

**GALİLE UZAYINDA
UZAKLIK FONKSİYONU, DAYANAK
FONKSİYONU VE TEKİLLİKLERİ**

**TEVFİK ŞAHİN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLE UZAYINDA UZAKLIK FONKSİYONU, DAYANAK FONKSİYONU
VE TEKİLLİKLERİ

TEVFİK ŞAHİN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MURTEZA YILMAZ

SAMSUN – 2010

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Bu çalışma jürimiz tarafından .../.../... tarihinde yapılan sınav ile
Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.**

Başkan:

Üye:

Üye:

Üye:

Üye:

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../...

Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

GALİLE UZAYINDA UZAKLIK FONKSİYONU, DAYANAK FONKSİYONU VE TEKİLLİKLERİ

ÖZ

Bu tez sekiz ana bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm olan giriş bölümünde kısa bir literatür özeti verildi.

İkinci bölüm olan genel bilgiler bölümünde bu çalışmada kullanılan bazı temel bilgiler ve teoremler verildi.

Üçüncü bölüm olarak materyal ve metot bölümünde tekillik teorisi kısaca tanıtıldı.

Dördüncü bölüm olan bulgular bölümü ise üç kısımdan oluşmaktadır.

İlk olarak, Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonları tanımlandı. Bu fonksiyonların tekil noktalarının tekillik derecesi için gerekli türevler hesaplandı.

İkinci olarak, tekillik teorisinde önemli bir rolü olan versal dallanma ve (p)-versal dallanma durumları Galile dayanak ve Galile uzaklık fonksiyonları için ifade edildi.

Son olarak, Galile uzayında eğriler için bazı geometrik karakterizasyonlar elde edildi. Bu amaçla Galile uzayında regüler bir eğrinin açılabilir rektifiyan yüzeyinin tekillikleri, Galile uzaklık fonksiyonu yardımıyla incelendi. Ayrıca, Galile küresel Darboux görüntüsü ve rektifiyan Gauss yüzeyinin tekillikleri de, Galile dayanak fonksiyonu yardımıyla incelendi. Böylece bu eğri ve yüzeylerin bu fonksiyonların tekil noktalarının komşuluklarında hangi eğri ve yüzeylere difeomorf oldukları belirlendi.

Beşinci ve altıncı bölümler olan tartışma, sonuç ve öneriler bölümlerinde kısa değerlendirmeler verildi.

Yedinci ve sekizinci bölümlerde, sırasıyla kaynakların bir listesi ve kısa bir özgeçmiş verildi.

Anahtar Sözcükler: Galile geometrisi, Galile dayanak fonksiyonu, Galile uzaklık fonksiyonu ve A_k – tekilliği

DISTANCE FUNCTION, HEIGHT FUNCTION IN GALILEAN SPACE AND THEIR SINGULARITIES

ABSTRACT

This thesis consists of eight chapters.

In the first chapter, a short summary of literature is given.

Secondly, fundamental knowledge and some theorems which are used in this thesis are given as general information chapter.

In the third chapter, material and method, the singularities theory is met shortly.

The fourth chapter, findings chapter, consists of three sections.

Firstly, height function and distance function in Galilean geometry are defined for applying singularity theory. Necessary derivatives are computed to find singularity order of singular points of these functions.

Secondly, being versal unfolding and (p)-versal unfolding situations which have important roles in singularity theory are expressed for Galilean height and Galilean distance functions.

In the last section, some geometric characterizations for curves in Galilean geometry are obtained. For this purpose, singularities of rectifying developable surface of a regular curve in Galilean space are examined by Galilean distance function. Also, singularities of Galilean spherical Darboux images and rectifying Gauss surface are analyzed by Galilean height function. Therefore, curve and surfaces which are diffeomorphic to these curve and surfaces in the neighbourhoods of singular points of these functions are specified.

In the next two chapters, discussion, results and suggestions chapters, short evaluations are given.

The last two chapters contain a list of references and autobiography of the author, respectively.

Key Words: Galilean geometry, Galilean height function, Galilean distance function and A_k – singularity

TEŞEKKÜR

Öncelikle insan olmanın erdem ve onurunu ilk ders olarak öğreten aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Hayata ve matematiğe bakışında bir dönüm noktası olan, her zaman desteğini ve güvenini eksik etmeyen, akademik hayatımda bugünlere gelmemdeki sabır ve emeği için sayın hocam Prof. Dr. Murteza YILMAZ' a ne kadar teşekkür etsem azdır.

Tez savunma jürimde bulunarak bizi onurlandıran sayın hocam Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN' a, tez savunma jürimde bulunan sayın hocam Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN ve tez çalışmam süresince yoğunluklarına rağmen bana vakitlerini ayıran, sorularıyla ve önerileriyle bana yardımcı olan tez izleme jürimde bulunan değerli hocalarım Doç. Dr. İsmail AYDEMİR ve Yrd. Doç. Dr. Zuhale ÜNAN' a teşekkür ederim.

Ayrıca bugüne kadarki ilgilerinden dolayı sayın hocam Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI' ya, çalışma disipliniyle bana her zaman örnek olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İlker ERYILMAZ' a, bana inanan diğer öğretim üyeleri ve arkadaşlarıma, güvenlerini boşa çıkarmadığım inancıyla teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
1.GİRİŞ	1
2.GENEL BİLGİLER	4
2.1.Bazı Temel Kavramlar	4
2.2.Geometri Nedir?	9
2.3.Galile Geometrisi	10
2.4.Galile Düzleminde Uzaklık ve Açılar	18
2.5.Galile Geometrisinde Eğrilik	26
3.MATERYAL ve YÖNTEMLER	35
4.BULGULAR	42
4.1.Galile Dayanak ve Galile Uzaklık Fonksiyonları ve Tekillikleri	42
4.2.Galile Dayanak ve Galile Uzaklık Fonksiyonlarının Dallanmaları	59
4.3.Bazı Geometrik Sonuçlar	85
5.TARTIŞMA	94
6.SONUÇ ve ÖNERİLER	95
7.KAYNAKLAR	96
8.ÖZGEÇMİŞ	98

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu afin uzay
G^n	n-boyutlu Galile uzayı
α	Galile uzayında birim hızlı eğri
t	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin birim teğet vektörü
n	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin birim normal vektörü
b	Galile uzayında verilmiş bir eğrinin birim binormal vektörü
ρ	Eğrilik yarıçapı
$V \times_G W$	V ve W vektörlerinin Galile vektörel çarpımı
$\ x\ _G$	$\bar{x}$ vektörünün Galile normu
A_k	k. dereceden tekillik
S_G^2	Galile birim küre
σ	Galile küresel teğetler göstergesi
f_d	Bir değişkenli uzaklık fonksiyonu
f_h	Bir değişkenli dayanak fonksiyonu
F_d	Galile uzayında uzaklık fonksiyonu
F_h	Galile uzayında dayanak fonksiyonu
R_F	F fonksiyonlar ailesinin sırt (regresyon) noktalarının kümesi
S_F	F fonksiyonlar ailesinin tekil (singüler) kümesi
B_F	F fonksiyonlar ailesinin ayrışım(bifurcation) kümesi
D_F	F fonksiyonlar ailesinin zarfı
$f', f'', \dots, f^{(i)}$	f fonksiyonunun türevleri
$J^k \gamma(t)$	γ eğrisinin k . dereceden jeti
$D(x)$	α eğrisinin Darboux vektörü
$\tilde{D}(x)$	α eğrisinin değiştirilmiş Darboux vektörü
$d(x)$	Küresel Darboux görüntüsü
$RG(\alpha)$	α eğrisinin Rektifiyan Gauss yüzeyi
$RD(\alpha)$	α eğrisinin Rektifiyan açılabilir yüzeyi
C	Köşeli eğri (the cuspidal curve)
SW	Kırlangıç kuyruğu yüzeyi (the swallowtail surface)

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.2.1.Uzaklık	10
Şekil 2.3.1.Doğrusal hareket	13
Şekil 2.3.2.Galile düzlemi	14
Şekil 2.4.1.Galile uzaklık	18
Şekil 2.4.2.Galile çember	20
Şekil 2.4.3.Öklid açısı	21
Şekil 2.4.4.Galile açısı	22
Şekil 2.4.5.Galile açının değişimi	23
Şekil 2.4.6.Paralel doğrular arasındaki uzaklık	24
Şekil 2.4.7.Bir noktanın bir doğruya Galile uzaklığı	24
Şekil 2.5.1.Yay uzunluğu	27
Şekil 2.5.2.Eğrilik	28
Şekil 3.1.1.Bileşke fonksiyon	35
Şekil 3.1.2. C köşeli eğrisi (cuspidal curve)	41
Şekil 3.1.3. $C \times \mathbb{R}$ köşeli yüzeyi (cuspidal edge surface)	41
Şekil 3.1.4. SW kırlangıç kuyruğu yüzeyi (swallowtail surface)	41

1. GİRİŞ

Yüzyıllardır geometrinin temel amacı, üç boyutlu Öklid uzayında temel özelliklerin araştırılması olarak düşünüldü.

İlk çağlardan beri küresel geometri (aslında ilk Öklidyen olmayan geometrik sistemdir.) bilinmesine rağmen hiperbolik geometri keşfedilene kadar Öklid uzayı kavramının evrenselliği konusunda bir şüphe yoktu. Bu anlamda 19. yüzyılın ilk yarısında Gauss (1816), Lobachevsky (1829) ve Bolyai (1832) matematik tarihinde ender rastlanan önemli bir buluş yaparak, bin yılın düşüncesini yıkıp; Öklidyen geometri kadar geçerli yeni bir geometrik sistem olan hiperbolik geometrinin varlığını ortaya koydular.

Hiperbolik geometrinin keşfinden sonra kabul edilebilir iki geometrik sistem Öklid ve hiperbolik geometri oldu. Fakat bu görüş çok uzun sürmedi.

Geometrinin tek olmaması, matematiğin temel alanlarında yeni fikirlerin ortaya çıkmasına yol açtı. Bu fikirler; soyut anlamda matematiksel geometri ile fiziksel uzayların bazı özelliklerinin incelendiği fiziksel geometri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkardı.

Öklid geometrisinin tek olmadığı dikkate alınırsa, hiperbolik geometrinin de Öklidyen olmayan tek geometri olmadığı gözden kaçırılmamalıdır. Gerçekten Öklidyen ve hiperbolik geometrinin yanı sıra birçok geometrik sistem vardır.

19. yüzyıl, geometride hızlı gelişmelerin yaşandığı bir yüzyıldır. 1854’de ünlü Alman matematikçi G.F.B. Riemann (1826-1866) kapsamı genişletilen oldukça genel bir geometri düşüncesini formülleştirdi. Ayrıca Riemann birbiri ile bağlantılı, fakat farklı, iki değil üç geometrik sistemin; Öklid geometri, hiperbolik geometri ve eliptik geometri (küresel geometriye çok yakın olduğundan eliptik geometri denilmiştir.) olduğunu belirtti.

İngiliz cebirci A. Cayley (1821-1891)’in çalışmalarının ve geometrik düşüncelerinin bir sentezi olarak 1872 yılında Alman matematikçi F. Klein (1849-1925) geometrilerin listesini genişletti.

Sonuç olarak Lobachevsky (1829), Bolyai (1832) ve Gauss’un hiperbolik geometriyi keşfetmeleri Öklid geometrisinin tek geometri olduğu düşüncesini yıktı. Sonrasında ise Riemann (1854) ve Klein (1872)’in çalışmalarıyla Öklid geometri dışında tek geometrinin hiperbolik geometri olmadığı sonucu ortaya çıktı.

Ancak bugün bile Öklidyen olmayan geometri denildiğinde sıklıkla hiperbolik geometri ve nadiren de eliptik geometri ilk olarak akla gelmektedir. Bu durum büyük ölçüde fiziksel uzayın doğası hakkındaki eski tartışmaların etkisinden kaynaklanmaktadır. Uzun bir süre bütün bilimsel önemin bu tartışmalara verilmesi bu görüşü oluşturmuştur. Bu durum hiperbolik geometri ve eliptik geometri dışındaki diğer Öklidyen olmayan geometrilerin sadece özel olarak bilinmesine yol açmıştır. Bunun sonucu olarak, diğer Öklidyen olmayan geometrilere hiperbolik geometriyle kıyaslanamayacak kadar az ilgi gösterildi. Bu yüzden, Öklidyen olmayan bir geometri olarak Galile geometrisi güncel bir çalışma alanıdır.

Aslında Galile geometrisi adı, tarihsel olarak doğru değildir. Çünkü 17. yüzyılın başlarında çalışmış olan Galileo, farklı geometrik sistemlerin var olduğu düşüncesinin ortaya çıktığı 19. yüzyılın en büyük keşiflerinden biri olan bu geometriyi bilmiyordu. Aslında daha doğru adı Galile rölativite prensipleriyle birleşen geometridir. Bu ifade uzun olduğundan kısaca Galile geometrisi denilmiştir.

Galile geometrisi ile ilgili ilk bilim kitabı Yaglom (1979)' un çalışmasıdır. Galile geometrisinin fiziksel temellerinin anlatıldığı bu eserde, Galile geometrisiyle ilgili temel bilgiler bulunabilir. Galile uzayında yüzeylerle ilgili bazı temel kavramlar Divjak (2003a), Divjak ve Sipus (2003b), Röschel (1984) ve Sipus (2008)' un çalışmalarında vardır. Pavkovic ve Kamenarovic (1987) çalışmasında Galile uzayında eğrilerle ilgili bazı kavramlar bulunabilir.

Matematik ve diğer bilim dallarında yeterince ilgi çeken tekillik (singülerlik) teorisi; 1960 yılında R. Thom'un ortaya koyduğu önemli bir teoridir.

Tekillik teorisinin bütün yaklaşımlarında her zaman önemli bir araç olan versal dallanma (unfolding) düşüncesi, 1975 yılında Thom tarafından ortaya konuldu. Tekillik teorisinin geometrik yaklaşımlarından birisi; çok değişkenli düzgün fonksiyon ailelerinin belirttiği, bir değişkenli düzgün fonksiyonların dallanmalarına (unfolding) dayanmaktadır.

Sonuç olarak bu teori; genel bir eğrinin veya yüzeylerin bir takım karakterizasyonlarını verdiği gibi onların şekilleri hakkında da bilgi vermektedir.

Öklid uzayında tekillik teorisıyla ilgili temel kavramlar Arnold (1986), Bruce ve Giblin (1992) çalışmalarında bulunabilir. Yine Öklid uzayında tekillik teorisıyla ilgili birçok çalışma vardır. Temel olarak eğrilerin tekilliğiyle ilgili olarak bazı kavramlar, Bruce ve ark. (1981a), Bruce (1981b), Bruce ve Giblin(1983), Fidal (1984a), Fidal ve

Giblin (1984b) çalışmalarında verildi. Öklid uzayında bir eğri üzerinde tanımlı bazı yüzeylerin tekillikleri Mond (1989) ve Izumiya ve ark. (1999) çalışmalarında verildi. Tekillik teorisiyle ilgili bazı geometrik yaklaşımlar Banchoff ve ark. (1982) ve Wall (1976) çalışmalarında bulunabilir. Tekillik teorisinin Minkowski uzayında bir uygulaması Izumiya ve ark. (2000a) ve Pei ve Sano (2000b) çalışmalarında verildi. Bu çalışmaların çoğunda tekillik teorisinde eğrilerin tekilliğini ve değişmezlerini incelemek için önemli bir araç olan karesel-uzaklık (squared-distance) ve dayanak (height) fonksiyonları kullanılmıştır.

Bu tezin genel bilgiler bölümü beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. İkinci kısımda geometri tanımı verildi. Üçüncü kısımda Galile düzleminde ve Galile uzayında hareket dönüşümleri anlatıldı. Dördüncü kısımda Galile düzleminde uzaklık, açı ve çember gibi bazı geometrik kavramlar tanıtıldı. Son kısımda ise Galile düzleminde ve Galile uzayında eğrilerle ilgili temel kavramlar anlatıldı.

Materyal ve metot bölümünde tekillik teorisinin temel tanım ve teoremleri verildi.

Bu tezdeki bulgular bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyonların tekillik derecelerini belirlemek için gerekli türevler hesaplandı. Bu fonksiyonların tekillik dereceleriyle eğrinin değişmezleri arasında bir ilişki kuruldu. İkinci kısımda tekillik teorisinde önemli bir araç olan versal dallanma ve (p)-versal dallanma durumları Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonu için ifade edildi. Son kısımda ise birinci ve ikinci kısmın bir sonucu olarak bazı eğri ve yüzeyler için önemli bazı geometrik karakterizasyonlar elde edildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1.Bazı Temel Kavramlar

2.1.1.Tanım:

$A \neq \emptyset$ bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonsiyonu varsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir.

$$(i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$(ii) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Burada $P, Q \in A$ için $f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ şeklinde gösterilir. P noktasına $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün başlangıç noktası, Q noktasına da bitiş (uç) noktası denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

2.1.2.Örnek:

$\mathbb{R}^n$ sıralı n -lilerinin kümesi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya n -boyutlu standart reel vektör uzayı denir. Bu takdirde,

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = Q - P$$

ile tanımlı f fonsiyonu afin uzay aksiyomlarını sağlar.

O halde $\mathbb{R}^n$ sıralı n -lilerinin kümesi, $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleşen afin uzayıdır. Bu uzaya standart reel afin uzay denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

2.1.3.Tanım:

V bir vektör uzayı, A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin oluşturduğu $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve $P_i, 1 \leq i \leq n$ noktalarına da çatının birim noktaları denir.

Eğer $\dim V = n$ ise A ya n -boyutlu bir afin uzay denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

2.1.4.Tanım:

A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay ve $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesi de A afin uzayında bir afin çatı olsun. Bu takdirde,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i}, \quad \forall P \in A$$

yazılabilir.

$$x_i : A \rightarrow K$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

fonksiyonları yardımıyla tanımlanan, $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$ nokta n -lisine $P \in A$ noktasının afin koordinatları, bu afin koordinatları tanımlamak için kullanılan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine de afin koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1982).

2.1.5.Tanım:

A , n -boyutlu V reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayında bir iç-çarpım işlemi olarak;

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid çarpımı tanımlanırsa; A afin uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1982).

2.1.6.Örnek:

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu reel vektör uzayı üzerinde Öklid iç-çarpımı tanımlıdır. Bu nedenle $\mathbb{R}^n$ kümesi, $\mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayı ile birleşen bir Öklid uzayıdır.

2.1.7.Tanım:

$$E^n, n\text{-boyutlu bir Öklid uzayı olsun. } P_0, P_1, \dots, P_n \in E^n \text{ için } \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

vektör kümesi E^n ile birleşen V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de bir Öklid çatısı veya bir dik çatı denir (Hacısalihoglu, 1982).

2.1.8.Tanım:

E^n , n -boyutlu bir Öklid uzayı ve $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisi E^n de bir dik çatı olsun. E^n aynı zamanda bir afin uzay olduğundan $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ dik çatısına karşılık gelen bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemi vardır. E^n Öklid uzayında bu şekilde tanımlı bir koordinat sistemine Öklid koordinat sistemi veya dik koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1982).

2.1.9.Tanım:

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir U açık kümesi üzerinde;

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına Öklid koordinat fonksiyonları denir (O'Neill, 1966).

2.1.10.Tanım:

Eğer f fonksiyonunun $f_i, 1 \leq i \leq p$ koordinat fonksiyonlarının tüm mertebelerden kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna düzgündür veya dönüşümdür denir (O'Neill, 1966).

2.1.11.Tanım:

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ düzgün bir fonksiyon olsun. Bir $u \in U$ için

$$J_f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(u) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u) & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(u) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(u) & \dots & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix}_{p \times n}$$

matrisine f düzgün fonksiyonunun $u \in U$ noktasındaki Jacobian matrisi denir. Bu matris yardımıyla tanımlanan $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineer dönüşümüne ise f dönüşümünün $u \in U$ noktasındaki türevi denir (O'Neill, 1966).

2.1.12.Tanım:

Herhangi bir $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için $\text{rank} A = \min(m, n)$ ise A matrisine regüler matris denir. Eğer $\text{rank} A < \min(m, n)$ ise A matrisine tekil matris denir (O'Neill, 1966).

2.1.13.Tanım:

f dönüşümünün $u \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki J_f jacobian matrisi için $\text{rank} J_f = \min(n, p)$ ise (yani $\min(n, p)$ sayıda sütun veya satır lineer bağımsız ise) u noktasına regüler nokta (ya da tekil olmayan nokta) denir. Aksi durumda u noktasına tekil nokta denir (Bruce ve Giblin, 1992).

2.1.14.Tanım:

u regüler nokta ise $f(u)=c$ değerine bir regüler değer, benzer şekilde u tekil nokta ise $f(u)=c$ değerine tekil değer denir (Bruce ve Giblin, 1992).

2.1.15.Tanım(Difeomorfizm):

U ve V , $\mathbb{R}^n$ uzayında iki açık alt küme olsunlar. Eğer $\Phi:U \rightarrow V$ fonksiyonu;

- i) Φ birebir ve örtendir,
- ii) Φ ve Φ^{-1} düzgündür.

özelliklerini sağlarsa bu Φ fonksiyonuna bir difeomorfizmdir denir (Spivak, 1975).

2.1.16.Teorem(Ters fonksiyon teoremi):

$U_1 \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme olmak üzere $\Phi:U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün fonksiyonu verilsin ve $u \in U_1$ olsun. Eğer u noktasında jacobian matrisi regüler ise (tekil değilse); $\Phi:U \rightarrow \Phi(U)$ dönüşümü bir difeomorfizm olacak şekilde $u \in U$ olan bir $U \subset U_1$ açık kümesi vardır. Bu durumda Φ dönüşümüne U kümesinde bir lokal difeomorfizmdir denir.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

2.1.17.Tanım(Parametrik manifold):

$W \subset \mathbb{R}^{n+q} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ kümesi $w = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots, 0)$ şeklindeki elemanların bağlantılı bir kümesi olsun. U kümesi de $U \subset \mathbb{R}^{n+q}$ ve $W \subset U$ olan bir açık küme olsun. Ayrıca $\Phi:U \rightarrow \Phi(U)$ bir difeomorfizm olmak üzere $\Phi:U \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ dönüşümü verilsin. $M = \Phi(W)$ kümesine $\mathbb{R}^{n+q}$ uzayında bir parametrik n-manifold, $\gamma = \Phi|_W$ kısıtlanışına da M kümesinin bir parametrik gösterimi denir. Burada q sayısına $\mathbb{R}^{n+q}$ uzayındaki M manifoldunun üst boyutu (codimension) denir. Yani

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}(W) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(W), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq n+q$$

şeklindedir (Bruce ve Giblin, 1992).

2.1.18.Sonuç:

W kümesinde γ dönüşümünün jacobian matrisi, W kümesinde Φ dönüşümünün jacobian matrisinin ilk n satırı ile oluşturulan matristir (Bruce ve Giblin, 1992).

2.1.19.Örnek:

$Y(x) \neq 0$ olmak üzere $y = Y(x)$ fonksiyonu yardımıyla $\mathbb{R}^2$ uzayında bir $\gamma(t) = (t, Y(t))$ eğrisi veriliyor. $U = \{u = (x, y, z) : 0 < y < \pi\} \subset \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde tanımlı Φ fonksiyonu;

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi(x, y, z) = (x, Y(x) \cos y, z + Y(x) \sin y)$$

şeklinde olsun.

$W = \{w = (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesi için $\Phi(W)$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayında 2-manifold olduğunu gösterelim.

Bunun için Φ dönüşümünün difeomorfizm olduğunu yani jacobian matrisinin singüler olmadığını göstermeliyiz. Φ dönüşümünün jacobian matrisi

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Y'(x) \cos y & -Y(x) \sin y & 0 \\ Y'(x) \sin y & Y(x) \cos y & 1 \end{pmatrix}$$

olup singüler değildir. Bu durumda Φ dönüşümü; $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ olarak tanımlandığında bir yerel difeomorfizm olur. O halde W kümesinin bu difeomorfizm altındaki $\Phi(W) = M$ görüntüsü $\mathbb{R}^3$ uzayında bir manifold tanımlar. Yani

$$\Phi(W) = \Phi(x, y, 0) = (x, Y(x) \cos y, Y(x) \sin y)$$

şeklindeki noktaların kümesi bir parametrik 2-manifoldtur.

2.1.20.Teorem(Whitney Teoremi):

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayında her kapalı küme $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ çözüm kümesi şeklinde yazılır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

Uyarı:

Kapalı kümeler $f(x) = 0$ şeklinde bir düzgün fonksiyonun $f^{-1}(0)$ çözüm kümesi olarak alınabildiği gibi, f düzgün bir fonksiyon olmak üzere $f(x) = c$, (c sabit) iken $f^{-1}(c)$ çözüm kümesi olarak da alınabilir.

2.1.21.Teorem (Kapalı Fonksiyon Teoremi):

Bir $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{n+q}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı düzgün bir fonksiyon $f : \mathbb{R}^{n+q}, (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^q, f(a, b) = c$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^{n+q}$ noktasının koordinatları

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_q)$ olsun. Eğer $q \times q$ tipindeki;

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \frac{\partial f_q}{\partial y_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$$

matrisi (a, b) noktasında regüler bir matris ise ; $a \in \mathbb{R}^n$ noktasının bir $A \subset \mathbb{R}^n$ komşuluğu ve $b \in \mathbb{R}^q$ noktasının $B \subset \mathbb{R}^q$ komşuluğu vardır ki $g : A \rightarrow B$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x, g(x)) = c$ olacak şekilde bir tek $g(x) \in B$ noktası vardır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

2.2.Geometri Nedir?

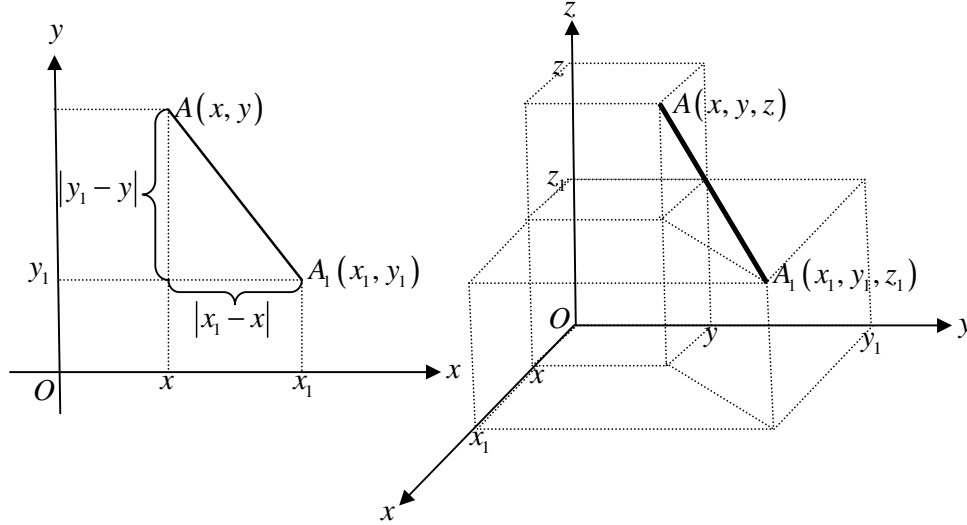
Geometri; uzayda veya düzlemde noktaların bir kümesi olarak şekilleri, bu şekiller arasındaki ilişki ve özellikleri inceleyen bir bilim dalıdır. Burada incelenen özelliklerin geometrik olarak anlamlı olması ile ilgili iki farklı yaklaşım vardır.

Bu yaklaşımlardan ilki; şekillerin eşdeğer (congruent) olması ile ilgili yaklaşımdır. İki şeklin eşdeğer olması; birinin diğerinden bir hareketle elde edilmiş olması demektir. Burada hareket; her bir şekli diğerine götüren, uzaklığı koruyan bir dönüşümdür. Dolayısıyla eşdeğer şekillerin yerleri farklı, fakat bulundukları form aynıdır. Eşdeğerlik tanımına göre; bir özelliğin geometrik olarak anlamlı olması için eşdeğer şekillerin her birinde bu özelliğin bulunması gerekir.

İncelenen özelliklerin geometrik özellik olmasıyla ilgili ikinci yaklaşım; koordinatların kullanılmasıyla ilgilidir. Bilindiği gibi 17.yy yaşamış meşhur Fransız matematikçiler; R. Descartes (1596-1650) ve P. Fermat (1601-1665) Öklidyen geometriyi düzlemde bir koordinat sistemi yardımıyla gösterdiler. Böylece düzlemdeki her A noktası bir (x, y) sıralı ikilisiyle temsil edildi. Buradaki x ve y elemanlarına A noktasının koordinatları denildi (şekil 2.2.1). Böylece noktaların bir kümesi olarak verilen herhangi bir şekil; bu noktalara karşılık gelen sıralı sayı çiftlerinin yani koordinatların bir kümesi olarak düşünüldü. Bu ise herhangi bir geometrik şeklin

koordinatlar yardımıyla kapalı denkleminin yazılmasına olanak sağladı. Örneğin çember, doğru ve benzeri şekillerin denklemleri bu şekilde ifade edildi.

Bir A noktasının (x, y) koordinatları, koordinat sisteminin seçimine bağlıdır. Dolayısıyla koordinat sistemi değiştiğinde, yani farklı bir koordinat sistemi seçildiğinde, noktanın koordinatları da değişecektir. Koordinat sistemi değiştiği halde (yani bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçilirken) aynı kalan özelliğe değişmez karaktere sahip özellik denir. Bu özellik şeklin geometrik özelliğini yansıtır. Sonuç olarak koordinat sisteminin seçimine bağlı olmayan özelliklere geometrik özellikler denir. Örneğin bir çemberin yarıçapı ve iki nokta arasındaki uzaklık geometrik özelliklerdir (şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1.Uzaklık (Yaglom, 1979)

Sonuç olarak F.Klein'e göre geometri; dönüşümler altındaki değişmez özelliklerin teorisidir. Bu dönüşümler altında korunan yani değişmeyen özelliklere geometrik özellikler denir.

Aşağıdaki kısımlarda Galile geometrisiyle ilgili temel kavramlar tanıtıldı.

2.3.Galile Geometrisi:

Galile geometrisi; Galile hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir. Düzlemde ve uzayda bu hareket dönüşümlerini açıklamak için gerekli olan bazı dönüşümler aşağıda kısaca tanıtıldı.

2.3.1.Tanım(Afin dönüşüm):

Düzlemin kendi kendine en genel afin dönüşümü

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + n \end{aligned} \right\} a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R} \quad (2.3.1)$$

şeklinde 6-parametrel bir dönüşümdür. Eğer burada lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $ad - bc = 0$ ise bu dönüşüme tekil afin dönüşüm, sıfır değil ise ($ad - bc \neq 0$) regüler afin dönüşüm denir. Regüler afin dönüşümler bileşke işlemine göre grup oluştururlar. Bu gruba afin grup denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

2.3.2.Tanım(Hareket dönüşümü):

Eğer (2.3.1) denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $ad - bc = 1$ ise bu durumda afin dönüşüme hareket dönüşümü denir. Dolayısıyla bu dönüşümler de bir grup oluştururlar. Bu gruba hareketler grubu denir. Bu dönüşümler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Eğer genel hareket dönüşümlerinde $a = d$, $b = -c$ yazılırsa, katsayılar determinantı $a^2 + b^2 = 1$ şeklinde olur. Buna göre Öklid düzleminde genel hareket dönüşümleri;

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= \pm(-bx + ay + n) \end{aligned} \right\} a, b, m, n \in \mathbb{R} \quad (2.3.1a)$$

4-parametrel bir dönüşüm olarak elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

2.3.3.Tanım(Galile düzleminde hareket dönüşümleri):

Afin düzlemin kendi kendine en genel regüler dönüşümünü ifade eden (2.3.1) denkleminde eğer $a = d = 1$, $b = 0$ alınırsa;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + m \\ y' &= cx + y + n \end{aligned} \right\} c, m, n \in \mathbb{R} \quad (2.3.2)$$

şeklinde 3-parametrel afin alt grubu elde edilir. Bu dönüşümün katsayılar determinantı

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{olduğundan, (2.3.1) denkleminde verilen dönüşüm bir hareket}$$

dönüşümüdür. Bu dönüşüme Galile düzlemindeki hareket dönüşümü denir. O halde Galile düzlemsel geometrisi bu hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir (Yaglom, 1984).

2.3.4.Tanım(Galile uzayında hareket dönüşümleri):

3-boyutlu afin uzayın kendi kendine en genel bir dönüşümü;

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned} \right\} a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \quad (2.3.3)$$

şeklinde 12-parametrel bir dönüşümdür. Eğer burada bu denklem sisteminin katsayılar determinantı;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.3.3a)$$

ise bu dönüşümler bileşke işlemine göre grup oluştururlar. Bu gruba Afin uzayın dönüşümler grubu denir. Eğer bu grubu F_{12} ile gösterirsek, özel olarak $b_1 = c_1 = 0$ alınırsa bir alt afin grubunu yani F_{10} grubunu elde ederiz. Bu durumda (2.3.3a) denklemiyle belli $\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) \neq 0$ olmalıdır. Eğer bu dönüşüm

$$I : (0, y, z) \rightarrow (0, z, -y) \quad (2.3.4)$$

şeklinde bir eliptik hareketle (involution) düşünülürse; bu durumda $b_2 = c_3$ ve $c_2 = -b_3$ olarak elde edilir. Bu durumda $\Delta = a_1(b_2^2 + c_2^2) \neq 0$ şeklinde olup $b_2^2 + c_2^2 = \rho^2$ olarak alındığında; $b_2 = \rho \cos \varphi$, $c_2 = \rho \sin \varphi$ olacak şekilde bir φ açısı vardır. Bu ifadeler (2.3.2) denkleminde yazılırsa;

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1x + d_1 \\ y' &= a_2x + (\rho \cos \varphi)y + (\rho \sin \varphi)z + d_2 \\ z' &= a_3x - (\rho \sin \varphi)y + (\rho \cos \varphi)z + d_3 \end{aligned} \right\} a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3, \rho, \varphi \in \mathbb{R} \quad (2.3.5)$$

$\Delta = a_1\rho^2 \neq 0$ olan 8-parametrel dönüşümü elde edilir. Eğer $a_1 = \rho = 1$ alınırsa $\Delta = a_1\rho^2 = 1$ olacağından (2.3.5) dönüşümü;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + d_1 \\ y' &= a_2x + (\cos \varphi)y + (\sin \varphi)z + d_2 \\ z' &= a_3x - (\sin \varphi)y + (\cos \varphi)z + d_3 \end{aligned} \right\} a_2, a_3, d_1, d_2, d_3, \varphi \in \mathbb{R} \quad (2.3.6)$$

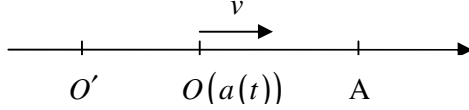
bir hareket dönüşümü olur. (2.3.6) denklemiyle verilen hareket dönüşümüne Galile uzayında hareket dönüşümü denir (Röschel, 1984).

Geometrideki düzlemsel ve uzaysal hareket ile mekanikteki doğrusal hareket arasında yakın bir ilişki vardır. Aşağıdaki kısımda bu ilişki açıklandı.

2.3.5. Doğrusal Hareket

Bir ℓ doğrusu verilsin. Bu doğru üzerinde hareketli bir $A = A(x)$ noktası

alınırsa, x koordinatı her bir anda $x = x(t)$ şeklinde t zamanının bir fonksiyonu olur. Bu doğru üzerinde O' merkezli sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemi ve O merkezli hareketli $\{O; x\}$ koordinat sistemini göz önüne alınsın. Hareketli $\{O; x\}$ koordinat sisteminin O başlangıç noktası, sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre v hızıyla hareket etsin.



Şekil 2.3.1. Doğrusal Hareket (Yaglom, 1979)

Bu durumda hareketli O noktasının, sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre koordinatı $a(t)$ ise;

$$a(t) = a + vt \quad (2.3.7)$$

şeklinde olur. Burada t zaman parametresi ve a ise O noktasının $t=0$ anındaki koordinatıdır. O halde hareketli bir A noktasının sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{O; x\}$ koordinat sistemine göre koordinatı sırasıyla x' ve x ise bu koordinatlar arasında;

$$x' = x + a(t) \quad (2.3.8)$$

bağıntısı vardır. (2.3.7) eşitliği (2.3.8) denkleminde yazılırsa;

$$x' = x + vt + a \quad (2.3.9)$$

elde edilir. Eğer $t=0$ noktasındaki zaman b ise bitiş zamanı da t' ise zamanlar arasında;

$$t' = t + b \quad (2.3.10)$$

bağıntısı vardır. Sonuç olarak koordinatlar ve zamanlar arasında ;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + vt + a \\ t' &= t + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.11)$$

bağıntıları vardır.

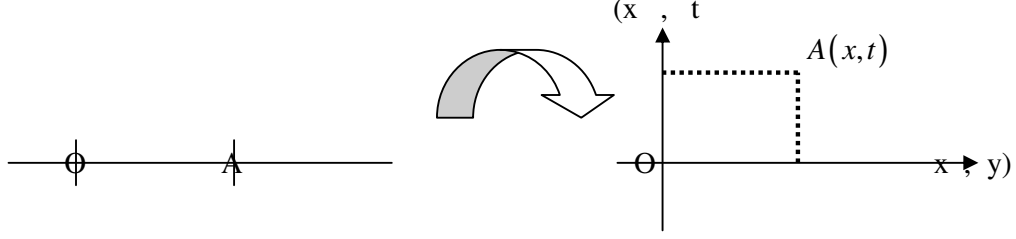
2.3.6. Tanım:

(2.3.11) denklemleriyle verilen dönüşümlere doğrusal hareketteki **Galile Dönüşümleri** denir (Yaglom, 1979).

Eğer ℓ doğrusu üzerindeki harekette A noktasının koordinatını y ile ve zaman parametresi de x ile gösterilirse; Galile düzleminde hareket dönüşümleri;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + b, \\ y' &= vx + y + a \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12)$$

denklemleriyle bellidir. (2.3.12) denklemleri doğrusal bir harekete karşılık gelir, fakat Galile düzlemini belirtir (şekil 2.3.2).



Şekil 2.3.2. Galile Düzlemi (Yaglom, 1979)

2.3.7. Tanım:

(2.3.12) denklemleriyle verilen Galile düzlemindeki hareket dönüşümleri, ℓ doğrusu üzerindeki $\{O_1; y_1\}$ koordinat sisteminin O_1 merkezinin v hızıyla hareketini ifade eden bir

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= vx + y \end{aligned} \right\} \quad \text{veya} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= x + vt, \\ t_1 &= t \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12a)$$

burkulma dönüşümü (shear) ile, O noktasını O' noktasına götüren (zaman orijinindeki bir değişimle ifade edilen) bir;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_1 + b, \\ y' &= y_1 + a \end{aligned} \right\} \quad \text{veya} \quad \left. \begin{aligned} x' &= x_1 + a, \\ t' &= t_1 + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12b)$$

öteleme dönüşümünün bileşkesidir (Yaglom, 1979).

2.3.8. Düzlemsel Hareket:

Galile uzayında hareket dönüşümleri, düzlemsel harekete karşılık gelen dönüşümlerdir. Eğer $A(x, y)$ noktası düzlemde hareket ederse x ve y koordinatları her bir anda $x = x(t)$, $y = y(t)$ şeklinde t zamanının fonksiyonu olurlar.

Düzlemde bir A noktasının sabit $\{O'; x', y'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{O; x, y\}$ koordinat sistemine göre koordinatları sırasıyla (x', y') ve (x, y) olsun. O noktasının O' noktasına göre koordinatı (a, b) ve x eksenini ile x' eksenini arasındaki açı

da α (yani $\angle(Ox, O'x') = \alpha$) olsun. Bu durumda A noktasının koordinatları arasında;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.13)$$

bağıntısı vardır. Eğer O başlangıç noktası eğim açısı β olan bir ℓ doğrusu ($\angle(O'x', \ell) = \beta$) boyunca v hızıyla doğrusal hareket yaparsa; bu durumda $O(a(t), b(t))$ noktasının koordinatları;

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= (v \cos \beta)t + a, \\ b(t) &= (v \sin \beta)t + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.14)$$

şeklinde. (2.3.14) eşitlikleri (2.3.12) denklemlerinde yazılırsa; sabit $\{O'; x', y'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{O; x, y\}$ koordinat sistemine göre A noktasının koordinatları arasındaki bağıntı;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

olarak elde edilir. Eğer $t=0$ anındaki zaman d ve hareketin bitimindeki zamanda t' ise zamanlar arasında;

$$t' = t + d \quad (2.3.16)$$

bağıntısı vardır. O halde $\{x', y', t'\}$ ve $\{x, y, t\}$ değişkenleri arasında;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b, \\ t' &= t + d \end{aligned} \right\} \quad (2.3.17)$$

eşitlikleri vardır.

2.3.9.Tanım(Galile Rölativite Prensibi):

(2.3.17) eşitlikleriyle belli dönüşümler altında değişmez olan özelliklere mekaniksel olarak anlamlıdır denir. Bu dönüşümlere Galile rölativite (görecelilik) prensibi denir. Dolayısıyla Galile rölativite prensibinin geometrisi; (2.3.17) dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir. Bu geometriye kısaca Galile geometrisi denir (Yaglom, 1979).

Bu dönüşümler iki şekilde yorumlanır.

1.Görüş: (2.3.17) dönüşümleri yeri $A(x, y)$ noktası olan bir $A(x, y, t)$ olayından, yeri $A'(x', y')$ noktası olan bir $A'(x', y', t')$ olayına geçişi ifade etmektedir. Burada $A'(x', y')$ noktası $A(x, y)$ noktasına göre v hızıyla hareket etmektedir. Ayrıca α açısı $t=0$ anında $A'O'$ ile AO arasındaki açı ve β açısı da A' noktasının yörüngesi ile x -ekseni arasındaki açıdır. O noktasının $\{x', y'\}$ koordinat sistemine göre $t=0$ anındaki koordinatları (a, b) ve d ise $t=0$ anındaki zamanı gösterir.

2. Görüş:

(2.3.17) dönüşümleri $\{x, y, t\}$ ve $\{x', y', t'\}$ çatıları arasındaki (koordinat sistemleri arasındaki) bağıntıları ifade eder. Burada $\alpha, \beta, V, a, b, d$ parametreleridir.

Eğer (2.3.17) dönüşümlerinde;

$$\begin{aligned} t &\rightarrow x, \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z \\ t' &\rightarrow x', \quad x' \rightarrow y', \quad y' \rightarrow z' \end{aligned}$$

değişiklikleri yapılırsa;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + d, \\ y' &= (v \cos \beta)x + y \cos \alpha + z \sin \alpha + a, \\ z' &= (v \sin \beta)x - y \sin \alpha + z \cos \alpha + b \end{aligned} \right\} \quad (2.3.18)$$

elde edilir. Burada ayrıca $v \cos \beta = c$, $v \sin \beta = e$ denilirse;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + d, \\ y' &= cx + y \cos \alpha + z \sin \alpha + a, \\ z' &= ex - y \sin \alpha + z \cos \alpha + b \end{aligned} \right\} \alpha, a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \quad (2.3.19)$$

şeklinde altı parametrelili bir dönüşüm elde edilir. (2.3.19) denklemleriyle verilen dönüşüme 3-boyutlu Galile uzayında hareket dönüşümü denir (Yaglom, 1979). Sonuç olarak (2.3.6) eşitlikleriyle verilmiş olan Galile uzayında hareket dönüşümleri, mekaniksel bakış açısıyla elde edilmiş olur (Yaglom, 1979).

2.3.10.Tanım:

(2.3.17) ve (2.3.19) denklemleriyle verilen 3-boyutlu Galile uzayındaki hareket;

a)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ z_1 &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{veya} \left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ t_1 &= t \end{aligned} \right\} \quad (2.3.19a)$$

denklemleriyle verilen x -ekseni (veya t -ekseni) etrafında α açılık bir **dönme hareketi**,

b) xoy düzlemini sabit bırakan her bir π düzlemini kendisine paralel ve vt ($v = \|\vec{v}\|$) uzaklığındaki, $\vec{v} = (v \cos \beta, v \sin \beta, 0)$ vektörü yönündeki düzleme dönüştüren;

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1, \\ y_2 &= y_1 + (v \cos \beta) x_1, \\ z_2 &= z_1 + (v \sin \beta) x_1 \end{aligned} \right\} \text{ veya } \left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + (v \cos \beta) t_1, \\ y_2 &= y_1 + (v \sin \beta) t_1, \\ t_2 &= t_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.19b)$$

şeklindeki bir **burkulma hareketi** ile

c)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_2 + d, \\ y' &= y_2 + a, \\ z' &= z_2 + b \end{aligned} \right\} \text{ veya } \left. \begin{aligned} x' &= x_2 + a, \\ y' &= y_2 + b, \\ t' &= t_2 + d \end{aligned} \right\} \quad (2.3.19c)$$

denklemleriyle verilen, öteleme vektörü (a, b, d) vektörü olan bir **öteleme hareketinin** bileşkesidir (Yaglom, 1979).

2.3.11. Sonuçlar ve Öklidyen Geometri ile Karşılaştırmalar:

1. Öklid düzlemde bir A noktasının sabit $\{O'; x', y'\}$ koordinat sistemine göre koordinatı (x', y') ve hareketli $\{O; x, y\}$ koordinat sistemine göre koordinatı da (x, y) olsun. O noktasının koordinatı (c, d) ve x eksenine ile x' eksenine arasındaki açı α ($\angle x, x' = \alpha$) ise bu durumda A noktasının koordinatları arasındaki bağıntılar;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + c, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + d \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

şeklinde. Bu dönüşümlere Öklidyen geometride düzlemsel hareket dönüşümleri denir. Bu düzlemsel hareket;

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20a)$$

şeklindeki α açılık bir dönme hareketiyle,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_1 + c, \\ y' &= y_1 + d \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20b)$$

bağıntılarıyla verilen bir öteleme hareketinin bileşkesidir (Hacısalıhoğlu, 1998).

2. Öklid düzlemde hareket; bir dönme hareketiyle bir öteleme hareketinin bileşkesi iken, düzlemdeki harekete karşılık gelen 3-boyutlu Galile geometrisinde hareket; bir dönme, bir burkulma ve bir öteleme hareketinin bileşkesidir.

3. Bir doğrusal harekete karşılık gelen Galile düzlemindeki geometri ise (2.3.1) denklemleriyle verilen dönüşümler altında değişmez olan (invariant) özellikleri inceler.

Örneğin y -eksenine paralel doğruları, y -eksenine paralel doğrulara dönüşmesi özelliği Galile geometrisinde bir geometrik özellik iken Öklid geometrisinde bir geometrik özellik değildir. Doğru olma, doğruların paralelliği, doğrudaş olan doğru parçalarının uzunlukları oranı ve şekillerin alanı Öklidyen geometride olduğu gibi Galile Geometrisinde de geometrik özelliklerdir.

2.4. Galile Düzleminde Uzaklık ve Açılar:

2.4.1.Tanım(Uzaklık):

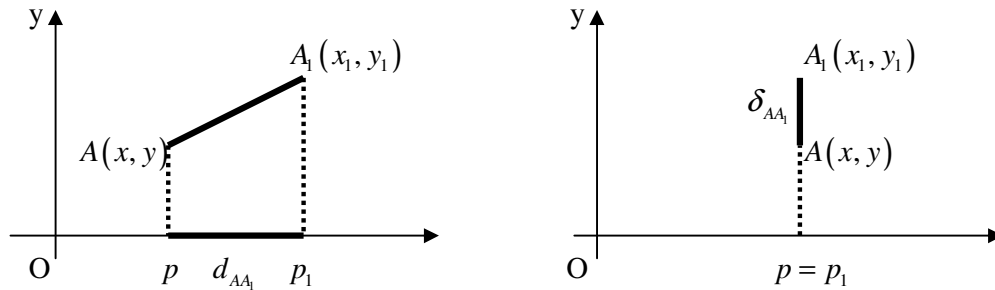
Galile düzleminde $A(x, y)$ ve $A_1(x_1, y_1)$ noktaları verilsin. $A(x, y)$ noktasının x -ekseni üzerine izdüşümü $P(x, 0)$ ve $A_1(x_1, y_1)$ noktasının x -ekseni üzerine izdüşümü $P_1(x_1, 0)$ ise $\overline{PP_1}$ işaretli uzunluğuna $A(x, y)$ noktasıyla $A_1(x_1, y_1)$ noktası arasındaki uzaklık denir. Yani iki nokta arasındaki uzaklık

$$d(A(x, y), A_1(x_1, y_1)) = d(P(x, 0), P_1(x_1, 0)) = x_1 - x \quad (2.4.1)$$

şeklinededir. Eğer $x = x_1$ ise bu durumda $A(x, y)$ ve $A_1(x, y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y \quad (2.4.2)$$

şeklinde bellidir. Bu uzaklığa özel uzaklık denir (Yaglom, 1979).



Şekil 2.4.1.Galile Uzaklık (Yaglom, 1979)

2.4.2.Sonuç:

a)

$d(A, A_1) = -d(A_1, A)$ şeklinde olup bu geometride uzaklığın sıfır ve negatif olabileceğini gösterir.

b)

$$\left. \begin{array}{l} x' = x + b, \\ x_1' = x_1 + b \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 - x = x_1' - x' \Rightarrow d(A', A_1') = d(A, A_1)$$

olduğundan Galile düzleminde (2.3.12) denklemleriyle verilen dönüşümler altında uzaklık korunur. Yani uzaklık bir geometrik özelliktir.

c) Eğer $d(A, A_1)$ uzaklığı sıfır ise bu durumda A ve A_1 noktaları y -eksenine paralel olan aynı doğrular üzerinde bulunur. Bu durumda bu iki nokta arasındaki uzaklık δ_{A, A_1} şeklindeki özel uzaklık olur.

d) Eğer $A(x, y)$ noktası ve $A_1(x_1, y_1)$ noktasının apsisleri eşitse bu noktalar (2.3.12) denklemleriyle verilen dönüşümler altında;

$$\begin{aligned} x' &= x_1' = x + b, \\ y' &= y + vx + a, \\ y_1' &= y_1 + vx + a \end{aligned}$$

olacak şekilde $A'(x', y')$ ve $A_1'(x_1', y_1')$ noktalarına dönüşür. Bu durumda A' ve A_1' noktaları arasındaki uzaklık bu noktaların apsisleri eşit olduğundan özel uzaklıkla tanımlanır. O halde;

$$\delta(A', A_1') = y_1' - y' = vx + y_1 + a - (vx + y + a) = y_1 - y = \delta(A, A_1)$$

olduğundan özel uzaklık bir geometrik özelliktir.

e) Eğer $x_1 - x \neq 0$ ise $y_1' - y' \neq y_1 - y$ olduğu açıktır.

f) Galile geometrisinde A ve B iki noktanın çakışık olması için gerek ve yeter koşul bunlar arasındaki d_{AB} ve δ_{AB} uzaklıklarının her ikisinin de sıfır olmasıdır. $\square$

2.4.3.Tanım (Çember):

Bir düzlemde sabit bir $Q(a,b)$ noktasından mutlak değerce sabit r uzaklığında olan $M(x,y)$ noktaların geometrik yerine $Q(a,b)$ merkezli $r \geq 0$ yarıçaplı çember denir.

O halde Galile geometrisinde çemberin denklemi;

$$d(Q(a,b), M(x,y)) = x - a = |r| \quad (2.4.3)$$

eşitliğiyle bellidir. (2.4.3) denklemi;

$$d_{QM}^2 = (x-a)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 = r^2$$

şeklinde yazılıp $p = -a \wedge q = a^2 - r^2$ denirse Galile düzleminde çemberin genel denklemi;

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.4.4)$$

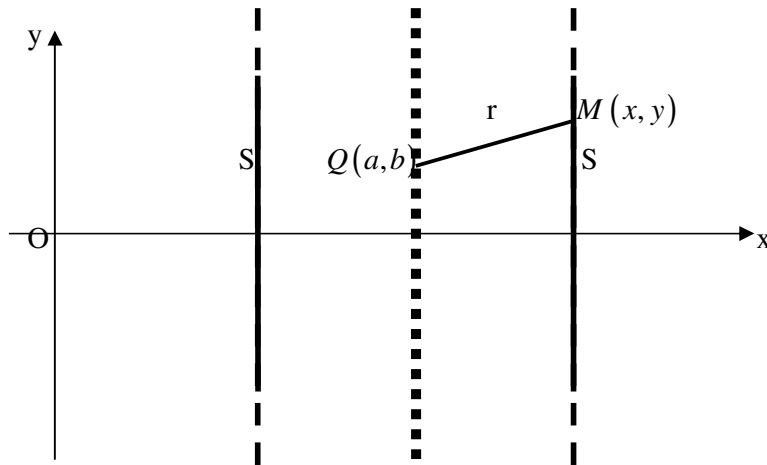
olarak elde edilir (Yaglom, 1979).

2.4.4.Sonuç:

Eğer (2.4.3) eşitliği çözülürse;

$$x - a = |r| \Rightarrow x = r + a \vee x = -r + a \quad (2.4.5)$$

şeklinde olur. Bu ise Galile düzleminde çemberin $Q(a,b)$ noktasına uzaklıkları r birim olan noktalardan, yani y -eksenine paralel iki doğrudan oluştuğunu gösterir (şekil 2.4.2).



Şekil 2.4.2.Galile Çember (Yaglom, 1979)

2.4.5.Sonuç:

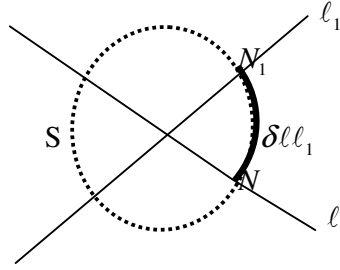
Galile çemberinin sonsuz tane merkezi vardır. $Q(a,b)$ noktasından geçen ve çemberi oluşturan doğrulara paralel olan doğru üzerindeki bütün noktalar çemberin merkezidirler.

2.4.6.Sonuç:

Eğer $r=0$ ise çember denklemini sadece merkez noktaları sağlar ki bu doğruların çakışık olması demektir.

2.4.7.Tanım (Açı):

Bir düzlemde bir Q noktasında kesişen iki ℓ ve ℓ_1 doğruları verilsin. Q merkezli Öklid birim çemberin bu doğruları kestiği noktalar arasındaki yay uzunluğuna; bu iki doğru arasındaki açının ölçüsü denir ve $\delta_{\ell\ell_1}$ sembolü ile gösterilir (şekil 2.4.3).



Şekil 2.4.3.Öklid Açısı (Yaglom, 1979)

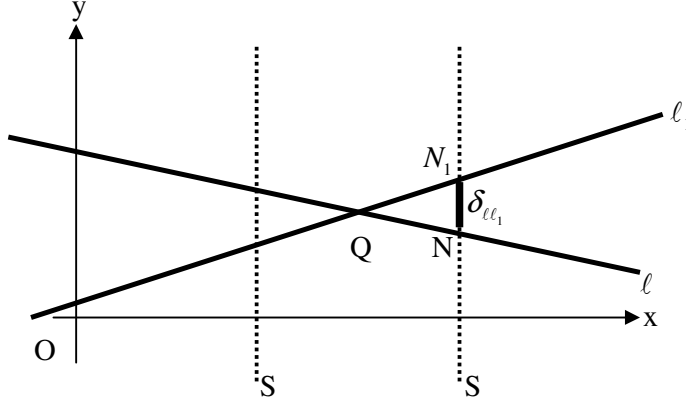
O halde Galile geometrisindeki açı tanımına geçilirse:

2.4.8.Tanım:

Galile düzleminde bir $Q(a,b)$ noktasında kesişen iki ℓ ve ℓ_1 doğruları verilsin. Q merkezli Galile birim çemberin bu doğruları kestiği noktalar arasındaki yay uzunluğuna; bu iki doğru arasındaki açının ölçüsü (Galile anlamında) denir ve $\delta_{\ell\ell_1}$ sembolü ile gösterilir. Sonuç olarak Q noktasında kesişen iki ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki açının ölçüsü şu şekilde bulunur. $Q(a,b)$ noktasından sağa 1 birim uzaklığında olan özel doğru (yani y -eksenine paralel doğru) çizilir. Bu özel doğru ℓ ve ℓ_1 doğrularını sırasıyla N ve N_1 noktalarında kesiyorsa, $\overline{NN_1}$ işaretli uzunluğu bu doğrular arasındaki açının ölçüsü olur (şekil 7). Yani

$$\delta_{\ell\ell_1} = \overline{NN_1} = \delta_{NN_1} = y_1 - y \quad (2.4.6)$$

şeklindedir (Yaglom, 1979).



Şekil 2.4.4. Galile Açısı (Yaglom, 1979)

2.4.9. Sonuç :

ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki açının, ℓ_1 ve ℓ doğruları arasındaki açının ters işaretlisi olduğu (2.4.6) eşitliğinden açıktır.

2.4.10. Sonuç:

Galile Düzleminde doğrular arasındaki açı geometrik bir özelliktir (Yaglom, 1979).

2.4.11. Sonuç:

Galile düzleminde doğrular arasındaki açı bu doğruların eğimleri arasındaki farka eşittir.

İspat:

Eğer $Q(x_0, y_0)$ kesişen iki doğru için ℓ doğrusu $y = kx + s$ ve ℓ_1 doğrusunda $y = k_1x + s_1$ denklemiyle verilirse bu doğruların birim çemberi kestikleri noktaların apsisi $x = x_0 + 1$ olur (şekil 2.4.4). Yani N ve N_1 noktaları

$$\begin{aligned} N &= (x_0 + 1, k(x_0 + 1) + s), \\ N_1 &= (x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + s_1) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

şeklindedir. Buna göre ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki açı;

$$\delta_{\ell\ell_1} = \overline{NN_1} = y_1 - y = k_1(x_0 + 1) + s_1 - (k(x_0 + 1) + s) \quad (2.4.7a)$$

olup $Q(x_0, y_0)$ noktası doğruların arakesit noktası olduğundan her iki doğru denklemini sağlar. Dolayısıyla;

$$y_0 = (kx_0 + s) \wedge y_0 = (k_1x_0 + s_1) \quad (2.4.7b)$$

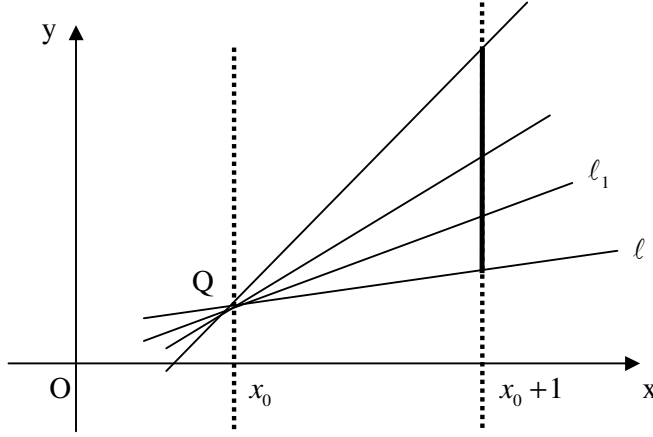
olur. Bu eşitlikler (2.4.7a) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\delta_{l_l} = k_1 - k \quad (2.4.8)$$

eşitliği elde edilir. $\square$

2.4.12.Sonuç:

Eğer ℓ_1 doğrusu $Q(x_0, y_0)$ noktasından geçen özel doğruya yaklaşacak şekilde $Q(x_0, y_0)$ noktası etrafında dönerse $\overline{NN_1}$ uzunluğu sınırsız olarak büyüyeceğinden δ_{l_l} açısı sınırsız olarak büyür (şekil 2.4.5).



Şekil 2.4.5.Galile Açısının Değişimi (Yaglom, 1979)

2.4.13.Sonuç:

Galile düzleminde özel doğrular (yani y -eksenine paralel olan doğrular) bütün doğrulara diktir (Yaglom, 1979).

2.4.14.Sonuç (Paralel doğrular arasındaki uzaklık):

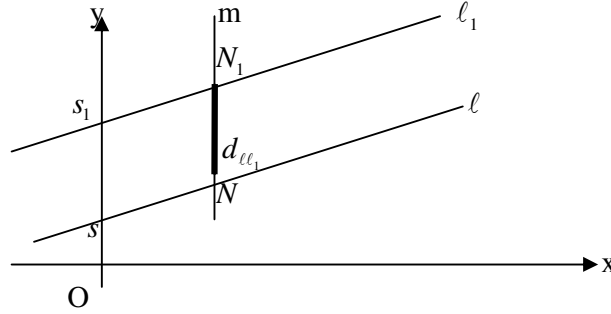
Eğer ℓ ve ℓ_1 doğruları paralel ise bunlar arasındaki δ_{l_l} açısı sıfır olur. Bu durumda paralel olan ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki d_{l_l} uzaklığı tanımlanabilir. Bu uzaklık özel m doğrusunun bu doğruları kestiği N ve N_1 noktaları arasındaki yönlü uzaklık olarak tanımlanır. N ve N_1 noktaları özel m doğrusu üzerinde olduğundan bunlar arasındaki uzaklık δ_{NN_1} özel uzaklığı olur. Eğer doğru denklemleri $y = kx + s$ ve $y = kx + s_1$ şeklinde ise doğrular arasındaki uzaklık;

$$d_{l_l} = \delta_{NN_1} = s_1 - s \quad (2.4.9)$$

şeklinde dir. Öklid düzlemde aynı denklemlerle verilmiş paralel doğrular arasındaki uzaklık

$$d_{l_1} = \frac{s_1 - s}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2.4.9a)$$

şeklindedir (şekil 2.4.6), (Yaglom, 1979).



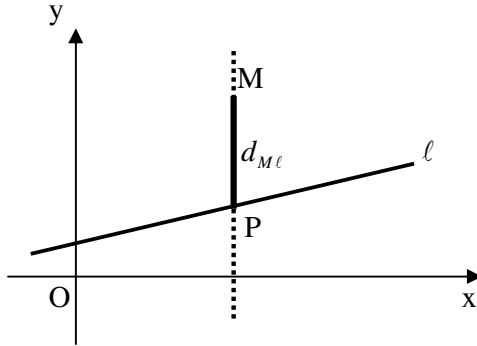
Şekil 2.4.6.Paralel Doğrular Arasındaki Uzaklık (Yaglom, 1979)

2.4.14.Sonuç (Noktanın doğruya olan uzaklığı):

Bir M noktası ve bir ℓ doğrusu verilsin. M noktasından çizilen özel doğrunun bu ℓ doğrusunu kestiği nokta, P noktası olsun. Bu durumda M noktasının ℓ doğrusuna uzaklığı, M noktasının P noktasına olan özel uzaklığıdır. Yani ;

$$d_{M\ell} = \delta_{MP} \quad (2.4.10)$$

şeklindedir (şekil 2.4.7), (Yaglom, 1979). .



Şekil 2.4.7.Bir noktanın bir doğruya Galile uzaklığı (Yaglom, 1979)

2.4.15.Sonuç:

Eğer ℓ doğrusunun denklemi $y = kx + s$ ve M noktasının koordinatları da $M(x_0, y_0)$ ise ℓ doğrusu ile M noktasından geçen özel doğrunun arakesit noktası olan P noktasının koordinatları $(x_0, kx_0 + s)$ olur. O halde (2.4.10) eşitliğinden M noktasının ℓ doğrusuna uzaklığı,

$$d_{M\ell} = \delta_{MP} = kx_0 + s - y_0 \quad (2.4.10a)$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$kx + s - y = 0 \quad (2.4.10b)$$

eşitliğiyle verilen ℓ doğrusuna $M(x_0, y_0)$ noktasının uzaklığı, noktanın koordinatları (2.4.10b) eşitliğiyle verilen doğru denkleminde yazılarak bulunur.

Öklid düzlemde $M(x_0, y_0)$ noktasının $kx + s - y = 0$ denklemiyle verilmiş olan doğruya en kısa uzaklığı ise

$$d = \frac{|kx_0 + s - y_0|}{\sqrt{1 + k^2}} \quad (2.4.10c)$$

şeklindedir.

2.4.16.Sonuç:

Galile geometrisindeki kavramlarla bir ℓ doğrusu üzerindeki hareket (mekanik) arasındaki ilgi açıklanırsa:

1) Galile düzleminde $A(x, y)$ noktasının doğrusal harekette karşılığı;

$$\left. \begin{array}{l} x = t, \\ y = x \end{array} \right\}$$

olan (t, x) olayıdır. Dolayısıyla $A(x, y)$ noktasının x koordinatı (t, x) olayında zaman koordinatı, y koordinatı ise uzay koordinatını verir.

2) Galile geometrisinde A ve A_1 noktaları arasındaki d uzaklığı, A ve A_1 noktalarına karşılık gelen olaylar arasındaki zaman aralığı, yani $(t_1 - t)$ dir. Eğer bu zaman aralığı sıfır ise $t_1 = t$ olur ki, bu iki olayın aynı sürede meydana geldiğini, yani eş zamanlı olaylar olduğunu gösterir. Bu durumda δ özel uzaklığı tanımlanır.

3) İki olay arasında tanımlanan d uzaklığı ve iki eş zamanlı olay arasında tanımlanan δ özel uzaklığı birbirleriyle karşılaştırılmazlar. d uzaklığının birimi zaman (saat, dakika, sn,...) birimi iken δ özel uzaklığının birimi ise uzaklık (km, m, cm, ..vb.) birimidir.

4) Galile düzleminde $y = kx + s$ denklemiyle verilen ℓ doğrusunun doğrusal harekette karşılığı $x = kt + s$ şeklindedir. Bu ise başlangıç noktası $(t = 0)$ anındaki s olan ve k hızıyla hareket eden bir noktanın doğrusal hareketine karşılık gelir.

5) $y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ denklemleriyle verilen ℓ ve ℓ_1 doğruları arasındaki açı $\delta_{ll_1} = k_1 - k$ şeklinde olup doğrusal hareketteki karşılığı, bir doğru üzerinde k ve k_1

hızıyla hareket eden iki noktanın hızları farklıdır. Yani bir noktanın diğer noktaya göre hızını (relatif hız) belirtir.

6) Bir A noktasından (olay) bir ℓ doğrusuna uzaklık ; M olayı ile ℓ doğrusu üzerinde aynı zamana sahip noktanın uzaklığı farklıdır (şekil 2.4.7).

7) Sabit $Q(a,b)$ noktasına (olayına) mutlak değerce uzaklığı $r \geq 0$ sayısı olan tüm noktaların kümesi çemberdir. Bunun doğrusal hareketteki karşılığı sabit olaydan r zaman birimi önce veya sonra olan tüm olayların kümesidir.

2.5.Galile Geometrisinde Eğrilik:

Bu bölümde Galile geometrisinde eğrilerle ilgili bazı temel bilgiler verildi.

2.5.1.Tanım (Eğriliğin Hesaplanması):

Burada $y = f(x)$ denkleminde verilen düzlemsel γ eğrisinin $A(x,y)$ noktasındaki ρ eğriliği ve r eğrilik yarıçapı hesaplandı . Eğri üzerinde iki ardışık yani sonsuz yakın A ve A_1 noktaları ele alınsın. T ve T_1 eğrinin sırasıyla A ve A_1 noktalarındaki teğetleri olsun. Eğer bu teğetlerin x -ekseniyle yaptığı açılar φ ve φ_1 ise teğetler arasındaki açı

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$$

olur. A ve A_1 noktaları arasındaki yay uzunluğu $\widehat{AA_1} = \Delta s$ ise bu durumda $A(x,y)$ noktasındaki ρ eğriliği

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad (2.5.1)$$

şeklinde olur. Yani bir noktadaki eğrilik sonsuz yakın teğetler arasındaki açının, sonsuz yakın noktalar arasındaki yay uzunluğuna oranının limit değeridir.

2.5.2.Tanım (Galile Geometrisinde yay uzunluğu):

A ve B noktalarını birleştiren eğrinin $\widehat{AB}$ yayını $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ noktaları yardımıyla parçalara bölünürse toplam yay uzunluğu Δs olmak üzere;

$$\Delta s = \widehat{AA_1} + \widehat{A_1A_2} + \dots + \widehat{A_{n-1}A_n} \cong \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{AB} \quad (2.5.2)$$

şeklinde olup, yaklaşık olarak toplam kiriş uzunluğuna ($\overline{AB}$) eşittir. Bu durumda

$$\max(\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}) \rightarrow 0 \text{ için limit alınırsa;}$$

$$\Delta s = \overline{AB} \quad (2.5.3)$$

olur (şekil 2.5.1), (Yaglom, 1979).

2.5.3.Tanım (Galile Düzleminde Eğrilik):

Galile düzleminde $y = f(x)$ denklemiyle verilen bir γ eğrisi üzerinde sonsuz yakın $A(x, y)$ ve $A_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ noktalarını ele alınsın. Bu noktalardan çizilen teğetlerin eğimi; eğrinin birinci türevinin bu noktadaki değeri olduğundan, A ve A_1 noktalarındaki teğetlerin eğimleri sırasıyla $f'(x)$ ve $f'(x + \Delta x)$ şeklindedir. O halde teğetler arasındaki açı (2.4.8) eşitliğinden dolayı eğimler arasındaki farka eşittir. Yani

$$\Delta\varphi = f'(x + \Delta x) - f'(x) \quad (2.5.4)$$

şeklindedir.

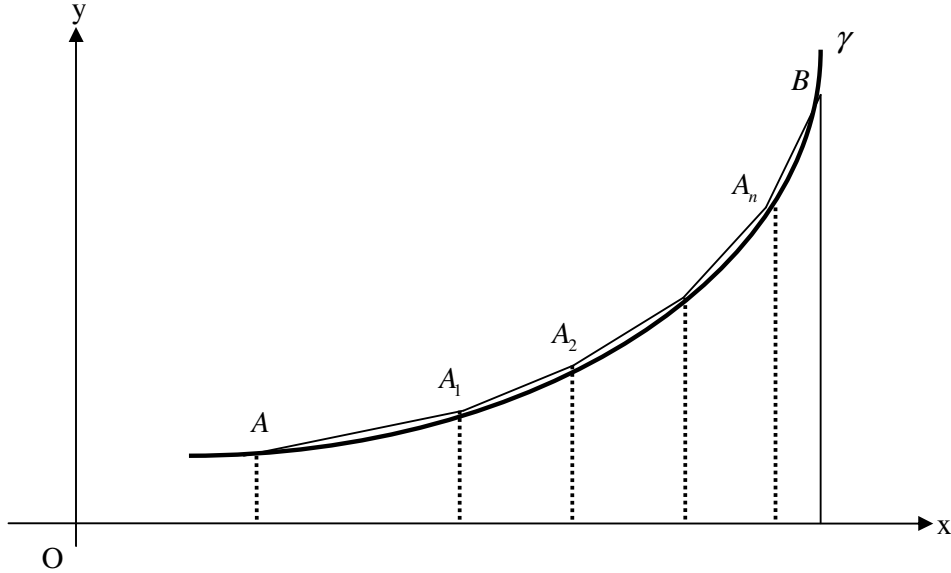
A ve A_1 noktaları arasındaki Galile yay uzunluğu $\widehat{AA_1} = \Delta s$ ise bu durumda (2.5.3) eşitliğinden

$$\Delta s = \widehat{AA_1} = (x + \Delta x) - x = \Delta x \quad (2.5.5)$$

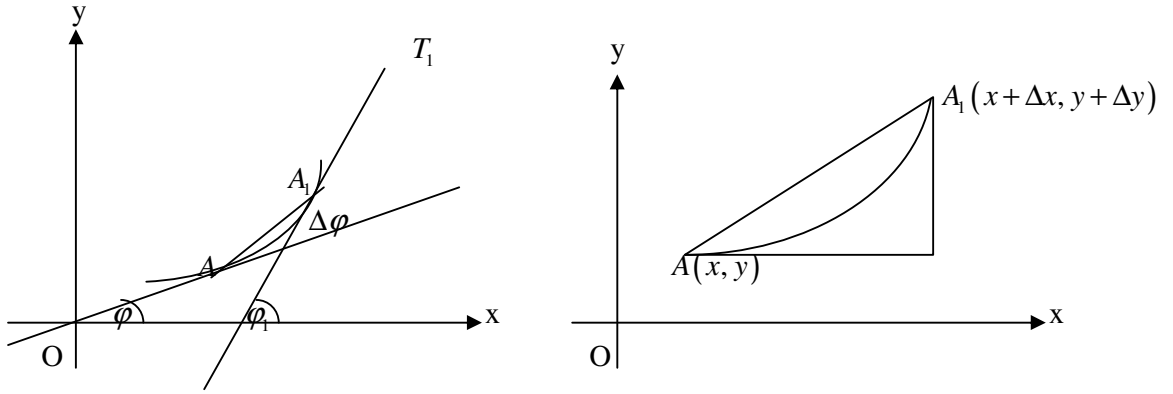
bulunur. (2.5.5) eşitliği, (2.5.1) eşitliğinde yerine yazılırsa $A(x, y)$ noktasındaki eğrilik,

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) \quad (1.5.6)$$

olur(şekil 2.5.2).



Şekil 2.5.1.Yay uzunluğu (Yaglom, 1979)



Şekil 2.5.2.Eğrilik (Yaglom, 1979)

2.5.4.Sonuç:

Galile düzleminde $y = f(x)$ denklemiyle verilen düzlemsel γ eğrisinin $A(x, y)$ noktasındaki ρ eğriliği;

$$\rho = f''(x) \quad (2.5.7)$$

şeklinde olup eğrinin ikinci türevine eşittir. Dolayısıyla eğrilik yarıçapı ise

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f''(x)} \quad (2.5.8)$$

olarak elde edilir.

İspat: (2.5.6) eşitliğinden açıktır.

Öklidyen düzleminde $y = f(x)$ denklemiyle verilen düzlemsel γ eğrisinin $A(x, y)$ noktasındaki ρ eğriliği ise;

$$\rho = \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

olarak tanımlanır (Do Carmo, 1976).

2.5.5.Tanım:

Galile düzleminde eğriliği sabit olan eğriye **çemberimsi** (cycle) denir (Yaglom, 1979).

2.5.6.Sonuç:

Galile düzleminde bir çemberimsi eğrisinin en genel denklemi, $y = f(x)$ olmak üzere

$$ax^2 + bx + cy + d = 0 \quad (2.5.9)$$

şeklindedir. Burada a, b, c, d sabit sayılardır.

İspat:

Çemberimsi eğrisinin eğriliği sabit olduğundan $\rho = f''(x) = k$ sabiti olsun. O halde integral alınırsa;

$$y = k \frac{x^2}{2} + lx + m \quad (2.5.10)$$

elde edilir. Eğer denklem $-c$ sabiti ile çarpılırsa ve $-c \frac{k}{2} = a$, $-cl = b$, $-cm = d$ denirse (2.5.9) denklemi elde edilir.

2.5.7.Sonuç:

Galile geometrisinde bir çemberimsi eğrisinin verilmesi için üç bağıntı verilmelidir. Örneğin cycle üzerinde üç nokta verilmelidir.

2.5.8.Sonuç:

1) Eğer (2.5.9) denkleminde $c \neq 0, a \neq 0$ ise denklem

$$y = a_1 x^2 + b_1 x + d_1 \quad (2.5.11)$$

şekline indirgenir ki bu bir paraboldür.

2) Eğer (2.5.9) denkleminde $c = 0, a \neq 0$ ise denklem

$$ax^2 + bx + d = 0$$

olur. Bu durumda $\Delta = b^2 - 4ad$ olmak üzere,

a) $\Delta > 0$ ise iki reel kök vardır yani denklem y -eksenine paralel iki doğru belirtir ki bu ise Galile çemberidir.

b) $\Delta = 0$ ise çakışık iki kök olur. Bu durumda denklem yarıçapı sıfır olan Galile çemberi belirtir.

3) Eğer (2.5.9) denkleminde $c \neq 0, a = 0$ ise denklem

$$bx + cy + d = 0$$

şeklinde olur ki bu denklem bir adi doğru belirtir.

2.5.9.Sonuç:

Galile düzlemindeki bir eğri $y = f(x)$ denklemiyle verilir. Galile düzlemi doğru üzerindeki harekete karşılık geldiğinden $y = x \wedge x = t$ aldığımızda x fonksiyonu t zamanında hareketli P noktasının yerini belirtir. Yani $x = f(t)$ olur. Eğer

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ denklemiyle verilen z çemberimsi için $y = x \wedge x = t$ dönüşümleri yapılırsa,

$$x = f(t) = at^2 + bt + c \quad (2.5.12)$$

elde edilir.

2.5.10.Sonuç:

Hareketli noktanın hızı v ise

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

şeklinde olduğundan (2.5.12) eşitliğinde türev alınır;

$$v = \frac{dx}{dt} = 2at + b \quad (2.5.12a)$$

elde edilir. Bu hareket için w ivmesi de,

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

olduğundan (2.5.12a) eşitliğinden

$$w = \frac{dv}{dt} = 2a \quad (2.5.12b)$$

olarak elde edilir.

2.5.11.Sonuç:

Bir doğru üzerindeki bir noktanın hareketini açıklayan (2.5.12) denkleminde elde edilen $w = 2a$ sabit ivmesi Galile düzlemindeki z çemberimsi eğrisinin eğriliğine eşittir.

İspat: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ denklemiyle verilen çemberimsi eğrisinin eğriliği (2.5.7) eşitliğinden

$$\rho = f''(x) = 2a$$

olarak bulunur. $\square$

2.5.12.Sonuç:

Çemberimsi eğrisinin negatif eğrilikli olması sabit negatif ivmeli harekete karşılık gelir.

2.5.13.Tanım:

3 – boyutlu Galile uzayında $A = (x, y, z)$ ve $B = (x_1, y_1, z_1)$ vektörleri verilsin.

Bu durumda bu vektörlerin Galile skaler çarpımı

$$\langle A, B \rangle_G = A.B = \begin{cases} xx_1 & , x \neq 0 \vee x_1 \neq 0 \\ yy_1 + zz_1 & , x = 0 \wedge x_1 = 0 \end{cases} \quad (2.5.12c)$$

şeklindedir (Yaglom, 1979).

2.5.14.Tanım:

Galile uzayında $A = (x, y, z)$ ve $B = (x_1, y_1, z_1)$ vektörleri verilsin. Eğer

$\langle A, B \rangle_G = 0$ ise bu vektörlere Galile anlamında diktirler denir.

2.5.15.Tanım (Norm):

$A = (x, y, z)$ vektörünün Galile normu; (2.6.1) eşitliğinden dolayı

$$\|A\|_G = \begin{cases} |x| & , x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , x = 0 \end{cases} \quad (2.5.13)$$

şeklindedir (Yaglom, 1979).

2.5.16.Tanım:

Bir $A = (x, y, z) \in G^3$ vektöründe $x=0$ ise A vektörüne izotropik, $x \neq 0$ ise izotropik değildir denir (Yaglom, 1979).

2.5.17.Tanım:

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow G^3, \alpha(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (2.5.14)$$

eğrisi verilsin. Burada $y, z: I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlarına α eğrisinin Galile koordinat fonksiyonları denir. (2.5.14) eşitliğinden türev alınırsa

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x)) \quad (2.5.15)$$

olur. (2.5.13) eşitliğiyle belli norm tanımından dolayı $\|\alpha'(x)\| = 1$ olur. Bu ise α eğrisinin Galile uzayında birim hızlı bir eğri olduğunu gösterir.

2.5.18.Tanım:

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere en az C^3 -sınıfından $\alpha: I \rightarrow G_3$,

$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ eğrisi verilsin. Bu durumda α eğrisinin ardışık iki türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= (1, y'(x), z'(x)), \\ \alpha''(x) &= (0, y''(x), z''(x)) \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

denklemleri elde edilir. $\alpha'(x)$ vektörü birim vektör olduğundan dolayı;

$$t(x) = (1, y'(x), z'(x)) \quad (2.5.17)$$

vektörü eğrinin teğet vektörü olarak tanımlanır. (2.5.16) denklemlerinden

$$\langle \alpha'(x), \alpha''(x) \rangle = 0$$

elde edilir. O halde $\alpha''(x)$ vektörü, (2.5.17) denklemiyle belli olan birim teğet vektörüne diktir. Bu durumda eğrinin normal vektörü; $\alpha''(x)$ vektörü yönündedir.

Bundan dolayı eğrinin $n(x)$ birim normal vektörü;

$$n(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G} \quad (2.5.18)$$

şeklinde olup, (2.5.13) ve (2.5.16) denklemlerinden

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, y''(x), z''(x)) \quad (2.5.19)$$

olarak elde edilir. Bunun bir sonucu olarak $b(x)$ birim binormal vektörü; $t(x)$ teğet vektörü ve $n(x)$ normal vektörüne dik bir birim vektör olacağından

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, -z''(x), y''(x)) \quad (2.5.20)$$

şeklinde seçilir. Bu şekilde seçilen $\{t(x), n(x), b(x)\}$ çatısına Galile uzayında birim hızlı eğriler için Frenet-Serret çatısı denir.

2.5.19.Önerme:

(1.3.9) denklemiyle verilmiş birim hızlı α eğrisinin Frenet-Serret elemanları t, n, b, κ, τ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} t(x) \\ n(x) \\ b(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \\ 0 & -\tau(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(x) \\ n(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

şeklindedir. Burada κ eğrilik ve τ burulma fonksiyonları

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)} \quad , \quad \tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)} \quad (2.5.22)$$

şeklindedir.

İspat:

(2.5.17), (2.5.18) ve (2.5.19) eşitliklerinden türev alınarak gerekli işlemler yapıldığında; Frenet-Serret formülleri elde edilir.

2.5.20.Tanım:

$$D(x) = \tau(x)T(x) + \kappa(x)B(x) \quad (2.5.23)$$

vektör alanına eğrinin Darboux vektör alanı denir (Röschel, 1984).

2.5.21.Tanım:

Bir doğrunun bir eğri üzerinde hareketiyle meydana gelen yüzeye regle yüzey denir. Yani doğru tarafından üretilen yüzeydir. Bu doğrulardan her birine yüzeyin üreteçleri ya da doğrultman doğruları, doğrunun üzerinde hareket ettiği eğriye de, dayanak eğrisi denir.

3-boyutlu Galile Uzayında bir regle yüzey

$$\phi(x, v) = \gamma(x) + va(x) \quad (2.5.24)$$

şeklindeki denklemle verilir ($v \in \mathbb{R}$, $\gamma, a \in C^3$). Burada γ eğrisi dayanak eğrisi, $a(x)$

vektörü de ana doğruların doğrultman vektörüdür. $\gamma(x) = (x, y, z)$ verildiğinde

$$\frac{d\gamma}{dx} = (1, \dot{y}, \dot{z})$$

olur. Bundan dolayı $\left\| \frac{d\gamma}{dx} \right\| = 1$ olup $x \neq 0$ parametresi yay-parametresidir. O halde

$$\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde ifade edilebilir.

Galile Uzayında regle yüzeyler üç tipe ayrılır:

1) Birinci tip regle yüzey denklemi

$$\begin{cases} \phi(x, v) = (x, y(x), z(x)) + v(1, a_2(x), a_3(x)), \\ y, z, a_2, a_3 \in C^3, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.5.25)$$

şeklinde verilir. Burada dayanak eğrisi $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$, $x \neq 0$ şeklinde olup düzlemsel olmayan bir eğridir ve doğrunun doğrultman vektörü ise birim vektör olan $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$ vektörüdür. Bu tip regle yüzeyler; doğrultman doğruları ideal doğru olmayan (izotropik olmayan) ve sitriksiyon eğrisi (boğaz çizgisi) düzlemsel olmayan konisel ve konisel olmayan yüzeylerdir. Bu yüzeylerin dağıtma parametresi

$$d = \frac{\det(\gamma', a, a')}{\|a'\|^2} \quad (2.5.26)$$

şeklindedir.

2) İkinci tip regle yüzey denklemi

$$\begin{cases} \phi(u, v) = (0, y(u), z(u)) + v(1, a_2(u), a_3(u)), \\ y, z, a_2, a_3 \in C^3, \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}, \\ y'^2(u) + z'^2(u) = 1, \quad a_2'(u) \cdot y'(u) + a_3'(u) \cdot z'(u) = 0 \end{cases} \quad (2.5.27)$$

şeklinde verilir. Dayanak eğrisi izotropik eğri olan yüzeylerdir. Bu tip regle yüzeyler, sitriksiyon eğrisi düzlemsel olan yüzeylerdir. Bu tip yüzeylerin dağıtma parametresi

$$d = \frac{1}{\|a'\|} \quad (2.5.28)$$

şeklindedir.

3) Üçüncü tip regle yüzey denklemi de

$$\begin{cases} \phi(u, v) = (u, y(u), 0) + v(0, a_2(u), a_3(u)), \\ y, a_2, a_3 \in C^3, \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}, \\ a_2^2(u) + a_3^2(u) = 1 \end{cases} \quad (2.5.29)$$

şeklinde verilir. Bu tip regle yüzeyler ise doğrultman doğruları ideal doğru olan konisel yüzeylerdir. Bu tip regle yüzeylerin dağıtma parametresi

$$d = -\frac{a_3}{a_2'} \quad (2.5.30)$$

şeklindedir (Röschel 1984).

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde; bu tezde bir yöntem olarak kullanılan tekillik teorisiyle ilgili bazı temel kavramlar verildi.

3.1.Tekillik Teorisi İle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Fonksiyonların tekilliklerini incelemek bazen güç hatta olanaksız olabilir. Bu durumda bu fonksiyonlar yerine, bunlarla aynı tip tekilliğe sahip olan daha basit fonksiyonlarla çalışılabilir. Bu ise fonksiyonlar arasında tanımlanan eşdeğerlikle mümkündür.

3.1.1.Tanım:

$U_i, i=1,2$ reel sayılar kümesinde iki açık altküme olmak üzere; $f_i : U_i, t_i \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Burada U_i, t_i sembolü; bu fonksiyonların t_i noktalarının bir komşuluğunda tanımlandığını gösterir. Eğer

$$h : V_1 \rightarrow V_2$$

fonksiyonu bir diffeomorfizm (parametre değişimi) ve $\forall t \in V_1$ için

$$h(t_1) = t_2, f_1(t) = f_2(h(t)) - c$$

olacak şekilde $t_i \in V_i$ olan $V_i \subset U_i$ açık komşulukları ve bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa; t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu, t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonuna **eşdeğerdirler** (veya **sağ eşdeğerdirler**) denir (Bruce ve Giblin, 1992). Yani bu durumda t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu bir parametre değişimi ve sabit farkıyla t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonundan elde edilebilir. Bu tanım şemayla

$$\begin{array}{ccc} U_1 \supset V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \supset V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

Şekil 3.1.1.Bileşke fonksiyon

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca fonksiyonlar arasındaki eşdeğerlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Fonksiyonlar arasındaki eşdeğerliği belirleme kriteri için aşağıdaki teorem önemli bir teoremdir:

3.1.2.Teorem:

$f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer $1 \leq p \leq k$ olan tüm p sayıları için;

$$f^{(p)}(t_0) = 0, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

ise t_0 noktası komşuluğundaki f fonksiyonu, 0 noktası komşuluğundaki

$$g : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \pm t^{k+1}$$

fonksiyonuna sağ-eşdeğerdir. Burada g fonksiyonunun işareti, $f^{(k+1)}(t_0)$ değerinin pozitif veya negatif olmasına göre sırasıyla (+) veya (-) işaretini alır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.3.Hadamard Lemması:

$f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $1 \leq p \leq k$ olan tüm p sayıları için $f^{(p)}(t_0) = 0$ olsun. Bu durumda

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$$

olacak şekilde $f_1 : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır. Eğer $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ ise $f_1(t_0) \neq 0$ şeklindedir.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.4.Tanım (A_k – tekiliği):

$f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu $\pm t^{k+1}$ fonksiyonuna sağ-eşdeğer olsun. Yani 3.1.1.Tanım ve 3.1.2.Teoremden dolayı $1 \leq p \leq k$ olan tüm p sayıları için; $f^{(p)}(t_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ olur. Bu durumda $k \geq 0$ için f fonksiyonuna t_0 noktasında A_k – tekiliğine sahiptir denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.5.Tanım (Bir fonksiyonun jeti):

$f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün (diferansiyellenebilir) fonksiyonunun bir t_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi;

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + \dots$$

şeklindedir. Burada t yerine $t + t_0$ yazıldığında, fonksiyonun Taylor serisi;

$$f(t + t_0) = f(t_0) + t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + \dots$$

elde edilir. Bu durumda $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$J^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0) \quad (3.1.1)$$

polinomuna f fonksiyonunun t_0 noktasındaki k – jeti denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.6.Tanım (Dallanmalar-Unfoldings):

Bir f fonksiyonunu içeren fonksiyonların ailesine, f fonksiyonun dallanmaları denir (Bruce ve Giblin, 1992).

Örneğin $f(t) = t^5$ fonksiyonun en genel dallanması

$$F(t, x_1, x_2, x_3) = t^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t \quad (3.1.2)$$

şeklindedir. Burada t^4 terimi uygun bir dönüşümle yok edilebileceğinden yazılmamıştır.

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde düzgün bir fonksiyon olsun. Bu F fonksiyonunu aşağıdaki gibi iki fonksiyon ailesi belirtir.

i) Buna göre ilk fonksiyon ailesi;

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r) \quad (3.1.3)$$

şeklinde olup r -parametrelili, 1-değişkenli bir fonksiyon ailesidir.

ii) İkinci fonksiyon ailesi de;

$$F_t: \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_t(x) = F(t, x_1, \dots, x_r) \quad (3.1.4)$$

şeklinde olup 1-parametrelili, r -değişkenli bir fonksiyon ailesidir.

Eğer

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r) \quad (3.1.5)$$

şeklinde yazılırsa F fonksiyonuna, f fonksiyonunun 1-değişkenli r -parametrelili dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.7.Sonuç:

Bir t_0 noktasında A_k singülerliğine sahip olan her $f: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, bu t_0 noktasının komşuluğunda $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonlarından birine indirgenebilir (eşdeğerdir).

İspat: 3.1.2.Teorem ve 3.1.4.Tanımdan açıktır.

3.1.8.Tanım((p)-versal dallanma):

$$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_{k-1} t^{k-1} \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

F fonksiyonunun (p)-versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden biri matris kriteridir:

3.1.9.Önerme((p)-versallik için matris kriteri):

(3.1.3) eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k -tekilliğine sahip olan bir f fonksiyonunun bir dallanması olsun ($k \geq 1$). Bu durumda

$\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetleri; (3.1.1) eşitliğinden

$$J^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i}t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r \quad (3.1.7)$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının (3.1.7)

eşitliğiyle verilen $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $((k-1) \times r)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ji})$ katsayılar matrisinin rankının $(k-1)$ sayısına eşit olmasıdır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.10.Tanım(versal dallanma):

$$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + \dots + x_k t^{k-1} \quad (3.1.8)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

F fonksiyonunun versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden biri matris kriteridir:

3.1.11.Önerme(Versallik için matris kriteri):

(3.1.3) eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k -tekilliği sahip olan bir f fonksiyonunun dallanması olsun ($k \geq 1$). Bu durumda

$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının t_0 noktasındaki sabit ile birlikte $(k-1)$. dereceden jetleri;

(3.1.1) eşitliğinden

$$J^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)\right)(t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i}t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r \quad (3.1.9)$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir versal dallanma olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının (3.1.9) eşitliğiyle verilen

$(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $(k \times r)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ji})$ katsayılar matrisinin rankının k sayısına eşit olmasıdır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.12. Tanım:

(3.1.3) denklemiyle tanımlanan 1-değişkenli, r -parametrelili F fonksiyon ailesi ele alınsın:

i)

$$D_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1.10)$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin zarfı veya diskriminantı denir.

ii)

$$R_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1.11)$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin sırt (regresyon) kümesi denir.

iii)

$$S_F = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \right\} \quad (3.1.12)$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin (t, x) noktasındaki tekil kümesi denir.

iv)

$$B_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1.13)$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin ayrışım (bifurcation) kümesi denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.13.Sonuç:

- i) A_1 -tekilliğine sahip olan noktalar zarf kümesindedirler fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Çünkü zarfın singüler noktaları A_1 singülerliğine sahip değildir. A_1 tekilliğine sahip olan noktalar zarfın regüler noktaları yani sırt noktası olmayan zarf noktalarıdır.
- ii) A_2 -tekilliğini sağlayan noktalar, F fonksiyonun sırt(regresyon) noktaları kümesinde bulunurlar.
- iii) Eğer zarf ve sırt noktaları için, $F = 0$ şartı kaldırılırsa, bulunan noktaların kümesi sırasıyla tekil ve ayrışım kümeleri olur.

İspat:

(3.1.10-13) eşitlikleriyle verilen kümeler için 3.1.4.Tanım kullanılırsa açıktır. $\square$

3.1.14.Teorem:

(3.1.5) eşitliğiyle tanımlanan $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ailesi, bir t_0 noktasında A_k -tekilliğine sahip olan bir f fonksiyonunun r -parametrelili bir dallanması olsun ($k \geq 1$).

(1) F fonksiyon ailesi bir (p)-versal dallanma olsun. Bu durumda;

(a) $k = 2$ için, B_F ayrışım kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(b) $k = 3$ için, B_F ayrışım kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(c) $k = 4$ için, B_F ayrışım kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(2) F fonksiyon ailesi bir versal dallanma olsun. Bu durumda

(a) $k = 1$ için, D_F diskriminant kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

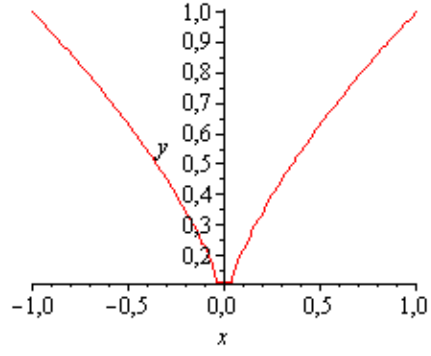
(b) $k = 2$ için, D_F diskriminant kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(c) $k = 3$ için, D_F diskriminant kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

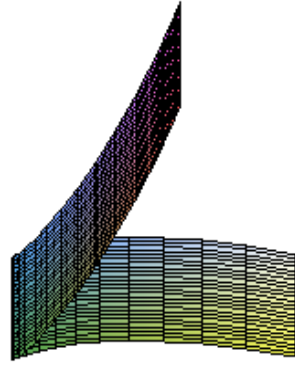
Burada $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ köşeli (ordinary cusp) eğrisi ve

$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ parametrik denklemlerle belli olan kurlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyidir (şekil 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4).

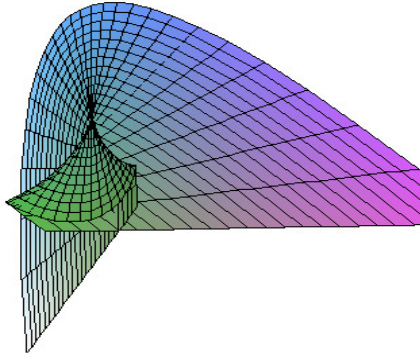
İspat: (Bruce ve Giblin 1992).



Şekil 3.1.2. C köşeli eğrisi (cuspidal curve)



Şekil 3.1.3. $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyi



Şekil 3.1.4. SW kırlangıç kuyruğu yüzeyi (swallowtail surface)

4. BULGULAR

4.1. Galile Dayanak ve Galile Uzaklık Fonksiyonları ve Tekillikler

Bu kısımda aksi belirtilmedikçe eğriler C^∞ – sınıfından alındı.

4.1.1. Tanım (Galile Dayanak- Fonksiyonu):

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow G^3, \alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

regüler birim hızlı eğrisi verilsin. Bu durumda

$$F_h: I \times S_G^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, u) \rightarrow F_h(x, u)$$

olmak üzere

$$F_h(x, u) = |t(x) n(x) u| \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlı düzgün fonksiyonların iki parametrelili bir ailesi olarak F_h fonksiyonuna, birim hızlı bir α eğrisi üzerinde Galile dayanak fonksiyonu denir. Burada $t(x)$ ve $n(x)$ vektörleri α eğrisinin (2.5.17) ve (2.5.19) denklemleriyle verilen birim teğet ve birim normal vektörleridir. S_G^2 kümesi ise Galile uzayında birim vektörlerin kümesidir.

Bu F_h fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon (3.1.5) denkleminde $f_{hu}(x)$ fonksiyonu ise $f_{hu}(x) = F_h(x, u)$ şeklinde olur. Bu durumda F_h fonksiyonu $f_{hu}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.1.2. Önerme :

$\alpha: I \rightarrow G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Frenet çatısı $\{t(x), n(x), b(x)\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(1) \quad f'_{hu}(x_0) &= 0 \Leftrightarrow u = \pm t(x_0) + \mu b(x_0), \mu \in \mathbb{R} \\
(2) \quad f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) &= 0 \Leftrightarrow u = \pm \left(t(x_0) + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (x_0) b(x_0) \right), \\
(3) \quad f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
u &= \pm \left(t(x_0) + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (x_0) b(x_0) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (x_0) = 0 \\
(4) \quad f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}_{hu}(x_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
u &= \pm \left(t(x_0) + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (x_0) b(x_0) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (x_0) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'' (x_0) = 0, \\
(5) \quad f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}_{hu}(x_0) = f^{(5)}_{hu}(x_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
u &= \pm \left(t(x_0) + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (x_0) b(x_0) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (x_0) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'' (x_0) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''' (x_0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.1a}$$

İspat:

Determinant özelliklerinden yararlanarak $f_{hu}(x) = |t(x) \ n(x) \ u|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınır;

$$f'_{hu}(x) = |t'(x) \ n(x) \ u| + |t(x) \ n'(x) \ u| \tag{4.1.2}$$

elde edilir. (2.5.21) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri, (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$f'_{hu}(x) = |\kappa(x) n(x) \ n(x) \ u| + |t(x) \ \tau(x) b(x) \ u| \tag{4.1.2a}$$

denklemi elde edilir. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f'_{hu}(x) = \tau(x) |t(x) \ b(x) \ u| \tag{4.1.2b}$$

bulunur. (4.1.2b) eşitliğinden bir kez daha türev alınır;

$$f''_{hu}(x) = \tau'(x) |t(x) \ b(x) \ u| + \tau(x) |t'(x) \ b(x) \ u| + \tau(x) |t(x) \ b'(x) \ u| \tag{4.1.3a}$$

elde edilir. (2.5.21) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılarak;

$$f''_{hu}(x) = \tau'(x) |t(x) \ b(x) \ u| + \tau(x) |\kappa(x) n(x) \ b(x) \ u| + \tau(x) |t(x) \ -\tau(x) n(x) \ u|$$

bulunur. Determinant özelliklerinden dolayı;

$$f''_{hu}(x) = \tau'(x) |t(x) \ b(x) \ u| + \kappa(x) \tau(x) |n(x) \ b(x) \ u| - \tau^2(x) |t(x) \ n(x) \ u| \tag{4.1.3b}$$

elde edilir. (4.1.3b) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa $f'''_{hu}(x)$ türevi;

$$\begin{aligned}
f_{hu}'''(x) = & \tau''(x)|t(x) b(x) u| + \tau'(x)|t'(x) b(x) u| + \tau'(x)|t(x) b'(x) u| \\
& + (\kappa'(x)\tau(x) + \kappa(x)\tau'(x))|n(x) b(x) u| + \kappa(x)\tau(x)|n'(x) b(x) u| \\
& + \kappa(x)\tau(x)|n(x) b'(x) u| - 2\tau(x)\tau'(x)|t(x) n(x) u| - \tau^2(x)|t'(x) n(x) u| \\
& - \tau^2(x)|t(x) n'(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.4a}$$

şeklindedir. Burada Frenet denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
f_{hu}'''(x) = & \tau''(x)|t(x) b(x) u| + \kappa(x)\tau'(x)|n(x) b(x) u| - \tau(x)\tau'(x)|t(x) n(x) u| \\
& + (\kappa'(x)\tau(x) + \kappa(x)\tau'(x))|n(x) b(x) u| + \kappa(x)\tau^2(x)|b(x) b(x) u| \\
& - \kappa(x)\tau^2(x)|n(x) n(x) u| - 2\tau(x)\tau'(x)|t(x) n(x) u| - \kappa(x)\tau^2(x)|n(x) n(x) u| \\
& - \tau^3(x)|t(x) b(x) u|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
f_{hu}'''(x) = & (\tau''(x) - \tau^3(x))|t(x) b(x) u| \\
& + (2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x))|n(x) b(x) u| - 3\tau(x)\tau'(x)|t(x) n(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.4b}$$

bulunur. (4.1.4b) eşitliğinden bir kez daha türev alınır;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(4)}(x) = & (\tau'''(x) - 3\tau^2(x)\tau'(x))|t(x) b(x) u| + (\tau''(x) - \tau^3(x))|t'(x) b(x) u| \\
& + (\tau''(x) - \tau^3(x))|t(x) b'(x) u| \\
& + (2\kappa'(x)\tau'(x) + 2\kappa(x)\tau''(x) + \kappa'(x)\tau'(x) + \kappa''(x)\tau(x))|n(x) b(x) u| \\
& + (2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x))|n'(x) b(x) u| \\
& + (2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x))|n(x) b'(x) u| \\
& + (-3\tau'^2(x) - 3\tau(x)\tau''(x))|t(x) n(x) u| - 3\tau(x)\tau'(x)|t'(x) n(x) u| \\
& - 3\tau(x)\tau'(x)|t(x) n'(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

olur. (2.5.21) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(4)}(x) = & (\tau'''(x) - 3\tau^2(x)\tau'(x))|t(x) b(x) u| \\
& + \kappa(x)(\tau''(x) - \tau^3(x))|n(x) b(x) u| - \tau(x)(\tau''(x) - \tau^3(x))|t(x) n(x) u| \\
& + (2\kappa'(x)\tau'(x) + 2\kappa(x)\tau''(x) + \kappa'(x)\tau'(x) + \kappa''(x)\tau(x))|n(x) b(x) u| \\
& + \tau(x)(2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x))|b(x) b(x) u| \\
& - \tau(x)(2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x))|n(x) n(x) u| \\
& + (-3\tau'^2(x) - 3\tau(x)\tau''(x))|t(x) n(x) u| - 3\kappa(x)\tau(x)\tau'(x)|n(x) n(x) u| \\
& - 3\tau^2(x)\tau'(x)|t(x) b(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.5a}$$

elde edilir. Burada gerekli kısaltmalar yapıldığında;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(4)}(x) &= (\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x))|t(x) b(x) u| \\
&+ (3\kappa'(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + \kappa''(x)\tau(x))|n(x) b(x) u| \\
&+ (-4\tau(x)\tau''(x) + \tau^4(x) - 3\tau'^2(x))|t(x) n(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.5b}$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikten bir kez daha türev alınırsa;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(5)}(x) &= (\tau^{(4)}(x) - 12\tau(x)\tau'^2(x) - 6\tau^2(x)\tau''(x))|t(x) b(x) u| \\
&+ (\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x))|t'(x) b(x) u| + (\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x))|t(x) b'(x) u| \\
&+ \left(\begin{aligned} &6\kappa'(x)\tau''(x) - \kappa'(x)\tau^3(x) + 4\kappa''(x)\tau'(x) \\ &+ \kappa'''(x)\tau(x) + 3\kappa(x)\tau'''(x) - 3\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) \end{aligned} \right) |n(x) b(x) u| \\
&+ (3\kappa'(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + \kappa''(x)\tau(x))|n'(x) b(x) u| \\
&+ (3\kappa'(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + \kappa''(x)\tau(x))|n(x) b'(x) u| \\
&+ (4\tau^3(x)\tau'(x) - 10\tau'(x)\tau''(x) - 4\tau(x)\tau'''(x))|t(x) n(x) u| \\
&+ (-4\tau(x)\tau''(x) + \tau^4(x) - 3\tau'^2(x))|t'(x) n(x) u| \\
&+ (-4\tau(x)\tau''(x) + \tau^4(x) - 3\tau'^2(x))|t(x) n'(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

bulunur. Burada Frenet denklemleri ve determinant özellikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(5)}(x) &= (\tau^{(4)}(x) - 12\tau(x)\tau'^2(x) - 6\tau^2(x)\tau''(x))|t(x) b(x) u| \\
&+ (\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x))|\kappa(x)n(x) b(x) u| \\
&+ (\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x))|t(x) - \tau(x)n(x) u| \\
&+ \left(\begin{aligned} &6\kappa'(x)\tau''(x) - \kappa'(x)\tau^3(x) + 4\kappa''(x)\tau'(x) \\ &+ \kappa'''(x)\tau(x) + 3\kappa(x)\tau'''(x) - 3\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) \end{aligned} \right) |n(x) b(x) u| \\
&+ (4\tau^3(x)\tau'(x) - 10\tau'(x)\tau''(x) - 4\tau(x)\tau'''(x))|t(x) n(x) u| \\
&+ (-4\tau(x)\tau''(x) + \tau^4(x) - 3\tau'^2(x))|t(x) \tau(x)b(x) u|
\end{aligned} \tag{4.1.6a}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(5)}(x) &= (\tau^{(4)}(x) - 15\tau(x)\tau'^2(x) - 10\tau^2(x)\tau''(x) + \tau^5(x))|t(x) b(x) u| \\
&+ \left(\begin{aligned} &6\kappa'(x)\tau''(x) + 4\kappa(x)\tau'''(x) + 4\kappa''(x)\tau'(x) \\ &- 9\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) + \kappa'''(x)\tau(x) - \kappa'(x)\tau^3(x) \end{aligned} \right) |n(x) b(x) u| \\
&+ (10\tau^3(x)\tau'(x) - 10\tau'(x)\tau''(x) - 5\tau(x)\tau'''(x))|t(x) n(x) u|.
\end{aligned} \tag{4.1.6b}$$

elde edilir. (4.1.2b), (4.1.3b), (4.1.4b), (4.1.5b) ve (4.1.6b) denklemlerinden yararlanarak 4.1.2.Önerme ispatlanabilir:

(1) $(\Rightarrow) f_{hu}'(x) = 0$ olsun. Bu durumda (4.1.2b) eşitliğinden $\tau(x)|t(x) b(x) u| = 0$ olur. Burada $\tau(x) \neq 0$ olduğundan $|t(x) b(x) u| = 0$ olmalıdır. O halde determinant özelliğinden dolayı $u = \lambda t(x) + \mu b(x)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Burada u vektörü $u = (\lambda, \dots, \dots)$ şeklinde bir birim vektör olduğundan dolayı (2.5.13) denklemiyle verilen, Galile norm tanımından dolayı $\|u\|_G = |\lambda| = 1$ eşitliği vardır. O halde $\lambda = \pm 1$ şeklinde olmalıdır. Sonuç olarak

$$u = \pm t(x) + \mu b(x) \quad (4.1.7)$$

olur.

$(\Leftarrow): u = \pm t(x) + \mu b(x)$ olsun. Determinant özelliğinden dolayı $|t(x) b(x) u| = 0$ bulunur. Bu durumda $\tau(x)|t(x) b(x) u| = 0$ olur ki, bu ise (4.1.2b) eşitliğinden $f_{hu}'(x) = 0$ olması demektir. $\square$

(2) $(\Rightarrow) f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = 0$ olsun. $f_{hu}'(x) = 0$ olduğundan (4.1.7) eşitliği (4.1.3) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} f_{hu}''(x) &= \tau'(x)|t(x) b(x) \pm t(x) + \mu b(x)| \\ &+ \kappa(x)\tau(x)|n(x) b(x) \pm t(x) + \mu b(x)| - \tau^2(x)|t(x) n(x) \pm t(x) + \mu b(x)| \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

bulunur. (4.1.8) denklemini düzenlenirse;

$$f_{hu}''(x) = \pm \kappa(x)\tau(x)|n(x) b(x) t(x)| - \mu \tau^2(x)|t(x) n(x) b(x)| \quad (4.1.8a)$$

elde edilir. $|t(x) n(x) b(x)| = 1$ olduğundan;

$$f_{hu}''(x) = \pm \kappa(x)\tau(x) - \mu \tau^2(x) \quad (4.1.8b)$$

şeklinde dir. (4.1.8b) ifadesi sıfıra eşitlenir ve $\tau(x) \neq 0$ olduğu kullanılırsa ;

$$\mu = \pm \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} \quad (4.1.8c)$$

olarak bulunur. (4.1.8) eşitliği (4.1.7) denkleminde yazılırsa;

$$u = \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \quad (4.1.9)$$

elde edilir. $\square$

($\Leftarrow$): Tersine $u = \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right)$ olsun. Bu durumda (4.1.2b) ve (4.1.3)

denklemlerinde bulunan determinantlarda (4.1.9) eşitliğiyle verilen u vektörü yerine yazılırsa;

$$|t(x) \ b(x) \ u| = \left| t(x) \ b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right|,$$

$$|n(x) \ b(x) \ u| = \left| n(x) \ b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right| = |n(x) \ b(x) \pm t(x)| = \pm 1,$$

$$|t(x) \ n(x) \ u| = \left| t(x) \ n(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right| = \left| t(x) \ n(x) \pm \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right| = \pm \frac{\kappa(x)}{\tau(x)}$$

elde edilir. Bu denklemler düzenlendiğinde;

$$|t(x) \ b(x) \ u| = 0, \quad |n(x) \ b(x) \ u| = \pm 1 \quad \text{ve} \quad |t(x) \ n(x) \ u| = \pm \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} \quad (4.1.10)$$

bulunur. O halde (4.1.10) denklemlerinden;

$$\tau(x) |t(x) \ b(x) \ u| = 0,$$

$$\tau'(x) |t(x) \ b(x) \ u| + \kappa(x) \tau(x) |n(x) \ b(x) \ u| - \tau^2(x) |t(x) \ n(x) \ u| = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ise (4.1.2b) ve (4.1.3) denklemlerinden $f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = 0$

olması demektir. $\square$

(3) ($\Rightarrow$): $f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = 0$ olsun. $f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul olan (4.1.9) eşitliği, (4.1.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} f_{hu}'''(x) &= (\tau''(x) - \tau^3(x)) \left| t(x) \ b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right| \\ &+ (2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x)) \left| n(x) \ b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right| \\ &- 3\tau(x)\tau'(x) \left| t(x) \ n(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f_{hu}'''(x) = \kappa'(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'(x) \quad (4.1.11)$$

bulunur. (4.1.11) eşitliğiyle birlikte $f_{hu}'''(x) = 0$ olması kullanılırsa;

$$\kappa'(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'(x) = 0 \quad (4.1.11a)$$

elde edilir. (4.1.11a) eşitliği

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = \frac{\tau'(x)\kappa(x) - \tau(x)\kappa'(x)}{\kappa^2(x)} \quad (4.1.12)$$

ifadesinde yazılırsa

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = 0 \quad (4.1.13)$$

bulunur. $\square$

$$(\Leftarrow): \text{Tersine } u = \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = 0 \text{ olsun.}$$

$$u = \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} b(x) \right) \text{ olması, (4.1.10) denklemlerinden } f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = 0$$

olması için yeterlidir. Yine bu durumda (4.1.4) ve (4.1.10) denklemleri kullanılırsa

$$f_{hu}'''(x) = \pm (2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x)) - 3\tau(x)\tau'(x) \left(\pm \frac{\kappa(x)}{\tau(x)} \right)$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$f_{hu}'''(x) = \pm (\kappa'(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'(x))$$

$$\text{elde edilir. Sonuç olarak } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = 0 \text{ olduğundan } f_{hu}'''(x) = 0 \text{ olarak bulunur. } \square$$

$$(4) (\Rightarrow): f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = 0 \text{ olsun.}$$

$f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = 0$ olması için (4.1.9) ve (4.1.13) eşitliklerinin sağlanmasının gerek ve yeter şart olduğunu yukarıda gösterildi. Şimdi (4.1.9) ve (4.1.13) eşitlikleriyle birlikte $f_{hu}^{(4)}(x) = 0$ olma durumunu ifade etmek için ilk olarak (4.1.9) eşitliğini (4.1.5b) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(4)}(x) &= \left(\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x) \right) \left| t(x)b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)}b(x) \right) \right| \\
&+ \left(3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right) \left| n(x)b(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)}b(x) \right) \right| \\
&+ \left(-4\tau(x)\tau''(x) + \tau^4(x) - 3\tau'^2(x) \right) \left| t(x)n(x) \pm \left(t(x) + \frac{\kappa(x)}{\tau(x)}b(x) \right) \right| = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f_{hu}^{(4)}(x) = \kappa''(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau''(x) + \frac{3\tau'(x)}{\tau(x)}(\kappa'(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'(x)) = 0$$

bulunur. Burada (4.1.13) eşitliği kullanılırsa, $f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = 0$ olması için (4.1.9) ve (4.1.13) ile birlikte gerekli koşulun;

$$\kappa''(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau''(x) = 0 \quad (4.1.14)$$

olduğu bulunur. (4.1.12) eşitliğinden bir kez daha türev alınarak;

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) = \frac{(\tau''\kappa - \tau\kappa'')(x)\kappa^2(x) - (\tau'\kappa - \tau\kappa')(x)2\kappa(x)\kappa'(x)}{\kappa^4(x)} \quad (4.1.15)$$

elde edilir. (4.1.15) denkleminde (4.1.13) ve (4.1.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) = 0 \quad (4.1.16)$$

bulunur. $\square$

$$(\Leftarrow): \text{ Tersine } u = \pm \left(t(x) + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)(x)b(x) \right) \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) = 0, \text{ olarak}$$

alındığında (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.5) denklemleriyle verilen ifadelerin sıfıra eşit yani $f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = 0$ olduğu açıktır. $\square$

$$(5) (\Rightarrow): f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = f_{hu}^{(5)}(x) = 0 \text{ olsun.}$$

$f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun (4.1.9), (4.1.13) ve (4.1.16) eşitliklerinin sağlanması gerektiğini gösterildi. O halde bu koşullar (4.1.6) eşitliğiyle verilen $f_{hu}^{(5)}(x)$ türev denkleminde kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f_{hu}^{(5)}(x) &= \pm(6\kappa'(x)\tau''(x) + 4\kappa(x)\tau'''(x) + 4\kappa''(x)\tau'(x)) \\
&\pm(-9\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) + \kappa'''(x)\tau(x) - \kappa'(x)\tau^3(x)) \\
&\pm\frac{\kappa(x)}{\tau(x)}(10\tau^3(x)\tau'(x) - 10\tau'(x)\tau''(x) - 5\tau(x)\tau'''(x)).
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında;

$$f_{hu}^{(5)}(x) = \kappa'''(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'''(x) \quad (4.1.17)$$

bulunur. (4.1.15) eşitliğinden bir kez daha türev alınır,

$f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = 0$ olmasıyla birlikte $f_{hu}^{(5)}(x) = 0$ olması için gerekli koşul olarak

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(x) = 0 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. $\square$

$$(\Leftarrow): \text{ Tersine } u = \pm\left(t(x) + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(x)b(x)\right) \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(x) = 0$$

olsun. Bu durumda yukarıdaki koşulların (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.6) denklemleriyle verilen ifadelerin;

$$f_{hu}'(x) = f_{hu}''(x) = f_{hu}'''(x) = f_{hu}^{(4)}(x) = f_{hu}^{(5)}(x) = 0 \text{ olması için yeterli olduğu açıktır.}$$

$\square$

4.1.3.Tanım (Galile uzaklık- Fonksiyonu):

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow G^3, \alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

regüler bir birim hızlı eğrisi verilsin. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde düzgün fonksiyonların bir ailesi

$$\begin{aligned}
F_d: I \times G^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x, u) &\rightarrow F_d(x, u)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$F_d(x, u) = |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \quad (4.1.19)$$

şeklinde tanımlı F_d fonksiyon ailesine α eğrisi üzerinde Galile uzaklık fonksiyonu

denir. Burada $t(x)$ ve $n(x)$ vektörleri α eğrisinin (2.5.17) ve (2.5.19) denklemleriyle verilen birim teğet ve birim normal vektörleridir.

Bu F_d fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon (3.1.5) denkleminde $f_{du}(x)$ fonksiyonu ise $f_{du}(x) = F_d(x, u)$ şeklinde olur. Bu durumda F_d fonksiyonu $f_{du}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.1.4.Önerme:

α eğrisi $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Frenet çatısı $\{t(x), n(x), b(x)\}$ olmak üzere;

$$(1) f'_{du}(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma(x) - u = \lambda t(x) + \mu b(x). \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(2) f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) - u = \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right).$$

$$(3) f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = f'''_{du}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) \neq 0.$$

$$(4) f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = f'''_{du}(x) = f_u^{(4)}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x)} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) = 0.$$

$$(5) f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = f'''_{du}(x) = f_u^{(4)}(x) = f_{du}^{(5)}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x)} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right), \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x) = 0.$$

şeklindedir.

İspat:

Öncelikle, bu önermeyi ispatlamak için gerekli olan türevler hesaplanmalıdır.

$f_{du}(x) = |t(x) \ n(x) \ \alpha(x) - u|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınır;

$$f'_{du}(x) = |t'(x) \ n(x) \ \alpha(x) - u| + |t(x) \ n'(x) \ \alpha(x) - u| + \left| t(x) \ n(x) \ (\alpha(x) - u)' \right|$$

bulunur. Burada Frenet denklemleri ve determinant özellikleri kullanılarak;

$$f'_{du}(x) = \tau(x) |t(x) \ b(x) \ \alpha(x) - u| \quad (4.1.20)$$

elde edilir. (4.1.20) eşitliğinde bir kez daha türev alınır;

$$f_{du}''(x) = \tau'(x) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| + \tau(x) |t'(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + \tau(x) |t(x) b'(x) \alpha(x) - u| + \tau(x) |t(x) b(x) (\alpha(x) - u)'|$$

olur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$f_{du}''(x) = \tau'(x) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| + \kappa(x) \tau(x) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ - \tau^2(x) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \quad (4.1.21)$$

bulunur. (4.1.21) eşitliğinde bir kez daha türev alınır;

$$f_{du}'''(x) = \tau''(x) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| + \tau'(x) |t'(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + \tau'(x) |t(x) b'(x) \alpha(x) - u| + (\kappa'(x) \tau(x) + \kappa(x) \tau'(x)) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + \kappa(x) \tau(x) |n(x) b(x) (\alpha(x) - u)'| + (-2\tau(x) \tau'(x)) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \\ - \tau^2(x) |t(x) n'(x) \alpha(x) - u|$$

şeklinde elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılarak;

$$f_{du}'''(x) = (\tau''(x) - \tau^3(x)) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + (2\kappa(x) \tau'(x) + \kappa'(x) \tau(x)) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ - 3\tau(x) \tau'(x) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| + \kappa(x) \tau(x) \quad (4.1.22)$$

bulunur. (4.1.22) eşitliğinde bir kez daha türev alınarak;

$$f_{du}^{(4)}(x) = (\tau'''(x) - 3\tau^2(x) \tau'(x)) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + (\tau''(x) - \tau^3(x)) |t'(x) b(x) \alpha(x) - u| + (\tau''(x) - \tau^3(x)) |t(x) b'(x) \alpha(x) - u| \\ + (\kappa''(x) \tau(x) + 3\kappa'(x) \tau'(x) + 2\kappa(x) \tau''(x)) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + (2\kappa(x) \tau'(x) + \kappa'(x) \tau(x)) |n(x) b(x) (\alpha(x) - u)'| \\ + (-3\tau'^2(x) - 3\tau(x) \tau''(x)) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \\ - 3\tau(x) \tau'(x) |t(x) n'(x) \alpha(x) - u| + \kappa'(x) \tau(x) + \kappa(x) \tau'(x)$$

bulunur. Burada gerekli işlemler yapılırsa;

$$f_{du}^{(4)}(x) = (\tau'''(x) - 6\tau^2(x) \tau'(x)) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + \left(\kappa''(x) \tau(x) + 3\kappa'(x) \tau'(x) \right) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + (3\kappa(x) \tau''(x) - \kappa(x) \tau^3(x)) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ + (\tau^4(x) - 4\tau(x) \tau''(x) - 3\tau'^2(x)) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \\ + 2\kappa'(x) \tau(x) + 3\kappa(x) \tau'(x) \quad (4.1.23)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.23) eşitliğinde bir kez daha türev alınır;

$$\begin{aligned}
f_{du}^{(5)}(x) &= \left(\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x) \right)' \left| t(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x) \right) \left| t'(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x) \right) \left| t(x) b'(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau'''(x) - 6\tau^2(x)\tau'(x) \right) \left| t(x) b(x) (\alpha(x) - u) \right|' \\
&+ \left(\kappa''(x)\tau(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right)' \left| n(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\kappa''(x)\tau(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right) \left| n'(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\kappa''(x)\tau(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right) \left| n(x) b'(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\kappa''(x)\tau(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right) \left| n(x) b(x) (\alpha(x) - u) \right|' \\
&+ \left(\tau^4(x) - 4\tau(x)\tau''(x) - 3\tau'^2(x) \right)' \left| t(x) n(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau^4(x) - 4\tau(x)\tau''(x) - 3\tau'^2(x) \right) \left| t'(x) n(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau^4(x) - 4\tau(x)\tau''(x) - 3\tau'^2(x) \right) \left| t(x) n'(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau^4(x) - 4\tau(x)\tau''(x) - 3\tau'^2(x) \right) \left| t(x) n(x) (\alpha(x) - u) \right|' \\
&+ \left(2\kappa'(x)\tau(x) + 3\kappa(x)\tau'(x) \right)'
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.21) eşitliğiyle belli Frenet denklemleri ve determinant özellikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{du}^{(5)}(x) &= \left(\tau^{(4)}(x) - 12\tau(x)\tau'^2(x) - 6\tau^2(x)\tau''(x) \right) \left| t(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\kappa'(x)\tau'''(x) - 6\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) \right) \left| n(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(-\tau(x)\tau'''(x) + 6\tau^3(x)\tau'(x) \right) \left| t(x) n(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\begin{aligned} &\kappa'''(x)\tau(x) + 6\kappa'(x)\tau''(x) + 3\kappa(x)\tau'''(x) + 4\kappa''(x)\tau'(x) \\ &- 3\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) - \kappa'(x)\tau^3(x) \end{aligned} \right) \left| n(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\kappa''(x)\tau(x) + 3\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x) \right) \left| n(x) b(x) t(x) \right| \\
&+ \left(4\tau^3(x)\tau'(x) - 4\tau'(x)\tau''(x) - 4\tau(x)\tau'''(x) - 6\tau'(x)\tau''(x) \right) \left| t(x) n(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ \left(\tau^5(x) - 4\tau^2(x)\tau''(x) - 3\tau(x)\tau'^2(x) \right) \left| t(x) b(x) \alpha(x) - u \right| \\
&+ 2\kappa''(x)\tau(x) + 5\kappa'(x)\tau'(x) + 3\kappa(x)\tau''(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}
 f_{du}^{(5)}(x) = & \left(\tau^{(4)}(x) - 15\tau(x)\tau'^2(x) - 10\tau^2(x)\tau''(x) + \tau^5(x) \right) |t(x)b(x)\alpha(x) - u| \\
 & + \left(\kappa'''(x)\tau(x) + 6\kappa'(x)\tau''(x) + 4\kappa(x)\tau'''(x) \right. \\
 & \left. + 4\kappa''(x)\tau'(x) - 9\kappa(x)\tau^2(x)\tau'(x) - \kappa'(x)\tau^3(x) \right) |n(x)b(x)\alpha(x) - u| \\
 & + \left(-5\tau(x)\tau'''(x) + 10\tau^3(x)\tau'(x) - 10\tau'(x)\tau''(x) \right) |t(x)n(x)\alpha(x) - u| \\
 & + 3\kappa''(x)\tau(x) + 8\kappa'(x)\tau'(x) + 6\kappa(x)\tau''(x) - \kappa(x)\tau^3(x)
 \end{aligned} \quad (4.1.23a)$$

elde edilir. Şimdi önermenin ispatına geçilirse;

(1) $(\Rightarrow)$: $f_{du}'(x) = 0$ olsun. Bu durumda (4.1.20) eşitliğinden dolayı

$$\tau(x)|t(x)b(x)\alpha(x) - u| = 0 \quad (4.1.24)$$

olur. $\tau(x) \neq 0$ olduğundan (4.1.24) eşitliğinin sağlanması için

$$|t(x)b(x)\alpha(x) - u| = 0 \quad (4.1.24a)$$

olması gerekir. O halde determinantın satırları (veya sütunları) lineer bağımlı olacağından

$$\alpha(x) - u = \lambda t(x) + \mu b(x) \quad (4.1.25)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. $\square$

$(\Leftarrow)$: $\gamma(x) - u = \lambda t(x) + \mu b(x)$ olsun. Bu durumda

$$|t(x)b(x)\alpha(x) - u| = |t(x)b(x)\lambda t(x) + \mu b(x)|$$

şeklinde olup determinantın bir satırı diğer satırların lineer toplamı şeklinde olduğundan

$$|t(x)b(x)\alpha(x) - u| = 0$$

olarak elde edilir. (4.1.20) eşitliğinde yerine yazılırsa $f_{du}'(x) = 0$ olarak bulunur. $\square$

(2) $(\Rightarrow)$: $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_{du}'(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul olan (4.1.25) eşitliği, (4.1.21) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 f_{du}''(x) = & \tau'(x)|t(x)b(x)\lambda t(x) + \mu b(x)| + \kappa(x)\tau(x)|n(x)b(x)\lambda t(x) + \mu b(x)| \\
 & - \tau^2(x)|t(x)n(x)\lambda t(x) + \mu b(x)|
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada determinant özelliklerinden yararlanarak gerekli işlemler yapıldığında;

$$f_{du}''(x) = \lambda \kappa(x)\tau(x) - \mu \tau^2(x) \quad (4.1.26)$$

elde edilir. Kabulümüzden dolayı $f_u''(x) = 0$ olması kullanılırsa, sonuç olarak;

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \quad (4.1.26a)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik (4.1.25) denkleminde yazılırsa;

$$\alpha(x) - u = \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \quad (4.1.27)$$

eşitliği elde edilir. $\square$

$(\Leftarrow)$: $\alpha(x) - u = \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right)$ şeklinde olsun. Bu durumda (4.1.20) ve

(4.1.21) denklemlerindeki determinantlar

$$\begin{aligned} |t(x) b(x) \alpha(x) - u| &= \left| t(x) b(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right|, \\ |n(x) b(x) \alpha(x) - u| &= \left| n(x) b(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right|, \\ |t(x) n(x) \alpha(x) - u| &= \left| t(x) n(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| \end{aligned}$$

şeklinde olup, determinant özelliklerinden dolayı;

$$\begin{aligned} |t(x) b(x) \alpha(x) - u| &= 0, \\ |n(x) b(x) \alpha(x) - u| &= \mu \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right), \\ |t(x) n(x) \alpha(x) - u| &= \mu \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

bulunur. (4.1.28) eşitlikleri (4.1.20) ve (4.1.21) denklemlerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} f'_{du}(x) &= \tau(x) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| = 0, \\ f''_{du}(x) &= \tau'(x) |t(x) b(x) \alpha(x) - u| + \kappa(x) \tau(x) |n(x) b(x) \alpha(x) - u| \\ &\quad - \tau^2(x) |t(x) n(x) \alpha(x) - u| \\ &= \kappa(x) \tau(x) \mu \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) - \mu \tau^2(x) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.1.27) eşitliğinin sağlanması $f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = 0$ olması

için gerekli ve yeterlidir. $\square$

(3) ($\Rightarrow$): $f_u'(x) = f_u''(x) = f_u'''(x) = 0$ olsun. $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = 0$ olması için gerek yeter koşul (4.1.27) eşitliği ile verildi. Bu durumda (4.1.27) denklemi (4.1.22) eşitliğinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} f_{du}'''(x) = & \left(\tau''(x) - \tau^3(x) \right) \left| t(x) b(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| \\ & + \left(2\kappa(x)\tau'(x) + \kappa'(x)\tau(x) \right) \left| n(x) b(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| \\ & - 3\tau(x)\tau'(x) \left| t(x) n(x) \mu \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| + \kappa'(x)\tau(x), \end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapılarak

$$f_{du}'''(x) = \mu \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} [\kappa'(x)\tau(x) - \kappa(x)\tau'(x)] + \kappa'(x)\tau(x) \quad (4.1.29)$$

elde edilir. Kabulden dolayı $f_{du}'''(x) = 0$ alınır;

$$\mu = \frac{\kappa^2(x)}{\kappa(x)\tau'(x) - \kappa'(x)\tau(x)} \quad (4.1.29a)$$

olarak bulunur.

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' = \frac{\tau'(x)\kappa(x) - \tau(x)\kappa'(x)}{\kappa^2(x)} \quad (4.1.29b)$$

şeklinde olması (4.1.29a) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\mu = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'} \quad (4.1.29c)$$

olarak bulunur. Burada $\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' \neq 0$ olmalıdır. Sonuç olarak (4.1.29c) eşitliği

(4.1.27) denkleminde yazılırsa, $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = 0$ olması için gerekli koşul;

$$\alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right), \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' \neq 0 \quad (4.1.30)$$

olarak elde edilir. $\square$

$$(\Leftarrow): \quad \alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)'} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' \neq 0 \text{ şeklinde}$$

olsun. Eğer bu ifade (4.1.20), (4.1.21) ve (4.1.22) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = 0 \text{ olduğu görülür. } \square$$

(4) ($\Rightarrow$): Son olarak $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = f_{du}^{(4)}(x) = 0$ olsun. Bu durumda (3)

ifadesinden $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.1.30) eşitliğiyle verildi. (4.1.30) eşitliği (4.1.23) denkleminde yazılıp, gerekli işlemler yapılarak $f_{du}^{(4)}(x) = 0$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & -\kappa^2(x) \tau(x) \tau''(x) + \kappa'(x) \kappa''(x) \tau^2(x) \\ & + 2\kappa'(x) \kappa'(x) \tau(x) \tau'(x) - 2\kappa'^2(x) \tau^2(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

denklemini elde edilir. (4.1.29b) eşitliğinden bir kez daha türev alınırsa;

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)''(x) = \frac{\tau''(x) \kappa^2(x) - \tau(x) \kappa''(x) \kappa'(x) - 2\tau'(x) \kappa'(x) \kappa'(x) + 2\tau(x) \kappa'^2(x)}{\kappa^3(x)} \quad (4.1.31a)$$

elde edilir. (4.1.31) eşitliğinden dolayı

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'' = 0 \quad (4.1.32)$$

olarak bulunur. $\square$

$$(\Leftarrow): \quad \alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)'} \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right), \quad \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' \neq 0 \quad \text{ve}$$

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'' = 0 \text{ şeklinde olsun. Bu koşullar (4.1.20-23) denklemlerinde kullanılırsa}$$

$$f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = f_{du}^{(4)}(x) = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

(5) Son olarak $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = f_{du}^{(4)}(x) = f_{du}^{(5)}(x) = 0$ olsun. Bu durumda

(4) ifadesinden $f_{du}'(x) = f_{du}''(x) = f_{du}'''(x) = f_{du}^{(4)}(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (4.1.30) ve (4.1.32) eşitlikleriyle verildi. (4.1.30) eşitliği (4.23a) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{du}^{(5)}(x) = & \left(\tau^{(4)} - 15\tau\tau'^2 - 10\tau^2\tau'' + \tau^5 \right)(x) \left| t(x) b(x) \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' } \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| \\
& + \left(\kappa''' \tau + 6\kappa' \tau'' + 4\kappa \tau''' + 4\kappa'' \tau' - 9\kappa \tau^2 \tau' - \kappa' \tau^3 \right)(x) \left| n(x) b(x) \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x)} \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) t + b \right)(x) \right| \\
& + \left(-5\tau\tau''' + 10\tau^3 \tau' - 10\tau' \tau'' \right)(x) \left| t(x) n(x) \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' } \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right) t(x) + b(x) \right) \right| \\
& + 3\kappa''(x) \tau(x) + 8\kappa'(x) \tau'(x) + 6\kappa(x) \tau''(x) - \kappa(x) \tau^3(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada determinant özellikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
f_{du}^{(5)}(x) = & \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x)}(x) \left(\kappa'''(x) \tau(x) + 6\kappa'(x) \tau''(x) + 4\kappa(x) \tau'''(x) \right. \\
& \left. + 4\kappa''(x) \tau'(x) - 9\kappa(x) \tau^2(x) \tau'(x) - \kappa'(x) \tau^3(x) \right) \\
& + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x)} \left(-5\tau(x) \tau'''(x) + 10\tau^3(x) \tau'(x) - 10\tau'(x) \tau''(x) \right) \\
& + 3\kappa''(x) \tau(x) + 8\kappa'(x) \tau'(x) + 6\kappa(x) \tau''(x) - \kappa(x) \tau^3(x)
\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

olarak bulunur. (4.1.33) denkleminde $f_{du}^{(5)}(x) = 0$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \kappa(x) \kappa'''(x) \tau^2(x) - \kappa^2(x) \tau(x) \tau'''(x) - 4\kappa^2(x) \tau'(x) \tau''(x) \\
& + 7\kappa(x) \kappa''(x) \tau(x) \tau'(x) + 8\kappa(x) \kappa'(x) \tau'^2(x) \\
& - 8\kappa'^2(x) \tau(x) \tau'(x) - 3\kappa'(x) \kappa''(x) \tau^2(x) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

elde edilir. (4.1.31a) eşitliğinden bir kez daha türev alınır;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x) = & \frac{\left(\tau''(x) \kappa^2(x) - \tau(x) \kappa''(x) \kappa(x) - 2\tau'(x) \kappa'(x) \kappa'(x) + 2\tau(x) \kappa'^2(x) \right)' \kappa^3(x)}{\kappa^6(x)} \\
& - \frac{\left(\tau''(x) \kappa^2(x) - \tau(x) \kappa''(x) \kappa(x) - 2\tau'(x) \kappa'(x) \kappa'(x) + 2\tau(x) \kappa'^2(x) \right) 3\kappa^2(x) \kappa'(x)}{\kappa^6(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak;

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x) = \frac{\left(\kappa^3 \tau''' - \kappa^2 \kappa''' \tau - 3\kappa^2 \kappa'' \tau' - 3\kappa^2 \kappa' \tau'' + 6\kappa \kappa' \kappa'' \tau + 6\kappa \kappa'^2 \tau' - 6\kappa'^3 \tau \right)(x)}{\kappa^4(x)} \tag{4.1.35}$$

bulunur. (4.1.31) ve (4.1.34) eşitlikleri (4.1.35) denkleminde kullanılırsa;

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)''' = 0 \quad (4.1.36)$$

olarak bulunur. $\square$

$$(\Leftrightarrow): \quad \alpha(x) - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)'}, \left(\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)t(x) + b(x)\right), \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)' \neq 0,$$

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)'' = 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\right)''' = 0 \text{ şeklinde olsun. Bu koşullar (4.1.20-23) ve (4.1.23a)}$$

denklemlerinde kullanılırsa $f'_{du}(x) = f''_{du}(x) = f'''_{du}(x) = f^{(4)}_{du}(x) = f^{(5)}_{du}(x) = 0$ elde edilir. $\square$

4.1.5.Sonuç:

Eğer 4.1.1.Tanım ve 4.1.3.Tanımda verilen Galile dayanak ve Galile uzaklık fonksiyonları α düzlemsel eğrisi üzerinde tanımlanırsa bu fonksiyonların ardışık türevleri sıfırdır.

İspat:

α eğrisi düzlemsel olduğundan burulma fonksiyonu $\tau \equiv 0$ olur. Buna göre 4.1.1.Tanım ve 4.1.3.Tanımda verilen fonksiyonların türevlerinin sıfır olduğu açıktır.

4.2.Galie Dayanak ve Galile Uzaklık Fonksiyonlarının Dallanmaları:

Bu kısımda, yukarda tanımlanan Galile uzaklık ve Galile dayanak fonksiyonlarının, bir değişkenli bir f fonksiyonunun versal dallanma ve (p)-versal dallanma olma durumları incelendi.

4.2.1.Önerme:

$F_h : I \times S_G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birim hızlı $\alpha : I \rightarrow G^3$ eğrisi üzerinde tanımlı 4.1.1.Tanımda verilen dayanak fonksiyonu olsun. Eğer f_{hu_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_2 –tekilliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu f_{hu_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

İspat:

(4.1.1) eşitliğinden $F_h(x, u) = |t(x) n(x) u|$ şeklindedir. Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow G^3$ eğrisi için Frenet çatısının teğet ve normal vektörlerinin sırasıyla (2.5.17) ve (2.5.18)

eşitliklerinden; $t(x) = (1, y'(x), z'(x))$ ve $n(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, y''(x), z''(x))$ şeklindedir.

Yine $u \in S_G^2$ olduğundan birim vektör olup $u = (1, u_2, u_3)$ şeklindedir. O halde bunlar

$F_h(x, u) = |t(x) n(x) u|$ eşitliğinde yazılırsa:

$$F_h(x, u) = \begin{vmatrix} 1 & y'(x) & z'(x) \\ 0 & \frac{y''(x)}{\kappa(x)} & \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \\ 1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (4.2.1)$$

şeklinde olur. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa;

$$F_h(x, u) = \frac{1}{\kappa(x)}(u_3 y''(x) - u_2 z''(x) + y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)) \quad (4.2.2)$$

elde edilir.

F_h fonksiyonunun, f_{hu_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için,

3.1.9.Önerme ile verilen (p)-versallik için matris kriterini sağlaması gerekmektedir.

Bunun için de öncelikle $\frac{\partial F_h}{\partial u_i}(x, u_0), (i = 2, 3)$ şeklindeki fonksiyonların, (3.1.1)

eşitliğiyle verilen jet tanımından yararlanılarak, 1-jetleri bulunmalıdır. Bu durumda (4.2.2) eşitliğinden dolayı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x, u_0) &= \frac{-z''(x)}{\kappa(x)}, \\ \frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x, u_0) &= \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

şeklindedir. Bu fonksiyonların 1-jetleri (3.1.1) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} J^1 \left(\frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \\ J^1 \left(\frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

olarak bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için

3.1.9.Önermeden dolayı

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması yani regüler bir matris olması gerekmektedir.

A matrisi 1×2 tipinde bir matris olduğundan, regüler olması için $rank A = 1$ olmalıdır.

Bunun için ise $\left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'$ ve $\left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'$ ifadelerinden en az birinin sıfırdan farklı

olması yeterlidir. (2.5.20) eşitliğiyle verilen binormal vektörü;

$$b'(x_0) = \left(0, \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \right) \quad (4.2.6)$$

şeklinde olup, (2.5.21) eşitlikleriyle belli Frenet denklemlerinden;

$$-\tau(x_0)n(x_0) = \left(0, \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \right) \quad (4.2.7)$$

yazılır. (4.2.7) eşitliğinin sol tarafı, α eğrisinin $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olmasından dolayı sıfırdan farklıdır. Bu durumda;

$$\left(0, \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \right) \neq 0 \quad (4.2.8)$$

elde edilir. Bu ise $\left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'$ ve $\left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'$ ifadelerinden en az birinin sıfırdan farklı

olması demektir. O halde (4.2.5) eşitliğiyle tanımlı A matrisi için $rank A = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla A matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_h fonksiyonu x_0 noktasında A_2 –tekilliğine sahip f_{hu_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur. $\square$

4.2.2.Önerme:

$F_h : I \times S_G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birim hızlı $\alpha : I \rightarrow G^3$ eğrisi üzerinde tanımlı

4.1.1.Tanımda verilen dayanak fonksiyonu olsun. Eğer f_{hu_0} fonksiyonu x_0 noktasında

A_3 –tekilliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu f_{hu_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

İspat:

F_h fonksiyonunun A_3 -tekilliğine sahip f_{hu_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olduğunu göstermek için 3.1.9.Önerme ile verilen (p)-versallik için matris kriterini kullanılması gerekmektedir. Bunun için de öncelikle $\frac{\partial F_h}{\partial u_i}(x, u_0), (i = 2, 3)$ şeklindeki fonksiyonların, (3.1.1) eşitliğiyle verilen jet tanımından yararlanarak 2-jetlerini bulunmalıdır. Bu durumda (4.1.23) eşitliğinden dolayı bu fonksiyonların x_0 noktasında ki 2-jetleri;

$$J^2\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_2}(x, u_0)\right)(x_0) = x\left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)''$$

$$J^2\left(\frac{\partial F_h}{\partial u_3}(x, u_0)\right)(x_0) = x\left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)''$$
(4.2.9)

bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.1.9.Önermeden dolayı

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' \\ \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'' \end{bmatrix}$$
(4.2.10)

eşitliğiyle belli B matrisinin maksimum ranka sahip olması, yani regüler bir matris olması gerekmektedir. B matrisi 2×2 tipinde bir matris olduğundan dolayı regüler olması için $\text{rank} B = 2$ olmalıdır. Bunun için ise B matrisinin satırlarının (veya sütunlarının) lineer bağımsız olması, yani buna denk bir ifade olarak B matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

$$|B| = \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'' - \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)' \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'' \neq 0$$
(4.2.11)

olduğunu gösterilmelidir. O halde bu determinant için gerekli ifadeleri hesaplamak için türev alınırsa;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)}\right)' = \frac{-z'''(x)\kappa(x) + z''(x)\kappa'(x)}{\kappa^2(x)}$$
(4.2.12)

şeklinde bulunur. Bu eşitlikte (2.5.22) eşitliğiyle belli $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonun bir kez daha türev alınır;

$$\kappa'(x) = \frac{y''(x)y'''(x) + z''(x)z'''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.13)$$

elde edilir. Bu ifade (4.2.12) eşitliğinde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \frac{-z'''(x)\kappa^2(x) + z''(x)[y''(x)y'''(x) + z''(x)z'''(x)]}{\kappa^3(x)} \quad (4.2.14)$$

bulunur. Bu eşitlikte $\kappa^2(x) = y''^2(x) + z''^2(x)$ ifadesi yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \frac{-y''^2(x)z'''(x) + y''(x)y'''(x)z''(x)}{\kappa^3(x)} \quad (4.2.15)$$

olarak elde edilir. (4.2.15) eşitliğinden bir kez daha türev alırsak;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \frac{[-y''^2z''' + y''y'''z''](x)\kappa^3(x) - [-y''^2z''' + y''y'''z''](x)(\kappa^3(x))'}{\kappa^6(x)} \quad (4.2.16)$$

şeklinde olur. bu eşitlikteki türevler alınır (4.2.16) eşitliği;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \frac{\left(\begin{aligned} &[-2y''y'''z''' - y''^2z^{(4)} + y'''^2z'' + y''y^{(4)}z'' + y''y'''z'''](x)\kappa^3(x) \\ &- [-y''^2z''' + y''y'''z''](x)(3\kappa^2\kappa') \end{aligned} \right)(x)}{\kappa^6(x)} \quad (4.2.17)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.5.22) eşitliğiyle belli $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu ve (4.2.13) eşitliğiyle belli eğrilik fonksiyonunun türevi (4.2.17) denkleminde yazılırsa;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \frac{\left(\begin{aligned} &[-2y''y'''z''' - y''^2z^{(4)} + y'''^2z'' + y''y^{(4)}z'' + y''y'''z'''](y''^2 + z''^2)(x) \\ &- [-y''^2z''' + y''y'''z''](x)(3y''y''' + 3z''z''') \end{aligned} \right)(x)}{\kappa^5(x)} \quad (4.2.18)$$

olarak bulunur. Burada gerekli dağıtma işlemleri yapılarak;

$$\left(\frac{-z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \frac{\left(\begin{aligned} &2y'''^3y'''z''' - 2y''^2y'''^2z'' - 4y''y'''^2z''^2z''' - y''^4z^{(4)} \\ &+ y'''^3y^{(4)}z'' - y''^2z''^2z^{(4)} + y'''^2z''^3 + y''y^{(4)}z''^3 + 3y''^2z''z''^2 \end{aligned} \right)(x)}{\kappa^5(x)} \quad (4.2.19)$$

elde edilir. (4.2.12-15) eşitliklerindeki benzer işlemler yapılarak;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)' = \frac{y'''(x)z''^2(x) - y''(x)z''(x)z'''(x)}{\kappa^3(x)} \quad (4.2.20)$$

bulunur. Bu eşitlikten bir kez daha türev alıp (4.2.16-19) eşitliklerindeki gibi benzer işlemler yapılarak;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)'' = \frac{\begin{pmatrix} y^{(4)}z''^4 + y''^2y^{(4)}z''^2 - 2y'''z''^3z''' + 2y''z''^2z'''' - 3y''y'''z''^2 \\ -y'''z''^2z''' + 4y''^2y'''z''z''' - y'''z''z^{(4)} - y''z''^3z^{(4)} \end{pmatrix}(x)}{\kappa^5(x)} \quad (4.2.21)$$

elde edilir. Bu durumda (4.2.11) eşitliğiyle verilen determinanı hesaplamak için gerekli türev denklemleri elde edildi. O halde (4.2.15), (4.2.19), (4.2.20) ve (4.2.21) türev denklemleriyle verilen ifadeler (4.2.11) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$|B| = \frac{1}{\kappa^8(x_0)} \begin{pmatrix} (-y''^2z''' + y''y'''z'') \begin{pmatrix} y^{(4)}z''^4 + y''^2y^{(4)}z''^2 - 2y'''z''^3z''' + 2y''z''^2z'''' - 3y''y'''z''^2 \\ -y'''z''^2z''' + 4y''^2y'''z''z''' - y'''z''z^{(4)} - y''z''^3z^{(4)} \end{pmatrix} \\ -(y'''z''^2 - y''z''z''') \begin{pmatrix} 2y'''y'''z''' - 2y''^2y'''z''z''' - 4y''y'''z''^2z''' - y''^4z^{(4)} \\ +y'''y^{(4)}z'' - y''^2z''^2z^{(4)} + y''^2z''^3 + y''y^{(4)}z''^3 + 3y''^2z''z''^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \bigg\} (x_0)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$|B| = \frac{1}{\kappa^8(x_0)} \begin{pmatrix} -y''^2y^{(4)}z''^4z''' - y''^4y^{(4)}z''^2z''' + 2y''^2y'''z''^3z'''' - 2y'''z''^2z''^3 + 3y'''y'''z''^2z''' \\ +y''^5z''^3 - 4y''^4y'''z''z'''' + y''^5z''z''z^{(4)} + y'''z''^3z''z^{(4)} \\ y''y'''y^{(4)}z''^5 + y'''y'''y^{(4)}z''^3 - 2y''y'''z''^4z''' + 2y''^2y'''z''^3z'''' - 3y''^2y'''z''^3 \\ -y''^4y'''z''z'''' + 4y'''y'''z''^2z''' - y''^4y'''z''^2z^{(4)} - y''^2y'''z''^4z^{(4)} \\ -2y'''y'''z''^2z'''' + 2y''^2y'''z''^3z''' + 4y''y'''z''^2z''^4z''' + y''^4y'''z''^2z^{(4)} \\ -y'''y'''y^{(4)}z''^3 + y''^2y'''z''^4z^{(4)} - y'''z''^5 - y''y'''y^{(4)}z''^5 - 3y''^2y'''z''^3z'''' \\ 2y''^4y'''z''z'''' - 2y'''y'''z''^2z'''' - 4y''^2y'''z''^3z'''' - y''^5z''z''z^{(4)} \\ +y''^4y^{(4)}z''^2z''' - y'''z''^3z''z^{(4)} + y''y'''z''^4z''' + y''^2y^{(4)}z''^4z''' + 3y'''z''^2z''^3 \end{pmatrix} \bigg\} (x_0)$$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılsa;

$$|B| = \frac{1}{\kappa^8(x_0)} \begin{pmatrix} y'''z''^2z''^3 + 3y'''y'''z''^2z''' + y''^5z''^3 - 3y''^4y'''z''z'''' \\ -y''^2y'''z''^3 + 3y''y'''z''^4z''' - y'''z''^5 - 3y''^2y'''z''^3z'''' \end{pmatrix} \bigg\} (x_0)$$

elde edilir. Bu eşitlik ortak çarpan parantezine alınır;

$$|B| = \frac{1}{\kappa^8(x_0)} \begin{pmatrix} y''^2(3y''y'''z''^2z''' + y'''z''^3 - 3y''^2y'''z''z'''' - y'''z''^3) \\ +z''^2(3y''y'''z''^2z''' + y'''z''^3 - 3y''^2y'''z''z'''' - y'''z''^3) \end{pmatrix} \bigg\} (x_0) \quad (4.2.22)$$

bulunur. (4.2.22) eşitliğinden;

$$|B| = \frac{(y''^2 + z''^2)(3y''y'''z''^2z''' + y'''z''^3 - 3y''^2y'''z''z'''' - y'''z''^3)(x_0)}{\kappa^8(x_0)} \quad (4.2.23)$$

elde edilir. (2.6.11) denklemiyle verilen $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu için

$\kappa^2(x_0) = y''^2(x_0) + z''^2(x_0)$ olması (4.2.23) eşitliğinde yazılırsa;

$$|B| = \frac{(3y''y''^2z''^2z''' + y''^3z''^3 - 3y''^2y'''z''z''^2 - y''^3z''^3)(x_0)}{\kappa^6(x_0)} \quad (4.2.24)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.2.24) eşitliğinin son hali;

$$|B| = \frac{(y''(x_0)z'''(x_0) - y'''(x_0)z''(x_0))^3}{\kappa^6(x_0)} \quad (4.2.25)$$

olarak elde edilir.

$\alpha: I \rightarrow G^3$, $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ denklemiyle belli birim hızlı regüler bir eğri için $\tau(x)$ burulma fonksiyonu (2.5.21) eşitliğinden;

$$\tau(x) = \frac{\det(\gamma'(x), \gamma''(x), \gamma'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklindeir. Burada α eğrisinin türevleri bu eşitlikte yazılırsa;

$$\tau(x) = \frac{1}{\kappa^2(x)} \begin{vmatrix} 1 & y'(x) & z'(x) \\ 0 & y''(x) & z''(x) \\ 0 & y'''(x) & z'''(x) \end{vmatrix} \quad (4.2.26)$$

elde edilir. (4.2.26) eşitliğindeki determinant birinci sütuna göre açıldığında;

$$\tau(x) = \frac{y''(x)z'''(x) - y'''(x)z''(x)}{\kappa^2(x)} \quad (4.2.27)$$

$\tau(x)$ burulma fonksiyonu eğrinin koordinat fonksiyonları cinsinden ifade edilmiş olur.

Bu durumda (4.2.25) denkleminde (4.2.27) eşitliği kullanılırsa;

$$|B| = \tau^3(x_0) \quad (4.2.28)$$

bulunur. $\forall x \in I$ için $\tau(x) \neq 0$ olduğundan B matrisinin determinanı sıfırdan farklıdır.

Yani B matrisi regülerdir. $\square$

Şimdi (4.1.1) denklemiyle tanımlanan dayanak fonksiyonu için versal dallanma durumlarını ifade etmek için sabit farkıyla dayanak fonksiyonuyla aynı olan aşağıdaki fonksiyon;

$$\tilde{F}: I \times S_G^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{F}(x, u, w) = F_h(x, u) - w \quad (4.2.29)$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x \in I$ için $f_{h_{u_0}, w_0}(x) = \tilde{F}(x, u, w)$ olsun.

4.2.3.Önerme: Eğer $f_{h_{u_0}, w_0}$ fonksiyonu x_0 noktasında A_1 – tekiliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu $f_{h_{u_0}, w_0}$ fonksiyonunun bir versal dallanmasıdır.

İspat:

(4.2.2) denklemiyle belli $F(x, u)$ eşitliği, (4.2.29) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\tilde{F}(x, u, u_1) = \frac{1}{\kappa(x)} (u_3 y''(x) - u_2 z''(x) + y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)) - u_1 \quad (4.2.30)$$

elde edilir. Burada $w \in \mathbb{R}$ herhangi bir sayı olduğu için w yerine u_1 alınabilir.

F_h fonksiyonunun f_{hu_0} fonksiyonunun bir versal dallanması olması için, 3.1.11.Önerme ile verilen versallik için matris kriterini sağlaması gerekmektedir. Bunun

için de öncelikle $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i}(x, u_0), (i=1, 2, 3)$ şeklindeki fonksiyonların, (3.1.1) eşitliğiyle

verilen jet tanımından yararlanarak, sabit ile birlikte jetleri bulunmalıdır. A_1 – tekilliği

olduğu için sadece $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i}(x, u_0), (i=1, 2, 3)$ fonksiyonlarının x_0 noktasındaki değerlerini

bulmak yeterlidir. Bu durumda (4.2.30) eşitliğinden dolayı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) &= -1, \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) &= \frac{-z''(x)}{\kappa(x)}, \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) &= \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

şeklinde dir. Bu fonksiyonların x_0 noktasındaki değerleri;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) &= -1 \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) &= \frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) &= \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

olarak bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir versal dallanma olması için

3.1.11.Önermeden dolayı

$$C = \begin{bmatrix} -1 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) \end{bmatrix} \quad (4.2.33)$$

matrisinin maksimum ranka sahip olması yani regüler bir matris olması gerekmektedir. C matrisinin regüler olduğu açıktır. $\square$

4.2.4.Önerme:

f_{hu_0, w_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_2 – singülerliğine sahipse, bu durumda F_h fonksiyonu f_{hu_0, w_0} fonksiyonunun bir versal dallanmasıdır.

İspat:

F_h fonksiyonunun A_2 – tekilliğine sahip f_{hu_0, w_0} fonksiyonunun bir versal dallanma olması için, 3.1.11.Önerme ile verilen versallik için matris kriterini sağlaması gerekmektedir. Bunun için de öncelikle (4.2.31) denkleminde verilen fonksiyonların sabit ile birlikte 1-jetlerini bulunmalıdır. Bu durumda (3.1.1) ve (4.2.32) eşitlikleri kullanılarak fonksiyonların sabitli 1-jetleri;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) \right)(x_0) + J^1 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) \right)(x_0) &= -1 \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) \right)(x_0) + J^1 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) \right)(x_0) &= \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) + x \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) \right)(x_0) + J^1 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) \right)(x_0) &= \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) + x \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

elde edilir. O halde F_h fonksiyonunun bir versal dallanma olması için 3.1.11.Önerme ile verilen versallik için matris kriterinden;

$$D = \begin{bmatrix} -1 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) \\ 0 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \end{bmatrix} \quad (4.2.35)$$

elde edilen matrisin maksimum ranka sahip olması yani regüler olması gerekmektedir.

D matrisi 2×3 tipinde bir matris olduğundan dolayı regüler olması için $rank D = 2$ olmalıdır. 4.2.1.Önermeden D matrisinin ikinci satırının sıfırdan farklı olduğu bilinir.

Bu ise D matrisinin regüler olması için yeterlidir. $\square$

4.2.5.Önerme:

f_{hu_0, w_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_3 – tekilliğine sahipse, F_h fonksiyonu f_{hu_0, w_0} fonksiyonunun bir versal dallanmasıdır.

İspat:

(4.2.31) denklemiyle verilen fonksiyonların sabit ile birlikte 2-jetleri bulunmalıdır. Bu durumda (3.1.1) ve (4.2.32) eşitlikleri kullanılırsa, fonksiyonların sabitli 2-jetleri;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) + J^2 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) &= -1 \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) + J^2 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) &= \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) + x \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{x^2}{2} \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) + J^2 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) &= \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) + x \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{aligned}$$

bulunur. O halde F_h fonksiyonunun bir versal dallanma olması için 3.1.11.Önermeden dolayı

$$E = \begin{bmatrix} -1 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right) \\ 0 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ 0 & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{bmatrix} \quad (4.2.36)$$

eşitliğiyle belli olan E matrisinin maksimum ranka sahip olması, yani regüler bir matris olması gerekmektedir. E matrisi 3×3 tipinde bir matris olduğundan regüler olması için $\text{rank} E = 3$ olmalıdır. Buna denk bir ifadeyle; E matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. E matrisinin determinantı birinci sütuna göre açılırsa;

$$\begin{aligned} |E| &= (-1) \begin{vmatrix} \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{vmatrix} \\ &= - \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' + \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

elde edilir. (4.2.37) denkleminde (4.2.11) eşitliği kullanılırsa;

$$|E| = -|B| \quad (4.2.38)$$

olur. (4.2.28) eşitliği (4.2.38) denkleminde yazılırsa;

$$|E| = -\tau^3(x_0) \neq 0 \quad (4.2.39)$$

bulunur. Bu ise E matrisinin regüler olduğunu gösterir. $\square$

(4.1.19) eşitliğiyle tanımlı Galile uzaklık fonksiyonunun dallanma durumlarını ifade eden önermeler aşağıda verildi.

4.2.6.Önerme:

$$F_d : I \times G^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{fonksiyonu birim hızlı } \gamma : I \rightarrow G^3 \text{ eğrisi üzerinde tanımlı} \\ (x, u) \rightarrow F_d(x, u)$$

(4.1.19) eşitliğiyle verilen Galile uzaklık fonksiyonu olsun. Burada $\forall u \in G^3$ için şeklindedir. Eğer f_{du_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_2 -tekilliğine sahipse, F_d fonksiyonu f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur.

İspat:

(4.1.19) eşitliğinden $F_d(x, u) = |t(x) n(x) \gamma(x) - u|$ şeklindedir. Birim hızlı $\gamma : I \rightarrow G^3$ eğrisi için Frenet çatsısının teğet ve normal vektörlerinin sırasıyla (2.5.17) ve (2.5.19) eşitliklerinden; $t(x) = (1, y'(x), z'(x))$ ve $n(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, y''(x), z''(x))$ şeklindedir. Yine $u \in G^3$ olduğundan $u = (u_1, u_2, u_3)$ olarak alınır. O halde bunlar $F_d(x, u) = |t(x) n(x) \gamma(x) - u|$ eşitliğinde yazılırsa;

$$F_d(x, u) = \begin{vmatrix} 1 & y'(x) & z'(x) \\ 0 & \frac{y''(x)}{\kappa(x)} & \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \\ x - u_1 & y(x) - u_2 & z(x) - u_3 \end{vmatrix} \quad (4.2.40)$$

şeklinde olur. Bu determinant birinci sütuna göre açılırsa;

$$F_d(x, u) = \begin{vmatrix} \frac{y''(x)}{\kappa(x)} & \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \\ y(x) - u_2 & z(x) - u_3 \end{vmatrix} + (x - u_1) \begin{vmatrix} y'(x) & z'(x) \\ \frac{y''(x)}{\kappa(x)} & \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \end{vmatrix} \quad (4.2.41)$$

elde edilir. Bu denklemdeki determinantlarda açılarak;

$$F_d(x, u) = (x - u_1) \left(y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right) - (y(x) - u_2) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + (z(x) - u_3) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.42)$$

γ eğrinin koordinatları ve u vektörün bileşenleri cinsinden açık olarak elde edilir.

F_d fonksiyonunun, A_2 – tekilliğine sahip, f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için; 3.1.9.Önerme ile verilen (p)-versallik için matris kriterini sağlaması gerekir. Bunun için de öncelikle $\frac{\partial F_d}{\partial u_i}(x, u_0), (i = 2, 3)$ şeklindeki

fonksiyonların 1-jetlerini bulunmalıdır. (4.2.42) eşitliğinden dolayı;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_d}{\partial u_1}(x, u_0) &= -y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)}, \\ \frac{\partial F_d}{\partial u_2}(x, u_0) &= \frac{z''(x)}{\kappa(x)}, \\ \frac{\partial F_d}{\partial u_3}(x, u_0) &= -\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

elde edilir. Bu fonksiyonların x_0 noktasındaki 1-jetleri (3.1.1) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} J^1 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \\ J^1 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \\ J^1 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.1.9.Önermesinden dolayı, (4.2.44) denklem sisteminin katsayılarından elde edilen

$$K = \left[\left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)', \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \right] \quad (4.2.45)$$

1×3 tipindeki K matrisinin regüler olması gerekmektedir. Bunun için herhangi bir sütundaki ifadenin sıfırdan farklı olması yeterlidir. (2.5.20) eşitliğiyle verilen binormal vektörünü düşünürsek;

$$\left(0, \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)', \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'\right) = -b'(x_0) \quad (4.2.46)$$

şeklinde olup, (2.5.21) eşitlikleriyle belli Frenet denklemlerinden;

$$\left(0, \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)', \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'\right) = \tau(x_0) n(x_0) \quad (4.2.47)$$

elde edilir. (4.2.47) eşitliğinin sol tarafı, α eğrisinin $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olmasından dolayı sıfırdan farklıdır. Bu durumda;

$$\left(0, \left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)', \left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'\right) \neq 0 \quad (4.2.48)$$

olarak elde edilir. Bu ise $\left(\frac{-z''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'$ ve $\left(\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)}\right)'$ ifadelerinden en az birinin sıfırdan

farklı olması demektir. O halde (4.2.45) eşitliğiyle tanımlı K matrisi için $\text{rank} K = 1$ olur. Dolayısıyla K matrisi regülerdir. Sonuç olarak F_d fonksiyonu x_0 noktasında A_2 –tekilliklerine sahip f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur. $\square$

4.2.7.Önerme:

Eğer f_{du_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_3 –tekilliğine sahipse, bu durumda F_d fonksiyon f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanmasıdır.

İspat:

$$(4.2.43) \text{ eşitlikleriyle belli } \frac{\partial F_d}{\partial u_i}(x, u_0), (i=1, 2, 3) \text{ fonksiyonlarının, } (3.1.1)$$

eşitliğiyle verilen jet tanımından yararlanarak x_0 noktasındaki 2-jetleri;

$$J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) = x \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'', \quad (4.2.49)$$

$$J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) = x \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'',$$

$$J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) = x \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için

3.1.9.Önermeden dolayı

$$L = \begin{bmatrix} \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{bmatrix} \quad (4.2.50)$$

eşitliğiyle belli L matrisinin maksimum ranka sahip olması yani regüler bir matris olması gerekmektedir. L matrisi 2×3 tipinde bir matris olduğundan dolayı regüler olması için, L matrisinde kapsanan 2×2 tipindeki bütün karesel matrislerin en az birinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. L matrisinde kapsanan 2×2 tipindeki alt matrislerden birisi;

$$L_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{bmatrix} \quad (4.2.51)$$

matrisidir. 4.2.2.Önermede (4.2.10) eşitliğiyle verilen B matrisini kullanırsak;

$$L_1 = -B \quad (4.2.52)$$

elde edilir. Bu durumda (4.2.28) eşitliğinden $|B| = \tau^3(x_0) \neq 0$ olması ve (4.2.52) denklemi kullanılırsa L_1 matrisinin determinantı sıfırdan farklı olur. Bundan dolayı (4.2.50) eşitliğiyle verilen L matrisi regüler bir matristir. $\square$

4.2.8.Önerme:

Eğer f_{du_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_4 -tekilliğine sahipse, bu durumda F_d fonksiyonu f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanmasıdır.

İspat:

(4.2.43) eşitlikleriyle belli $\frac{\partial F_d}{\partial u_i}(x, u_0), (i=1, 2, 3)$ fonksiyonlarının, (3.1.1)

eşitliğiyle verilen jet tanımından yararlanarak x_0 noktasında 3-jetleri;

$$\begin{aligned} J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_1}(x, u_0) \right) (x_0) &= x \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ &\quad + \frac{1}{2} x^2 \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ &\quad + \frac{1}{6} x^3 \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''', \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

$$J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_2}(x, u_0) \right) (x_0) = x \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' + \frac{1}{6} x^3 \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''',$$

$$J^2 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_3}(x, u_0) \right) (x_0) = x \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' + \frac{1}{2} x^2 \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' + \frac{1}{6} x^3 \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'''$$

olarak bulunur. O halde F_d fonksiyonunun bir (p)-versal dallanma olması için 3.1.9.Önerme ile verilen matris kriterinden dolayı; (4.2.53) denklem sisteminin katsayılarından elde edilen

$$M = \begin{bmatrix} \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{bmatrix} \quad (4.2.54)$$

eşitliğiyle belli M matrisinin maksimum ranka sahip olması yani regüler bir matris olması gerekmektedir. Bunun için de M matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Birinci sütuna göre M matrisinin determinantını açılırsa;

$$\begin{aligned}
|M| = & \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} \\
& - \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} \\
& + \left(-y'(x_0) \frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} + z'(x_0) \frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

elde edilir. M matrisinin determinantını bulmak için (4.2.55) eşitliğindeki determinantları ve diğer türev denklemleri ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' &= -y''(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - y'(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' \\
&+ z''(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' \\
&= +z'(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' - y'(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)'
\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

bulunur. (4.2.15) ve (4.2.20) eşitliklerinden $\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)'$ ve $\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)'$ türevleri (4.2.56)

eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' &= z'(x) \left(\frac{y'''(x) z''(x) - y''(x) z'''(x)}{\kappa^3(x)} \right) \\
&- y'(x) \left(\frac{y''^2(x) z'''(x) - y''(x) y'''(x) z''(x)}{\kappa^3(x)} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenip, (4.2.27) eşitliğiyle verilen $\tau(x)$ burulma fonksiyonu bu ifadede yazıldığında (4.2.57) eşitliği;

$$\left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \tau(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \quad (4.2.58)$$

elde edilir. Bu eşitlikten bir kez daha türev alınırsa;

$$\begin{aligned} \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)'' &= \tau'(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad + \tau(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

bulunur. (4.2.59) denkleminde bulunan

$$\left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)$$

ifadesinin türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)' &= \frac{-(z'(x) z''(x) + y'(x) y''(x))' \kappa(x)}{\kappa^2(x)} \\ &\quad + \frac{(z'(x) z''(x) + y'(x) y''(x)) \kappa'(x)}{\kappa^2(x)} \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

elde edilir. Buradaki gerekli türevler alınıp (4.2.13) eşitliğiyle belli $\kappa'(x)$ eğrilik fonksiyonunun türevi (4.2.60) denkleminde yazıldığında;

$$\begin{aligned} \left(\frac{-z'z'' - y'y''}{\kappa} \right)'(x) &= \frac{-(z''^2(x) + z'(x) z'''(x) + y''^2(x) + y'(x) y'''(x)) \kappa^2(x)}{\kappa^3(x)} \\ &\quad + \frac{(z'(x) z''(x) + y'(x) y''(x)) (y''(x) y'''(x) + z''(x) z'''(x))}{\kappa^3(x)} \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

bulunur. (2.5.22) denkleminde belli $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu (4.2.61) eşitliğinin pay kısmında yazılıp gerekli dağıtma işlemleri yapıldığında;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-z'z'' - y'y''}{\kappa} \right)'(x) &= - \frac{\left(y''^4(x) + y''^2(x) z'(x) z'''(x) \right.}{\kappa^3(x)} \\
&\quad \left. + y''^2(x) z''^2(x) + y'(x) y''^2(x) y'''(x) \right) \\
&\quad - \frac{\left(y''^2(x) z''^2(x) + z'(x) z''^2(x) z'''(x) + z''^4(x) + y'(x) y'''(x) z''^2(x) \right)}{\kappa^3(x)} \\
&\quad + \frac{\left(y''(x) y'''(x) z'(x) z''(x) + y'(x) y''^2(x) y'''(x) \right)}{\kappa^3(x)} \\
&\quad + \frac{\left(z'(x) z''^2(x) z'''(x) + y'(x) y''(x) z''(x) z'''(x) \right)}{\kappa^3(x)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-z'z'' - y'y''}{\kappa} \right)'(x) &= \frac{-\left(y''^4(x) + y''^2(x) z'(x) z'''(x) + y''^2(x) z''^2(x) \right)}{\kappa^3(x)} \\
&\quad - \frac{\left(y''^2(x) z''^2(x) + z''^4(x) + y'(x) y'''(x) z''^2(x) \right)}{\kappa^3(x)} \\
&\quad + \frac{\left(y''(x) y'''(x) z'(x) z''(x) + y'(x) y''(x) z''(x) z'''(x) \right)}{\kappa^3(x)}
\end{aligned} \tag{4.2.62}$$

bulunur. (4.2.62) eşitliğini, (4.2.27) eşitliğiyle verilen $\tau(x)$ burulma fonksiyonu ve (2.6.11) denklemiyle verilen $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonuna bağlı olarak ifade edilirse;

$$\left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)' = -\kappa(x) + \tau(x) \frac{\left(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x) \right)}{\kappa(x)} \tag{4.2.63}$$

elde edilir. (4.2.59) denkleminde (4.2.63) eşitliğiyle verilen ifade yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)'' &= \tau'(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
&\quad + \tau(x) \left(-\kappa(x) + \tau(x) \frac{\left(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x) \right)}{\kappa(x)} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.64}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.2.64) eşitliği $\tau(x)$ burulma fonksiyonu ve $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonuna bağlı olarak;

$$\begin{aligned} \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' &= \tau'(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad - \kappa(x) \tau(x) + \tau^2(x) \frac{(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x))}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

elde edilir. (4.2.65) eşitliğinden bir kez daha türev alındığında;

$$\begin{aligned} \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)''' &= \tau''(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad + \tau'(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)' + \tau^2(x) \left(\frac{(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x))}{\kappa(x)} \right)' \\ &\quad - (\kappa(x) \tau(x))' + 2\tau(x) \tau'(x) \frac{(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x))}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.66)$$

bulunur. Bu denklemdaki

$$\left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right)'$$

ifadesi (4.2.63) eşitliğinden (4.2.66) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)''' &= \tau''(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad - 2\kappa(x) \tau'(x) + \tau'(x) \tau(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad - \kappa'(x) \tau(x) + 2\tau(x) \tau'(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\ &\quad + \tau^2(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

elde edilir. Bu durumda (4.2.67) denkleminin belli olması için

$$\left(\frac{(y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x))}{\kappa(x)} \right)'$$

ifadesini bulmalıyız. Bu bir bölüm türevi olduğundan

$$\left(\frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} \right)' = \frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))' \kappa(x)}{\kappa^2(x)} - \frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x)) \kappa'(x)}{\kappa^2(x)} \quad (4.2.68)$$

bulunur. Buradaki gerekli türevler alınıp (4.2.13) eşitliğiyle belli $\kappa'(x)$ eğrilik fonksiyonunun türevi ve (2.5.22) eşitliğiyle belli $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu (4.2.68) denkleminde yazıldığında;

$$\left(\frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} \right)' = \frac{(y'(x)z'''(x) - y'''(x)z'(x))(y''^2(x) + z''^2(x))}{\kappa^3(x)} - \frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))(y''(x)y'''(x) + z''(x)z'''(x))}{\kappa^3(x)} \quad (4.2.69)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \left(\frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} \right)' &= \frac{(y'(x)y''^2(x)z'''(x) - y''^2(x)y'''(x)z'(x))}{\kappa^3(x)} \\ &+ \frac{(y'(x)z''^2(x)z'''(x) - y'''(x)z'(x)z''^2(x))}{\kappa^3(x)} \\ &- \frac{(y'(x)y''(x)y'''(x)z''(x) - y''^2(x)y'''(x)z'(x))}{\kappa^3(x)} \\ &- \frac{(y'(x)z''^2(x)z'''(x) - y''(x)z'(x)z''(x)z'''(x))}{\kappa^3(x)} \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

bulunur. (4.2.70) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak $\tau(x)$ burulma fonksiyonu ve $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonuna bağlı olarak;

$$\left(\frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} \right)' = \tau(x) \left(\frac{y'(x)y''(x) + z'(x)z''(x)}{\kappa(x)} \right) \quad (4.2.71)$$

elde edilir. (4.2.71) eşitliği (4.2.67) ifadesinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)''' = \tau''(x) \left(\frac{-z'(x) z''(x) - y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& -2\kappa(x) \tau'(x) + \tau'(x) \tau(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& -\kappa'(x) \tau(x) + 2\tau(x) \tau'(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& + \tau^2(x) \left(\tau(x) \left(\frac{y'(x) y''(x) + z'(x) z''(x)}{\kappa^2(x)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.2.72}$$

olarak bulunur. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
& \left(-y'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + z'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)''' = (\tau^3(x) - \tau''(x)) \left(\frac{z'(x) z''(x) + y'(x) y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& + 3\tau(x) \tau'(x) \left(\frac{y'(x) z''(x) - y''(x) z'(x)}{\kappa(x)} \right) - 2\kappa(x) \tau'(x) - \kappa'(x) \tau(x)
\end{aligned} \tag{4.2.73}$$

elde edilir.

(4.2.55) eşitliğindeki determinantlar hesaplanırsa bu determinantlardan birisi

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{vmatrix} \tag{4.2.74}$$

şeklinde olup, bu determinant (4.2.10) eşitliğiyle belli B matrisinin determinantının ters işaretlisidir. Bununla birlikte (4.2.28) eşitliğinden $|B| = \tau^3(x_0)$ olması (4.2.74) ifadesinde kullanırsa;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \end{vmatrix} = -\tau^3(x_0) \tag{4.2.75}$$

olarak bulunur. (4.2.55) eşitliğindeki diğer bir determinant açılırsa;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' - \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \quad (4.2.76)$$

elde edilir. Eğer (4.2.11) denkleminde verilen B matrisinin determinantının ve (4.2.28) eşitliğinde türevini alınırsa (4.2.76) eşitliği;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = -3\tau^2(x_0)\tau(x_0) \quad (4.2.77)$$

elde edilir. Son olarak (4.2.55) eşitliğindeki son determinant,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' - \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \quad (4.2.78)$$

olarak bulunur. Bu determinantı hesaplamak için (4.2.78) eşitliğindeki türevleri tek tek hesaplamak gerekmektedir. O halde (4.2.15) eşitliğinden;

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \frac{y''^2(x)z'''(x) - y''(x)y'''(x)z''(x)}{\kappa^3(x)}$$

olduğu biliniyor. Eğer bu ifade düzenlenirse;

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \left(\frac{y''(x)z'''(x) - y'''(x)z''(x)}{\kappa^2(x)} \right) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.79)$$

elde edilir. (4.2.27) eşitliğiyle verilen $\tau(x)$ burulma fonksiyonu (4.2.79) denkleminde yazılırsa;

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \tau(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.80)$$

olur. Bu eşitlikten bir kez daha türev alınırsa;

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \tau'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} + \tau(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' \quad (4.2.81)$$

bulunur. (4.2.20) eşitliğiyle verilen

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' = \frac{y'''(x) z''^2(x) - y''(x) z''(x) z'''(x)}{\kappa^3(x)}$$

ifadesi $\tau(x)$ burulma fonksiyonuna göre düzenlenirse;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' = -\tau(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.82)$$

elde edilir. (4.2.82) eşitliği (4.2.81) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = \tau'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.83)$$

bulunur. Bu eşitlikten bir kez daha türev alınır;

$$\begin{aligned} \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)''' &= \tau''(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} + \tau'(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)' \\ &\quad - 2\tau(x) \tau'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' \end{aligned} \quad (4.2.84)$$

elde edilir. (4.2.80) ve (4.2.82) eşitlikleri bu denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)''' &= \tau''(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} - \tau(x) \tau'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \\ &\quad - 2\tau(x) \tau'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau^3(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.85)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse;

$$\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)''' = (\tau''(x) - \tau^3(x)) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} - 3\tau(x) \tau'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.86)$$

elde edilir. (4.2.82) eşitliğinden bir kez daha türev alınır;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)'' = -\tau'(x) \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)' \quad (4.2.87)$$

olarak bulunur. Bu denklemde (4.2.80) eşitliği kullanılarak;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)'' = -\tau'(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.88)$$

elde edilir. Bu eşitlikten bir kez daha türev alındığında;

$$\begin{aligned} \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)''' &= -\tau''(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau'(x)\left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)}\right)' \\ &\quad - 2\tau(x)\tau'(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x)\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)' \end{aligned} \quad (4.2.89)$$

elde edilir. (4.2.80) ve (4.2.82) eşitlikleri (4.2.88) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)''' &= -\tau''(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau'(x)\tau(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \\ &\quad - 2\tau(x)\tau'(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} + \tau^3(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \end{aligned} \quad (4.2.90)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse;

$$\left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right)''' = (\tau^3(x) - \tau''(x))\frac{z''(x)}{\kappa(x)} - 3\tau'(x)\tau(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \quad (4.2.91)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.2.78) denklemiyle belli determinanı hesaplamak için gerekli türev denklemleri elde edildi. (4.2.83), (4.2.86), (4.2.88) ve (4.2.91) eşitlikleriyle verilen ifadeler (4.2.78) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned} &= \left(\tau'(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)}\right) \left(-(\tau^3(x) - \tau''(x))\frac{z''(x)}{\kappa(x)} + 3\tau'(x)\tau(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right) \\ &\quad - \left((\tau''(x) - \tau^3(x))\frac{y''(x)}{\kappa(x)} - 3\tau(x)\tau'(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)}\right) \left(+\tau'(x)\frac{z''(x)}{\kappa(x)} + \tau^2(x)\frac{y''(x)}{\kappa(x)}\right) \end{aligned} \quad (4.2.92)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = -\tau^3(x) \tau'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + \tau^5(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 \\
& + \tau'(x) \tau''(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x) \tau''(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 + 3\tau'^2(x) \tau(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 \\
& - 3\tau'(x) \tau^3(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau'(x) \tau''(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)} + \tau^5(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 \\
& + \tau^3(x) \tau'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)} - \tau^2(x) \tau''(x) \left(\frac{y''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 + 3\tau(x) \tau'^2(x) \left(\frac{z''(x)}{\kappa(x)} \right)^2 \\
& + 3\tau^3(x) \tau'(x) \frac{y''(x)}{\kappa(x)} \frac{z''(x)}{\kappa(x)}
\end{aligned} \tag{4.2.93}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^5(x) + 3\tau(x) \tau'^2(x) \\ -\tau^2(x) \tau''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y''^2(x)}{\kappa^2(x)} + \frac{z''^2(x)}{\kappa^2(x)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.94}$$

bulunur. (2.5.22) denklemiyle verilen $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu bu eşitlikte kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \\ \left(\frac{z''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' & \left(-\frac{y''(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)''' \end{vmatrix} = \tau^5(x) + 3\tau(x) \tau'^2(x) - \tau^2(x) \tau''(x)
\end{aligned} \tag{4.2.95}$$

elde edilir.

Sonuç olarak (4.2.55) denklemiyle verilen M matrisinin determinantını hesaplamak için gerekli tüm ifadeler elde edildi. O halde (4.2.58), (4.2.65), (4.2.73), (4.2.75), (4.2.77) ve (4.2.95) eşitlikleri (4.2.55) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
|M| = & \left[\tau(x) \left(\frac{-z'(x)z''(x) - y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \right] (\tau^5(x) + 3\tau(x)\tau'^2(x) - \tau^2(x)\tau''(x)) \\
& - \left[\begin{aligned} & \tau'(x) \left(\frac{-z'(x)z''(x) - y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ & - \kappa(x)\tau(x) + \tau^2(x) \frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} \end{aligned} \right] (3\tau^2(x_0)\tau(x_0)) \\
& + \left[\begin{aligned} & (\tau^3(x) - \tau''(x)) \left(\frac{z'(x)z''(x) + y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\ & + 3\tau(x)\tau'(x) \left(\frac{y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\ & - 2\kappa(x)\tau'(x) - \kappa'(x)\tau(x) \end{aligned} \right] (\tau^3(x_0))
\end{aligned} \tag{4.2.96}$$

olur. Bu denklem açılırsa;

$$\begin{aligned}
|M| = & (\tau^6(x) + 3\tau^2(x)\tau'^2(x) - \tau^3(x)\tau''(x)) \left(\frac{-z'(x)z''(x) - y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& - 3\tau^2(x_0)\tau'^2(x) \left(\frac{-z'(x)z''(x) - y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& - 3\tau^4(x)\tau'(x_0) \frac{(y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x))}{\kappa(x)} + 3\kappa(x)\tau^3(x)\tau'(x_0) \\
& + (\tau^6(x) - \tau^3(x_0)\tau''(x)) \left(\frac{z'(x)z''(x) + y'(x)y''(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& + 3\tau^4(x)\tau'(x) \left(\frac{y'(x)z''(x) - y''(x)z'(x)}{\kappa(x)} \right) \\
& - 2\kappa(x)\tau^3(x_0)\tau'(x) - \kappa'(x)\tau^4(x)
\end{aligned} \tag{4.2.97}$$

bulunur. Bu ifade de gerekli sadeleştirmeler yapıldığında;

$$|M| = \kappa(x)\tau^3(x)\tau'(x_0) - \kappa'(x)\tau^4(x) \tag{4.2.98}$$

elde edilir. Bu denklem $\tau^3(x)$ ortak çarpan parantezine alınır;

$$|M| = \tau^3(x)(\kappa(x)\tau'(x_0) - \kappa'(x)\tau(x)) \tag{4.2.99}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.1.29b) eşitliğiyle belli $\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)'$ ifadesi (4.2.99) denkleminde

kullanılırsa;

$$|M| = \kappa^2(x_0) \tau^3(x_0) \left(\frac{\tau(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \quad (4.2.100)$$

elde edilir. Burada γ eğrisinin $\forall x \in I$ için $\kappa(x) \neq 0$ ve $\tau(x) \neq 0$ şeklinde birim hızlı bir eğri olduğu için $\kappa(x_0) \neq 0$ ve $\tau(x_0) \neq 0$ olduğu biliniyor. (4.2.8). Önermenin ifadesinde f_{du_0} fonksiyonu x_0 noktasında A_4 -tekilliğine sahip bir fonksiyon

olduğundan 4.1.4. Önermeden dolayı $\left(\frac{\tau(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' \neq 0$ şeklindedir. Bunların sonucu olarak

M matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Yani M matrisi regüler bir matristir. Bu durumda F_d fonksiyon ailesi f_{du_0} fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olur. $\square$

4.3. Bazı Geometrik Sonuçlar

Bu bölümde 4.1 ve 4.2 kısımlarında elde edilen ifadelerin bir sonucu olarak, Galile geometrisinde birim hızlı eğriler üzerinde tanımlı bazı eğriler ve yüzeylerle ilgili geometrik sonuçlar verildi.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow G_3$, $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. Bu durumda α eğrisinin Frenet elemanları $t(x), n(x), b(x), \kappa(x)$ ve $\tau(x)$ (2.5.17), (2.5.19), (2.5.20) ve (2.5.22) denklemleriyle verilir.

4.3.1. Tanım:

$$\widetilde{D}(x) = \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} t(x) + b(x) \quad (4.3.1)$$

vektör alanına α eğrisinin değiştirilmiş (modifiye) darboux vektör alanı denir.

4.3.2. Tanım:

Galile uzayında birim vektörlerin kümesi yani birim küre S^2_c olsun. Bu durumda

$$d: I \rightarrow S^2_c, \quad d(x) = \frac{D(x)}{\|D(x)\|} \quad (4.3.2)$$

şeklinde tanımlı eğriye küresel eğri denir. d fonksiyonunun görüntüsüne küresel darboux görüntüsü denir. Burada $D(x)$ vektörü (2.5.23) denklemiyle verilen Darboux vektörüdür.

4.3.3.Tanım:

α eğrisinin $t(x)$ teğet vektörü yardımıyla tanımlanan

$$\sigma: I \rightarrow S^2_g, \quad \sigma(x) = t(x) \quad (4.3.3)$$

σ eğrisine, α eğrisinin Galile küresel teğetler göstergesi denir. Ayrıca σ eğrisine; teğet vektörünün küre üzerinde çizdiği eğri olduğu için teğet eğrisi de denilebilir.

4.3.4.Tanım:

$$RG(\alpha) = \{ut(x) + b(x) / u \in \mathbb{R}, x \in I\} \quad (4.3.4)$$

şeklinde tanımlı yüzeye; α eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi denir.

4.3.5.Tanım:

$$RD(\alpha) = \{\alpha(x) + u\tilde{D}(x) / u \in \mathbb{R}, x \in I\} \quad (4.3.5)$$

şeklinde tanımlı yüzeye; α eğrisinin açılabilir rektifiyan yüzeyi denir.

4.3.6.Teorem:

α eğrisi bir helis eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{D}(x)$ değiştirilmiş Darboux vektörü sabit olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$) α eğrisi bir helis olsun. bu durumda $\forall x \in I$ için $\tilde{D}(x)$ vektörünün sabit olduğunu gösterilmelidir. Bunun için $\tilde{D}(x)$ vektörünün türevinin sıfır olduğunu göstermek yeterlidir. O halde (4.3.1) eşitliğinin türevi alınır;

$$\tilde{D}'(x) = \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} t(x) + b(x) \right)' \quad (4.3.6)$$

elde edilir. Bu ifade açılırsa;

$$\tilde{D}'(x) = \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' t(x) + \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} t'(x) + b'(x) \quad (4.3.7)$$

bulunur. Bu eşitlikte (2.5.21) denklemleriyle verilen Frenet denklemleri kullanılarak;

$$\tilde{D}'(x) = \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' t(x) + \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \kappa(x) n(x) - \tau(x) n(x) \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\widetilde{D}'(x) = \left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' t(x) \quad (4.3.9)$$

bulunur. α eğrisi bir helis olduğundan $\forall x \in I$ için $\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} = c$ sabittir (Röschel, 1984).

Bundan dolayı

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' = 0 \quad (4.3.10)$$

olur. Bu ifade (4.3.9) denkleminde kullanılırsa;

$$\widetilde{D}'(x) = 0 \quad (4.3.11)$$

elde edilir. Bu ise $\widetilde{D}(x)$ vektörünün sabit bir vektör olduğunu gösterir.

$\Leftrightarrow \widetilde{D}(x)$ vektörü sabit bir vektör olsun. Bu durumda α eğrisinin bir helis olduğu gösterilmelidir. $\widetilde{D}(x)$ vektörü sabit bir vektör ise $\widetilde{D}'(x) = 0$ elde edilir. Bu eşitlik (4.3.9) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' t(x) = 0 \quad (4.3.12)$$

bulunur. α eğrisi regüler bir eğri olduğundan $\forall x \in I$ için $\alpha'(x) \neq 0$ olur. (2.5.17)

denkleminde verilen $t(x)$ teğet vektörü $\alpha'(x) = t(x)$ olduğundan $\forall x \in I$ için

$$t(x) \neq 0 \quad (4.3.13)$$

elde edilir. Bu durumda (4.3.12) ve (4.3.13) denklemlerinden;

$$\left(\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \right)' = 0 \quad (4.3.14)$$

olur. Bu eşitlikten integral alınırsa;

$$\frac{\tau(x)}{\kappa(x)} = c_1 \quad (4.3.15)$$

sabit olarak bulunur. $\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}$ sabit ise α eğrisi bir helistir (Röschel, 1984). $\square$

4.3.7.Sonuç: Eğer α eğrisi bir helis ise, α eğrisinin açılabilir rektifiyan yüzeyi bir silindirik yüzeydir.

İspat:

(4.3.5) denklemiyle verilen $RD(\alpha) = \{\alpha(x) + u\tilde{D}(x) \mid u \in \mathbb{R}, x \in I\}$ açılabilir rektifiyan yüzeyi için 4.3.5.Teoremden dolayı $\tilde{D}(x)$ değiştirilmiş Darboux vektörü sabittir. Sonuç olarak α eğrisinin açılabilir rektifiyan yüzeyi, doğrultman vektörü sabit olan yani birbirine paralel doğruların α eğrisi üzerinde hareketiyle meydana gelen bir yüzey olur. Bundan dolayı silindirik bir yüzeydir. $\square$

4.3.8.Teorem:

Eğer α eğrisi bir helis ise bu durumda α eğrisinin Galile küresel teğetler göstergesi, S^2_c Galile birim küresi üzerinde bir çemberimsi (cycle) eğrisidir.

İspat:

(4.3.3) denklemiyle verilen $\sigma(x)$ Galile küresel teğetler göstergesinin ardışık türevleri için (2.5.21) Frenet denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= t(x), \\ \sigma'(x) &= \kappa(x)n(x), \\ \sigma''(x) &= \kappa'(x)n(x) + \kappa(x)\tau(x)b(x)\end{aligned}\tag{4.3.16}$$

elde edilir. Bu durumda $\sigma(x)$ Galile küresel teğetler göstergesinin eğriliği

$$\kappa_\sigma(x) = \frac{\tau(x)}{\kappa(x)}\tag{4.3.17}$$

olarak bulunur. α eğrisi bir helis eğrisi olduğu için $\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}$ sabit olduğundan; σ eğrisinin $\kappa_\sigma(x)$ eğriliği sabit olur. Bundan dolayı $\sigma(x)$ Galile küresel teğetler göstergesi, Galile küresi üzerinde bir çemberimsi eğrisi olur. $\square$

4.3.9.Teorem:

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow G^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda; Küresel darboux görüntüsünün $d(x_0)$ noktasında $\mathbf{C}$ köşeli (cusp) eğrisine diffeomorf olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{\tau(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)' = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau(x_0)}{\kappa(x_0)} \right)'' \neq 0\tag{4.3.18}$$

olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$): Küresel darbox görüntüsü, $d(x_0)$ noktasında $\mathbf{C}$ köşeli (cusp) eğrisine diffeomorf olsun. O halde küresel darbox görüntüsü; bir F dönüşümünün zarf kümesi olarak düşünülürse; F dönüşümü A_2 -tekilliğine sahip bir versal dallanma olmalıdır. Yani

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \neq 0$$

koşulları sağlanmalıdır. (4.3.2) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= t(x) + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(x)b(x), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(x)b(x), \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)''(x)b(x) - \tau(x)\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(x)n(x) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

elde edilir. Küresel darbox görüntüsü, F dönüşümünün zarf kümesi olduğundan

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{eşitlikleri sağlanmış olur. O halde} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \neq 0 \quad \text{olması için,}$$

(4.3.19) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x) \neq 0$$

elde edilir. $\square$

$$\Leftrightarrow): \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x) \neq 0 \quad \text{olsun. Bu durumda } F \text{ dönüşümünün}$$

zarf kümesi küresel darbox görüntüsü olarak düşünüldüğünde; F dönüşümü A_2 -tekilliğine sahip bir versal dallanma olur. F dönüşümünün zarf kümesi yani küresel darbox görüntüsü, köşeli eğriye diffeomorf olur. $\square$

4.3.10. Teorem:

$RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyinin $ut(x_0) + b(x_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyine diffomorf olması için gerek ve yeter koşul

$$u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(x_0) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) \neq 0 \quad (4.3.20)$$

olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$): $RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyi $ut(x_0) + b(x_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyine diffeomorf olsun. (4.3.4) eşitliğiyle belli $RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyi bir F dönüşümünün zarf kümesi olarak düşünülürse; $RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyi $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyine diffeomorf olur. Bu ise F dönüşümünün A_2 –tekilliğine sahip bir versal dallanma olması demektir. Bunun için gerekli türev denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= ut(x) + b(x), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= (u\kappa(x) - \tau(x))n(x) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

şeklindedir. O halde A_2 –tekillikleri için;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0 \Rightarrow u = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (x_0), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \neq 0 \Rightarrow u = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (x_0), \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. $\square$

$\Leftarrow$): Benzer işlemlerle kolayca elde edilir. $\square$

4.3.11. Teorem:

$RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyinin $uT(x_0) + B(x_0)$ noktasında SW

kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyine diffeomorf olması için gerek ve yeter koşul

$$u = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (x_0), \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (x_0) = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'' (x_0) \neq 0 \quad (4.3.22)$$

İspat:

$\Rightarrow$): $RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyi $uT(x_0) + B(x_0)$ noktasında SW kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyine diffeomorf olsun. Bu durumda zarf kümesi $RG(\alpha)$ yüzeyi olan F dönüşümü 3.1.14. Teoremden dolayı A_3 –tekilliğine sahip bir versal dallanma olur. O halde (4.3.4) eşitliğinden gerekli türevler alınarak;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= (u\kappa'(x) - \tau'(x))n(x) + (u\kappa(x) - \tau(x))(-\tau'(x))b(x), \\
\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} &= (u\kappa''(x) - \tau''(x) - u\tau^2(x)\kappa'(x) + \tau^2(x)\tau'(x))n(x) \\
&\quad + (2u\tau(x)\kappa'(x) + \tau(x)\tau'(x) - u\kappa(x)\tau'(x))b(x)
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

elde edilir. A_3 -tekilliği için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 &\Rightarrow u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(x_0), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0 &\Rightarrow u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(x_0), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) = 0, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0, \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \neq 0 &\Rightarrow u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(x_0), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) = 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x_0) \neq 0
\end{aligned}$$

koşulları sağlanır. $\square$

$$\Leftarrow): u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(x_0), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) = 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x_0) \neq 0 \text{ olsun. Bu durumda zarfı } RG(\alpha)$$

yüzeyi olan F dönüşümü A_3 -tekilliğine sahip bir versal dallanma olur. Bu ise 3.1.14. Teoremden dolayı D_F zarf kümesinin yani $RG(\alpha)$ rektifiyan Gauss yüzeyinin; SW kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyine diffeomorf olduğunu gösterir. $\square$

4.3.12. Teorem:

$RD(\alpha)$ açılabilir rektifiyan yüzeyinin $\alpha(x_0) + u\tilde{D}(x_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$

köşeli (cuspidal edge) yüzeyine diffeomorf olması için gerek ve yeter koşul

$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0)}, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) \neq 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x_0) \neq 0 \tag{4.3.24}$$

olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow): RD(\alpha)$ açılabilir rektifiyan yüzeyi $\alpha(x_0) + u\tilde{D}(x_0)$ noktasında $C \times \mathbb{R}$ köşeli (cuspidal edge) yüzeyine diffeomorf olsun. Yukarıdaki ispatlara benzer olarak yapılırsa;

$$RD(\alpha) = \{\alpha(x) + u\tilde{D}(x) \mid u \in \mathbb{R}, x \in I\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \alpha(x) + u \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) n(x) + b(x) \right), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) \right) t(x), \\
\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x) t(x) + \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) \right) \kappa(x) n(x), \\
\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} &= u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''''(x) t(x) + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x) t'(x) + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x) \kappa(x) n(x) \\
&\quad + \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x) \right) (\kappa(x) n(x))'
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

elde edilir. Bu durumda F dönüşümü A_2 -tekilliğine sahip bir versal dallanma olacağından;

$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x_0)}, \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x_0) \neq 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x_0) \neq 0$$

olmalıdır. $\square$

$\Leftrightarrow$): Yukarıdaki ispatlara benzer şekilde kolayca elde edilir. $\square$

4.3.13. Teorem:

$RD(\alpha)$ açılabilir rektifiyan yüzeyinin $\alpha(x_0) + u\tilde{D}(x_0)$ noktasında SW kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyine diffeomorf olması için gerek ve yeter koşul

$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x_0)}, \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(x_0) \neq 0, \quad \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)''(x_0) = 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'''(x_0) \neq 0 \tag{4.3.26}$$

olmasıdır.

Burada $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ köşeli (ordinary cusp) eğrisi ve

$$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$$

parametrik denklemiyle belli olan kırlangıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyidir (şekil 3.1.2-4).

İspat:

$\Rightarrow$): $RD(\alpha)$ açılabilir rektifiyan yüzeyi $\alpha(x_0) + u\tilde{D}(x_0)$ noktasında SW kırılgıç kuyruğu (swallowtail) yüzeyine diffeomorf olsun. Bu durumda 3.1.14. Teoremden dolayı ve yukarıdakine benzer işlemler yapılarak;

$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0)}, \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(x_0) \neq 0, \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(x_0) = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(x_0) \neq 0$$

denklemleri elde edilir. $\square$

$\Leftarrow$): Yukarıdaki ispatlara benzer şekilde kolayca elde edilebilir. $\square$

4.3.14. Sonuç:

Küresel darboux görüntüsünün (veya rektifiyan Gauss yüzeyinin) tekilliği bir eğrinin bir helise ne kadar benzediğini, açılabilir rektifiyan yüzeyin tekilliği ise bir eğrinin bir helisten ne kadar farklı olduğunu tarif eder.

İspat:

4.3.9-13. Teoremlerden kolayca görülür.

5. TARTIŞMA

Galile geometrisinde ilk bakışta geometrik sonuçlar Öklid geometrisinde olduğu kadar açık olmamasına rağmen; Galile uzayındaki eğrilere, birinci bölümde tanımlanan Galile dayanak fonksiyonu ve Galile uzaklık fonksiyonu ile yaklaşılarak önemli bazı geometrik karakterizasyonlar elde edildi. Eğriler üzerinde tanımlı bazı eğri ve yüzeylerin tekillikleri, bu fonksiyonların tekillikleri olarak hesaplandı. Sonuç olarak Öklid geometrisi gibi Galile geometrisinin de tekillik teorisi için bir uygulama alanı olduğu gösterildi.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu Çalışmada regüler bir eğrinin Galile Rektifiyan açılabilir yüzeyinin tekillikleri Galile uzaklık fonksiyonu yardımıyla, Galile küresel Darboux eğrisi ile Rektifiyan Gauss yüzeyinin tekilliklerini de Galile dayanak fonksiyonu yardımıyla inceleyerek; bu eğri ve yüzeylerin ilgili oldukları fonksiyonların tekil noktası komşuluğunda hangi eğri ve yüzeye difeomorf oldukları belirlendi. Yine Galile küresel Darboux eğrisi ile Rektifiyan Gauss yüzeyinin tekilliklerinin, eğrilerin Galile küresel teğetler göstergesinin geometrik değişmezleriyle ilgili olduğu gösterildi. Ayrıca bu çalışmanın bir sonucu olarak tekillik bakış açısından bir eğrinin bir helise ne kadar benzediği veya bir helisten ne kadar farklı olduğuyla ilgi önemli bir karakterizasyon elde edildi.

Bu çalışmanın sonucu olarak; Galile uzayında verilen regüler bir eğri üzerinde tanımlı farklı eğri ve yüzeylerin tekilliklerinin araştırılabileceğini düşünüyorum. Bu çalışmada yapıldığı gibi araştırılan tekilliklerle, eğrilerin bazı değişmezleri arasında bir ilginin kurulabileceğini öngörüyorum.

7. KAYNAKLAR

- Arnold, V.I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., 1986. *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Birkhäuser Boston, Inc., 382 s, Boston.
- Banchoff, T., Gaffney, T. and McCrory, C., 1982. *Cusps of Gauss Mappings*. Research Notes in Mathematics 55, Pitman, London.
- Bruce, J.W., Giblin ve P.J., Gibson, C.G., 1981a. On caustics of plane curves. Amer. Math. Monthly, 88, 651-667.
- Bruce, J.W., 1981b. On Singularities, envelopes and elementary differential geometry. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 89, 43-48.
- Bruce, J.W. ve Giblin, P.J., 1983. Generic geometry. Amer. Math. Monthly, 90, 529-561.
- Bruce, J.W. ve Giblin, P.J., 1992. *Curves and Singularities*(second editions). Cambridge Univ. Press., 321 s, New York.
- Divjak, B., 2003a. Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean space. Acta Math. Hungar., 98 (3), 203-215.
- Divjak,B ve Sipus, Ž .M., 2003b. Minding's isometries of ruled surface in Galilean and pseudo-Galilean space. J. Geom., 77, 35-47.
- Do Carmo, M. P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 503 s, New Jerse.
- Fidal, D.L., 1984a. The existance of sextactik point. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 96, 433-436
- Fidal, D.L.-Giblin, P.J, 1984b. Generic 1-parameter families of caustic by reflection in the plane. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 96, 425-432.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1982. *Diferensiyel geometri I*. İnönü ünv., Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 270 s, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998. *Dönüşümler ve Geometriler*. Ankara ünv., Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 326 s, Ankara.
- Izumiya, S., Katsumi, H. ve Yamasaki,T., 1999. The Rectifying developable and the spherical darboux image of a space curve. Geometry and topology of caustics -Caustics'98- , Banach center Publications, 50, 137-149.
- Izumiya, S., Pei,D. ve Sano,T., 2000a. The Lightcone Gauss map and The Light-cone developable of a spacelike curve in Minkowski 3-Space. Glasgow Math. J., 42, 75-89.

- Mond, D., 1989. Singularities of the tangent developable surface of a space curve. Quart. J. Math. Oxford, 40, 79-91.
- O'Neill, B., 1966. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press Newyork, 411 s, London.
- Pavkovic, B.J. ve Kamenarovic, I., 1987. The equiform differential geometry of curves in the Galilean space G_3 . Glasnik Matematicki., Vol.22(42), 449-457.
- Pei, D. ve Sano, T., 2000b. The Focal Developable and the Binormal Indicatrix of a Nonlightlike Curve in Minkowski 3-space. Tokyo J. Math., Vol. 23, No. 1.
- Röschel, O., 1984. Die Geometrie des Galileischen Raumes. Doktora tezi, Habilitationssch., Inst. Für. Mat . und Angew. Geometrie, 120 s.
- Sipus, Ž .M., 2008. Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space. Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 56(2), 213-225.
- Spivak, M., 1975. *Calculus on Manifold*. W.A. Benjamin, 145 s, New York.
- Thom, R., 1975. *Structural Stability and Morphogenesis*. W.A. Benjamin, Reading, translated from the French edition of 1972, Massachusetts.
- Wall, C.T.C., 1976. *Geometric Properties of Generic Differentiable Manifolds, in Geometry and Topology III*. Lecture Notes in Math., 597, 707-74, Springer-Verlag, Berlin.
- Yaglom , I.M., 1979. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*. Springer-Verlag, 307 s, Newyork.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Tevfik ŞAHİN

Doğum Tarihi: 18. 04. 1981

Doğum Yeri: KIRŞEHİR

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dil: İngilizce (ÜDS 80)

EĞİTİM DURUMU

Lise: Kızılırmak Lisesi (KIRŞEHİR) 1995-1998

Lisans: Ondokuzmayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü 1998-2002

Yüksek Lisans: Ondokuzmayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Anabilim Dalı 2002-2005

ÇALIŞTIĞI KURUM: Ondokuzmayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2004-

İLETİŞİM BİLGİLERİ: Yenimahalle Mahallesi, İsmet İnönü bulvarı, Büyük Övgü Yapı Kooperatifi, 139/9 Atakum-SAMSUN

Tel: 05458638963

E-posta: tevfiksah@gmail.com.tr