



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DEĞİŞMELİ HALKALARIN BAZI ÖZEL İDEALLERİ VE MODÜLLERİN BAZI ÖZEL ALT MODÜLLERİ

SUAT KOÇ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

EŞ-DANIŞMAN

Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM

İSTANBUL, 2019



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DEĞİŞMELİ HALKALARIN BAZI ÖZEL İDEALLERİ VE MODÜLLERİN BAZI ÖZEL ALT MODÜLLERİ

SUAT KOÇ

720915001

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

EŞ-DANIŞMAN

Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM

İSTANBUL, 2019

MARMARA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Öğrencisi Suat Koç'un
“Değişmeli Halkaların Bazı Özel İdealleri ve Modüllerin Bazı Özel Alt Modülleri”
başlıklı tez çalışması, 6 Kasım 2019 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından
başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ünsal TEKİR (Danışman)

Marmara Üniversitesi(İMZA)

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY (Üye)

Yıldız Teknik Üniversitesi(İMZA)

Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP (Üye)

Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi(İMZA)

Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL (Üye)

Marmara Üniversitesi(İMZA)

Doç. Dr. Murat ALAN (Üye)

Yıldız Teknik Üniversitesi(İMZA)

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23.11.2019... tarih
ve 2019/23-22.. sayılı kararı ile Suat KOÇ'un Matematik Anabilim Dalı Matematik
Programında Doktora derecesi alması onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Bülent EKİCİ

TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin yazımında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bu süreç boyunca sabır gösteren sevgili eşime ve hayatım boyunca borçlu kalacağım sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bu tezin ortaya çıkmasında herkesten çok emeği bulunan, matematik alanında öğrendiğim her türlü bilgide ve ortaya koyduğum tüm çalışmalarda büyük izleri bulunan ve ayrıca bilgi, birikim ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışmada katkısı çok büyük olan, hiçbir zaman desteğini esirgemeyen ve her zaman pozitif eleştirileriyle akademik anlamda beni motive eden saygıdeğer eş danışman hocam Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM'e çok teşekkür ederim.

Tez savunmamda yer alan ve her zaman örnek aldığım, eleştirileriyle tezime katkıda bulunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP, Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL ve Doç. Dr. Murat ALAN'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tezin yazımını benim için kolaylaştıran Dr. Öğr. Üyesi Serkan ONAR, Dr. Öğr. Üyesi Zehra BİLGİN, Araş. Gör. Elif AKTAŞ, Sanem YAVUZ ve Melis BOLAT'a teşekkür ederim.

Son olarak, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan ve lisansüstü eğitimim süresince maddi destek gördüğüm Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürü bir borç bilirim.

Kasım 2019

Suat KOÇ

İÇİNDEKİLER

Teşekkür	ii
İçindekiler	iii
Özet.....	iv
Abstract.....	vi
Yenilik Beyanı.....	vii
Semboller ve Kısaltmalar	viii
Şekil listesi.....	ix
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1 Modüller Hakkında Ön Bilgiler.....	1
1.2 r -İdealler.....	2
1.3 Asal İdeallerin Genelleştirmeleri.....	4
1.4 Polinom Halkası ve Kuvvet Serisi Halkası.....	6
1.5 Triviyal Genişleme	7
1.6 Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafiği.....	8
1.7 Topolojik Uzaylar.....	10
BÖLÜM 2. r -ALT MODÜLLER VE sr -ALT MODÜLLER.....	12
2.1 r -Alt Modüller ve Temel Özellikleri.....	12
2.2 sr -Alt Modüller	22
BÖLÜM 3. DEĞİŞMELİ HALKALARIN n -İDEALLERİ	30
BÖLÜM 4. GÜÇLÜ QUASİ ASALIMSİ İDEALLER	43
4.1 Güçlü q -Asalimsi İdeallerin Karakterizasyonu	43
4.2 Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafiği.....	52
BÖLÜM 5. n -ASAL İDEALLER	58
5.1. n -Asal İdeallerin Karakterizasyonu.....	58
5.2 Değişmeli Halkaların n -Asal Spektrumu	64
BÖLÜM 6. SONUÇ	70
Kaynaklar.....	71
Özgeçmiş	

ÖZET

DEĞİŞMELİ HALKALARIN BAZI ÖZEL İDEALLERİ VE MODÜLLERİN BAZI ÖZEL ALT MODÜLLERİ

Bu tezin amacı asal ideallerin ve r -idealın çeşitli genelleştirmelerini tanımlamak ve bu genelleştirmeleri birçok halka ve modül karakterizasyonunda kullanmaktır. R. Mohamadian değişmeli halkalardaki r -idealleri tanımlayarak bu ideal sınıfını tamlık bölgelerini, quasi-regüler halkaları ve (A) -özellikliğini sağlayan halkaları karakterize etmede kullanmıştır.

Bu kavramdan esinlenerek tezin 2. bölümünde r -ideal kavramının modüllere iki farklı genişlemesi olan r -alt modül ve sr -alt modül ortaya konulmuştur. Bu iki alt modül sınıfı arasındaki ilişkiler incelenerek basit ve serbest burulmalı modüllerin karakterizasyonları verilmiştir.

Tezin 3. bölümünde r -ideallerden daha güçlü bir ideal sınıfı olan n -ideal sınıfı tanımlanmış ve r -ideal, asal ideal, asalımsı ideal gibi bazı klasik ideal sınıflarıyla arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Dahası n -idealler, von Neumann regüler (von Neumann regular) halkaların ve Călugăreanu tarafından tanımlanan UN -halkalarının karakterizasyonunda kullanılmıştır.

Tezin 4. bölümünde asalımsı ve quasi asalımsı (quasi primary) ideal sınıfları arasında kalan güçlü quasi asalımsı (strongly quasi primary) idealler tanımlanmıştır. Öncelikle güçlü quasi asalımsı ideallerin asal, asalımsı, quasi asalımsı, 2-asal ideallerle ilişkileri ortaya konulmuştur. Ayrıca, değer halkasının bir genellemesi bölünmüş halkalar (divided rings), bu ideal sınıfı yardımıyla karakterize edilmiştir. Daha sonra, Redmond tarafından tanımlanan ideal bazlı sıfır bölen grafiği $\Gamma_U(H)$ nin alt grafiği $\Gamma_U^*(H)$ çalışılmıştır. Ayrıca, H nin cebirsel özellikleriyle $\Gamma_U^*(H)$ nin grafiksel özellikleri arasındaki bağlantılar araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde asal ideallerin yeni bir genellemesi n -asal idealler verilmiştir. Bu ideal sınıfı üzerinde Zariski Topolojisine benzer yeni bir topoloji kurulmuştur. Böylece, bu topolojinin topolojik özellikleriyle verilen halkanın cebirsel özellikleri arasındaki

ilişkiler araştırılmıştır. Dahası bu idealler yardımıyla tek maksimali nil radikal olan sözde-yerel (quasi-local) halkalar karakterize edilmiştir.



ABSTRACT

SOME SPECIAL IDEALS OF COMMUTATIVE RINGS AND SOME SPECIAL SUBMODULES OF MODULES

The aim of this thesis is to define various generalizations of prime ideals and r -ideal and to use them in several ring and module characterizations.

R. Mohamadian used this class of ideals to characterize integral domains, quasi regular rings and rings satisfying property (A) by defining r -ideals in commutative rings. Inspired by this notion, in Section 2 of the thesis, r -submodules and sr -submodules which are two different extensions of the concept of r -ideal are introduced. The relations between these two submodules are examined and the characterizations of simple and torsion-free modules are given.

In Section 3 of the thesis, the class of n -ideals which is stronger than r -ideals is defined and its relations between some classical ideals such as r -ideal, prime ideal and primary ideal are investigated. Furthermore, the n -ideals are used to characterize von Neumann regular rings and UN -rings defined by Călugăreanu.

In Section 4 of the thesis, strongly quasi primary ideals which are between the class of primary ideals and the class of quasi primary ideals are defined. Firstly, the relations of strongly quasi primary ideals with prime, primary, quasi primary, 2-prime ideals are given. Furthermore, divided rings, which are a generalizations of valuation domains are characterized in terms of this class of ideals. Then a subgraph $\Gamma_U^*(H)$ of an ideal based zero divisor graph $\Gamma_U(H)$ defined by Redmond is studied. Also, the relationships between the algebraic properties of H and graphical properties of $\Gamma_U^*(H)$ are investigated.

In the last part of the thesis, n -prime ideal which is a new generalization of prime ideal is given. A new topology on this new class of ideals which is similar to Zariski Topology has been established. Thus, the relationships between the topological properties of this topology and the algebraic properties of the given ring are investigated. Further, quasi-local rings with nil maximal ideal, namely, rings with unique nil maximal ideal are characterized in terms of this class of ideals.

YENİLİK BEYANI

Tezin 2.bölümünde r -ideallerin modüllere iki farklı genişlemesi olarak r -alt modül ve sr -alt modül kavramları tanımlanmıştır. Bu alt modül sınıflarının cebirsel özellikleri ve aralarındaki ilişkiler detaylarıyla incelenmiştir. Bu çalışma aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

- Koc, S., Tekir, Ü. r -Submodules and sr -Submodules. Turkish Journal of Mathematics, 42(4) (2018), 1863-1876.

Tezin 3.bölümünde r -ideallerden esinlenerek bu ideallerden daha kuvvetli n -idealler tanımlanmıştır. Bu ideal sınıfının tüm cebirsel özellikleri ve asal, asalımsı, r -idealler gibi bazı klasik ideallerle aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu çalışma aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

- Tekir, Ü., Koc, S., Oral, K. H. n -Ideals of commutative rings. Filomat, 31(10) (2017), 2933-2941.

Tezin 4. bölümünde asalımsı ve quasi asalımsı idealler sınıfı arasında yer alan güçlü quasi asalımsı idealler tanımlanmıştır. Ayrıca bu bölümde değişmeli halkaların verilen bir ideale göre yeni bir sıfır bölen grafiği elde edilmiş olup bu grafiğin özellikleriyle değişmeli halkaların cebirsel özellikleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu çalışma aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

- Koc, S., Tekir, Ü., Ulucak, G. On Strongly Quasi Primary Ideals. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 56(3) (2019), 729-743.

Tezin son bölümünde asal ideallerin bir genellemesi olan n -asal idealler tanımlanarak değişmeli halkaların n -asal ideallerinin kümesi üzerinde bir topoloji kurulmuştur. Bu topolojinin topolojik özellikleri ile verilen halkanın cebirsel özellikleri arasındaki ilişkiler belirlenmiştir. Bu çalışma aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

- Sevim, E. S., Koc, S. On N -Prime Ideals. University Politehnica Of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics And Physics, 80(2) (2018), 179-190.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

$\sup$: Supremum

g.y.ş: gerek ve yeter şart

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\subseteq$: Alt küme

$\subsetneq$: Has alt küme

$\cong$: İzomorfizma

$\Leftrightarrow$: gerek ve yeter şart

H/U : Bölüm Halkası

$S^{-1}H$: Kesir halkası

$\sqrt{H'}$: H' nün radikali

$\mathfrak{N}(H)$: Nilpotent elemanların kümesi

$\text{Ker}(h)$: h homomorfizmasının çekirdeği

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$: $a_0, a_1, \dots, a_n$ ile üretilmiş ideal

$H \propto E$: Triviyal genişleme

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1.1 Güçlü q -Asalımsı İdealler	45
Şekil 4.2.1 $\Gamma_{\bar{0}}^*(\mathbb{Z}_6)$ Grafiği	54
Şekil 4.2.2 $\Gamma_{\bar{0}}^*(\mathbb{Z}_{12})$ ve $\Gamma_{\bar{0}}(\mathbb{Z}_{12})$ Grafikleri	54
Şekil 5.1.1 n -Asal İdealler	60



1. GİRİŞ

1.1 Modüller Hakkında Ön Bilgiler

Tezin bu ve sonraki bölümlerinde aksi ifade edilmedikçe söz konusu tüm halkalar birimli ve değişmeli, ayrıca tüm modüller ise birimsel olarak göz önüne alınacaktır. H her zaman böyle bir halkayı E ise böyle bir H -modülü temsil edecektir. Bu bölümde tezin 2. kısmında kullanılacak olan bazı notasyon, tanım ve teoremler ifade edilecektir.

Tanım 1.1.1 (Sharp, 2000)

- (i) E', E nin bir alt modülü ve $\emptyset \neq D \subseteq E$ olsun. $(E': D)$ ideali $\{h \in H: hD \subseteq E'\}$ olarak tanımlanır. Özel olarak $(0: D)$ ideali yerine $\text{ann}(D)$ kullanılır.
- (ii) D, E nin bir alt modülü ve $\emptyset \neq T \subseteq H$ olsun. $(D: {}_E T)$ alt modülü $Te' \subseteq D$ olacak şekilde $e' \in E$ elemanlarından oluşur. $D = 0$ ise $(0: {}_E T)$ yerine $\text{ann}_E(T)$ kullanılır.
- (iii) $\text{ann}(E) = 0$ ise E ye bir sadık modül denir.

Tanım 1.1.2 (Çallıalp ve Tekir, 2009)

- (i) $\text{ann}_E(h) = 0$ ise $h \in H$ ye H -modül E nin bir sıfır böleni denir ve H -modül E nin tüm sıfır bölenlerinin kümesi $z(E)$ ile gösterilir. Özel olarak H halkası H -modül olarak göz önüne alındığında $z(H)$ yerine $zd(H)$ kullanılır.
- (ii) $e' \in E$ elemanına $\text{ann}(e') \neq 0$ ise bir burulmalı eleman denir ve E nin tüm burulmalı elemanlarının kümesi $t(E)$ ile gösterilir.
- (iii) $t(E) = 0$ ise E ye bir serbest burulmalı modül denir.

Tanım 1.1.3 (Sharp, 2000)

- (i) $\emptyset \neq T \subseteq H$ olmak üzere $0 \notin T, 1 \in T$ ve her $t_1, t_2 \in T$ için $t_1 t_2 \in T$ şartları sağlanıyorsa T ye bir çarpımsal kapalı küme denir. Özel olarak $\text{Reg}(H) = H - zd(H)$ ve $H - z(E)$ kümeleri birer çarpımsal kapalı kümedir.
- (ii) $S \subseteq H$ bir çarpımsal kapalı küme ve E bir H -modül olsun. E nin kesir modülü $S^{-1}E = \{\lambda: \exists e' \in E, s \in S \text{ için } \lambda = \frac{e'}{s}\}$ olarak tanımlanır. Dikkat edilirse $S^{-1}E$ hem H -modül hem de $S^{-1}H$ -modüldür.

- (iii) $E' \subseteq E$ alt modülünün kesir modülündeki genişlemesi $S^{-1}E' = \{\lambda: \exists e' \in E', s \in S \text{ için } \lambda = \frac{e'}{s}\}$ de $S^{-1}E$ nin bir $S^{-1}H$ - alt modülüdür.

1.2 r -İdealler

Değişmeli halkaların r -idealleri (Mohamadian, 2015) de tanımlanmış ve asal ideallere benzer birçok özelliği verilmiştir. Ayrıca tamlık bölgeleri, sözde regüler (quasi regular) ve (A) -özelliğini sağlayan halkalar gibi bazı özel halkalar karakterize edilmiştir. Şimdi bu bölümde r -ideallerle ilgili birtakım tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.2.1 (Mohamadian, 2015) U, H nin bir has ideali ve her $y, z \in H$ için $yz \in U$ ve $\text{ann}(y) = 0$ iken $z \in U$ oluyorsa U ya bir r -ideal denir.

Tanım 1.2.2 (Lu, 1984) $E' \subseteq E$ bir has alt modül olsun. Her $z \in H, e' \in E$ için $ze' \in E'$ iken $z \in (E': E)$ veya $e' \in E'$ oluyorsa E' ne E nin bir asal alt modülü denir. Özel olarak, H -modül H nin asal alt modülleri asal ideallerdir.

Bir H halkasına $zd(H) = 0$ ise tamlık bölgesi denir. Bir cisimde sıfır ideali tek maksimal idealdir. Ayrıca herhangi bir tamlık bölgesinde sıfır ideali asaldır fakat tek asal olmayabilir. Şimdi bu durumu bir örnekle ifade edelim.

Örnek 1.2.3 $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkasında (X) temel ideali sıfırdan farklı bir asal idealdir.

(Mohamadian, 2015) de tamlık bölgelerini karakterize eden aşağıdaki ilginç sonuç verilmiştir.

Önerme 1.2.4 (Proposition 2.8, (Mohamadian, 2015)) H halkası için aşağıdakiler denktir:

- (i) H tamlık bölgesidir.
- (ii) Sıfır ideali tek r -idealdir.
- (iii) Her $z, t \in H$ için $\text{ann}(zt) = \text{ann}(z) \cup \text{ann}(t)$ dir.

Tanım 1.2.5 (Sharp, 2000)

- (i) H', H nin bir ideali ise $\sqrt{H'} = \{h \in H : \exists n \in \mathbb{N} \text{ için } h^n \in H'\}$ kümesine H' nün radikali denir. Özel olarak $\sqrt{0}$ yani tüm nilpotent elemanların kümesi $\mathfrak{N}(H)$ ile gösterilecektir.
- (ii) $H' = \sqrt{H'}$ ise yani denk olarak $h^n \in H' (n \in \mathbb{N}, h \in H)$ iken $h \in H'$ oluyorsa H' ne radikal ideal denir. Özel olarak $\mathfrak{N}(H) = 0$ ise H ye bir indirgenmiş (reduced) halka denir.

Tanım 1.2.6 (Huckaba, 1988) H bir halka olsun.

- (i) Her $y \in H$ için $y = y^2 z$ şartını sağlayan bir $z \in H$ varsa H ye bir von Neumann regüler (von Neumann regular) halka denir.
- (ii) Her $h \in H$ için $h^2 = h$ yani her eleman idempotent ise H ye bir Bool (Boolean) halkası denir.
- (iii) $S = \text{Reg}(H)$ olmak üzere $S^{-1}H$ bir von Neumann regüler halka ise H ye bir sözde regüler (quasi regular) halka denir.

von Neumann regüler halkalar ilk kez (Neumann, 1936) da çalışılmıştır ve bu zamana kadar birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir (bkz: (Jayaram ve Tekir, 2018)). Bir H halkasının von Neumann regüler halka olması için g.y.ş aşağıdaki denk koşullardan birinin sağlanmasıdır:

- (i) Her V, U ideali için $VU = V \cap U$.
- (ii) Her V ideali için $V = V^2$.
- (iii) Her ideal radikal idealdir (bkz: (Theorem 1, (Jayaram ve Tekir, 2018))).

Yukarıdaki tanımlardan her Bool halkasının bir von Neumann regüler halka ve ayrıca her von Neumann regüler halkanın da bir sözde regüler halka olduğu görülür. Fakat bu ifadelerin tersi doğru olmayabilir. Örneğin cisim olmayan tamlık bölgeleri bir sözde regüler halka fakat von Neumann regüler halka değildir. Ayrıca $\mathbb{Z}_6$ halkası bir von Neumann regüler halka fakat Bool halkası değildir.

Önerme 1.2.8 (Proposition 3.6, (Mohamadian, 2015)) H halkasının sözde regüler olması için g.y.ş her r -ideal bir radikal idealdir.

Tanım 1.2.9 (Huckaba, 1988) H halkasında $U \subseteq \text{zd}(H)$ şartını sağlayan her sonlu üretilmiş U ideali için $\text{ann}(U) \neq 0$ ise H ye (A) -özelliğini sağlar denir.

von Neumann regüler halkalar, Noetherian halkalar (yani her ideali sonlu üretilmiş halkalar), polinom halkaları gibi birçok halka sınıfı (A) -özellikliğini sağlamaktadır. (Theorem 4.2, (Mohamadian, 2015)) te (A) -özellikliği r -idealler yardımıyla aşağıdaki gibi karakterize edilmiştir.

Teorem 1.2.10 (Theorem 4.2, (Mohamadian, 2015)) H halkası için aşağıdakiler denktir:

- (i) H , (A) -özellikliğini sağlar.
- (ii) U nun H nin r -ideali olması için g.y.ş $U[X]$ in $H[X]$ halkasının bir r -ideali olmasıdır.

1.3 Asal İdeallerin Genelleştirmeleri

Bu bölümde asal ideallerin literatürde mevcut olan ve tezin 3., 4. ve 5. bölümlerinde karşılaşacağımız genelleştirmeleri verilecektir. Asal idealler ve genelleştirmeleri birçok halka karakterizasyonunda kullanıldıkları için değişmeli cebirde önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin değer bölgeleri (valuation domains) (Beddani ve Messirdi, 2016) da 2-asal idealler kullanılarak karakterize edilmiştir. Şimdi asal ideallerin bu genelleştirmelerinden ve birtakım özelliklerinden bahsedelim.

Tanım 1.3.1 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $U \subseteq H$ bir has ideal ve her $z, t \in H$ için $zt \in U$ iken $z \in U$ veya $t \in \sqrt{U}$ oluyorsa U ya asalımsı ideal denir.

Asalımsı idealler öncelikle (Atani ve Farzalipour, 2005) te zayıf asalımsı ideallere genellenmiştir.

Tanım 1.3.2 (Atani ve Farzalipour, 2005) $U \subsetneq H$ bir ideal ve her $z, t \in H$ için $0 \neq zt \in U$ iken $z \in U$ veya $t \in \sqrt{U}$ oluyorsa U ya zayıf asalımsı ideal denir.

Asal ve asalımsı ideallerin farklı genelleştirmeleri sırasıyla (Badawi, 2007), (Badawi ve ark., 2014) ve (Badawi ve ark., 2015) de çalışılmıştır.

Tanım 1.3.3 $U \subsetneq H$ ideali verilsin.

- (i) (Badawi, 2007) Her $z, t, u \in H$ için $ztu \in U$ iken $zt \in U$ veya $zu \in U$ veya $tu \in U$ oluyorsa U ya bir 2-yutan ideal denir.

- (ii) (Badawi ve ark., 2014) Her $z, t, u \in H$ için $ztu \in U$ iken $zt \in U$ veya $zu \in \sqrt{U}$ veya $tu \in \sqrt{U}$ oluyorsa U ya 2-yutan asalımsı ideal denir.
- (iii) (Badawi ve ark., 2015) Her $z, t, u \in H$ için $0 \neq ztu \in U$ iken $zt \in U$ veya $zu \in \sqrt{U}$ veya $tu \in \sqrt{U}$ oluyorsa U ya zayıf 2-yutan asalımsı ideal denir.

Teorem 1.3.4 (Theorem 2.4, (Badawi, 2007)) $U \subsetneq H$ bir 2-yutan idealse aşağıdakilerden biri geçerlidir:

- (i) $\sqrt{U} = V$ ve $V^2 \subseteq U$ şartını sağlayan bir V asal ideali vardır.
- (ii) $\sqrt{U} = V_1 \cap V_2$, $V_1 V_2 \subseteq U$ ve $\sqrt{U}^2 \subseteq U$ şartlarını sağlayan U nun farklı minimal asal idealleri V_1, V_2 vardır.

Tanım 1.3.5 $U \subsetneq H$ ideali verilsin.

- (i) (Fuchs, 1947) $\sqrt{U}$ bir asal ideal ise U ya bir quasi asalımsı (quasi primary) ideal denir.
- (ii) (Beddani ve Messirdi, 2016) Her $z, t \in H$ için $zt \in U$ iken $z^2 \in U$ veya $t^2 \in U$ oluyorsa U ya bir 2-asal ideal denir.

Tanım 1.3.6 (Larsen ve McCarthy, 1971) H bir tamlık bölgesi; H', H nin kesir cismi ve her $h \in H'$ için $h \in H$ veya $h^{-1} \in H$ oluyorsa H ye bir değer bölgesi (valuation domain) denir.

Tanım 1.3.7 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $z, t \in H$ olmak üzere $z = tu$ olacak şekilde bir $u \in H$ varsa t elemanına z yi böler denir ve $t|z$ ile gösterilir.

Teorem 1.3.8 (Theorem 2.4, (Beddani ve Messirdi, 2016)) H tamlık bölgesi için aşağıdakiler denktir:

- (i) H bir değer bölgesidir.
- (ii) Her has temel ideal 2-asaldır.
- (iii) Her has ideal 2-asaldır.

Tanım 1.3.9 (Badawi, 1999) H nin her asal ideali U her temel ideali (z) ile karşılaştırılabilirse yani $(z) \subseteq U$ veya $U \subseteq (z)$ oluyorsa H ye bir bölünmüş halka (divided ring) denir.

H halkasının bir bölünmüş halka olması için g.y.ş her $z, t \in H$ için $z|t$ veya bir $k \in \mathbb{N}$ için $t|z^k$ olduğu gösterilmiştir (bkz: Proposition 2, (Badawi, 1999)).

Tanım 1.3.10 (Călugăreanu, 2016) Değişmeli olması gerekmeyen bir H halkasının her elemanı bir birimsel ve nilpotent elemanın çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa H ye bir UN -halkası denir.

Önerme 1.3.11 (Proposition 2, (Călugăreanu, 2016)) H değişmeli halkasının UN -halka olması için g.y.ş $\mathfrak{N}(H)$ tek maksimal idealdir.

Bölüm 3., 4. ve 5. te tıpkı (Beddani ve Messirdi, 2016) da yapıldığı gibi “ UN -halkalarını, von Neumann regüler halkaları, Bool halkalarını, indirgenmiş halkaları ve bölünmüş halkaları karakterize edebilecek asal ideallerin yeni genellemeleri verilebilir mi?” sorusuna cevap aranacaktır. Ortaya konulacak yeni ideal sınıflarının asal idealler ve literatürde mevcut genelleştirmelerinin sahip olduğu özelliklere sahip olup-olmadığı problemi irdelenecektir. Şimdi asal ideallerin en bilinen özelliklerinden birini vererek bu kısmı noktalayalım.

Teorem 1.3.12 (Asaldan Kaçınma Teoremi) $U \subseteq H$ bir ideal ve $V_1, V_2, \dots, V_n$ de asal idealler olsun. $U \subseteq \bigcup_{t=1}^n V_t$ ise bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $U \subseteq V_k$ dir.

1.4 Polinom Halkası ve Kuvvet Serisi Halkası

Bu bölümde polinom halkası ve kuvvet serisi halkasına ilişkin ileride kullanılacak notasyonlar, tanımlar ve teoremler verilecektir. $H[X]$ ile her zaman H den katsayılı polinom halkası ve $H[[X]]$ ile kuvvet serisi halkası gösterilecektir.

Tanım 1.4.1 (Gilmer, 1972)

- (i) $h(X) = t_0 + t_1X + t_2X^2 + \dots + t_nX^n \in H[X]$ için h nin kapsamı (content) $t_0, t_1, \dots, t_n$ elemanlarının ürettiği ideal olarak tanımlanır ve $c(h) = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ ile temsil edilir.
- (ii) $h(X) = \sum_{z=0}^{\infty} t_zX^z \in H[[X]]$ için h nin kapsamı $c(h) = (\{t_z : z \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.2 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $U \subseteq H$ ideali verilsin.

- (i) $U[X] = \{h \in H[X]: c(h) \subseteq U\} \subseteq H[X]$ in bir idealidir.
- (ii) $U[[X]] = \{h \in H[[X]]: c(h) \subseteq U\} \subseteq H[[X]]$ in bir idealidir.

Şimdi kapsamlara ilişkin sıklıkla kullanılan Dedekind-Mertens teoremini vereceğiz.

Teorem 1.4.3 (Theorem 28.1, (Gilmer, 1972)) u nun derecesi m olmak üzere $0 \neq h, u \in H[X]$ için $c(h)^{m+1}c(u) = c(h)^m c(hu)$ gerçekleşir.

Aşağıdaki teorem Dedekind-Mertens teoreminin kuvvet serisi halkasındaki versiyonudur.

Teorem 1.4.4 (Theorem 2.6, (Epstein ve Shapiro, 2015)) H bir Noetherian halka olmak üzere $0 \neq h \in H[[X]]$ verilsin. $c(h)$ nin H nin her m maksimal idealine göre lokalizasyonu $c(h)_m$ maksimum k üreteçliyse her $u \in H[[X]]$ için

$$c(u)^k c(h) = c(u)^{k-1} c(uh)$$

sağlanır.

Lemma 1.4.5 (Lemma 2.2, (Achraf ve ark., 2017)) H , Noetherian halka ve $U \subseteq H$ bir idealse

$$\sqrt{U[[X]]} = \sqrt{U}[[X]]$$

sağlanır.

1.5 Triviyal Genişleme

Bu bölümde tezin 3., 4. ve 5. bölümlerinde karşımıza çıkacak ve literatürde karşı örnek bulmak için sıklıkla kullanılan triviyal genişlemeden (trivial extension) bahsedilecektir.

Tanım 1.5.1 (Huckaba, 1988) E bir H -modül ise $H \ltimes E = H \times E$ kümesi aşağıdaki işlemlerle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır: her $z, t \in H; e, e' \in E$ için,

$$(z, e) + (t, e') = (z + t, e + e')$$

$$(z, e)(t, e') = (zt, ze' + te).$$

Özel olarak, $H \ltimes E$ ye H -modül E nin triviyal genişlemesi denir.

Teorem 1.5.2 (Theorem 3.1 ve Theorem 3.2, (Anderson ve Winders, 2009)) E bir H -modül olsun.

- (i) $H \ltimes E$ nin asal idealleri U, H nin asal ideali olmak üzere $U \ltimes E$ şeklindedir.

- (ii) $U \subseteq H$ bir ideal, $D \subseteq E$ bir alt modül ise $U \propto D \subseteq H \propto E$ nin ideal olması için g.y.ş $UE \subseteq D$ dir. Bu durumda $U \propto D$ ye homojen ideal denir.
- (iii) $U \subseteq H$ bir ideal, $D \subseteq E$ bir alt modül ve $UE \subseteq D$ ise $\sqrt{U \propto D} = \sqrt{U} \propto E$ dir. Özel olarak $\mathfrak{N}(H \propto E) = \mathfrak{N}(H) \propto E$ dir.

Teorem 1.5.3 (Theorem 25.2, (Huckaba, 1988)) E bir H -modül olsun. $zd(H \propto E) = \{(z, e) : z \in z(E) \cup zd(H)\}$ gerçekleşir.

1.6. Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafiği

Burada tezin 4. bölümünde ihtiyaç duyulacak grafiksel tanımlara ve literatürde var olan değişmeli halkalar üzerinde kurulmuş bazı grafiklere yer verilecektir.

Tanım 1.6.1 (Livingston, 1997)

- (i) C köşe noktalarının kümesi K de C üzerinde simetrik fakat yansıma özelliği olmayan bir bağıntı olmak üzere $G = (C, K)$ ikilisine bir basit grafik (simple graph) denir. Burada K kümesi G grafiğinin kenar kümesi olarak adlandırılır.
- (ii) $(z, t) \in K$ ise z ile t ye komşu köşeler denir ve kısaca $z - t$ ile gösterilir.

Bu tezdeki tüm grafikler basit grafik olduğundan bundan sonra yalnızca grafik olarak adlandırılacaktır.

Tanım 1.6.2 (Belobas, 1988) $G = (C, K)$ bir grafik olmak üzere $C' \subseteq C$ ve $K' \subseteq K$ ise $G' = (C', K')$ ikilisine G nin bir alt grafiği denir.

Tanım 1.6.3 (Belobas, 1998) $G = (C, K)$ bir grafik olsun.

- (i) $z \in C$ ye komşu olan tüm köşe noktalarının kümesine z nin komşuluğu denir ve $N_G(z)$ ile gösterilir.
- (ii) $z \in C$ olmak üzere $N_G(z) = \emptyset$ ise z ye izole nokta denir.
- (iii) $|C| = n$ olmak üzere G grafiğinin tüm köşeleri izole nokta ise G ye bir n -boş grafik denir.
- (iv) G bir 0-boş grafik ise G ye kısaca boş grafik denir.

Tanım 1.6.4 (Diestel, 2012) $G = (C, K)$ grafiği verilsin.

- (i) $z_0, z_1, \dots, z_n \in C$ tümüyle farklı köşe noktaları için $z_0 - z_1 - \dots - z_n$ ise $z_0 - z_1 - \dots - z_n$ ye z_0 dan z_n ye n uzunluklu bir yol (path) denir.
- (ii) G nin her iki farklı köşe noktası arasında bir yol varsa G ye bağlantılı aksi takdirde bağlantısız grafik denir.
- (iii) z ile t birbirinden farklı köşe noktaları olmak üzere z ile t arasındaki en kısa yolun uzunluğuna z ile t arasındaki uzaklık denir ve $d(z, t)$ ile gösterilir. Özel olarak z ile t arasında bir yol yoksa $d(z, t) = \infty$ olarak tanımlanır.
- (iv) G nin çapı (diameter) $diam(G) = \sup\{d(z, t) : z, t \in C, z \neq t\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.6.5 (Diestel, 2012) $G = (C, K)$ bir grafik olmak üzere $C = C_1 \cup C_2$ ve $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ şartlarını sağlayan $C_1, C_2 \subseteq C$ var olsun.

- (i) $z, t \in C$ için $z - t$ iken $z \in C_1, t \in C_2$ veya $z \in C_2, t \in C_1$ oluyorsa yani her kenarın başlangıç ve bitiş noktaları aynı köşe kümesinde değilse G ye iki parçalı (bipartite) grafik denir.
- (ii) G bir iki parçalı grafik olsun. Her $z \in C_1$ ve $t \in C_2$ için $z - t$ ise G ye iki parçalı tam grafik denir.

Değişmeli halkaların sıfır bölen grafiği ilk kez (Beck, 1988) de çalışılmıştır. Yazar bu çalışmasında halkayı renklendirme problemiyle ilgilenmiştir. Daha sonra (Anderson ve Livingston, 1999) makalesinde halkaların sıfır bölen grafiğinin çizgesel özellikleriyle söz konusu halkanın cebirsel özellikleri arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. H bir halka ve $zd^*(H) = zd(H) - \{0\}$ olsun. $\Gamma(H)$, H nin sıfır bölen grafiğini göstermek üzere $C = zd^*(H)$ bu grafiğin köşe noktalarının kümesi olsun. $\Gamma(H)$ grafiğinde birbirinden farklı z, t köşelerinin komşu olması için g.y.ş $zt = 0$ dır (Anderson ve Livingston, 1999). Daha sonra (Redmond, 2003) te sıfır bölen grafiği, H nin herhangi bir U idealine göre genellenmiştir. $U \subseteq H$ ideali verilsin. $\Gamma_U(H)$ köşe noktalarının kümesi $C = C_U(H) = \{z \in H - U : \exists t \in H - U \text{ için } zt \in U\}$ olan bir grafik olmak üzere, herhangi iki farklı köşe noktası z, t nin komşu olabilmesi için g.y.ş $zt \in U$ dur (Redmond, 2003). $\Gamma_U(H)$ ye H nin U idealine göre ideal bazlı sıfır bölen grafiği denir. Dikkat edilirse $U = 0$ için $\Gamma_0(H) = \Gamma(H)$ gerçekleşir. Böylece, $\Gamma_U(H)$ nin $\Gamma(H)$ nin bir genellemesi olduğu ortaya çıkar. (Redmond, 2003) te $\Gamma_U(H)$ nin grafiksel özellikleri H nin cebirsel yapısını belirlemede kullanılmıştır.

Önerme 1.6.6 (Proposition 2.2, (Redmond, 2003)) $0 \neq U \subseteq H$ ideali verilsin. $\Gamma_U(H)$ nin boş bir grafik olması için g.y.ş U bir asal idealdir.

Teorem 1.6.7 (Thoerem 2.4, (Redmond, 2003)) $0 \neq U \subseteq H$ ideali verilsin. $\Gamma_U(H)$ bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma_U(H)) \leq 3$ tür.

Biz de yukarıdaki önermeden esinlenerek 4. bölümde güçlü quasi asalımsı idealleri, 2-yutan idealleri ve von Neumann regüler halkaları karakterize edebilecek halkalar üzerinde yeni bir grafik kurulabilir mi? sorusuna yanıt arayacağız. Bu yeni grafiğin $\Gamma_U(H)$ ile benzer özellikler taşıyıp taşımadığını göstereceğiz.

1.7. Topolojik Uzaylar

Bu bölümde tezin son kısmında tanımlanan n -asal idealler kümesi üzerinde kurulacak topoloji için gerekli tanımlar verilecektir.

Tanım 1.7.1 (Munkres, 2014) Y topolojik uzay, $D \subseteq Y$ için $cl(D)$, D yi içeren tüm kapalı kümelerin kesişimi olarak tanımlanır. O halde $cl(D)$, D yi içeren en küçük kapalı kümedir.

Tanım 1.7.2 (Kelley, 1975) Y bir topolojik uzay olsun.

- (i) Her $z \neq t \in Y$ için bu noktalardan birini kapsayan fakat diğerini kapsamayan bir açık küme bulunabilirse Y ye bir T_0 -uzay denir.
- (ii) Y nin bir T_0 -uzay olması için g.y.ş her $z, t \in Y$ için $cl(\{z\}) = cl(\{t\})$ iken $z = t$ dir.
- (iii) Her $z \neq t \in Y$ için $z \in A, t \notin A$ ve $z \notin B, t \in B$ şartlarını sağlayan A, B açık kümeleri varsa Y ye T_1 aksiyomunu sağlar denir.
- (iv) Y nin T_1 aksiyomunu sağlaması için g.y.ş her $z \in Y$ için $cl(\{z\}) = \{z\}$ dir.
- (v) Her $z \neq t \in Y$ için sırasıyla z ve t yi içeren ayrık açık A, B kümeleri varsa Y ye bir T_2 -uzay denir.

Tanım 1.7.3 (Dugundji, 1966) Y topolojik uzayı verilsin.

- (i) $D_1, D_2 \subsetneq Y$ kapalı alt kümeleri için $Y = D_1 \cup D_2$ şeklinde yazılamıyorsa D ye indirgenemez uzay denir.

- (ii) $D_1, D_2 \subsetneq Y$ ayrık kapalı alt kümeleri için $Y = D_1 \cup D_2$ şeklinde yazılamıyorsa Y ye bağlantılı uzay denir.

Tanım 1.7.4 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $Y = \text{Spec}(H)$, H nin asal ideallerinin kümesi olsun. $U' \subseteq H$ için $V(U') = \{U \in \text{Spec}(H) : U' \subseteq U\}$ kümelerini kapalı kümeler olarak göz önüne alırsak, $\tau = \{O(U') : O(U') = Y - V(U') \text{ ve } U' \subseteq H\}$ ailesi Y için bir topolojik uzay olur. Bu uzaya H nin asal spektrumu veya Zariski Topolojisi denir.



2. r -ALT MODÜLLER VE sr -ALT MODÜLLER

Bu bölümde halkadaki r -ideal kavramının modüllere iki farklı genişlemesi r -alt modül ve sr -alt modüllerin cebirsel özelliklerini çalışacağız. Ayrıca bu iki farklı genişleme arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyacağız.

2.1. r -Alt Modüller

Tanım 2.1.1 $E' \subsetneq E$ bir alt modül, $z \in H$ ve $e' \in E$ için $ze' \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ iken $e' \in E'$ oluyorsa E' ne r -alt modül denir.

Tanımdan kolaylıkla H -modül H nin r -alt modüllerinin tam olarak r -idealler olduğu görülür. Aşağıdaki lemma bir alt modülün r -alt modül olup olmadığını kolaylıkla belirlememizi test eden bir metod önermektedir.

Lemma 2.1.2 $E' \subsetneq E$ alt modülü verilsin. E' nün r -alt modül olması için g.y.ş $z(E/E') \subseteq z(E)$ olmasıdır.

İspat E' bir r -alt modül olsun. Şimdi $z(E/E') \subseteq z(E)$ kapsamasını gösterelim. $z \in z(E/E') - z(E)$ seçelim. $z(e + E') = ze + E' = E' = 0_{E/E'}$ şartını sağlayan $0_{E/E'} \neq e + E' \in E/E'$ bulunur. Buradan $ze \in E'$ gerçekleşir. E' bir r -alt modül ve $\text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $e \in E'$ çelişkisi bulunur. O halde $z(E/E') \subseteq z(E)$ kapsaması geçerlidir. Tersine $z(E/E') \subseteq z(E)$ geçerli olsun. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0_E$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ verilsin. Buradan $z(e + E') = ze + E' = E' = 0_{E/E'}$ bulunur. Ayrıca $\text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $z \notin z(E)$ ve buradan $z \notin z(E/E')$ elde edilir. O halde $e + E' \in \text{ann}_{E/E'}(z) = 0_{E/E'}$ yani $e + E' = 0_{E/E'}$ gerçekleşir. Sonuç olarak, $e \in E'$ yani E' bir r -alt modül olur.

Şimdi r -alt modüllere ilişkin birkaç örnek verelim.

Örnek 2.1.3 $n \geq 2$, $H = \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{Z}_n$ olsun. $(\bar{x}) \subsetneq E$ alt modülü verilsin. Buradan $\text{ebob}(x, n) = d > 1$ olduğu kolayca görülür. Böylece $(\bar{x}) = (\bar{d})$ ve $E/(\bar{x}) \cong \mathbb{Z}_d$ bulunur. Ayrıca $z(\mathbb{Z}_d) = z(E/(\bar{x})) \subseteq z(E)$ olduğundan Lemma 2.1.2 den $(\bar{x})$, r -alt modüldür.

Örnek 2.1.4 $H = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{Q}/H$ olsun. p bir asal sayı olmak üzere $E = E(p) =$

$\left\{ \alpha \in F: \exists t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ve } r \in H \text{ için } \alpha = \frac{r}{p^t} + H \right\} \subseteq F$ bir alt modüldür. Ayrıca E nin alt modülleri $t_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $E_{t_0} = \left\{ \alpha \in F: \exists r \in H \text{ için } \alpha = \frac{r}{p^{t_0}} + H \right\}$ biçimindedir. Şimdi $E_{t_0} \subseteq E$ alt modülü verilsin. Öncelikle $(E_{t_0}:E) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $p \left(\frac{1}{p^{t_0+1}} + H \right) = \frac{1}{p^{t_0}} + H \in E_{t_0}$ fakat $p \notin (E_{t_0}:E)$ ve $\frac{1}{p^{t_0+1}} + H \notin E_{t_0}$ olduğundan E_{t_0} bir asal alt modül olamaz. Şimdi E_{t_0} ın r -alt modül olduğunu gösterelim. $m \in H$ için $\text{ann}_E(m) = 0_E$ olması için g.y.ş $\text{ebob}(m, p) = 1$ olduğu kolayca görülür. $m \left(\frac{r}{p^t} + H \right) = \frac{mr}{p^t} + H \in E_{t_0}$ şartını sağlayan $m \in H$ ve $\frac{r}{p^t} + H \in E$ elemanları verilsin. $\text{ann}_E(m) = 0_E$ olduğunu kabul edelim. O halde $\text{ebob}(m, p) = 1$ bulunur. $t \leq t_0$ ise $\frac{r}{p^t} + H = \frac{rp^{t_0-t}}{p^{t_0}} + H \in E_{t_0}$ olur. Şimdi $t_0 < t$ olduğunu kabul edelim. $\frac{mr}{p^t} + H \in E_{t_0}$ olduğundan $\frac{mr}{p^t} + H = \frac{k}{p^{t_0}} + H$ şartını sağlayan bir $k \in H$ bulunur. Buradan $\frac{mr}{p^t} - \frac{k}{p^{t_0}} = \frac{mr - kp^{t-t_0}}{p^t} \in H$ yani $mr \equiv kp^{t-t_0} \pmod{p^t}$ elde edilir. $\text{ebob}(m, p) = 1$ olduğundan $\text{ebob}(m, p^t) = 1$ bulunur ve buradan bir $k' \in H$ için $r \equiv k'kp^{t-t_0} \pmod{p^t}$ olur. O halde $\frac{r}{p^t} + H = \frac{kk'}{p^{t_0}} + H \in E_{t_0}$ yani E_{t_0} bir r -alt modüldür.

Lemma 2.1.5 $E' \subsetneq E$ bir r -alt modülse $(E':E) \subseteq z(E)$ dir.

İspat $\text{ann}(E/E') \subseteq z(E/E')$ olduğu kolayca görülür. $E' \subsetneq E$, r -alt modülü verilsin. Lemma 2.1.2'den $z(E/E') \subseteq z(E)$ ve böylece $(E':E) = \text{ann}(E/E') \subseteq z(E/E') \subseteq z(E)$ gerçekenir.

Aşağıdaki örnek Lemma 2.1.5'in tersinin doğru olmadığını göstermektedir yani $E' \subsetneq E$ alt modülü için $(E':E) \subseteq z(E)$ iken E' nün r -alt modül olması gerekmez.

Örnek 2.1.6 $H = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $E' = 2\mathbb{Z} \times 0$ alalım. $(E':E) = (0) \subseteq z(E)$ ve $E/E' \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ olduğu kolayca görülür. $2 \in z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) - z(E)$ olduğundan $z(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \not\subseteq z(E)$ yani E' nün r -alt modül olmadığı anlaşılır.

Şimdi asal alt modül ve r -alt modül kavramlarının farkını ortaya koyan aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.1.7 (i) $E' = 3\mathbb{Z}$ ve $H = \mathbb{Z}$ alalım. $E' \subseteq H$ bir asal H -alt modüldür. Fakat $(E':H) = E' \not\subseteq z(H)$ olduğundan Lemma 2.1.5'ten H , r -alt modül değildir.

(ii) $H = \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{Z}_{18}$ verilsin. Örnek 2.1.3'ten E nin her alt modülü ve özel olarak $E' = (\bar{9})$, r -alt modüldür. Ayrıca, E' nün asal olmadığı kolayca anlaşılır.

Bir vektör uzayının tüm alt uzaylarının asal olduğunu biliyoruz. Bu gerçek, r -alt modüller için de doğrudur.

Önerme 2.1.8 H bir cisim olmak üzere bir H -modül E verilsin. Her $E' \subsetneq E$ alt uzayı bir r -alt modüldür.

İspat $E' \subsetneq E$ alt uzayı verilsin. $z \in z(E/E')$ seçelim. O halde bir $e' \notin E'$ için $z(e' + E') = ze' + E' = 0_{E/E'}$ yani $ze' \in E'$ elde edilir. $z \neq 0$ ise $z^{-1} \in H$ ve buradan $e' = z^{-1}(ze') \in E'$ çelişkisi bulunur. O halde $z = 0$ yani $0 = z(E/E') \subseteq z(E)$ bulunur. Böylece Lemma 2.1.2 den E' , r -alt modüldür.

Önerme 2.1.9 $E' \subsetneq E$ bir asal alt modül olsun. E' nün r -alt modül olması için g.y.ş $(E':E) \subseteq z(E)$ dir.

İspat $E' \subsetneq E$ asal alt modülü verilsin. $z(E/E') = (E':E)$ olduğu kolayca görülebilir. O halde Lemma 2.1.2'den E' nün r -alt modül olması için g.y.ş $(E':E) \subseteq z(E)$ dir.

Önerme 2.1.10 Bir H -modül E için aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) Sıfır r -alt modüldür.
- (ii) r -alt modüllerin arakesiti de r -alt modüldür.

İspat (i) $E' = 0$ olsun. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ elemanlarını seçelim. Buradan $ze = 0$ ve $e \in \text{ann}_E(z) = 0$ yani $e = 0 \in E'$ gerçekleşir. O halde, E' bir r -alt modüldür.

(ii) I bir indis kümesi ve $\emptyset \neq \{E_t\}_{t \in I}$ r -alt modüllerin bir ailesi olsun. $E' = \bigcap_{t \in I} E_t$ diyelim. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanlarını seçelim. $ze \in E'$ olduğundan her $t \in I$ için $ze \in E_t$ dir. E_t bir r -alt modül ve $\text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $e \in E_t$ bulunur. O halde $e \in \bigcap_{t \in I} E_t = E'$ yani E' bir r -alt modüldür.

Aşağıdaki örnek r -alt modüllerin toplamının r -alt modül olmayabileceğini söylemektedir.

Örnek 2.1.11 $H = \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{Z}_{10}$ alalım. Örnek 2.1.3'ten $E' = (\bar{2})$ ve $D' = (\bar{5})$ birer r -alt modüldür. Fakat $E' + D' = E$ bir r -alt modül değildir.

$E' \subseteq E$ asal alt modülken $(E':E) \subseteq H$ bir asal idealdir fakat bu özelliği r -alt

modüllere genelleyemeyiz.

Örnek 2.1.12 $H = \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{Z}_4$ olsun. $E' = (\bar{2}) \subseteq E$ bir r -alt modüldür fakat bir tamlık bölgesinin sıfırdan farklı r -ideali olamayacağından $(E':E) = 2\mathbb{Z} \subseteq H$ bir r -ideal değildir.

$S \subseteq H$ çarpımsal kapalı küme olmak üzere $S^{-1}E$ kesir modülünü H -modül olarak göz önüne alalım. Aşağıdaki önermede $\pi: E \rightarrow S^{-1}E$ fonksiyonu her $e \in E$ için $\pi(e) = \frac{e}{1}$ olarak tanımlanan doğal homomorfizmadır.

Önerme 2.1.13 $E' \subsetneq E$ alt modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) E' bir r -alt modüldür.
- (ii) Her $z \in H - z(E)$ için $zE \cap E' = zE'$ dir.
- (iii) Her $z \in H - z(E)$ için $E' = (E':_E z)$ dir.
- (iv) $E' = \pi^{-1}(D)$ şartını sağlayan $S^{-1}H$ -modül $S^{-1}E$ nin bir D alt modülü vardır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $E' \subseteq E$ r -alt modülü verilsin. Her $z \in H$ için $zE' \subseteq zE \cap E'$ geçerlidir. Şimdi $z \in H - z(E)$ ve $e \in zE \cap E'$ seçelim. O halde $e = ze'$ şartını sağlayan $e' \in E'$ bulunur. $\text{ann}_E(z) = 0$ ve $e = ze' \in E'$ olduğundan $e' \in E'$ gerçekleşir. Böylece $e = ze' \in zE'$ yani $zE \cap E' = zE'$ gerçekleşir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $z \in H$ için $E' \subseteq (E':_E z)$ kolayca görülür. Şimdi $z \in H - z(E)$ ve $e \in (E':_E z)$ seçelim. $e \in (E':_E z)$ olduğundan $ze \in E'$ ve buradan $ze \in zE \cap E' = zE'$ elde edilir. O halde $ze = ze'$ biçiminde $e' \in E'$ bulunur. $e - e' \in \text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $e = e' \in E'$ yani $E' = (E':_E z)$ gerçekleşir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $E' \subseteq \pi^{-1}(S^{-1}E')$ olduğunu biliyoruz. $e \in \pi^{-1}(S^{-1}E')$ seçelim. O halde $\pi(e) = \frac{e}{1} \in S^{-1}E'$ ve buradan $\exists z \in S$ için $ze \in E'$ olur. (iii)'den $e \in (E':_E z) = E'$ bulunur.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $D, S^{-1}E$ nin $S^{-1}H$ -alt modülü ve $E' = \pi^{-1}(D)$ olsun. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Buradan $\pi(ze) = \frac{ze}{1} \in D$ bulunur. $D, S^{-1}E$ nin bir $S^{-1}H$ -alt modülü olduğundan $\pi(e) = \frac{e}{1} = \frac{1ze}{z1} \in D$ ve böylece $e \in \pi^{-1}(D) = E'$ yani E' bir r -alt modüldür.

Tanım 2.1.14 (Ribenoim, 1972) $E' \subseteq E$ alt modülü ve her $z \in H$ için $zE \cap E' = zE'$ sağlanıyorsa E' ne bir saf (pure) alt modül denir.

Tanım 2.1.14 ve Önerme 2.1.13'ten her saf alt modülün r -alt modül olduğu kolayca görülür. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olamayacağına ilişkin bir örnek verelim.

Örnek 2.1.15 $H = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Z}_{16}$ ve $E' = (\bar{2})$ olsun. Örnek 2.1.3'ten E' bir r -alt modüldür. $2E' = (\bar{4}) \subsetneq 2E \cap E' = (\bar{2})$ olduğundan E' bir saf alt modül değildir.

Sonuç 2.1.16 $\text{ann}(E) = z(E)$ şartını sağlayan bir E modülü verilsin. $E' \subseteq E$ nin r -alt modül olması için g.y.ş E' nün saf olmasıdır.

İspat $\Rightarrow E' \subseteq E$ r -alt modülü verilsin. $z \notin z(E)$ ise E' bir r -alt modül olduğundan Önerme 2.1.13 (ii)'den $zE \cap E' = zE'$ gerçekleşir. Şimdi $z \in z(E) = \text{ann}(E)$ seçelim. O halde $zE \cap E' = 0 = zE'$ yani E' bir saf alt modüldür.

$\Leftarrow$ Açıktır.

Önerme 2.1.17 $E' \subseteq E$ r -alt modülü ve $T \not\subseteq (E':_E)$ koşulunu sağlayan $T \subseteq H$ için $(E':_E T)$ bir r -alt modüldür. Özel olarak $T \not\subseteq \text{ann}(E)$ ise $\text{ann}_E(T) \subseteq E$ de bir r -alt modüldür.

İspat $ze \in (E':_E T)$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Buradan her $t \in T$ için $t(ze) = z(te) \in E'$ bulunur. E' bir r -alt modül olduğundan $te \in E'$ ve böylece $e \in (E':_E T)$ yani $(E':_E T) \subseteq E$ bir r -alt modüldür.

Sonuç 2.1.18 E bir H -modül ve $z \notin \text{ann}(E)$ ise $\text{ann}_E(z) \subseteq E$, r -alt modüldür.

Önerme 2.1.19 Tek r -alt modülü sıfır olan bir E modülü için aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) Sıfır alt modülü asaldir.
- (ii) $\text{ann}(E) \subseteq H$ ideali asaldir.

İspat (i) $ze = 0$ ve $z \notin \text{ann}(E)$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Sonuç 2.1.18'den $\text{ann}_E(z) \subseteq E$ bir r -alt modüldür. Varsayımdan $e \in \text{ann}_E(z) = 0$ elde edilir. (ii) (i)'den elde edilir.

Teorem 2.1.20 $E' \subsetneq E$ alt modülü verilsin.

- (i) E' nün r -alt modül olması için g.y.ş $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ şartını sağlayan her $U \subseteq H$ ideali ve $D \subseteq E$ alt modülü için $UD \subseteq E'$ iken $D \subseteq E'$ dır.
- (ii) $(E':_E) \subseteq z(E)$ ve $E' \subseteq E$ bir r -alt modül değilse $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$, $E' \subsetneq D$, $(E':_E) \subsetneq U$ ve $UD \subseteq E'$ şartlarını sağlayan $U \subseteq H$ ideali ve $D \subseteq E$ alt modülü vardır.

İspat (i) $E' \subseteq E$ bir r -alt modül olsun. $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ ve $UD \subseteq E'$ şartını sağlayan $U \subseteq H$ ideali ve $D \subseteq E$ alt modülü verilsin. $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ olduğundan $\exists z \in U$

için $\text{ann}_E(z) = 0$ gerçekleşir. Ayrıca $UD \subseteq E'$ olduğundan her $e \in D$ için $ze \in E'$ bulunur. E' , r -alt modül olduğundan $e \in E'$ yani $D \subseteq E'$ olur. Tersine $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. $U = Hz$ ve $D = He$ diyelim. $UD = Hze \subseteq E'$ ve $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ olduğundan $D = He \subseteq E'$ yani $e \in E'$ olur.

(ii) $E' \subseteq E$ bir r -alt modül olmasın. O halde $ze \in E'$, $\text{ann}_E(z) = 0$ ve $e \notin E'$ koşullarını sağlayan $z \in H$, $e \in E$ vardır. Şimdi $U = (E':e)$ ve $D = (E':_E U)$ alalım. $UD \subseteq E'$ olduğu kolayca anlaşılır. $ze \in E'$ olduğundan $z \in U$ dur. Ayrıca $\text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $z \notin z(E)$ ve böylece $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ dir. Dahası $(E':E) \subseteq z(E)$ olduğundan $(E':E) \subsetneq U$ gerçekleşir. Ayrıca $Ue = (E':e)e \subseteq E'$ olduğundan $e \in D = (E':_E U)$ bulunur yani $E' \subsetneq D$ elde edilir.

Teorem 2.1.21 $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $U \subseteq H$ ideali ve $E_1, E_2, D \subseteq E$ alt modülleri için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $E_1, E_2 \subseteq E$, r -alt modüller ve $UE_1 = UE_2$ ise $E_1 = E_2$ dir.
- (ii) $UD \subseteq E$, r -alt modül ise $UD = D$ dir. Özel olarak, D bir r -alt modüldür.

İspat (i) $UE_1 = UE_2 \subseteq E_2$, $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ ve E_2 bir r -alt modül olduğundan Teorem 2.1.20'den $E_1 \subseteq E_2$ bulunur. Benzer şekilde $E_2 \subseteq E_1$ ve böylece $E_1 = E_2$ olur.

(ii) $UD \subseteq E$, r -alt modül olsun. $UD \subseteq UD$ ve $U \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 2.1.20'den $D \subseteq UD \subseteq D$ ve böylece $UD = D$ gerçekleşir.

Teorem 2.1.22 $D_1, D_2, \dots, D_n \subseteq E$ birer asal alt modül ve her $1 \leq i \neq j \leq n$ için $(D_i: E)$ ile $(D_j: E)$ karşılaştırılamasın. $\bigcap_{t=1}^n D_t \subseteq E$ bir r -alt modülse her $1 \leq i \leq n$ için D_i de r -alt modüldür.

İspat Teoremin tüm koşulları altında D_k nın r -alt modül olduğunu gösterelim. Bunun için $ze \in D_k$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. $(D_i: E)$ ler karşılaştırılamadığı için $y \in (\bigcap_{t \neq k} (D_t: E)) - (D_k: E)$ biçiminde $y \in H$ bulunur.

Aksi takdirde $(\bigcap_{t \neq k} (D_t: E)) \subseteq (D_k: E)$ ve $(D_k: E)$ asal olduğundan bir $m \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k\}$ için $(D_m: E) \subseteq (D_k: E)$ çelişkisi bulunur. O halde $yze = z(ye) \in \bigcap_{t=1}^n D_t$ ve $\bigcap_{t=1}^n D_t$ r -alt modül olduğundan $ye \in \bigcap_{t=1}^n D_t \subseteq D_k$ olur. Ayrıca $y \notin (D_k: E)$ ve D_k asal olduğundan $e \in D_k$ yani D_k bir r -alt modüldür.

Önerme 2.1.23 $E' \subseteq E$ maksimal r -alt modül ise yani r -alt modüller sınıfının bir maksimal elemanıysa asaldır.

İspat $ze \in E'$ ve $z \notin (E': E)$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Önerme 2.1.17'den

$(E':_E z)$ de r -alt modüldür. Ayrıca $E' \subseteq (E':_E z)$ ve E' maksimal r -alt modül olduğundan $e \in (E':_E z) = E'$ elde edilir.

Aşağıdaki sonuç Asaldan Kaçınma Teoreminin r -alt modüller için bir versiyonudur.

Önerme 2.1.24 $D, D_1, D_2, \dots, D_n \subseteq E$ alt modüller olmak üzere $D \subseteq \bigcup_{t=1}^n D_t$ olsun. Ayrıca, D_k bir r -alt modül, her $j \neq k$ için $(D_j: E) \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ ve $D \not\subseteq \bigcup_{j \neq k} D_j$ ise $D \subseteq D_k$ dir.

İspat $k = 1$ için iddiayı kanıtlayalım. $D \not\subseteq \bigcup_{j=2}^n D_j$ olduğundan $\exists e \in D - \bigcup_{j=2}^n D_j$ bulunur. $e \in D \subseteq \bigcup_{t=1}^n D_t$ olduğundan açıkça $e \in D_1$ bulunur. Şimdi $e' \in D \cap D_2 \cap \dots \cap D_n$ seçelim. Buradan $e + e' \in D - \bigcup_{j=2}^n D_j$ ve böylece $e + e' \in D_1$ olur. $e \in D_1$ olduğundan $e' = (e + e') - e \in D_1$ ve böylece $D \cap D_2 \cap \dots \cap D_n \subseteq D_1$ bulunur. Ayrıca her $j \neq k$ için $(D_j: E) \cap (H - z(E)) \neq \emptyset$ olduğundan $\text{ann}_E(z_j) = 0$ olacak şekilde bir $z_j \in (D_j: E)$ vardır. Şimdi $z = z_2 z_3 \dots z_n$ ve $U = \bigcap_{j=2}^n (D_j: E)$ diyelim. $\text{ann}_E(z_j) = 0$ olduğundan $\text{ann}_E(z) = 0$ olur. Ayrıca $z \in U \cap (H - z(E))$ ve $UD \subseteq D \cap D_2 \cap \dots \cap D_n \subseteq D_1$ olduğundan Teorem 2.1.20'den $D \subseteq D_1$ bulunur.

Tanım 2.1.25 $H - z(E) \subseteq T \subseteq H$ verilsin. Her $z \in H - z(E)$ ve $t \in T$ için $zt \in T$ sağlanıyorsa T ye r -çarpımsal kapalı küme denir.

Örnek 2.1.26 $E' \subseteq E$, r -alt modülü verilsin. Şimdi $H - (E': E)$ nin r -çarpımsal kapalı küme olduğunu göstereceğiz. E' , r -alt modül olduğundan Lemma 2.1.5'ten $(E': E) \subseteq z(E)$ ve böylece $H - z(E) \subseteq H - (E': E)$ elde edilir. Şimdi $z \in H - z(E)$ ve $t \in H - (E': E)$ seçelim. $zt \in (E': E)$ olduğunu varsayalım. Buradan her $e \in E$ için $zte \in E'$ elde edilir. Ayrıca $z \in H - z(E)$ olduğundan $\text{ann}_E(z) = 0$ ve E' bir r -alt modül olduğundan $te \in E'$ yani $t \in (E': E)$ çelişkisi bulunur. Demek ki, $zt \in H - (E': E)$ yani $H - (E': E)$ bir r -çarpımsal kapalı kümedir.

Tanım 2.1.27 $T \subseteq H$ bir r -çarpımsal kapalı küme ve $\emptyset \neq T^* \subseteq E$ olsun. $te \in T^*$ koşulu her $t \in T$ ve $e \in T^*$ için sağlanıyorsa T^* a bir T -kapalı küme denir.

Teorem 2.1.28 $T \subseteq H$ bir r -çarpımsal kapalı küme ve $T^* \subseteq E$, bir T -kapalı küme olsun. $D \subseteq E$, $D \cap T^* = \emptyset$ şartını sağlayan alt modülse $D \subseteq E'$ ve $E' \cap T^* = \emptyset$ şartını sağlayan $E' \subseteq E$, r -alt modülü vardır.

İspat $\Sigma = \{D': D' \subseteq E \text{ bir alt modül, } D \subseteq D' \text{ ve } D' \cap T^* = \emptyset\}$ kümesini göz önüne alalım. $D \in \Sigma$ olduğundan $\Sigma \neq \emptyset$ dir. Şimdi Σ dan bir $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots$

zincirini alalım. $D' = \bigcup_{t=1}^{\infty} D_t$ diyelim. $D \subseteq D'$ ve $T^* \cap D' = \emptyset$ olduğu kolayca görülür. Böylece Zorn Lemma'dan Σ bir maksimal elemana sahiptir, biz bu maksimal elemana E' diyelim. $E' \cap T^* = \emptyset$ olduğundan $E' \subsetneq E$ olduğu görülür. E' r -alt modül olmasın. Bu durumda $ze \in E', e \notin E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. $e \notin E'$ ve $e \in (E':_E z)$ olduğundan $E' \subsetneq (E':_E z)$ bulunur. $E' \in \Sigma$ maksimal eleman olduğundan $(E':_E z) \cap T^* \neq \emptyset$ ve buradan $\exists e^* \in E$ için $e^* \in T^* \cap (E':_E z)$ olur. T^* bir T -kapalı küme $z \in H - z(E) \subseteq T$ olduğundan $ze^* \in T^* \cap E'$ çelişkisi bulunur. O halde E' bir r -alt modüldür.

Teorem 2.1.29 H - modül E için aşağıdakiler denktir.

- (i) Her alt modül r -alt modüldür.
- (ii) $zD = D$ her $z \in H - z(E)$ ve D alt modülü için sağlanır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $D \subseteq E$ alt modülü ve $z \in H - z(E)$ seçelim. $D = E$ olduğunu kabul edelim. $zD \subsetneq E$ olduğunu varsayalım. Varsayımdan zD bir r -alt modüldür. $ze \in zD$ ($e \in D$) ve $\text{ann}_E(z) = 0$ olduğundan $e \in zD$ yani $zD = D$ çelişkisi bulunur. O halde $zD = D$ gerçekleşir. Şimdi $D \neq E$ olsun. Buradan $zD \subseteq D \neq E$ ve böylece zD bir r -alt modül olur ve benzer şekilde $zD = D$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $E' \subsetneq E$ alt modülü ve $z \in H - z(E)$ verilsin. (ii)'den $zE' = E'$, $zE = E$ ve böylece $zE' = E' = E \cap E' = zE \cap E'$ bulunur. Önerme 2.1.13'ten E' , r -alt modüldür.

Sonuç 2.1.30 $z \in H$ ve $e \in E$ verilsin. $\text{ann}_{H \rtimes E}(z, e) = 0$ olması için g.y.ş $\text{ann}_E(z) = 0$ ve $\text{ann}(z) = 0$ dır.

Önerme 2.1.31 $U \subseteq H$ bir r -idealse $U \rtimes E \subseteq H \rtimes E$ de bir r -idealdir.

İspat $U \subseteq H$ bir r -ideal olsun. $(z, e)(t, e') = (zt, ze' + te) \in U \rtimes E$ ve $\text{ann}_{H \rtimes E}(z, e) = 0$ olacak şekilde $z, t \in H$; $e, e' \in E$ alalım. Buradan $zt \in U$ ve $\text{ann}(z) = 0$ olur. U , r -ideal olduğundan $t \in U$ böylece $(t, e') \in U \rtimes E$ bulunur. O halde $U \rtimes E$, r -idealdir.

Aşağıdaki örnek Önerme 2.1.31'in tersinin her zaman doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 2.1.32 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ halkasında ve $2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ idealini göz önüne alalım. $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi olduğundan sıfırdan başka hiçbir r -ideali yoktur böylece $2\mathbb{Z}$ bir r -ideal değildir. Fakat $2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ idealinin bir r -ideal olduğunu gösterelim. $(a, \bar{m})(b, \bar{n}) = (ab, a\bar{n} + b\bar{m}) \in 2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ ve $\text{ann}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2}(a, \bar{m}) = 0$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}_2$ elemanları

seçilsin. $\text{ann}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2}(a, \bar{m}) = 0$ olduğundan $\text{ann}_{\mathbb{Z}_2}(a) = \bar{0}$ ve böylece $\text{ebob}(a, 2) = 1$ olduğu görülür. Ayrıca $(ab, a\bar{n} + b\bar{m}) \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ olduğundan $2|ab$ elde edilir. $\text{ebob}(a, 2) = 1$ olduğundan $2|b$ yani $b \in 2\mathbb{Z}$ ve böylece $(b, \bar{n}) \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ bulunur. Sonuç olarak, $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ bir r -idealdir.

Teorem 2.1.33 $U \subseteq H$ bir r -ideal, $UE \subseteq E'$ ve $E' \subseteq E$ bir r -alt modülse $U \propto E' \subseteq H \propto E$ de bir r -idealdir.

İspat $(z, e)(t, e') = (zt, ze' + te) \in U \propto E'$ ve $\text{ann}_{H \propto E}(z, e) = 0$ şartını sağlayan $z, t \in H$; $e, e' \in E$ alalım. Buradan $\text{ann}(z) = 0$ ve $zt \in U$ elde edilir. U , r -ideal olduğundan $t \in U$ bulunur. Böylece $te \in UE \subseteq E'$ olur. Ayrıca $ze' + te \in E'$ olduğundan $ze' \in E'$ bulunur. Diğer yandan $\text{ann}_{H \propto E}(z, e) = 0$ olduğundan $\text{ann}_E(z) = 0$ dır. Böylece E' , r -alt modül ve $ze' \in E'$ olduğundan $e' \in E'$ elde edilir. O halde $(t, e') \in U \propto E'$ ve buradan $U \propto E'$ nün bir r -ideal olduğu görülür.

Örnek 2.1.32, Teorem 2.1.33'ün tersinin de her zaman doğru olamayacağını göstermektedir. Şimdi Teorem 2.1.33'ün tersinin ne zaman doğru olacağını gösterelim.

Teorem 2.1.34 $z(E) = zd(H)$ şartını sağlayan bir H -modül E verilsin. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir r -ideal ve $E' \subsetneq E$ ise $U \subseteq H$, r -ideal ve $E' \subseteq E$, r -alt modüldür.

İspat $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir r -ideal olsun. $zt \in U$ ve $\text{ann}(z) = 0$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları seçilsin. Buradan $(z, 0)(t, 0) = (zt, 0) \in U \propto E'$ elde edilir. $\text{ann}(z) = 0$ ve $z(E) = zd(H)$ olduğundan $\text{ann}_E(z) = 0$ ve böylece $\text{ann}_{H \propto E}(z, 0) = 0$ elde edilir. $U \propto E'$, r -ideal olduğundan $(t, 0) \in U \propto E'$ ve buradan $t \in U$ bulunur. Şimdi de E' nün bir r -alt modül olduğunu gösterelim. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_E(z) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanları verilsin. Yukarıdakine benzer şekilde $\text{ann}_{H \propto E}(z, 0) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $(z, 0)(0, e) = (0, ze) \in U \propto E'$ olduğu kolaylıkla görülür. $U \propto E'$, r -ideal olduğundan $(0, e) \in U \propto E'$ ve böylece $e \in E'$ elde edilir. O halde E' , r -alt modüldür.

Lemma 2.1.35 E_1 bir H_1 -modül ve E_2 de bir H_2 -modül olmak üzere $H = H_1 \times H_2$ ve $E = E_1 \times E_2$ olsun. Ayrıca her $i = 1, 2$ için E_i' , E_i nin bir alt modülü ve $E' = E_1' \times E_2'$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) $E' \subseteq E$ bir r -alt modüldür.
- (ii) $E_1' = E_1$ ve E_2', E_2 nin bir r -alt modülü veya E_1', E_1 in bir r -alt modülü ve $E_2' = E_2$ veya E_1', E_2' birer r -alt modüldür.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Öncelikle E/E' modülü $(E_1/E_1') \times (E_2/E_2')$ modülüne izomorftur ve ayrıca $z(E/E') = (z(E_1/E_1') \times H_2) \cup (H_1 \times z(E_2/E_2'))$ eşitliği sağlanır. Şimdi E' nün bir r -alt modül ve $E_1' = E_1$ olduğunu varsayalım. E', E nin has alt modülü olduğundan $E_2' \neq E_2$ dir. O halde $z(E/E') = H_1 \times z(E_2/E_2') \subseteq z(E) = (z(E_1) \times H_2) \cup (H_1 \times z(E_2))$ ve böylece $z(E_2/E_2') \subseteq z(E_2)$ elde edilir. O halde Lemma 2.1.2'den E_2' bir r -alt modüldür. Diğer durumlarda da benzer şekilde (i) $\Rightarrow$ (ii) gerektirmesinin doğru olduğu gösterilebilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Tersine (ii) nin doğru olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan E_1', E_2' nün birer r -alt modül olduğunu varsayalım. Buradan $z(E_1/E_1') \subseteq z(E_1)$ ve $z(E_2/E_2') \subseteq z(E_2)$ elde edilir. Böylece $z(E/E') = (z(E_1/E_1') \times H_2) \cup (H_1 \times z(E_2/E_2')) \subseteq (z(E_1) \times H_2) \cup (H_1 \times z(E_2)) = z(E)$ bulunur. O halde E', E nin bir r -alt modülüdür. Diğer durumlarda da E' nün bir r -alt modül olduğu benzer şekilde görülür.

Teorem 2.1.36 $n \geq 1$, her $1 \leq t \leq n$ için E_t bir H_t -modül, $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ ve $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ olsun. O halde $E' = E_1' \times E_2' \times \dots \times E_n' \subseteq E$ alt modülü için aşağıdakiler denktir.

- (i) E', r -alt modüldür.
- (ii) Her $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_m : m < n\}$ için $E_t' = E_t$ ve her $t \in \{1, 2, \dots, n\} - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ için $E_t' \subseteq E_t$ bir r -alt modüldür.

İspat İspatı tümevarım ile yürüteceğiz. $n = 1$ için (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gerektirmesi açıktır. $n = 2$ için (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gerektirmesi Lemma 2.1.35'ten elde edilir. İddianın her $k < n$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $k = n$ için doğru olduğunu gösterelim. Şimdi $E^* = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{n-1}$ olmak üzere $E = E^* \times E_n$ diyelim. Lemma 2.1.35'ten E' nün E nin bir r -alt modülü olması için g.y.ş $E_n' \subseteq E_n$ bir r -alt modül olmak üzere $E' = E^* \times E_n'$ veya $E^{**} \subseteq E^*$ in bir r -alt modülü olmak üzere $E' = E^{**} \times E_n$ veya $E^{**} \subseteq E^*$ ve $E_n' \subseteq E_n$ birer r -alt modül olmak üzere $E' = E^{**} \times E_n'$ şeklinde olmasıdır. İspatın geri kalanı tümevarım adımından elde edilir.

2.2 sr -Alt Modüller

Bu bölümde r -ideallerin diğer bir genişlemesi sr -alt modülleri tanımlayacağız. Ayrıca bu genişlemenin bir önceki genişlemeyle benzerliklerini ve farklılıklarını ortaya koyacağız.

Tanım 2.2.1 $E' \subsetneq E$ alt modülü verilsin. Her $z \in H$, $e \in E$ için $ze \in E'$ ve $\text{ann}_H(e) = 0$ iken $z \in (E': E)$ sağlanıyorsa E' ne bir sr -alt modül denir.

H halkasını H -modül olarak göz önüne alırsak r -alt modüller ve sr -alt modüllerin denk olduğu kolayca görülür. Şimdi birkaç sr -alt modül örneği verelim.

Örnek 2.2.2 Örnek 2.1.3'ten $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_n$ 'nin her has alt modülünün bir r -alt modül olduğunu biliyoruz. Ayrıca her $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ için $n\bar{m} = \bar{0}$ olduğundan $\text{ann}_{\mathbb{Z}}(\bar{m}) \neq 0$ ve böylece $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_n$ nin her has alt modülünün aşikar olarak bir sr -alt modül olduğu anlaşılır. Şimdi $\mathbb{Z}$ -modül $E(p)$ yi göz önüne alalım. Yukarıdakine benzer biçimde $\text{ann}_{\mathbb{Z}}(\frac{m}{p^n} + \mathbb{Z}) \neq 0$ olduğundan $\mathbb{Z}$ -modül $E(p)$ nin de her has alt modülü bir sr -alt modüldür.

Yukarıdaki örnekte yine r -alt modül ve sr -alt modüller çakışmaktadır. Aslında bu tanımlardan biri diğerini gerektirmez. Şimdi bu duruma birer örnek vereceğiz.

Örnek 2.2.3 (i) $\mathbb{R}$ -modül $E = \mathbb{R}^2$ yi ve $E' = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ alt uzayını göz önüne alalım. Önerme 2.1.8'den E', E nin bir r -alt modülüdür. Şimdi E' nün bir sr -alt modül olmadığını gösterelim. $2(1, 0) = (2, 0) \in E'$, $\text{ann}_{\mathbb{R}}(1, 0) = 0$ ve $2 \notin (E': E) = 0$ olduğundan E' bir sr -alt modül değildir.

(ii) $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ve $E' = 2\mathbb{Z} \times \bar{0}$ olsun. Her $e \in E$ için $\text{ann}_H(e) \neq 0$ olduğundan E' bir sr -alt modüldür. Ayrıca $(2, 1)(1, \bar{0}) = (2, \bar{0}) \in E'$, $\text{ann}_E(2, 1) = 0$ ve $(1, \bar{0}) \notin E'$ olduğundan E' nün bir r -alt modül olmadığı anlaşılır.

Lemma 2.2.4 $E' \subseteq E$ bir sr -alt modülse $E' \subseteq t(E)$ dir.

İspat $E' \not\subseteq t(E)$ olsun. Buradan $\text{ann}_H(e) = 0$ olacak şekilde $e \in E'$ bulunur. $1e = e \in$

E' ve E' , sr -alt modül olduğundan $1 \in (E':E)$ ve böylece $E' = E$ çelişkisi elde edilir. O halde $E' \subseteq t(E)$ bulunur.

Aşağıdaki örnek Lemma 2.2.4'ün tersinin doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 2.2.5 $H = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$ olmak üzere E nin has alt modülü $E' = \mathbb{R} \times 0$ 'ı göz önüne alalım. Öncelikle $t(E) = (0 \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{C} \times 0)$ ve $(E':E) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $E' \subseteq t(E)$ dir. $(2,0)(2 + 0i, 1) = (4,0) \in E'$, $ann_H(2 + 0i, 1) = 0$ ve $(2,0) \notin (E':E)$ olduğundan E' nün bir sr -alt modül olmadığı anlaşılır.

Aşağıdaki örnek asal alt modül ve sr -alt modül kavramlarının birbirini gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 2.2.6 (i) $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı asal alt modülleri sr -alt modül değildir.
(ii) Örnek 2.2.2'den $(\bar{4})$, $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_{12}$ nin bir sr -alt modülüdür ancak asal alt modülü değildir.

Şimdi aşağıdaki önermede bir asal alt modülün ne zaman sr -alt modül olduğunu göstereceğiz.

Önerme 2.2.7 $E' \subseteq E$, asal alt modülünün sr -alt modül olması için g.y.ş $E' \subseteq t(E)$ dir.

İspat $E' \subseteq E$, asal alt modülü verilsin.

$\Rightarrow$: $E' \subseteq E$, sr -alt modülse Lemma 2.2.4'ten $E' \subseteq t(E)$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $E' \subseteq t(E)$ olsun. Şimdi, E' nün bir sr -alt modül olduğunu gösterelim. $ze \in E'$ ve $ann_H(e) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Buradan $e \notin t(E)$ ve böylece $e \notin E'$ olur. E' bir asal alt modül ve $ze \in E'$ olduğundan $z \in (E':E)$ elde edilir.

Önerme 2.2.8 E bir H -modül olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) Sıfır alt modülü bir sr -alt modüldür.
- (ii) sr -alt modüllerin arakesiti de bir sr -alt modüldür.

İspat (i) $ze = 0$ ve $ann_H(e) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Buradan $z = 0 \in ann(E)$ elde edilir. Böylece sıfır alt modülü bir sr -alt modüldür.

(ii) I bir indis kümesi ve $\{E_t\}_{t \in I}$, sr -alt modüllerin keyfi bir kümesi olsun. Şimdi $E' = \bigcap_{t \in I} E_t$ diyelim. E' nün bir sr -alt modül olduğunu göstereceğiz. $ze \in E'$ ve $ann_H(e) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanları verilsin. $ze \in E'$ olduğundan $(t \in I)$ için $ze \in$

E_t olur. E_t bir sr -alt modül olduğundan $z \in (E_t : E)$ ve böylece $z \in \bigcap_{t \in I} (E_t : E) = (\bigcap_{t \in I} E_t : E) = (E' : E)$ elde edilir. O halde E' bir sr -alt modüldür.

Aşağıdaki örnek E' bir sr -alt modül olsa bile $(E' : E)$ nin her zaman r -ideal olmayacağını göstermektedir.

Örnek 2.2.9 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_6[X]$ ve alt modülü $E' = \{h(X) \in \mathbb{Z}_6[X] : h(\bar{0}) \in (\bar{2})\}$ yi göz önüne alalım. Her $h(X) \in \mathbb{Z}_6[X]$ için $\text{ann}_{\mathbb{Z}}(h(X)) \neq 0$ olduğundan E' aşikar olarak bir sr -alt modüldür. Fakat $(E' : \mathbb{Z}_6[X]) = 2\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir r -ideali değildir.

Önerme 2.2.10 $E' \subsetneq E$ alt modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) E' , sr -alt modüldür.
- (ii) Her $e \notin t(E)$ için $He \cap E' = (E' : E)e$ dir.
- (iii) Her $e \notin t(E)$ için $(E' : E) = (E' : e)$ dir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $E' \subseteq E$ bir sr -alt modül olsun. $(E' : E)e \subseteq He \cap E'$ her zaman sağlanır. Şimdi $e \notin t(E)$ yani $\text{ann}_H(e) = 0$ olsun. $e' \in He \cap E'$ seçelim. Buradan $\exists z \in H$ için $e' = ze \in E'$ olur. E' bir sr -alt modül ve $\text{ann}_H(e) = 0$ olduğundan $z \in (E' : E)$ ve böylece $e' = ze \in (E' : E)e$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $(E' : E) \subseteq (E' : e)$ kapsaması her $e \in E$ için geçerlidir. $e \notin t(E)$ ve $z \in (E' : e)$ alalım. Buradan $ze \in E'$ ve böylece $ze \in He \cap E' = (E' : E)e$ elde edilir. O halde $\exists t \in (E' : E)$ için $ze = te$ yani $(z - t)e = 0$ ve buradan $z = t \in (E' : E)$ bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Her $e \notin t(E)$ için $(E' : E) = (E' : e)$ geçerli olsun. Şimdi E' nün bir sr -alt modül olduğunu gösterelim. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_H(e) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ alalım. Buradan $z \in (E' : e) = (E' : E)$ elde edilir yani E' bir sr -alt modüldür.

Teorem 2.2.11 $h: E_1 \rightarrow E_2$ bir H -modül homomorfizması olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) h bir monomorfizma ve $E' \subseteq E_2$, $h^{-1}(E') \neq E_1$ olacak şekilde bir sr -alt modül olsun. $h^{-1}(E') \subseteq E_1$, bir sr -alt modüldür.
- (ii) $E \subseteq E_1$, $\text{Ker}(h)$ yi kapsayan bir sr -alt modül ve h bir epimorfizma olsun. $h(E) \subseteq E_2$, bir sr -alt modüldür.

İspat (i) $ze \in h^{-1}(E')$ ve $\text{ann}_H(e) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E_1$ elemanları seçilsin. Buradan $h(ze) = zh(e) \in E'$ elde edilir. h bir monomorfizma olduğundan $\text{ann}_H(h(e)) = 0$ bulunur. E' bir sr -alt modül olduğundan $z \in (E' : E_2) \subseteq (h^{-1}(E') : E_1)$

elde edilir. Böylece $h^{-1}(E')$, E_1 in bir sr -alt modülüdür.

(ii) $ze' \in h(E)$ ve $\text{ann}_H(e') = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e' \in E_2$ elemanlarını alalım. h bir epimorfizma olduğundan $h(e) = e'$ olacak şekilde $e \in E_1$ vardır. Buradan $ze' = zh(e) = h(ze) \in h(E)$ bulunur. $\text{Ker}(h) \subseteq E$ olduğundan $ze \in E$ elde edilir. Ayrıca $\text{ann}_H(e') = 0$ olduğundan $\text{ann}_H(e) = 0$ olduğu kolayca görülür. E bir sr -alt modül olduğundan $z \in (E:E_1) \subseteq (h(E):E_2)$ bulunur. Böylece $h(E)$, E_2 nin bir sr -alt modülüdür.

Sonuç 2.2.12 $D \subseteq E$ alt modülü için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $E' \subseteq E$, sr -alt modül ve $D \not\subseteq E'$ ise $E' \cap D \subseteq D$ de sr -alt modüldür.
- (ii) $E' \subseteq E$, D yi kapsayan bir sr -alt modül ise E'/D de H -modül E/D nin bir sr -alt modülüdür.

İspat (i) $\text{inj}: D \rightarrow E$, her $e \in D$ için $\text{inj}(e) = e$ şeklinde tanımlanan içermeye homomorfizmasını göz önüne alalım. inj bir monomorfizma ve $\text{inj}^{-1}(E') = E' \cap D$ dir. Böylece istenen Teorem 2.2.11 (i)'den elde edilir.

(ii) $\pi: E \rightarrow E/D$, her $e \in E$ için $\pi(e) = e + D$ biçiminde tanımlanan doğal homomorfizmayı düşünelim. Burada $\text{Ker}(\pi) = D \subseteq E'$ dir. Böylece istenen Teorem 2.2.11 (ii)'den elde edilir.

Not 2.2.13 $\emptyset \neq T \subseteq H$ ve $E' \subseteq E$ alt modülü için $((E':_E T):E) = ((E':E):T)$ gerçekleşir.

Önerme 2.2.14

- (i) $E' \subseteq E$, sr -alt modül ve $T \not\subseteq (E':E)$ koşulunu sağlayan $T \subseteq H$ verilsin. $(E':_E T)$ de sr -alt modüldür. Özel olarak, $T \not\subseteq \text{ann}(E)$ ise $\text{ann}_E(T)$ de sr -alt modüldür.
- (ii) $z \notin \text{ann}(E)$ ise $\text{ann}_E(z) \subseteq E$, bir sr -alt modüldür.

İspat (i) $ze \in (E':_E T)$ ve $\text{ann}_H(e) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanları verilsin. O halde her $t \in T$ için $t(ze) = (tz)e \in E'$ elde edilir. E' bir sr -alt modül ve $\text{ann}_H(e) = 0$ olduğundan $tz \in (E':E)$ yani $z \in ((E':E):T) = ((E':_E T):E)$ bulunur. (ii) Önerme 2.2.8 ve (i)'den elde edilir.

Teorem 2.2.15 $E' \subsetneq E$ alt modülü için aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) E' nün sr -alt modül olması için g.y.ş her $U \subseteq H$ ideali ve $D \cap (E - t(E)) \neq \emptyset$ olacak şekilde her $D \subseteq E$ alt modülü için $UD \subseteq E'$ iken $U \subseteq (E':E)$ olmasıdır.
- (ii) $E' \subseteq t(E)$ ve E', sr -alt modül değilse $D \cap (E - t(E)) \neq \emptyset$, $E' \subsetneq D$, $(E':E) \subsetneq U$ ve $UD \subseteq E'$ şartlarını sağlayan $U \subseteq H$ ideali ve $D \subseteq E$ alt modülü bulunur.

İspat (i) $UD \subseteq E'$ ve $D \cap (E - t(E)) \neq \emptyset$ olacak şekilde $U \subseteq H$ ideali ve $D \subseteq E$ alt modülü verilsin. Buradan $ann_H(e) = 0$ olacak şekilde $e \in D$ vardır. $UD \subseteq E'$ olduğundan her $z \in U$ için $ze \in E'$ bulunur. Ayrıca E' bir sr -alt modül olduğundan $z \in (E':E)$ olur. Böylece $U \subseteq (E':E)$ çıkar. Tersine, $ze \in E'$ ve $ann_H(e) = 0$ şartını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ elemanlarını alalım. Şimdi $U = Hz$ ve $D = He$ diyelim. $D \cap (E - t(E)) \neq \emptyset$ ve $UD = Hze \subseteq E'$ olduğu kolaylıkla görülür. O halde varsayımdan $U = Hz \subseteq (E':E)$ ve böylece $z \in (E':E)$ elde edilir. Sonuç olarak, E' bir sr -alt modüldür.

(ii) E' bir sr -alt modül olmasın. O halde $ze \in E'$, $ann_H(e) = 0$ ve $z \notin (E':E)$ şartlarını sağlayan $z \in H$ ve $e \in E$ seçelim. Şimdi $D = (E':_E z)$ ve $U = (E':D)$ diyelim. Buradan $UD = (E':D)D \subseteq E'$ olduğu görülür. Ayrıca $e \in (E':_E z) - E'$ olduğundan $E' \subsetneq D$ dir. $zD = z(E':_E z) \subseteq E'$ olduğundan $z \in U = (E':D)$ ve böylece $(E':E) \subsetneq U$ bulunur. O halde istenen tüm koşullar gerçekleşir.

Şimdi Teorem 2.2.15'ten açıkça elde edilen aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 2.2.16 $D \subseteq E$ bir alt modül ve $D \cap (E - t(E)) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) E_1, E_2 birer sr -alt modül ve $(E_1:E)D = (E_2:E)D$ ise $(E_1:E) = (E_2:E)$ dir.
- (ii) $U \subseteq H$ bir ideal ve $UD \subseteq E$ bir sr -alt modül ise $UD = UE$ dir. Özel olarak, UE de sr -alt modüldür.

Teorem 2.2.17 $D_1, D_2, \dots, D_n \subseteq E$ asal alt modüller ve her $1 \leq t \neq k \leq n$ için $(D_k:E)$ ile $(D_t:E)$ karşılaştırılamasın. $\bigcap_{t=1}^n D_t$ bir sr -alt modül ise her $1 \leq t \leq n$ için D_t de sr -alt modüldür.

İspat Teorem 2.1.22'nin ispatına benzer bir şekilde elde edilir.

Aşağıdaki Teorem bize serbest burulmalı modüllerin sr -alt modüller yardımıyla

karakterize edilebileceğini söylemektedir.

Teorem 2.2.19 E bir H -modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) E bir serbest burulmalı H -modüldür.
- (ii) E sadık bir modül ve sıfır alt modülü E nin tek sr -alt modülüdür.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) E bir serbest burulmalı H -modül olsun. E nin sadık modül olduğu açıktır. $E' \subseteq E$, herhangi bir sr -alt modül olsun. Lemma 2.2.4'ten $E' \subseteq t(E) = 0$ yani $E' = 0$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $e \in t(E)$ alalım. O halde $ze = 0$ olacak şekilde $0 \neq z \in H$ vardır. E sadık modül olduğundan $z \notin \text{ann}(E)$ ve böylece Önerme 2.2.14 (ii)'den $\text{ann}_E(z)$ bir sr -alt modül olur. Varsayımdan $e \in \text{ann}_E(z) = 0$ elde edilir. Böylece $t(E) = 0$ yani E bir serbest burulmalı modüldür.

Önerme 2.2.20 $E' \subseteq E$, sr -alt modüller ailesinin bir maksimal elemanıysa E' asaldır.

İspat E' , sr -alt modüller ailesinin bir maksimal elemanı olsun. $ze \in E'$ ve $z \notin (E':E)$ olacak şekilde $z \in H$, $e \in E$ elemanları verilsin. Şimdi $e \in E'$ olduğunu göstereceğiz. Önerme 2.2.14 (i)'den $(E':_E z)$, E' nü kapsayan bir sr -alt modüldür. Varsayımdan $E' = (E':_E z)$ ve böylece $e \in (E':_E z) = E'$ elde edilir. O halde E' bir asal alt modüldür.

Teorem 2.2.21 H -modül E için aşağıdakiler denktir.

- (i) Her has alt modül bir sr -alt modüldür.
- (ii) $t(E) = E$ ya da her $e \notin t(E)$ için $He = E$ dir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Her has alt modül, E nin bir sr -alt modülü olsun. $t(E) \neq E$ kabul edelim. $e \notin t(E)$ alalım. $He \neq E$ ise He bir has alt modül olur. Böylece varsayımdan He bir sr -alt modüldür. $e \notin t(E)$ olduğundan $\text{ann}_H(e) = 0$ dir. Ayrıca $ze \in He$ ($z \in H$) ve He bir sr -alt modül olduğundan $z \in (He:E)$ yani $(He:E) = H$ ve böylece $E = He$ çelişkisi elde edilir. O halde varsayım yanlış yani $He = E$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $t(E) = E$ ise her $e \in E$ için $\text{ann}_H(e) \neq 0$ olduğundan E nin her has alt modülü aşikar olarak sr -alt modüldür. Şimdi $t(E) \neq E$ ve her $e \notin t(E)$ için $He = E$ olsun. $E' \subsetneq E$ alt modülünü alalım. $ze \in E'$ ve $\text{ann}_H(e) = 0$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanları verilsin. Buradan $e \notin t(E)$ ve varsayımdan $He = E$ elde edilir. $ze \in E'$ olduğundan $Hze = zHe = zE \subseteq E'$ yani $z \in (E':E)$ bulunur. O halde E' bir sr -alt modüldür.

Sonuç 2.2.22: Serbest burulmalı E modülü için aşağıdakiler denktir.

- (i) Her alt modül sr -alt modüldür.
- (ii) E basit modüldür.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 \neq E' \subseteq E$ alt modülü verilsin. $t(E) = 0 \subsetneq E'$ olduğundan $\exists e \in E' - t(E)$ vardır. Böylece (i) ve Teorem 2.2.21'den $He = E \subseteq E' \subseteq E$ yani $E' = E$ elde edilir. Sonuç olarak E bir basit modüldür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) E bir basit modül olsun. Bu durumda E nin tek has alt modülü sıfır alt modülüdür ve Önerme 2.2.8 (i) den sr -alt modüldür.

Lemma 2.2.23 E_1, E_2 sırasıyla birer H_1 ve H_2 -modül olsun. Bu durumda $t(E_1 \times E_2) = (t(E_1) \times E_2) \cup (E_1 \times t(E_2))$ gerçekleşir.

İspat $(e_1, e_2) \in t(E_1 \times E_2)$ olsun. Buradan $(z_1, z_2)(e_1, e_2) = (z_1 e_1, z_2 e_2) = (0, 0)$ olacak şekilde $(0, 0) \neq (z_1, z_2) \in H_1 \times H_2$ elemanı vardır. Böylece $z_1 e_1 = 0, z_2 e_2 = 0$ elde edilir. $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ olduğundan $z_1 \neq 0$ veya $z_2 \neq 0$ bulunur ve buradan $e_1 \in t(E_1)$ veya $e_2 \in t(E_2)$ elde edilir. O halde $(e_1, e_2) \in (t(E_1) \times E_2) \cup (E_1 \times t(E_2))$ bulunur. Tersine, $(e_1, e_2) \in (t(E_1) \times E_2) \cup (E_1 \times t(E_2))$ olsun. Bu durumda genelliği bozmadan $(e_1, e_2) \in (t(E_1) \times E_2)$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $e_1 \in t(E_1)$ elde edilir. O halde $z_1 e_1 = 0$ olacak şekilde $0 \neq z_1 \in H_1$ vardır. Buradan $(z_1, 0) \neq (0, 0)$ ve ayrıca $(z_1, 0)(e_1, e_2) = (z_1 e_1, 0) = (0, 0)$ olduğu görülür. O halde $(e_1, e_2) \in t(E_1 \times E_2)$ bulunur. Diğer durumda da benzer şekilde $(e_1, e_2) \in t(E_1 \times E_2)$ elde edilir. Sonuç olarak, $t(E_1 \times E_2) = (t(E_1) \times E_2) \cup (E_1 \times t(E_2))$ bulunur.

Sonuç 2.2.24 E_1, E_2 sırasıyla birer H_1 ve H_2 -modül olsun. $t(E_1) = E_1$ veya $t(E_2) = E_2$ ise $t(E_1 \times E_2) = E_1 \times E_2$ dir. Bu durumda $E_1 \times E_2$ nin her has alt modülü sr -alt modüldür.

Lemma 2.2.25 E_1, E_2 sırasıyla birer H_1 ve H_2 -modül ve her $i = 1, 2$ için $t(E_i) \neq E_i$ olsun. $H = H_1 \times H_2$, $E = E_1 \times E_2$ ve ayrıca $E' = E_1' \times E_2' \subseteq E$ alt modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) E' , sr -alt modüldür.
- (ii) $E_1' = E_1$ ve $E_2' \subseteq E_2$, bir sr -alt modül veya $E_1' \subseteq E_1$, bir sr -alt modül ve $E_2' = E_2$ veya E_1', E_2' birer sr -alt modüldür.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $E' \subseteq E$, bir sr -alt modül olsun. $E_1' = E_1$ olduğunu kabul edelim. E' bir has alt modül olduğundan $E_2' \neq E_2$ dir. Şimdi E_2' nün bir sr -alt modül olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. $z_2 e_2 \in E_2'$, $ann_{H_2}(e_2) = 0$ ve $z_2 \notin (E_2': E_2)$ olacak

şekilde $z_2 \in H_2$ ve $e_2 \in E_2$ elemanları vardır. $t(E_1) \neq E_1$ olduğundan $\text{ann}_{H_1}(e_1) = 0$ olacak şekilde bir $e_1 \in E_1$ vardır. Böylece $\text{ann}_H(e_1, e_2) = (0, 0)$ ve $(0, z_2)(e_1, e_2) = (0, z_2 e_2) \in E'$ elde edilir. Ayrıca $(E': E) = (E_1': E_1) \times (E_2': E_2)$ olduğundan $(0, z_2) \notin (E': E)$ bulunur. Bu ise E' nün bir sr -alt modül oluşuyla çelişir. Böylece, E_2', E_2 nin bir sr -alt modülüdür. $E_2' = E_2$ ise benzer şekilde E_1', E_1 in bir sr -alt modülüdür. $E_1' \neq E_1$ ve $E_2' \neq E_2$ ise E_1', E_2' nün birer sr -alt modül olduğu benzer şekilde gösterilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) E_1', E_2' birer sr -alt modül olsun. $(z_1, z_2)(e_1, e_2) = (z_1 e_1, z_2 e_2) \in E'$ ve $\text{ann}_H(e_1, e_2) = (0, 0)$ olacak şekilde $(z_1, z_2) \in H$ ve $(e_1, e_2) \in E$ elemanları verilsin. Buradan her $i = 1, 2$ için $\text{ann}_{H_i}(e_i) = 0$ ve $z_i e_i \in E_i'$ elde edilir. E_i' bir sr -alt modül olduğundan $z_i \in (E_i': E_i)$ ve böylece $(z_1, z_2) \in (E_1': E_1) \times (E_2': E_2) = (E': E)$ elde edilir. Böylece $E' \subseteq E$, sr -alt modüldür. Diğer durumlarda da E' nün bir sr -alt modül olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.2.26 $n \geq 1$, her $1 \leq t \leq n$ için E_t bir H_t -modül, $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ ve $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ olsun. Her $1 \leq t \leq n$ için $t(E_t) \neq E_t$ ve ayrıca $E' = E_1' \times E_2' \times \dots \times E_n' \subseteq E$, alt modülü verilsin. Aşağıdakiler denktir.

- (i) E' , sr -alt modüldür.
- (ii) Her $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_m: m < n\}$ için $E_i' = E_i$ ve her $t \in \{1, 2, \dots, n\} - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ için $E_i' \subseteq E_i$, sr -alt modüldür.

İspat Lemma 2.2.25 kullanılarak Teorem 2.1.36 ya benzer şekilde elde edilir.

3. DEĞİŞMELİ HALKALARIN n -İDEALLERİ

Bu bölümde değişmeli halkaların r -ideallerinden daha kuvvetli olan n -idealleri tanımlayıp cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu yeni ideal sınıfının r -ideal, asalımsı, 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı ideallerle ilişkilerini belirleyeceğiz.

Tanım 3.1 $U \subsetneq H$ ideali verilsin. Her $z, t \in H$ için $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ iken $t \in U$ sağlanıyorsa U ya bir n -ideal denir.

Örnek 3.2 H halkası tek asal ideali $\mathfrak{m}$ olan bir sözde yerel halka olsun. Bu durumda $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{m}$ tüm birimsel olmayan elemanların kümesidir. Şimdi H halkasının bir has ideali U yu alalım. $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olmak üzere $z, t \in H$ elemanları verilsin. $z \notin \mathfrak{m}$ olduğundan z birimseldir ve böylece $t = z^{-1}(zt) \in U$ elde edilir. O halde U bir n -idealdir.

Örnek 3.3 H bir tamlık bölgesi ve $U = 0$ olsun. Böylece H bir indirgenmiş halkadır yani $\mathfrak{N}(H) = 0$ olur. $zt = 0$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ şartını sağlayan $z, t \in H$ seçilsin. H bir tamlık bölgesi ve $z \neq 0$ olduğundan $t = 0 \in U$ elde edilir. O halde her tamlık bölgesinde sıfır idealinin bir n -ideal olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki örnek her halkanın n -ideale sahip olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.4 H , 0 ve 1 den farklı bir $y \in H$ idempotent elemanı olan bir indirgenmiş halka olsun. Şimdi H nin hiçbir n -idealinin olmadığını göstereceğiz. $U \subsetneq H$ idealini alalım. U has olduğundan y veya $1 - y$ elemanlarından birini içermez. Genelliği bozmadan $y \notin U$ olduğunu kabul edebiliriz. $y(1 - y) = 0 \in U$ ve $1 - y \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğundan U nun bir n -ideal olmadığı görülür. Özel olarak, tam sayıların modülo 6 halkası $\mathbb{Z}_6$ nın hiçbir n -ideali yoktur.

Önerme 3.5 $U \subseteq H$, bir n -idealse $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ dir.

İspat $U \subseteq H$, bir n -ideal fakat $U \not\subseteq \mathfrak{N}(H)$ olsun. Bu durumda $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. U , n -ideal ve $z = z1 \in U$ olduğundan $1 \in U$ çelişkisi bulunur.

Önerme 3.6 n -ideallerin arakesiti de n -idealdir.

İspat $\{U_t\}_{t \in I}$, H nin n -ideallerinin keyfi bir kümesi olsun. $U = \bigcap_{t \in I} U_t$ diyelim. $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan her $t \in I$ için $zt \in U_t$

elde edilir. U_t bir n -ideal olduğundan $t \in U_t$ ve böylece $t \in U$ olduğu anlaşılır yani U bir n -idealdir.

Önerme 3.7 Her n -ideal bir r -idealdir.

İspat $U \subseteq H$, n -ideali verilsin. $zt \in U$ ve $\text{ann}(z) = 0$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $\text{ann}(z) = 0$ olduğundan $z \notin \mathfrak{N}(H)$ dir. Böylece, U bir n -ideal olduğundan $t \in U$ bulunur. Sonuç olarak, U bir r -idealdir.

Önerme 3.7'nin tersi doğru olmayabilir, şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 3.8 $H = \mathbb{Z}_6$ halkasını ve $U = (\bar{0})$ idealini göz önüne alalım. $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ ve $\text{ann}(\bar{a}) = \bar{0}$ olacak şekilde $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ elemanlarını alalım. H bir sonlu halka ve $\bar{a}$ bir regüler eleman olduğundan $\bar{a}$ terslenebilirdir. Böylece $\bar{b} = \bar{a}^{-1}(\bar{a}\bar{b}) = \bar{0}$ elde edilir. O halde sıfır ideali bir r -idealdir. Fakat Örnek 3.4'ten sıfır idealinin bir n -ideal olmadığı anlaşılır.

Not 3.9 Herhangi bir H halkasında $\mathfrak{N}(H) \subseteq \text{zd}(H)$ dir. Tersine sıfır ideali bir asalımsı ideal ise $\mathfrak{N}(H) = \text{zd}(H)$ olur. O halde bir H halkasında sıfır ideali asalımsı idealse bu halkanın tüm r -idealleri ve n -idealleri çakışır.

Teorem 3.10 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , n -idealdir.
- (ii) Her $z \notin \mathfrak{N}(H)$ için $U = (U : z)$ dir.
- (iii) $VY \subseteq U$ ve $V \cap (H - \mathfrak{N}(H)) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $V, Y \subseteq H$ idealleri için $Y \subseteq U$ dur.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $U \subseteq H$, n -ideali ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ verilsin. $U \subseteq (U : z)$ olduğu kolayca görülür. Şimdi $t \in (U : z)$ alalım. Buradan $zt \in U$ elde edilir. U bir n -ideal olduğundan $t \in U$ ve böylece $U = (U : z)$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $VY \subseteq U$ ve $V \cap (H - \mathfrak{N}(H)) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $V, Y \subseteq H$ idealleri verilsin. $V \cap (H - \mathfrak{N}(H)) \neq \emptyset$ olduğundan $\exists z \notin \mathfrak{N}(H)$ için $z \in V$ olur. Ayrıca $zY \subseteq VY \subseteq U$ olduğundan $Y \subseteq (U : z) = U$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $V = Hz$ ve $Y = Ht$ diyelim. Buradan $VY = Hzt \subseteq U$ ve $V \cap (H - \mathfrak{N}(H)) \neq \emptyset$ olduğu anlaşılır. O halde (iii)'den $Y = Ht \subseteq U$ yani $t \in U$ elde edilir.

Önerme 3.11 $U \subseteq H$, asal idealinin n -ideal olması için g.y.ş $\mathfrak{N}(H) = U$ dur.

İspat $U \subseteq H$, asal ideali verilsin.

$\Rightarrow U$ bir n -idealse Önerme 3.5'ten $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ ve böylece $U = \mathfrak{N}(H)$ elde edilir.

$\Leftarrow U = \mathfrak{N}(H)$ olduğunu kabul edelim. $z, t \in H$ olmak üzere $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H) = U$ olsun. U bir asal ideal olduğu için $t \in U$ bulunur.

Sonuç 3.12 Herhangi bir H halkası için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $\mathfrak{N}(H)$ bir n -idealdir $\Leftrightarrow \mathfrak{N}(H)$, asaldir.
- (ii) Tamlık bölgesi olmayan indirgenmiş halkalarda hiçbir n -ideal yoktur.
- (iii) H bir indirgenmiş halka olsun. H nin tamlık bölgesi olması için g.y.ş sıfır ideali n -idealdir.

İspat (i) $\mathfrak{N}(H) \subseteq H$, bir asal ideal olsun. Önerme 3.11'den $\mathfrak{N}(H)$ bir n -idealdir. Şimdi $\mathfrak{N}(H)$ nin bir n -ideal olduğunu kabul edelim. $zt \in \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\mathfrak{N}(H)$, n -ideal olduğundan $t \in \mathfrak{N}(H)$ bulunur. Böylece $\mathfrak{N}(H)$ nin asal olduğu anlaşılır.

(ii) H tamlık bölgesi olmayan bir indirgenmiş halka olsun. Bu durumda $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir asal ideal değildir. (i)'den $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir n -ideal de olamaz. Diğer taraftan $U \subseteq H$, sıfırdan farklı bir n -ideal olsun. Önerme 3.5'ten $U \subseteq \mathfrak{N}(H) = 0$ yani $U = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece, H nin hiçbir n -ideali yoktur.

(iii) H bir indirgenmiş halka olsun. H tamlık bölgesi ise $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir asal idealdir. (i)'den $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir n -idealdir. Tersine sıfır idealinin bir n -ideal olduğunu kabul edelim. H bir indirgenmiş halka olduğundan $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir n -idealdir. (i)'den $\mathfrak{N}(H) = 0$ in bir asal ideal olduğu anlaşılır yani H bir tamlık bölgesidir.

Şimdi değişmeli halkaların n -ideallerine dair birkaç önemli örnek vereceğiz.

Örnek 3.13 $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasını göz önüne alalım. p bir asal sayı ve $k \geq 1$ olmak üzere $n = p^k$ ise $\mathbb{Z}_n$ tek asal ideali $(\bar{p})$ olan bir sözde yerel halkadır. Böylece Örnek 3.2'den $\mathbb{Z}_n$ nin her ideali bir n -idealdir. Şimdi $\mathbb{Z}_n$ halkasının bir n -ideale sahip olabilmesi için p bir asal sayı ve $k \geq 1$ olmak üzere $n = p^k$ biçiminde olması gerektiğini göstereyim. $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$ olduğunu kabul edelim. Burada $t \geq 2$ ve p_i 'ler farklı asal sayılar olsun. $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}_n) = (\overline{p_1 p_2 \dots p_t})$ olduğu açıktır. $U \subseteq \mathbb{Z}_n$, n -ideali verilsin. Genelliği bozmadan $U = (\overline{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}})$ alabiliriz. Önerme 3.5'ten $U = (\overline{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}}) \subseteq (\overline{p_1 p_2 \dots p_t}) = \mathfrak{N}(\mathbb{Z}_n)$ ve böylece her $i = 1, 2, \dots, t$ için $1 \leq s_i \leq n_i$ dir. Ayrıca $\overline{p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}} \notin \mathfrak{N}(\mathbb{Z}_n)$ ve $\overline{p_1^{s_1}} \notin U$ olduğu kolaylıkla görülür. O halde

$\overline{p_1^{s_1}(p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t})} \in U$ olduğundan U nun bir n -ideal olmadığı anlaşılır. Sonuç olarak $n = p^k$ biçimindedir.

Aşağıdaki örneğin (ii) şikkında H halkasının n -idealleri olsa bile Önerme 3.5'in tersinin doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.14 (i) $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkası ve $U = (X)$ asal idealini göz önüne alalım. $n > 2$ olmak üzere $H = \mathbb{Z}[X]/U^n$ ve $U' = U^2/U^n$ olsun. Öncelikle, $\mathfrak{N}(H) = U/U^n$ dir. Şimdi $(g + U^n)(h + U^n) = gh + U^n \in U'$ ve $(g + U^n) \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ elemanlarını alalım. Buradan $gh \in U^2 = (X^2)$ ve $g \notin U$ çıkar. O halde X^2, gh polinomunu böler fakat X, g polinomunu bölemez. Böylece X^2 nin h polinomunu böldüğü anlaşılır yani $h + U^n \in U'$ olur. Böylece $U' \subseteq H$, bir n -idealdir.

(ii) $H = \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^4)$ ve $U = (xy, y^2)$ olsun. Burada $x = X + (Y^4)$ ve $y = Y + (Y^4)$ dir. Öncelikle, $\mathfrak{N}(H) = (y)$ nin asal ideal olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece, Sonuç 3.12'den H nin bir n -ideale sahip olduğu anlaşılır. Ayrıca $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ dir. Şimdi, U nun n -ideal olmadığını göstereceğiz. $y(x + y) \in U$ fakat $x + y \notin \mathfrak{N}(H)$ ve $y \notin U$ olduğundan U bir n -ideal değildir.

Önerme 3.15 $\emptyset \neq T \subseteq H$, $U \subseteq H$ bir n -ideal ve $T \not\subseteq U$ ise $(U:T)$ de n -idealdir.

İspat $zt \in (U:T)$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan her $y \in T$ için $y(zt) = z(yt) \in U$ elde edilir. U bir n -ideal olduğundan $yt \in U$ yani $t \in (U:T)$ dir. Böylece $(U:T)$ bir n -idealdir.

Teorem 3.16 H halkasının n -idealler ailesinin maksimal elemanı $\mathfrak{N}(H)$ dir.

İspat $U \subseteq H$, n -idealler ailesinin bir maksimal elemanı olsun. U nun asal olduğunu göstereceğiz. Böylece Önerme 3.11'den $U = \mathfrak{N}(H)$ bulunur. $zt \in U$ ve $z \notin U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını seçelim. U bir n -ideal ve $z \notin U$ olduğundan, Önerme 3.15 yardımıyla $(U:z)$ nin de bir n -ideal olduğu görülür. U , n -idealler ailesinin bir maksimal elemanı ve $U \subseteq (U:z)$ olduğundan $U = (U:z)$ yani $t \in (U:z) = U$ bulunur.

Teorem 3.17 Bir H halkasının n -idealinin var olması için g.y.ş H nin tek minimal asal ideale sahip olmasıdır, yani $\mathfrak{N}(H)$ asaldır.

İspat: $U \subseteq H$, n -ideali verilsin. Şimdi $\mathfrak{C} = \{V: V \text{ bir } n\text{-ideal}\}$ kümesini göz önüne alalım. $U \in \mathfrak{C}$ olduğundan $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $\mathfrak{C}$ nin " $\subseteq$ " bağıntısına göre bir kısmi sıralı küme olduğu açıktır. $\mathfrak{C}$ den aşağıdaki zinciri alalım:

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_n \subseteq \dots$$

Şimdi $V = \bigcup_{t=1}^{\infty} V_t$ nin bir n -ideal olduğunu göstereceğiz. $zt \in V$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $zt \in V$ olduğundan $zt \in V_m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ bulunabilir. V_m bir n -ideal olduğundan $t \in V_m \subseteq V$ elde edilir. O halde V nin bir n -ideal olduğu anlaşılır. Böylece Zorn Lemma kullanılarak $\mathfrak{C}$ nin U' gibi bir maksimal elemanı olduğu görülür. Teorem 3.16'dan $U' = \mathfrak{N}(H)$ nin bir asal ideal olduğu anlaşılır. Tersine, $\mathfrak{N}(H)$ nin bir asal ideal olduğunu varsayalım. Sonuç 3.12'den $\mathfrak{N}(H)$ bir n -idealdir.

Sonuç 3.18 Her n -ideal bir (zayıf) asalımsı idealdir yani (zayıf) 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat $U \subseteq H$, n -ideali verilsin. Bu durumda Önerme 3.5'ten $\sqrt{U} = \mathfrak{N}(H)$ bulunur. $zt \in U$ ve $t \notin \sqrt{U} = \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları seçilsin. U bir n -ideal ve $zt = tz \in U$ olduğundan $z \in U$ elde edilir. Sonuç olarak U bir asalımsı idealdir.

Aşağıdaki örnek Sonuç 3.18'in tersinin her zaman doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 3.19 p, q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_{pq}$ halkasını düşünelim. Örnek 3.13'ten $U = (\bar{p})$ bir n -ideal değildir fakat bir asal ideal dolayısıyla bir asalımsı idealdir.

Sonuç 3.20 $U \subseteq \mathfrak{N}(H) \subseteq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , n -idealdir.
- (ii) U , asalımsı idealdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Sonuç 3.18'den elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde U asalımsı ideali verilsin. $zt \in U$ ve $t \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak biçimde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. $\sqrt{U} = \mathfrak{N}(H)$ ve U bir asalımsı ideal olduğundan $z \in U$ elde edilir.

Yukarıdaki sonuçtan U bir n -ideal ise U nun bir zayıf asalımsı ve 2-yutan asalımsı ideal olduğu bilinmektedir. Fakat $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olsa bile bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 3.21 $H = \mathbb{Z}$ ve $E = \mathbb{Z}_9$ alalım. Buradan $\mathfrak{N}(H \rtimes E) = 0 \rtimes E$ olur. Ayrıca $U = 0 \rtimes (\bar{0}) \subseteq H \rtimes E$, bir zayıf asalımsı idealdir. Şimdi U nun 2-yutan asalımsı ideal olduğunu göstereceğiz. $(z, e)(t, e')(u, e'') = (0, \bar{0})$ olacak şekilde $z, t, u \in H$ ve $e, e', e'' \in E$

elemanları verilsin. Buradan $ztu = 0$ ve $zte'' + zue' + ute = \bar{0}$ dir. Genelliği bozmadan $z = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $(z, e)(u, e'') = (zu, ze'' + ue) = (0, ue) \in 0 \propto \mathbb{Z}_9 = \sqrt{U}$ olur. Şimdi ise U nun n -ideal olmadığını gösterelim. $x = (3, \bar{0})$ ve $y = (0, \bar{3})$ diyelim. Buradan $xy = (0, \bar{0}) \in U$ ve $x \notin 0 \propto \mathbb{Z}_9 = \mathfrak{N}(H \propto E)$ elde edilir. Fakat $y \notin U$ olduğundan U nun bir n -ideal olmadığı anlaşılır.

Sonuç 3.22 $U \subseteq \mathfrak{N}(H) \subseteq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal ve $\mathfrak{N}(H)$ asal idealdir.
- (ii) U , 2-yutan asalımsı ideal ve $\mathfrak{N}(H)$ asalıdır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) U , zayıf 2-yutan asalımsı ideal ve $\mathfrak{N}(H)$ asal olsun. $ztu \in U$ olacak şekilde $z, t, u \in H$ elemanlarını alalım. U zayıf 2-yutan asalımsı olduğundan $ztu = 0$ kabul edebiliriz. O halde $ztu = 0 \in \mathfrak{N}(H)$ ve $\mathfrak{N}(H)$ asal olduğundan $z \in \mathfrak{N}(H)$ veya $tu \in \mathfrak{N}(H)$ yani $zu \in \sqrt{U}$ veya $tu \in \sqrt{U}$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

Sonuç 3.23 $U \subseteq \mathfrak{N}(H) \subseteq H$ ideali verilsin. H halkasının en az bir n -ideali var olsun. Bu durumda U , zayıf 2-yutan asalımsıdır $\Leftrightarrow U$, 2-yutan asalımsıdır.

İspat H halkasının en az bir n -ideali var olduğundan Teorem 3.17 yardımıyla $\mathfrak{N}(H)$ nin asal ideal olduğu görülür. Böylece istenen, Sonuç 3.22'den elde edilir.

Her tamlık bölgesinde sıfır idealinin asal olduğu bilinir fakat sıfır idealinin tamlık bölgelerinde tek asal ideal olduğunu söyleyemeyiz. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere $\mathbb{R}[X]$ polinom halkası bir tamlık bölgesi olup (X) temel ideali bu halkanın asal ideallerinden biridir. Aşağıdaki Teoremde tamlık bölgelerinin n -idealler ile farklı bir karakterizasyonu verilmektedir.

Teorem 3.24 Herhangi bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) H bir tamlık bölgesidir.
- (ii) Sıfır ideali H nin tek n -idealidir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) H bir tamlık bölgesi olsun. Örnek 3.3'ten sıfır idealinin bir n -ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi U, H halkasının bir n -ideali olsun. Önerme 3.5'ten $U \subseteq \mathfrak{N}(H) = 0$ yani $U = 0$ elde edilir. Böylece, H nin tek n -ideali sıfır idealidir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) H nin tek n -idealinin sıfır ideali olduğunu varsayalım. Teorem 3.16 ve Sonuç 3.12 (i)'den $\mathfrak{N}(H) = 0$ bir asal idealdir. Böylece, H bir tamlık bölgesidir.

Teorem 3.25 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) H nin cisim olması için g.y.ş H nin von Neumann regüler halka olması ve sıfır idealinin bir n -ideal olmasıdır.
- (ii) H bir Bool halkası olsun. H nin cisim olması için g.y.ş sıfır idealinin n -ideal olmasıdır. Bu durumda $H \cong \mathbb{Z}_2$ dir.

İspat (i) H bir cisim olsun. O halde H bir von Neumann regüler halkadır. Ayrıca Teorem 3.24'ten sıfır ideali bir n -idealdir. Tersine, H bir von Neumann regüler halka ve sıfır ideali bir n -ideal olsun. $0 \neq z \in H$ alalım. H bir von Neumann regüler halka olduğundan $z = z^2t$ olacak şekilde bir $t \in H$ vardır. Buradan $z(1 - zt) = 0$ olur. H indirgenmiş halka böylece $z \notin \mathfrak{N}(H)$ dir. Sıfır ideali bir n -ideal olduğundan $1 - zt = 0$ yani $1 = zt$ elde edilir. Böylece, H bir cisimdir.

(ii) H bir Bool halkası olsun. Böylece, H bir von Neumann regüler halkadır. O halde (i)'den H nin cisim olması için g.y.ş sıfır ideali n -idealdir.

Önerme 3.26 $V \cap (H - \mathfrak{N}(H)) \neq \emptyset$ şartını sağlayan $V \subseteq H$ ideali verilsin.

- (i) U_1, U_2, H halkasının n -idealleri ve $U_1V = U_2V$ ise $U_1 = U_2$ dir.
- (ii) U_1V, H halkasının bir n -ideali ise $U_1V = U_1$ dir.

İspat (i) U_1, U_2, H halkasının n -idealleri ve $U_1V = U_2V$ olduğunu varsayalım. U_1 bir n -ideal ve $U_2V \subseteq U_1$ olduğundan Teorem 3.10'dan $U_2 \subseteq U_1$ olur. Benzer şekilde $U_1 \subseteq U_2$ bulunur. Böylece $U_1 = U_2$ elde edilir.

(ii) U_1V, H halkasının bir n -ideali olsun. $U_1V \subseteq U_1V$ olduğundan Teorem 3.10'dan $U_1 \subseteq U_1V \subseteq U_1$ ve böylece $U_1V = U_1$ elde edilir.

Teorem 3.27 $h: H \rightarrow H'$ bir halka homomorfizması olsun. Aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) h bir epimorfizma ve $U \subseteq H$, $\text{Ker}(h)$ yi kapsayan bir n -ideal ise $h(U)$ da H' nün bir n -idealidir.
- (ii) h bir monomorfizma ve $U' \subseteq H'$, bir n -ideal ise $h^{-1}(U')$ de H nin n -idealidir.

İspat (i) $z't' \in h(U)$ ve $z' \notin \mathfrak{N}(H')$ olacak şekilde $z', t' \in H'$ elemanları seçilsin. h epimorfizma olduğundan $h(z) = z'$ ve $h(t) = t'$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları vardır. Bu durumda $z't' = h(z)h(t) = h(zt) \in h(U)$ elde edilir. $\text{Ker}(h) \subseteq U$ olduğundan $zt \in U$ bulunur. Ayrıca $z' \notin \mathfrak{N}(H')$ olduğundan $z \notin \mathfrak{N}(H)$ dir. U , n -ideal olduğundan $t \in U$ böylece $h(t) = t' \in h(U)$ olur.

(ii) h bir monomorfizma ve $U' \subseteq H'$, bir n -ideal olsun. $z, t \in H$ olmak üzere $zt \in h^{-1}(U')$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ sağlansın. Buradan $h(zt) = h(z)h(t) \in U'$ elde edilir. h bir

monomorfizma ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $h(z) \notin \mathfrak{N}(H')$ bulunur. O halde U' , n -ideal olduğundan $h(t) \in U'$ yani $t \in h^{-1}(U')$ elde edilir.

Sonuç 3.28 H bir halka ve $V \subseteq U$ da H nin iki ideali olsun.

- (i) $U \subseteq H$, bir n -idealse U/V de H/V bölüm halkasının bir n -idealidir.
- (ii) $U/V, H/V$ bölüm halkasının bir n -ideali ve $V \subseteq \mathfrak{N}(H)$ ise U da H nin n -idealidir.
- (iii) $U/V, H/V$ bölüm halkasının bir n -ideali ve V, H halkasının bir n -idealiyse U da n -idealdir.

İspat (i) Her $z \in H$ için $\pi(z) = z + V$ biçiminde tanımlanan $\pi: H \rightarrow H/V$ doğal homomorfizmasını düşünelim. π bir epimorfizma ve $\text{Ker}(\pi) = V \subseteq U$ dur. Böylece Teorem 3.27 (i)'den $\pi(U) = U/V$ de H/V nin n -idealidir.

(ii) $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $(z + V)(t + V) = zt + V \in U/V$ bulunur. $z \notin \mathfrak{N}(H)$ ve $V \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $z + V \notin \mathfrak{N}(H/V)$ elde edilir. $U/V, H/V$ bölüm halkasının bir n -ideali olduğundan $t + V \in U/V$ ve buradan $t \in U$ elde edilir.

(iii) V, H halkasının n -ideali olduğundan Önerme 3.5'ten $V \subseteq \mathfrak{N}(H)$ dir. İstenen (ii)'den elde edilir.

Örnek 3.29 Sonuç 3.28 (i)'nin tersi doğru değildir. Örneğin, $H = \mathbb{Z}$, $U = 3\mathbb{Z}$ ve $V = 9\mathbb{Z}$ olsun. Buradan, $H/V \cong \mathbb{Z}_9$ ve $U/V \cong (\bar{3})$ bulunur. Ayrıca $(\bar{3}) = \mathfrak{N}(\mathbb{Z}_9)$ ve $(\bar{3}), \mathbb{Z}_9$ un asal ideali olduğundan Sonuç 3.12 (i)'den $(\bar{3}), \mathbb{Z}_9$ un bir n -idealidir ve böylece U/V de H/V nin bir n -idealidir. Fakat $U \not\subseteq \mathfrak{N}(\mathbb{Z}) = 0$ olduğundan Önerme 3.5 nedeniyle U, H nin bir n -ideali olamaz.

Sonuç 3.30 $D \subseteq H$ bir alt halka, $U \subseteq H$ bir n -ideal ve $D \not\subseteq U$ ise $D \cap U \subseteq D$, bir n -idealdir.

İspat Her $d \in D$ için $\text{inj}(d) = d$ biçiminde tanımlanan $\text{inj}: D \rightarrow H$ içermeye homomorfizması monomorfizmadır. O halde Teorem 3.27 (ii)'den $\text{inj}^{-1}(U) = U \cap D$ de D nin n -idealidir.

H bir halka, $S \subseteq H$ bir çarpımsal kapalı küme ve $S^{-1}H, H$ nin kesir halkası olsun. Her $z \in H$ için $\pi(z) = \frac{z}{1}$ şeklinde tanımlanan $\pi: H \rightarrow S^{-1}H$ doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda $U', S^{-1}H$ halkasının bir ideali ise U' nin π altında ters

görüntüsünü U'^c ile gösterelim. Ayrıca U, H nin bir idealiyse U nun genişlemesini $S^{-1}U = \{\lambda \in S^{-1}H : \exists z \in U, t \in S, \lambda = \frac{z}{t}\}$ ile gösterelim.

Önerme 3.31 $S \subseteq H$, çarpımsal kapalı küme ve $U \subsetneq H$ bir ideal olsun.

- (i) U, n -idealse $S^{-1}U$ da $S^{-1}H$ halkasının n -idealidir.
- (ii) $S = \text{Reg}(H)$ ve $U' \subseteq S^{-1}H$, n -idealse U'^c da bir n -idealdir.

İspat (i) $\frac{z}{t} \frac{y}{u} = \frac{zy}{ut} \in S^{-1}U$ ve $\frac{z}{t} \notin \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ olacak şekilde $\frac{z}{t}, \frac{y}{u} \in S^{-1}H$ elemanları verilsin. $\frac{z}{t} \notin \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ olduğundan kolaylıkla $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğu görülür. Ayrıca $\frac{zy}{ut} \in S^{-1}U$ olduğundan $v(zy) = z(vy) \in U$ olacak şekilde bir $v \in S$ vardır. U, n -ideal olduğundan $vy \in U$ böylece $\frac{y}{u} = \frac{vy}{vu} \in S^{-1}U$ elde edilir.

(ii) $\text{Reg}(H) = S$ ve $U' \subseteq S^{-1}H$, bir n -ideal olsun. $zt \in U'^c$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $\frac{z}{1} \frac{t}{1} = \frac{zt}{1} = \pi(zt) \in U'$ elde edilir. Şimdi $\frac{z}{1} \notin \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ olduğunu gösterelim. $\frac{z}{1} \in \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ ise $(\frac{z}{1})^n = \frac{z^n}{1} = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan $uz^n = 0$ olacak şekilde bir $u \in \text{Reg}(H)$ vardır. u bir regüler eleman olduğundan $z^n = 0$ bulunur bu ise $z \notin \mathfrak{N}(H)$ oluşuyla çelişir. $U', S^{-1}H$ halkasının bir n -ideali olduğundan $\pi(t) = \frac{t}{1} \in U'$ ve böylece $t \in U'^c$ bulunur. O halde U'^c, H halkasının bir n -idealidir.

Çarpımsal kapalı kümeler asal ideallerin karakterizasyonunda önemli bir rol oynar. Buradan yola çıkarak n -ideallerin karakterizasyonunda kullanacağımız çarpımsal kapalı kümelere benzer n -çarpımsal kapalı küme tanımını veriyoruz.

Tanım 3.32 $H - \mathfrak{N}(H) \subseteq T \subseteq H$ verilsin. Her $z \in H - \mathfrak{N}(H)$ ve $t \in T$ için $zt \in T$ oluyorsa T ye n -çarpımsal kapalı küme denir.

Önerme 3.33 $U \subsetneq H$ nin n -ideal olması için g.y.ş $H - U$ bir n -çarpımsal kapalı kümedir.

İspat $U \subsetneq H$, bir n -ideal olsun. O halde Önerme 3.5'ten $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ böylece $H - \mathfrak{N}(H) \subseteq H - U$ dur. Şimdi $H - U$ nun n -çarpımsal kapalı küme olduğunu gösterelim. Bunun için $z \in H - \mathfrak{N}(H)$ ve $t \in H - U$ alalım. $zt \in U$ olduğunu kabul edelim. U, n -ideal ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $t \in U$ çelişkisi bulunur. O halde $zt \in H - U$ yani $H - U, n$ -çarpımsal kapalı kümedir. Tersine $H - U$ nun n -çarpımsal kapalı küme olduğunu varsayalım. O halde Tanım 3.32'den $H - \mathfrak{N}(H) \subseteq H - U$ yani $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ dir. $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$

şartını sağlayan $z, t \in H$ seçilsin. $t \notin U$ ise $H - U$ bir n -çarpımsal kapalı küme olduğundan $zt \in H - U$ çelişkisi bulunur. O halde $t \in U$ yani U , n -idealdir.

Teorem 3.34 $T \subseteq H$ bir n -çarpımsal kapalı küme, $U \subseteq H$ bir ideal ve $U \cap T = \emptyset$ ise $U \subseteq V$ ve $V \cap T = \emptyset$ şartını sağlayan $V \subseteq H$, n -ideali vardır.

İspat $\Sigma = \{U' : U' \text{ bir ideal}, U \subseteq U' \text{ ve } U' \cap T = \emptyset\}$ kümesini gözönüne alalım. $U \in \Sigma$ olduğundan $\Sigma \neq \emptyset$ dır. Ayrıca Σ , “ $\subseteq$ ” bağıntısına göre bir kısmi sıralı kümedir. Şimdi Σ dan aşağıdaki gibi bir zincir alalım:

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq \dots$$

$U' = \bigcup_{t=1}^{\infty} U_t$ diyelim. Her $t \geq 1$ için $U \subseteq U_t$ ve $U_t \cap T = \emptyset$ olduğundan $U \subseteq U'$ ve $U' \cap T = \emptyset$ olur. Ayrıca U', H halkasının bir ideali olduğundan $U' \in \Sigma$ verilen zincirin supremumudur. Böylece Zorn Lemma'dan Σ bir maksimal elemana sahiptir, biz buna V diyelim. Öncelikle $V \cap T = \emptyset$ ve T , n -çarpımsal kapalı küme olduğundan, $V \subseteq H - T \subseteq \mathfrak{N}(H)$ bulunur. V , n -ideal olmasın. O halde $zt \in V$, $z \notin \mathfrak{N}(H)$ ve $t \notin V$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları bulunabilir. Buradan $t \in (V : z) - V$ çıkar. $V \subsetneq (V : z)$ ve $V \in \Sigma$ maksimal eleman olduğundan $(V : z) \cap T \neq \emptyset$ dir. O halde $\exists t' \in (V : z) \cap T$ olur. Buradan $zt' \in V$ elde edilir. T bir n -çarpımsal kapalı küme, $z \in H - \mathfrak{N}(H)$ ve $t' \in T$ olduğundan $zt' \in T \cap V$ çelişkisi elde edilir. O halde V bir n -idealdir.

Aşağıdaki Önerme Asaldan Kaçınma Teoreminin n -idealler için bir versiyonunu ifade etmektedir.

Önerme 3.35 H bir halka ve $U, V_1, \dots, V_n$ de H halkasının birer idealleri olsun. Ayrıca, V_i bir n -ideal ve $U \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ olsun. Her $k \neq i$ için V_k ideali nilpotent olmayan elemanlar içeriyor ve $U \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$ ise $U \subseteq V_i$ dir.

İspat Genelliği bozmadan $i = 1$ olduğunu kabul edelim. $U \not\subseteq V_2 \cup \dots \cup V_n$ olduğundan Önerme 2.1.24'e benzer biçimde $U \cap (V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n) \subseteq V_1$ geçerlidir. Diğer taraftan, H nin n -ideali var olduğundan Teorem 3.17'den $\mathfrak{N}(H)$ bir asal idealdir. Böylece $H - \mathfrak{N}(H)$ bir çarpımsal kapalı küme yani nilpotent olmayan elemanların çarpımı da nilpotent değildir. Varsayımdan her $k \geq 2$ için $z_k \in V_k$ olacak şekilde bir nilpotent olmayan $z_k \in H$ vardır. O halde $z = z_2 z_3 \dots z_n \in (V_2 V_3 \dots V_n) \cap (H - \mathfrak{N}(H))$ dir. Ayrıca, $U(V_2 \dots V_n) \subseteq U \cap (V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n) \subseteq V_1$ ve V_1 bir n -ideal olduğundan Teorem 3.10 (iii)'den $U \subseteq V_1$ elde edilir.

Şimdi n -idealler yardımıyla UN -halkalarını karakterize edeceğiz.

Teorem 3.36 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) H halkasının her elemanı ya birimsel ya nilpotenttir.
- (ii) Her has temel ideal bir n -idealdir.
- (iii) Her has ideal bir n -idealdir.
- (iv) H nin tek asal ideali $\mathfrak{N}(H)$ dir.
- (v) H bir UN -halkasıdır.
- (vi) $H/\mathfrak{N}(H)$ bir cisimdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) H halkasının her elemanı ya birimsel ya nilpotent olsun. Şimdi H halkasının herhangi bir has temel ideali (x) in bir n -ideal olduğunu göstereceğiz. $z, t \in H$ olmak üzere $zt \in (x)$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olsun. z nilpotent olmadığından varsayımdan z birimseldir yani $t = z^{-1}(zt) \in (x)$ elde edilir. O halde (x) bir n -idealdir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) H halkasının her has temel ideali bir n -ideal olsun. $U \subsetneq H$ idealini alalım. $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. U has ideal olduğundan (zt) ideali bir has temel idealdir. O halde varsayımdan (zt) temel ideali bir n -idealdir. Böylece $zt \in (zt)$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $t \in (zt) \subseteq U$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) H halkasının her has idealinin bir n -ideal olduğunu varsayalım. U bir asal ideal olsun. Varsayımdan U bir n -idealdir. Böylece Önerme 3.11'den $U = \mathfrak{N}(H)$ dir. O halde H nin tek asal ideali $\mathfrak{N}(H)$ dir.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) Önerme 1.3.11'den elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (vi) Açıktır.

(vi) $\Rightarrow$ (i) $H/\mathfrak{N}(H)$ bir cisim olsun. Şimdi H halkasının nilpotent olmayan bir z elemanını alalım. Böylece $z + \mathfrak{N}(H) \in H/\mathfrak{N}(H)$ cisminin sıfırdan farklı bir elemanıdır. Bu durumda $(z + \mathfrak{N}(H))(t + \mathfrak{N}(H)) = 1 + \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde bir $t \in H$ vardır. Buradan $zt - 1 \in \mathfrak{N}(H)$ böylece $1 + (zt - 1) = zt$ birimsel yani $z \in H$ elemanının birimsel olduğu anlaşılır.

Önerme 3.37 H_1 ve H_2 iki halka olsun. $H_1 \times H_2$ halkasının hiçbir n -ideali yoktur.

İspat $U_1 \times U_2$, $H_1 \times H_2$ halkasının bir n -ideali olsun. $(0,1)(1,0) = (0,0) \in U_1 \times U_2$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $(0,1) \notin \mathfrak{N}(H_1 \times H_2)$ ve $U_1 \times U_2$ bir n -ideal olduğundan $(1,0) \in U_1 \times U_2$ elde edilir. Benzer biçimde $(0,1) \in U_1 \times U_2$ bulunur. O halde $U_1 = H_1$ ve $U_2 = H_2$ olduğu görülür bu ise $U_1 \times U_2$ nin has olmasıyla çelişir.

Önerme 3.38 $U \subseteq H$ bir n -idealse $U \propto E$ de $H \propto E$ nin bir n -idealidir.

İspat $(z_1, e_1)(z_2, e_2) = (z_1 z_2, z_1 e_2 + z_2 e_1) \in U \propto E$ ve $(z_1, e_1) \notin \mathfrak{N}(H \propto E)$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in H; e_1, e_2 \in E$ elemanları verilsin. Teorem 1.5.2'den $z_1 \notin \mathfrak{N}(H)$ bulunur. U bir n -ideal ve $z_1 z_2 \in U$ olduğundan $z_2 \in U$ böylece $(z_2, e_2) \in U \propto E$ bulunur. Sonuç olarak $U \propto E$ de bir n -idealdir.

Örnek 3.39 $U \subseteq H$ bir n -ideal, $E' \subseteq E$ bir alt modül ve $UE \subseteq E'$ olsun. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir n -ideal olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_6$ halkasını göz önüne alalım. Burada, $\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_6$ halkasının nilpotent elemanlarının kümesi $\mathfrak{N}(\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_6) = (0) \propto \mathbb{Z}_6$ dır. Ayrıca $U = (0)$, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bir n -idealidir. Şimdi $\mathbb{Z}_6$ nın $E' = (\bar{0})$ alt modülünü alalım. Bu durumda $U\mathbb{Z}_6 \subseteq E'$ yani $U \propto E' \subseteq \mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_6$, bir idealdir. Ayrıca $(2, \bar{0})(0, \bar{3}) = (0, \bar{0}) \in U \propto E'$ fakat $(2, \bar{0}) \notin \mathfrak{N}(\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_6)$ ve $(0, \bar{3}) \notin U \propto E'$ olduğundan $U \propto E'$ bir n -ideal değildir.

Şimdi $U \propto E$ nin homojen ideallerinin ne zaman n -ideal olduğunu araştıracağız.

Tanım 3.40 E bir H -modül ve $z \in H$ olsun. $\exists n \in \mathbb{N}$ için $z^n E = 0$ ise z ye E modülünde bir nilpotent eleman denir ve E modülündeki tüm nilpotent elemanlarının kümesini $Nil(E)$ ile göstereceğiz.

Yukarıdaki tanımdan $\mathfrak{N}(H) \subseteq Nil(E)$ olduğu açıkça görülür. Şimdi aşağıdaki tanımla birlikte değişmeli halkalardaki n -ideal kavramını modüllere genişletelim.

Tanım 3.41 $E' \subsetneq E$ alt modülü verilsin. Her $z \in H, e \in E$ için $ze \in E'$ ve $z \notin Nil(E)$ iken $e \in E'$ sağlanıyorsa E' ne E nin bir n -alt modülü denir.

Teorem 3.42 $U \subseteq H$ bir ideal ve $E' \subsetneq E$ alt modül olsun. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir n -idealse U , n -ideal ve E' , n -alt modüldür.

İspat $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir n -ideal olsun. $zt \in U$ ve $z \notin \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. Buradan $(z, 0)(t, 0) = (zt, 0) \in U \propto E'$ elde edilir. $U \propto E'$ bir n -ideal ve $(z, 0) \notin \mathfrak{N}(H \propto E)$ olduğundan $(t, 0) \in U \propto E'$ ve böylece $t \in U$ bulunur. Yani U bir n -idealdir. Şimdi E' nün bir n -alt modül olduğunu gösterelim. Bunun için $ze \in E'$ ve $z \notin Nil(E)$ olacak şekilde $z \in H$ ve $e \in E$ elemanlarını alalım. Buradan $(z, 0)(0, e) = (0, ze) \in U \propto E'$ bulunur. Ayrıca $\mathfrak{N}(H) \subseteq Nil(E)$ ve $z \notin Nil(E)$ olduğundan $z \notin \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Böylece $(z, 0) \notin \mathfrak{N}(H \propto E)$ bulunur. $U \propto E'$ bir n -ideal olduğundan $(0, e) \in$

$U \propto E'$ yani $e \in E'$ bulunur. Böylece E' bir n -alt modüldür.

Örnek 3.43 Teorem 3.42 nin tersi doğru değildir. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_9$ u göz önüne alalım. Burada (0) , $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bir n -idealidir. Şimdi $(\bar{0})$ nin $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_9$ un bir n -alt modülü olduğunu gösterelim. Öncelikle $Nil(\mathbb{Z}_9) = 3\mathbb{Z}$ olduğu açıkça görülür. $a\bar{m} = \overline{am} = \bar{0}$ ve $a \notin Nil(\mathbb{Z}_9)$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ ve $\bar{m} \in \mathbb{Z}_9$ elemanlarını alalım. Bu durumda a ile 9 aralarında asaldır ve böylece $xa + 9y = 1$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ tam sayıları bulunabilir. Buradan $\bar{m} = \overline{xam + 9my} = x\overline{am} + y\overline{9m} = \bar{0} \in (\bar{0})$ elde edilir. Böylece $(\bar{0})$, $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_9$ un bir n -alt modülüdür. Şimdi, $\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_9$ halkasının $J = (0) \propto (\bar{0})$ idealinin bir n -ideal olmadığını gösterelim. İlk olarak, $\mathfrak{N}(\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_9) = (0) \propto \mathbb{Z}_9$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Ayrıca, $(3, \bar{0})(0, \bar{3}) = (0, \bar{0}) \in J$ fakat $(3, \bar{0}) \notin \mathfrak{N}(\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_9)$ ve $(0, \bar{3}) \notin J$ olduğundan J , $\mathbb{Z} \propto \mathbb{Z}_9$ halkasının bir n -ideali değildir.

Teorem 3.44 E bir H -modül ve $Nil(E) \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olsun. $U \subseteq H$ bir n -ideal; $E' \subseteq E$ bir n -alt modül ve $UE \subseteq E'$ ise $U \propto E' \subseteq H \propto E$ bir n -idealdir.

İspat $(z_1, e_1)(z_2, e_2) = (z_1z_2, z_1e_2 + z_2e_1) \in U \propto E'$ ve $(z_1, e_1) \notin \mathfrak{N}(H \propto E)$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in H$ ve $e_1, e_2 \in E$ elemanlarını alalım. Buradan $z_1z_2 \in U$ ve $z_1e_2 + z_2e_1 \in E'$ elde edilir. Ayrıca, $(z_1, e_1) \notin \mathfrak{N}(H \propto E)$ olduğundan $z_1 \notin \mathfrak{N}(H)$ bulunur. U bir n -ideal olduğundan $z_2 \in U$ bulunur ve böylece $z_2e_1 \in UE \subseteq E'$ elde edilir. Buradan $z_1e_2 + z_2e_1 \in E'$ olduğundan $z_1e_2 \in E'$ bulunur. Ayrıca, $z_1 \notin \mathfrak{N}(H)$ ve $Nil(E) \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $z_1 \notin Nil(E)$ elde edilir. Diğer yandan $z_1e_2 \in E'$ ve E' bir n -alt modül olduğundan $e_2 \in E'$ bulunur. Sonuç olarak $(z_2, e_2) \in U \propto E'$ yani $U \propto E'$ bir n -idealdir.

Şimdi Teorem 3.42 ve Teorem 3.44 den yararlanarak $H \propto E$ nin homojen n -ideallerini karakterize eden aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 3.45 E bir H -modül ve $Nil(E) \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olsun. $U \subseteq H$ ideal, $E' \subsetneq E$ alt modül ve $UE \subseteq E'$ olsun. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ nin n -ideal olması için g.y.ş U bir n -idealdir ve E' bir n -alt modüldür.

4. GÜÇLÜ QUASI ASALIMSİ İDEALLER

Bu bölümde asalımsı idealler ile quasi asalımsı idealler sınıfı arasında yer alan ayrıca n -ideallerin de bir genellemesi olan güçlü quasi asalımsı (kısaca, güçlü q-asalımsı) ideal sınıfını tanıtacağız. Bu ideal sınıfının cebirsel özellikleri incelenerek söz konusu idealler ile aralarındaki ilişkiler araştırılacaktır. Dahası güçlü q-asalımsı ideallerden esinlenerek değişmeli halkaların sıfır bölen grafiğinin bir alt grafiği incelenecektir.

4.1 Güçlü q-Asalımsı İdeallerin Karakterizasyonu

Tanım 4.1.1 $U \subsetneq H$ ideali verilsin. Her $z, t \in H$ için $zt \in U$ iken $z^2 \in U$ veya $\exists n \in \mathbb{N}$ için $t^n \in U$ oluyorsa U ya güçlü quasi asalımsı (kısaca, güçlü q-asalımsı) ideal denir.

Önerme 4.1.2 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) U , asalımsı idealse güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) U , 2-asal idealse güçlü q-asalımsıdır.
- (iii) U , güçlü q-asalımsı idealse quasi asalımsıdır.
- (iv) $\sqrt{U}^2 \subseteq U$ olsun. U , 2-asaldır $\Leftrightarrow U$, güçlü q-asalımsıdır $\Leftrightarrow U$, quasi asalımsıdır.

İspat (i), (ii) Açıktır.

(iii) U güçlü q-asalımsı ideal olsun. $zt \in \sqrt{U}$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. Buradan $(zt)^n = z^n t^n \in U$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunur. U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $(z^n)^2 = z^{2n} \in U$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $(t^n)^m = t^{nm} \in U$ olur. Buradan $z \in \sqrt{U}$ veya $t \in \sqrt{U}$ elde edilir yani $\sqrt{U}$ bir asal idealdir.

(iv) (ii)'den her 2-asal idealin bir güçlü q-asalımsı ideal ve (iii)'den her güçlü q-asalımsı idealin bir quasi asalımsı ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi U nun bir quasi asalımsı ideal olduğunu varsayalım. $zt \in U \subseteq \sqrt{U}$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $\sqrt{U}$ bir asal ideal olduğundan $z \in \sqrt{U}$ veya $t \in \sqrt{U}$ elde edilir. $\sqrt{U}^2 \subseteq U$ olduğundan $z^2 \in \sqrt{U}^2 \subseteq U$ veya $t^2 \in \sqrt{U}^2 \subseteq U$ bulunur. Bu ise U nun 2-asal ideal olduğunu gösterir.

Aşağıdaki örnekler güçlü q-asalımsı idealler ile Önerme 4.1.2’de yer alan ideal sınıfları arasındaki farkı ortaya koymaktadır.

Örnek 4.1.3 $\mathbb{Z}[X]$ in alt halkası $S = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n : a_1, 3 \text{ ün katı}\}$ yi göz önüne alalım.

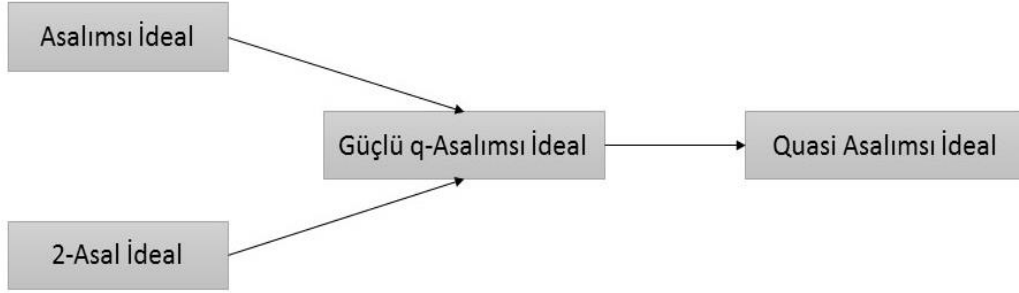
(i) $U = (9X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$ olsun. Buradan $\sqrt{U} = (3X, X^2, X^3)$ olup $S/\sqrt{U} \cong \mathbb{Z}$ dir. Böylece $\sqrt{U}, S$ nin bir asal ideali yani U bir quasi asalımsı idealdir. Ayrıca, $\sqrt{U}^2 = (9X^2, 3X^3, X^4, X^5, X^6) \subseteq U$ olduğundan Önerme 4.1.2 (iv)’ye göre U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olduğu anlaşılır. $9X^2 \in U$ fakat $X^2 \notin U$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $9^n \notin U$ olduğundan U bir asalımsı ideal değildir.

(ii) $U = (27X, 27X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$ olsun. Buradan, $\sqrt{U} = (3X, X^2, X^3)$ bir asal ideal yani U bir quasi asalımsı idealdir. $(3X).9 = 27X \in U$ fakat $(3X)^2 = 9X^2 \notin U$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $9^n \notin U$ olduğundan U güçlü q-asalımsı değildir.

Örnek 4.1.4 (i) k bir cisim, $H = k[X, Y]$ ve $U = (X^3, XY, Y^3)$ olsun. $\sqrt{U} = (X, Y) \subseteq H$ bir maksimal ideal olduğundan U asalımsıdır. Önerme 4.1.2 (i)’den U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olduğu anlaşılır. $XY \in U$ fakat $X^2 \notin U$ ve $Y^2 \notin U$ gerçekleştiğinden U , 2-asal değildir.

(ii) H bir Temel İdeal Bölgesi olsun. H bir cisim ise (0) ideali asalımsı, güçlü q-asalımsı ve quasi asalımsıdır. H cisim olmayan bir Temel İdeal Bölgesi olsun. Burada her sıfırdan farklı asal ideal maksimaldir. $0 \neq U$, bir quasi asalımsı ideal ise $\sqrt{U}$ maksimal ideal olduğundan U asalımsıdır böylece güçlü q-asalımsıdır. O halde bir Temel İdeal Bölgesinde asalımsı, güçlü q-asalımsı ve quasi asalımsı idealler denktir.

Şimdi güçlü q-asalımsı ideal sınıfının tüm ideal sınıfları arasındaki yerini gösteren aşağıdaki şemayı vereceğiz.



Şekil 4.1.1 Güçlü q-Asalımsı İdealler

Örnek 4.1.5 H halkası von Neumann regüler olsun. Böylece her U ideali için $U^2 = U = \sqrt{U}$ gerçekleşir. Önerme 4.1.2'den von Neumann regüler halkada asal ideal, 2-asal ideal, asalımsı ideal, güçlü q-asalımsı ideal ve quasi asalımsı idealler denktir.

Tanım 4.1.6 (Anderson ve ark, 1994) U, H halkasının bir ideali olsun. U daki elemanların n . kuvvetlerinin ürettiği ideal $U_n = (\{a^n: a \in U\})$ olarak tanımlanır.

Not 4.1.7 (Anderson ve ark, 1994) U, H halkasının bir ideali olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \subseteq U^n \subseteq U$ kapsaması sağlanır. Ayrıca $n = 1$ iken eşitlik durumu söz konusudur. $n!, H$ halkasının bir birimsel elemanı ise $U_n = U^n$ eşitliği gerçekleşir.

Önerme 4.1.8 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) Her $z \in H$ için $(z) \subseteq (U:z)$ veya $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ dur.
- (iii) Her V, Y ideali için $VY \subseteq U$ iken $V_2 \subseteq U$ veya $Y \subseteq \sqrt{U}$ dur.
- (iv) Her $z \in H$ için $(U:z)_2 \subseteq U$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $z^m \in U$ dur.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $U \subseteq H$ güçlü q-asalımsı ideal olsun. Şimdi herhangi bir $z \in H$ elemanını alalım. $z^2 \in U$ ise $(z) \subseteq (U:z)$ olur. $z^2 \notin U$ olduğunu varsayalım. Şimdi $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ olduğunu göstereceğiz. $t \in (U:z)$ biçiminde $t \in H$ elemanı seçilsin. Buradan $zt \in U$ elde edilir. U bir güçlü q-asalımsı ideal ve $z^2 \notin U$ olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ için $t^m \in U$ yani

$t \in \sqrt{U}$ bulunur. Böylece $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $VY \subseteq U$ olacak şekilde $V, Y \subseteq H$ idealleri verilsin. $Y \not\subseteq \sqrt{U}$ olsun. Buradan $t \notin \sqrt{U}$ olmak üzere bir $t \in Y$ vardır. Ayrıca $VY \subseteq U$ olduğundan her $z \in V$ için $zt \in U$ olur. Böylece $t \in (U:z) - \sqrt{U}$ olduğundan (ii)'den $(z) \subseteq (U:z)$ ve buradan $z^2 \in U$ elde edilir. Buradan $V_2 \subseteq U$ olduğu anlaşılır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $z \in H$ alalım. $z \in \sqrt{U}$ ise $\exists m \in \mathbb{N}$ için $z^m \in U$ dur. $z \notin \sqrt{U}$ olsun. Şimdi $V = (U:z)$ ve $Y = (z)$ diyelim. Buradan $VY = (U:z)(z) \subseteq U$ elde edilir. $Y \not\subseteq \sqrt{U}$ olduğundan (iii)'den $V_2 = (U:z)_2 \subseteq U$ bulunur.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $t^n \in U$ ise ispat tamamlanır. Şimdi $t \notin \sqrt{U}$ olduğunu varsayalım. $zt \in U$ olduğundan $z \in (U:t)$ ve (iv)'den $z^2 \in (U:t)_2 \subseteq U$ yani $z^2 \in U$ elde edilir. O halde, U güçlü q-asalımsıdır.

Aşağıdaki sonuç Not 4.1.7 ve Önerme 4.1.8'den doğrudan çıkar.

Sonuç 4.1.9 $2 \in H$ bir birimsel eleman olsun. $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) Her $z \in H$ için $(z) \subseteq (U:z)$ veya $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ dur.
- (iii) $V, Y \subseteq H$ idealleri için $VY \subseteq U$ iken $V^2 \subseteq U$ veya $Y \subseteq \sqrt{U}$ dur.
- (iv) Her $z \in H$ için $(U:z)^2 \subseteq U$ veya $\exists m \in \mathbb{N}$ için $z^m \in U$ dur.

Önerme 4.1.10 $U \subseteq H$ bir güçlü q-asalımsı ideal, $z \notin U$ ve $(z) = (z^2)$ ise $(U:z)$ de güçlü q-asalımsıdır.

İspat $U \subseteq H$ bir güçlü q-asalımsı ideal, $z \notin U$ ve $(z) = (z^2)$ olsun. $(z) \not\subseteq (U:z)$ olduğundan Önerme 4.1.8'den $\sqrt{(U:z)} = \sqrt{U}$ elde edilir. Şimdi $(U:z)$ nin güçlü q-asalımsı ideal olduğunu gösterelim. $tu \in (U:z)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u^n \notin (U:z)$ şartını sağlayan $t, u \in H$ elemanları verilsin. Buradan $(tu)z = (zt)u \in U$ bulunur. $\sqrt{(U:z)} = \sqrt{U}$ olduğundan $u \notin \sqrt{U}$ ve böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $u^n \notin U$ olur. U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $(zt)^2 = z^2 t^2 \in U$ ve buradan $t^2 \in (U:z^2) = (U:z)$ elde edilir.

Önerme 4.1.11 $h: H \rightarrow H'$ halka homomorfizması verilsin.

- (i) h örten ve $U \subseteq H$, $Ker(h)$ yi kapsayan bir güçlü q-asalımsı idealse $h(U) \subseteq H'$ de güçlü q-asalımsı idealdir.

- (ii) $U' \subseteq H'$ bir güçlü q-asalımsı idealse $h^{-1}(U') \subseteq H$ de bir güçlü q-asalımsı idealdir.

İspat (i) $z't' \in h(U)$ olacak şekilde $z', t' \in H'$ elemanlarını alalım. h örten olduğundan $z' = h(z)$ ve $t' = h(t)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları vardır. Buradan $z't' = h(z)h(t) = h(zt) \in h(U)$ bulunur. Diğer yandan $\text{Ker}(h) \subseteq U$ olduğundan $zt \in U$ elde edilir. Böylece U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $z^2 \in U$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $t^n \in U$ olur. Buradan $z'^2 = (h(z))^2 = h(z^2) \in h(U)$ veya $t'^n = (h(t))^n = h(t^n) \in h(U)$ bulunur. Bu ise $h(U)$ nun bir güçlü q-asalımsı ideal olduğunu gösterir.

(ii) $zt \in h^{-1}(U')$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $h(zt) = h(z)h(t) \in U'$ elde edilir. U' bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $(h(z))^2 = h(z^2) \in U'$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $(h(t))^n = h(t^n) \in U'$ olur. Buradan $z^2 \in h^{-1}(U')$ veya $t^n \in h^{-1}(U')$ elde edilir.

Sonuç 4.1.12 $V \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $U \subsetneq H$, V yi içeren bir ideal olsun. U nun bir güçlü q-asalımsı ideali olması için g.y.ş $U/V \subseteq H/V$, bir güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) $H' \subseteq H$ bir alt halka, $U \subseteq H$ güçlü q-asalımsı ideal ve $H' \not\subseteq U$ ise $H' \cap U \subseteq H'$ de güçlü q-asalımsıdır.

İspat (i) Önerme 4.1.11 (i)'den bulunur.

(ii) Önerme 4.1.11 (ii)'den bulunur.

Sonuç 4.1.13 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) $U \subseteq H$, güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) $(U, X), H[X]$ halkasının bir güçlü q-asalımsı idealidir.

İspat (i) $\Leftrightarrow$ (ii) İlk olarak $(U, X)/(X) \cong U$ ve $H[X]/(X) \cong H$ olduğu kolayca görülür. İstenen, Sonuç 4.1.12 (i)'den elde edilir.

$V \subseteq H$ ideali için $zd_H(V) = \{z \in H : \exists t \notin V \text{ için } zt \in V\}$ olarak tanımlanır.

Önerme 4.1.14 $S \subseteq H$ çarpımsal kapalı küme ve $U \subseteq H$ ideali için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $U \subseteq H$ güçlü q-asalımsı ve $U \cap S = \emptyset$ ise $S^{-1}U \subseteq S^{-1}H$ de güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) $S^{-1}U \subseteq S^{-1}H$ bir güçlü q-asalımsı ideal ve $zd_H(U) \cap S = \emptyset$ ise $U \subseteq H$ de güçlü q-asalımsıdır.

İspat (i) $\frac{z}{u} \frac{t}{s} = \frac{zt}{us} \in S^{-1}U$ olacak şekilde $z, t \in H; u, s \in S$ elemanları verilsin. Buradan $v(zt) = (vz)t \in U$ olacak şekilde bir $v \in S$ bulunur. U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $(vz)^2 = v^2 z^2 \in U$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $t^n \in U$ elde edilir. Buradan $(\frac{z}{u})^2 = \frac{z^2}{u^2} = \frac{v^2 z^2}{v^2 u^2} \in S^{-1}U$ veya $(\frac{t}{s})^n = \frac{t^n}{s^n} \in S^{-1}U$ elde edilir. Böylece, $S^{-1}U \subseteq S^{-1}H$ güçlü q-asalımsıdır.

(ii) $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $\frac{z}{1} \frac{t}{1} = \frac{zt}{1} \in S^{-1}U$ elde edilir. $S^{-1}U \subseteq S^{-1}H$ güçlü q-asalımsı olduğundan $(\frac{z}{1})^2 = \frac{z^2}{1} \in S^{-1}U$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $(\frac{t}{1})^n = \frac{t^n}{1} \in S^{-1}U$ bulunur. O halde $uz^2 \in U$ veya $st^n \in U$ olacak şekilde $u, s \in S$ elemanları vardır. $uz^2 \in U$ ise $zd_H(U) \cap S = \emptyset$ olduğundan $z^2 \in U$ bulunur. Aksi takdirde, $z^2 \notin U$ ise $uz^2 \in U$ olduğundan $u \in S \cap zd_H(U)$ çelişkisi elde edilir. Diğer yandan $st^n \in U$ ise $zd_H(U) \cap S = \emptyset$ olduğundan benzer şekilde $t^n \in U$ elde edilir. O halde U da güçlü q-asalımsıdır.

Önerme 4.1.15 $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq H$ birer güçlü q-asalımsı idealler ve her $1 \leq t \leq n$ için $\sqrt{U_t} = V$ olsun. Bu durumda $U = \bigcap_{t=1}^n U_t$ de güçlü q-asalımsıdır.

İspat Öncelikle $\sqrt{U} = \sqrt{\bigcap_{t=1}^n U_t} = \bigcap_{t=1}^n \sqrt{U_t} = V$ olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. $t \in V$ ise bir $m \in \mathbb{N}$ için $t^m \in U$ bulunur. O halde $t \notin V$ olsun. $zt \in U$ olduğundan her $1 \leq t \leq n$ için $zt \in U_t$ elde edilir. U_t bir güçlü q-asalımsı ideal ve $t \notin V = \sqrt{U_t}$ olduğundan her $1 \leq t \leq n$ için $z^2 \in U_t$ olur. Buradan $z^2 \in \bigcap_{t=1}^n U_t = U$ yani $U = \bigcap_{t=1}^n U_t$ bir güçlü q-asalımsı idealdir.

Lemma 4.1.16 H_1, H_2 birer halka; U_1, U_2 de sırasıyla idealleri olmak üzere $H = H_1 \times H_2$ ve $U = U_1 \times U_2$ için aşağıdakiler denk olur.

- (i) $U \subseteq H$, güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) $U_1 = H_1$ ve U_2, H_2 nin bir güçlü q-asalımsı ideali veya U_1, H_1 in bir güçlü q-asalımsı ideali ve $U_2 = H_2$ dir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) U, H nin bir güçlü q-asalımsı ideali olsun. Önerme 4.1.2 (iii)'den $\sqrt{U} = \sqrt{U_1} \times \sqrt{U_2}$ bir asal idealdir. $(1,0)(0,1) = (0,0) \in \sqrt{U} = \sqrt{U_1} \times \sqrt{U_2}$ ve $\sqrt{U}$ bir asal ideal olduğundan $(1,0) \in \sqrt{U}$ veya $(0,1) \in \sqrt{U}$ olur. Buradan $1 \in U_1$ veya $1 \in U_2$ bulunur. Böylece $U_1 = H_1$ veya $U_2 = H_2$ elde edilir. Genelliği bozmadan $U_1 = H_1$ kabul edelim. Şimdi U_2 nin bir güçlü q-asalımsı ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $zt \in U_2$

olacak şekilde $z, t \in H_2$ elemanlarını alalım. Buradan $(1, z)(1, t) = (1, zt) \in U$ elde edilir. U, H nin bir güçlü q-asalımsı ideali olduğundan $(1, z)^2 = (1, z^2) \in U$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $(1, t)^m = (1, t^m) \in U$ olur. Buradan $z^2 \in U_2$ veya $t^m \in U_2$ elde edilir ve böylece U_2 , güçlü q-asalımsıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $U_1 = H_1$ ve U_2, H_2 nin bir güçlü q-asalımsı ideali olsun. Şimdi U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olduğunu göstereceğiz. $(z, t)(z', t') = (zz', tt') \in U$ olacak şekilde $z, z' \in H_1; t, t' \in H_2$ elemanları verilsin. Buradan $tt' \in U_2$ elde edilir. U_2, H_2 nin bir güçlü q-asalımsı ideali olduğundan $t^2 \in U_2$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $t'^m \in U_2$ elde edilir. Böylece $(z, t)^2 = (z^2, t^2) \in U$ veya $(z', t')^m = (z'^m, t'^m) \in U$ bulunur. O halde U, H nin bir güçlü q-asalımsı idealidir. U_1, H_1 in bir güçlü q-asalımsı ideali ve $U_2 = H_2$ iken U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.17 $n \geq 1$, $H_1, H_2, \dots, H_n$ birer halka ve $U_1, U_2, \dots, U_n$ de sırasıyla idealleri olsun. $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ kartezyen çarpım halkasının $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) Bir $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $U_t \subseteq H_t$ güçlü q-asalımsı ve her $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \{t\}$ için $U_k = H_k$ dir.

İspat Lemma 4.1.16 kullanılarak Teorem 2.1.36 ya benzer şekilde tümevarımdan istenen bulunur.

Şimdi güçlü q-asalımsı ideal kavramıyla bölünmüş tamlık bölgelerini karakterize edeceğiz.

Teorem 4.1.18 H bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) H bir bölünmüş halkadır.
- (ii) Her has temel ideal bir güçlü q-asalımsı idealdir.
- (iii) Her has ideal bir güçlü q-asalımsı idealdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) H bir bölünmüş halka ve $z \in H$ olmak üzere (z) bir has ideal olsun. $tu \in (z)$ olacak şekilde $t, u \in H$ elemanları verilsin. H bir bölünmüş halka olduğundan $u|t$ veya $\exists m \in \mathbb{N}$ için $t|u^m$ olur. $u|t$ ise $t = vu$ olacak şekilde $v \in H$ vardır. Böylece $t^2 = v(ut) \in (z)$ bulunur. $t|u^m$ ise $u^m = v't$ olacak şekilde bir $v' \in H$ vardır. Böylece $u^{m+1} = v'(ut) \in (z)$ olur. O halde, (z) güçlü q-asalımsıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $U \subsetneq H$ ideali ve $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $zt \in (zt)$ ve (zt) temel ideali bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan $z^2 \in (zt) \subseteq U$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $t^m \in (zt) \subseteq U$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $z, t \in H$ birimsel olmayan ve sıfırdan farklı elemanlar olsun. Varsayımdan (zt) bir güçlü q-asalımsı idealdir. $zt \in (zt)$ olduğundan $z^2 \in (zt)$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $t^m \in (zt)$ elde edilir. $z^2 \in (zt)$ ise $z^2 = v(zt)$ olacak şekilde bir $v \in H$ vardır. H bir tamlık bölgesi olduğundan $z = vt$ yani $t|z$ elde edilir. $t^m \in (zt)$ ise $t^m = v'zt$ olacak şekilde bir $v' \in H$ bulunur. Buradan $t^{m-1} = v'z$ ve böylece $z|t^{m-1}$ olur. O halde H bir bölünmüş halkadır.

Teorem 4.1.19 H bir halka ve $2 \in H$ birimsel olsun. Aşağıdakiler denk olur.

- (i) $U \subseteq H$, güçlü q-asalımsıdır.
- (ii) $U[X] \subseteq H[X]$, güçlü q-asalımsıdır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $U \subseteq H$, güçlü q-asalımsı olsun. Öncelikle $\sqrt{U[X]} = \sqrt{U}[X]$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $gh \in U[X]$ ve $h \notin \sqrt{U[X]}$ olacak şekilde $g, h \in H[X]$ elemanları verilsin. $h \notin \sqrt{U[X]} = \sqrt{U}[X]$ olduğundan $c(h) \notin \sqrt{U}$ dur. Ayrıca $gh \in U[X]$ olduğundan $c(gh) \subseteq U$ olduğu görülür. Şimdi g nin derecesine $m \in \mathbb{N}$ diyelim. Bu durumda Teorem 1.4.3'ten $c(g)c(h)^{m+1} = c(h)^m c(gh) \subseteq U$ olur. $c(h) \notin \sqrt{U}$ olduğundan $c(h)^{m+1} \notin \sqrt{U}$ elde edilir. U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan Sonuç 4.1.9'dan $c(g)^2 \subseteq U$ bulunur. $c(g^2) \subseteq c(g)^2$ olduğundan $c(g^2) \subseteq U$ ve böylece $g^2 \in U[X]$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $U[X] \subseteq H[X]$, güçlü q-asalımsı olsun. H den $H[X]$ e her $z \in H$ için $\text{inj}(z) = z$ şeklinde tanımlanan içirme homomorfizmasını göz önüne alalım. Öncelikle $\text{inj}^{-1}(U[X]) = U$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $U[X]$ bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan, Önerme 4.1.11(ii)'den $\text{inj}^{-1}(U[X]) = U \subseteq H$ güçlü q-asalımsıdır.

Teorem 4.1.20 H halkası Noetherian ve $2 \in H$ birimsel olsun. $U \subseteq H$ nin bir güçlü q-asalımsı ideal olması için g.y.ş $U[[X]] \subseteq H[[X]]$ bir güçlü q-asalımsıdır.

İspat $U[[X]], H[[X]]$ in bir güçlü q-asalımsı ideali olsun. $H, H[[X]]$ in bir alt halkası ve $U = U[[X]] \cap H$ olduğundan Sonuç 4.1.12 (ii)'den U da H nin bir güçlü q-asalımsı idealidir. Tersine U, H nin bir güçlü q-asalımsı ideali olsun. H bir Noetherian halka olduğundan Teorem 1.4.5'ten $\sqrt{U[[X]]} = \sqrt{U}[[X]]$ bulunur. Şimdi $gh \in U[[X]]$ ve $h \notin$

$\sqrt{U}[[X]]$ olacak şekilde $g, h \in H[[X]]$ elemanları verilsin. Buradan $c(gh) \subseteq U$ ve $c(h) \notin \sqrt{U}$ olduğu görülür. H , Noetherian olduğundan $c(g)$ sonlu üretilmiştir. Şimdi $c(g)$ nin minimal sayıdaki üreteç kümesi $(a_1, \dots, a_k)$ olsun. O halde $c(g)$ nin minimal sayıda üretecini $\mu(c(g)) = k$ ile gösterelim. m, H nin herhangi bir maksimal ideali olsun. $c(g)$ nin m maksimal idealine göre yerelleştirmesi $c(g)_m = (\frac{a_1}{1}, \dots, \frac{a_k}{1})$ olur ve böylece $c(g)_m$ nin minimal sayıda üretici $\mu(c(g)_m) \leq k$ olur. O halde tüm maksimal idealler üzerinden $\mu(c(g)_m)$ sayılarının maksimumuna n diyelim. Teorem 1.4.4'ten $c(g)c(h)^n = c(h)^{n-1}c(gh) \subseteq U$ elde edilir. $c(h) \notin \sqrt{U}$ olduğundan $c(h)^n \notin \sqrt{U}$ bulunur. U bir güçlü q-asalımsı ideal olduğundan Sonuç 4.1.9'dan $c(g^2) \subseteq c(g)^2 \subseteq U$ elde edilir. Buradan $g^2 \in U[[X]]$ bulunur ve böylece $U[[X]]$ in bir güçlü q-asalımsı ideal olduğu anlaşılır.

Teorem 4.1.21 $U \propto E' \subseteq H \propto E$ homojen ideali için aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $U \propto E'$ güçlü q-asalımsı idealse $U \subseteq H$ güçlü q-asalımsı idealdir.
- (ii) $U \subseteq H$ güçlü q-asalımsı ideal ve $\sqrt{U}E \subseteq E'$ ise $U \propto E'$ güçlü q-asalımsıdır.

İspat (i) $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $(z, 0)(t, 0) = (zt, 0) \in U \propto E'$ elde edilir. $U \propto E'$ güçlü q-asalımsı olduğundan $(z, 0)^2 = (z^2, 0) \in U \propto E'$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $(t, 0)^m = (t^m, 0) \in U \propto E'$ bulunur. Buradan $z^2 \in U$ veya $t^m \in U$ elde edilir. Sonuç olarak, U güçlü q-asalımsıdır.

(ii) $(z, e)(t, e') = (zt, ze' + te) \in U \propto E'$ olacak şekilde $z, t \in H$; $e, e' \in E$ elemanları verilsin. Buradan $zt \in U$ ve $ze' + te \in E'$ elde edilir. U , güçlü q-asalımsı olduğundan $z^2 \in U$ veya bir $m \in \mathbb{N}$ için $t^m \in U$ bulunur. $z^2 \in U$ ise $ze \in \sqrt{U}E \subseteq E'$ ve böylece $2ze \in E'$ elde edilir. Buradan $(z, e)^2 = (z^2, 2ze) \in U \propto E'$ olur. $t^m \in U$ ise $t^m e' \in UE \subseteq \sqrt{U}E \subseteq E'$ ve böylece $(t, e')^{m+1} = (t^{m+1}, (m+1)t^m e') \in U \propto E'$ bulunur.

Sonuç 4.1.22 $U \subsetneq H$ bir ideal, $E' \subseteq E$ alt modül ve $(E':E) = \sqrt{(E':E)}$ olsun. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ homojen idealinin güçlü q-asalımsı olması için g.y.ş U güçlü q-asalımsıdır.

4.2 Değişmeli Halkaların Sıfır Bölen Grafiği

Bu bölümde güçlü q -asalımsı ideallerden esinlenerek oluşturduğumuz $\Gamma_U(H)$ nin bir alt grafiğini çalışacağız. $U \subseteq H$ bir ideal olmak üzere $\Gamma_U^*(H)$; köşe noktaları kümesi $C_U(H)$ olan bir grafik olmak üzere herhangi iki köşe noktası $z \neq t$ nin komşu olabilmesi için $zt \in U$ ve ayrıca $z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ veya $z \notin \sqrt{U}, t^2 \notin U$ gerçeklensin.

Aşağıdaki önermede $\Gamma_U^*(H)$ nin çizgesel özelliğini kullanarak H halkasının güçlü q -asalımsı ideallerini karakterize edeceğiz.

Önerme 4.2.1 $U \subsetneq H$ ideali verilsin.

- (i) $\Gamma_U^*(H), \Gamma_U(H)$ nin bir alt grafiğidir.
- (ii) U nun asal olması için g.y.ş $\Gamma_U^*(H)$ bir boş grafiktir. Bu durumda $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ dir.
- (iii) U asal olmayan bir ideal olsun. $|C_U(H)| = 1$ ise $\Gamma_U^*(H)$ kenarsız bir grafiktir. Bu durumda, $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ dir.
- (iv) $|C_U(H)| \geq 2$ olsun. U nun güçlü q -asalımsı olması için g.y.ş $\Gamma_U^*(H)$ kenarsız bir grafiktir.
- (v) U güçlü q -asalımsı ideal olmasın. Bu durumda, $|C_U(H)| \geq 2$ dir ve $\Gamma_U^*(H)$ kenarsız bir grafik değildir.
- (vi) U bir radikal idealse $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ dir. Özel olarak, H indirgenmiş bir halka ise $\Gamma_0^*(H)$ ve $\Gamma(H)$ grafikleri çakışır.

İspat (i) $\Gamma_U^*(H)$ ve $\Gamma_U(H)$ nin köşe noktaları kümesi $C_U(H)$ dir. Şimdi $\Gamma_U^*(H)$ de bir $x - y$ kenarı alalım. Buradan $xy \in U$ elde edilir ve böylece $x - y$ kenarı $\Gamma_U(H)$ grafiğinin de bir kenarıdır. O halde $\Gamma_U^*(H), \Gamma_U(H)$ nin bir alt grafiğidir.

(ii) U asal olsun. Bu durumda $C_U(H) = \emptyset$ dur. Bunu göstermek için bir $x \in C_U(H)$ alalım. Buradan $x \notin U$ ve bir $y \notin U$ için $xy \in U$ dur. U asal ve $xy \in U$ olduğundan $x \in U$ veya $y \in U$ çelişkisi bulunur. O halde $C_U(H) = \emptyset$ yani $\Gamma_U^*(H)$ bir boş grafiktir. Tersine $\Gamma_U^*(H)$ bir boş grafik olsun. Şimdi U nun asal olduğunu gösterelim. $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $z \notin U$ ve $t \notin U$ ise $z, t \in C_U(H)$ yani $C_U(H) \neq \emptyset$ dir. Bu ise $\Gamma_U^*(H)$ nin boş grafik olmasıyla çelişir.

(iii) Açıktır.

(iv) $|C_U(H)| \geq 2$ olsun. U nun bir güçlü q -asalımsı ideal olduğunu varsayalım. Şimdi

$\Gamma_U^*(H)$ nin kenarsız bir grafik olduğunu göstereceğiz. $x, y \in C_U(H)$ olmak üzere $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde $x - y$ kenarı var olsun. Buradan $xy \in U$ ve $(x^2 \notin U, y \notin \sqrt{U}$ veya $x \notin \sqrt{U}, y^2 \notin U)$ elde edilir. Şimdi $x^2 \notin U, y \notin \sqrt{U}$ olduğunu varsayalım. U bir güçlü q-asalımsı ideal ve $xy \in U$ olduğundan $x^2 \in U$ veya $y \in \sqrt{U}$ olur. Bu ise $x^2 \notin U, y \notin \sqrt{U}$ koşulu ile çelişir. Şimdi $x \notin \sqrt{U}, y^2 \notin U$ olduğunu kabul edelim. U bir güçlü q-asalımsı ideal ve $xy = yx \in U$ olduğundan $y^2 \in U$ veya $x \in \sqrt{U}$ çelişkisi elde edilir. O halde x ile y komşu olamazlar yani $\Gamma_U^*(H)$ kenarsız bir grafiktir. Tersine $\Gamma_U^*(H)$ bir kenarsız grafik olsun. U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olmadığını varsayalım. O halde $xy \in U, x^2 \notin U$ ve $y \notin \sqrt{U}$ koşullarını sağlayan $x, y \in H$ elemanları vardır. Buradan $x \neq y$ ve ayrıca $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde $x - y$ olduğu çıkar. Bu ise $\Gamma_U^*(H)$ nin kenarsız olmasıyla çelişir. Sonuç olarak, U bir güçlü q-asalımsı idealdir.

(v) (iv)'den kolaylıkla elde edilir.

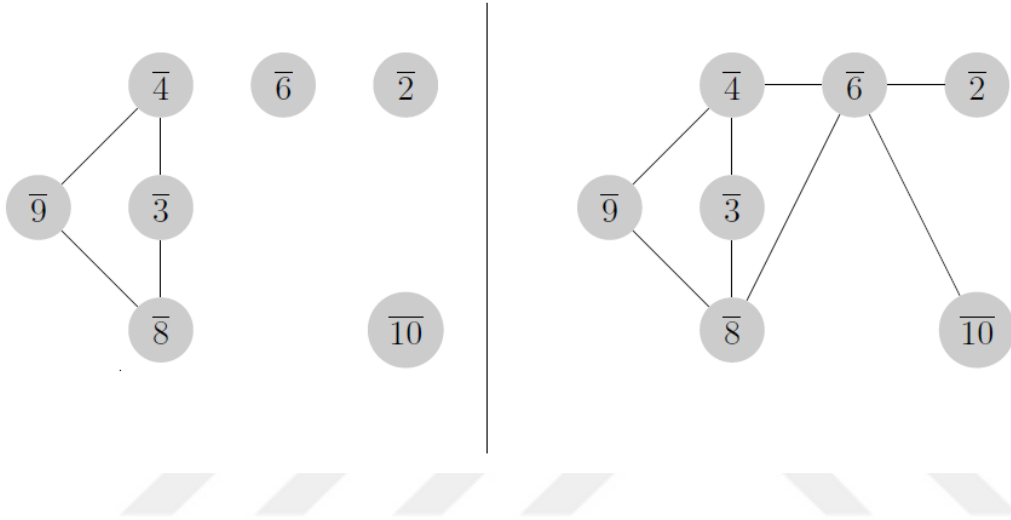
(vi) $U = \sqrt{U}$ olsun. $|C_U(H)| \geq 2$ olduğunu varsayalım. U bir güçlü q-asalımsı idealse $\sqrt{U} = U$ olduğundan Önerme 4.1.2 (iii)'den U bir asal idealdir. Böylece $C_U(H) = \emptyset$ olur. Buradan U nun bir güçlü q-asalımsı ideal olmadığı anlaşılır. $\Gamma_U^*(H)$ nin $\Gamma_U(H)$ grafiğinin bir alt grafiği olduğunu biliyoruz. Şimdi tersini gösterelim. z ve t köşeleri $\Gamma_U(H)$ grafiğinde komşu fakat $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde komşu olmasın. Buradan $zt \in U$ bulunur. z ve t , $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde komşu olmadığından $z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ veya $z \notin \sqrt{U}, t^2 \notin U$ koşulu sağlanmaz. Buradan $z \in \sqrt{U}$ veya $t \in \sqrt{U}$ elde edilir. Böylece $U = \sqrt{U}$ olduğundan $z \in U$ veya $t \in U$ bulunur. Bu ise $z, t \in C_U(H)$ olmasıyla çelişir. Yani z ve t , $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde de komşudur. O halde $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ elde edilir.

Örnek 4.2.2 (i) $\mathbb{Z}_6$ halkasını göz önüne alalım. $U = \bar{0}$ ideali için $\Gamma_0^*(\mathbb{Z}_6)$ nın Şekil 4.2.1'den bir doğru grafiği olduğu görülmektedir.

(ii) $\mathbb{Z}_{12}$ halkasını ve $U = \bar{0}$ idealini göz önüne alalım. Şekil 4.2.2'de $\Gamma_0^*(\mathbb{Z}_{12})$ ve $\Gamma_0(\mathbb{Z}_{12})$ grafiklerine bakılırsa, $\Gamma_0(\mathbb{Z}_{12})$ bağlantılı olmasına karşın $\Gamma_0^*(\mathbb{Z}_{12})$ nin bağlantılı olmayabileceği görülür. Böylece $\Gamma_U(H)$ ve $\Gamma_U^*(H)$ grafikleri her zaman eşit olmayabilir.



Şekil 4.2.1 $\Gamma_0^*(\mathbb{Z}_6)$ Grafiği



Şekil 4.2.2 $\Gamma_0^*(\mathbb{Z}_{12})$ ve $\Gamma_0(\mathbb{Z}_{12})$ Grafikleri

Önerme 4.2.3 $z \in C_U(H)$ olsun. Her $t \notin (U:z)$ için $N_{\Gamma^*}(tz) = N_{\Gamma}(tz)$ ise $\sqrt{(U:z)} = (U:z)$ veya $\sqrt{(U:z)} = \sqrt{U}$ olur.

İspat $(U:z) \cup \sqrt{U} \subseteq \sqrt{(U:z)}$ kapsaması her zaman gerçekleşir. Şimdi her $t \notin (U:z)$ için $N_{\Gamma^*}(tz) = N_{\Gamma}(tz)$ koşulu altında ters kapsamının da geçerli olduğunu gösterelim. $u \in \sqrt{(U:z)}$ olsun. Buradan bir $k \in \mathbb{N}$ için $u^k z \in U$ elde edilir. $u^k z \in U$ koşulunu sağlayan en küçük $k \in \mathbb{N}$ sayısı $k = m$ olsun. O halde $u^m z \in U$ olur. $m = 1$ ise $u \in (U:z)$ olur. Şimdi $m \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Böylece $u^{m-1} z \notin U$ olduğu görülür. $u = u^{m-1} z$ ise $u(u^{m-1} z) = u^2 = u^m z \in U$ ve böylece $u \in \sqrt{U}$ olur. O halde $u \neq u^{m-1} z$ olduğunu varsayalım. $u(u^{m-1} z) \in U$ olduğundan $u \in N_{\Gamma}(u^{m-1} z)$ bulunur. $N_{\Gamma}(u^{m-1} z) = N_{\Gamma^*}(u^{m-1} z)$ olduğundan $u \in N_{\Gamma^*}(u^{m-1} z)$ yani $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde $u - u^{m-1} z$ elde edilir. Buradan $u^2 \notin U, u^{m-1} z \notin \sqrt{U}$ veya $(u^{m-1} z)^2 \notin U, u \notin \sqrt{U}$ olur. $m \geq 2$ olduğundan

$2m - 2 \geq m$ ve böylece $(u^{m-1}z)^2 = u^{2m-2}z^2 \in U$ elde edilir. Bu ise $u^2 \notin U, (u^{m-1}z) \notin \sqrt{U}$ veya $u \notin \sqrt{U}, (u^{m-1}z)^2 \notin U$ koşuluyla çelişir. Böylece $\sqrt{(U:z)} \subseteq (U:z) \cup \sqrt{U}$ elde edilir. O halde $\sqrt{(U:z)} = (U:z) \cup \sqrt{U}$ bulunur. Buradan $\sqrt{(U:z)} = (U:z)$ veya $\sqrt{(U:z)} = \sqrt{U}$ elde edilir.

Şekil 4.2.2’de $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinin izole noktaları olabileceği görülmektedir. Aşağıdaki önerme $\Gamma_U^*(H)$ nin köşelerinin ne zaman izole nokta olacağını ifade etmektedir.

Önerme 4.2.4 $z \in C_U(H)$ olsun.

- (i) $z \in \sqrt{U}$ ve özel olarak $z^2 \in U$ ise $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ dir.
- (ii) $z \in \sqrt{U}$ fakat $z^2 \notin U$ olsun. $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ olması için g.y.ş $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ dur.
- (iii) $z \notin \sqrt{U}$ olsun. $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ olması için g.y.ş $(U:z)_2 \subseteq U$ dur.

İspat (i) Açıktır.

(ii) $z \in \sqrt{U}$ ve $z^2 \notin U$ olsun. $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ olduğunu kabul edelim. $t \in N_{\Gamma^*}(z)$ alalım. $\Gamma_U^*(H)$ grafiğinde $t - z$ olduğu anlaşılır. Buradan $zt \in U$ ve $(z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ veya $z \notin \sqrt{U}, t^2 \notin U)$ elde edilir. $z \in \sqrt{U}$ olduğundan $z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ koşulu gerçekleşir. Diğer yandan $zt \in U$ olduğundan $t \in (U:z) \subseteq \sqrt{U}$ çelişkisi bulunur. O halde $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ olur. Tersine $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ olsun. Şimdi $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Buradan $\exists t \in H$ için $t \in (U:z) - \sqrt{U}$ olur. Buradan $zt \in U$ ve $t \notin \sqrt{U}$ elde edilir. Öte yandan $z^2 \notin U$ ve $zt \in U$ olduğundan $z \neq t$ dir. Böylece $zt \in U$ ve $z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ koşulları sağlandığından $t \in N_{\Gamma^*}(z)$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, $(U:z) \subseteq \sqrt{U}$ bulunur.

(iii) $z \notin \sqrt{U}$ olsun. Ayrıca $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Şimdi $(U:z)_2 \subseteq U$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için herhangi bir $t \in (U:z)$ elemanını alalım. $t^2 \notin U$ olduğunu kabul edelim. Buradan $zt \in U$ ve $z \notin \sqrt{U}, t^2 \notin U$ gerçekleşir ve böylece $t \in N_{\Gamma^*}(z)$ çelişkisi elde edilir. O halde $t^2 \in U$ ve buradan $(U:z)_2 \subseteq U$ elde edilir. Şimdi tersine $(U:z)_2 \subseteq U$ olduğunu kabul edelim. $t \in N_{\Gamma^*}(z)$ alalım. Buradan $zt \in U$ ve $(z^2 \notin U, t \notin \sqrt{U}$ veya $z \notin \sqrt{U}, t^2 \notin U)$ bulunur. Fakat $t \in (U:z)$ ve $(U:z)_2 \subseteq U$ olduğundan $t^2 \in U$ çelişkisi bulunur. Böylece $N_{\Gamma^*}(z) = \emptyset$ dir.

Şimdi Önerme 4.2.4’ten kolaylıkla elde edilen aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.2.5 (i) $z \in C_U(H)$ ve $z^2 \notin U$ olsun. $(U:z) \not\subseteq \sqrt{U}$ ise $N_{\Gamma^*}(z) \neq \emptyset$ dir.
(ii) $U \subsetneq H$ ideali verilsin. Her $z \in C_U(H)$ için $z^2 \notin U$ ve $(U:z) \not\subseteq \sqrt{U}$ ise $\Gamma_U^*(H)$ izole noktası olmayan bir grafiktir.

Şekil 4.2.2’den de görüleceği üzere $\Gamma_U^*(H)$ ve $\Gamma_U(H)$ eşit olmayabilir veya $\Gamma_U^*(H)$ bağlantılı olmayabilir. Aşağıdaki teorem " $\Gamma_U^*(H)$ ve $\Gamma_U(H)$ ne zaman eşit olur ?" ve " $\Gamma_U^*(H)$ ne zaman bağlantılı olur ?" sorularına cevap vermektedir.

Teorem 4.2.6 $U \subsetneq H$ bir ideal ve $|C_U(H)| \geq 2$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) $\Gamma_U^*(H)$ bir bağlantılı grafiktir.
- (ii) $U = \sqrt{U}$ yani H/U bir indirgenmiş halkadır.
- (iii) $\Gamma_U^*(H) = \Gamma_U(H)$ dir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Gamma_U^*(H)$ bir bağlantılı grafik olsun. Şimdi $\sqrt{U} = U$ olduğunu göstereceğiz. $U \neq \sqrt{U}$ olsun. Böylece $x \in \sqrt{U} - U$ olacak şekilde $x \in H$ elemanı vardır. Buradan bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in U$ bulunur. n bu özellikteki en küçük doğal sayı olsun. O halde $x^{n-1} \notin U$ dur. $xx^{n-1} = x^n \in U$ ve $x \notin U$ olduğundan $x^{n-1} \in C_U(H)$ olur. $\Gamma_U^*(H)$ bağlantılı olduğundan $x^{n-1} - y$ olacak şekilde bir $y \in C_U(H)$ vardır. Buradan $x^{n-1}y \in U$ ve $((x^{n-1})^2 \notin U, y \notin \sqrt{U}$ veya $x^{n-1} \notin \sqrt{U}, y^2 \notin U)$ bulunur. Diğer yandan $2(n-1) \geq n$ olduğundan $(x^{n-1})^2 = x^{2n-2} \in U$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $U = \sqrt{U}$ olduğu anlaşılır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Önerme 4.2.1 (vi)’den elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 1.6.7’den bulunur.

Sonuç 4.2.7 $U \subsetneq H$ bir ideal ve $|C_U(H)| \geq 2$ olsun.

- (i) $U \neq \sqrt{U}$ ise $\text{diam}(\Gamma_U^*(H)) = \infty$ dur.
- (ii) $U = \sqrt{U}$ ise $\text{diam}(\Gamma_U^*(H)) \leq 3$ tür.

İspat (i),(ii) Teorem 4.2.6 ve Teorem 1.6.7’den elde edilir.

Şimdi Teorem 4.2.6 ve güçlü q-asalımsı idealler yardımıyla von Neumann regüler halkaları karakterize edeceğiz.

Sonuç 4.2.8 H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) H , von Neumann regülerdir.

- (ii) Her güçlü q-asalımsı ideal bir asal idealdir ve güçlü q-asalımsı olmayan tüm U idealleri için $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ dir.

Teorem 4.2.9 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) $\Gamma_U^*(H)$ tam iki parçalı grafiktir.
(ii) $U = U_1 \cap U_2$ olacak şekilde U nın farklı iki minimal asal ideali U_1, U_2 vardır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Gamma_U^*(H)$ tam iki parçalı grafik olsun. O halde $|C_U(H)| \geq 2$ ve ayrıca $\Gamma_U^*(H)$ bağlantılıdır. Teorem 4.2.6'dan $U = \sqrt{U}$ ve $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ dir. Şimdi U nun 2-yutan ideal olduğunu göstereceğiz. $ztu \in U$ olacak şekilde $z, t, u \in H$ elemanlarını alalım. $zt \notin U$ ve $zu \notin U$ olsun. Şimdi $tu \in U$ olduğunu gösterelim. $zt = zu$ ise $ztu = zu^2 \in U$ ve böylece $zu \in \sqrt{U} = U$ çelişkisi elde edilir. Böylece $zt \neq zu$ dur. Ayrıca $\Gamma_U(H)$ de $zt - zu$ olduğu açıktır. Ayrıca $\Gamma_U^*(H) = \Gamma_U(H)$ tam iki parçalı grafik olduğundan $C_U(H) = C_1 \cup C_2$ ve $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ olacak şekilde C_1, C_2 kümeleri vardır. Genelliği bozmadan $zt \in C_1$ ve $zu \in C_2$ diyebiliriz. Şimdi z nin bir köşe olamayacağını gösterelim. z bir köşe olsun. Buradan $z \in C_1$ veya $z \in C_2$ olur. Önce $z \in C_1$ olduğunu kabul edelim. $z = zt$ ise $zu = ztu \in U$ çelişkisi elde edilir. Böylece $z \neq zt$ dir. $\Gamma_U^*(H)$ tam iki parçalı grafik olduğundan $z - zu$ dir. Buradan $z(zu) = z^2u \in U$ yani $zu \in \sqrt{U} = U$ çelişkisi elde edilir. $z \in C_2$ ise benzer biçimde $zt \in U$ çelişki elde edilir. O halde z bir köşe olamaz. Yani $z \notin C_U(H)$ dir. Şimdi $(U:z) \subseteq U$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Böylece $\exists t' \in H$ için $t' \in (U:z) - U$ olur. Böylece $zt' \in U, t' \notin U$ ve $z \notin U$ olduğundan $z \in C_U(H)$ çelişkisi elde edilir. O halde $(U:z) \subseteq U$ bulunur. Buradan $ztu \in U$ olduğundan $tu \in (U:z) \subseteq U$ elde edilir. Böylece U bir 2-yutan idealdir. Teorem 1.3.4'ten bir V asal ideali için $U = \sqrt{U} = V$ veya U nun iki farklı minimal asal ideali V_1, V_2 için $U = \sqrt{U} = V_1 \cap V_2$ gerçekleşir. $U = \sqrt{U} = V$ ise $\Gamma_U(H) = \Gamma_U^*(H)$ boş grafik olur bu ise çelişkidir. Böylece $U = V_1 \cap V_2$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $V_1, V_2; U$ nun minimal asal idealleri ve $U = V_1 \cap V_2$ olsun. $C_1 = \{z \in H - U: z \in V_1 - V_2\}$ ve $C_2 = \{z \in H - U: z \in V_2 - V_1\}$ diyelim. Buradan $C_U(H) = C_1 \cup C_2$ ve $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ olduğu kolayca görülür. Şimdi $\Gamma_U^*(H)$ nin tam iki parçalı grafik olduğunu görelim. Bunun için $z \in C_1$ ve $t \in C_2$ alalım. $z \in V_1$ ve $t \in V_2$ olduğundan $zt \in V_1 \cap V_2 = U$ bulunur. $z^2 \notin U$ ve $t \notin \sqrt{U}$ olduğundan $z - t$ sonucu elde edilir.

5. n -ASAL İDEALLER

Bu bölümde asal ideal ve quasi asalımsı ideal sınıfı arasında bulunun değişmeli halkaların n -asal ideallerini çalışacağız. n -asal ideallerin, asal ideallere benzer özelliklerini araştırarak n -asal ideallerin UN -halkalarının karakterizasyonunda kullanılabileceğini göstereceğiz. Ayrıca n -asal idealler kümesi üzerinde bir topoloji inşa edip halkanın cebirsel özellikleriyle bu yeni kurduğumuz topolojinin topolojik özellikleri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

5.1 n -Asal İdealler

Tanım 5.1.1 $U \subsetneq H$ ideali verilsin. Her $z, t \in H$ için $zt \in U$ iken $z \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ sağlanıyorsa U ya H nin bir n -asal ideali denir.

Şimdi n -asal ideallere ilişkin birkaç örnek verelim.

Örnek 5.1.2 (i) H bir indirgenmiş halka yani $\mathfrak{N}(H) = 0$ olsun. Bu durumda H halkasının asal idealleri ve n -asal idealleri çıkarır. Özel olarak, von Neumann regüler halkalarda asal ve n -asal idealler aynıdır.

(ii) H tek maksimal ideali nil radikal yani $\mathfrak{N}(H)$ olan bir sözde yerel halka olsun. $U \subsetneq H$ ideali verilsin. $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. z birimsel bir eleman ise $t = z^{-1}(zt) \in U \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ olur. z birimsel değilse $\mathfrak{N}(H)$ tek maksimal ideal olduğundan $z \in \mathfrak{N}(H) \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Böylece U , n -asal idealdir. O halde H tek maksimal ideali nil radikal olan bir halka ise H nin tüm has idealleri n -asal idealdir.

(iii) k bir cisim olmak üzere $H = k[X, Y]/(X^2)$ bölüm halkasını ve $U = (X^2, XY, Y^2)/(X^2)$ idealini göz önüne alalım. Burada $\mathfrak{N}(H) = (X)/(X^2)$ olduğu kolaylıkla görülür. Buradan $U + \mathfrak{N}(H) = (X, Y^2)/(X^2)$ elde edilir. $(Y + (X^2))^2 = Y^2 + (X^2) \in U$ fakat $Y + (X^2) \notin U + \mathfrak{N}(H)$ olduğundan U bir n -asal ideal değildir.

Örnek 5.1.3 (i) $U \subsetneq H$ ideali için $U + \mathfrak{N}(H)$ asalsa U da n -asaldır. Bunu göstermek için $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanlarını alalım. $U + \mathfrak{N}(H)$ bir asal ideal ve $zt \in U \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ olduğundan $z \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Böylece U , n -asaldır.

- (ii) Her asal ideal $\mathfrak{N}(H)$ yi kapsadığından her asal ideal ayrıca n -asalıdır. Tersisi doğru olmayabilir. Şimdi $\mathbb{Z}_{36}$ halkasını ve $U = (\bar{4})$ idealini göz önüne alalım. $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} \in U$ fakat $\bar{2} \notin U$ olduğundan U bir asal ideal değildir. Ayrıca, $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}_{36}) = (\bar{6})$ olduğundan $U + \mathfrak{N}(\mathbb{Z}_{36}) = (\bar{2})$ asalıdır böylece (i)'den U , n -asalıdır.
- (iii) $U \subseteq H$ bir n -asal ideal ve $\mathfrak{N}(H) \subseteq U$ ise U bir asal idealdir.

Şimdi Örnek 5.1.3'ten açıkça elde edilen aşağıdaki sonucu vereceğiz.

Sonuç 5.1.4 $U \subsetneq H$ idealinin asal olması için g.y.ş U bir n -asal idealdir ve $\mathfrak{N}(H) \subseteq U$ dur.

Aşağıdaki örnek asalımsı ve n -asal idealler arasındaki farklılıkları ortaya koymaktadır.

Örnek 5.1.5 (i) H bir Temel İdeal Bölgesi ve $0 \neq p$ bir indirgenemez eleman olsun. Bu durumda her $n > 1$ için (p^n) bir asalımsı idealdir fakat n -asal değildir.

(ii) $H = \mathbb{Z}_8[X, Y]$ ve $\psi: H \rightarrow \mathbb{Z}_2[X, Y]$ aşağıdaki biçimde tanımlanan bir homomorfizma olsun:

$$\psi(h_0(X) + h_1(X)Y + h_2(X)Y^2 + \dots + h_n(X)Y^n) = \overline{h_0(X)} + \overline{h_1(X)}Y + \dots + \overline{h_n(X)}Y^n$$
Burada $\overline{h_t(X)}$ polinomu $h_t(X) \in \mathbb{Z}_8[X]$ polinomunun katsayılarının $\text{mod } 2$ ye göre yeniden yazılmasıyla elde edilir. Buradan $\text{Ker}(\psi) = \mathfrak{N}(H) = 2\mathbb{Z}_8[X, Y]$ elde edilir.

ψ bir örten homomorfizma olduğundan $H/\mathfrak{N}(H) \cong \mathbb{Z}_2[X, Y]$ bulunur. $\mathbb{Z}_2[X, Y]$ bir tamlık bölgesi olduğundan $\mathfrak{N}(H)$, H nin bir asal idealidir. Şimdi $U = (\bar{4}XY) \subseteq \mathfrak{N}(H)$ alalım. $U + \mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}(H)$ bir asal ideal olduğundan Örnek 5.1.3 (i)'den U bir n -asal ideal olur. Öte yandan, $Y(\bar{4}X) = \bar{4}XY \in U$, $\bar{4}X \notin U$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Y^n \notin U$ olduğundan U bir asalımsı ideal olamaz.

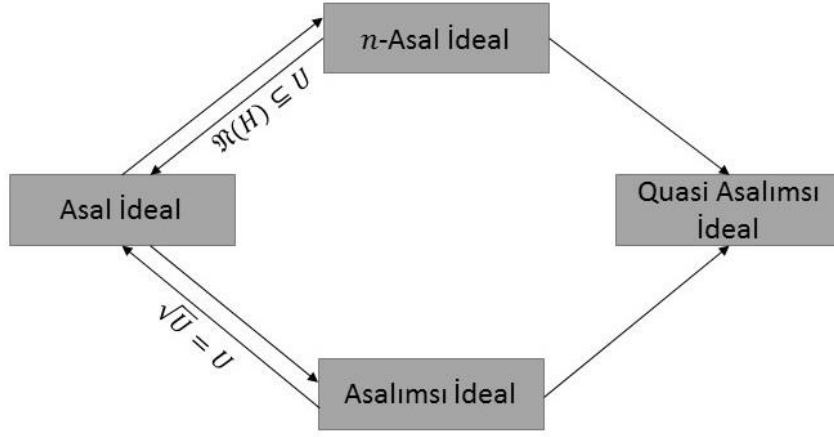
Önerme 5.1.6 $U \subsetneq H$ ideali bir n -asal idealse $\sqrt{U}$ bir asal idealdir.

İspat $zt \in \sqrt{U}$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları seçilsin. Buradan $\exists m \in \mathbb{N}$ için $(zt)^m = z^m t^m \in U$ bulunur. U bir n -asal ideal olduğundan $z^m \in U + \mathfrak{N}(H) \subseteq \sqrt{U}$ veya $t^m \in U + \mathfrak{N}(H) \subseteq \sqrt{U}$ olur. Buradan $z \in \sqrt{U}$ veya $t \in \sqrt{U}$ bulunur. O halde, $\sqrt{U}$ bir asal idealdir.

Önerme 5.1.6'dan her n -asal idealin bir quasi asalımsı ideal olduğu görülür. Fakat aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin her zaman doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 5.1.7 $\mathbb{Z}[X]$ 'in alt halkası $H = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n : a_1 \in 3\mathbb{Z}\}$ yi göz önüne alalım. $U = (9X^2, 3X^3, X^4, X^5, X^6)$ ideali olsun. Buradan $\sqrt{U} = (3X, X^2, X^3)$ ve $H/\sqrt{U} \cong \mathbb{Z}$ olur. Böylece, U bir quasi asalımsı idealdir. Ayrıca $\mathfrak{N}(H) = 0$ yani $U + \mathfrak{N}(H) = U$ olur. $9X^2 \in U$ fakat $9 \notin U + \mathfrak{N}(H)$ ve $X^2 \notin U + \mathfrak{N}(H)$ olduğundan U bir n -asal ideal değildir.

Aşağıdaki şema n -asal idealler ile diğer idealler arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



Şekil 5.1.1 n -Asal İdealler

Önerme 5.1.8 $U \subsetneq H$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , n -asaldır.
- (ii) $VY \subseteq U$ olacak şekilde her $V, Y \subseteq H$ ideali için $V \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ veya $Y \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ dir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $VY \subseteq U$ olacak şekilde $V, Y \subseteq H$ idealleri verilsin. $V \not\subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ olduğunu kabul edelim. O halde $\exists z \in V - (U + \mathfrak{N}(H))$ vardır. Her $t \in Y$ için $zt \in U$ ve U bir n -asal ideal olduğundan $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ yani $Y \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $V = Hz$ ve $Y = Ht$ diyelim. $VY = Hzt \subseteq U$ olduğundan $V = Hz \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ veya $Y = Ht \subseteq U + \mathfrak{N}(H)$ bulunur. O halde U , n -asaldır.

Önerme 5.1.9 U_1 ve U_2 sırasıyla H_1 ve H_2 halkalarının idealleri olsun. $U = U_1 \times U_2 \subseteq H = H_1 \times H_2$ ideali için aşağıdakiler denktir.

- (i) U , n -asaldır.
- (ii) U_1, H_1 in bir n -asal ideali ve $U_2 = H_2$ veya $U_1 = H_1$ ve U_2, H_2 nin bir n -asal idealidir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) U , n -asal olsun. Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U} = \sqrt{U_1} \times \sqrt{U_2}$ bir asal idealdir. Böylece $U_1 = H_1$ veya $U_2 = H_2$ olur. Genelliği bozmadan $U_1 = H_1$ olduğunu kabul edelim. $zt \in U_2$ olacak şekilde $z, t \in H_2$ elemanları verilsin. $(0, z)(0, t) = (0, zt) \in U$ ve U bir n -asal ideal olduğundan $(0, z) \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $(0, t) \in U + \mathfrak{N}(H)$ bulunur. Öte yandan $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}(H_1) \times \mathfrak{N}(H_2)$ ve böylece $U + \mathfrak{N}(H) = (U_1 + \mathfrak{N}(H_1)) \times (U_2 + \mathfrak{N}(H_2)) = H_1 \times (U_2 + \mathfrak{N}(H_2))$ olur. $(0, z) \in U + \mathfrak{N}(H)$ ise $z \in U_2 + \mathfrak{N}(H_2)$ elde edilir. Benzer şekilde $(0, t) \in U + \mathfrak{N}(H)$ ise $t \in U_2 + \mathfrak{N}(H_2)$ çıkar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) U_1, H_1 in n -asal ideali olmak üzere $U = U_1 \times H_2$ olsun. $(z, t)(z', t') = (zz', tt') \in U$ olacak şekilde $z, z' \in H_1; t, t' \in H_2$ elemanları verilsin. Buradan $zz' \in U_1$ elde edilir. U_1 , n -asal olduğundan $z \in U_1 + \mathfrak{N}(H_1)$ veya $z' \in U_1 + \mathfrak{N}(H_1)$ olur. Buradan $(z, t) \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $(z', t') \in U + \mathfrak{N}(H)$ bulunur.

Teorem 5.1.10 $n \geq 1$ ve $H_1, H_2, \dots, H_n$ birer halka ve sırasıyla $U_1, U_2, \dots, U_n$ de idealleri olsun. $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ ve $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ için aşağıdakiler denktir.

- (i) $U \subseteq H$, n -asaldır.
- (ii) Bir $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ için U_t, H_t nin bir n -asal ideali ve her $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \{t\}$ için $U_k = H_k$ dir.

İspat Önerme 5.1.9 kullanılarak Teorem 2.1.36 ya benzer biçimde tümevarımla elde edilir.

Aşağıdaki sonuç Asaldan Kaçınma Teoreminin n -asal idealler içinde doğru olduğunu göstermektedir.

Sonuç 5.1.11 $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq H$, birer n -asal ideal; U, H nin bir ideali ve $U \subseteq \bigcup_{t=1}^n U_t$ olsun. $\sqrt{U_j}$ ile $\sqrt{U_k}$ her $1 \leq j \neq k \leq n$ için karşılaştırılamıyorsa bir $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$U \subseteq U_m + \mathfrak{N}(H)$ dir.

İspat $U \subseteq \bigcup_{t=1}^n U_t$ olsun. Burada bir $m \in \mathbb{N}$ için $U \not\subseteq \bigcup_{t \neq m} U_t$ varsayabiliriz. Önerme 2.1.24'e benzer biçimde $U \cap (\bigcap_{t \neq m} U_t) \subseteq U_m$ olur. Böylece $U(\prod_{t \neq m} U_t) \subseteq U_m$ elde edilir. Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U_m}$ bir asal ideal olduğundan, varsayımdan $\prod_{t \neq m} U_t \not\subseteq U_m + \mathfrak{N}(H)$ olur. Önerme 5.1.8'den $U \subseteq U_m + \mathfrak{N}(H)$ elde edilir.

Teorem 5.1.12 $h: H \rightarrow H'$ bir örten homomorfizma ve U da H nin $\text{Ker}(h)$ yi kapsayan bir n -asal idealiyse $h(U)$ da H' nün bir n -asal ideali olur.

İspat $U \subseteq H$ bir n -asal ideal ve $\text{Ker}(h) \subseteq U$ olsun. Şimdi $h(U)$ nun da H' nün bir n -asalı olduğunu gösterelim. $z't' \in h(U)$ olacak şekilde $z', t' \in H'$ elemanları verilsin. h örten olduğundan $z' = h(z)$ ve $t' = h(t)$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları bulunur. $z't' = h(z)h(t) = h(zt) \in h(U)$ ve $\text{Ker}(h) \subseteq U$ olduğundan $zt \in U$ elde edilir. $zt \in U$ ve U bir n -asal ideal olduğundan $z \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ bulunur. Buradan $h(z) = z' \in h(U + \mathfrak{N}(H)) \subseteq h(U) + \mathfrak{N}(H')$ veya $h(t) = t' \in h(U) + \mathfrak{N}(H')$ elde edilir. Böylece $h(U), H'$ nün bir n -asalıdır.

Sonuç 5.1.13 $U \subseteq H, V$ idealini kapsayan bir n -asal idealse U/V de H/V halkasının bir n -asal idealidir.

Önerme 5.1.14 $U \subsetneq H$ ideali için $(U, X) \subseteq H[X]$, bir n -asal idealse U, H nin bir n -asal idealir.

İspat Her $h(X) \in H[X]$ için $\psi(h(X)) = h(0)$ biçiminde tanımlanan $\psi: H[X] \rightarrow H$ homomorfizmasını göz önüne alalım. $\text{Ker}(\psi) = (X) \subseteq (U, X)$ ve ψ nin örten olduğu açıktır. $(U, X) \subseteq H[X]$ bir n -asal ideal olduğundan Teorem 5.1.12'den $\psi((U, X)) = U, H$ nin bir n -asal idealidir.

Önerme 5.1.15 $U \subseteq H$ bir ideal, $S \subseteq H$ bir çarpımsal kapalı küme ve $U \cap S = \emptyset$ ise aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) U, H nin bir n -asal idealiyse $S^{-1}U$ da $S^{-1}H$ nin bir n -asal idealidir.
- (ii) $S^{-1}U, S^{-1}H$ nin bir n -asal ideali ve $S \cap z d_H(U + \mathfrak{N}(H)) = \emptyset$ ise U, H nin bir n -asal idealidir.

İspat (i) $\frac{z}{s} \frac{t}{u} = \frac{zt}{su} \in S^{-1}U$ olacak şekilde $z, t \in H; s, u \in S$ elemanları verilsin. Buradan $\exists v \in S$ için $v(zt) = (vz)t \in U$ olur. U bir n -asal ideal olduğundan $vz \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Buradan $\frac{z}{s} = \frac{vz}{vs} \in S^{-1}(U + \mathfrak{N}(H)) = S^{-1}U + \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ veya

$\frac{t}{u} \in S^{-1}U + \mathfrak{N}(S^{-1}H)$ elde edilir. Böylece $S^{-1}U, S^{-1}H$ halkasının bir n -asal idealidir.

(ii) $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. $\frac{zt}{1} = \frac{z}{1} \frac{t}{1} \in S^{-1}U$ olduğu kolaylıkla görülür. $S^{-1}U, n$ -asal olduğundan $\frac{z}{1} \in S^{-1}U + \mathfrak{N}(S^{-1}H) = S^{-1}(U + \mathfrak{N}(H))$ veya $\frac{t}{1} \in S^{-1}(U + \mathfrak{N}(H))$ elde edilir. Buradan $vz \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $v't \in U + \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $v, v' \in S$ bulunur. $vz \in U + \mathfrak{N}(H)$ olsun. $z \notin U + \mathfrak{N}(H)$ ise $v \in S \cap zd_H(U + \mathfrak{N}(H))$ çelişkisi elde edilir. Böylece $z \in U + \mathfrak{N}(H)$ olur. Benzer şekilde $v't \in U + \mathfrak{N}(H)$ ise $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ olur.

Teorem 5.1.16 $E' \subseteq E$ bir alt modül, $U \subseteq H$ bir ideal ve $UE \subseteq E'$ olsun. $U \propto E' \subseteq H \propto E$ nin bir n -asal ideal olması için g.y.ş U , bir n -asaldır.

İspat $U \propto E' \subseteq H \propto E$, bir n -asal ideal olsun. $zt \in U$ olacak şekilde $z, t \in H$ elemanları verilsin. Buradan $(z, 0)(t, 0) = (zt, 0) \in U \propto E'$ olur. $U \propto E'$ bir n -asal ideal olduğundan $(z, 0) \in U \propto E' + \mathfrak{N}(H \propto E)$ veya $(t, 0) \in U \propto E' + \mathfrak{N}(H \propto E)$ elde edilir. Böylece $z \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in U + \mathfrak{N}(H)$ bulunur. Böylece U bir n -asal idealdir. Tersine, U, H halkasının bir n -asal ideali olsun. $(z_1, e_1)(z_2, e_2) = (z_1z_2, z_1e_2 + z_2e_1) \in U \propto E'$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in H; e_1, e_2 \in E$ elemanları verilsin. Buradan $z_1z_2 \in U$ bulunur. U, n -asal olduğundan $z_1 \in U + \mathfrak{N}(H)$ veya $z_2 \in U + \mathfrak{N}(H)$ olur. Böylece $(z_1, e_1) \in U \propto E' + \mathfrak{N}(H \propto E) = (U + \mathfrak{N}(H)) \propto E$ veya $(z_2, e_2) \in U \propto E' + \mathfrak{N}(H \propto E)$ gerçekleşir.

Teorem 5.1.17 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) Her has ideal n -asaldır.
- (ii) Her $z \in H$ ya birimsel ya da nilpotenttir.
- (iii) H tek maksimal ideali $\mathfrak{N}(H)$ olan sözde yerel halkadır.
- (iv) H bir UN -halkadır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) H nin her has ideali n -asal olsun. (0) bir n -asal ideal olduğundan Önerme 5.1.6'dan $\mathfrak{N}(H)$ bir asal idealdir. $z \in H$ birimsel olmasın. $(z^2), H$ nin bir has idealidir ve böylece varsayımdan (z^2) bir n -asal idealdir. $(z)(z) \subseteq (z^2)$ olduğundan Önerme 5.1.8'den $(z) \subseteq (z^2) + \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Böylece $z = z^2t + u$ olacak şekilde $t \in H, u \in \mathfrak{N}(H)$ vardır. Buradan $z - z^2t = z(1 - zt) = u \in \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. $\mathfrak{N}(H)$ asal olduğundan $z \in \mathfrak{N}(H)$ veya $1 - zt \in \mathfrak{N}(H)$ olur. $1 - zt \in \mathfrak{N}(H)$ ise $1 - (1 - zt) = zt$ birimsel ve böylece z birimsel olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $z \in \mathfrak{N}(H)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Örnek 5.1.2 (ii)'den elde edilir.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Önerme 1.3.11'den elde edilir.

5.2 Değişmeli Halkaların n -Asal Spektrumu

H halkasının tüm n -asal ideallerinin kümesini $nSpec(H)$ ile gösterelim. Bu bölümde amacımız $nSpec(H)$ kümesi üzerinde bir topoloji kurmak ve ayrıca bu topolojinin topolojik özellikleriyle H nin cebirsel özellikleri arasında bağlantıları incelemektir. $E \subseteq H$ olmak üzere E nin varyetesi

$$V^*(E) := \{U \in nSpec(H) : E \subseteq \sqrt{U}\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 5.2.1 $E \subseteq H$ için aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) U', E ile üretilen bir ideal ise $V^*(E) = V^*(U') = V^*(\sqrt{U'})$ olur.
- (ii) $V^*(0) = nSpec(H)$ ve $V^*(H) = \emptyset$ olur.
- (iii) Her $\{E_t\}_{t \in I}$ ailesi için $V^*(\bigcup_{t \in I} E_t) = \bigcap_{t \in I} V^*(E_t)$ olur.
- (iv) $U, U' \subseteq H$ idealleri için $V^*(U) \cup V^*(U') = V^*(U \cap U') = V^*(UU')$ olur.

İspat (i),(ii) Açıktır.

(iii)

$$\begin{aligned} \bigcap_{t \in I} V^*(E_t) &= \{U \in nSpec(H) : \text{her } t \in I \text{ için } E_t \subseteq \sqrt{U}\} \\ &= \left\{ U \in nSpec(H) : \bigcup_{t \in I} E_t \subseteq \sqrt{U} \right\} \\ &= V^*\left(\bigcup_{t \in I} E_t\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(iv) $UU' \subseteq U \cap U' \subseteq U, U'$ olduğundan $V^*(U) \cup V^*(U') \subseteq V^*(U \cap U') \subseteq V^*(UU')$

olduğu kolayca görülür. Tersine $U'' \in V^*(UU')$ alalım. Buradan $UU' \subseteq \sqrt{U''}$ elde edilir.

Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U''}$ asal ideal olduğundan $U \subseteq \sqrt{U''}$ veya $U' \subseteq \sqrt{U''}$ böylece $U'' \in V^*(U) \cup V^*(U')$ elde edilir. Sonuç olarak $V^*(U) \cup V^*(U') = V^*(U \cap U') = V^*(UU')$ olur.

Her $E \subseteq H$ alt kümesi için $O^*(E) = nSpec(H) - V^*(E)$ dersek Önerme 5.2.1'den $\tau = \{O^*(E) : E \subseteq H\}$ ailesinin $nSpec(H)$ üzerinde topoloji aksiyomlarını gerçeklediği görülür. Bu topolojiye değişmeli halkaların n -asal spektrumu denir ve kısaca $nSpec(H)$ ile gösterilir. Bu topolojinin kapalı kümeleri $E \subseteq H$ alt kümesi olmak üzere $V^*(E)$ varyeteleridir. Değişmeli halkaların asal spektrumunun yani Zariski Topolojisinin bir T_0 -uzayı olduğunu biliyoruz. Fakat $nSpec(H)$ her zaman T_0 -uzay olmayabilir.

Örnek 5.2.2 p bir asal sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^n}$ halkasını düşünelim. $\mathbb{Z}_{p^n}$ tek maksimali nil radikal yani $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}_{p^n}) = (\bar{p})$ olan bir sözde-yerel halkadır. Örnek 5.1.2'den $\mathbb{Z}_{p^n}$ nin her has idealinin bir n -asal ideal olduğu görülür. Şimdi $nSpec(\mathbb{Z}_{p^n})$ nin bir T_0 -uzay olmadığını gösterelim. $1 \leq t \neq k \leq n$ olacak şekilde t, k doğal sayılarını alalım. $nSpec(\mathbb{Z}_{p^n})$ topolojik uzayının kapalı alt kümelerinin $\emptyset$ veya $nSpec(\mathbb{Z}_{p^n})$ olduğunu görmek kolaydır. $\{(\bar{p}^k)\} \neq \{(\bar{p}^t)\}$ olmasına karşın $\{(\bar{p}^k)\}$ yi içeren tüm açık kümeler $\{(\bar{p}^t)\}$ yi de içerir. Benzer şekilde $\{(\bar{p}^t)\}$ yi içeren açık kümeler $\{(\bar{p}^k)\}$ yi da içerir. Dolayısıyla $nSpec(\mathbb{Z}_{p^n})$ bir T_0 -uzay değildir.

Önerme 5.2.3 $z \in H$, $Y = nSpec(H)$ ve $Y_z = nSpec(H) - V^*(z)$ olsun. $\{Y_z : z \in H\}$ n -asal spektrum için bir baz oluşturur.

İspat: O bir açık küme olsun. Buradan $O = Y - V^*(E)$ olacak şekilde bir $E \subseteq H$ bulunur. Böylece Önerme 5.2.1'den $O = Y - V^*(E) = Y - V^*(\bigcup_{z \in E} \{z\}) = Y - \bigcap_{z \in E} V^*(z) = \bigcup_{z \in E} (Y - V^*(z)) = \bigcup_{z \in E} Y_z$ bulunur.

Önerme 5.2.4 $z \in H$, $Y = nSpec(H)$ ve $Y_z = nSpec(H) - V^*(z)$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Her $z, t \in H$ için $Y_z \cap Y_t = Y_{zt}$ dir.
- (ii) $Y_z = \emptyset \Leftrightarrow z \in \mathfrak{N}(H)$ dir.
- (iii) $Y_z = Y \Leftrightarrow z \in H$ birimseldir.
- (iv) $Y_z = Y_t \Leftrightarrow \sqrt{(z)} = \sqrt{(t)}$ dir.
- (v) Y_z quasi-kompakttır.
- (vi) Y quasi-kompakttır.

İspat (i) $U \in Y_z \cap Y_t$ olsun. Buradan $z \notin \sqrt{U}$ ve $t \notin \sqrt{U}$ bulunur. $U \in nSpec(H)$ olduğundan Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U}$ nun asal ideal olduğu görülür. Böylece $z \notin \sqrt{U}$ ve $t \notin \sqrt{U}$ olduğundan $zt \notin \sqrt{U}$ elde edilir. O halde $U \in Y_{zt}$ bulunur. Tersine $U \in Y_{zt}$ olsun.

Böylece $zt \notin \sqrt{U}$ ve buradan $z \notin \sqrt{U}$ ve $t \notin \sqrt{U}$ bulunur. Buradan $U \in Y_z \cap Y_t$ elde edilir. O halde $Y_{zt} = Y_z \cap Y_t$ dir.

(ii) $Y_z = \emptyset$ olsun. Buradan $V^*(z) = nSpec(H)$ elde edilir. U bir asal ideal olsun. Sonuç 5.1.4'ten U bir n -asal idealdir ve böylece $U \in nSpec(H) = V^*(z)$ elde edilir. Buradan $z \in \sqrt{U} = U$ bulunur. Böylece $z \in \bigcap_{U \in nSpec(H)} U = \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Tersine, $z \in \mathfrak{N}(H)$ olsun. Şimdi $U^* \in nSpec(H)$ alalım. Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U^*}$ in bir asal ideal olduğunu biliyoruz. Böylece $z \in \mathfrak{N}(H) \subseteq \sqrt{U^*}$ ve buradan $U^* \in V^*(z)$ elde edilir. O halde $V^*(z) = nSpec(H)$ yani $Y_z = \emptyset$ bulunur.

(iii) $Y_z = Y$ olsun. Buradan $V^*(z) = \emptyset$ elde edilir. z birimsel eleman olmasa z yi içeren en az bir m_z maksimal ideali bulunur. Bu durumda m_z bir asal ideal ve böylece n -asal idealdir. Buradan $m_z \in V^*(z) = \emptyset$ çelişkisi elde edilir. O halde z bir birimsel elemandır. Tersine z birimsel eleman olsun. Böylece $(z) = H$ ve Önerme 5.2.1'den $V^*(z) = V^*(H) = \emptyset$ elde edilir. O halde $Y_z = Y$ dir.

(iv) $Y_z = Y_t$ yani $V^*(z) = V^*(t)$ olsun. Sonuç 5.1.4'ten her asal ideal bir n -asal ideal ve $V^*(z) = V^*(t)$ olduğundan z ve t yi kapsayan asallar aynıdır. Böylece $\sqrt{(z)} = \sqrt{(t)}$ bulunur. Tersine $\sqrt{(z)} = \sqrt{(t)}$ olsun. Şimdi $U^* \in V^*(z)$ alalım. Buradan $(z) \subseteq \sqrt{U^*}$ ve böylece $(t) \subseteq \sqrt{(t)} = \sqrt{(z)} \subseteq \sqrt{\sqrt{U^*}} = \sqrt{U^*}$ bulunur. Böylece $U^* \in V^*(t)$ bulunur. O halde $V^*(z) \subseteq V^*(t)$ dir. Benzer şekilde $V^*(t) \subseteq V^*(z)$ kapsamasının da doğruluğu gösterilebilir. Sonuç olarak iki taraflı kapsamadan $V^*(z) = V^*(t)$ yani $Y_z = Y_t$ bulunur.

(v) Y_z nin bir açık örtüsü $Y_z \subseteq \bigcup_{t \in I} O_t$ olsun. $\{Y_t : t \in H\}, nSpec(H)$ nin bir bazı olduğundan genelliği bozmadan $O_t = Y_{z_t}$ alabiliriz. Böylece $Y_z \subseteq \bigcup_{t \in I} Y_{z_t}$ ve buradan $Y - V^*(z) \subseteq \bigcup_{t \in I} (Y - V^*(z_t)) = Y - \bigcap_{t \in I} V^*(z_t) = Y - V^*(\bigcup_{t \in I} \{z_t\})$ bulunur.

Buradan $V^*(\bigcup_{t \in I} \{z_t\}) \subseteq V^*(z)$ ve böylece $\sqrt{(z)} \subseteq \sqrt{(\bigcup_{t \in I} \{z_t\})}$ elde edilir. O halde bir $m \in \mathbb{N}$ için $z^m \in (\bigcup_{t \in I} \{z_t\})$ ve buradan $z^m = z_1 t_1 + z_2 t_2 + \dots + z_n t_n$ olacak şekilde $z_1, z_2, \dots, z_n \in H$ bulunur. Böylece $z^m \in (\bigcup_{t=1}^n \{z_t\})$ bulunur ve buradan $V^*(\bigcup_{t=1}^n \{z_t\}) \subseteq V^*(z^m) = V^*(z)$ elde edilir. O halde $Y_z \subseteq Y - V^*(\bigcup_{t=1}^n \{z_t\}) = \bigcup_{t=1}^n Y_{z_t}$ bulunur. Yani Y_z quasi-kompakttır.

(vi) $z = 1$ alıp (v) kullanılırsa istenen gerçektir.

Önerme 5.2.5 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) $nSpec(H)$ bir indirgenemez uzaydır.

(ii) $H/\mathfrak{N}(H)$ bir tamlik bölgesidir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $nSpec(H)$ indirgenemez uzay olsun. $zt \in \mathfrak{N}(H)$ olacak şekilde $z, t \in H$ verilsin. $U = Hz$ ve $U' = Ht$ diyelim. Öncelikle $V^*(UU') = V^*(U) \cup V^*(U') = V^*(\mathfrak{N}(H)) = nSpec(H)$ olduğu kolaylıkla görülür. $nSpec(H)$ indirgenemez olduğundan $V^*(U) = nSpec(H)$ veya $V^*(U') = nSpec(H)$ elde edilir. Buradan $z \in \mathfrak{N}(H)$ veya $t \in \mathfrak{N}(H)$ yani $\mathfrak{N}(H)$ nin bir asal ideal olduğu anlaşılır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $H/\mathfrak{N}(H)$ bir tamlik bölgesi yani $\mathfrak{N}(H)$ bir asal ideal olsun. $V^*(U) \cup V^*(U') = nSpec(H)$ olduğunu kabul edelim. Önerme 5.2.1'den $V^*(UU') = nSpec(H)$ elde edilir. Yani $UU' \subseteq \mathfrak{N}(H)$ bulunur. $\mathfrak{N}(H)$ bir asal ideal olduğundan $U \subseteq \mathfrak{N}(H)$ veya $U' \subseteq \mathfrak{N}(H)$ olur. Buradan $V^*(U) = nSpec(H)$ veya $V^*(U') = nSpec(H)$ bulunur yani $nSpec(H)$ bir indirgenemez uzaydır.

Lemma 5.2.6 $U, U' \subseteq H$ idealleri için aşağıdakiler gerçekleşir.

(i) $V^*(U) = V^*(U') \Leftrightarrow \sqrt{U} = \sqrt{U'}$ dir.

(ii) $U \in nSpec(H)$ ise $V^*(U) = cl(U)$ dur.

İspat (i) Açıktır.

(ii) Öncelikle $U \in V^*(U)$ yani $V^*(U)$ nun U yu kapsayan bir kapalı küme olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi U yu içeren herhangi bir $V^*(U')$ kapalı kümesini alalım. $U \in V^*(U')$ olduğundan $U' \subseteq \sqrt{U}$ olur. Şimdi $V^*(U) \subseteq V^*(U')$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $U'' \in V^*(U)$ alalım. Buradan $U \subseteq \sqrt{U''}$ ve böylece $U' \subseteq \sqrt{U} \subseteq \sqrt{\sqrt{U''}} = \sqrt{U''}$ bulunur. O halde $U'' \in V^*(U')$ elde edilir yani $V^*(U) \subseteq V^*(U')$ dir. Böylece $V^*(U), U$ yu içeren en küçük kapalı kümedir yani $V^*(U) = cl(U)$ olur.

Örnek 5.2.2'de $nSpec(H)$ nin T_0 -uzay olmayabileceği gösterilmişti. Şimdi $nSpec(H)$ nin ne zaman T_0 -uzay olacağını göstereceğiz.

Teorem 5.2.7 Bir H halkası verilsin. $nSpec(H)$ nin bir T_0 -uzay olması için g.y.ş her n -asal ideal asaldır.

İspat Her n -asal ideal asal olsun. $nSpec(H)$ nin T_0 -uzay olduğunu göstermek için $cl(U) = cl(U')$ olacak şekilde $U, U' \in nSpec(H)$ alalım. Lemma 5.2.6'dan $V^*(U) = V^*(U')$ ve böylece $\sqrt{U} = \sqrt{U'}$ olur. Her n -asal ideal asal böylece $U = \sqrt{U} = \sqrt{U'} = U'$ elde edilir. Böylece $nSpec(H)$ bir T_0 -uzaydır. Tersine $nSpec(H)$ bir T_0 -uzay olsun. $U \in nSpec(H)$ alalım. Lemma 5.2.6 ve Önerme 5.2.1'den $cl(U) = V^*(U) = V^*(\sqrt{U}) =$

$cl(\sqrt{U})$ bulunur. Ayrıca, Önerme 5.1.6'dan $\sqrt{U}$ bir asal idealdir. $nSpec(H)$ bir T_0 -uzay ve $cl(U) = cl(\sqrt{U})$ olduğundan $U = \sqrt{U}$ yani U bir asal ideal olur.

Teorem 5.2.8 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) Her n -asal ideal bir maksimal idealdir.
- (ii) $nSpec(H)$ bir T_2 -uzaydır.
- (iii) $nSpec(H)$ bir T_1 -uzaydır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Her n -asal ideal bir maksimal ideal olsun. Böylece her n -asal ideal bir asal idealdir. O halde H halkasında asal ve n -asal idealler denktir. Böylece $nSpec(H) = Spec(H)$ olur. Ayrıca her asal da maksimal olduğundan $nSpec(H) = Spec(H)$ bir T_2 -uzaydır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $nSpec(H)$ bir T_1 -uzay olsun. $U \in nSpec(H)$ alalım. Lemma 5.2.6'dan $cl(U) = V^*(U)$ olur. $nSpec(H)$ bir T_1 -uzay olduğundan $cl(U) = \{U\} = V^*(U)$ olur. Şimdi U yi kapsayan bir m maksimal ideali alalım. Buradan $U \subseteq m = \sqrt{m}$ bulunur. m bir n -asal ideal olduğundan $m \in V^*(U) = \{U\}$ yani $m = U$ bulunur. Böylece her n -asal ideal bir maksimal idealdir.

Teorem 5.2.9 Bir H halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) H nin idempotent elemanları sadece 0 ve 1 dir.
- (ii) $nSpec(H)$ bir bağlantılı uzaydır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) H nin idempotent elemanları sadece 0 ve 1 olsun. Şimdi $V^*(U) \cup V^*(U') = V^*(UU')$ ve $V^*(U) \cap V^*(U') = \emptyset$ olacak şekilde $U, U' \subseteq H$ ideallerini alalım. Buradan $U + U' = H$ ve $UU' \subseteq \mathfrak{N}(H)$ elde edilir. Böylece $z + t = 1$ ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $(zt)^k = z^k t^k = 0$ olacak şekilde $z \in U$ ve $t \in U'$ elemanları vardır. $(z) + (t) = H$ olduğundan $(z)^k + (t)^k = H$ elde edilir. Ayrıca $(z)^k(t)^k = (0)$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece Çin Kalan Teoreminden $H \cong H/(z)^k \times H/(t)^k$ bulunur. H nin 0 ve 1 den başka hiçbir idempotent elemanı olmadığından $H/(z)^k = 0$ veya $H/(t)^k = 0$ bulunur. Buradan z birimsel veya t birimsel çıkar. O halde $V^*(U) = \emptyset$ veya $V^*(U') = \emptyset$ bulunur. Sonuç olarak, $nSpec(H)$ bir bağlantılı uzaydır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $nSpec(H)$ bağlantılı uzay ve $z \in H$ idempotent olsun. Buradan $z(1 - z) = 0 \in \mathfrak{N}(H)$ ve böylece $V^*((z)) \cup V^*((1 - z)) = nSpec(H)$ ve ayrıca $V^*((z)) \cap V^*((1 - z)) = V^*((z) + (1 - z)) = V^*(H) = \emptyset$ elde edilir. $nSpec(H)$ bir bağlantılı

uzay olduğundan $V^*((e)) = n\text{Spec}(H)$ veya $V^*((e)) = \emptyset$ bulunur. Böylece $z \in H$ ya nilpotent veya birimseldir. Bu durumda z idempotent olduğundan $z = 0$ veya $z = 1$ elde edilir.



6. SONUÇLAR

Bu tezde tartışmalar ve bulgulara tezin 2., 3., 4. ve 5. bölümlerinde yer verilmiştir.

Tezin 2. bölümünde, r -ideallerin modüllere iki farklı genişlemesi olan r -alt modül ve sr -alt modül kavramları verilmiştir. r -alt modül ve sr -alt modüllerin birbiriyle ilişkisi incelenerek asal alt modüllere benzeyen birtakım özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca basit ve serbest burulmalı alt modüller bu iki genişleme yardımıyla karakterize edilmiştir.

Tezin 3.bölümünde ise r -ideallerden esinlenerek bu yapıdan tanımca daha güçlü olan yeni bir ideal sınıfı n -idealler verilmiştir. n -ideallerin cebirsel özellikleri ve r -ideallerle olan ilişkisi detaylıca incelenmiştir. Ayrıca Bool halkası, von Neumann regüler halkalar ve Călugăreanu tarafından (Călugăreanu, 2016) da tanımlanan UN -halkaları n -idealler yardımıyla karakterize edilmiştir.

Tezin 4. bölümünde asalımsı ve quasi asalımsı ideal sınıfları arasında yer alan güçlü q -asalımsı idealler tanımlanarak cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca A. Badawi tarafından (Badawi, 1999) da tanımlanan ve değer halkalarının bir genellemesi olan bölünmüş halkaların karakterizasyonu güçlü q -asalımsı idealler yardımıyla verilmiştir. Bu bölümde ayrıca, Redmond tarafından (Redmond, 2003) te tanımlanan ideal bazlı sıfır bölen grafiğinin bir alt grafiği tanımlanarak grafiksel özellikleri incelenmiştir. Bu alt grafik yardımıyla indirgenmiş halkalar karakterize edilmiştir.

Tezin son bölümünde ise asal ideallerin yeni bir genellemesi n -asal idealler tanıtılmıştır. Bu ideal sınıfı üzerinde Zariski Topolojisine benzer yeni bir topoloji kurulmuştur. Bu topolojinin ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı araştırılmıştır. Ayrıca bu topolojinin topolojik özellikleriyle halkanın cebirsel özellikleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir.

Bu tezde ortaya koyulan konuların devamı olarak çeşitli genelleştirmeler elde etmek mümkündür. Örneğin, Temmakante ve Bouba (Temmakante ve Bouba, 2019) da n -ideallerin bir genellemesini elde etmişlerdir. Buna benzer olarak r ve sr -alt modüllerin, güçlü q -asalımsı ideallerin ve n -asal ideallerin de genelleştirmelerini elde etmek mümkündür.

KAYNAKLAR

Achraf, M., Ahmed, H., & Ali, B. (2017). 2-Absorbing ideals in formal power series rings. *Palestine Journal of Mathematics*, 6(2), 502-506.

Anderson, D. D., Winders, M. (2009) Idealization of a module. *Journal of Commutative Algebra*, 1, 3-56.

Anderson, D. D., Knopp, K. R., Lewin, R. L. (1994). Ideals generated by powers of elements. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 49(3), 373-376.

Anderson, D. F., Livingston, P. S. (1999). The zero-divisor graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 217(2), 434-447.

Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra* (Vol. 2). Reading: Addison-Wesley.

Atani, S. E., Farzalipour, F. (2005). On weakly primary ideals. *Georgian Mathematical Journal*, 12(3), 423-429.

Badawi, A. (1999). On divided commutative rings. *Communications in Algebra*, 27(3), 1465-1474.

Badawi, A. (2007). On 2-absorbing ideals of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 75(3), 417-430.

Badawi, A., Tekir, U., Yetkin, E. (2014). On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bulletin of Korean Mathematical Society*, 51(4), 1163-1173.

Badawi, A., Tekir, U., & Yetkin, E. (2015). On weakly 2-absorbing primary ideals of commutative rings. *Journal of Korean Mathematical Society*, 52(1), 97-111.

Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226.

Beddani, C., Messirdi, W. (2016). 2-Prime ideals and their applications. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(03), 1650051.

Bollobás, B. (2013). *Modern graph theory* (Vol. 184). Springer Science & Business Media.

Călugăreanu, G. (2016). UN-rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(10), 1650182.

Çallıalp, F., & Tekir, Ü. (2009). *Değişmeli halkalar ve modüller*. Birsen Yayınevi.

Diestel, R. (2012). *Graph theory: Springer graduate text gtm 173* (Vol. 173). Reinhard Diestel.

Dugundji, J. (1966). *Topology*. Bacon. Inc., Boston, 109.

Epstein, N., Shapiro, J. (2016). A Dedekind-Mertens theorem for power series rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(3), 917-924.

Fuchs, L. (1947). On quasi-primary ideals. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged), 11, 174-183.

Gilmer, R. W. (1972). *Multiplicative ideal theory* (Vol. 12). M. Dekker.

Huckaba, J. A. (1988) Commutative Rings with Zero Divisors. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 117. New York, NY, USA: Marcel Dekker.

Jayaram, C., Tekir, Ü. (2018). von Neumann regular modules. Communications in Algebra, 46(5), 2205-2217.

Kelley, J.L., (1955). General Topology, Sheridan Books, Inc., Ann Arbor, MI, United States of America.

Koc, S., Tekir, Ü. (2018). r -Submodules and sr -Submodules. Turkish Journal of Mathematics, 42(4), 1863-1876.

Koc, S., Tekir, U., Ulucak, G. (2019). On Strongly Quasi Primary Ideals. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 56(3), 729-743.

Larsen, M. D., McCarthy, P. J. Multiplicative theory of ideals, Academic Press, New York, 1971.

Livingston, P. S. (1997). Structure in zero-divisor graphs of commutative rings.

Lu, C. P. (1984) Prime submodules of modules. Comm Math Univ Sancti Pauli, 33, 61-69.

Mohamadian, R. (2015) r -Ideals in commutative rings. Turkish Journal of Mathematics, 39, 733-749.

Von Neumann, J. (1936). On regular rings. Proceedings of the National Academy of Sciences, 22(12), 707-713.

Redmond, S. P. (2003). An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring. *Communications in Algebra*, 31(9), 4425-4443.

Ribenboim, P. (1974) *Algebraic Numbers*. New York, NY, USA: Wiley.

Sharp, R. Y. (2000) *Steps in Commutative Algebra*. (2nd ed.), Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sevim, E. S., Koc, S. (2018). On n -Prime Ideals. *University Politehnica Of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics And Physics*, 80(2), 179-190.

Tamekkante, M., & Bouba, E. M. (2019). $(2, n)$ -ideals of commutative rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 18(06), 1950103.

Tekir, U., Koc, S., Oral, K. H. (2017). n -Ideals of commutative rings. *Filomat*, 31(10), 2933-2941.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Suat KOÇ

Doğum Tarihi ve Yeri: 30 Nisan 1990/ Beyoğlu

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: suat.koc@marmara.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Lise: Şişli Yunus Emre Lisesi (2004-2008)

Lisans: Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü (2008-2012)

Yüksek Lisans: Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programı (2013-2015)

İŞ TECRÜBESİ

Araştırma Görevlisi: Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü (2015-Halen)

YAYINLARI

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- 1) Bilgin, Z., Koc, S., Özkirişçi, N. A. Strongly Prime Submodules and Strongly 0-dimensional Modules. Algebra and Discrete Mathematics (In Press)
- 2) Koc, S., Tekir, U., Ulucak, G. (2019). On Strongly Quasi Primary Ideals. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 56(3), 729-743 (**SCI-Expanded**).
- 3) Uregen, R. N., Tekir, U., Shum, K. P., Koc, S. (2019). On Graded 2-Absorbing Quasi Primary Ideals. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 43(4) (**Emerging Sources Citation Index**)
- 4) Sevim, E. S., Tekir, U., Koc, S. (2019). S-Artinian rings and finitely S-cogenerated rings. Journal of Algebra and Its Applications, 2050051 (**SCI-Expanded**).

- 5) Sevim, E. Ş., Arabacı, T., Tekir, Ü., Koc, S. (2019). On S-prime submodules. Turkish Journal of Mathematics, 43(2), 1036-1046 **(SCI-Expanded)**.
- 6) Sevim, E. Ş., Arabacı, T., Tekir, U., & Koc, S. (2019). A note on finite union of primary submodules. Eurasian Bulletin of Mathematics, 2(1), 32-35.
- 7) Ulucak, G., Tekir, Ü., Koc, S. (2018). On n -absorbing δ -primary ideals. Turkish Journal of Mathematics, 42(4), 1833-1844 **(SCI-Expanded)**.
- 8) Koc, S., Tekir, Ü. (2018). r -Submodules and sr -Submodules. Turkish Journal of Mathematics, 42(4), 1863-1876 **(SCI-Expanded)**.
- 9) Sevim, E. S., Koc, S. (2018). On n -Prime Ideals. University Politehnica Of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics And Physics, 80(2), 179-190 **(SCI-Expanded)**.
- 10) Özkirişçi, N. A., Kılıç, Z., Koc, S. (2018). A note on primary spectrum over commutative rings, Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iaşi (New Series). Mathematics, 64, 111-120 **(Emerging Sources Citation Index)**.
- 11) Koc, S., Uregen, R. N., Tekir, U. (2017). On 2-Absorbing Quasi Primary Submodules. Filomat, 31(10), 2943-2950 **(SCI-Expanded)**.
- 12) Tekir, U., Koc, S., Oral, K. H. (2017). n -Ideals of commutative rings. Filomat, 31(10), 2933-2941 **(SCI-Expanded)**.
- 13) Akca, F., Koc, S. (2017). A Short Note on a Generalization of Pure Ideals in Commutative Semigroups. In International Mathematical Forum, 12(13), 635-641.
- 14) Erbay, M. A., Tekir, Ü., Koc, S. (2016). r -Ideals of commutative semigroups. International Journal of Algebra, 10(11), 525-533.
- 15) Tekir, U., Koç, S., Oral, K. H., Shum, K. P. (2016). On 2-absorbing quasi-primary ideals in commutative rings. Communications in Mathematics and Statistics, 4(1), 55-62 **(Emerging Sources Citation Index)**.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

- 1) Tekir Ü. , Üregen R. N. , Sever M., Koç S. (2017). Weakly prime ideals in commutative semigroups, 2nd International Conference On Advances In Natural And Applied Sciences (Icanas 2017). Antalya, Turkey.
- 2) Özkirişçi N. A. , Bilgin Z., Koç S. (2017). On strongly prime submodules and strongly 0-dimensional modules, International Conference On Mathematics And Enineering (Icome 2017). Istanbul, Turkey.
- 3) Üregen R. N. , Tekir Ü. , Koç S. (2017). On graded 2-absorbing quasi primary ideals, International Conference On Mathematics And Enineering (Icome 2017). Istanbul, Turkey.
- 4) Özkirişçi N. A. , Kılıç Z., Koç S. (2017). A covering condition for primary spectrum. The International Conference On Algebra And Its Applications, Errachidia, Morocco.
- 5) Koç S. , Uregen R. N. , Tekir Ü. (2016). On 2-absorbing quasi primary submodules, Analysis, Topology And Algebra (Ata2016), Cacak, Serbia.
- 6) Tekir, Ü., Koc, S., Oral, K. H. (2016). n -Ideals of Commutative Rings, Analysis, Topology And Algebra (Ata2016), Cacak, Serbia.
- 7) Tekir, U., Oral, K. H., & Koc, S. (2015). Rings of Continuous Functions. Applied Mathematics & Approximation Theory (AMAT 2015), Ankara, Turkey.

Yabancı Dil

YDS-2014: 81,25

Ödül/Burs

Tübitak Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı (2013-2015)

Tubitak Yurt İçi Doktora Burs Programı (2015-2019)

Ulakbim Uluslararası Bilimsel Yayın Teşvik Ödülü: 2 kez (Eylül 2019).