y)f_2(y)$ yerine yazılmıştır. $x > L$ ve $y > K$ olabilmesi için;

$$a(x), c(x), m(x), d(y), e(y), n(y) \quad (3.69)$$

fonksiyonlarının her biri sıfırdan büyük olmalıdır. Eşitlik (3.68) de y değişkeninin belirli bir değeri için denklemin sol kısmında $a(x)$, $c(x)$ ve $m(x)$ fonksiyonları, sağ kısmında ise sadece x değişkenine bağlı bir fonksiyon kalır. Böylece, $y = K + 1$ için eşitlik (3.68) in sol tarafı $H_0(x)$ gösterimi ile aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$H_0(x) = m(x) \exp\{-a(x)^{c(x)}\} a(x)^{c(x)-1} \quad (3.70)$$

Eşitlik (3.67) ln olarak alınır ve y değişkenine göre iki kere türev alınırsın, $y = K + 1$ seçilip birinci türev $H_1(x)$ ve ikinci türev $H_2(x)$ olarak ifade edilirse;

$$\begin{aligned}\ln f(x, y) &= \ln m(x) + [c(x) - 1] \ln [a(x)(y - K)] - \{a(x)(y - K)\}^{c(x)} \\ &= \ln n(y) + [e(y) - 1] \ln [d(y)(x - L)] - \{d(y)(x - L)\}^{e(y)}\end{aligned}$$

$\ln f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre birinci türevi;

$$\begin{aligned}&= \frac{c(x) - 1}{(y - K)} - c(x) a(x)^{c(x)} (y - K)^{c(x) - 1} \\ &= \frac{n'(y)}{n(y)} + e'(y) \ln [d(y)(x - L)] + [e(y) - 1] \frac{d'(y)}{d(y)} \\ &\quad - [d(y)(x - L)]^{e(y)} \left\{ e'(y) \ln [d(y)(x - L)] + \frac{d'(y)}{d(y)} e(y) \right\}\end{aligned}$$

$y = K + 1$ yazılıp eşitliğin sağ tarafı $H_1(x)$ ile ifade edilirse,

$$c(x) - 1 - c(x) a(x)^{c(x)} = H_1(x) \quad (3.71)$$

tekrar y değişkenine göre ikinci türev alındığında bunun için yapılan ara işlemler EK 2 de verilmiştir,

$$[1 - c(x)] [1 + c(x) a(x)^{c(x)}] = H_2(x) \quad (3.72)$$

eşitliği elde edilir. Burada, $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ fonksiyonlarının parametreleri $y = K + 1$ için tek olarak tanımlanır. Eşitlik (3.70), (3.71) ve (3.72) nin çözümü için,

$$r(x) = c(x) a(x)^{c(x)} \quad (3.73)$$

eşitliği tanımlansın. Böylece, eşitlik (3.71) ve (3.72)

$$H_1(x) = c(x) - 1 - r(x), \quad H_2(x) = [1 - c(x)] [1 + r(x)]$$

şeklini alır.

$$H_1(x) + H_2(x) = -c(x) r(x) \quad (3.74)$$

$$H_1(x) = \frac{-(H_1(x) + H_2(x))}{r(x)} - 1 - r(x)$$

$$r^2(x) + r(x)(H_1(x) + 1) + (H_1(x) + H_2(x)) = 0$$

$$r(x) = \left\{ -\left(H_1(x)+1\right) + \left[\left(H_1(x)+1\right)^2 - 4\left(H_1(x)+H_2(x)\right) \right]^{1/2} \right\} / 2 \quad (3.75)$$

eşitlik (3.74) de $r(x)$ çekilirse,

$$H_1(x) = c(x) - 1 + \frac{(H_1(x) + H_2(x))}{c(x)}$$

$$c^2(x) - c(x)(H_1(x)+1) + (H_1(x)+H_2(x)) = 0$$

$$c(x) = \left\{ \left(H_1(x)+1\right) + \left[\left(H_1(x)+1\right)^2 - 4\left(H_1(x)+H_2(x)\right) \right]^{1/2} \right\} / 2$$

(3.76)

eşitlikleri elde edilir.

$$0 \leq \left[\left(H_1(x)+1\right)^2 - 4\left(H_1(x)+H_2(x)\right) \right]^{1/2} < H_1(x)+1 < -\left[\left(H_1(x)+1\right)^2 - 4\left(H_1(x)+H_2(x)\right) \right]^{1/2} \leq 0$$

çözümü için eşitlik (3.69) daki pozitiflik şartı karşılanır. Burada $c(x) \equiv 0$ eşdeğerdir ve pozitiflik şartı ile çelişir. Tek çözüm olan eşitlik (3.75) ve (3.76) ile (3.73) den

$$a(x) = [r(x)/c(x)]^{1/c(x)} \quad (3.77)$$

ve eşitlik (3.70) den

$$m(x) = H_0(x) [r(x)/c(x)]^{[1-c(x)]/c(x)} \exp[r(x)/c(x)] \quad (3.78)$$

eşitliklerinin çözümleri elde edilir. Simetriklik ile sırasıyla $a(x), c(x)$ ve $m(x)$ ile aynı yapıya sahip $d(y), e(y)$ ve $n(y)$ fonksiyonları da benzer şekilde hesaplanır. Elde edilen sonuç; eşitlik (3.68) deki tüm fonksiyonlar, tek bir nokta olan (x,y) de iki kere türevlendirilirse, eşitlik (3.69) altında, weibull koşullu-weibull olasılık modeli eşitlik (3.75), (3.76), (3.77) ve (3.78) tek bir çözüme sahip olur. Pratik bir çözüm için, şekil parametreleri sabit olarak seçilsin;

$$e(y) = A, \quad c(x) = B \quad (3.79)$$

Eşitlik (3.68) i doğrudan çözer ve çözüm olarak açık bir formül elde edilir. eşitlik (3.68) ln olarak alınıp eşitlik (3.79) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\ln f(x, y) &= \ln m(x) - a(x)^B (y-K)^B + (B-1)\ln a(x) + (B-1)\ln(y-K) \\ &= \ln n(x) - d(y)^A (x-L)^A + (A-1)\ln d(y) + (A-1)\ln(X-L)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik, $\sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y) = 0$ formundadır. Çözümü (Aczel 1996) ile,

$$\begin{aligned}a(x) &= \left[E + F(x+C)^A \right]^{1/B}, d(y) = \left[G + F(y+D)^B \right]^{1/A}, \\ m(x) &= (x-L)^{A-1} \left[E + F(x-L)^A \right]^{(1-B)/B} \exp \left[-H - G(x-L)^A \right], \\ n(y) &= (y-K)^{B-1} \left[G + F(y-K)^B \right]^{(1-A)/A} \exp \left[-H - E(y-K)^B \right] \\ g(x) &= (x-L)^{A-1} \left\{ \exp \left[-H - G(x-L)^A \right] \right\} / B \left[E + F(x-L)^A \right] \quad (3.80)\end{aligned}$$

$$h(y) = (y-K)^{B-1} \left\{ \exp \left[-H - E(y-K)^B \right] \right\} / A \left[G + F(y-K)^B \right] \quad (3.81)$$

$$f(x, y) = (x-L)^{A-1} (y-K)^{B-1} \exp \left\{ - \left[H + G(x-L)^A + E(y-K)^B + F(x-L)^A (y-K)^B \right] \right\} \quad (3.82)$$

elde edilir. Burada, E,F,G ve H sabittir. Eşitlik (3.69) koşulu $A > 0, B > 0, E > 0, F \geq 0$ ve $G > 0$ haline gelir.

*Eşitlik (3.82) de X ve Y değişkenleri bağımsızdır $\Leftrightarrow F = 0$

*(X,Y) değişkenlerinden biri Weibull dağılımına sahip ise diğer değişkende weibull dağılımına sahiptir.

*Weibull marjinalleri bağımsızlığı belirtir, çünkü eşitlik (3.80) in weibull yoğunluğu olabilmesi için $F = 0$ ve $\exp(-H) = AGBE$ eşitliği sağlanmalı ki bu aynı zaman da eşitlik (3.81) deki dağılımında weibull olduğunu gösterir (Castillo ve Galambos, 1990).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

PEARSON TİP IV DAĞILIMININ KOŞULLU YAKLAŞIMLAR İLE ELDE EDİLMESİ

Pearson Tip IV dağılımı eşitlik (3.16) de verilen üstel dağılış ailesine ait iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde ifade edilememektedir. Bu sebeple üstel dağılış ailesine ait değildir.

4.1. TEK DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ

Pearson Tip IV dağılımı,

$$f(u) = K \left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2 + 1 \right]^m \exp \left\{ -v \tan^{-1} \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilsin. Burada $(u - \mu)/\sigma = x$ dönüşümü uygulandığında,

$$f(x) = K [x^2 + 1]^m \exp \left\{ -v \tan^{-1}(x) \right\} \sigma \quad (4.2)$$

fonksiyonu elde edilir. Burada,

$$K = \frac{\sigma^{-1}}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2} \theta e^{-v\theta} d\theta}$$

şeklinde olan normalizasyon katsayısıdır. Pearson Tip IV dağılımının eşitlik (3.16) da verilen

$$f_1(x; \theta) = r_1(x) \beta_1(\theta) \exp \left\{ \sum_{i=1}^h \theta_i q_{1i}(x) \right\}$$

üstel dağılış ailesi formunda yazılamadığını göstermek için eşitlik (4.1) ln olarak alınsın,

$$\begin{aligned} \ln f(u) &= \ln K + m \ln \left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2 + 1 \right] - v \tan^{-1} \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \\ \exp f(u) &= \exp \left\{ \ln K + m \ln \left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2 + 1 \right] - v \tan^{-1} \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right\} \\ &= K \ln \left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2 + 1 \right]^m \exp \left\{ -v \tan^{-1} \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilen eşitlik üstel dağılış ailesine uygun olarak yazılabilmesi için biçim parametresi olan m 'in 1 olarak alınması gerekir. Aynı durum bölüm (3.5.2) de anlatılan Weibull koşullarında da görülmektedir. Weibull dağılımını üstel formda yazmak için biçim parametresi olan c nin 1 olarak alınması gerekir. Bu nedenle Tip IV dağılımı, Tip VI dağılımına benzer olarak çözülmüş ve Aczel'in temel teoreminden faydalanılarak çözülmüştür.

4.2. KOŞULLU VE İKİ DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMI

Eşitlik (4.2) den verilen y için X değişkeninin, verilen x için Y değişkeninin koşullu dağılımları sırası ile;

$$f(x|y) = K_1 [x^2 + 1]^{m_1(y)} \exp\{-v_1(y) \tan^{-1}(x)\} \sigma_1(y) \quad (4.3)$$

$$f(y|x) = K_2 [y^2 + 1]^{m_2(x)} \exp\{-v_2(x) \tan^{-1}(y)\} \sigma_2(x) \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir.

$f(x, y) = f_x(x) f(y|x) = f_y(y) f(x|y)$ bağıntısında yararlanarak, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_x(x) \frac{\sigma_2(x)^{-1}}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m_2(x)-2} \theta e^{-v_2(x)\theta} d\theta} [y^2 + 1]^{m_2(x)} \exp\{-v_2(x) \tan^{-1}(y)\} \sigma_2(x) \\ &= f_y(y) \frac{\sigma_1(y)^{-1}}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m_1(y)-2} \theta e^{-v_1(y)\theta} d\theta} [x^2 + 1]^{m_1(y)} \exp\{-v_1(y) \tan^{-1}(x)\} \sigma_1(y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. Burada $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ marjinal dağılımlardır.

$t_i = \frac{1}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m_i-2} \theta e^{-v_i\theta} d\theta}$ olarak tanımlansın. Eşitlik (4.5) tekrar düzenlendiğinde

aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_x(x) t_2(x) [y^2 + 1]^{m_2(x)} \exp\{-v_2(x) \tan^{-1}(y)\} \\ &= f_y(y) t_1(y) [x^2 + 1]^{m_1(y)} \exp\{-v_1(y) \tan^{-1}(x)\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3. İKİ DEĞİŞKENLİ PEARSON TİP IV DAĞILIMININ OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ

Eşitlik (4.6) da her iki taraf $\ln$ olarak alınsın,

$$\begin{aligned}\ln f(x, y) &= \ln \{f_x(x)t_2(x)\} + m_2(x)\ln[y^2 + 1] - v_2(x)\tan^{-1}(y) \\ &= \ln \{f_y(y)t_1(y)\} + m_1(y)\ln[x^2 + 1] - v_1(y)\tan^{-1}(x)\end{aligned}\quad (4.7)$$

Eşitlik (4.7) sıfıra eşitlenip sırası ile Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 uygulanarak eşitlik (4.13) deki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunabilir.

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \ln \{f_x(x)t_2(x)\} & \psi_1(y) &= 1 \\ f_2(x) &= m_2(x) & \psi_2(y) &= \ln \{y^2 + 1\} \\ f_3(x) &= -v_2(x) & \psi_3(y) &= \tan^{-1}(y)\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}g_1(y) &= \ln \{f_y(y)t_1(y)\} & \varphi_1(x) &= -1 \\ g_2(y) &= m_1(y) & \varphi_2(x) &= -\ln \{x^2 + 1\} \\ g_3(y) &= -v_1(y) & \varphi_3(x) &= \tan^{-1}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \ln \{f_x(x)t_2(x)\} \\ m_2(x) \\ -v_2(x) \\ -1 \\ -\ln \{x^2 + 1\} \\ \tan^{-1}(x) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ \tan^{-1}(x) \\ \ln \{x^2 + 1\} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \ln \{y^2 + 1\} \\ \tan^{-1}(y) \\ \ln \{f_y(y)t_1(y)\} \\ m_1(y) \\ v_1(y) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 \\ \tan^{-1}(y) \\ \ln \{y^2 + 1\} \end{bmatrix}$$

Burada $A'B = 0$ sağlayacak şekilde A ve B matrisleri yârine yazıldığında,

$$\begin{bmatrix} \ln \{f_x(x)t_2(x)\} \\ m_2(x) \\ -v_2(x) \\ -1 \\ -\ln \{x^2 + 1\} \\ \tan^{-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan^{-1}(x) \\ \ln \{x^2 + 1\} \end{bmatrix};$$

(4.9)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \ln\{y^2+1\} \\ \tan^{-1}(y) \\ \ln\{f_y(y)t_1(y)\} \\ m_1(y) \\ v_1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan^{-1}(y) \\ \ln\{y^2+1\} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eşitlik (4.9) daki matris çözümü ile aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\ln\{f_x(x)t_2(x)\} = a_{11} + a_{12} \tan^{-1}(x) + a_{13} \ln\{x^2+1\}$$

$$m_2(x) = a_{21} + a_{22} \tan^{-1}(x) + a_{23} \ln\{x^2+1\}$$

$$v_2(x) = -(a_{31} + a_{32} \tan^{-1}(x) + a_{33} \ln\{x^2+1\})$$

(4.10)

$$\ln\{f_y(y)t_1(y)\} = b_{44} + b_{45} \tan^{-1}(y) + b_{46} \ln\{y^2+1\}$$

$$m_1(y) = b_{54} + b_{55} \tan^{-1}(y) + b_{56} \ln\{y^2+1\}$$

$$v_1(y) = b_{64} + b_{65} \tan^{-1}(y) + b_{66} \ln\{y^2+1\}$$

$A'B=0$ eşitliği çözüldüğünde;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & -1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

katsayılar arasında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{array}{lll} a_{11} = b_{44} = G & a_{31} = b_{45} = D & a_{21} = b_{46} = A \\ a_{12} = b_{64} = H & a_{32} = -b_{65} = E & a_{22} = -b_{66} = B \\ a_{13} = b_{54} = J & a_{33} = b_{55} = F & a_{23} = b_{56} = C \end{array}$$

(4.11)

Eşitlik (4.10), eşitlik (4.11) e göre tekrar yazıldığında,

$$\ln\{f_x(x)t_2(x)\} = G + H \tan^{-1}(x) + J \ln\{x^2+1\}$$

$$\begin{aligned}
m_2(x) &= A + B \tan^{-1}(x) + C \ln\{x^2 + 1\} \\
v_2(x) &= -(D + E \tan^{-1}(x) + F \ln\{x^2 + 1\}) \\
\ln\{f_y(y)t_1(y)\} &= G + D \tan^{-1}(y) + A \ln\{y^2 + 1\} \\
m_1(y) &= J + F \tan^{-1}(y) + C \ln\{y^2 + 1\} \\
v_1(y) &= -(H + E \tan^{-1}(y) + B \ln\{y^2 + 1\})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Eşitlik (4.12) de elde edilen ifadeler eşitlik (4.6) da yerine yazılarak iki değişkenli Pearson Tip IV ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \exp \left\{ \begin{aligned} &G + H \tan^{-1}(x) + J \ln\{x^2 + 1\} + A \ln\{y^2 + 1\} \\ &+ B \tan^{-1}(x) \ln\{y^2 + 1\} + C \ln\{x^2 + 1\} \ln\{y^2 + 1\} \\ &+ D \tan^{-1}(y) + E \tan^{-1}(x) \tan^{-1}(y) + F \ln\{x^2 + 1\} \tan^{-1}(y) \end{aligned} \right\} \\
&= \exp \left\{ \begin{aligned} &G + D \tan^{-1}(y) + A \ln\{y^2 + 1\} + J \ln\{x^2 + 1\} \\ &+ F \tan^{-1}(y) \ln\{x^2 + 1\} + C \ln\{y^2 + 1\} \ln\{x^2 + 1\} \\ &+ H \tan^{-1}(x) + E \tan^{-1}(y) \tan^{-1}(x) + B \ln\{y^2 + 1\} \tan^{-1}(x) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (4.13) deki iki değişkenli ortak yoğunluk için gerekli olan koşullar şu şekilde özetlenebilir;

MODEL I (X ve Y bağımsız)

$$B = 0, F = 0, E = 0, C = 0$$

olarak alındığına iki değişkenli ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x, y) = \exp\{G + H \tan^{-1}(x) + J \ln\{x^2 + 1\} + A \ln\{y^2 + 1\} + D \tan^{-1}(y)\}$$

şeklinde elde edilir.

MODEL II

$$B = 0, F = 0, C = 0, E > 0$$

olarak alındığına iki değişkenli ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x, y) = \exp \left\{ \begin{aligned} &G + H \tan^{-1}(x) + J \ln\{x^2 + 1\} + A \ln\{y^2 + 1\} \\ &+ D \tan^{-1}(y) + E \tan^{-1}(x) \tan^{-1}(y) \end{aligned} \right\}$$

şeklinde elde edilir. $f(x,y) \geq 0$ koşulu ve iki değişkenli ortak olasılık fonksiyonunun integral alınarak ve marjinal dağılımların integrallerinin 1'e eşitlenmesi ile elde edilen kısıtlar kullanılarak daha farklı iki değişkenli Pearson Tip IV modelleri oluşturulabilir.



SONUÇ

İki değişkenli istatistiksel modellerin oluşturulmasında bir çok yöntem kullanılmıştır. üstel dağılım ailesi ve Pearson dağılım ailesine ait birçok olasılık fonksiyonu için iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu oluşturulmasında kullanılan yöntemler açıklanmıştır.

Bu çalışmada Pearson dağılım ailesine ait olan fakat üstel dağılım ailesine ait olmayan ve koşullu dağılımlar kullanılarak iki değişkenli modelinin elde edilmiş yapısı literatür de bulunmayan Tip IV dağılımının bazı kısıtlar çerçevesinde iki değişkenli formu elde edilmiştir.



KAYNAKÇA

Abrahams, J., and Thomas, J. B. (1984). *A Note on the Characterization of Bivariate Densities by Conditional Densities*. *Communications in Statistics, Part A-Theory and Methods*, 13: 395-400.

Acz'el, J. (1966), *Lectures on Functional Equations and their Applications*. Academic Press, New York.

Arnold, B. C. and Press, S. J. (1989b), Compatible Conditional Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 84:152–156.

Arnold, Barry C., Castillo, Enrique, Sarabia, Jose M. (1999). Conditional Specification of Statistical Models.

Balakrishnan, N. ve Chin-Diew, L. (2009). *Continuous Bivariate Distributions*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

Barnett, V. (1979). *Some Outlier Tests for Multivariate Samples*. *South African Statistical Journal*. 13: 29–52.

Barnett, V. (1985). The Bivariate Exponential Distribution; a review and Some New Results. *Statistica Neerlandica* 39: 343–357.

Bauer, H. (1972). *Probability Theory and Elements of Measure Theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Bhattacharyya. (1943). On Some Sets of Sufficient Conditions Leading to the Normal Bivariate Distribution. *The Indian Journal of Statistics* (1933-1960). 6(49).

Bjerve, S., Doksum, K.: Correlation curves: Measures of Association as Function of covariates values. *Annals of Statistics*. 21: 890–902 (1993).

Castillo, E. and Galambos, J. (1989). Conditional Distributions and the Bivariate Normal Distribution. *Metrika*. 36:209–214.

Castillo, E. and Galambos, J. (1990), Bivariate Distributions with Weibull Conditionals. *Analysis Mathematica*, 16:3–9.

Chambers, J.M., Cleveland, W.S., Kleiner, B., Tukey, P.A. (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*, Wadsworth. Belmont, California.

Cohen, J., and Cohen, P. (1975). *Applied Multiple Regression/ Correlation Analysis for the Behavioral Sciences*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cramér, H. (1954). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Csiszar, I. (1975). I. Divergence Geometry of Probability Distributions and minimization Problems. *Ann. Probab.* 3: 146-158.

Devlin, S.J. (1975). Gnanadesikan, R., Kettenring, J.R.: *Robust Estimation and outlier Detection with Correlation Coefficients*. *Biometrika*. 62: 531–545.

Dodge, Y., Rousson, V. (2000). Direction dependence in a regression line. *Communications in Statistics: Theory and Methods* 29: 1957–1972.

Drouet-Mari, D., Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. London: Imperial College Press.

Drouet-Mari, D., Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. Imperial College Press, London.

Elffers, H.: (1980). *On interpreting the Product moment Correlation Coefficient*. *Statistica Neerlandica*. 34: 3–11.

Falk, R., Well, A.D.: Many faces of correlation coefficient. *Journal of Statistical Education* 5: 1–16 (1997).

FISHER, J. (1959). The Twisted Pear And The Prediction of Behaviour. *Journal of Consulting Psychology* 23: 400-405.

Geert Molenberghs and Emmanuel Lesaffre (1997). Non-linear Integral Equations to approximate bivariate densities with given marginals and dependence function. *Statistica Sinica*. 7(3): 713-738.

Gibbons, J.D. (1971). *Nonparametric Statistical Inference*, New York: McGraw-Hill.
Goodman, L. A. (1969). How to Ransack Social Mobility tables and Other Kinds of Cross-Classification Tables. *Amer. J. Soc.* 75: 1-39.

Gourieroux, C. and Montfort, A. (1979). On the Characterization of a Joint Probability Distribution by Conditional Distributions. *Journal of Econometrics*, 10:115–118.

Gourieroux, C., and Montfort, A. (1979). On the Characterization of a Joint Probability Distribution by Conditional Distributions. *Journal of Econometrics*, 10: 115-118.

Gumbel, E.J. (1960). Bivariate Exponential Distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* 55, 698-707.

Hall, W.J. (1970). On characterizing dependence in joint distributions. In: *Essays in Probability and Statistics*, R.C. Bose, I.M. Chakravarti, P.C. Mahalanobis, C.R. Rao, and K.J.C. Smith (eds.), (1970). *University of North Carolina Press*, pp. 339–376. Chapel Hill.

Holland, P. W. And Wang, Y. J. (1987a). Dependence function for continuous bivariate densities. *Comm. Statist. Theory Methods* 16: 863-876.

Holland, P. W. And Wang, Y. J. (1987b). Regional Dependence for Continuous Bivariate Densities. *Comm. Statist. Theory Methods* 16: 193-206.

Jensen, D.R. (1988). *Semi-independence*. In: *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Volume 8, S. Kotz and N.L. Johnson (eds.), pp. 358–359. New York: John Wiley and Sons.

Jogdeo, K. (1982). *Dependence, Concepts of*. In: *Encyclopedia of Statistical Sciences, Volume 2*, S. Kotz and N.L. Johnson (eds.), pp. 324–334. New York: John Wiley and Sons.

Johnson , N. L. (1949). Bivariate Distributions Based On Simple Translation Systems. *Biometrika* 36: 297-304.

Jones, M.C. (1998).: Constant Local Dependence. *Journal of Multivariate Analysis* 64, 148– 155.

Jones, M.C. (1996): *The local Dependence Function*. *Biometrika* 83: 899–904.

Karl Pearson. (1895). Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous Material. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 186: 343-414.

Kimeldorf, G., (1978). Sampson, A.: *Monotone Dependence*. *Annals of Statistics* 5: 895–903.

Kotz. S. (1974). *Multivariate distributions at a cross road*. *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol. 1 (edited by G. P. Patil et al.), 247-270. D. Riedal publishing Company, Dordrecht, holland.

Kullback, S. (1968). *Probability Densities with given Marginals*. Ann. Math. Statist. 39: 1236-1243.

Lancaster, H.O. (1963). Correlation and Complete Dependence Of Random Variables. *Annals of Mathematical Statistics*. 34: 1315–1321.

Lancaster, H.O. (1982). *Dependence, Measures and indices of*. In: *Encyclopedia of Statistical Sciences*. S. Kotz and N.L. Johnson (eds.), pp. 334–339. John Wiley and Sons, New York.

Mardia, K. V. (1970), *Families of Bivariate Distributions*. Griffin, London.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 62: 30-44.

Moran, P.A.P. (1967). *Testing for Correlation Between Non-Negative Variates*. Biometrika 54: 385–394.

Muddapur, M.V. (2003). *On Directional Dependence in a Regression Line*. Communications in Statistics: Theory and Methods 32: 2053–2057 (2003).

P. G. Sankaran & R. P. Gupta (2004). Characterizations Using Local Dependence Function. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33:12, 2959-2974.

Plackett, R, L. (1965). A class of bivariate distributions. J. Amer. Statist. 60: 516-522.

Rényi, A. (1959). *On Measures of Dependence*. Acta Mathematica Academia Scientia Hungarica. 10: 441–451.

Rényi, A. (1970). *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam.

Rodgers, J.L., Nicewander, W.A.: Thirteen ways to look at the correlation coefficient. The American Statistician 42: 59–66 (1988).

Rovine, M.J., Von Eye, A.C.: A 14th way to look at a correlation: Correlation as the proportion of matches. *The American Statistician* 51: 42–46 (1997).

Sagrasta, S. N. (1952). On a generalization of Pearson's curves to the two dimensional case. *Trabajos de Estadística* 3: 273-314.

Schweizer, B., Wolff, E.F. (1981). On nonparametric measure of dependence for random variables. *Annals of Statistics* 9: 879–885.

Speed, T. P. and Kiiveri, H. T. (1986). Gaussian Markov distributions over finite graphs. *Ann. Statist.* 14: 138-150.

Van Uven, M. J. (1947-48). Extension of Pearson's probability distributions to two variables, I-III. *Proc. Roy. Academy Sci. Amsterdam* 32: 793-807, 995-1007, 1085-1103.

Welkowitz, J., Ewen, R. B., and Cohen, J. (1976) *Introductory Statistics for the Behavioral Sciences* (2nd ed.) New York: Academic Press.

Yuchung J. Wang.: Construction of continuous bivariate density function. *Statistica Sinica* Vol. 3, No. 1 (January 1993), pp. 173-187.

Yule, G. U. And Kendall, M. G. (1950). *An Introduction to the Theory of Statistics*, 14th edition. London: Charles Griffin and Company Limited.

Yule, G.U. (1926). *Why do we Sometimes get Nonsense-Correlations Between Time-Series?* A study in Sampling and the Nature of time-Series. *Journal of the Royal Statistical Society* 89: 1–64.



EKLER

Ek 1: Dejenere Kernel ile Fredholm Denklemleri

İkinci tip Fredholm integral denklemi,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad (1)$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım: Kernel $K(x, y)$ her biri x ve y fonksiyonlarının çarpımları olarak yazılıyorsa, dejenere olarak adlandırılır.

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j(x) v_j(y) = u^T(x) v(y) = u(x) \cdot v(y) = \langle u, v \rangle \quad (2)$$

ikinci gösterim sonlu uzaylar için bir iç çarpımdır. Eşitlik (1) bir dizi eşzamanlı (simultaneous) doğrusal cebirsel denklemlerin azaltılmasıyla çözülebilir. Eşitlik (2), eşitlik (1) de yazıldığında,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n u_j(x) v_j(y) \right] f(y) dy + g(x) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \left[u_j(x) \int_a^b v_j(y) f(y) dy \right] + g(x) \end{aligned}$$

eşitliğini verir. Burada,

$$c_j = \int_a^b v_j(y) f(y) dy = \langle v_j, f \rangle \quad (3)$$

denildiğinde,

$$f(x) = \lambda \sum_{j=1}^n c_j u_j(x) + g(x) \quad (4)$$

elde edilir. Bu kernel sınıfında, integral denkleminin çözümünü elde etmek için c_j yi bulmak yeterlidir. Eşitlik (3) ve (4) arasındaki f in giderilmesi (yani, her iki tarafında v_i ile iç çarpımının alınması)

$$c_i = \int_a^b v_i(y) \left[\lambda \sum_{j=1}^n c_j u_j(y) + g(y) \right] dy$$

veya integral ve toplamın değiştirilmesi ile,

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b v_i(y) u_j(y) dy + \int_a^b v_i(y) g(y) dy \quad (5)$$

elde edilir.

$$a_{ij} = \int_a^b v_i(y) u_j(y) dy = \langle v_i, u_j \rangle \quad (6)$$

ve

$$g_i = \int_a^b v_i(y)g(y)dy = \langle v_i, g \rangle \quad (7)$$

ifadeleri yazılırsa eşitlik (5),

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j + g_i \quad (8)$$

şeklini alır.

$$A = (a_{ij}), c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \text{ matrisleri tanımlayarak bu denklem, matris}$$

notasyonunda

$c = \lambda Ac + g$ yani $(I - \lambda A)c = g$ olarak tanımlanabilir. Burada, I özdeşliktir.

Örnek:

$$f(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-y) f(y)dy + g(x) \quad (9)$$

İntegral denklemi düşünölsün,

(i) Tek bir çözüme sahip olan λ değeri,

(ii) Tek bir çözüme sahip olmayan λ değeri, için çözüm bulunsun.

$$f(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-y) f(y)dy + g(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin x \cos y - \cos x \sin y) f(y)dy + g(x)$$

ve böylece,

$K(x, y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ şeklinde ayrılır.

$$f(x) = \lambda \left[\sin x \int_0^\pi f(y) \cos y dy - \cos x \int_0^\pi f(y) \sin y dy \right] + g(x)$$

$$c_1 = \int_0^\pi f(y) \cos y dy \quad (10)$$

$$c_2 = \int_0^\pi f(y) \sin y dy$$

(11)

eşitlikleri yazıldığında,

$$f(x) = \lambda [c_1 \sin x - c_2 \cos x] + g(x) \quad (12)$$

elde edilir. Eşitlik (10) da $f(x)$ in değeri yazıldığında,

$$c_1 = \int_0^\pi \left\{ \lambda [c_1 \sin y - c_2 \cos y] + g(y) \right\} \cos y dy$$

$$= \lambda c_1 \int_0^\pi \sin y \cos y dy - \lambda c_2 \int_0^\pi \cos^2 y dy + \int_0^\pi g(y) \cos y dy \text{ şeklini}$$

alır.

$$g_1 = \int_0^\pi g(y) \cos y dy \text{ ve integral değerleri,}$$

$$\int_0^\pi \sin y \cos y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2y dy = \left[-\frac{1}{4} \cos 2y \right]_0^\pi = 0$$

$$, \int_0^\pi \cos^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2y) dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{2} \sin 2y \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \pi \text{ yerine yazıldığında,}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} \pi \lambda c_2 + g_1 \text{ eşitliği elde edilir. aynı şekilde eşitlik (11) e eşitlik (12)}$$

$$\text{konulduğunda, } c_2 = \int_0^\pi \left\{ \lambda [c_1 \sin y - c_2 \cos y] + g(y) \right\} \sin y dy$$

$$= \lambda c_1 \int_0^\pi \sin^2 y dy - \lambda c_2 \int_0^\pi \cos y \sin y dy + \int_0^\pi g(y) \sin y dy \text{ elde edilir}$$

$$g_2 = \int_0^\pi g(y) \sin y dy \text{ ve integral değerleri,}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2y) dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{2} \sin 2y \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \pi \text{ yazılırsa,}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \pi \lambda c_1 + g_2 \text{ elde edilir.}$$

Böylece c_1 ve c_2 için benzer denklemler veya matrisler vardır,

$$c_1 + \frac{1}{2} \pi \lambda c_2 = g_1$$

$$-\frac{1}{2} \pi \lambda c_1 + c_2 = g_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \pi \lambda \\ -\frac{1}{2} \pi \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

(13)

(i) Bu denklemler,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ yani } 1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2 \neq 0 \text{ veya } \lambda \neq \pm \frac{2i}{\pi} \text{ durumlarını sağlayan tek}$$

bir çözüme sahiptir.

$$\text{Bu durumda, } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \text{ veya}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\pi\lambda \\ \frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \begin{bmatrix} g_1 - \frac{1}{2}\pi\lambda g_2 \\ \frac{1}{2}\pi\lambda g_1 + g_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \begin{bmatrix} \int_0^\pi g(y) \cos y dy - \frac{1}{2}\pi\lambda \int_0^\pi g(y) \sin y dy \\ \frac{1}{2}\pi\lambda \int_0^\pi g(y) \cos y dy + \int_0^\pi g(y) \sin y dy \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \int_0^\pi \begin{bmatrix} \cos y - \frac{1}{2}\pi\lambda \sin y \\ \frac{1}{2}\pi\lambda \cos y + \sin y \end{bmatrix} g(y) dy. \end{aligned}$$

Böylece,

$$f(x) = \lambda [c_1 \sin x - c_2 \cos x] + g(x)$$

$$= \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \times \left[\int_0^\pi \left[\sin x \left(\cos y - \frac{1}{2}\pi\lambda \sin y \right) - \cos x \left(\frac{1}{2}\pi\lambda \cos y + \sin y \right) \right] g(y) dy \right] + g(x)$$

veya

$$f(x) = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \int_0^\pi \left[\sin(x-y) - \frac{1}{2}\pi\lambda \cos(x-y) \right] g(y) dy + g(x).$$

oluşan bu sonuçta çözücü kernel,

$$R(x, y, \lambda) = \frac{\sin(x-y) - \frac{1}{2} \pi \lambda \cos(x-y)}{1 + \frac{1}{4} \pi^2 \lambda^2} \text{ şeklindedir.}$$

$$(ii) \text{ Eğer } \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \pi \lambda \\ -\frac{1}{2} \pi \lambda & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ yani } \lambda = +\frac{2i}{\pi} \text{ veya } -\frac{2i}{\pi} \text{ şeklinde ise, çözüm yok}$$

veya sonsuz sayıdadır. Eşitlik (13),

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \text{ eşitliğine dönüşür.}$$

Bu denklemlerde satır işlemleri $R_2 \mapsto R_2 \pm iR_1$ kullanıldığında

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \pm ig_1 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{matrix} c_1 \pm ic_2 = g_1 \\ 0 = g_2 \pm ig_1 \end{matrix} \text{ eşitliklerini verir.}$$

İkinci denklemler g_i nin tanımına göre

$$\int_0^\pi (\sin y \pm i \cos y) g(y) dy = 0 \quad (14)$$

olan $g(x)$ fonksiyonuna kısıtlama getirmektedir. Bu $g(x)$ fonksiyonunun integral denkleminin çözülebilir olması için yerine getirmesi gereken koşuldur, yani bu koşul karşılanmazsa eşitlik (9) bir çözüme sahip olamaz. Bu koşulun geçerli olduğu varsayılın, c_2 her hangi isteğe bağlı bir sabit olarak, $c_2 = \alpha$, alınsın. Böylece,

$c_1 = \pm i\alpha + g_1$ ve eşitlik (12) den, eşitlik (9) un çözümü $\lambda = \pm 2i/\pi$ olduğunda, α sabiti, $g_2 = \mp ig_1$ veya eşdeğerde olan eşitlik (14) kısıtı için,

$$\begin{aligned} f(x) &= \pm \frac{2i}{\pi} \left[(\mp i\alpha + g_1) \sin x - \alpha \cos x \right] + g(x) \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} (\sin x \mp i \cos x) \pm \frac{2i}{\pi} g_1 \sin x + g(x) \text{ şeklindedir.} \end{aligned}$$

Ek 2: Weibull Dağılımı

Eşitlik (3.68) de verilen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonun da her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned}\log f(x, y) &= \log m(x) + [c(x) - 1] \log [a(x)(y - K)] - \{a(x)(y - K)\}^{c(x)} \\ &= \log n(y) + [e(y) - 1] \log [d(y)(x - L)] - \{d(y)(x - L)\}^{e(y)}\end{aligned}$$

Elde edilir. $\log f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre birinci türevi,

$$\begin{aligned}&= \frac{c(x) - 1}{(y - K)} - c(x) a(x)^{c(x)} (y - K)^{c(x) - 1} \\ &= \frac{n'(y)}{n(y)} + e'(y) \log [d(y)(x - L)] + [e(y) - 1] \frac{d'(y)}{d(y)}\end{aligned}$$

$\log f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre ikinci türevi,

$$\begin{aligned}&= -[c(x) - 1](y - K)^{-2} - c(x) a(x)^{c(x)} [c(x) - 1](y - K)^{c(x) - 2} \\ &= \frac{n''(y)n(y) - [n'(y)]^2}{n(y)^2} + e''(y) \log \{d(y)(x - L)\} + e'(y) \frac{d'(y)}{d(y)} + \dots \\ &+ e'(y) \frac{d'(y)}{d(y)} + [e'(y) - 1] \left\{ \frac{d''(y)d(y) - [d'(y)]^2}{d(y)^2} \right\} - \dots \\ &- [d(y)(x - L)]^{e(y)} \left\{ e'(y) \log [d(y)(x - L)] + \frac{d'(y)}{d(y)} e(y) \right\} \times \left\{ e'(y) \log [d(y)(x - L)] + \frac{d'(y)}{d(y)} e(y) \right\} - \dots \\ &- \left\{ e''(y) \log [d(y)(x - L)] + 2 \frac{d'(y)}{d(y)} e'(y) + e'(y) \frac{d''(y)d(y) - [d'(y)]^2}{d(y)^2} \right\} \times [d(y)(x - L)]^{e(y)}\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafına $y = K + 1$ yazıldığında;

$$[1 - c(x)] [1 + c(x) a(x)^{c(x)}] = H_2(x)$$

ifadesi elde edilir.