T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS OPTİMİZASYONDA SABİT NOKTA ALGORİTMALARI

ASİYE SUCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS OPTİMİZASYONDA SABİT NOKTA ALGORİTMALARI

Asiye SUCU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 08/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Danışman

Prof.Dr. Seyit TEMİR
Üye

Prof.Dr. Vatan KARAKAYA
Üye

Prof. Dr. Murat KOCA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS OPTİMİZASYONDA SABİT NOKTA ALGORİTMALARI

Asiye SUCU

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Yıl : 2019, Sayfa Sayısı: viii+62

Jüri : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Bu tezin amacı konveks minimizasyon probleminin çözümüne yeni bir gradient projeksiyon algoritması ile yaklaşmaktır. Bu amaç için Xu'nun [1] konveks minimizasyon probleminin çözümü için alternatif bir yöntem olarak kullandığı ortalı dönüşüm yaklaşımı kullanılmıştır. Tezde önerilen yeni gradient projeksiyon algoritması Noor iterasyon yöntemini [2] baz almaktadır. Bu tezin birinci bölümünde tezde ele alınan konu genel hatlarıyla tanıtılmıştır. İkinci bölümde tezin konusu ile ilgili kısa bir literatür özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde tezi anlaşılır kılmak için bazı temel kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölümde tezin amacını gerçekleştirmemize olanak sağlayan materyal ve yöntemler ile uygun şartları sağlayan gradient projeksiyon algoritmasının konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını göstermek için Xu'nun kullandığı ortalı dönüşümler yaklaşımı anlatılmıştır. Beşinci bölümde ise konveks minimizasyon probleminin çözümüne önerdiğimiz yeni projeksiyon algoritmasının zayıf yakınsaklığı gösterilmiştir. Ayrıca ispatladığımız sonucu desteklemek için sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında bir örnek verilmiştir. Son olarak, tezin altıncı bölümünde, tezin sonuçları tartışılmış ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Konveks Minimizasyon Problemi; Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri; Zayıf Yakınsaklık; Gradient Projeksiyon Algoritması.

ABSTRACT

MSc Thesis

FIXED POINT ITERATIVE ALGORITHM IN CONVEX OPTIMIZATION PROBLEM

Asiye SUCU

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Müzeyyen ERTÜRK
Year : 2019 - Number of Pages : viii+62

Jury : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Assoc. Prof. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

The aim of this thesis is to approach to a solution of convex minimization problem with a new gradient projection algorithm. For this purpose, averaged mapping approach which was proposed by Xu [1] as an alternative to solve the convex minimization problem has been used. The new gradient projection algorithm proposed in this thesis is based on Noor iteration method [2]. In the first part of this thesis, the subject handled in the thesis has been introduced in general terms. In the second part, a brief literature summary of the topic of the thesis has been given. In the third part, some basic concepts have been given to make the thesis understandable. In the fourth section, materials and methods that enable us to realize the purpose of the thesis and Xu's an averaged mapping approach to show weakly convergence to a solution of the convex minimization problem have been explained. In the fifth chapter, it has been shown that the new projection algorithm we propose is weakly convergent to solution of the convex minimization problem. Also, it has been given an example in infinite dimensional Hilbert space to support the result that we proved it. Finally, in the sixth chapter of the thesis, the results of the thesis have been discussed and some suggestions have been made.

Key Words: Convex Minimization Problem; Fixed Point Iterative Methods; Weak Convergence; Gradient Projection Algorithm.

BEYAN

“Konveks Optimizasyonda Sabit Nokta Algoritmaları” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilen eserlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Asiye SUCU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken benden desteğini esirgemeyen, geniş bilgi ve birikimlerinden faydalanma imkanı bulduğum, karşılaştığım zorlukları yardımlarıyla aşmamı sağlayan, bana hedefler edinmeyi öğreten ve bana bir danışman olmanın ötesinde arkadaşça yaklaşımıyla aydınlanmamı sağlayan danışman hocam sayın Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans sürecinde matematiksel bakış açısını, bilgisini, öngörüsünü ve tecrübesini benimle paylaşmaktan çekinmeyen Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü anabilim dalındaki değerli öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca hep yanımda duran, her türlü zorluğa karşı sabretmeyi öğreten, tahsil hayatım boyunca en büyük destekçim olarak gördüğüm, ağabey olmanın yanı sıra bana güvenilir bir dost olan değerli ağabeyime özellikle teşekkür ederim. Ayrıca hayatımda maddi manevi desteğini benden esirgemeyen, azimle çalışmayı öğreten, ideallerimin peşinden gitmemi sağlayan fedakâr aileme teşekkür ederim.

Her konuda yardımcım olan, hayatıma güzellik katan, bu çalışmayı hazırlarken her türlü desteğiyle beni yalnız bırakmayan, anlayışlı duruşuyla beni daha da güçlendiren, hayat arkadaşım sevgili eşim Mehmet Fatih SUCU'ya desteklerinden dolayı sonsuz teşekkürler ederim. Ayrıca bu çalışmayı hazırlarken gülüşüyle beni neşelendiren, zorluğuyla ve kolaylığıyla her problemi çözerken yanımda oluşu beni mutlu eden, biricik kızım Hatice Azra SUCU'ya sevgilerle teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A^o	: A kümesinin içi
$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
A'	: A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$B(x_0\,,r)$	: x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B(x_0,r)}$	: x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
F_T	: T döüşümünün sabit noktalarının kümesi
l^2	: $l^2 = \{(x_i) = (x_0, x_1, x_2, \cdots): x_i \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ cisim) $ve\ \sum_{i=0}^{\infty}\lvert x_0\rvert^2 < \infty\}$
$L^2[0,2\pi]$	: $L^2[0,2\pi] = \left\{f: [0,2\pi] \to \mathbb{R} : \int_0^{2\pi} f^2(x)dx < \infty\right\}$
P_C	: Metrik izdüşüm operatörü
S	: $min_{x\in C} f(x)$ probleminin tüm çözümlerinin kümesi
T'	: T fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
(X,d)	: Metrik uzay
$(X, \lVert.\rVert)$	: Normlu uzay
$(X, \langle\,,\rangle)$	: İç çarpım uzayı
$x_n \rightharpoonup x$	: x_n dizisi x noktasına zayıf yakınsar
$w_w(x_n)$	: $w_w(x_n) := \left\{x: \exists x_{n_j} \rightharpoonup x\right\}$
∇f	: f fonksiyonunun gradienti
σA	: A kümesinin sınırı
$VI(f,C)$	: Varyasyonel eşitsizlik problemi
Γ	: $\Gamma = \{x\epsilon C: Ax\epsilon Q\} = C \cap A^{-1}Q$, SFP'nin çözümlerinin kümesi

Kısaltmalar

GPA	: Gradient Projeksiyon Algoritması
inf	: En büyük alt sınır
SFP	: Split Fizibilite Problemi
sup	: En küçük üst sınır

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji, ekonomi, sosyal bilimler gibi bilimin birçok dalında ortaya çıkan teorik ve pratik çeşitli sorular, uygun bir matematiksel zemin içinde modellenebilir. Böyle bir modelleme, çözüm gerektiren denklem veya denklem sistemlerine ihtiyaç duymaktadır. Problem için uygun model belirlendikten sonra ve problem uygun denklemler aracılığıyla formüle dönüştürüldükten sonra şu açık soru ortaya çıkar: Denklem bir çözüme sahip midir? Eğer cevap olumlu ise çözümün varlığı ve yaklaşım çeşitleri araştırılır. Uygun bir T dönüşümüyle modellenen problem aşağıdaki genel şema ile ifade edilebilir:

X, nesnelerin bir kümesi ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aradığımız çözümler $Tx = x$ denklemini sağlayan, T dönüşümü altında değişmez kalan noktalar kümesidir.

$Tx = x$ sabit nokta denklemi olarak ifade edilen bir problemin çözümüne yaklaşmak için iterasyon olarak adlandırılan ardışık yaklaşımlar metodu kullanılır. T dönüşümünün sağladığı çeşitli özelliklere göre dönüşümün sabit noktasına yakınsayan çeşitli algoritmalar bulunabilir.

Öte yandan optimizasyon bir durumun veya kaynağın en iyi veya en etkili şekilde kullanılması eylemi olarak tanımlanır. Günlük hayatımızda karşılaştığımız bir problemi matematiksel olarak ifade ederek modellemek ve bu modeli sağlayan en iyi çözümü bulmak, optimizasyonun temel bileşenleridir. Matematiksel olarak modellenen problemi çözmek demek, uygun bir küme üzerinde bir fonksiyonu minimize veya maksimize etmek demektir. Optimizasyonun bir alt dalı olan konveks minimizasyon ise konveks kümeler üzerinde konveks fonksiyonları minimize etme problemidir. Konvekslik, optimizasyonun genel duruma göre daha kolay olmasını sağlar. Örneğin, $\mathbb{R}$'de konveks bir küme üzerinde konveks bir fonksiyonun yerel minimumu bir mutlak minimumdur. Problemin konveks bir küme üzerinde konveks bir fonksiyonu minimum yapan değerini bulmak olarak modellenebilmesi, mevcut bir dizi seçenek arasından en iyisinin bulunması anlamına gelir.

Bir reel Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesinden $\mathbb{R}$'ye tanımlanmış konveks, Fréchet diferansiyellenebilir bir fonksiyonun minimumlarını bulma problemini, fonksiyonun gradienti ve Hilbert uzayından onun kapalı, konveks alt kümesi üzerine tanımlanan projeksiyon yardımı ile çözen iterasyon metoduna gradient projeksiyon algoritması (GPA) denir. GPA ile, konveks fonksiyonun gradienti ve projeksyion yardımıyla elde edilen yeni dönüşümün sabit noktasına yaklaşılır. GPA'nın yakınsadığı bu sabit nokta, konveks minimizasyon probleminin bir çözümü olduğundan, minimizasyon probleminin çözümüne farklı sabit nokta iterasyon yöntemleri ile yaklaşma fikrini doğurmuştur.

Öte yandan, kendisi bir Hilbert uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesine ait iken, sınırlı ve lineer bir operatör altında görüntüsü başka bir kapalı ve konveks kümeye ait olan bir noktayı bulma problemi Split Feasibilty Problemi (SFP) olarak adlandırılır. SFP çok çeşitli ters problemlerin modellenmesinde uygulanabilirliğe sahiptir. Faz geri kazanımlarından ve tıbbi görüntü rekonstrüksiyonundan kaynaklanan ters problemleri ve yoğunluk modülasyonlu radyasyon terapisini modellemek için kullanılmıştır.

SFP'nin bir konveks minimizasyon problemi olarak ifade edilebilmesi, konveks minimizasyon problemini çözen algoritmaların SFP'yi çözmek için de kullanılabileceği sunucuna vardırmıştır.

Konveks minimizasyon ve SFP arasındaki ilişki de göz önüne alındığında gerçek hayatta karşılaşılan bazı problemleri çözdüğü için konveks minimizasyon probleminin çözümlerine yaklaşan yeni gradient projeksiyon algoritmaları bulmak ve geliştirmek büyük önem kazanmıştır. Bu tezde konveks minimizasyon problemini çözmek için yeni bir gradient projeksiyon algoritması önereceğiz. Önerdiğimiz bu algoritmanın konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını Xu [1]'nun ortalı dönüşümler yaklaşımını kullanarak göstereceğiz. Ayrıca ispatladığımız teoremin sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında bir uygulamasını vereceğiz. Ardından, önerdiğimiz bu yeni gardient projeksiyon algoritmasının SFP'yi çözdüğünü göstereceğiz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

C, reel H Hilbert uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $f: C \to \mathbb{R}$ bir konveks dönüşüm olsun. f'nin C üzerindeki minimum noktalarının bulunması işlemine konveks minimizasyon problemi denir ve

$$min_{x \in C} f(x) \tag{2.1}$$

ile gösterilir [3]. (2.1) probleminin tüm çözümlerinin kümesini S ile gösterelim. $S \neq \emptyset$ olsun. P_C, H'den C üzerine bir projeksiyon ve $f: C \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu Fréchet diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. f'nin gradientini ∇f ile gösterelim. [4]'de (2.1) probleminin, C üzerinde

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \;, \forall x \in C$$

şeklinde bir varyasyonel eşitsizlik problemi olarak formüle edilebileceği gösterilmiştir. Bu varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümlerinin, aynı zamanda $x^* = P_C\big(x^* - \gamma \nabla f(x^*)\big), \gamma > 0$ eşitliğinin de çözümleri oluşu gerçeği, konveks minimizasyon problemine sabit nokta algoritmaları ile yaklaşma fikrini doğurmuştur.

x_0, C'den alınan keyfi bir başlangıç noktası ve $\gamma, \gamma_n \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = P_C\big(x_n - \gamma \nabla f(x_n)\big) \;, n = 0,1,2 \ldots \tag{2.2}$$

daha genel olarak,

$$x_{n+1} = P_C(I - \gamma_n \nabla f)(x_n) = P_C\big(x_n - \gamma_n \nabla f(x_n)\big) \tag{2.3}$$

dizisine Gradient Projeksiyon Algoritması (GPA) denir.

Levitin ve Polyak [5], (2.2) ve (2.3) algoritmalarının yakınsaklığının ∇f'nin özelliklerine bağlı olduğunu gösterdiler. Daha açık bir ifadeyle, ∇f kuvvetli monoton ise, yani her $x, y \in H$ için,

$$\langle x - y, \nabla f(x) - \nabla f(y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir β >0 varsa ve aynı zamanda ∇f, $L-$Lipschitzan dönüşüm ise bu durumda $0 < \gamma < \frac{2\beta}{L^2}$ koşulunu sağlayan γ' lar için $T := P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)$ dönüşümünün bir daraltan dönüşüm olduğunu ifade ettiler. Böylece, (2.3)'deki $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$0 < \lim_{n\to\infty} \inf\gamma_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\gamma_n < \frac{2\beta}{L^2}$

şeklinde seçildiğinde, Banach Contraction teoreminden (2.2) ve (2.3) algoritmaları (2.1)'in bir tek çözümüne kuvvetli yakınsar, yani bir tek $x^* \in S$ için

$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = 0$'dır.

Diğer yandan ∇f kuvvetli monoton değilse bu durumda, GPA algoritması (2.1) probleminin bir çözümüne kuvvetli yakınsamayabilir. Fakat, ∇f, $L-$Lipschitzian bir dönüşüm ise (2.2) ve (2.3) ile verilen GPA algoritmaları (2.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsak olabilir. Levitin ve Polyak, [5]'de ∇f gradienti $L-$Lipschitzian olan fakat kuvvetli monoton olmayan konveks $f: C \to \mathbb{R}$ dönüşümü için,

$0 < \lim_{n\to\infty} \inf\gamma_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\gamma_n < \frac{2}{L}$

şartı altında (2.3) ile verilen GPA'nın (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

2011'de Xu [1], Levitin ve Polyak'ın 1966 yılında ispatladığı bu teoremi, ortalı dönüşümler adındaki yeni bir yaklaşımla ispatladı. Xu'nun bu yaklaşımı birçok araştırmacının dikkatini çekti ve bu yaklaşım birçok makalede kullanıldı [6-11].

Diğer yandan, son zamanlarda GPA, yoğunluğu modüle edilmiş radyasyon terapisi ve görüntü yenileme alanlarında kullanılan SFP'de çeşitli uygulamalar bulmuştur [12-19]. SFP, sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında Censor ve Elfving [12] tarafından medikal görüntüleri yeniden yapılandırma, faz alımlarından ortaya çıkan ters problemleri modellemek için tanıtıldı. SFP'nin bir minimizasyon problemi olarak ifade edilebilmesi, konveks minimizasyon problemini çözen çeşitli GPA algoritmalarının SFP'ye uygulanabilmesine imkân tanımıştır [20-23].

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. (Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$\boldsymbol{M_1}$. $d(x,y) \geq 0$ (Pozitif tanımlılık),

$\boldsymbol{M_2}$. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$,

$\boldsymbol{M_3}$. $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetriklik),

$\boldsymbol{M_4}$. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [24].

Tanım 3.2. (Cauchy Dizisi) $X = (X,d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [24].

Tanım 3.3. (Yakınsak Dizi) $X = (X,d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, yani $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $n \geq n_0$ şartını sağlayan her n için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$'e yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir. [24].

Tanım 3.4. (Tam Metrik Uzay) $X = (X,d)$ bir metrik uzay olsun. X'deki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [25].

Tanım 3.5. (Açık Yuvar) $X = (X,d)$ bir metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere, $B(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir [26].

Tanım 3.6. (Kapalı Yuvar) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere, $\overline{B(x_0\,, r)} = \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir [26].

Tanım 3.7. (İç nokta) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $x \in A$ için $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa x'e A'nın bir iç noktası denir. A'nın tüm iç noktalarının kümesi A^o ile gösterilir [27].

Tanım 3.8. (Açık Küme) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall x \in X$ için $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A'ya açık küme denir. A açık ise $A = A^o$ olduğu aşikardır [27].

Tanım 3.9. (Yığılma noktası) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall r > 0$ için $(B(x_0, r)\backslash\{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x_0'a A'nın bir yığılma noktası denir. A'nın bütün yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir [27].

Tanım 3.10. (Kapanış) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \cup A'$ kümesine A'nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir [28].

Tanım 3.11. (Kapalı Küme) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\bar{A} = A$ ise A'ya kapalı küme denir [28].

Tanım 3.12. (Bir kümenin Sınırı) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\bar{A}\backslash A^o$ kümesine A'nın sınırı denir ve σA ile gösterilir [29].

Tanım 3.13. (Sürekli Dönüşüm) (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $T: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa T'ye x_0 noktasında süreklidir denir. T, X'in her noktasında sürekli ise T'ye X'de süreklidir denir. Burada δ sayısı

hem verilen x_0 noktasına hem de ε sayısına bağlıdır. Başka bir deyişle ε sabit kalsa bile x_0 noktası değişince δ sayısı da değişebilir [28].
Eğer $\delta > 0$ sayısı yalnızca verilen ε sayısına bağlı ise T'ye düzgün süreklidir denir.

Tanım 3.14. (Lineer Uzay) X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olsun.
$+: X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathcal{F} \times X \to X$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X'ye $\mathcal{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A. X, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani;

$\boldsymbol{G_1}$. Her $x, y \in X$ için $x + y \in X$'dir,

$\boldsymbol{G_2}$. Her $x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$'dir,

$\boldsymbol{G_3}$. Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,

$\boldsymbol{G_4}$. Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır,

$\boldsymbol{G_5}$. Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x$'dir.

B. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in X$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

$\boldsymbol{L_1}$. $\alpha . x \in X$'dir,

$\boldsymbol{L_2}$. $\alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$'dir,

$\boldsymbol{L_3}$. $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$'dir,

$\boldsymbol{L_4}$. $(\alpha . \beta). x = \alpha .(\beta . x)$'dir,

$\boldsymbol{L_5}$. $1. x = x$'dir. (Burada 1, $\mathcal{F}$'nin birim elemanıdır.

$\mathcal{F} = \mathbb{R}$ ise X'e reel lineer uzay, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ ise X'e kompleks lineer uzay adı verilir [30].

Tanım 3.15. (Konveks Küme) X bir lineer uzay ve $A \subset X$olsun. $\forall x, y \in A$ için $B = \{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha) y \, , 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$ ise A kümesine konvekstir denir [31].

Tanım 3.16. (Konveks Dönüşüm) X bir lineer uzay ve $f: X \to (-\infty, \infty)$ olsun.
$\forall\, x, y \in X,\ \lambda \epsilon [0,1]$ için $f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye konveks dönüşüm denir [32].

Tanım 3.17. (Normlu uzay) X, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere, $\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için

N_1. $\|x\| \geq 0$,

N_2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

N_3. $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$,

N_4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [33].

X üzerindeki bir norm, her $x, y \in X$ için X üzerinde $d(x,y) = \|x - y\|$ ile verilen metriği tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir. Bu da her normlu uzayın bir metrik uzay olduğunu gösterir [34].

Tanım 3.18. (Banach Uzayı) X bir normlu lineer uzay olsun. X, her $x, y \in X$ için $d(x,y) = \|x - y\|$ ile verilen norm metriğine göre tam ise X'e bir Banach uzayı denir. X'in cisminin reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [35].

Tanım 1.19. (İç Çarpım Fonksiyonu) X bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için $\langle\, ,\rangle : X \times X \rightarrow \mathcal{F}$ fonksiyonu,

i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$'dır. Ayrıca, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (Burada θ, $\mathcal{F}$ cisminin birim elemanıdır.)

şartlarını sağlıyorsa $\langle\, ,\rangle$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir. $(X, \langle\, ,\rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir [27].

X üzerindeki bir iç çarpım, X üzerinde her $x, y \in X$ için $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ile verilen bir norm tanımlar. Bu norma iç çarpım tarafından üretilen norm denir. Bu durumda bir iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır [27].

Tanım 3.20. (Hilbert Uzayı) Bir X iç çarpım uzayı

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

normuna göre tam ise X'e Hilbert uzayı denir [27].

Tanım 3.21. (Schwarz Eşitsizliği) X bir iç çarpım uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ için,

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$'dir [28].

Örnek 3.1. $\mathcal{F}$ cismi reel veya komleks sayılar olmak üzere

$l^2 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) : x_i \in \mathcal{F}$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ olsun.

l^2 kümesi her $x, y \in l^2$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ için,

$x + y = (x_i + y_i),\ \alpha x = (\alpha x_i)$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır.
l^2 lineer uzayı her $x, y \in l^2$ için,

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \bar{y}_i$

şeklinde tanımlan fonksiyon ile bir iç çarpım uzayıdır. Şimdi l^2'nin iç çarpımdan elde edilen,

$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$

normuna göre tam olduğunu gösterebiliriz.
$x_m = (x_0^m, x_1^m, x_2^m, \cdots)$ olmak üzere $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi l^2'da keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > m_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^2\right)^{1/2} < \varepsilon \qquad (3.1)$$

olacak şekilde m_0 sayısı vardır. Buradan anlaşılır ki $i = 0,1,2,\cdots$ için ve $m, n > m_0$ için $|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon$'dır.

Demek ki keyfi fakat sabit her bir i için $(x_i^0, x_i^1, x_i^2, \cdots,)$ dizisi $\mathcal{F}$'de bir Cauchy dizisidir. $\mathcal{F}$ tam olduğundan bu Cauchy dizisi yakınsaktır. $m \to \infty$ için $x_i^m \to x_i$ olsun. Her i için bu diziler yardımıyla teşkil ettiğimiz diziyi x ile gösterelim. Yani, $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ olsun. Şimdi $x_m \to x$ ve $x \in l^2$ olduğunu göstereceğiz.

$p = 0,1,2,\cdots$ için yukarıdaki (3.1) eşitsizliğinden dolayı,

$\sum_{i=0}^{p} |x_i^m - x_i^n|^2 < \varepsilon^2$ yazılabilir. $n \to \infty$ için buradan,

$\sum_{i=0}^{p} |x_i^m - x_i|^2 \leq \varepsilon^2, \; m > m_0$, $p = 1,2,\cdots$ bulunur.

Buradan da $p \to \infty$ için,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^m - x_i|^2 \leq \varepsilon^2 \tag{3.2}$$

elde edilir.

Bu da gösterir ki $x_m - x \in l^2$'dir. $x_m \in l^2$ olduğundan bunların toplamı da $x = x_m + (x_m - x) \in l^2$'dir.

(3.1) eşitsizliğinde dikkat edilirse (3.2) eşitsizliğinin sol tarafı $\|x_m - x\|_2^2$'dir. O halde $x_m \to x$'dir. $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ keyfi olduğundan l^2 tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır.

Tanım 3.22. (Operatör) X_1 ve X_2 lineer uzaylar olsun. $T: X_1 \to X_2$ dönüşümüne bir operatör denir [24].

Tanım 3.23. (Lineer Operatör) X_1 ve X_2 aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Bir $T: X_1 \to X_2$ operatörü her $x, y \in X_1$ ve $a, b \in \mathcal{F}$ için,

$$T(ax + by) = aTx + bTy$$

şartını sağlıyorsa T'ye lineer operatör denir [24].

Tanım 3.24. (Sınırlı Lineer Operatör) X_1 ve X_2 birer normlu uzay, $T: X_1 \to X_2$ bir lineer operatör olsun. $\forall x \in X_1$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ reel sayısı varsa T'ye sınırlı lineer operatör denir [24].

Tanım 3.25. (Normlu Uzaylarda Zayıf Yakınsaklık) X bir normlu uzay olsun. $X' = \{f : f: X \to \mathcal{F}, f \text{ sınırlı ve lineer}\}$ olmak üzere $\forall f \in X'$ için $f(x_n) \to f(x)$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \rightharpoonup x$ ile gösterilir.
Normlu uzaylarda, $x_n \to x$ ifadesi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin x'e güçlü yakınsadığı anlamında kullanılır.

Tanım 3.26. (Hilbert Uzaylarında Zayıf Yakınsaklık) H bir Hilbert uzayı, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, H'de bir dizi ve $x \in H$ olsun. Eğer $\forall y \in H$ için $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsaktır denir [32].

Uyarı 3.1.

i) X sonlu boyutlu bir normlu uzay olsun. Bu takdirde zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığa denktir,

ii) Eğer $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e kuvvetli yakınsak ise bu takdirde bu dizi x'e zayıf yakınsaktır [24].

Örnek 3.2. $L^2[0,2\pi]$, $[0,2\pi]$ aralığı üzerinde karesi integrallenebilen fonksiyonların uzayı olsun. $L^2[0,2\pi] = \left\{f: [0,2\pi] \to \mathbb{R} : \int_0^{2\pi} f^2(x)dx < \infty\right\}$ üzerinde,
$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ iç çarpımı tanımlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \sin(nx)$ ile tanımlı $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisini düşünelim. $[0,2\pi]$ üzerinde karesi integrallenebilen herhangi bir g fonksiyonu için $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\, g(x)dx$ dizisi 0'a gittiği için, $f_n(x) = \sin(nx)$ dizisi 0'a zayıf yakınsar. Yani, $\langle f_n, g\rangle \to \langle 0, g\rangle = 0$ dır [32].

Tanım 3.27. (Bessel Eşitsizliği) H bir Hilbert uzayı olsun. $\forall x \in H$ için,

$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$'dir [26].

Örnek 3.3. l^2 dizi uzayında aşağıdaki gibi tanımlanan $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım.

$e_0 = (0,0,0,0,\cdots)$

$e_1 = (1,0,0,0,\cdots)$

$e_2 = (0,1,0,0,0,\cdots)$

$e_3 = (0,0,1,0,0,0,\cdots)$

$\vdots \;=\; \vdots$

$$e_n = \left(0,0,0,\cdots, \overbrace{1}^{n.bileşen}, 0,0,0,\cdots\right)$$

$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi 0'a güçlü yakınsak olmamasına karşın 0'a zayıf yakınsar. $\forall x \in l^2$ için Bessel eşitsizliğini kullanarak,

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

yazılabilir. $n \to \infty$ için $|\langle e_n, x \rangle|^2 \to 0$ olduğundan $\langle e_n, x \rangle \to 0 = \langle 0, x \rangle$'dır [32].

Teorem 3.1. $1 < p < \infty$ için,

$l_p = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ ve her n için $x_n \in \mathbb{R}\}$ olsun.

l_p'de $x_n = \left(\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \cdots\right)$ dizisini göz önüne alalım. $x = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) \in l_p$ olsun. Bu takdirde $x_n \rightharpoonup x$ olması için gerek ve yeter şartlar,

i) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır, yani her n için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ vardır.

ii) Her bir i için, $n \to \infty$ iken $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$'dir [32].

Tanım 3.28. (Hilbert Eşlenik Operatör) H_1 ve H_2 Hilbert uzay ve $T: H_1 \to H_2$ bir sınırlı lineer operatör olsun. $T^*: H_2 \to H_1$ dönüşümü her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ eşitliğini sağlarsa T^*'a T'nin eşleneği ya da adjointi denir [24].

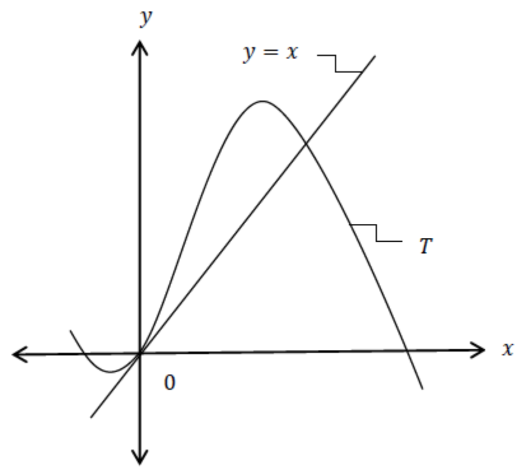
Tanım 3.29. (Sabit Nokta) X boş olmayan bir küme $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$Tx = x \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T'nin sabit noktası denir ve T'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T ile gösterilir [36].

Eğer T dönüşümü $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye ise bu durumda T'nin sabit noktaları, T'ye karşılık gelen grafik ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalardır [36].

(3.3) ile verilen denklem geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir:



Şekil 3.1 İki sabit noktaya sahip bir T fonksiyonu [36].

Örnek 3.4.

1. Eğer $X = \mathbb{R}$, $T: X \to X$ ve $Tx = x.\sin x$ ise, $F_T = \left\{\frac{(4k+1)}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ olur [37].
2. Eğer $X = \mathbb{R}$, $T: X \to X$ ve $Tx = |x|$ ise, $F_T = \{x : x \geq 0\}$ olur.
3. $a \neq 0$ olmak üzere, $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + a$ biçiminde tanımlanan öteleme dönüşümünün sabit noktası yoktur [38].
4. $t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(\lambda, \mu) = (\lambda, -\mu)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için, $\{(\lambda, 0): \lambda \epsilon \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı t için sabit noktadır [39].
5. $0 < \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun tek bir sabit noktası vardır ve o da $(0,0)$'dır [39].

Teorem 3.2. $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde $\exists c \in [a, b]$ vardır [37].

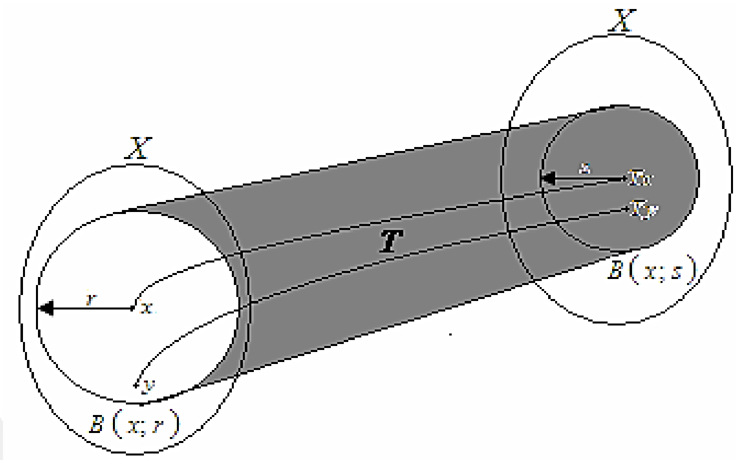
Tanım 3.30. (Lipschitzian Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sabit sayısı varsa T'ye Lipschitzian dönüşüm (veya $L-$ Lipschitzian) denir. Yukarıdaki eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu eşitsizliği sağlayan en küçük L sayısına da Lipschitz sabiti denir [36].

Bir $L-$Lipschitzian dönüşümde $L \in [0,1)$ ise o dönüşüme bir daraltan (contraction) dönüşüm denir. Bu tanım geometrik olarak şöyle yorumlanabilir: Herhangi iki x ve y noktalarının görüntüleri olan Tx ile Ty, x ile y'ye nazaran birbirine daha yakındır. Özel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, $r > s > 0$

olmak üzere, her $x \in X$ ve herhangi bir $r > 0$ için $B(x,r)$ yuvarındaki y noktalarının tümü bir $B(Tx, s)$ yuvarına resmedilir [40].



Şekil 3.2. T bir daraltan dönüşümdür [40].

Bir L −Lipschitzian dönüşümde $L = 1$ ise o dönüşüme genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [32].

Uyarı 3.2. Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için, $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{L} \Longrightarrow\ Ld(x,y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan $d(Tx,Ty) \leq\ Ld(x,y) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Buradan sürekli olmayan bir dönüşümün L −Lipschitzian olamayacağı sonucuna varırız. Ayrıca, her düzgün sürekli dönüşüm de Lipschitz şartını sağlamak zorunda değildir [41].

Uyarı 3.3. Her daraltan dönüşüm için $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \leq d(x,y)$ eşitsizliği gerçeklendiğinden bir daraltan dönüşüm aynı zamanda bir genişlemeyen dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir. Bu daraltan dönüşümler sınıfının genişlemeyen dönüşümlerin sınıfının bir alt kümesi olduğu anlamına gelir [36].

Lemma 3.1. C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \rightarrow C$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda F_T kapalı ve konveks bir kümedir [32].

Örnek 3.5. $X=\mathbb{R}$ ve $d(x,y)=|x-y|$ olmak üzere $T: X \to X$

$Tx = x - \frac{1}{2}\cos x$ dönüşümü bir Lipschitzian dönüşümdür. Gerçekten $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) = |Tx-Ty| &= \left|x - \tfrac{1}{2}\cos x - y + \tfrac{1}{2}\cos y\right| \\ &= \left|x-y+\tfrac{1}{2}(\cos y - \cos x)\right| \le |x-y| + \tfrac{1}{2}|(cosy - cosx)| \\ &= |x-y| + \tfrac{1}{2}\left|-2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \le |x-y| + \left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \\ &\le |x-y| + \tfrac{1}{2}|x-y| = \tfrac{3}{2}|x-y| \end{aligned}$$

olup $L=\frac{3}{2}>0$ sabit sayısı vardır [42].

Örnek 3.6. $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $T: X \to X$, $Tx = 3x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty) = |3x-3y| = 3|x-y| = 3d(x,y)$$

elde edilir. Böylece $L \ge 3$ için T Lipschitz şartını sağlar. T, 3-Lipschitziandır.

Örnek 3.7. $X=\mathbb{R}$ ve $d(x,y)=|x-y|$ ve $T: X \to X$, $T(x)=x-5$ olarak alalım.

$$d(Tx,Ty) = |x-5-y+5| = |x-y| = d(x,y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) \le d(x,y)$ olup T genişlemeyen dönüşümdür.

Örnek 3.8. $X=[0,1]$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun.

$T(x)=\frac{1}{9}(x^3+2x^2-6)$ ile tanımlı $T: X \to \mathbb{R}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \left|\tfrac{1}{9}(x^3+2x^2-6) - \tfrac{1}{9}(y^3+2y^2-6)\right| \\ &= \tfrac{1}{9}|(x^3-y^3) - 2(x^2-y^2)| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{9}|x^3 - y^3| + \frac{2}{9}|x^2 - y^2|$$

$$= \frac{1}{9}|x - y|.|x^2 + xy + y^2| + \frac{2}{9}|x - y|.|x + y|$$

$$\leq \frac{1}{9}|x - y|.3 + \frac{2}{9}|x - y|.2$$

$$= \frac{7}{9}|x - y|$$

olur. Böylece $L = \frac{7}{9}$ alınırsa veya herhangi bir $L \in \left[\frac{7}{9}, 1\right)$ seçimi için T dönüşümünün daraltan dönüşüm olduğu görülür [37].

Örnek 3.9. $T: [0,2] \to [0,2]$, $Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$

olsun. T dönüşümü $x = 1$ de süreksizdir. Bu nedenle T bir Lipschitzian dönüşüm değildir [41].

Tanım 3.31. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi genel olarak

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(T, x_n)\,; \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

bağıntısı ile tanımlanır [36].

Literatürde en çok çalışılan iterayon yöntemlerini verelim:

Tanım 3.32. (Picard İterasyonu) (X, d) bir metrik uzay, $K \subset X$ ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere, Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi olarak da adlandırılır [17]. Ayrıca (3.5) Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi sabit noktaya yakınsıyorsa T bir Picard operatörüdür denir [36]. Bir Picard operatörü sürekli olabileceği gibi süreksiz de olabilir. Örneğin, bir daraltan dönüşüm tam metrik uzayda bir Picard operatörüdür. Banach Contraction prensibi olarak bilinen bu teorem sabit nokta teorisindeki en kullanışlı sonuçlardan biridir. Doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde birçok uygulamaya sahip olan bu önemli teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 3.3. (Banach Contraction Prensibi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda,

i. T, X'te bir tek p sabit noktasına sahiptir,

ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 0,1,2,\cdots$ ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi p'ye yakınsar [44].

Örnek 3.10. $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere, $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{5}x$ dönüşümü $\frac{1}{5}$ –daraltandır. T'nin sabit noktası 0'dır. $x_0 = \frac{1}{10}$ başlangıç koşuluyla $x_{n+1} = T^n x_0$ dizisi inşa edelim. $\left(\frac{1}{5.10}, \frac{1}{5^2.10}, \dots, \frac{1}{5^n.10}, \dots\right)$ bu dizinin sabit nokta olan 0'a yakınsadığını kolaylıkla görebiliriz.

Banach contraction teoremi yalnızca bir sabit noktanın varlığını inşa etmekle kalmaz, herhangi bir başlangıç değeri için bu sabit noktayı yaklaşık olarak hesaplamamıza da olanak sağlar.

Diğer yandan tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez.

Örnek 3.11. $X = (0,1]$ olmak üzere, $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım.

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}(x - y)\right| \leq \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y)$$

olup $L = \frac{1}{2} \in [0, 1)$ olduğundan bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür. Fakat,

$Tx = \frac{x}{2} = x \Longrightarrow 2x - x = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (0,1]$'dır. Bu da T dönüşümünün X kümesi üzerinde bir sabit noktası olmadığı anlamına gelir.

Uyarı 3.4. $X = [a,b]$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve $\forall x \in (a,b)$ için,

$|T'x| \leq k < 1$

ise, T'nin tek bir sabit noktası vardır. Gerçekten de Ortalama değer teoreminden, $\forall x,y \in [a,b]$ için,

$|Tx - Ty| = |T'(c).(x-y)| \leq k|x-y|$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır. Buradan T'nin bir daraltan dönüşüm olduğunu görürüz. Böylece Banach contraction prensibi gereğince T'nin bir tek sabit noktası vardır [32].

Picard iterasyonu genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmada başarılı olmayabilir:

Örnek 3.12. $X = [0,1]$ olmak üzere, $T: [0,1] \to [0,1]$, $T(x) = 1 - x$ olsun.

$d(Tx, Ty) = |1 - x + y - 1| = |x - y| = d(x,y)$

olduğundan T genişlemeyen bir dönüşüm ve

$T(x) = 1 - x = x \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \Longrightarrow F_T$'dir.

Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için Picard iterasyonu,

$x_1 = Tx_0 = 1 - a,$

$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = a,$

$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a,$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0$$

şeklinde olup bu ise $(a, 1-a, a, 1-a, \cdots)$ dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz [36]. Dolayısıyla aranan sabit noktayı bulmak için başka iterasyon yöntemlerine ihtiyaç vardır.

Picard iterasyonunun genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamasındaki yetersizliği göz önünde bulunduran Krasnoselskij, Krasnoselskij yöntemini tanımlayarak bu yetersizliği ortadan kaldırmıştır [45].

Tanım 3.33. (Krasnoselskij İterasyonu) $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır [45].

Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir [45].

Örnek 3.13. $X = [0,1]$ olmak üzere, $\forall x \in [0,1]$ için $T: X \to X$, $T(x) = 1 - x$ dönüşümünü ele alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$'dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ noktası için (3.6) Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_0 = a,$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) x_0 + \frac{1}{2} T x_0 = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) x_1 + \frac{1}{2} T x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) x_2 + \frac{1}{2} T x_2 = \frac{1}{2},$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) x_{n-1} + \frac{1}{2} T x_{n-1} = \frac{1}{2},$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

şeklinde olup bu da $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$ dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar [46].

Tanım 3.34. (Mann İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ olmak üzere, Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n \quad , \quad n = 0,1,2, \cdots \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ aralığında bir kontrol dizisidir. Mann iterasyonunda, $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir [47].

Örnek 3.14. $X = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ kümesi üzerinde $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsar.

Tanım 3.35. (Ishikawa İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T y_n, \\ \quad y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \qquad n = 0,1,2, \cdots \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır [48].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ kontrol dizileridir.

(3.8) ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir [48].

Tanım 3.36. (Noor İterasyonu) X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan bir konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, Noor iteasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $[0,1]$ aralığında kontrol dizilerdir. (3.9) ile verilen iterasyonda

$\alpha_n = 1$, $\beta_n = 0$, $\gamma_n = 0$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

$\alpha_n = \lambda$, $\beta_n = 0$, ve $\gamma_n = 0$ alınırsa Krasnoselskij iteraayonuna indirgenir.

$\beta_n = 0$ ve $\gamma_n = 0$ alınırsa Mann iteasyonuna indirgenir.

$\gamma_n = 0$ alınırsa Ishikawa iterasyonuna indirgenir.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde konveks minimizasyon probleminin çözümü için kullanılan gradient projeksiyon algoritması, Xu’nun ortalı dönüşümler yaklaşımı ile ele alınacaktır. Bu yaklaşımın daha iyi anlaşılması için yaklaşımda bahsi geçen kavramları tanımlayalım. Bu bölüm boyunca H bir reel Hilbert uzayını göstersin.

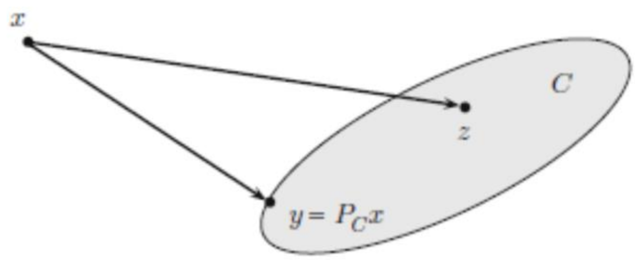
4.1. Projeksiyon Dönüşüm ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. (Metrik Projeksiyon) C, H’nin boştan farklı bir alt kümesi ve $x \in H$ olsun. Eğer $\forall z \in C$ için $\|y - x\| \leq \|z - x\|$ şartını sağlayan bir $y \in C$ varsa y’ye x’in C üzerindeki metrik izdüşümü (metrik projeksiyonu) denir. $y = P_C x$ ile gösterilir. Yani, metrik projeksiyonu H’nin herhangi bir x elemanına C’deki en yakın noktayı bulur.

Eğer $\forall x \in H$ için $P_C x$ var ve tek ise $P_C : H \to C$ operatörüne projeksiyon (metrik izdüşüm operatörü) denir.

Metrik izdüşüm tanımından $\forall x \in C$ için, $P_C x = x$’dir.

Eğer $\forall x \notin C$ için $P_C x$ izdüşümü varsa $P_C x \in \sigma C$’dır.



Şekil 4.1 Metrik Projeksiyon [49].

Örnek 4.1.1. $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olsun. $P_C(-2) = 0$, $P_C(3) = 1$ ve $P_C\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$’dir.

Yani,

$$P_C x = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases} \quad \text{‘dir.}$$

Teorem 4.1.1. C, H’nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in H$ için, $P_C x$ vardır ve tektir (Varlık ve teklik için C’nin kapalı ve konveksliği yeter) [49].

Başka bir deyişle, H’den C üzerine projeksiyon (en yakın nokta, metrik izdüşüm fonksiyonu) her bir $x \in H$ için bir tek $P_C x \in C$ tanımlayan ve aşağıdaki özelliği sağlayan fonksiyondur [28].

$$\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Sonuç 4.1.1. X bir iç çarpım uzayı, C, X’in tam ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda C, normu minimum olan bir vektör içerir [28].

Teorem 4.1.2. C, H’nin kapalı ve konveks alt kümesi $x \in H$ ve $y \in C$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $y = P_C x$,

b) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$’dır [49].

İspat: $\boldsymbol{a}) \Rightarrow \boldsymbol{b})$ **:** $y = P_C x$, $z \in C$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere,

$z_\lambda = y + \lambda(z - y)$ olarak tanımlansın.

C konveks olduğundan $z_\lambda \in C$ olduğu açıktır.

a) şıkkı ve iç çarpım özelliğinden,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - z_\lambda\|^2 \\ &= \|x - y - \lambda(z - y))\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle x - y, z - y\rangle + \lambda^2\|z - y\|^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lambda \in (0,1)$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\langle x - y, z - y\rangle \leq \frac{\lambda}{2}\|z - y\|^2$$

bulunur. Buradan $\lambda \to 0$ için b) şıkkı elde edilir.

$\boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a})$ **:** İç çarpım özelliğinden ve b) kabulünden, herhangi bir $z \in C$ için,

$$\begin{aligned}\|z-x\|^2 &= \|z-y+y-x\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 + \|y-x\|^2 + 2\langle z-y, y-x\rangle \geq \|y-x\|^2\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlik ve projeksiyon tanımından,

$\|y-x\|^2 \leq \|z-x\|^2$ yani, $y = P_C x$ olduğu elde edilir.

Lemma 4.1.1. $x, y, z \in H$ alalım. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$,

b) $\langle z-x, y-x\rangle \geq \|y-x\|^2$,

c) $\|z-y\|^2 = \|z-x\|^2 - \|y-x\|^2$,

d) $\langle z-x, z-y\rangle \geq 0$’dır [49].

Teorem 4.1.3. C, H’nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $\forall z \in C$ için aşağıdakiler denktir.

a) $y = P_C x$,

b) $\langle y, z-y\rangle \geq \langle x, z-y\rangle$’dır [49].

Sonuç 4.1.2. C, H’nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $P_C: H \to C$ projeksiyon dönüşümü nonexpansie dönüşümdür [49].

İspat: $x, x^* \in H$, $y = P_C x$, $y^* = P_C x^*$ olsun. Teorem 4.1.3.’den,

$$\langle y, z-y\rangle \geq \langle x, z-y\rangle \tag{4.1}$$

$$\langle y^*, z-y^*\rangle \geq \langle x^*, z-y^*\rangle \tag{4.2}$$

(4.1)’da $z = y^*$, (4.2)’de $z = y$ alıp taraf tarafa toplayıp ardından Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|P_C x - P_C x^*\|^2 = \|y-y^*\|^2 &= \langle y-y^*, y-y^*\rangle \leq \langle x-x^*, y-y^*\rangle \\ &\leq \|x-x^*\|\|y-y^*\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\|y - y^*\| \leq \|x - x^*\|$ yani $\|P_C x - P_C x^*\| \leq \|x - x^*\|$ olur.

Önerme 4.1.1. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) $\|x - P_C x\| = d(x, C)$,

b) $\forall y \in C$ için $\langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \geq 0$'dır [50].

4.2. Bazı Özel Dönüşümler

T lineer olmayan bir dönüşüm olsun. $D(T)$, T'nin tanım kümesi, $R(T)$ de T'nin değer kümesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki tanımları verebiliriz:

Tanım 4.2.1. (Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$ için,

$$\langle T\,x - Ty, x - y \rangle \geq 0$$

ise T'ye monoton dönüşüm denir [51].

Örnek 4.2.1. $H = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $T\,x = \frac{x+2}{3}$ olarak alalım. T monotondur. Çünkü;

$$\langle T\,x - T\,y, x - y \rangle = \langle \frac{x+2}{3} - \frac{y+2}{3}, x - y \rangle = \frac{x+2-y-2}{3}.(x - y) = \left(\frac{x-y}{3}\right)^2 \geq 0$$

olur.

Tanım 4.2.2. (Kesin Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$, $x \neq y$ için,

$$\langle T\,x - Ty, x - y \rangle > 0$$

ise T'ye kesin monoton (strictly monotone) dönüşüm denir [32].

Örnek 4.2.2. $H = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $T\,x = \frac{x+2}{3}$ olarak alalım. T kesin monotondur.

Tanım 4.2.3. (β-kuvvetli Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$, $x \neq y$ için,

$$\langle T\,x - Ty, x - y\,\rangle \geq \beta \|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı varsa T'ye $\beta-$ kuvvetli monoton (β −strongly monotone) dönüşüm denir [51].

Örnek 4.2.3. $H = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $T\,x = 7x$ olarak alalım.

$$(T\,x - T\,y)(x - y) = (7x - 7y)(x - y) = 7(x - y)^2$$

olduğundan, $\forall\, x, y \in C$ için, $(T\,x - T\,y)(x - y) = 7(x - y)^2$'dir. O halde T, $7-$ kuvvetli monotondur.

Tanım 4.2.4. (v -ters Kuvvetli Monoton Dönüşüm) $\forall\, x, y \in D(T)$ için,

$$\langle T\,x - Ty, x - y\,\rangle \geq v\|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $v > 0$ sayısı varsa T'ye $v-$ ters kuvvetli monoton (v −inverse strongly monotone) dönüşüm denir [51]. Bu ifade $v-$ tkm şeklinde kısaltılacaktır.

Örnek 4.2.4. $H = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ olmak üzere, $T: [0,1] \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $T\,x = 2x + 3$ olarak alalım.

$$\langle T\,x - T\,y, x - y\rangle = \langle 2\,x + 3 - 2\,y - 3, x - y\rangle = 2(x - y)^2 \geq 4v(x - y)^2$$

eşitsizliği $v = \frac{1}{2}$ için sağlanır. O halde T, $v = \frac{1}{2}-$ ters kuvvetli monotondur.

Önerme 4.2.1. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi ve $\varphi: C \to H$ bir $v-$ tkm olsun. $0 < s < 2v$ için $I - s\,\varphi$ bir genişlemeyen dönüşümdür [52].

İspat: Her $\forall\, x, y \in C$ için,

$$\|(I - s\,\varphi)x - (I - s\,\varphi)y\|^2 = \|x - y\|^2 - 2s\langle \varphi x - \varphi y, x - y\rangle + s^2\|\varphi x - \varphi y\|^2$$

$$\leq \|x-y\|^2 - 2sv\|\varphi x - \varphi y\|^2 + s^2\|\varphi x - \varphi y\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 - s(2v-s)\|\varphi x - \varphi y\|^2$$

$$\leq \|x-y\|^2$$

olduğundan, $I - s\,\varphi$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

Tanım 4.2.5. (Firmly Genişlemeyen Dönüşüm) $T: H \to H$ bir dönüşüm olsun. Eğer $2T - I$ dönüşümü genişlemeyen dönüşüm ise veya denk olarak her $x, y \in H$ için,

$$\langle x-y, Tx-Ty\rangle \geq \|Tx-Ty\|^2$$

oluyorsa T firmly genişlemeyen dönüşümdür denir. Eğer T firmly genişlemeyen dönüşüm ise $T = \frac{1}{2}(I+S)$ olacak şekilde $S: H \to H$ bir genişlemeyen dönüşümü vardır [1]. Çünkü,

$T = \frac{1}{2}(I+S) \Rightarrow 2T - I = S$'dır.

Örnek 4.2.5. Projeksiyon dönüşümler firmly genişlemeyen dönüşümdür [50]. Gerçekten, $\forall x, y \in H$ için,

$$\langle x-y, P_Cx-P_Cy\rangle = \langle x-P_Cx, P_Cx-P_Cy\rangle + \langle P_Cx-P_Cy, P_Cx-P_Cy\rangle + \langle P_Cy-y, P_Cx-P_Cy\rangle$$

yazabiriz. Önerme 4.1.1.'den,

$\langle x-P_Cx, P_Cx-P_Cy\rangle \geq 0$ ve $\langle P_Cy-y, P_Cx-P_Cy\rangle \geq 0$'dır. Böylece,

$$\langle x-y, P_Cx-P_Cy\rangle \geq \langle P_Cx-P_Cy, P_Cx-P_Cy\rangle = \|P_Cx-P_Cy\|^2$$

olur.

Tanım 4.2.6. (α −Ortalı Dönüşüm) $T: H \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü, I özdeş dönüşüm ve bir genişlemeyen dönüşümün ortalaması olarak yazılabilirse yani, $\alpha \in (0,1)$, $S: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşüm olmak üzere,
$T = (1-\alpha)I + \alpha S$

şeklinde yazılabilirse T'ye $\alpha -$ ortalı dönüşüm denir [1].

Örnek 4.2.6. C, H'nin kapalı ve konveks alt kümesi, P_C firmly genişlemeyen dönüşüm olduğundan,

$P_C = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S = \left(1 - \frac{1}{2}\right)I + \frac{1}{2}S$ olup P_C, $\frac{1}{2} -$ ortalı dönüşümdür [1].

Önerme 4.2.2. $S: H \rightarrow H$, $T: H \rightarrow H$, $V: H \rightarrow H$ dönüşümleri için,

- **a)** $T = (1-\alpha)S + \alpha V$, $\alpha \in (0,1)$ ve S ortalı ve V genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda T ortalı dönüşümdür.
- **b)** T firmly genişlemeyen dönüşümdür $\Leftrightarrow I - T$ bir genişlemeyen dönüşümdür.
- **c)** $T = (1-\alpha)S + \alpha V$, $\alpha \in (0,1)$, S firmly genişlemeyen dönüşüm ve V genişlemeyen dönüşüm ise bu durumda T ortalıdır.
- **d)** Sonlu sayıda ortalı dönüşümün bileşkesi de ortalıdır. Özellikle,

T_1, $\alpha_1 -$ ortalı ve T_2, $\alpha_2 -$ ortalı olsun. Bu takdirde,
T_1T_2, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1.\alpha_2$ ortalı olur ([13],[53]).

Uyarı 4.2.1.

- **a)** T genişlemeyen dönüşüm ise, $I - T$ monotondur.
- **b)** P_C projeksiyonu $1 -$ tkm'dir [1].

Önerme 4.2.3.

- **a)** T genişlemeyen dönüşümdür $\Leftrightarrow I - T$, $\frac{1}{2} -$ tkm'dır.
- **b)** T, $v -$ tkm ise $\gamma > 0$ için γT, $\frac{v}{\gamma} -$ tkm'dır.

c) T, ortalıdır $\Leftrightarrow$ $v > \frac{1}{2}$ için $I - T$, $v -$ tkm'dir. Gerçekten de her $\alpha \in (0,1)$ için T, $\alpha -$ ortalıdır $\Leftrightarrow I - T, \frac{1}{2\alpha} -$ tkm'dir ([13],[54]).

4.3. Varyasyonel Eşitsizlik Problemi ve Sabit Nokta Denklemi Olarak Yazılması

Tanım 4.3.1. (Varyasyonel Eşitsizlik Problemi) C, H'nin boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $F: C \to H$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in C$ için, $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ olacak şekilde bir $x^* \in C$ bulma problemine varyasyonel eşitsizlik problemi denir ve $VI(F, C)$ ile gösterilir.

Örnek 4.3.1. $C = [0,1]$ olmak üzere, $F: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $F(x) = 5x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için,

$$F(x^*)(x - x^*) = 5x^*(x - x^*) \geq 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin çözümü $x^* = 0$ noktasıdır.

Teorem 4.3.1. C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x^* \in C$, $VI(F, C)$'nin bir çözümüdür ancak ve ancak herhangi bir $\lambda > 0$ için $P_C(I - \lambda F)$'nin bir sabit noktasıdır. Yani,

$x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*))$'dir.

İspat: x^*, $VI(F, C)$'nin bir çözümü olsun. Yani, $\forall x \in C$ için,
$\langle Fx^*, x - x^* \rangle \geq 0$ olsun. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $-\lambda < 0$ ile çarparak ve her iki tarafına $\langle x^*, x - x^* \rangle$ ekleyerek,

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \lambda F(x^*), x - x^* \rangle, \forall x \in C$$

elde edilir. Teorem 4.1.3.'den $x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*))$ olduğu görülür. Tersine $\lambda > 0$ için, $x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*))$ olsun. Bu durumda,

$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \lambda F(x^*), x - x^* \rangle, \ \forall x \in C$

olur. Buradan da $\forall y \in C$ için $\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$ olduğu elde edilir.

Teorem 4.3.2. $F,\ C$ üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olsun. Bu durumda $VI(C, F)$'nin bir çözümü varsa tektir [50].

İspat: x_1 ve x_2 birbirinden farklı iki çözüm olsun. Bu durumda her $x \in C$ için x_1 ve x_2 sırasıyla,

$$\langle F(x_1), x - x_1 \rangle \geq 0 \tag{4.3}$$

ve

$$\langle F(x_2), x - x_2 \rangle \geq 0 \tag{4.4}$$

eşitsizliklerini sağlar. (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinde x yerine sırasıyla x_2 ve x_1 yazılırsa,

$\langle F(x_1) - F(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$

elde edilir. Fakat bu eşitsizlik kesin monotonluk tanımıyla çelişir. Dolayısıyla $x_1 = x_2$'dir.

4.4. Minimizasyon Probleminin Sabit Nokta Denklemi Olarak İfade Edilmesi

Bu bölümde, (2.1) minimizasyon probleminin varyasyonel eşitsizlik yardımıyla bir sabit nokta denklemi olarak yazılabileceğini gösterelim.

Tanım 4.4.1. (Fréchet Diferansiyellenebilme) $f: H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\lim_{\|y\| \to 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - \langle y, j \rangle|}{\|y\|} = 0$$

olacak şekilde $j \in H$ varsa j elemanı f'nin x'teki Fréchet diferansiyeli olan ∇f olarak tanımlanır [32].

Uyarı 4.4.1. Eğer $H = \mathbb{R}$ ise bu durumda Fréchet türevi klasik

$f'(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$

türevidir.

Örnek 4.4.1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümü $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ olsun. Bu durumda f'nin Fréchet türevi,

$\nabla f = (2x_1, 2x_2)$ olarak bulunur.

Önerme 4.4.1. C kümesi, bir X iç çarpım uzayının konveks bir alt kümesi olsun ve $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x, y \in C$ için, f konvekstir ancak ve ancak $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$'dir [50].

Önerme 4.4.2. (2.1) minimizasyon probleminin en az bir çözümü olsun. $x^* \in C$ ve $\gamma > 0$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

i) x^*, (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüdür.

ii) x^*, aynı zamanda aşağıdaki varyasyonel eşitsizlik probleminin de bir çözümüdür:

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ , \forall x \in C$$

Yani, x^*, $VI(\nabla f, C)$'nin bir çözümüdür.

iii) $P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f): C \to C$ dönüşümünün sabit noktası x^*'dır, yani

$$x^* = P_C\left(x^* - \gamma \nabla f(x^*)\right)$$

dir [50].

İspat: Önce i) ve ii)'nin birbirine denk olduğunu gösterelim. x^* minimizasyon probleminin bir çözümü olsun. Her $t \in [0,1]$ için, $g(t) = f(x^* + t(x - x^*))$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. $g(t)$ fonksiyonu $t = 0$ da minimum değerini alır. Bu durumda, $g'(0) \geq 0$'dır. $g'(0) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$ olduğundan $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$'dır. Yani, x^*, $VI(\nabla f, C)$'nin bir çözümüdür.

Diğer yandan f konveks bir fonksiyon olduğundan Önerme 4.4.1. gereğince her $x \in C$ için,

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

yazarız. $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ olduğu kabulünden $f(x) \geq f(x^*)$ elde edilir. Yani x^*, f fonksiyonunun bir minimum noktasıdır.
ii) ve iii)'nin denkliğini Terorem 4.3.1.'de F yerine ∇f alarak görürüz.

4.5. Gradient Projeksiyon Algoritması

Bu bölümde (2.1) minimizasyon probleminin çözümlerinin kümesi olan S $\emptyset$'den farklı olsun.

Minimizasyon probleminin çözümlerinin $T := P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f)$ dönüşümünün sabit noktaları ile olan ilişkisi, minimizasyon problemini çözmek için, gradient projeksiyon algoritması (GPA) olarak adlandırılan

$$x_{n+1} = P_C\big(x_n - \gamma_n \nabla f(x_n)\big), \; n = 0,1,2,\ldots \tag{4.5}$$

sabit nokta iterasyon yönteminin güçlü bir araç olarak göz önüne alınmasına yol açar. Bu ilişki göz önüne alındığında, $T := P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f)$ dönüşümünün taşıyacağı hangi özelliklere göre bu çözüme nasıl yaklaşılacağını bilmek kıymetlidir.

4.5.1. Minimizasyon Probleminin Çözümüne GPA'nın Güçlü Yakınsaklığı

Önerme 4.5.1.1. $\nabla f,\ L$ −Lipschitzian ve $\beta -$ kuvvetli monoton olsun. $\gamma > 0$ olmak üzere, $T \equiv T_\gamma :\ P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)$ olsun. $0 < \gamma < \frac{2\beta}{L^2}$ için T bir daraltan dönüşümdür. Daha açık bir ifadeyle; $\forall\ x, y\ \in H$ için $\tau = \sqrt{1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)} < 1$ olmak üzere, $\|Tx - Ty\| \leq \tau\|x - y\|$'dır [5].

İspat: $\forall\ x, y\ \in C$ için,

$$\|Tx - Ty\|^2 = \|\ P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)x - \ P_C(\mathrm{I} - \gamma\nabla f)y\|^2$$

$$\leq \|\ (\mathrm{I} - \gamma\nabla f)x - \ (\mathrm{I} - \gamma\nabla f)y\|^2$$

$$\leq \|x - y\|^2 - 2\gamma\langle\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle + \gamma^2\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

$$\leq \|x - y\|^2 - 2\gamma\beta\|x - y\|^2 + \gamma^2L^2\|x - y\|^2$$

$$= \big(1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)\big)\|x - y\|^2$$

olduğundan $T,\ \sqrt{1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)} < 1$ için bir daraltan dönüşüm olur.

Teorem 4.5.1.1. $\nabla f,\ L$ −Lipschitzian ve $\beta -$ kuvvetli monoton olsun. γ_n dizisi için,

$$0 < \lim_{n\to\infty} \inf\gamma_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\gamma_n < \frac{2\beta}{L^2} \tag{4.6}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda, (4.5) ile verilen GPA, minimizasyon probleminin bir tek çözümüne kuvvetli yakınsar [5].

İspat: $\nabla f,\ \beta -$ kuvvetli monoton olduğundan, aynı zamanda kesin monotondur. Teorem 4.3.2. gereğince $VI(\nabla f, C)$'nın çözümü tektir. Önerme 4.4.2. gereğince bu çözüm $T \equiv T_{\gamma_n} :\ P_C(\mathrm{I} - \gamma_n\nabla f)$'nin bir tek sabit noktası olur.

(4.6) varsayımından her $n \geq N$ için,

$0 < \alpha \leq \theta < \frac{2\beta}{L^2}$ ve $\alpha \leq \gamma_n \leq \theta$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır.

$h = \max_{a \leq \gamma \leq b} \sqrt{1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)}$ dersek, $0 \leq h < 1$'dir ve her $n \geq N$ için

$0 \leq \sqrt{1 - \gamma_n(2\beta - \gamma_n L^2)} \leq h$
olur.

Bir önceki önermeden $T \equiv T_{\gamma_n}: P_C(\mathrm{I} - \gamma_n \nabla f)$ bir daraltan dönüşümdür. Banach contraction teoremi gereğince (4.5) ile üretilen GPA, T'nin bir tek sabit noktasına yakınsar.

4.5.2. Minimizasyon Probleminin Çözümüne GPA'nın Zayıf Yakınsaması

Yukarıdaki bilgiler ışığında, eğer ∇f bir Lipschitzian dönüşüm olup fakat β-kuvvetli monoton bir dönüşüm değilse, bu durumda $T \coloneqq P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f)$ dönüşümü her zaman bir daraltan dönüşüm olmaz. Aşağıda uygun şartları taşıyan pozitif γ sayısı ve ∇f dönüşümü için $T \coloneqq P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f)$ dönüşümünün bir genişlemeyen dönüşüm olduğu ifade edilmiştir. Ardından, GPA'nın minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığı Xu'nun ortalı dönüşümler yaklaşımıyla gösterilmiştir.

Önerme 4.5.2.1. $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f Fréchet diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer ∇f bir L -Lipschitzian dönüşüm ise ∇f aynı zamanda $\frac{1}{L} -$ tkm'dir [55].

Sonuç 4.5.2.1. $0 < \gamma < \frac{2}{L}$ olsun. Önerme 4.5.2.1. ve Önerme 4.2.1.'den dolayı $T \coloneqq P_C(\mathrm{I} - \gamma \nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

Lemma 4.5.2.1. $\forall x, y \in H$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{4.7}$$

olur [36].

Lemma 4.5.2.2. (Demiclosedness Prensibi) C, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \to C$ bir genişlemeyen dönüşüm ve $F_T \neq \emptyset$ olsun. Eğer C'de bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x'e zayıf yakınsıyor ve $(I - T)x_n$ bir y'ye güçlü yakınsıyorsa bu takdirde,
$(\mathrm{I} - T)x = y$'dir. Özellikle $y = 0$ ise $x \in F_T$ olur [56].

Lemma 4.5.2.3. $C \subset H$ kapalı ve konveks bir küme olsun ve H'de bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $\forall x \in C$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ mevcuttur,

ii) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin zayıf yakınsak alt dizilerinin limitlerinin kümesi
$w_w(x_n) := \left\{x : \exists x_{n_j} \rightharpoonup x\right\} \subset C$ olsun.

Bu takdirde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi C'de bir noktaya zayıf yakınsar [57].

Teorem 4.5.2.1. (2.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözümü var olsun ve S bu problemin tüm çözümlerinin kümesini göstersin, ∇f Lipschitz şartını sağlasın. $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ parametreler dizisi için $0 < \lim_{n\to\infty} \inf \gamma_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup \gamma_n < \frac{2}{L}$ sağlansın. Bu takdirde GPA algoritması (2.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsar [5].

İspat: Önerme 4.4.2.'den x^*, (2.1) minimizasyon probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak $x^* = P_C\big(x^* - \gamma \nabla f(x^*)\big)$'dır.

$0 < \alpha \leq \gamma_n \leq \theta < \frac{2}{L}$ olduğunu kabul edelim.

∇f, L −Lipschitzian olduğundan her $x, y \in C$ için,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq L^2 \|x - y\|^2$$

dir.

Önerme 4.5.2.1.'den ∇f, $\frac{1}{L}-$ tkm'dır. Önerme 4.2.3. b)'den $\gamma \nabla f$, $\frac{1}{\gamma L}-$ tkm'dır.

Önerme 4.2.3. c)'den $\gamma \nabla f$, $\frac{1}{\gamma L}-$ tkm olduğundan $I - \gamma \nabla f$, $\frac{\gamma L}{2}-$ ortalıdır.

P_C'nin $\frac{1}{2}-$ortalı dönüşüm olduğunu biliyoruz. P_C, $\frac{1}{2}-$ ortalı ve $I - \gamma \nabla f$, $\frac{\gamma L}{2}-$ortalı olduğundan Önerme 4.2.2. d)'yi kullanarak $P_C(I - \gamma \nabla f)$ dönüşümünün

$\frac{1}{2}+\frac{\gamma L}{2}-\frac{\gamma L}{4}=\frac{2+\gamma L}{4}$ ortalı olduğunu elde ederiz. $0<\gamma<\frac{2}{L}$ olmak üzere, $P_C(I-\gamma\nabla f)$ dönüşümü bir ortalı dönüşüm olduğundan,

$$P_C(I-\gamma\nabla f) \ =\left(1-\frac{2+\gamma L}{4}\right)I+\frac{2+\gamma L}{4}\ T$$

olacak şekilde bir $T: H\rightarrow H$ genişlemeyen dönüşüm vardır. Yani, $0<\gamma<\frac{2}{L}$ olmak üzere,

$P_C(I-\gamma\nabla f)=\left(1-\left(\frac{2+\gamma L}{4}\right)\right)I+\frac{2+\gamma L}{4}T$'dır.

Böylece her bir n için T_n dönüşümleri genişlemeyen dönüşüm olmak üzere,

$$P_C(I-\gamma_n\nabla f)=\left(\frac{2-\gamma_n L}{4}\right)I+\frac{2+\gamma_n L}{4}T_n$$

olur. $\alpha_1=\frac{2+\alpha L}{4}$, $\theta_1=\frac{2+\theta L}{4}$, $0<\alpha\leq\gamma_n\leq\theta<\frac{2}{L}$ olmak üzere, $\beta_n=\frac{2+\gamma_n L}{4}$ diyelim. $\beta_n\in[\alpha_1,\theta_1]\subset(0,1)$ dir. Bu durumda,

$$P_C(I-\gamma_n\nabla f)=(1-\beta_n)I+\beta_n T_n \tag{4.8}$$

yazılabilir.

(4.8) kullanılarak, (2.3) ile verilen GPA algoritması aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=P_C(\mathrm{I}-\gamma_n\nabla f)x_n=[(1-\beta_n)I+\beta_n T_n]x_n\\&=(1-\beta_n)I(x_n)+\beta_n T_n(x_n)=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n x_n.\end{aligned}$$

Herhangi bir $x^*\in S$ için $T_n x^*=x^*$'dır.

Şimdi $\{\|x_n-x^*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limitinin mevcut olduğunu gösterelim. Her bir n için T_n dönüşümlerinin genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak, Lemma 4.5.2.1. yardımıyla,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|[(1-\beta_n)I+\beta_n T_n]x_n-x^*\|^2\\&=\|(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n x_n-x^*\|^2\\&=\|(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_n x_n-(1-\beta_n+\beta_n)x^*\|^2\end{aligned}$$

$$= \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n x_n - (1-\beta_n)x^* - \beta_n x^*\|^2$$

$$= \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(T_n x_n - x^*)\|^2$$

$$= (1-\beta_n)\|x_n - x^*\|^2 + \beta_n\|T_n x_n - x^*\|^2$$

$$-\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - T_n x_n\|^2$$

$$= (1-\beta_n)\|x_n - x^*\|^2 + \beta_n\|T_n x_n - T_n x^*\|^2$$

$$-\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - T_n x_n\|^2$$

$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - x^*\|^2 + \beta_n\|x_n - x^*\|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\|x_n - T_n x_n\|^2$$

$$= \|x_n - x^*\|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\|x_n - T_n x_n\|^2 \qquad (4.9)$$

olduğu görülür. (4.9)'dan $\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2$ olduğu elde edilir. Yani, $\{\|x_{n+1} - x^*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi artmayan bir dizidir.

Dolayısıyla $\forall x^* \in S$ için, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|$ limiti mevcuttur. Bu durumda Lemma 4.5.2.3. i) şartı sağlanmış olur.

(4.9)'den,

$$\|(x_n - T_n x_n)\|^2 = \frac{1}{\beta_n(1-\beta_n)}(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2)$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_1(1-\theta_1)}(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2)$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x^*\|^2$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_n x_n\| = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n x_n] - x_n\|$$

$$= \|-\beta_n x_n + \beta_n T_n x_n\| = \beta_n\|x_n - T_n x_n\| < b_1\|x_n - T_n x_n\|$$

eşitsizliği yardımıyla,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = 0 \tag{4.10}$$

elde edilir.

Şimdi, $w_w(x_n) \subset S$ olduğunu gösterelim:

$\hat{x} \in w_w(x_n)$ alalım. Bu durumda, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\hat{x}$'a zayıf yakınsayan bir $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır. $\gamma_{n_j} \to \gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $0 < \gamma < \frac{2}{L}$ 'dir.

$T = P_C(I-\gamma\nabla f)$ diyelim. Sonuç 4.5.2.1.'den T genişlemeyen dönüşümdür. Üçgen eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\right\| &= \left\|x_{n_j} - Tx_{n_j} - x_{n_{j+1}} + x_{n_{j+1}}\right\| \\
&\le \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|x_{n_{j+1}} - Tx_{n_j}\right\| \\
&\le \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|P_C\left(I-\gamma_{n_j}\nabla f\right)x_{n_j} - P_C(I-\gamma\nabla f)x_{n_j}\right\| \\
&\le \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + \left|\gamma_{n_j} - \gamma\right| \left\|\nabla f\left(x_{n_j}\right)\right\| \\
&\le \left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| + M\left|\gamma_{n_j} - \gamma\right| \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.11) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınıp $\lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right\| = 0$ ve $\lim_{j\to\infty}\left|\gamma_{n_j} - \gamma\right| = 0$ olduğu kullanılarak, $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\right\| = 0$ elde edilir.

Demiclosedness prensibinden, $\hat{x} \in F_T$ sonucuna varılır. $F_T = S$ olduğundan, $\hat{x} \in S$'dir. Ayrıca, Lemma 3.1.'den, F_T kapalı ve konveks bir kümedir. $\forall x^* \in S$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|$ limiti mevcuttur ve $w_w(x_n) \subset S$ olduğundan, Lemma 4.5.2.3.'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ S'deki bir noktaya zayıf yakınsar.

4.6. SFP için GPA' nın Uygulanması

C ve Q sırasıyla H_1 ve H_2 Hilbert uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi olsun ve $A: H_1 \to H_2$ sınırlı bir lineer operatör olsun. SFP,

$$x \in C \text{ ve } Ax \in Q \tag{4.12}$$

özelliğini sağlayan bir x noktası bulma problemi olarak formüle edilir. SFP'nin çözümlerinin kümesini $\Gamma = \{x\epsilon C: Ax\epsilon Q\} = C \cap A^{-1}Q$ ile gösterelim. Uygunluk açısından, Γ'nin kapalı ve konveks olduğunu kabul edelim.

Şimdi SFP'ye GPA uygulamak amacıyla SFP'nin bir minimizasyon problemi olarak nasıl ifade edildiğini görelim:
Açıktır ki $x\epsilon\Gamma$ olması, bazı $q \in Q$ için, $Ax - q = 0$ olacak şekilde $x \in C$ olduğu anlamına gelir. Bu da $d(Ax, q) = \|Ax - q\|$ uzaklık fonksiyonunun ve $\min\limits_{x\in C, q\in Q} \frac{1}{2}\|Ax - P_Q Ax\|^2$ minimizasyon probleminin göz önüne alınmasına yol açar.
Eğer $q \in Q$ ya göre minimize edilirse bu durumda,

$$\min_{x\in C} f(x) := \frac{1}{2}\|Ax - P_Q Ax\|^2 \tag{4.13}$$

minimizasyon problemi elde edilir.
f fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilirdir ve $\nabla f x = A^*(I - P_Q)Ax$'dir. $(I - P_Q)$ dönüşümünün firmly genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak, her $x, y \in C$ için $\|\nabla f x - \nabla f y\| \leq \|A\|^2\|x - y\|$ eşitsizliğini elde edilir. Bu eşitsizlikten ∇f'nin bir $\|A\|^2 -$ Lipschitzian dönüşüm olduğu sonucu çıkar [17].
SFP'nin minimizasyon problemi olarak ifade edilebilmesi SFP için GPA'nın kullanılmasına olanak sağlamıştır.

Byrne [13], (4.12) ile verilen SFP'yi çözme amacıyla $0 < \lambda < \frac{2}{\|A\|^2}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan CQ algoritmasını tanımladı:

$$x_{n+1} = P_C\big(I - \lambda A^*(I - P_Q)A\big)x_n,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{4.14}$$

Teorem 4.6.1. SFP'nin çözümlü olduğunu varsayalım. Eğer $0 < \lambda < \frac{2}{\|A\|^2}$ ise (4.14) ile üretilen CQ algoritması SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsar [13].

İspat : $\nabla f = A^*(I - P_Q)A$ dönüşümünün $\|A\|^2$ −Lipschitzian dönüşüm olduğunu göz önüne alarak Teorem 4.5.2.1'den CQ algoritmasının SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsadığını görürüz.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm boyunca H bir reel Hilbert uzayını, C onun kapalı ve konveks bir alt kümesini göstersin. Ayrıca $f: C \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Tezin bu bölümünde, konveks bir $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu minimum yapan değerlere yaklaşmak amacıyla yeni bir gradient projeksiyon algoritmasının zayıf yakınsaklığı incelenecektir. Burada göz önüne alınan fonksiyonun ∇f gradienti $L-$Lipschitzian bir dönüşüm olup kuvvetli monoton olmayan bir dönüşümdür. Önerdiğimiz bu yeni algoritmada, kuvvetli monoton olan bir genişlemeyen dönüşüm yardımıyla varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amacıyla tanımlanan Noor iterasyonu [2] kullanıldı.

Bu yeni gradient projeksiyon algoritması aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n P_C(I - \gamma_n \nabla f) y_n, \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n P_C(I - \gamma_n \nabla f) z_n, \qquad n = 0,1,2,\dots \\ z_n = (1-c_n)x_n + c_n P_C(I - \gamma_n \nabla f) x_n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Bu algoritmanın (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğu Xu'nun ortalı dönüşümler yaklaşımıyla gösterilecektir. Ayrıca sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında örnek vererek, (2.1) algoritmasının zayıf yakınsaklığı açıklanacaktır. Son olarak (2.1) algoritması SFP'ye uygulanacaktır.

Teorem 5.1. (2.1) minimizasyon probleminin çözülebilir ve f'nin ∇f gradientinin $L > 0$ sabiti ile L −Lipschitzian olduğunu varsayalım. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri [0,1] aralığında ve $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\left(0, \frac{2}{L}\right)$ aralığında aşağıdaki şartları sağlayan diziler olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \in C$ ile üretilen (5.1) iterasyon dizisi olsun.

(C1) $b_n(1 + c_n) < \frac{2}{2+\gamma_n L}$,

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < \frac{2}{L}$,

(C3) $0 < \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq 1$.

Bu takdirde, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (2.1) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

İspat: Tezin 4. bölümünde bahsedildidiği üzere $x^* \in C$'nin (2.1) minimizasyon problemini çözmesi için gerek ve yeter şart $\gamma_n > 0$ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere,
$x^* = P_C(x^* - \gamma_n \nabla f(x^*))$ olmasıdır. Xu'nun ortalı dönüşümler yaklaşımıyla her bir n için, T_n genişlemeyen dönüşüm ve $0 < \alpha \leq \gamma_n \leq \theta < \frac{2}{L}$,
$\beta_n = \frac{2+\gamma_n L}{4} \in [\alpha_1, \theta_1] \subset (0,1)$, $\alpha_1 = \frac{2+\alpha L}{4}$, $\theta_1 = \frac{2+\theta L}{4} < 1$ olmak üzere,

$$P_C(I - \gamma_n \nabla f) = (1 - \beta_n)I + \beta_n T_n$$

olduğu 4.bölümde açıklanmıştır. (5.1) iterasyon dizisini Xu'nun yaklaşımıyla,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n[(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n], \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_n[(1 - \beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n], \qquad n = 0,1,2,\ldots \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_n[(1 - \beta_n)x_n + \beta_n T_n x_n] \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde yazabiliriz.
Teorem 4.5.2.1.'den herhangi bir $x^* \in S$ için, $T_n x^* = x^*$ olduğuna dikkat ederek ve her bir n için T_n'in genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\| &= \|(1-a_n)x_n + a_n[(1-\beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n] - x^*\| \\ &\leq (1-a_n)\|x_n - x^*\| + a_n\|(1-\beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n - x^*\| \\ &\leq (1-a_n)\|x_n - x^*\| + a_n(1-\beta_n)\|y_n - x^*\| + a_n\beta_n\|T_n y_n - x^*\| \\ &\leq (1-a_n)\|x_n - x^*\| + a_n(1-\beta_n)\|y_n - x^*\| + a_n\beta_n\|y_n - x^*\| \\ &= (1-a_n)\|x_n - x^*\| + a_n\|y_n - x^*\| \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\|y_n - x^*\| &= \|(1-b_n)x_n + b_n[(1-\beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n] - x^*\| \\ &\leq (1-b_n)\|x_n - x^*\| + b_n\|(1-\beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n - x^*\| \\ &\leq (1-b_n)\|x_n - x^*\| + b_n(1-\beta_n)\|z_n - x^*\| + b_n\beta_n\|T_n z_n - x^*\| \\ &\leq (1-b_n)\|x_n - x^*\| + b_n(1-\beta_n)\|z_n - x^*\| + b_n\beta_n\|z_n - x^*\| \\ &= (1-b_n)\|x_n - x^*\| + b_n\|z_n - x^*\| \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\|z_n - x^*\| &= \|(1-c_n)x_n + c_n[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n x_n] - x^*\| \\ &= \|(1-c_n\beta_n)x_n + c_n\beta_n T_n x_n - x^*\| \\ &\leq (1-c_n\beta_n)\|x_n - x^*\| + c_n\beta_n\|T_n x_n - x^*\| \\ &\leq (1-c_n\beta_n)\|x_n - x^*\| + c_n\beta_n\|x_n - x^*\| \\ &= \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitsizlikleri elde edilir.
(5.5)’ü (5.4)’de yerine yazarak,

$$\|y_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| \tag{5.6}$$

eşitsizliği elde edilir.
(5.6)’yı (5.3)’de kullanarak,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| \tag{5.7}$$

eşitsizliğini buluruz.

Buradan $\{\|x_{n+1}-x^*\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sınırlı ve artmayan bir dizidir. Dolayısıyla, $\forall x^* \in S$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x^*\|$ mevcuttur. (5.8)

Şimdi $\{\|x_n - T_n x_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limitini araştıralım. Her bir n için T_n'in genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned}\|x_n - T_n x_n\| &\le \|T_n x_n - T_n y_n\| + \|T_n y_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| \\ &\le 2\|y_n - x_n\| + \|T_n y_n - y_n\| \qquad (5.9)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, her bir n için,

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &= \|(1-b_n)x_n + b_n[(1-\beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n] - x_n\| \\ &= b_n\|x_n - (1-\beta_n)z_n - \beta_n T_n z_n\| \\ &\le b_n(1-\beta_n)\|x_n - z_n\| + b_n\beta_n\|T_n z_n - x_n\| \qquad (5.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_n - z_n\| &= \|x_n - [(1-c_n\beta_n)x_n + c_n\beta_n T_n x_n]\| \\ &= c_n\beta_n\|x_n - T_n x_n\| \qquad (5.11)\end{aligned}$$

$$\|T_n z_n - x_n\| \le \|T_n z_n - z_n\| + \|z_n - x_n\| \qquad (5.12)$$

ve

$$\begin{aligned}\|T_n z_n - z_n\| &= \|T_n z_n - (1-c_n\beta_n)x_n - c_n\beta_n T_n x_n\| \\ &\le (1-c_n\beta_n)\|T_n z_n - x_n\| + c_n\beta_n\|x_n - z_n\| \qquad (5.13)\end{aligned}$$

dır.

(5.13) ve (5.11)'i, (5.12) eşitsizliğinde yerine koyarsak,

$$\|T_n z_n - x_n\| \le (1+c_n\beta_n)\|x_n - T_n x_n\| \qquad (5.14)$$

olduğu görülür.

(5.14) ve (5.11) eşitsizlikleri (5.10)'da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &\le b_n(1-\beta_n)c_n\beta_n\|x_n - T_n x_n\| + b_n\beta_n(1+c_n\beta_n)\|x_n - T_n x_n\| \\ &= (b_n - b_n\beta_n)c_n\beta_n\|x_n - T_n x_n\| + (b_n\beta_n + b_n c_n{\beta_n}^2)\|x_n - T_n x_n\|\end{aligned}$$

$$= \left(\left[b_n c_n \beta_n - b_n c_n {\beta_n}^2\right] + \left[b_n \beta_n + b_n c_n {\beta_n}^2\right]\right)\|x_n - T_n x_n\|$$

$$= [b_n c_n \beta_n + b_n \beta_n]\|x_n - T_n x_n\|$$

$$= b_n \beta_n (1 + c_n)\|x_n - T_n x_n\| \tag{5.15}$$

elde edilir.

(5.15)'i (5.9)'da yerine koyarak,

$$\|x_n - T_n x_n\| \leq 2 b_n \beta_n (1 + c_n)\|x_n - T_n x_n\| + \|T_n y_n - y_n\|,$$

$$\Rightarrow [1 - 2 b_n \beta_n (1 + c_n)]\|x_n - T_n x_n\| \leq \|T_n y_n - y_n\|$$

$$\Rightarrow \|x_n - T_n x_n\| \leq \frac{1}{1 - 2 b_n \beta_n (1 + c_n)}\|T_n y_n - y_n\| \tag{5.16}$$

elde edilir.

Lemma 4.5.2.1. yardımıyla,

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 = \|(1 - a_n)x_n + a_n[(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n] - x^*\|^2$$

$$= (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 + a_n\|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n - x^*\|^2$$

$$-a_n(1 - a_n)\|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n - x_n\|^2$$

$$\leq (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 + a_n\|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n - x^*\|^2$$

$$= (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 + a_n[(1 - \beta_n)\|y_n - x^*\|^2 + \beta_n\|T_n y_n - x^*\|^2$$

$$-\beta_n(1 - \beta_n)\|y_n - T_n y_n\|^2]$$

$$\leq (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 + a_n(1 - \beta_n)\|y_n - x^*\|^2 + a_n\beta_n\|y_n - x^*\|^2$$

$$-a_n\beta_n(1 - \beta_n)\|y_n - T_n y_n\|^2$$

$$\leq (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 + a_n\|y_n - x^*\|^2$$

$$-a_n\beta_n(1 - \beta_n)\|y_n - T_n y_n\|^2 \tag{5.17}$$

elde edilir.

(5.6)'yı (5.17)'de kullanarak,

$$a_n(1 - \beta_n)\beta_n\|y_n - T_n y_n\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \tag{5.18}$$

elde edilir.

(5.18)'den,

$$\|y_n - T_n y_n\|^2 \le \frac{1}{a_n(1-\beta_n)\beta_n}(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2)$$

$$\le \frac{1}{a_n\alpha_1(1-\theta_1)}(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2) \quad (5.19)$$

elde edilir.

(C3) şartından $c, d \in (0,1]$ olmak üzere,

$$0 < c \le a_n \le d \le 1$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\|y_n - T_n y_n\|^2 \le \frac{1}{c\alpha_1(1-\theta_1)}(\|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2) \quad (5.20)$$

elde ederiz.

(5.20)'da her iki tarafın limitini alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - T_n y_n\| = 0 \quad (5.21)$$

elde edilir.

(5.16)'da her iki tarafın limitini alıp (5.21)'i de burda kullanırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_n x_n\| = 0 \quad (5.22)$$

olur. Ayrıca (5.22)'den,

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$$
(5.23)

elde edilir.

Üçgen eşitsizliği yardımıyla,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|[(1-a_n)x_n + a_n[(1-\beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n]] - x_n\|$$

$$= a_n\|(1-\beta_n)y_n + \beta_n T_n y_n - x_n\|$$

$$\leq a_n(1-\beta_n)\|y_n - x_n\| + a_n\beta_n\|T_ny_n - x_n\|$$

$$\leq a_n(1-\beta_n)\|y_n - x_n\| + a_n\beta_n\|T_ny_n - y_n\| + a_n\beta_n\|y_n - x_n\|$$

$$= a_n\|x_n - y_n\| + a_n\beta_n\|T_ny_n - y_n\| \tag{5.24}$$

olduğu görülür.

(5.24)'de limit alınıp (5.21) ve (5.23) kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0 \tag{5.25}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için $w_w(x_n) \subset S$ olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 4.5.2.3.'in ii) şartını sağlatacağız.

$x' \in w_w(x_n)$ olsun. $x' \in S$ olduğunu gösterelim.

$x' \in w_w(x_n)$ ise $x_{n_j} \rightharpoonup x'$ olacak şekilde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

$\gamma_{n_j} \to \gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $0 < \gamma < \frac{2}{L}$'dir. $T = P_C(I - \gamma\nabla f)$ diyelim. Sonuç 4.5.2.1.'den T'nin bir genişlemeyen dönüşüm olduğunu biliyoruz. Üçgen eşitsizliği yardımıyla,

$$\left\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\right\| \leq \left\|x_{n_j} - y_{n_j}\right\| + \left\|y_{n_j} - Ty_{n_j}\right\| + \left\|Ty_{n_j} - Tx_{n_j}\right\|$$

$$\leq 2\left\|x_{n_j} - y_{n_j}\right\| + \left\|y_{n_j} - Ty_{n_j}\right\|, \tag{5.26}$$

$$\left\|y_{n_j} - Ty_{n_j}\right\| \leq \left\|x_{n_j} - y_{n_j}\right\| + \left\|x_{n_j} - Ty_{n_j}\right\|, \tag{5.27}$$

ve

$$\left\|x_{n_j} - Ty_{n_j}\right\| \leq \left\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right\| + \left\|x_{n_{j+1}} - Ty_{n_j}\right\|$$

$$\leq \left\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right\|$$

$$+\left\|\left(1 - a_{n_j}\right)x_{n_j} + a_{n_j}P_C\left(I - \gamma_{n_j}\nabla f\right)y_{n_j} - P_C(I - \gamma\nabla f)y_{n_j}\right\|$$

$$\leq \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| + \left(1 - a_{n_j}\right) \left\| x_{n_j} - T y_{n_j} \right\|$$

$$+ a_{n_j} \left\| P_C \left(I - \gamma_{n_j} \nabla f\right) y_{n_j} - P_C (I - \gamma \nabla f) y_{n_j} \right\| \tag{5.28}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikten,

$$\left\| x_{n_j} - T y_{n_j} \right\| \leq \frac{1}{a_{n_j}} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| + \left\| P_C \left(I - \gamma_{n_j} \nabla f\right) y_{n_j} - P_C (I - \gamma \nabla f) y_{n_j} \right\|$$

$$\leq \frac{1}{a_{n_j}} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| + \left\| \left(I - \gamma_{n_j} \nabla f\right) y_{n_j} - (I - \gamma \nabla f) y_{n_j} \right\|$$

$$= \frac{1}{a_{n_j}} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| + \left| \gamma_{n_j} - \gamma \right| \left\| \nabla f y_{n_j} \right\| \tag{5.29}$$

elde edilir.

(5.29)'ü (5.27)'de yerine yazarsak,

$$\left\| y_{n_j} - T y_{n_j} \right\| \leq \left\| x_{n_j} - y_{n_j} \right\| + \frac{1}{a_{n_j}} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| + \left| \gamma_{n_j} - \gamma \right| \left\| \nabla f y_{n_j} \right\| \tag{5.30}$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.30)'ü (5.26)'da yerine yazıp sonuçlanan eşitsizlikte limit alınırsa,

$$\lim_{j\to\infty} \left\| x_{n_j} - T x_{n_j} \right\| = 0$$

olduğu elde edilir.

$\left\{ x_{n_j} \right\}_{j=0}^{\infty}$, x''ye zayıf yakınsak iken, $\left\{ \left\| x_{n_j} - T x_{n_j} \right\| \right\}_{j=0}^{\infty}$ dizisi 0'a güçlü yakınsadığı için Lemma 4.5.2.2.'den $x' \in F_T = S$'dır. Ayrıca F_T konveks olduğundan S de konvekstir. Yani,

$$w_w(x_n) \subset S \tag{5.31}$$

bulunur.

(5.8) ve (5.31), Lemma 4.5.2.3.'nin iki şartıdır. Dolayısıyla Lemma 4.5.2.3.'in iki şartı gerçeklendiği için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi S'deki bir elemana zayıf yakınsaktır.

Örnek 5.1. $H = l_2 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$ her n için $x_n \in \mathbb{R}\}$ olsun.

H, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$ normu ile bir reel Hilbert uzayıdır.

$C = \left\{x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) : \|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}\right\}$, H'nin kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$f: C \to \mathbb{R}$ dönüşümü,

$f\big((x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots)\big) = \left\|\left(\frac{\sin x_1}{2}, \frac{\sin x_2}{3}, \frac{\sin x_3}{4}, \cdots\right)\right\|^2$ ile tanımlansın.

$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için, $\sin^2 t$ bir konveks fonksiyon olduğundan $f: C \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıda gösterildiği üzere bir konveks fonksiyondur.

$$
\begin{aligned}
&f\big((\eta x + (1-\eta) y)\big) \\
&\quad = f\big((\eta x_0 + (1-\eta) y_0, \eta x_1 + (1-\eta) y_1, \eta x_2 + (1-\eta) y_2, \cdots)\big) \\
&\quad = \left\|\left(\frac{\sin(\eta x_1 + (1-\eta) y_1)}{2}, \frac{\sin(\eta x_2 + (1-\eta) y_2)}{3}, \frac{\sin(\eta x_3 + (1-\eta) y_3)}{4}, \cdots\right)\right\|^2 \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\eta x_k + (1-\eta) y_k)}{(k+1)^2} \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta \sin^2(x_k) + (1-\eta)\sin^2(y_k)}{(k+1)^2} \\
&\quad = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x_k)}{(k+1)^2} + (1-\eta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin^2(y_k)}{(k+1)^2} \\
&\quad = \eta f\big((x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots)\big) + (1-\eta) f\big((y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots)\big).
\end{aligned}
$$

Ayrıca, $S = \left\{x = (x_0, 0,0,0, \cdots) : x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$ kümesi f'nin minimumlarının kümesidir. Herhangi bir karışıklığa yol açmamak için l_2'deki bir diziyi $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterelim.

Şimdi,

i) f'nin gradienti $\nabla f x = \left(0, \frac{\sin 2x_1}{2^2}, \frac{\sin 2x_2}{3^2}, \cdots, \frac{\sin 2x_k}{(k+1)^2}, \cdots\right)$'dir. Gerçekten f Fréchet diferansiyellenebilir ise

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{|f(x+y)-f(x)-\langle y,j\rangle|}{\|y\|} = 0 \tag{5.32}$$

olacak şekilde $j = \nabla f \in l_2$ vardır.

$t > 0$ ve herhangi $z \neq (0,0,0,\cdots)$ için $y = tz$ olsun. (5.32)' yi kullanırsak,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left|\left\|\left(\frac{\sin(x_1+tz_1)}{2}, \frac{\sin(x_2+tz_2)}{3}, \frac{\sin(x_3+tz_3)}{4}, \cdots\right)\right\|^2 - \left\|\left(\frac{\sin x_1}{2}, \frac{\sin x_2}{3}, \frac{\sin x_3}{4}, \cdots\right)\right\|^2 - t\langle z,j\rangle\right|}{t\|z\|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x_k+tz_k)-\sin^2 x_k}{(k+1)^2} - t\langle z,j\rangle\right|}{t\|z\|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2.\sin\frac{(tz_k)}{2}.\cos\frac{2x_k+tz_k}{2}\right)(\sin(x_k+tz_k)+\sin x_k)}{(k+1)^2} - t\langle z,j\rangle\right|}{t\|z\|}$$

$$= 0 \tag{5.33}$$

bulunur.

(5.33)'den f'nin $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$'da Fréchet türevini

$$\nabla f x = \left(0, \frac{\sin 2x_1}{2^2}, \frac{\sin 2x_2}{3^2}, \cdots, \frac{\sin 2x_k}{(k+1)^2}, \cdots\right)$$

olarak hesaplarız.

ii) ∇f dönüşümü kuvvetli monoton değildir.

Eğer ∇f dönüşümü kuvvetli monoton ise, $\forall x, y \in C$ için,

$$\langle \nabla f x - \nabla f y, x - y\rangle = \langle (x_0, 0,0,0,\cdots) - (y_0, 0,0,0,\cdots), x - y\rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \tag{5.34}$$

olacak şekilde en az bir $\alpha > 0$ reel sayısının bulunması gerekir.

$x = \left(\frac{1}{2}, 0,0,0,\cdots\right)$ ve $y = \left(-\frac{1}{2}, 0,0,0,\cdots\right)$ alınırsa,

$$\langle \nabla f x - \nabla f y, x - y\rangle = \langle (0,0,0,\cdots) - (0,0,0,\cdots), (1,0,\cdots)\rangle$$

$$= \langle (0,0,0,\cdots), (1,0,\cdots)\rangle = 0$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha\|x-y\|^2=\alpha$ olarak hesaplanır.

$0\geq\alpha$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\alpha>0$ sayısı bulunmadığı için ∇f kuvvetli monoton değildir.

iii) $\nabla f,\ 2-$ Lipschitziandır.

Gerçekten, $\forall x,y\in C$ için,

$\|\nabla fx-\nabla fy\|^2$

$$=\left\|\left(0,\frac{\sin 2x_1}{2^2},\frac{\sin 2x_2}{3^2},\cdots,\frac{\sin 2x_k}{(k+1)^2},\cdots\right)-\left(0,\frac{\sin 2y_1}{2^2},\frac{\sin 2y_2}{3^2},\cdots,\frac{\sin 2y_k}{(k+1)^2},\cdots\right)\right\|^2$$

$$=\left\|\left(0,\frac{\sin 2x_1-\sin 2y_1}{2^2},\frac{\sin 2x_2-\sin 2y_2}{3^2},\cdots,\frac{\sin 2x_k-\sin 2y_k}{(k+1)^2},\ldots\right)\right\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2x_k-\sin 2y_k}{(k+1)^2}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin\frac{(2x_k-2y_k)}{2}.\cos\frac{((2x_k+2y_k))}{2}}{(k+1)^2}\right)^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\sin\frac{(2x_k-2y_k)}{2}\right)^2$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\leq 4\sum_{k=0}^{\infty}(x_k-y_k)^2=4\|x-y\|^2$$

olduğundan ∇f, $2-$ Lipschitziandır.

iv) $P_C(I-\gamma_n\nabla f)$ bir daraltan dönüşüm değildir.

Eğer $P_C(I-\gamma_n\nabla f)$ bir daraltan dönüşüm ise $\forall x,y\in C$ için,

$$\|P_C(I-\gamma_n\nabla f)x-P_C(I-\gamma_n\nabla f)y\|\leq\delta\|x-y\| \tag{5.35}$$

olacak şekilde bir $\delta\in[0,1)$ olmalıdır. Ayrıca, $P_C\colon H\to C$,

$$P_C(x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots)=\begin{cases}(x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots), & (x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots)\in C\\ \frac{1}{\|x\|}(x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots), & (x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots)\notin C\end{cases} \tag{5.36}$$

ile tanımlanır.

$x=(\frac{1}{2},0,0,0,\cdots)$, $y=(-\frac{1}{2},0,0,0,\cdots)$ ve her n için $0<\gamma_n<\frac{2}{2}=1$ şartını sağlayan herhangi bir $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ için,

$\|P_C(I-\gamma_n\nabla f)x-P_C(I-\gamma_n\nabla f)y\|$

$=\left\|P_C\left(\left(\frac{1}{2},0,0,0,\cdots\right)-\gamma_n(0,0,0,\cdots)\right)-P_C\left(\left(-\frac{1}{2},0,0,0,\cdots\right)-\gamma_n(0,0,0,\cdots)\right)\right\|$

$=\|(1,0,0,\cdots)\|=1$

ve

$\delta\|x-y\|=\delta$

elde ederiz.

Açıkça görülebilir ki, (5.35)'i sağlayan $\delta\in[0,1)$ yoktur. Bu nedenle, T bir daraltan dönüşüm değildir.

v) Her n için $\gamma_n=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{3n+4}{10n+15}$, $b_n=\frac{1}{8(n+1)}$ ve $c_n=\frac{1}{5(n+1)^2+1}$ alınırsa,

$\frac{1}{8(n+1)}\left(1+\frac{1}{5(n+1)^2+1}\right)<\frac{2}{2+\gamma_nL}=\frac{2}{3}$, yani

$b_n(1+c_n)<\frac{2}{2+\gamma_nL}$ olduğu elde edilir.

Bu da Teorem 5.1.'in *(C1)* şartının sağlandığını gösterir. Ayrıca diğer iki şartın sağlandığı aşikârdır.

Bu seçimlerle (5.1) algoritması,

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = \frac{7n+11}{10n+15}\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\right) \\ + \frac{3n+4}{10n+15} P_C\left(\left(y_0^{(n)}, y_1^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2y_1^{(n)}}{2^2}, y_2^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2y_2^{(n)}}{3^2}, \cdots\right)\right) \\ y^{(n)} = \frac{8n+7}{8(n+1)}\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\right) \\ + \frac{1}{8(n+1)} P_C\left(\left(z_0^{(n)}, z_1^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2z_1^{(n)}}{2^2}, z_2^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2z_2^{(n)}}{3^2}, \cdots\right)\right) \\ z^{(n)} = \frac{5n^2+10n+5}{5(n+1)^2+1}\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\right) \\ + \frac{1}{5(n+1)^2+1} P_C\left(\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x_1^{(n)}}{2^2}, x_2^{(n)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x_2^{(n)}}{3^2}, \cdots\right)\right) \end{cases} \quad (5.37)$$

algoritması haline gelir.

Teorem 3.1.'in i) şartı olan, her n için, $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi, (5.37) algoritmasının farklı başlangıç değerleri ile nasıl davrandığını araştıralım. Gerçekten, x_0, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığında herhangi bir eleman olmak üzere, bir $x^{(0)} = (x_0, 0,0,0 \cdots)$ başlangıç noktası için, (5.37) iterasyon algoritması S'nin de bir üyesi olan $(x_0, 0,0,0 \cdots)$ elemanına yakınsar.

Başlangıç noktasını $x^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2k}, \cdots\right)$ olarak alalım. Aşağıdaki tabloda (5.37) algoritmasının yakınsaklık davranışı gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 (5.37) iterasyon algoritmasınının yakınsaklık davranışı

İterasyon sayısı	(5.37) algoritmasının bileşenleri													
	0. bileşen	1. bileşen	2. bileşen	3. bileşen	$\cdots$	49. bileşen	$\cdots$	99. bileşen	$\cdots$	149. bileşen	$\cdots$	199. bileşen	$\cdots$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{100}$	$\cdots$	$\frac{1}{200}$	$\cdots$	$\frac{1}{300}$	$\cdots$	$\frac{1}{400}$	$\cdots$
1	$\frac{1}{2}$	0.221652	0.156875	0.120637	$\cdots$	0.999279x 10^{-2}	$\cdots$	0.499940x 10^{-2}	$\cdots$	0.333316x 10^{-2}	$\cdots$	0.249993x 10^{-2}	$\cdots$
2	$\frac{1}{2}$	0.205968	0.151781	0.118406	$\cdots$	0.999279x 10^{-2}	$\cdots$	0.499940x 10^{-2}	$\cdots$	0.333307x 10^{-2}	$\cdots$	0.249989x 10^{-2}	$\cdots$
3	$\frac{1}{2}$	0.191296	0.146876	0.116235	$\cdots$	0.999041x 10^{-2}	$\cdots$	0.499880x 10^{-2}	$\cdots$	0.333298x 10^{-2}	$\cdots$	0.249985x 10^{-2}	$\cdots$
4	$\frac{1}{2}$	0.177547	0.142112	0.114099	$\cdots$	0.998804x 10^{-2}	$\cdots$	0.499850x 10^{-2}	$\cdots$	0.333289x 10^{-2}	$\cdots$	0.249982x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
50	$\frac{1}{2}$	0.504907x 10^{-2}	0.302206x 10^{-1}	0.480537x 10^{-1}	$\cdots$	0.987853x 10^{-2}	$\cdots$	0.498475x 10^{-2}	$\cdots$	0.332875x 10^{-2}	$\cdots$	0.249816x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
100	$\frac{1}{2}$	0.102821x 10^{-3}	0.555713x 10^{-2}	0.186760x 10^{-1}	$\cdots$	0.976069x 10^{-2}	$\cdots$	0.496978x 10^{-2}	$\cdots$	0.332427x 10^{-2}	$\cdots$	0.249640x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
150	$\frac{1}{2}$	0.209027x 10^{-5}	0.102104x 10^{-2}	0.725231x 10^{-2}	$\cdots$	0.964430x 10^{-2}	$\cdots$	0.495493x 10^{-2}	$\cdots$	0.331979x 10^{-2}	$\cdots$	0.249464x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
200	$\frac{1}{2}$	0.424642x 10^{-7}	0.187552x 10^{-3}	0.281573x 10^{-2}	$\cdots$	0.952939x 10^{-2}	$\cdots$	0.494007x 10^{-2}	$\cdots$	0.331543x 10^{-2}	$\cdots$	0.249281x 10^{-2}	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
250	$\frac{1}{2}$	0.862331x 10^{-9}	0.344459x 10^{-4}	0.109310x 10^{-2}	$\cdots$	0.941599x 10^{-2}	$\cdots$	0.495522x 10^{-2}	$\cdots$	0.331119x 10^{-2}	$\cdots$	0.249095x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
300	$\frac{1}{2}$	0.175079x 10^{-10}	0.632599x 10^{-5}	0.424343x 10^{-3}	$\cdots$	0.930344x 10^{-2}	$\cdots$	0.491048x 10^{-2}	$\cdots$	0.330675x 10^{-2}	$\cdots$	0.248903x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
400	$\frac{1}{2}$	0.721362x 10^{-14}	0.213323x 10^{-5}	0.639436x 10^{-4}	$\cdots$	0.908285x 10^{-2}	$\cdots$	0.488108x 10^{-2}	$\cdots$	0.329812x 10^{-2}	$\cdots$	0.248535x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
500	$\frac{1}{2}$	0.297102x 10^{-17}	0.719265x 10^{-8}	0.963502x 10^{-5}	$\cdots$	0.886748x 10^{-2}	$\cdots$	0.485187x 10^{-2}	$\cdots$	0.328951x 10^{-2}		0.248181x 10^{-2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

Tabloya bakıldığında, (5.37) iterasyon algoritmasının birinci bileşeni haricindeki diğer tüm bileşenlerin 0'a yakınsadığını görülür. Yani Teorem 3.1.'in ii) şartı sağlanmış olur. Böylece Teorem 3.1'den (5.37) iterasyon algoritması $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\right)$'a zayıf yakınsaktır.

Teorem 5.2. (4.10) ile verilen SFP'nin çözülebilir olduğunu varsayalım. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $[0,1]$ aralığında ve $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\left(0, \frac{2}{\|A\|^2}\right)$ aralığında aşağıdaki şartları sağlayan diziler olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \in C$ ile üretilen,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n P_C\big(I - \lambda_n A^*(I-P_Q)A\big)y_n, & \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n P_C\big(I - \lambda_n A^*(I-P_Q)A\big)z_n, & n = 0,1,2,\ldots \\ (1-c_n)x_n + c_n P_C\big(I - \lambda_n A^*(I-P_Q)A\big)x_n & \end{cases}$$

iterasyon dizisi olsun.

(C1) $b_n(1+c_n) < \frac{2}{2+\gamma_n L}$,

(C2) $0 < \liminf \gamma_n \leq \limsup \gamma_n < \frac{2}{\|A\|^2}$,

(C3) $0 < \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq 1$.

Bu takdirde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (4.10) ile verilen SFP'nin bir çözümüne zayıf yakınsar.

İspat: Tezin 4. bölümünde ifade edildiği üzere SFP'nin minimizasyon problemi olarak yazılabilmesi ve ∇f'nin $\|A\|^2$ −Lipschitzian olması ile, Teorem 5.1.'de

$\nabla f x = A^*(I-P_Q)Ax$

olduğunu göz önüne alırsak istenen sonuca ulaşırız.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezin ana temasını oluşturan beşinci bölümünde Noor iterasyonu kullanılarak Xu'nun ortalı dönüşüm yaklaşımı yardımıyla konveks minimizasyon probleminin çözümüne zayıf yakınsayan yeni bir gradient projeksiyon algoritması tanımlanmıştır. Bir örnek yardımıyla, bu algoritmanın sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayındaki yakınsaklık davranışı incelenmiştir. Önerilen bu yeni iterasyonu çeşitli şekillerde modifiye ederek, konveks minimizasyon problemine hangi koşullar altında güçlü yakınsadığı araştırılabilir. Farklı iterasyon yöntemleri için yeni GPA algoritmaları tanımlanabilir. Tanımlanan bu algoritmaların güçlü ve zayıf yakınsaklığı çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] H.K. Xu, "Averaged mappings and the gradient-projection algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications,* 150,2, 360-378, 2011.

[2] M.A. Noor, "New approximation schemes for general variational inequalities," *J. Math. Anal. Appl.,* 251, 217-229, 2000.

[3] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, III , Variational Methods and Application.* New York: Springer, 1985.

[4] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction toVariational Inequalities and Their Applications.* New York: Academic Press, 1980.

[5] E.S. Levitin, B.T. Polyak, "Constrained minimization methods", *Zh. Vychisl. Mat., Mat. Fiz.,* 6, 787–823, 1966.

[6] Y. Yao, M. Postolache, Y.C. Liou, "Strong Convergence of a self-adaptive method fort he split feasibility problem", *Fixed Point Theory and Aplications,* 1, 201, 2013.

[7] H. Zhou, P. Wang, "A simpler explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces", *Journal of Optimization Theory and Aplications,* 161, 3, 716-727, 2014.

[8] W. Takahashi, H.K. Xu, J.C. Yao, "Iterative methods for generalized split fesability problems in Hilbert spaces", *Set-Valued and Variotional Analisysis,* 23, 2, 205-221, 2015.

[9] L.C. Ceng, S.M. Guu, J.C. Yao, "Hbrid methods with regularization for minimization problems and asimptotically strict pseudocontractive mappings in the intermediate sense", *Journal of Global Optimization,* 60, 4, 617-634, 2014.

[10] M. Tian, L. Liu, "General iterative methods for equilibrium and constrained convex minimization problem", *Optimization,* 63, 9, 1367-1385, 2014.

[11] G. Lopez, V. Martin-Marquez, F. Wang, H.K. Xu, "Solving the split feasibility problem without prior knowledge of matrix norms". *Inverse Problems,* 28, 8, 085004, 2012

[12] Y. Censor, T. Elfving, "A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space", *Numer. Algorithms,* 8, 221–239, 1994.

[13] C. Byrne, "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction", *Inverse Probl.,* 20, 1,103, 2004.

[14] Y. Censor, T. Elfving, N. Kopf, T. Bortfeld, "The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems", *Inverse Probl.,* 21, 2071–2084, 2005.

[15] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin, A. Trofimov, "A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy", *Phys. Med. Biol.,* 51, 2353–2365, 2006.

[16] H.K. Xu, "A variable Krasnosel'skii–Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem", *Inverse Probl.,* 22, 2021–2034, 2006.

[17] H.K. Xu, "Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces", *Inverse Probl.,* 26, 105018, 2010.

[18] G. Lopez, V. Martin, H.K. Xu, “Perturbation techniques for nonexpansive mappings with applications”, *Nonlinear Anal., Real World Appl.,* 10, 2369–2383, 2009.
[19] G. Lopez, V. Martin, H.K. Xu, “Iterative algorithms for the multiple-sets split feasibility problem”, In: Y. Censor, M. Jiang, G. Wang, (eds.), Biomedical Mathematics, Promising Directions in Imaging, Therapy Planning and Inverse Problems, pp. 243–279, *Medical Physics Publishing,* Madison, 2009.
[20] Takahashi, Wataru, Hong-Kun Xu, and Jen-Chin Yao, "Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces", *Set-Valued and Variational Analysis,* 23, 2, 205-221, 2015.
[21] Tang, Yuchao, and Liwei Liu, "Iterative methods of strong convergence theorems for the split feasibility problem in Hilbert spaces", *Journal of inequalities and applications,* 2016, 1, 284, 2016.
[22] Moudafi, Abdellatif, "Alternating CQ-algorithm for convex feasibility and split fixed-point problems", *J. Nonlinear Convex Analysis,* 15, 4, 809-818, 2014.
[23] Y. Yao, R.P. Agarwal, M. Postolache, & Y.C. Liou, “Algorithms with strong convergence for the split common solution of the feasibility problem and fixed point problem”, *Fixed Point Theory and Applications*, 2014, 1, 183, 2014.
[24] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* USA: John Wiley & Sons, 1989.
[25] I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis, 2nd edition.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
[26] Ö. Çakar, E. Kreyszig, *Fonksiyonel Analize Giriş 1.* 7. Baskı, Ankara: Ankara Üniversitesi Yayınları, 2007.
[27] S.A. Kılıç, M. Erdem, *Fonksiyonel Analize Giriş.* Ankara: Gazi Üniversitesi, 97, 1987.
[28] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz.* Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları, 1994.
[29] İ. Karaca, *Topoloji Ders Notları.* 2013,
[30] V.S. Pugachev, and I.N. Sinitsyn, *Lectures on Functional Analysis and Applications.* Singapore: World Scientific Publishing Company, 1999.
[31] A.L. Brown, and A. Page, *Elements of functional analysi.* London: Van Nostrand-Reinhold, 1970.
[32] R.P. Agarwal, D.R. Sahu, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications.* New York: Springer, 2009.
[33] R.E. Moore, and M.J. Cloud, *Computational Functional Analysis.* Chichester: Horwood Pub., 2007.
[34] S. Lipschutz, *Schaum’s Outline of Theory and Problems of General Topology*. Philadelphia: Temple University, 1965.
[35] R.F. Curtain, and A.J. Pritchard, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics.* London: Academic Press, 1977.
[36] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points.* Berlin: Springer, 2007.

[37] F. Gürsoy, "Bazı Yeni Sabit Nokta İterasyon Yöntemlerinin Yakınsaklıklarının ve Kararlılıklarının incelenmesi", Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, 2014.

[38] Ş. Türkan, "Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler ve Sabit nokta İterasyonları", Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, 2014.

[39] H. Karayılan, "w-Uzaklık Fonksiyonu ve Sabit Nokta Teoremleri", Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi, 2000.

[40] J.K. Hunter, and B. Nachtergaele, *Applied Analysis.* Singapore: World Scientific, 2001.

[41] H. Kızıltunc, "Genişlemeyen donuşumlerin sabit noktalarının iterasyon metotlarıyla elde edilmesi", Doktora Tezi, Ataturk Universitesi, Fen Bilimleri Enstitusu, Erzurum, 2007.

[42] S. Elmas, "Düzgün Quasi-LİpschitzianDönüşümlerin Ortak sabit noktalarına Yeni Yaklaşım Metodları", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, 2014.

[43] E. Picard, "Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives", *Journal de Mathematiques pures et appliquees*, 6,145-210, 1890.

[44] S. Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales", *Fund. Math,* 3, 49, 1922.

[45] M.A. Krasnosel'skii, "Two remarks on the method of successive Approximations", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk,* 10, 123-127, 1955.

[46] E. Yolaçan, "Banach Uzaylarında Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Yaklaşımları", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, 2015.

[47] W.R. Mann, "Mean value methods in iteration*", Proceedings of the American Mathematical Society,* 4, 506-510, 1953.

[48] S. Ishikawa, "Fixed points by a new iteration method", *Proceedings of the American Mathematical Society,* 44, 147-150, 1974.

[49] A. Cegielski, *Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathemaics.* Heidelberg, New York, Dordrecht, London: *Springer*, 298, 2012.

[50] H.Q. Ansari, *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization.* India: World Education, 2011.

[51] H. Brezis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groups de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* Amsterdam: North-Holland, 1973.

[52] H.Q. Ansari, ed. *Nonlinear Analysis, Approximation Theory, Optimization and Applications.* Springer, 2014.

[53] P.L. Combettes, "Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators", *Optimization,* 53, 475–504, 2004.

[54] C. Martinez-Yanes, H.K. Xu, "Strong convergence of the CQ method for fixed-point iteration processes", *Nonlinear Anal,* 64, 2400–2411, 2006.

[55] Z. Opial, "Weak convergence of the sequence of successive approximations of nonexpansive mappings", *Bull. Am. Math. Soc.*, 73, 595–597, 1967.
[56] J.B. Baillon, G. Haddad, "Quelques proprietes des operateurs angle-bornes et n-cycliquement monotones", *Isr. J. Math.* 26, 137–150, 1977.
[57] K. Geobel, W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Asiye SUCU

Doğum Yeri : GERCÜŞ-BATMAN

Doğum Tarihi : 14.05.1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce, Arapça

E-posta : asya4702@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	Adıyaman Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Batman Fatih Lisesi	2006