

**HAYATDIŞI SİGORTALARDA HASAR REZERVİNİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLERLE TAHMİNİ**

**ESTIMATION OF AGGREGATE CLAIM RESERVE IN
NON-LIFE INSURANCE
USING GENERALIZED LINEAR MODELS**

TUĞBA TUNĐ

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2010

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :
Doç.Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY

Üye (Danışman) :
Dr. Yasemin GENÇTÜRK

Üye :
Doç.Dr. Meral SUCU

ONAY

Bu tez/...../2010 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulu' nca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

HAYATDIŞI SİGORTALARDA HASAR REZERVİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLERLE TAHMİNİ

Tuğba Tunç

ÖZ

Hayatdışı sigortalarda, meydana gelen hasarlar, genellikle meydana geldiği yıl içinde ödemeleri tamamlanarak sonlandırılmaz. Ayrıca, yasal bazı düzenlemeler ya da itirazlar, kapanan bir hasarın yeniden açılmasına neden olabilmektedir. Buna bağlı olarak her hasarın bir rasgele nakit akıŐı yarattığı söylenebilir. Her sigorta döneminin başında alınan sigorta priminin bu rasgele nakit akışını karşılayacak büyüklükte olması gerekmektedir.

Sigorta Şirketlerinin yükümlülüklerini karŐılayabilmesi için ayırması gereken rezerv miktarını doğru tespit etmesi, Şirketin finansal yapısını koruması açısından oldukça önemlidir.

Kaza dönemi ve gelişim dönemine göre sınıflandırılarak hasar gelişim üçgeni biçiminde ifade edilen geçmiş hasar bilgisinden (hasar sayısı, hasar tutarı,...) yararlanılarak, kaza ve gelişim dönemlerinin etkilerini içeren çarpımsal bir model tanımlanarak hasar rezervi tahmin edilir. Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller hasar rezervlerinin tahmininde etkin bir yoldur.

Bu çalışmada, Türkiye' de trafik sigortaları sektörünün 2003-2008 yılları arasında düzenlediği poliçelere ilişkin aşamalı hasar ödemelerinden oluşan hasar gelişim üçgeni kullanılmıştır. 2008 yılı sonrasında yapılacak hasar ödemeleri ve buna bağlı olarak sektörün ayırması gereken toplam hasar rezervi, hasar ödemelerinin Gamma dağılımlı olduğu varsayılmış ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller ile tahmin edilmiştir. Ayrıca, Mack' ın dağılımdan bağımsız modeli kullanılarak rezerv tahmini bulunmuştur. Modellerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: çarpımsal model, genelleştirilmiş doğrusal modeller, hasar gelişim üçgeni, hayatdışı sigorta, toplam hasar rezervi

Danışman: Dr. Yasemin GENÇTÜRK, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı

ESTIMATION OF CLAIM RESERVE IN NON-LIFE INSURANCE USING GENERALIZED LINEAR MODELS

Tuğba Tunç

ABSTRACT

In non-life insurance, the claims originating in a particular year often cannot be finalized in that year. Also, some legal procedures or disapprovals cause claims to reopen. According to this, it can be said that every claim produce its own random cash flow. Insurance premium charged at the beginning of the insurance period must cover that random cash flow.

For an insurance company, determining sufficient reserve in order to meet its liabilities is very important to protect its financial status.

Using past claim information (claim number, claim amount, ...) classified by accident and development periods and presented as an run-off triangle, claim reserve is estimated as a multiplicative model which involves accident and development period effects. Generalized Linear Models are effective way to obtain claim reserve estimation.

In this study, run-off triangle which involves incremental claim payments of insurance policies between 2003 and 2008 in traffic insurance sector in Turkey is used. In order to obtain claim payments and reserve estimation to be set aside by the sector after 2008, it is assumed that claim payments have gamma distribution and using logarithmic link function, aggregate claim reserve is estimated with Generalized Linear Models. Mack's distribution free model is also used to estimate reserve. The results obtained using Generalized Linear Models and Mack's distribution free model are compared.

Key Words: multiplicative model, generalized linear models, run-off triangle, non-life insurance, aggregate claim reserving

Advisor: Dr. Yasemin GENÇTÜRK, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminde yol gösteren ve çalışma süresince desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Dr. Yasemin GENÇTÜRK' e,

Gösterdikleri hoşgörü ve destek için başta Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Ömer ESENSOY'a, Sayın Doç. Dr. Meral SUCU' ya ve değerli bölüm hocalarıma,

Hayatımın her aşamasında verdikleri destek ve beni yetiştirmek için gösterdikleri çaba için aileme,

Gösterdikleri sonsuz sabır, hoşgörü ve destekleri için çok değerli İnanç SU ve Güleda DÜZYOL' a,

Destekleri için başta oda arkadaşım Damla BARLAS ve Mehmet PIRILDAK olmak üzere tüm hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma,

Teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vi
EKLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. HASAR SÜREÇLERİ ve HASAR REZEVLERİ.....	4
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLER.....	6
3.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerin Bileşenleri.....	6
3.1.1. Genelleştirme	7
3.1.2. Üstel Yayılım Ailesi	8
3.1.3. Bağ fonksiyonu.....	9
3.2. Uyum iyiliğinin Ölçülmesi.....	10
3.2.1. Sapma.....	11
3.2.2. Pearson Ki-Kare İstatistiği.....	12
3.2.3. Artıklar.....	12
3.2.3.1. Pearson artığı	13
3.2.3.2. Anscombe artığı	13
3.2.3.3. Sapma artığı	14
4. HASAR REZERVİ YÖNTEMLERİ	15
4.1. Zincir Merdiven Yöntem.....	15
4.2. Çarpımsal Modeller ve Marjinal Toplam Tahminleri.....	16
4.3. Mack' ın Dağılımdan Bağımsız Modeli.....	19
4.4. Hasar Rezervleri ve Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller	19
4.3.1. Aşırı-Yayılmış Poisson Modeli.....	20
4.3.2. Negatif Binom Modeli	21
4.3.3. Gamma Modeli.....	23
5. REZERVİN ÖNGÖRÜ HATASI	25
5.1. Mack'ın Dağılımdan Bağımsız Modeli için Öngörü Hatası	25
5.2. Aşırı-yayılmış Poisson ve Gamma Modeli için Öngörü Hatası	27
5.3. Negatif-Binom Modeli için Öngörü Hatası	28
6. UYGULAMA	30
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR.....	37
EKLER.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Hayatdışı Sigortada Hasar Gelişimi	4
Şekil 2.2. Hasar Gelişim Üçgeni	5

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1. Marjinal Toplam Eşitlikleri	18
Çizelge 6.1. 2003-2008 Yılları Arasında Türkiye Trafik Sigortaları Sektörü Birikimli Hasar Ödemeleri Verisi (bin TL)	30
Çizelge 6.2. 2003-2008 Yılları Arasında Türkiye Trafik Sigortaları Sektörü Aşamalı Hasar Ödemeleri Verisi (bin TL)	31
Çizelge 6.3. Anova Tablosu.....	31
Çizelge 6.4. Parametre Tahminleri ve Parametre Anlamlılıkları	32
Çizelge 6.5. Gelecekte Yapılacak Hasar Ödemeleri ve Toplam Rezerv Tahmini	33
Çizelge 6.6. Gamma-log modeli ve Mack Modeli ile Toplam Rezerv Tahmini ve Öngörü Hataları	34

EKLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
EK 1. Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi	39
EK 2. Yarı-olabilirlik Tahmin Yöntemi	41
EK 3. Gamma Dağılımı ve Logaritmik Bağ Fonksiyonu ile Toplam Hasar Rezervi ve Öngörü Hatası için R kodları	42
EK 4. Mack'ın Dağılımdan Bağımsız Modeli için R kodları	44

1. GİRİŞ

Davranış bilimci Abraham Maslow, Maslow teorisi ya da ihtiyaçlar hiyerarşisi teorisi olarak bilinen teorisinde, insanların belirli kategorilerdeki ihtiyaçlarını karşılamalarıyla, kendi içlerinde bir hiyerarşi oluşturan daha üst ihtiyaçları tatmin etme arayışına girdiklerini ve bir kategorideki ihtiyaçları tam olarak gidermeden bir üst düzeydeki ihtiyaç kategorisini gideremeyeceklerini öne sürmektedir. İhtiyaçlar hiyerarşisinin temel özelliğinin ihtiyaçlar arasında bir öncelik sırasının bulunması olduğu söylenebilir. Maslow' un ihtiyaçlar hiyerarşisinde fizyolojik, güvenlik, ait olma, sevgi-sevecenlik, saygınlık ve kendini gerçekleştirme gereksinimi biçiminde bir sınıflandırma ve öncelik sırası bulunmaktadır.

Bir bireyin fiziksel ihtiyaçlarını karşılamadan güvenlik ihtiyacını, güvenlik ihtiyacını karşılamadan sevmeye ve kabul edilme ihtiyacını karşılamasının olası olmadığı söylenebilir.

Bireylerin sigorta ihtiyacı ihtiyaçlar hiyerarşisinde fiziksel ihtiyaçlardan sonra yer alan güvenlik ihtiyacı ile doğrudan bağlantılıdır. Çünkü, bireyler yeme, giyinme, barınma gibi temel ihtiyaçlarını karşıladıktan sonra fiziksel ya da psikolojik zararlardan korunmak üzere bir güvenlik ihtiyacı hissederler. Bu korunma önceleri toplumsal dayanışma ile sağlanırken, endüstri devrimi ile birlikte toplumsal dayanışmadan daha kapsamlı bir sisteme ihtiyaç duyulmuştur (Brown, 1993). Buna bağlı olarak aynı türden tehlikeyle karşı karşıya olan kişilerin, belirli bir miktar para ödemesi yoluyla toplanan tutarın, sadece o tehlikenin gerçekleşmesi sonucu fiilen zarara uğrayanların zararını karşılamada kullanıldığı, bir risk transfer sistemi olan sigorta sistemi ortaya çıkmıştır (TSRŞB, 2010). Sigorta sistemi zaman içinde gelişerek, hayat ve hayatdışı olmak üzere iki temel kola ayrılmıştır.

Hayatdışı sigorta türlerinde bildirilen bir hasarın sonlandırılması uzun yıllar alabilmektedir. Yasal bazı düzenlemeler, itirazlar, hasarın değerlendirmesi, hasarın tespit süresinin uzaması veya kapanan bir hasarın yeniden açılması gibi nedenlerden dolayı hasarın sonlanması zaman almaktadır. Bir hasar sürecinde, hasarın sonlanmasının zaman alması ya da kapanan hasarın yeniden açılması gibi nedenlerden dolayı, her hasar bir rasgele ödeme nakit akışına sahip olabilmektedir. Her sigorta döneminin başında alınan sigorta priminin bu rasgele

nakit akışını karşılayacak nitelikte olması gerekmektedir. Bir sigorta şirketinde hasar rezervleri, değerlendirme, stratejik planlama, performans ölçümleri, finansal raporlama ve vergi planlaması gibi süreçlerde kullanılmaktadır.

Hayatdışı sigorta türlerinde ödenmemiş hasarlar için geçmiş deneyimlerden yararlanılarak yeterli hasar rezervi tahminlerinin yapılması en önemli konulardan biridir. Geçmiş hasar bilgisi (hasar sayısı, hasar tutarı,...) kaza dönemi ve gelişim dönemine göre sınıflandırılarak hasar gelişim üçgeni (run-off triangle) olarak adlandırılan üçgensel bir biçimde ifade edilmektedir. Herbir sınıfta, aynı yıl meydana gelmiş birçok hasar bilgisi yer almaktadır. Sigorta şirketinin gelecekte ayırması gereken rezerv miktarı hasar gelişim üçgeni temel alınarak hesaplanıyorsa, bulunan hasar rezervi, toplam hasar rezervi (aggregate claims reserving), hasar bilgilerinin herbirinin ayrı ayrı değerlendirilmesi ile bulunuyorsa bireysel hasar rezervi (individual-structural claims reserving) olarak adlandırılır.

Hasar rezervi yöntemleri genel olarak, deterministik ve stokastik olarak sınıflandırılmaktadır (Hossack et.al. 1983).

Meydana gelen bir hasar ödemesine ilişkin süreç, birçok belirsizliği içinde bulundurmaktadır. Uygulaması oldukça kolay olan zincir-merdiven yönteminin de içinde bulunduğu deterministik yöntemler sadece hasar rezervi tahminini vermektedir. Oysa, hasar rezervi tahmininin yanısıra bazı değişkenlik ölçülerine de ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum rezerv tahmini ile birlikte değişkenlik ölçüsünü de veren stokastik modellerin geliştirilmesine neden olmuştur.

Kremer (1982) aşamalı hasar miktarlarının logaritmasının etkileşimsiz iki faktöre bağlı olduğunu varsayarak hasar rezervini tahmin etmiş ve deterministik zincir merdiven yöntemini stokastik olarak ifade etmiştir. Bu çalışma stokastik modeller ile hasar rezervi tahmininde önemli bir gelişme olarak kabul edilmektedir (England and Verrall,1998).

Mack (1991), kasko sigortasında fiyatlandırma ve hasar rezervi yöntemleri arasındaki bağlantıyı inceleyerek, hem fiyatlandırmada hem de hasar rezervlerinde toplam hasar miktarını Gamma dağılımı ile modellemiştir. Ayrıca fiyatlandırmada kullanılan Bühlmann-Straub kredibilite modelinin hasar rezervi tahmininde kullanılabileceğini göstermiştir.

Zincir merdiven yöntemi ile Poisson dağılımı arasında ilk bağlantıyı Mack (1994) kurmuştur. Renshaw ve Verrall (1994) ise aşırı yayılımlı Poisson dağılımı ile olumsuzluk(contingency) tablosu analizi arasında bağlantı kurarak diğer bir ifade ile Genelleştirilmiş Doğrusal Modelleri (GDM) kullanarak deterministik zincir merdiven yöntemini ile aynı rezerv tahminlerini veren stokastik hasar rezervi modelini incelemişlerdir .

England ve Verrall (1998), stokastik zincir merdiven yöntemlerinden Lognormal modeli, Mack'ın dağılımdan bağımsız yöntemi, aşırı yayılımlı Poisson modeli ve Gamma modelini kullanarak hasar rezervi tahmini yapmış, daha sonra yeniden (bootstrap) örnekleme yöntemi yardımıyla öngörü hatalarını bulmuş ve bu modellere ilişkin karşılaştırmalar yaparak, Gamma ve Lognormal modelin birbirine çok yakın sonuçlar verdiğini tespit etmişlerdir.

Taylor ve McGuire (2004), zincir-merdiven modelinde kaza dönemi ve gelişim dönemi etkilerinin kategorik birer değişken olarak alınıp, çarpımsal bir model olarak tanımlanabildiğini ve zincir-merdiven modelinin yetersiz kaldığı durumlarda genelleştirilmiş doğrusal modellerin kullanılabileceğini göstermişlerdir.

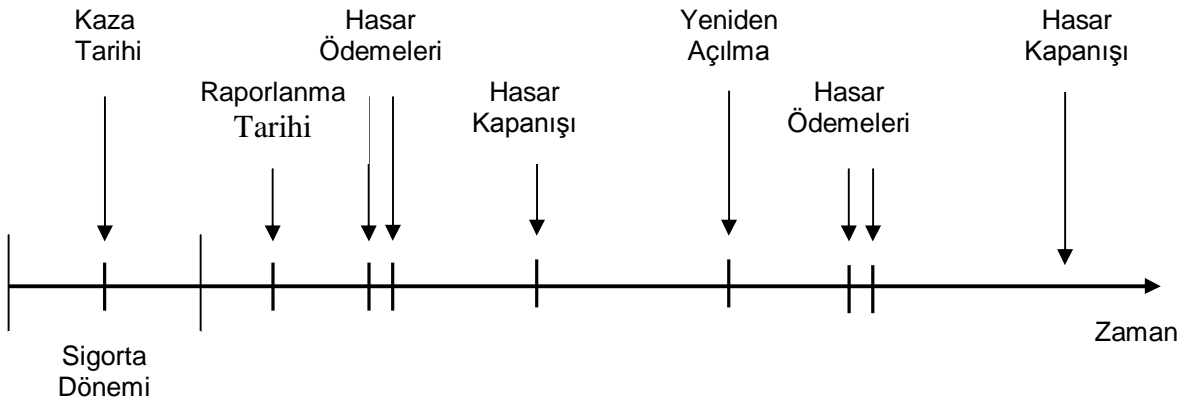
Bu tezin amacı, genelleştirilmiş doğrusal modeller ile toplam hasar rezervinin tahmini ve bu tahminin değişkenliğini veren öngörü hatasının bulunmasıdır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, hasar süreçleri ve hasar rezervleri ile genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde GDM ve temel özellikleri, dördüncü bölümde çarpımsal modeller ve zincir merdiven yöntemi ile bu yöntemleri temel alan stokastik zincir merdiven yöntemlerinden Mack'ın dağılımdan bağımsız modeli ve GDM ile toplam hasar rezervinin tahminine yer verilmiştir. Beşinci bölümde, hasar rezervi tahminleri için öngörü hataları verilmiştir. Altıncı bölümde ise, Türkiye'de trafik sigortaları alanında faaliyet gösteren şirketlere ait 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin 2008 yılı sonrasında yapılacak hasar ödemeleri ve buna bağlı olarak sektörün ayırması gereken toplam hasar rezervi tahmini Mack'ın dağılımdan bağımsız modeli ve Gamma dağılımı ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak oluşturulan GDM kullanılarak tahmin edilmiş, öngörü hataları gözönüne alınarak iki model arasında karşılaştırma yapılmıştır.

2. HASAR SÜREÇLERİ ve HASAR REZEVLERİ

Bir sigorta poliçesinin sigortalı ve sigortacı olmak üzere iki tarafı bulunmaktadır. Sigortalı belirli bir miktar prim öderken, sigortacı rasgele meydana gelen olaylara karşı finansal koruma sağlamış olur.

Tipik bir hayatdışı sigorta hasarının gelişimi Şekil 2.1.'de verilmiştir.



Şekil 2.1. Hayatdışı Sigortada Hasar Gelişimi

Genellikle, sigorta şirketi bildirilen bir hasarın ödemesini yaparak hasar dosyasını hemen kapatamaz. Ayrıca bir hasarın meydana gelmesi ile sigortacıya bildirilmesi zaman almaktadır.

Hayatdışı sigorta türlerinde, hasar ödemelerinin hasarın meydana geldiği dönem içerisinde ödenmemesi durumunda, hasar bilgileri üçgensel biçimde özetlenmektedir. Hasar gelişim üçgeni olarak adlandırılan bu üçgensel yapıda hasar bilgileri (hasar tutarı, hasar sayısı, ...), kaza yılı (hasarın meydana geldiği yıl) ve gelişim yılına (hasar ödemelerinin devam ettiği yıllar) göre sınıflandırılmaktadır.

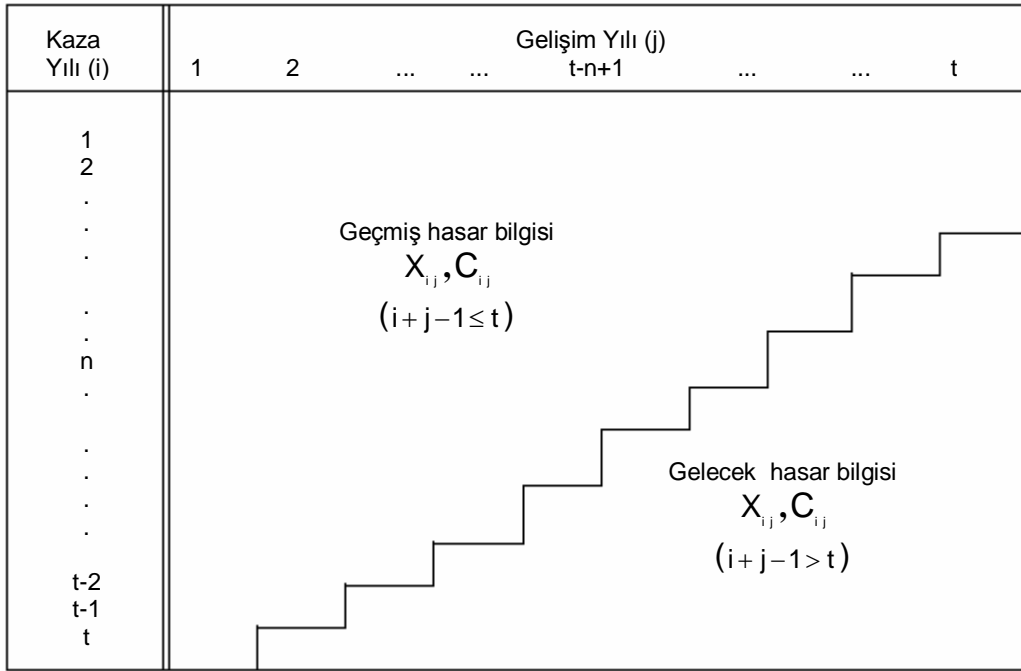
X_{ij} raslantı değişkeni, i . kaza yılında ($i = 1, 2, \dots, t$) meydana gelip, j . gelişim yılında ödenen aşamalı (incremental) hasarı göstermek üzere, birikimli hasar

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^j X_{is} \text{ olarak gösterilmektedir.}$$

Aşamalı hasarlar birikimli hasarlar cinsinden

$$X_{ij} = \begin{cases} C_{i,1} & j=1 \\ C_{i,j} - C_{i,j-1} & j \geq 2 \end{cases}$$

olarak ifade edilebilmektedir (Schmidt and Wünsche, 1998):



Şekil 2.2. Hasar Gelişim Üçgeni

Farklı (i, j) ' ler için $i+j-1 \leq t$ ise X_{ij} raslantı değişkeni geçmiş, $i+j-1 > t$ ise gelecek gözlem değerlerini temsil etmektedir. Diğer bir ifade ile Şekil 2.2' de üst üçgen geçmiş hasar bilgisini, alt üçgen ise tahmini yapılacak gelecek hasar ödemelerine ilişkin hasar bilgisini göstermektedir. Hasar gelişim üçgenini temel alan hasar rezervi tahmin yöntemlerinin tümünde, i . kaza yılında ($i=1,2,\dots,t$) meydana gelip, j . gelişim yılında ödenen aşamalı (incremental) hasar bilgileri kullanılarak, $i+j-1$. takvim yılından sonraki dönemlere ilişkin hasar ödemeleri tahmin edilir ve alt üçgeni tamamlanır. Böylece, ilgilenen kaza yılında meydana gelen hasarlar için ayrılması gereken toplam hasar rezerv miktarı bulunur (Kaas et al., 2008).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLER

Hem bilimde hem de teknolojiye, dünyadaki gerçekliklerin açıklanmasını kolaylaştırmak üzere kullanılan modeller, deterministik ya da stokastik olarak iki gruba ayrılabilir. Deterministik modellerde, sonuçlar kesin olarak tanımlanabilirken; stokastik modeller, bilinmeyen rasgele etkenlere bağlı olarak ortaya çıkabilecek değişkenliği de içermektedir.

Stokastik modeller içerisinde en önemli sınıflardan biri, normal dağılımı temel alan klasik doğrusal modellerin (KDM) genelleştirilmiş biçimi olarak tanımlanabilen Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerdir. Bu modeller, KDM' deki doğrusallığa ek olarak, üstel dağılım ailesinden seçilen herhangi bir dağılımı içermesi ve doğrusal önkestirim (linear predictor) ile kullanılan dağılımın ortalaması arasında fonksiyonel bir bağ kuran ve bağ fonksiyonu olarak adlandırılan yapı ile iki yönlü bir genelleştirme yapmaktadır (Lindsey, 1997).

3.1. Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerin Bileşenleri

GDM' ler, KDM' nin genelleştirilmiş biçimi olarak tanımlanabilir. KDM, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin belirlenmesi ve bu ilişkinin bir modelle ifade edilerek tahminlerin yapılması amacıyla kullanılmaktadır.

y , Y raslantı değişkenine (rd) ilişkin, μ ortalamalı bağımsız n gözleme sahip gözlemler vektörü, p açıklayıcı değişken sayısı ve β_j ' ler bilinmeyen parametreler ($j=1, \dots, p$) olmak üzere, KDM

$$\mu = \sum_{j=1}^p X_j \beta_j + \varepsilon$$

biçimindedir.

KDM' nin matris gösterimi

$$E(Y) = \mu = X\beta + \varepsilon \quad (3.1)$$

biçimindedir.

KDM' nin temel varsayımları sabit varyanslılık (homoskedasticity), normallik ve ilişkisizlik (uncorrelated) olarak özetlenebilir. KDM, rasgele terimin (hata terimi), σ^2 sabit varyanslı (homoskedastic) bağımsız Normal dağılımlı olmasına ilişkin güçlü varsayımları içermektedir (McCullagh and Nelder, 1989).

KDM' nin bu varsayımları sigortacılıkta, gerçekleşen olayları temsil etmede yetersiz kalmaktadır. Hasar verileri genellikle çarpık dağılımlı ya da hasar sayısı değişkeninde olduğu gibi kesikli olduğundan KDM' nin kullanımının uygun olmadığı söylenebilir.

3.1.1. Genelleştirme

GDM' ye geçişi kolaylaştırmak için Eş 3.1. 'e bakılarak üç parçalı bir tanımlama yapılabilir:

1. Rasgele Bileşen: Y_{rd} ' ni, σ^2 sabit varyanslı ve $E(Y) = \mu$ ortalamalı bağımsız Normal dağılımlıdır.
2. Sistemik Bileşen: x_1, x_2, \dots, x_p ile verilen açıklayıcı değişkenler olmak üzere $\eta = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$ doğrusal önkestimdir.
3. Bağ: Rasgele ve sistemik bileşenler arasındaki bağıdır. Bir başka ifade ile bağ fonksiyonu, doğrusal önkestim (η) ile Y_{rd} ' nin beklenen değerini (μ) ilişkilendiren fonksiyondur.

Bu tanımlamada klasik doğrusal model, 1. bileşende Normal dağılımlı ve üçüncü bileşende birim bağ fonksiyona sahiptir.

GDM,

1. ilk bileşendeki dağılımın üstel yayılım ailesinden bir dağılım ve
2. üçüncü bileşendeki bağ fonksiyonunun monoton diferansiyellenebilir bir fonksiyon olması

biçiminde iki yönlü bir genişlemeye izin verir.

3.1.2. Üstel Yayılım Ailesi

Y rd' nin üstel yayılım ailesinden bir dağılıma sahip olduğu varsayımı ile $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ ve $c(\cdot)$ bazı özel fonksiyonlar olmak üzere, üstel ailenin olasılık yoğunluk (veya olasılık) fonksiyonu

$$f_y(y; \theta, \phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right\} \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilmektedir.

Burada θ konumu temsil eden kanonik (doğal) parametre, ise ölçeği temsil eden yayılım parametresi olarak adlandırılmaktadır.

Verilen bir Y rd için, θ ve ϕ 'nın log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\theta, \phi; y) = \log f_y(y; \theta, \phi)$$

olarak yazılabilmektedir.

Eş 3.2.' den log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\theta; y) = \left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right\}, \quad (3.3)$$

biçiminde yazılabilmektedir.

Y rd' nin ortalaması ve varyansı sırasıyla $E(Y) = \mu = b'(\theta)$ ve $Var(Y) = b''(\theta)a(\phi) = V(\mu)a(\phi)$ biçimindedir. Burada, $b'(\theta)$ ve $b''(\theta)$, sırasıyla θ ' ya göre birinci dereceden ve ikinci dereceden türevleri göstermektedir. $V(\mu)$ ise, Y bağımlı değişkeninin ortalaması ile varyansı arasındaki ilişkinin fonksiyonel bir ifadesi olup, varyans fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

$a(\phi)$ fonksiyonu, ϕ gözlemler arası sabit yayılım parametresi ve w gözlemden gözleme farklılık gösteren bilinen önsel ağırlık olmak üzere, $a(\phi) = \phi/w$ biçiminde gösterilir. w ağırlık değeri olarak adlandırılan sabit bir değerdir. Gruplandırma işlemi yapılmamış ya da frekans biçiminde ifade edilemeyen veriler için $w = 1$ kabul edilmektedir (De Jong and Heller, 2008)

3.1.3. Bağ fonksiyonu

Bağ fonksiyonu, doğrusal önkestirim(η) ile Y rd' nin beklenen değerini (μ) ilişkilendiren bir fonksiyondur. KDM' de, ortalama ve doğrusal önkestirim özdeş (identical) ve η ve μ ' nün her ikisi de reel sayılardan herhangi bir değer alabildiği için özdeş bağ kullanılmaktadır. Sayımlarla ilgilenildiğinde ve dağılım Poisson olduğunda, $\mu > 0$ olması gerektiğinden, özdeş bağ yetersiz hale gelmekte ve doğrusal önkestirim ile beklenen değer arasında farklı fonksiyonel ilişkilere ihtiyaç duyulmaktadır. $\eta = g(\cdot)$ bağ fonksiyonu olup, bağımlı değişkenin ortalamasıyla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi belirleyen, monoton ve differansiyellenebilir bir fonksiyondur. GDM' de bağ fonksiyonun seçimi, oluşturulacak modelin sonuçlarını doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle, $b(\theta)$ ' ya bağlı olarak belirlenen $g(\cdot)$ bağ fonksiyonunun seçimi, GDM' nin en önemli adımıdır (De Jong and Heller, 2008).

Bazı önemli bağ fonksiyonları,

1. lojit

$$\eta = \log\left\{\frac{\mu}{1-\mu}\right\};$$

2. probit

$$\eta = \Phi^{-1}(\mu), \Phi(\cdot), \text{ birikimli normal dağılım fonksiyonu};$$

3. tamamlayıcı log-log

$$\eta = \log\left\{-\log(1-\mu)\right\}$$

biçimindedir.

$g(\cdot) = \theta$ olduğunda $g(\cdot)$, $b(\theta)$ ' ya bağlı olarak belirlenen kanonik bağ fonksiyonu olarak adlandırılır. $g(\cdot)$ bağ fonksiyonunun kanonik belirlenmesi, hesaplamalarda araştırmacıya kolaylık sağlamaktadır.

Bazı dağılımlar için kanonik bağlar;

Normal	$\eta = \mu$
Poisson	$\eta = \log \mu$
Binom	$\eta = \log\{\pi/(1-\pi)\}$
Gamma	$\eta = \mu^{-1}$
Ters- Gauss	$\eta = \mu^{-2}$

olarak verilebilir (McCullagh and Nelder,1989).

3.2. Uyum iyiliğinin Ölçülmesi

Model uydurma süreci, az sayıda parametre içeren bir modelden elde edilen $\hat{\mu}$ değerlerinin y değerlerini içeren veri kümesinin yerini almasının bir yolu olarak tanımlanabilir. Genellikle, μ' ler y' lere tamamen eşit olmaz ve ne kadar farklı olduklarına ilişkin bir sorguya gidilebilir, çünkü küçük farklılıklar gözardı edilebilirken büyük farklılıklar gözardı edilemez. Farklılığın ölçüsü veya uyum iyiliği çeşitli yollarla araştırılabilir.

Verilen n gözleme, her bir gözlemin birer parametre ile temsil edildiği, n parametreye kadar parametre içeren modeller uydurulabilir. Ortak bir μ değerinin tüm y' leri temsil ettiği bir parametrelili en basit model, sıfır(null) modeli, rasgele bileşene göre y' ler arasındaki tüm değişimi vermektedir. n parametrelili tam (full) modelde ise, her bir gözlemden türetilen μ' ler veriyle tamamen eşleşmektedir. Tam model, sistematik bileşene göre y' ler arasındaki tüm değişimi verirken, rasgele bileşenle arasındaki bağı vermemektedir.

Uygulamada, sıfır(null) model çoğu zaman çok basittir ve tam model veriyi özetlemeksizin sadece verilerin tekrarından oluştuğu için aydınlatıcı değildir. Ama, tam model, p ($1 \leq p \leq n$) parametrelili modelin farklılığının ölçülmesinde bir taban oluşturmaktadır (McCullagh and Nelder,1989).

3.2.1. Sapma

p parametrelili bir modelin veri kümesine uyumu, bu modelin olası en iyi uyumu sağlayan yani herbir gözlemin bir parametre ile temsil edildiği tam (n parametrelili) model ile karşılaştırılması yoluyla yapılabilmektedir. Eş 3.3.'de verilen log-olabilirlik fonksiyonunda, ϕ yayılım parametresi sabit bir değer olması ve kanonik parametre θ yerine μ parametresinin tahmininin kullanılması durumunda, p parametrelili modelin log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\hat{\mu}, \phi; y)$; n parametrelili tam modelin log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(y, \phi; y)$ ile gösterilebilir.

p parametrelili modele ilişkin kanonik parametre tahmini $\hat{\theta} = \theta(\hat{\mu})$ ve n parametrelili tam modele ilişkin kanonik parametre tahmini $\tilde{\theta} = \theta(y)$ ile gösterilmek ve $a_i(\phi) = \phi/w_i$ varsayılmak üzere, tam model ile kurulan model arasındaki uzaklık olarak tanımlanan farklılık diğer bir ifade ile ölçeklenmiş sapma,

$$D(y; \hat{\mu})/\phi = \sum_{i=1}^n w_i \{y_i(\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)\} / \phi = 2\ell(y; y) - 2\ell(\mu; y)$$

biçimindedir.

Burada, sadece verinin bir fonksiyonu olan $D(y; \hat{\mu})$ mevcut model için sapma miktarıdır.

Üstel aileden bazı dağılımların sapsmaları:

Normal $\sum_{i=1}^n (y - \hat{\mu})^2$

Poisson $2\sum_{i=1}^n \{y \log(y/\hat{\mu}) - (y - \hat{\mu})\}$

Binom $2\sum_{i=1}^n \{y \log(y/\hat{\mu}) - (m - y) \log[(m - y)/(m - \hat{\mu})]\}$

Gamma $2\sum_{i=1}^n \{-\log(y/\hat{\mu}) - (y - \hat{\mu})/\hat{\mu}\}$

Ters-Gauss

$$\sum_{i=1}^n (y - \hat{\mu})^2 / (\hat{\mu}^2 y)$$

biçimindedir.

Poisson ve Gamma için sapma ifadelerindeki ikinci terimler çoğu zaman gözardı edilir (McCullagh and Nelder, 1989).

3.2.2. Pearson Ki-Kare İstatistiği

Bir başka önemli farklılık ölçüsü, $V(\hat{\mu})$ ilgilenilen dağılımın tahmin edilmiş varyans fonksiyonunu olmak üzere, genelleştirilmiş Pearson Ki-Kare istatistiği

$$\chi^2 = \sum (y - \hat{\mu})^2 / V(\hat{\mu})$$

biçimindedir.

Hem sapma hem de genelleştirilmiş Pearson Ki-Kare istatistiği, klasik doğrusal modellerde Ki-Kare dağılımlıdır. Farklılığın ölçülmesinde kullanılan sapmanın en büyük avantajı, ayrıntıları Ek. 1' de verilen en çok olabilirlik tahminleri (EÇOTE) ile parametre tahminlerinin bulunması durumunda, modellerin iç içe kümelerini kullanmasıdır. Fakat Pearson Ki-Kare istatistiği doğrudan yorumlamaya imkan vermesi nedeniyle tercih edilir (McCullagh and Nelder, 1989)

3.2.3. Artıklar

Artıklar, model ile gözlem değerleri arasındaki uyumun kontrolünde kullanılmaktadır. KDM' de, artık terimi

$$r = y - \hat{\mu} \quad (3.4)$$

biçimindedir.

Eş 3.4.' deki gibi ifade edilen artık terimi, seçilen varyans fonksiyonuna, bağ fonksiyonuna ve doğrusal önkestirim terimlerine bağlı olarak oluşturulan modelin uyumunun yeterliliğini belirlemede kullanılır. GDM' de, Normal dağılımın yerini alabilecek tüm dağılımlar için uygulanabilir genişletilmiş bir artık tanımı gerekmektedir.

GDM' de kullanılabilecek artıklar Pearson, Anscombe ve sapma artığıdır (McCullagh and Nelder,1989).

3.2.3.1. Pearson artığı

Pearson artığı, artıkların Y rd' nin tahminlerinin standart sapmasına bölünmesiyle elde edilir:

$$r_p = \frac{y - \hat{\mu}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\mu})}} \quad (3.5)$$

(McCullagh and Nelder,1989).

3.2.3.2. Anscombe artığı

Eş 3.5.' de verilen Pearson artığının dağılımı, Normal dağılım dışındaki dağılımlar için belirgin biçimde çarpıktır ve KDM' deki özelliklerinin yetersiz kalmasına neden olmaktadır. Bu artıklar, $V(\mu)$ varyans fonksiyonu olmak üzere,

$$A(\cdot) = \int \frac{d\mu}{V^{1/3}(\mu)}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm temel alınarak hesaplanmaktadır (McCullagh and Nelder,1989).

$\text{Var}[A(Y)] \approx (A'(\mu))^2 \text{Var}[Y]$ iken $E[A(Y)] = A(Y)$ olduğu varsayımı ile Anscombe artıkları,

$$r_A = \frac{A(y) - A(\hat{\mu})}{A'(\hat{\mu})\sqrt{V(\hat{\mu})}}$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Kaas et al., 2008).

3.2.3.3. Sapma artığı

Uyumdaki farklılığa her bir birimin yapacağı katkı d_i ve $\sum d_i = D$ olmak üzere, sapma artığı,

$$r_D = \text{sign}(y - \hat{\mu}) \sqrt{d_i}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada sign ,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan işaret fonksiyonudur (McCullagh and Nelder, 1989).

4. HASAR REZERVİ YÖNTEMLERİ

Hasar rezervi yöntemleri genel olarak, deterministik ve stokastik olarak sınıflandırılmaktadır (Hossack et al. ,1983). Stokastik modellerin deterministik modellere tercih edilmesinin nedeni deterministik modellerin tamamıyla hatalı sonuçlar vermesi değil; rezerv hesabına ek olarak sigorta şirketinin yönetimine daha fazla bilgi sağlamasıdır (England and Verrall, 2002).

Uygulama kolaylığı nedeniyle en çok tercih edilen deterministik hasar rezervi yöntemi, zincir-merdiven yöntemidir.

Bu bölümde, öncelikle hasar rezervleri hesabına temel oluşturan zincir merdiven yöntemi ve çarpımsal modeller anlatılmış, bu iki modeli temel alan Mack'ın dağılımdan bağımsız modeli ve genelleştirilmiş doğrusal modeller ile hasar rezervi tahminleri ile ilgili bilgi verilmiştir.

4.1. Zincir Merdiven Yöntemi

Bu yöntem, hasarın gelişim yapısının farklı kaza yılları için aynı olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu yöntemde hasar sayısı, hasar tutarı vb. hasar bilgilerinin birikimli değerleri kullanılmaktadır. Hasar gelişim üçgeninde hasarın gelişim yapısının farklı kaza yılları için aynı olduğu varsayımı ile her gelişim yılı için hesaplanan “gelişim faktörleri (development factors)” veya “bağ oranları (link ratios)” kullanılarak mevcut hasar bilgisi her gelişim yılı için güncellenerek rezerv tahmini yapılmaktadır.

C_{ij} birikimli hasar ödemesini göstermek üzere, λ_j $\{j = 2, \dots, t\}$ gelişim faktörleri

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{i,j-1}} \quad (4.1)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.(England and Verrall, 2002).

Eş 4.1. ile verilen gelişim faktörleri, herbir takvim yılındaki birikimli hasarlar ile çarpılarak birikimli hasarların gelecek tahminleri elde edilir:

$$\hat{C}_{i,t-i+2} = C_{i,t-i+1} \hat{\lambda}_{t-i+2}$$

Son gelişim yılında ödenecek birikimli hasar

$$\hat{C}_{i,t} = C_{i,t-i} \prod_{k=t-i+2}^t \hat{\lambda}_k \quad (4.2)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

Eş 4.2.' den t. gelişim dönemi için bulunan nihai hasar ödemelerinden rezerv hesaplamasının yapıldığı son gözlem yılındaki hasar ödemeleri çıkarılarak, herbir kaza yılı için gelecekte ayrılması gereken hasar rezervi miktarı bulunur, bu rezerv miktarları toplamı ise gelecekte ayrılması gereken toplam hasar rezervi miktarını vermektedir.

4.2. Çarpımsal Modeller ve Marjinal Toplam Tahminleri

Hasar rezervlerin tahmininde kullanılan pek çok yöntem ya da modelde, tahminler kaza yılı ve gelişim yılı etkilerini içeren çarpımsal bir model temel alınarak yapılmaktadır.

Schmidt ve Wünsche (1998) çarpımsal modeli, beklenen aşamalı hasarların kaza ve gelişim yılına ilişkin iki faktörün çarpımı olarak tanımlamışlar ve bu modelin varsayımlarını

1. Aşamalı hasarların ilk momentlerinin sonlu olması
2. $x_1, x_2, \dots, x_t \in (0, \infty)$ ve $y_1, y_2, \dots, y_t \in (0, 1)$ biçiminde iki etkinin varlığından ve bu iki etkinin, $i=1, 2, \dots, t$ ve $j=1, 2, \dots, t$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^t y_j = 1 \text{ ve } E[X_{ij}] = x_i y_j \quad (4.3)$$

özelliklerini taşıması olarak belirtmişlerdir.

Eş 4.3.' den aşamalı hasarların beklenen değerinin kaza ve gelişim yılına bağlı iki faktörün çarpımı olarak ifade edildiği görülmektedir. Eş 4.3.' de beklenen nihai

hasar $x_i = E[C_{i,t}]$ ve herbir gelişim yılında meydana gelen nihai hasarların oranı

$$y_j = \frac{E[X_{i,t}]}{E[C_{i,t}]} \text{ biçimindedir.}$$

Aşamalı hasarların sadece ilk momentini (beklenen değerinin) temel alan çarpımsal modellerde x_i ve y_j faktörlerinin tahminleri marjinal toplam tahminleri olarak bulunmaktadır.

Marjinal toplam tahminleri bulunurken, yukarıda verilen çarpımsal model varsayımlarının sağlandığı kabul edilmektedir.

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_t$ ve $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_t$ 'ler x_i ve y_j için tahmin ediciler olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^t \hat{y}_j = 1 \quad (4.4)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, t\} \text{ için } R_j = \sum_{j=1}^{t-i+1} X_{i,j} = \sum_{j=1}^{t-i+1} \hat{x}_i \hat{y}_j = \hat{x}_i \sum_{j=1}^{t-i+1} \hat{y}_j \text{ ve} \quad (4.5)$$

$$j \in \{1, 2, \dots, t\} \text{ için } C_i = \sum_{i=1}^{t-j+1} X_{i,j} = \sum_{i=1}^{t-j+1} \hat{x}_i \hat{y}_j = \hat{y}_j \sum_{i=1}^{t-j+1} \hat{x}_i \quad (4.6)$$

sağlanıyorsa, bu tahmin ediciler marjinal toplam tahmin edicileri olarak adlandırılmaktadır.

Eş 4.5 ve 4.6 verilen marjinal toplam eşitlikleri Verbeek algoritması olarak adlandırılan algoritma yardımıyla çözülür. Bu algoritmanın adımları:

1. İlk satır toplamı $\hat{x}_1 (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_t) = R_1$ ' den $\hat{x}_1 = R_1$ hesaplandıktan sonra $\hat{x}_t \hat{y}_t = C_t$ ' den $\hat{y}_t = C_t / R_1$ bulunması,
2. Belirli bir $n < t$ için, $\hat{y}_{t-n+2}, \dots, \hat{y}_t$ ve $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}$ tahminlerinin bulunduğu varsayımı altında, $\sum_{j=1}^t \hat{y}_j = 1$ ile 1. adımda bulunan \hat{y}_t kullanılarak $\hat{x}_n (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{t-n+1}) = R_n$ marjinal toplam eşitliğinden \hat{x}_n ve

$(\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_n) \hat{y}_{t-n+1} = C_{t-n+1}$ marjinal toplam eşitliğinden \hat{y}_{t-n+1} hesaplanması
ve

3. $n = 2, \dots, t$ için 2.adımın tekrarlanması

biçimindedir (Kaas et al., 2008).

Marjinal toplam eşitlikleri Çizelge 4.1' de verilmiştir;

Çizelge 4.1. Marjinal Toplam Eşitlikleri

Kaza Yılı (i)	Gelişim Yılı (j)							Satır Toplamı
	1	n-t+1	t	
1	$x_1 y_1$			$x_1 y_{t-n+1}$			$x_1 y_t$	R_1
.								.
.								.
.								.
n	$x_n y_1$			$x_n y_{t-n+1}$				R_n
.								.
.								.
t	$x_t y_1$							R_t
Sütun Toplamı	C_1	C_{t-n+1}	C_t	

(Kaas et al., 2008)

4.3. Mack' in Dağılımdan Bağımsız Modeli

Yaygın olarak kullanılan stokastik hasar rezervi tahmin yöntemlerinden biri olan Mack' in dağılımdan bağımsız modelinin en önemli özelliği, hasar bilgisine ilişkin herhangi bir varsayım yapılmaksızın hasar rezervine ilişkin ilk iki momentin (beklenen değer ve varyans) hesaplanmasını olanaklı hale getirmesidir. C_{ij} birikimli hasarın ortalama ve varyansı,

$$E[C_{ij}] = \lambda_j C_{i,j-1} \text{ ve } \text{Var}[C_{ij}] = \sigma_j^2 C_{i,j-1} \quad (4.7)$$

biçimindedir.

Eş.4.7.'deki λ_j ve σ_j^2 parametrelerinin tahmin edicileri

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{t-j+1} w_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{t-j+1} w_{ij}} \text{ ve } \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{t-j} \sum_{i=1}^{t-j+1} w_{ij} (f_{ij} - \hat{\lambda}_j)^2$$

olarak bulunur. Burada, $w_{ij} = C_{i,j-1}$ ve $f_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$ biçimindedir (England and Verrall, 2002).

Mack'ın dağılımdan bağımsız yöntemi, zincir merdiven yöntemi gibi birikimli hasarları temel aldığı için, Eş 4.7.'den t. gelişim dönemi için bulunan nihai hasar ödemelerinden son gözlem yılındaki hasar ödemeleri çıkarılarak, her bir kaza yılı için gelecekte ayrılması gereken hasar rezervi miktarı bulunur, bu rezerv miktarları toplamı ise gelecekte ayrılması gereken toplam hasar rezervi miktarını vermektedir.

4.4. Hasar Rezervleri ve Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller

Hasar gelişim üçgenini tamamlamak için kullanılan yöntemlerin çoğu, üçüncü. bölümde ayrıntıları verilen bir GDM olarak tanımlanabilmektedir. i. kaza yılında ($i = 1, 2, \dots, t$) meydana gelip, j. gelişim yılında ödenen aşamalı (incremental)

hasar X_{ij} raslantı değişkeni ile gösterilsin. Herbir satır (i), sütun (j) ve köşegen ($k = i + j - 1$) için birer parametre içeren çarpımsal model,

$$X_{ij} \approx \alpha_i \cdot \beta_j \cdot \gamma_k \quad (4.8)$$

biçimindedir. Burada α_i satır etkisini, β_j sütun etkisini ve γ_k takvim yılı etkisini temsil eden birer parametredir.

X_{ij} raslantı değişkenlerinin bağımsız ve üstel yayılım ailesinden bir dağılıma uygun dağıldığı varsayımı ile Eş 4.8. ile verilen çarpımsal model GDM olarak ifade edilmiş olur.

Eş 4.8.' de γ_k ile gösterilen takvim yılı sabit alındığında, X_{ij} ' deki değişim kaza tarihi (i) ve gelişim yılı (j) etkileriyle açıklanabilmektedir. Eş 4.8.' de verilen çarpımsal model, logaritma alınarak doğrusal biçime dönüştürülür. Bu durumda, X_{ij} ve açıklayıcı değişkenler arasında logaritmik bir bağdan sözedilebilir. X_{ij} raslantı değişkeninin olasılık dağılımına ilişkin çeşitli varsayımlar altında α_i ve β_j parametrelerinin EÇOTE' leri bulunduktan sonra mevcut verilerle oluşturulmuş hasar gelişim üçgeni,

$$\hat{X}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} \approx \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \quad (4.9)$$

eşitliği yardımıyla gelecek hasarlar tahmin edilerek, rezerv tahminleri yapılmış olur (Kaas et al., 2008).

4.3.1. Aşırı-yayılmış Poisson Modeli

Poisson dağılımı, sadece pozitif tamsayıların modellenmesinde (hasar sayısı) uygun olmasına rağmen, yarı olabilirlik tahmin yöntemi kullanılarak oluşturulan aşırı-yayılmış Poisson dağılımı, sürekli (pozitif ya da negatif) verilerin (hasar tutarı) modellenmesinde de kullanılabilir (England and Verrall, 2002).

Aşırı-yayılmış Poisson modelinde, Poisson dağılımında varyansın ortalamaya eşit olması durumundan farklı olarak, varyans ortalamasının bir oranıdır. Aşamalı hasarların (X_{ij}) bağımsız aşırı-yayılmış Poisson dağılımına sahip raslantı

değişkenleri olduğu varsayımı altında $\sum_{j=1}^t y_j = 1$ olmak üzere ortalama ve varyansı sırasıyla,

$$E[X_{ij}] = \mu_{ij} = x_i y_j \quad \text{ve} \quad \text{Var}[X_{ij}] = \phi E[X_{ij}] = \phi x_i y_j \quad (4.10)$$

biçimindedir.

Eş 4.10.' da ϕ parametresi ayrıntıları Ek 2.' de verilen yarı olabilirlik tahmin yöntemi kullanılarak tahmin edilir ve aşırı yayılım modele dahil edilir. Aşırı yayılımın modelde bulunması, parametre tahminlerini etkilemezken, parametre tahminlerinin standart hatalarının artmasına neden olmaktadır.

Bu modelde, Eş 4.10.' da verilen varyans teriminde yer alan her bir gelişim yılında meydana gelen nihai hasarların oranını gösteren y_i ' lerin pozitif olması gerekmektedir. Bu durum, j gelişim yılındaki aşamalı hasarlar toplamının pozitif olmasını gerektirdiği için modelin sınırlayıcılığı olarak verilebilir. Ancak, burada sütun toplamları negatif olmadığı sürece, bazı negatif aşamalı hasarlarla çalışılmasına olanak sağladığının gözden kaçırılmaması gerekir.

Eş 4.10.' da verilen beklenen değer formülü, satır ve sütun etkilerini içeren çarpımsal bir yapıya sahiptir. Çarpımsal olarak ifade edilen beklenen değer doğrusal biçimde olacak biçimde yeniden tanımlanması, tahmin sürecinde daha çok tercih edilmektedir. GDM çerçevesinde, logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak,

$$\log(E[X_{ij}]) = \log(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0 \quad (4.11)$$

biçiminde ifade edilir (England and Verrall, 2002).

4.3.2. Negatif Binom Modeli

Negatif binom modeli ile aşırı-yayılmış Poisson modeli arasında yakın bir ilişki bulunmaktadır (England and Verrall, 2002). Aşamalı hasarlar (X_{ij}) bağımsız aşırı-yayılmış negatif binom dağılımına sahip raslantı değişkenleri olduğunda, ortalama ve varyans sırasıyla,

$$E[X_{ij}] = \mu_{ij} = (\lambda_j - 1)C_{i,j-1} \text{ ve } \text{Var}[X_{ij}] = \phi \lambda_j (\lambda_j - 1)C_{i,j-1} \quad (4.12)$$

olarak yazılabilmektedir. Burada λ_j zincir merdiven yöntemindeki gelişim faktörüdür. Aşırı-yayılmış Poisson modelinde olduğu gibi, ϕ parametresi ayrıntıları Ek 2.' de verilen yarı olabilirlik yöntemi kullanılarak tahmin edilerek, aşırı yayılım modele dahil edilir.

Burada, $C_{i,j-1}$ birikimli hasarının bilindiği durumda aşamalı ve birikimli hasarlar arasında $C_{ij} = C_{i,j-1} + X_{ij}$ ilişkisinden yararlanılarak Eş 4.12.' de verilen model, birikimli hasarlar için yeniden yazılabilmektedir. Birikimli hasarların (C_{ij}) bağımsız aşırı-yayılmış negatif binom dağılımına sahip raslantı değişkenleri olduğu durumda, ortalama ve varyans sırasıyla,

$$E[C_{ij}] = \lambda_j C_{i,j-1} \text{ ve } \text{Var}[C_{ij}] = \phi \lambda_j (\lambda_j - 1)C_{i,j-1} \quad (4.13)$$

olarak yazılabilmektedir.

Eş 4.12.' de verilen $E[X_{ij}]$ ortalamasının logaritması alınarak,

$$\log(E[X_{ij}]) = \log(\mu_{ij}) = \log(\lambda_j - 1) + \log(C_{i,j-1}) \quad (4.14)$$

bulunur.

$\alpha_1 = 0$, $j \geq 2$ olmak üzere, λ_j ile gösterilen gelişim faktörü tahminleri

$$\log(\lambda_j - 1) = c + \alpha_{j-1} \quad (4.15)$$

olarak bulunur. Buna göre, Eş 4.14.;

$$\log(\mu_{ij}) = c + \alpha_{j-1} + \log(C_{i,j-1}) \quad (4.16)$$

biçiminde logaritmik bağ fonksiyonu ve negatif binom dağılımı kullanılarak ifade edilmiş olur (England and Verrall, 2002). Negatif binom modelinde sadece gelişim yılı etkisi bulunmaktadır.

4.3.3. Gamma Modeli

Aşamalı hasarlar (X_{ij}) bağımsız Gamma dağılımına sahip raslantı değişkenleri olduğunda, Eş 4.3.' deki çarpımsal model tanımından yararlanılarak ortalama ve varyansı sırasıyla,

$$E[X_{ij}] = \mu_{ij} = x_i y_j \text{ ve } \text{Var}[X_{ij}] = \phi (E[X_{ij}])^2 = \phi (x_i y_j)^2 \quad (4.17)$$

biçiminde yazılabilmektedir.

Aşırı-yayılmış Poisson modelinde varyans ortalamanın bir oranı iken Eş 4.17.' de verilen Gamma modelinde, varyans ortalamanın karesinin bir oranıdır. Modelin tahmin sürecinde, ortalamanın doğrusal biçime sahip olması gözönüne alınıp, logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak Gamma modeli,

$$\log(E[X_{ij}]) = \log(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0 \quad (4.18)$$

biçiminde yazılmaktadır (England and Verrall, 2002).

GDM ile hasar rezervi tahminleri yapılırken izlenen yol aşağıdaki gibi özetlenebilir (Pinheiro et al., 2003):

1. Modelin tanımlanması
2. $i, j=1, 2, \dots, n$ için c, α_i, β_j ve ϕ parametrelerinin tahmin edilmesi
3. Parametre tahminleri kullanılarak, geçmiş hasar ödemeleri için kullanılan dağılıma bağlı olarak beklenen hasar ödemelerinin $E[X_{ij}] = \hat{\mu}_{ij}$ bulunması ($i=1, 2, \dots, t; j=1, 2, \dots, t-i+1$)
4. Modelin uyumunun kontrol edilmesi
5. Gelecekte yapılacak hasar ödemelerinin $\log(E[X_{ij}]) = \log(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$ eşitliği yardımıyla bulunması ($i=2, \dots, t; j=n-i+2, \dots, t$)

6. Kaza ya da poliçe yıllarına göre, gelecekte ayrılması gereken rezerv

miktarı $\hat{\mu}_i = \sum_{j=t-i+2}^t \hat{\mu}_{ij}$ 'nın biçiminde bulunması

7. Gelecekte ayrılması gereken toplam rezerv miktarı $\hat{\mu}_i = \sum_{i=2}^t \hat{\mu}_i$ 'nın biçiminde bulunması

8. Gelecekte ayrılması gereken rezerv miktarının tahminine ilişkin değişkenliğin ya da öngörü hatasının bulunması

5. REZERVİN ÖNGÖRÜ HATASI

Verilen bir veri kümesi için gelecek hasarların tahmin edilmesi öngörüsül bir süreçtir. Bu süreçteki değişkenlik gözönüne alındığında, öngörü hatası olarak ta bilinen öngörünün hata kareler ortalamasının karekökünün (the root mean squared error of prediction-RMSEP) bulunması gerekmektedir.

$\hat{\mu}_{ij}$, $k = i + j - 1 > t$ için X_{ij} hasar ödemelerinin tahminini göstermek üzere, gelecekte yapılacak hasar ödemelerinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} E\left[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2\right] &= \left(E[X_{ij}] - E[\hat{\mu}_{ij}]\right)^2 + \text{Var}[X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}] \\ &\approx 0 + \text{Var}[X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}] = \text{Var}[X_{ij}] + \text{Var}[\hat{\mu}_{ij}] \end{aligned} \quad (5.1)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Gelecekteki hasar ödemelerinin ve rezervlerinin istatistiksel yöntemler ile öngörü hatasının tahmin edilmesi, süreç varyansı ($\text{Var}[X_{ij}]$) ve tahmin varyansının ($\text{Var}[\hat{\mu}_{ij}]$) bulunmasına indigenebilir. Diğer bir ifade ile öngörülerdeki değişkenliği veren öngörü hatası, parametre tahminlerindeki belirsizlik ile tahmin yapmak için kullanılan veri kümesinin sahip olduğu belirsizliği gözönünde bulundurarak, Eş 5.1.'deki öngörü hata kareler ortalamasının karekökü alınarak hesaplanmaktadır (Kaas et al., 2008).

5.1. Mack'ın Dağılımdan Bağımsız Modeli için Öngörü Hatası

Mack'ın dağılımdan bağımsız modelinde, kaza yıllarına göre ayrılması gereken rezerve ilişkin süreç varyansı,

$$\text{Var}[X_i] \approx \hat{C}_{it}^2 \sum_{k=t-i+1}^{t-1} \frac{\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{\lambda}_{k+1}^2 \hat{C}_{ik}} \quad (5.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $X_i = \sum_{j=t+2-i}^t X_{ij}$ biçiminde hesaplanan kaza yıllarına göre geçmiş hasar ödemeleri toplamıdır.

Tahmin varyansı ise,

$$\text{Var}[\hat{\mu}_i] \approx \hat{C}_{it}^2 \sum_{k=t-i+1}^{t-1} \frac{\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{\lambda}_{k+1}^2 \sum_{q=1}^{t-k} C_{qk}} \quad (5.3)$$

biçimindedir.

Burada $\hat{\mu}_i = \sum_{j=t+2-i}^t \hat{\mu}_{ij}$ biçiminde hesaplanan kaza yıllarına göre gelecekte ayrılması gereken rezerv tahminidir.

Kaza yıllarına göre ayrılması gereken rezerve ilişkin öngörü hata kareler ortalaması, Eş 5.2. ve 5.3. yardımıyla,

$$E[(X_i - \hat{\mu}_i)^2] = \hat{C}_{it}^2 \sum_{k=t-i+1}^{t-1} \frac{\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{\lambda}_{k+1}^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{t-k} C_{qk}} \right)$$

olarak bulunur.

Geçmiş hasar ödemeleri toplamı $X_i = \sum_{j=2}^t X_{ij} = \sum_{j=2}^t \sum_{i=t+2-j}^t X_{ij}$ ve gelecekte ayrılacak

toplam hasar rezervi tahmini $\hat{\mu}_i = \sum_{j=2}^t \hat{\mu}_{ij} = \sum_{j=2}^t \sum_{i=t+2-j}^t \hat{\mu}_{ij}$ olarak ifade edilebilir.

Dolayısıyla, toplam rezerve ilişkin hata kareler ortalaması,

$$E[(X_i - \hat{\mu}_i)^2] = \sum_{i=2}^t \left\{ E[(X_i - \hat{\mu}_i)^2] + \left[\hat{C}_{it} \left(\sum_{q=i+1}^t \hat{C}_{qn} \right) \right] \left(\sum_{k=t-i+1}^{t-1} \frac{2\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{\lambda}_{k+1}^2 \sum_{q=1}^{t-k} C_{qk}} \right) \right\}$$

olarak bulunur (England and Verrall, 2002).

5.2. Aşırı-yayılmış Poisson ve Gamma Modeli için Öngörü Hatası

Eş 4.11. ve Eş 4.18. ile verilen aşırı yayılmış Poisson ve Gamma modelleri için k sabit bir sayı olmak üzere, süreç varyansı

$$\text{Var}[X_{ij}] = \phi \mu_{ij}^k \quad (5.4)$$

biçimindedir.

Eş 5.4., $k=1$ olduğunda aşırı yayılmış Poisson modelinin, $k=2$ olduğunda Gamma modelinin süreç varyansına eşit olur.

$E[\hat{X}_{ij}] = \hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\eta}_{ij})$ olmak üzere tahmin varyansı,

$$\text{Var}[\hat{X}_{ij}] \cong \left| \frac{\partial \hat{\mu}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right| \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}]$$

biçimindedir.

$i+j-1 > t$ için Eş 5.1. ile verilen öngörü hata kareler ortalaması

$$E\left[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2\right] \cong \phi \hat{\mu}_{ij}^p + \mu_{ij}^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}] \quad (5.5)$$

olarak da ifade edilmektedir.

$\hat{\mu}_{ij}$ ve $\hat{\mu}_{kl}$ gelecekte yapılacak iki farklı ödemeyi göstermek üzere, bu iki farklı ödeme için kovaryans,

$$\text{Cov}[\hat{\mu}_{ij}, \hat{\mu}_{kl}] \approx \hat{\mu}_{ij} \hat{\mu}_{kl} \text{Cov}[\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{kl}]$$

biçimindedir.

$(i, j) \neq (k, l)$ ve $i + j - 1 > t$ için rezerve ilişkin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
E[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] &= \sum E[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] + \sum E[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})(X_{kl} - \hat{\mu}_{kl})] \\
&\approx \sum E[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] + \sum \text{Cov}[X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}, X_{kl} - \hat{\mu}_{kl}] \\
&= \sum E[(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] + \sum \text{Cov}[\hat{\mu}_{ij}, \hat{\mu}_{kl}] \\
&\approx \sum \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij}^k + \sum \hat{\mu}_{ij}^2 \text{Var}[\hat{\eta}_{ij}] + \sum \hat{\mu}_{ij}^2 \hat{\mu}_{kl}^2 \text{Cov}[\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{kl}] \\
&= \sum \hat{\phi} \hat{\mu}_{ij}^k + \hat{\mu}' \text{Var}[\hat{\eta}] \hat{\mu} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilmektedir.

Eş 5.6.' da $\hat{\mu}$ ve $\hat{\eta}$, tüm $\hat{\mu}_{ij}$ ve $\hat{\eta}_{ij}$ ' leri içeren t^2 boyutlu vektörlerdir (Kaas et al., 2008).

Eş 5.6.' nın karekökü alınarak öngörünün hatası/hata kareler ortalamasının karekökü bulunur.

5.3. Negatif-Binom Modeli için Öngörü Hatası

Negatif-Binom modelinde gelişim faktörleri tahminleri, Eş 4.13.' deki gibi bulunduktan sonra, $j \geq 2$ olmak üzere, bu tahminlerin varyansları,

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_j) = \text{Var}(\hat{\lambda}_j - 1) \approx \exp(\hat{c} + \hat{\alpha}_{j-1})^2 \text{Var}[\hat{c} + \hat{\alpha}_{j-1}]$$

biçiminde yazılmaktadır.

Son gelişim yılındaki (t) birikimli hasar tahmini nihai hasar tahminine eşittir. Bu durum, \hat{U}_i i.kaza yılındaki nihai hasar tahminini göstermek üzere, $\hat{U}_i = \hat{C}_{it}$ biçiminde ifade edilebilir. i. kaza yılında ayrılması gereken rezerv miktarı tahmini,

$$\hat{\mu}_i = \hat{U}_i - C_{ij+j-1}$$

olarak bulunmaktadır.

Burada, $C_{i,i+j-1}$ $i+j-1$. takvim yılındaki birikimli hasarı göstermektedir. Kaza yıllarına göre süreç ve tahmin varyansları, sırasıyla

$$\text{Var}[X_i] = \text{Var}[C_{it}] = \text{Var}[U_i],$$

$$\text{Var}[\hat{\mu}_i] = \text{Var}[\hat{C}_{it}] = \text{Var}[\hat{U}_i]$$

biçimindedir.

Süreç varyansı,

$$\text{Var}[X_i] \approx \phi C_{t-i+1} \prod_{k=t-i+2}^t \hat{\lambda}_k \left(\prod_{k=t-i+2}^t \hat{\lambda}_k - 1 \right)$$

ve tahmin varyansı,

$$\text{Var}[\hat{\mu}_i] \approx \text{Var} \left[C_{t-i+1} \prod_{k=t-i+2}^t \hat{\lambda}_k \right] = C_{t-i+1}^2 \text{Var} \left[\prod_{k=t-i+2}^t \hat{\lambda}_k \right]$$

olarak elde edilir.

Gelecekte ayrılması gereken toplam hasar rezervi $\hat{\mu} = \sum_{i=2}^t \hat{\mu}_i$ olmak üzere, rezerve

ilişkin hata kareler ortalaması

$$E \left[(X_i - \hat{\mu}_i)^2 \right] \approx \sum_{i=2}^t \text{Var}[\hat{C}_{it}] + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ j>i}}^t \text{Cov}[\hat{C}_{it}, \hat{C}_{jt}]$$

olarak bulunur (England and Verrall, 2002).

6. UYGULAMA

Çalışmanın bu bölümünde, Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi' nin (TRAMER) resmi internet sitesinde yayınlanan istatistiklerden Trafik sigortalarına ilişkin “Yıllar Bazında Ödenen Birikimli Hasar Raporu (Poliçe Yılı Bazında-bin TL)” ndaki ödenen hasar miktarları kullanılarak rezerv tahminleri R.2.11.1 programında elde edilmiştir.

“Yıllar Bazında Ödenen Birikimli Hasar Raporu (Poliçe Yılı Bazında-bin TL)” nun 2003-2008 poliçe yılları arasındaki birikimli hasar miktarları Çizelge 6.1.' de verilmiştir.

Çizelge 6.1. 2003-2008 Yılları Arasında Türkiye Trafik Sigortaları Sektörü Birikimli Hasar Ödemeleri Verisi (bin TL)

Poliçe Yılı	Gelişim Yılı					
	1	2	3	4	5	6
2003	86.618,0	327.733,0	380.857,0	393.959,0	403.870,0	413.741,0
2004	140.189,0	493.749,0	564.740,0	583.635,0	599.981,0	
2005	193.733,0	674.660,0	766.297,0	794.501,0		
2006	233.854,0	825.627,0	932.101,0			
2007	292.358,0	1.013.103,0				
2008	375.178,0					

GDM ile hasar rezervi tahmininde kurulan modeller, aşamalı hasar bilgilerinden oluşan hasar gelişim üçgenini temel almaktadır. Buna bağlı olarak, sigorta şirketlerince 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin Çizelge 6.1.' de verilen birikimli hasar tutarları kullanılarak aşamalı hasarlardan oluşan hasar gelişim üçgeni elde edilmiş ve Çizelge 6.2.' de verilmiştir.

Çizelge 6.2. 2003-2008 Yılları Arasında Türkiye Trafik Sigortaları Sektörü Aşamalı Hasar Ödemeleri Verisi (bin TL)

Poliçe Yılı	Gelişim Yılı					
	1	2	3	4	5	6
2003	86.618,0	241.115,0	53.124,0	13.102,0	9.911,0	9.871,0
2004	140.189,0	353.560,0	70.991,0	18.895,0	16.346,0	
2005	193.733,0	480.927,0	91.637,0	28.204,0		
2006	233.854,0	591.773,0	106.474,0			
2007	292.358,0	720.745,0				
2008	375.178,0					

Çizelge 6.2.' deki aşamalı hasar ödemeleri bilgileri kullanılarak 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin gelecekte yapılacak hasar ödemeleri ve buna bağlı olarak hesaplanacak toplam hasar rezervi tahmininde hasar ödemelerinin Gamma dağılımlı olduğu varsayımı ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak oluşturulan model, $i, j=1, \dots, 6$ olmak üzere

$$\log(E[X_{ij}]) = \log(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0 \text{ veya } E[X_{ij}] = \mu_{ij} = \exp^{\eta_{ij}} = c\alpha_i\beta_j$$

biçimindedir.

Bu modelin anlamlılığı Çizelge 6.3. 'den yararlanılarak test edilebilir.

Çizelge 6.3. Anova Tablosu

	sd*	Sapma Artığı	sd*	Sapma	F değeri	p Değeri
Sıfır Modeli			20	30,0637		
Model 1	5	9,6032	15	20,4604	483,67	1,38e-08
Model 2	5	20,4213	10	0,0392	1028,51	3,22e-10
*sd: serbestlik derecesi						

Çizelge 6.3' de sıfır (null) modeli, ortak bir μ_{ij} değerinin tüm X_{ij} hasar ödemelerine ilişkin gözlemleri temsil ettiği bir parametrelili en basit modeli, Model 1 ile gösterilen model, sadece kaza yılı etkisinin bulunduğu beş parametrelili modeli, Model 2 ise

hem kaza hem de gelişim yılı etkilerini içeren onbir parametrelili modeli temsil etmektedir. Bu çizelgeden sadece kaza yılı etkisini içeren Model 1 ve hem kaza hem de gelişim yılı etkilerini içeren Model 2' nin $\alpha=0,001$ yanılma düzeyinde anlamlı olduğu görülmektedir ($p<\alpha$). Ancak Model 2' nin sapma miktarı (0,0392), Model 1' in sapma miktarından (20,4604) oldukça düşük olduğundan Model 2' nin verilere daha iyi uyum sağladığı söylenebilir. Bu nedenle hasar ödemelerine ilişkin Model 2 tercih edilmiştir.

Model 2' nin kaza yılı ve gelişim yılı etkilerini temsil eden α_i ve β_j parametrelerinin EÇOTE' leri, tahminlerin standart hataları, t değerleri ve parametrelerin anlamlılıklarının sınanacağı anlamlılık düzeyleri(p değerleri) Çizelge 6.4.' de verilmiştir.

Çizelge 6.4. Parametre Tahminleri ve Parametre Anlamlılıkları

		Parametre Tahminleri	Standart Hata	t Değeri	p Değeri
c	Sabit	11,44611	0,03958	289,21	2,00e-16
α_i	2	0,40239	0,03985	10,10	1,46e-06
	3	0,71236	0,04343	16,4	1,48e-08
	4	0,87864	0,04824	18,21	5,35e-09
	5	1,12236	0,05617	19,98	2,16e-09
	6	1,38904	0,07441	18,67	4,21e-09
β_j	2	0,93713	0,03985	23,51	4,39e-10
	3	-0,67885	0,04343	-15,63	2,35e-08
	4	-1,95887	0,04824	-40,6	1,97e-12
	5	-2,19454	0,05617	-39,07	2,88e-12
	6	-2,24875	0,07441	-30,22	3,69e-11

Çizelge 6.4' den her parametre için p anlamlılık düzeyinin $\alpha=0,001$ ' den küçük olduğu için tüm parametrelerin 0,001 yanılma düzeyinde anlamlı olduğu söylenebilir. Eş 4.18.' deki varyans formülünde yer alan ϕ yayılım parametresinin tahmini ise 0,00397 olarak bulunmuştur.

Çizelge 6.4' de verilen parametre tahminleri kullanılarak, Trafik Sigortalarında 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin 2008 yılı sonrasında yapılacak hasar ödemeleri, Eş 4.9.' dan tahmin edilir..

Örneğin, 2006 yılında düzenlenmiş bir poliçede, poliçe yılında meydana gelen bir hasara ilişkin 2011 yılında yapılacak hasar ödemesi tahminini ele alınsın.

2006 yılında meydana gelen bir hasar için $i=2006-2003+1=4$; aynı hasarın 2011 yılında ödenmesi halinde $j=2011-2006+1=6$ 'dır. $i=4$, $j=6$ için parametre tahminleri, Çizelge 6.4.' te $c=11,44611$, $\alpha_4 = 0,87864$ ve $\beta_6 = -2,24875$ bulunmuştur. Eş 4.18.'den beklenen hasar ödemesinin logaritması

$$\log(E[X_{4,6}]) = \log(\mu_{4,6}) = \eta_{4,6} = c + \alpha_4 + \beta_6$$

$$= 11,44611 + 0,87864 + (-2,24875) = 10,076$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla, beklenen aşamalı hasar ödemesi,

$$E[X_{4,6}] = \mu_{4,6} = \exp^{10,076} = \exp^{10,076} = 23.765,73$$

olarak elde edilir.

Trafik Sigortalarında 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin, 2008 yılı sonrasında yapılacak hasar ödemeleri herbir kaza ve gelişim yılı için yukarıdaki gibi bulunduktan sonra, yapılan hasar ödemelerinin kaza yılı temel alınarak toplamları alındığında bu hasar ödemelerine ilişkin poliçe yılı bazında hasar rezervi ve toplam hasar rezervi tahminleri Çizelge 6.5' de verilmiştir.

Çizelge 6.5. Gelecekte Yapılacak Hasar Ödemeleri ve Toplam Rezerv Tahmini

Poliçe Yılı	Gelişim Yılı						Rezerv Miktarı
	1	2	3	4	5	6	
2003	93,536.9	238,767.2	47,441.8	13,190.4	10,421.0	9,871.0	
2004	139,874.4	357,050.8	70,944.2	19,724.8	15,583.4	14,761.0	14,761.1
2005	190,702.8	486,798.2	96,724.3	26,892.5	21,246.2	20,125.0	41,371.2
2006	225,202.0	574,862.6	114,222.3	31,757.5	25,089.8	23,765.7	80,612.7
2007	287,354.6	733,516.8	145,746.1	40,522.1	32,014.2	30,324.7	248,606.7
2008	375,178.0	957,699.4	190,290.0	52,906.8	41,798.6	39,592.8	1,282,277.1
							1,667,628.8

Çizelge 6.5' den, Trafik sigortaları alanında faaliyet gösteren sigorta şirketlerince 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin sektörün ayırması gereken rezerv miktarı, hasar ödemelerinin Gamma dağılımlı olduğu varsayımı ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak, 1.667,628,78 bin TL. ve bu rezerve ilişkin öngörü hatası ise 80.115,2 bin TL. olarak bulunmuştur.

Hasar miktarlarının Gamma dağılımlı olduğu varsayımı ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak toplam hasar rezervi tahmini yapıldıktan sonra, stokastik bir model olan Mack'ın dağılımdan bağımsız modeli ile toplam hasar rezervi ve öngörü hatası hesaplanmış, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Buna göre iki modelle bulunan hasar rezervi tahminleri ve öngörü hataları Çizelge 6.6.'da verilmiştir:

Çizelge 6.6. Gamma-log modeli ve Mack Modeli ile Toplam Rezerv Tahminleri ve Öngörü Hataları

Police Yılı	Gamma-Log Modeli	Mack Modeli
2003	-	-
2004	14.761,1	14.664,2
2005	41.371,2	41.279,3
2006	80.612,7	82.910,1
2007	248.606,7	243.225,0
2008	1.282.277,1	1.263.636,3
Toplam Rezerv	1.667.628,8	1.645.715,0
Öngörü Hatası	80.115,2	46.578,7

Çizelge 6.6.' ya göre, Mack modeli ile yapılan hasar rezervi tahmininin, aşamalı hasarların bağımsız ve Gamma dağılımlı olduğu ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak GDM modeliyle yapılan hasar rezervi tahmininden daha düşük olduğu belirlenmiştir. Yapılan hasar rezervi tahmininin değişkenliğinin bir ölçüsü olarak tanımlanan öngörü hatalarına bakıldığında, Mack Modeliyle yapılan hasar rezervi tahmininin daha az değişkenliğe sahip olduğu ve değişkenliğin az olduğu bu modelin rezerv tahmininde tercih edilebileceği söylenebilir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sigorta şirketlerinin rezerv miktarını doğru tespit etmesi, şirketin finansal yapısını koruması açısından oldukça önemlidir. Rezervin düşük belirlenmesi, sigortacının sigortalıya karşı yükümlülüğünü karşılamada yetersiz kalmasına, yüksek belirlenmesi ise yöneticilerin mevcut finansal durumu yanlış değerlendirilip, yanlış kararlar vermesine neden olabilmektedir.

Hayatdışı sigorta türlerinde, meydana gelen hasarın sigortalıya bildirilmesini takip eden süreçte hasara ilişkin nihai ödemenin yapılarak bu hasarın sonlandırılması belirli bir süre alabilmektedir. Hayatdışı sigorta türlerinde, hasar ödemelerinin hasarın meydana geldiği dönem içerisinde ödenmemesi durumunda, hasar bilgileri üçgensel biçimde özetlenmektedir. Kaza dönemi ve gelişim dönemine göre sınıflandırılarak hasar gelişim üçgeni biçiminde özetlenen geçmiş hasar bilgisinden (hasar sayısı, hasar tutarı,...) yararlanılarak, kaza dönemi ve gelişim dönemine etkilerini içeren çarpımsal bir model ile hasar rezervi tahmin edilebilmektedir.

Taylor ve McGuire (2004), bir zincir-merdiven modelinin kaza dönemi ve gelişim dönemi etkilerinin kategorik birer değişken olarak alınıp, çarpımsal bir model olarak tanımlanabildiğini ve zincir-merdiven modelinin yetersiz kaldığı durumlarda GDM' nin kullanılabilirliğini belirtmektedirler.

Bu çalışmada, Trafik Sigortaları alanında faaliyet gösteren şirketlerin 2003-2008 yılları arasında düzenlediği poliçelere ilişkin aşamalı hasar ödemelerinden oluşan hasar gelişim üçgeni kullanılmıştır. 2008 yılı sonrasında yapılacak hasar ödemeleri ve buna bağlı olarak sektörün ayırması gereken toplam hasar rezervi tahmininde hasar ödemelerinin Gamma dağılımlı olduğu varsayılmış ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak, GDM ile toplam hasar rezervi tahmin edilip, bu rezerv tahmininin öngörü hatası hesaplanmıştır.

Trafik sigortaları alanında faaliyet gösteren sigorta şirketlerince 2003-2008 yılları arasında düzenlenen poliçelere ilişkin sektörün ayırması gereken rezerv miktarı, hasar miktarlarının Gamma dağılımlı olduğu varsayımı ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak 1.645.715 bin TL. ve öngörü hatası 80.140,85 bin TL. olarak bulunmuştur.

Hasar miktarlarının Gamma dağılımlı olduğu varsayımı ile logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak toplam hasar rezervi tahmini yapıldıktan sonra, Mack'ın Dağılımdan Bağımsız Modeli ile toplam hasar rezervi ve öngörü hatası hesaplanmış ve iki model için sonuçlar karşılaştırılmıştır. Mack modeli ile yapılan hasar rezervi tahmininin, aşamalı hasarların bağımsız ve Gamma dağılımlı olduğu ve logaritmik bağ fonksiyonu kullanılarak GDM modeliyle bulunan hasar rezervi tahmininden daha düşük olduğu belirlenmiştir. Yapılan hasar rezervi tahmininin değişkenliğinin bir ölçüsü olarak tanımlanan öngörü hataları açısından modeller karşılaştırıldığında, Mack'ın dağılımdan bağımsız modeliyle bulunan hasar rezervi tahmininin daha az değişkenliğe sahip olduğu, bu nedenle bu modelin rezerv tahmininde tercih edilebileceği söylenebilir.

Aynı kaza dönemi ve gelişim dönemine göre sınıflandırılmış çok sayıda hasar bilgisinden oluşan hasar gelişim üçgenlerini temel alan toplam hasar rezervi yöntemlerinde hasar sürecine ilişkin yasal değişikliklerin etkisi, mevsimsel etki ve yapısal bazı özelliklerle ilgili bilgiler modele dahil edilememektedir. Bu tür bilgilerin tahmin sürecine kolayca dahil edilebildiği bireysel risk sınıfındaki daha ayrıntılı bilgilerin kullanıldığı yapısal rezerv tahmin yöntemleri ile çalışılarak daha hassas rezerv tahminleri yapılabilmektedir.

Bireysel risk sınıfları bazında uygun veri bulunması durumunda, yapısal hasar rezervi tahmin yöntemlerinde hasar sayısı, hasar miktarı ve işlem süresi ayrı ayrı GDM olarak ifade edilip, rezerv tahmini için ortak bir yapı içerisinde üç model birleştirilerek yapısal hasar rezervi tahminleri yapılabilir. Yapısal hasar rezervi tahmininde kullanılan hasar bilgileri kaza ve gelişim dönemlerine göre sınıflandırılarak toplam hasar rezervi tahminleri yapıp, toplam ve yapısal hasar rezervi yöntemleri karşılaştırılarak uygun rezerv tahmin yöntemine karar verilebilir.

KAYNAKLAR

- Brown, R.L., 1993, Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance, ACTEX Publications, Connecticut, 157 p.
- De Jong, P., Heller, G.Z., 2008, Generalized Linear Models for Insurance Data, Cambridge University Press, London,196p.
- England, P., Verrall, R.J., 1998, Standard errors of prediction in claims reserving: a comparison of methods, Proceedings of the General Insurance Convention & ASTIN Colloquium in Glasgow, 1, 459-478.
- England, P., Verrall, R.J., 2002, Stochastic claims reserving in general insurance, British Actuarial Journal, Faculty of actuaries and Institute of actuaries, 8, 3 443-518.
- Hossack, I.B, Pollard, J.H., Zehnwirth, B., 1983, Introductory Statistics with Applications in General Insurance, Cambridge University Press, London,275p
- Kaas, R, Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., 2008, Modern Actuarial Risk Theory: Using R, Springer Verlag Inc. , Berlin, 381p.
- Kremer, E., 1982, IBNR claims and the two way model of ANOVA. Scandinavian Actuarial Journal, 47-55
- Lindsey, J.K., 1997, Applying Generalized Linear Models, Springer Verlag Inc., New York, 258 p.
- Mack, T., 1991, A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves, ASTIN Bulletin, 22, 1, 93-109.
- Mack, T., 1994, Which stochastic models underlying the chain-ladder model? Insurance: Mathematics and Economics, 15, 133-138.
- McCullagh, P. and Nelder, J.A., 1989, Generalized Linear Models, Chapman and Hall, London, 511p.

- Pinheiro, P.J.R., Andrade e Silva, J.M., Centeno, M.L., 2003, Bootstrap methodology in claim reserving, *The Journal of Risk and Insurance*, 70, 4, 701-714.
- Renshaw, A.E., Verrall, R. J., 1994, A Stochastic Model Underlying the Chain Ladder Technique, Presented at the XXV ASTIN Colloquium, Cannes.
- Schmidt, K.D., Wünsche, A., 1998, Chain ladder. marginal sum and maximum likelihood estimation, *Blätter der DGVM*, 23, 3, 267-277.
- Taylor, G., McGuire, H., 2004, Loss reserving with GLMs: a case study, *Casualty Actuarial Society 2004 Discussion Paper Program*, 327-392.
- Türkiye Sigorta ve Reasürans Şirketleri Birliği, 2010, Sigorta Tanımları, <http://www.tsrsb.org.tr/tsrsb/Sigorta/Sigorta+tanımları/>

EKLER

EK 1. Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

y_i gözlemlerinin bağımsız üstel aileden bir dağılıma sahip olduğu varsayımı ile $\eta = g(\mu) = \sum X\beta$ doğrusal önkestimlerini göstermek üzere, log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\beta, \phi) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i; \beta, \phi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln c(y_i, \phi) + \frac{y_i \theta - b(\theta_i)}{a(\phi)} \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

$\ell(\beta, \phi)$ log-olabilirlik fonksiyonunun β_j 'lere göre türevi:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j}$$

biçimindedir.

x_{ij} , $\eta = g(\mu) = \sum X\beta$ eşitliğindeki X matrisinin bir elemanı olmak üzere,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_i} = \frac{y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} = \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)} \text{ ve } \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} x_{ij}$$

biçimindedir.

$\partial \ell / \partial \beta_j = 0$ eşitlikleri çözülerek en çok olabilirlik tahminleri elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} x_{ij} (y_i - \mu_i) = 0 \quad (\text{E.1})$$

Matris gösterimi ile,

$$X'D(y - \mu) = 0 \quad (\text{E.2})$$

olarakta yazılabilmektedir. Burada D , köşegen elemanları $\partial\theta_i/\partial\eta_i$ olan köşegen

matris ve $\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\eta_i}\right)^{-1} = \frac{\partial\eta_i}{\partial\theta_i} = \frac{\partial\eta_i}{\partial\mu_i} \frac{\partial\mu_i}{\partial\theta_i} = \mathbf{g}'(\mu_i)\mathbf{b}''(\theta_i) = \mathbf{g}(\mu_i)\mathbf{V}(\mu_i)$ ' dir. Bu durumda,

D matrisinin köşegen elemanları $\{\mathbf{g}(\mu_i)\mathbf{V}(\mu_i)\}^{-1}$ olarak ifade edilebilir. (E.1) ve (E.2) ile verilen eşitlikler, β için tahmin eşitlikleri olarak adlandırılmaktadır.

ϕ yayılım parametresinin En Çok Olabilirlik Tahminlerini $\partial\ell/\partial\phi = 0$ eşitliği çözülerek bulunabilir. (De Jong and Heller,2008)

EK 2. Yarı-olabilirlik Tahmin Yöntemi

GDM' lerin en önemli özelliklerinden biri, ortalama ile varyans arasında $\text{Var}(y) = \phi V(\mu)$ biçiminde fonksiyonel bir ilişki kurmasıdır. Yayılım parametresi ϕ ve varyans fonksiyonu $V(\mu)$ olmak üzere, ϕ ve $V(\mu)$ ' nün çeşitli bileşimleri için yarı-olabilirlik fonksiyonu,

$$Q(\beta) = \phi^{-1} X' D (y - \mu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta} \frac{y_i - \mu_i}{\phi V(\mu_i)}$$

olarak tanımlanır.

Parametre tahminleri $\partial Q(\beta) / \partial \beta_j = 0$ eşitlikleri çözülerek bulunur (De Jong and Heller, 2008).

Yarı-olabilirlik fonksiyonunun En Çok Olabilirlik Tahmininden farkı, herhangi bir dağılım varsayımı yapmaksızın ortalama ve varyans arasındaki fonksiyonel ilişkiyi temel almasıdır.

EK 3. Gamma Dağılımı ve Logaritmik Bağ Fonksiyonu ile Toplam Hasar Rezervi ve Öngörü Hatası için R kodları

```
> Xij<-c(86618,241115,53124,13102,9911,9871,
+ 140189,353560,70991,18895,16346,
+ 193733,480927,91637,28204,
+ 233854,591773,106474,
+ 292358,720745,
+ 375178)
> i<-c(1,1,1,1,1, 2,2,2,2,2, 3,3,3,3, 4,4,4, 5,5, 6)
> j<-c(1,2,3,4,5,6, 1,2,3,4,5, 1,2,3,4, 1,2,3, 1,2, 1)
> TT<-trunc(sqrt(2*length(Xij)))
> i<-rep(1:TT,TT:1);j<-sequence(TT:1)
> CL<-glm(Xij~as.factor(i)+as.factor(j),family=Gamma(link=log))
> summary(CL)
```

Call:

```
glm(formula = Xij ~ as.factor(i) + as.factor(j), family = Gamma(link = log))
```

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.588e-02	-1.751e-02	-1.687e-09	1.731e-02	1.153e-01

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	11.44611	0.03958	289.21	< 2e-16 ***
as.factor(i)2	0.40239	0.03985	10.10	1.46e-06 ***
as.factor(i)3	0.71236	0.04343	16.40	1.48e-08 ***
as.factor(i)4	0.87864	0.04824	18.21	5.35e-09 ***
as.factor(i)5	1.12236	0.05617	19.98	2.16e-09 ***
as.factor(i)6	1.38904	0.07441	18.67	4.21e-09 ***
as.factor(j)2	0.93713	0.03985	23.51	4.39e-10 ***
as.factor(j)3	-0.67885	0.04343	-15.63	2.35e-08 ***
as.factor(j)4	-1.95887	0.04824	-40.60	1.97e-12 ***
as.factor(j)5	-2.19454	0.05617	-39.07	2.88e-12 ***
as.factor(j)6	-2.24875	0.07441	-30.22	3.69e-11 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.003971025)

Null deviance: 30.063679 on 20 degrees of freedom
Residual deviance: 0.039193 on 10 degrees of freedom
AIC: 433.51

Number of Fisher Scoring iterations: 4

```
> coefs<-exp(coef(CL))
> alpha<-coefs[1]*c(1,coefs[2:TT])
> beta<-c(1,coefs[(TT+1):(2*TT-1)])
```

```

> pred<-alpha%*%t(beta)
> pred
      as.factor(j)2 as.factor(j)3 as.factor(j)4 as.factor(j)5
[1,] 93536.87      238767.2      47441.84      13190.37      10420.95
[2,] 139874.36     357050.8      70944.18      19724.79      15583.42
[3,] 190702.82     486798.2      96724.34      26892.51      21246.22
[4,] 225201.97     574862.6      114222.29     31757.50      25089.78
[5,] 287354.64     733516.8      145746.08     40522.14      32014.21
[6,] 375178.00     957699.4      190290.03     52906.81      41798.62
      as.factor(j)6
[1,] 9871.00
[2,] 14761.02
[3,] 20124.98
[4,] 23765.69
[5,] 30324.70
[6,] 39592.75
> reserve<-sum(pred[future])
Error: object 'future' not found
> future<-row(pred)+col(pred)-1>TT
> future<-row(pred)+col(pred)-1>TT
> reserve<-sum(pred[future])
> reserve
[1] 1667640
> anova(CL,test="F")
Analysis of Deviance Table

```

Model: Gamma, link: log

Response: Xij

Terms added sequentially (first to last)

	Df	Deviance	Resid.	Df	Resid. Dev	F	Pr(>F)
NULL				20	30.0637		
as.factor(i)	5	9.6032		15	20.4604	483.67	1.382e-11 ***
as.factor(j)	5	20.4213		10	0.0392	1028.51	3.222e-13 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

> mu<-fitted(CL)
> X<-model.matrix(CL)
> Cov.eta<-X%*%vcov(CL)%*%t(X)
> disp<-summary(CL)$dispersion
> pe2<-disp*sum(mu)+ t(mu)%*%Cov.eta%*%mu
> pe2
      [,1]
[1,] 6418444561
> sqrt(pe2)
      [,1]
[1,] 80115.2

```

EK 4. Mack'ın Dağılımdan Bağımsız Modeli için R kodları

```
> veri=read.table("d://cummack.txt")
> veri
      X1      X2      X3      X4      X5      X6
2003 86618,0 327733,0 380857,0 393959,0 403870,0 413741,0
2004 140189,0 493749,0 564740,0 583635,0 599981,0 <NA>
2005 193733,0 674660,0 766297,0 794501,0 <NA> <NA>
2006 233854,0 825627,0 932101,0 <NA> <NA> <NA>
2007 292358,0 1013103,0 <NA> <NA> <NA> <NA>
2008 375178,0 <NA> <NA> <NA> <NA> <NA>
> M<-MackChainLadder(veri,est.sigma="Mack")
> M
MackChainLadder(Triangle = veri, est.sigma = "Mack")
```

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2003	413,741	1.000	413,741	0	0	NaN
2004	599,981	0.976	614,645	14,664	1,664	0.1135
2005	794,501	0.951	835,780	41,279	2,732	0.0662
2006	932,101	0.918	1,015,011	82,910	3,651	0.0440
2007	1,013,103	0.806	1,256,328	243,225	13,321	0.0548
2008	375,178	0.229	1,638,814	1,263,636	41,273	0.0327

	Totals
Latest:	4,128,605.00
Dev:	0.71
Ultimate:	5,774,319.93
IBNR:	1,645,714.93
Mack S.E.:	46,578.68
CV(IBNR):	0.0283030079180483

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : TUĞBA TUNÇ

Doğum Yeri : Adana

Doğum Yılı : 1983

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise : 1997-2001 Kozan 50.Yıl (Yabancı Dil Ağırlıklı) Lise

Lisans : 2002-2007 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi

İstatistik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2007- : Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Araştırma Görevlisi