

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

MEDYAN İSTATİSTİĞİNİN DAĞILIMI

VE

KARAKTERİSTİKLERİ

Burak KİTAPÇI

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ

İstatistik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 406.02.01

Sunuş Tarihi: 29.07.2010

Bornova-İZMİR

2010

Burak Kitapçı tarafından hazırlanan yüksek lisans tezi olarak sunulan “Medyan İstatistiğinin Dağılımı ve Karakteristikleri” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 29.07.2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	:	
Raportör Üye	:	
Üye	:	

ÖZET

MEDYAN İSTATİSTİĞİNİN DAĞILIMI

VE

KARAKTERİSTİKLERİ

KİTAPÇI, Burak

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Anabilim Dalı
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ
Temmuz 2010, 67 sayfa

Bu tezde medyan istatistiğinin dağılımı ve karakteristikleri incelenmiş, bazı sürekli dağılımlar için medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Bu dağılımlar için farklı örneklem ölçümlerinde medyan istatistiğinin merkezi momentleri hesaplanmıştır.

Medyan istatistiğinin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sıra istatistiklerinden yararlanılarak hem tek hem de çift örneklem ölçümleri için sunulmuştur. Bu fonksiyonlar elde edildikten sonra sürekli düzgün dağılımların özelliklerinden yararlanılarak medyan istatistiğinin bu dağılımlardaki dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunmuştur. İncelenen dağılımlar için medyan istatistiğinin ilk iki merkezi momenti elde edilerek farklı örneklem ölçümlerinde bu momentlerin aldıkları değerler hesaplanmıştır.

Anahtar sözcükler: Medyan istatistiği, sıra istatistikleri, Düzgün dağılım, dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, beklenen değer ve varyans.

ABSTRACT
DISTRIBUTION OF MEDIAN STATISTIC
AND
ITS CHARACTERISTICS

KİTAPÇI, Burak

MSc in Statistics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Muhammet BEKÇİ

July 2010, 67 pages

In this thesis, sample median and its characteristics are studied, for some continuous distributions, distribution function and probability density function of the sample median are obtained. For these functions, central moments of the sample median are calculated for different sample sizes.

The distribution function of the sample median is presented for odd and even sample sizes by using order statistics. After obtaining these functions, distribution function and probability density function of the sample median is found for the continuous uniform distributions by using properties of these distributions. First two central moments of the sample median are obtained for uniform distributions which are studied and some values of these moments are calculated for different sample sizes.

Keywords: Median statistic, order statistics, Uniform distribution, distribution function, probability density function, expected value and variance.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, hiç bir yardımı esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ'ye ve her konuda sabırla beni destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
TABLolar DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
2. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI	2
2.1. $X_{(r)}$ Sıra İstatistiğinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	
ve Dağılım Fonksiyonu	2
2.1.1. Düzgün(0,1) dağılımı için $X_{(r)}$ sıra istatistiğinin	
olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu	2
2.1.2. Düzgün(a,b) dağılımı için $X_{(r)}$ sıra istatistiğinin	
olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu	3
2.2. $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ Sıra İstatistiklerinin Bileşik Olasılık	
Yoğunluk Fonksiyonu ve Bileşik Dağılım Fonksiyonu	4

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.2.1. Düzgün(0,1) dağılımı için $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ sıra	
istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu	
ve bileşik dağılım fonksiyonu	4
2.2.2. Düzgün(a,b) dağılımı için $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ sıra	
istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu	
ve bileşik dağılım fonksiyonu	5
3. MEDYAN İSTATİSTİĞİNİN DAĞILIMI	6
3.1. Medyan İstatistiğinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	
ve Dağılım Fonksiyonu	6
3.1.1. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin	
olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu	9
3.1.2. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin	
ilk iki merkezi momenti ve varyansı	19
3.1.3. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin	
hesaplanmış ilk iki merkezi momenti ve varyansı	31
3.1.4. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin	
olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu	32

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.1.5. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin	
ilk iki merkezi momenti ve varyansı	44
3.1.6. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin	
hesaplanmış ilk iki merkezi momenti ve varyansı	60
4. SONUÇ VE TARTIŞMA	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Düzgün(0,1) dağılımı için $f_U(u)$ 'nin tanımlı olduğu bölge.....	11
3.2 Düzgün(a,b) dağılımı için $f_U(u)$ 'nin tanımlı olduğu bölge.....	35

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Düzgün(0,1) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar.....	31
3.2 Düzgün(0,1) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar.....	32
3.3 Düzgün(1,2) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar.....	60
3.4 Düzgün(1,2) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar	60
3.5 Düzgün(0,2) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar.....	61
3.6 Düzgün(0,2) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar.....	61
3.7 Düzgün(1,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar.....	62
3.8 Düzgün(1,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar	62
3.9 Düzgün(0,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar	63
3.10 Düzgün(0,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar	63
3.11 Düzgün(2,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar	64
3.12 Düzgün(2,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar.....	64

1. GİRİŞ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik örneklem olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemi küçükten büyüğe doğru $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ şeklinde sıralandığında, $i = (1, 2, \dots, n)$ olmak koşuluyla, $X_{(i)}$ rasgele değişkenine i 'nci sıra istatistiği adı verilir.

Sıra istatistikleri, bu sıralanmış rasgele değişkenlerin ve onları kapsayan fonksiyonların özellikleri ve uygulamaları ile ilgilenir. Sıra istatistikleri günlük hayatta rasgelelik içeren olaylar ve sistemler açısından pek çok uygulama alanına sahiptir. Önemli örneklerden biri medyan (M) istatistiğidir. Medyan istatistiği, bir örneklemdeki gözlemler küçükten büyüğe sıralandığında ortadaki gözlemi temsil eder. Eğer n çift bir sayı ise $M = \frac{1}{2} \left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)$ ya da n tek bir sayı ise $M = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ olur.

2. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsunlar. Bu rasgele değişkenler küçükten büyüğe doğru $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ şeklinde sıralandıklarında, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $X_{(i)}$ rasgele değişkenine i . sıra istatistiği adı verilir.

2.1. $X_{(r)}$ Sıra İstatistiğinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik örneklem olsun. $r = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $X_{(r)}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_r(x)$ ve sürekli halde dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$C_{r,n} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$f_r(x) = C_{r,n} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x) \quad (2.1)$$

.

$$F_r(x) = \int_{-\infty}^x C_{r,n} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x) dx \quad (2.2)$$

2.1.1. Düzgün(0,1) dağılımı için $X_{(r)}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve Düzgün(0,1) dağılımından gelen n birimlik örneklem olmak üzere, r . ($r = 1, 2, \dots, n$) sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_r(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ aşağıda verilmektedir.

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} (x)^{r-1} (1-x)^{n-r} \quad (2.3)$$

$$F_r(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} (x)^{r-1} (1-x)^{n-r} dx & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.2. Düzgün(a,b) dağılımı için $X_{(r)}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve Düzgün(a,b) dağılımından gelen n birimlik örneklem olmak üzere, r . ($r = 1, 2, \dots, n$) sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_r(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ aşağıda verilmektedir.

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-r} \frac{1}{b-a} \quad (2.5)$$

$$F_r(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_a^x \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-r} \frac{1}{b-a} dx & , \quad a < x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2. $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ Sıra İstatistiklerinin Bileşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Bileşik Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik örneklem olsun. $X_{(r)}$ r . sıra istatistiği ($r = 1, 2, \dots, n$) ve $X_{(s)}$ s . sıra istatistiği ($s = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $1 \leq r < s \leq n$ için $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ sıra istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{r,s}(x, y)$ ve sürekli halde bileşik dağılım fonksiyonu $F_{r,s}(x, y)$ sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$A = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

olmak üzere $x < y$ için

$$f_{r,s}(x, y) = A(F(x))^{r-1}(F(y) - F(x))^{s-r-1}(1 - F(y))^{n-s}f(x)f(y) \quad (2.7)$$

$$F_{r,s}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \rightarrow -\infty \text{ veya } y \rightarrow -\infty \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y A(F(x))^{r-1}(F(y) - F(x))^{s-r-1} & , \quad -\infty < x < y < \infty \\ \times (1 - F(y))^{n-s} f(x)f(y) dy dx & \\ 1 & , \quad x \rightarrow \infty \text{ ve } y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.1. Düzgün(0,1) dağılımı için $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ sıra istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bileşik dağılım fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve Düzgün(0,1) dağılımından gelen n birimlik örneklem olmak üzere, $1 \leq r < s \leq n$ için r . ve s . sıra istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{r,s}(x, y)$ ve bileşik dağılım fonksiyonu $F_{r,s}(x, y)$ aşağıda verilmektedir.

$$A = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

olmak üzere,

$$f_{r,s}(x, y) = A(x)^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{n-s} \quad (2.9)$$

$$F_{r,s}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \text{ veya } y \leq 0 \\ \int_0^x \int_0^y A(x)^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{n-s} dy dx & , \quad 0 < x < y < 1, \\ 1 & , \quad x \geq 1 \text{ ve } y \geq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.2. Düzgün(a,b) dağılımı için $X_{(r)}$ ve $X_{(s)}$ sıra istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bileşik dağılım fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsız ve Düzgün(a,b) dağılımından gelen n birimlik örneklem olmak üzere, $1 \leq r < s \leq n$ için r . ve s . sıra istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{r,s}(x, y)$ ve bileşik dağılım fonksiyonu $F_{r,s}(x, y)$ aşağıda verilmektedir.

$$A = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

olmak üzere,

$$f_{r,s}(x, y) = A \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{r-1} \left(\frac{y-x}{b-a} \right)^{s-r-1} \left(\frac{b-y}{b-a} \right)^{n-s} \left(\frac{1}{b-a} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$F_{r,s}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \text{ veya } y \leq a \\ \int_a^x \int_a^y A \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{r-1} \left(\frac{y-x}{b-a} \right)^{s-r-1} \left(\frac{b-y}{b-a} \right)^{n-s} \times \left(\frac{1}{b-a} \right)^2 dy dx & , \quad a < x < y < b \\ 1 & , \quad x \geq b, y \geq b \end{cases} \quad (2.12)$$

3. MEDYAN İSTATİSTİĞİNİN DAĞILIMI

Medyan istatistiği, bir örneklemdaki gözlemler küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortadaki gözlemi ifade eder. $X_1, X_2, \dots, X_n$ n ölçümlü bir örneklem ve U medyan istatistiğini temsil etmek üzere,

$$Medyan = U = \begin{cases} X_{(m+1)} & , \quad n = 2m + 1 \\ \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2} & , \quad n = 2m \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bu başlık altında medyan istatistiğinin dağılımı üzerinde durulmaktadır. Öncelikle medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu genel halde sunulmuştur. Daha sonra bu genel halden yola çıkılarak Düzgün(0,1) ve Düzgün(a,b) dağılımları altında medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Bu fonksiyonlardan yola çıkılarak medyan istatistiğinin merkezi momentleri elde edilmiş, bu merkezi momentlere ilişkin bazı değerler hesaplanarak tablolar halinde sunulmuştur.

3.1. Medyan İstatistiğinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Dağılım Fonksiyonu

Teorem 3.1. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(u)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(u)$ aşağıda verilmiştir.

$$f_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (F(2u-v))^{m-1} (1-F(v))^{m-1} f(2u-v) f(v) dv \quad (3.1)$$

$$F_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} (F(2u-v))^{m-1} (1-F(v))^{m-1} \times f(2u-v) f(v) dv du \quad (3.2)$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f_U(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} (F(x))^m (1-F(x))^m f(x) \quad (3.3)$$

$$F_U(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_{-\infty}^x (F(x))^m (1-F(x))^m f(x) dx \quad (3.4)$$

İspat. $X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ sıra istatistikleri olmak üzere, $1 \leq r < s \leq n$ koşulu altında $X_{(r)}$ r . sıra istatistiği ve $X_{(s)}$ s . sıra istatistiği olsun.

Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda,

$$B = \frac{(2m)!}{(r-1)!(s-r-1)!(2m-s)!}$$

olmak üzere

$$f_{r,s}(x, y) = B(F(x))^{r-1} (F(y) - F(x))^{s-r-1} (1 - F(y))^{2m-s} f(x) f(y) \quad (3.5)$$

$X_{(m)}$ ve $X_{(m+1)}$ için;

$$\begin{aligned} f_{m,m+1}(x, y) &= \frac{(2m)!}{(m-1)! 0! (m-1)!} (F(x))^{m-1} (F(y) - F(x))^0 \\ &\quad \times (1 - F(y))^{m-1} f(x) f(y) \\ &= \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} (F(x))^{m-1} (1 - F(y))^{m-1} f(x) f(y) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Örneklem ölçümü $2m$ olduğundan medyan istatistiği m 'nci ve $(m+1)$ 'inci sıra istatistiklerinin ortalaması olacaktır:

$$U = \frac{X_{(\frac{2m}{2})} + X_{(\frac{2m}{2}+1)}}{2} = \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2} \quad (3.7)$$

$X_{(m)} = X$ ve $X_{(m+1)} = Y$ denirse $U = \frac{X+Y}{2}$ olur.

$y = v$ denirse $x = 2u - v$ olur.

$$f_{U,V}(u, v) = f_{m,m+1}(2u - v, v) |J| \quad (3.8)$$

$$| \det(J) | = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{dX_{(m)}}{du} & \frac{dX_{(m)}}{dv} \\ \frac{dX_{(m+1)}}{du} & \frac{dX_{(m+1)}}{dv} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2$$

Bu durumda

$$f_{U,V}(u, v) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} (F(2u - v))^{m-1} (1 - F(v))^{m-1} f(2u - v) f(v) \quad (3.9)$$

Öyleyse medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(u)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(u)$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (F(2u - v))^{m-1} (1 - F(v))^{m-1} f(2u - v) f(v) dv$$

ve

$$F_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} (F(2u - v))^{m-1} (1 - F(v))^{m-1} \\ \times f(2u - v) f(v) dv du$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı ise, medyan istatistiği $(m + 1)$ 'inci sıra istatistiğine eşit olacaktır. Bu durumda $n = 2m + 1$ örneklem

ölçümü için medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$, formül (2.1) ve (2.2)'den yararlanılarak, sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f_U(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} (F(x))^m (1-F(x))^m f(x)$$

$$F_U(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_{-\infty}^u (F(x))^m (1-F(x))^m f(x) dx$$

3.1.1. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

X rasgele değişkeni Düzgün(0,1) dağılımına sahip ise X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Teorem 3.2. $X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve Düzgün(0,1) dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(u)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(u)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$f(u) = \begin{cases} 2 \frac{(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k! (m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}}{m+k}, & 0 < u < \frac{1}{2} \\ 2 \frac{(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k! (m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k}}{m+k}, & \frac{1}{2} \leq u < 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$A = \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)}$$

olmak üzere,

$$F(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} A \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j ((2u-1)^{m-k+j} - (-1)^{m-k+j})}{m-k+j} \frac{1}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} \right) - \frac{(-1)^{m+k} ((2u-1)^{2m} - 1)}{4m} & , \quad 0 < u < \frac{1}{2} \\ \sum_{k=0}^{m-1} A \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2j+1}}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} + \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i (2u-1)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} & , \quad \frac{1}{2} \leq u < 1 \\ 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ gibi bir tek sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} x^m (1-x)^m & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{m+k+1}}{k! (m-k)! (m+k+1)} & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

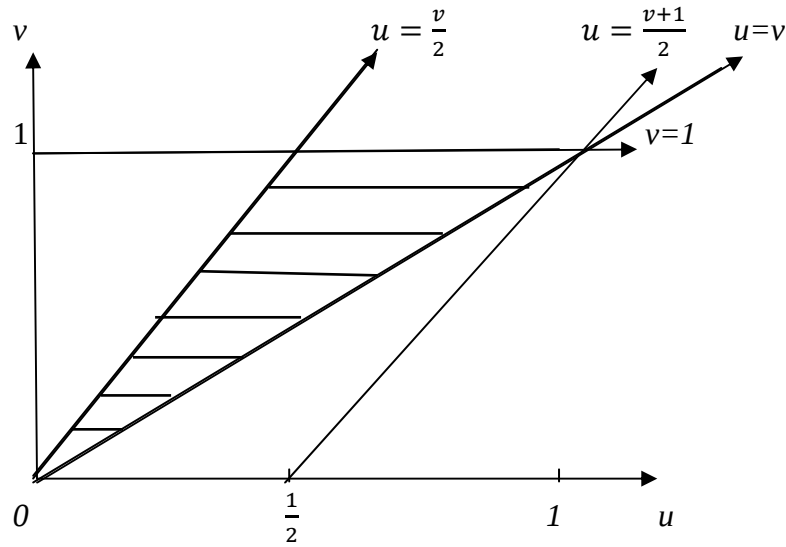
İspat. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde çift bir sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi için öncelikle fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin belirlenmesi gerekmektedir.

$0 < 2u - v < 1$ eşitsizliğinden yola çıkılarak $v < 2u$ ve $v > 2u - 1$ eşitsizlikleri elde edilir.

$0 < v < 1$ eşitsizliği ve $u < v$ koşulu unutulmamalıdır.

Böylece medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için alınacak integralin sınırlarını belirlemek amacıyla grafik yönteminden yararlanılabilir.

Şekil 3.1. Düzgün(0,1) dağılımı için $f_U(u)$ 'nin tanımlı olduğu bölge



Şekil 3.1'de gösterilen taralı alan medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgedir. Bu bölge 0'dan $1/2$ 'ye ve $1/2$ 'den 1'e olmak üzere iki alt bölgeden oluşmaktadır. Bu nedenle elde edilecek olasılık yoğunluk fonksiyonu parçalı bir fonksiyon olacaktır.

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ bölgesi için:

$$f(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_u^{2u} (2u-v)^{m-1} (1-v)^{m-1} dv \quad (3.16)$$

$1-v = t$ ise $v = 1-t$ ve $dv = -dt$ olur.

$$f(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{1-u}^{1-2u} t^{m-1} (2u-1+t)^{m-1} (-dt)$$

$$((2u-1)+t)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} (2u-1)^{m-1-k} t^k \quad (3.17)$$

Öyleyse

$$f(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} (2u-1)^{m-1-k} \int_{1-u}^{1-2u} t^k t^{m-1} (-dt)$$

$$f(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} (m-1)! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k!(m-1-k)!} \int_{1-2u}^{1-u} t^{m+k-1} dt$$

$$f(u) = 2 \frac{(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k!(m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}}{m+k} \quad (3.18)$$

elde edilir.

$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ bölgesi için:

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_u^1 (2u-v)^{m-1} (1-v)^{m-1} dv \quad (3.19)$$

$1-v=t$ ise $v=1-t$ ve $dv=-dt$ olur.

Bu durumda

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{1-u}^0 ((2u-1)+t)^{m-1} t^{m-1} (-dt)$$

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_0^{1-u} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)! (2u-1)^{m-1-k} t^{m+k-1}}{k!(m-1-k)!} dt$$

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} (2u-1)^{m-1-k} \int_0^{1-u} t^{m+k-1} dt$$

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k! (m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k}}{m+k} \quad (3.20)$$

elde edilir.

Bu durumda medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(u) = \begin{cases} 2 \frac{(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k! (m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}}{m+k} & , \quad 0 < u < \frac{1}{2} \\ 2 \frac{(2m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2u-1)^{m-1-k}}{k! (m-1-k)!} \frac{(1-u)^{m+k}}{m+k} & , \quad \frac{1}{2} \leq u < 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Medyan istatistiğinin dağılım fonksiyonu $F(u)$ aşağıda elde edilmiştir.

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ bölgesi için:

$$F(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} \times \left[\int_0^u ((1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}) (2u-1)^{m-1-k} du \right] \quad (3.21)$$

$$C = \int_0^u (1-u)^{m+k} (2u-1)^{m-1-k} du - \int_0^u (1-2u)^{m+k} (2u-1)^{m-1-k} du \quad (3.22)$$

$$A = \int_0^u (1-u)^{m+k} (2u-1)^{m-1-k} du \quad (3.23)$$

ve

$$B = \int_0^u (1-2u)^{m+k} (2u-1)^{m-1-k} du \quad (3.24)$$

$$C = A - B \quad (3.25)$$

A integrali için:

$$2u-1 = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2} \text{ ve } 1-u = 1 - \frac{t+1}{2} = \frac{1-t}{2} \text{ olur.}$$

Bu durumda

$$A = \int_{-1}^{2u-1} \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-1-k} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{m+k+1}} \int_{-1}^{2u-1} (1-t)^{m+k} t^{m-1-k} dt \quad (3.26)$$

olur. Burada

$$(1-t)^{m+k} = \sum_{j=0}^{m+k} \binom{m+k}{j} (-1)^j t^j = \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{j! (m+k-j)!} (-1)^j t^j \quad (3.27)$$

Öyleyse

$$A = \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} \int_{-1}^{2u-1} t^{m-k-1+j} dt$$

$$A = \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} \frac{(2u-1)^{m-k+j} - (-1)^{m-k+j}}{(m-k+j)} \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir.

B integrali için:

$$2u-1 = w \text{ ise } du = \frac{dw}{2} \text{ ise } B = \int_{-1}^{2u-1} (-w)^{m+k} w^{m-1-k} \frac{dw}{2}$$

$$B = \frac{(-1)^{m+k}}{2} \int_{-1}^{2u-1} w^{2m-1} dw$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{m+k}}{2} \frac{((2u-1)^{2m}-1)}{2m} \\
&= \frac{(-1)^{m+k}((2u-1)^{2m}-1)}{4m}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} (C) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} (A-B) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{m-k+j} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{((2u-1)^{m-k+j} - (-1)^{m-k+j})}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} - \frac{(-1)^{m+k}((2u-1)^{2m}-1)}{4m} \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir.

$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ bölgesi için:

$$\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}] (2u-1)^{m-1-k} du \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^u (2u-1)^{m-1-k} (1-u)^{m+k} du \right\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}](2u-1)^{m-1-k} du \quad (3.32)$$

ve

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^u (2u-1)^{m-1-k}(1-u)^{m+k} du \text{ ise}$$

$$W = A + B \quad (3.33)$$

Bu bölüm hesaplanırken $(0, \frac{1}{2})$ bölgesi için yapılan dönüşümlerden yararlanılabilir. A integrali formül (3.22)'teki C integralinin aynısıdır. Sadece integrallerin sınırları değişecektir.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!(-1)^j}{j!(m+k-j)!2^{m+k+1}} \frac{(-1)^{m-k+j+1}}{(m-k+j)} - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} \\ &= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!(-1)^{m-k+2j+1}}{j!(m+k-j)!2^{m+k+1}(m-k+j)} - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^u (2u-1)^{m-1-k}(1-u)^{m+k} du \quad (3.35)$$

$$2u-1 = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2} \text{ ve } 1-u = \frac{1-t}{2} \text{ olur.}$$

Bu durumda

$$B = \int_0^{2u-1} t^{m-k-1} \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{m+k+1}} \int_0^{2u-1} t^{m-k-1}(1-t)^{m+k} dt$$

olur. Burada

$$(1-t)^{m+k} = \sum_{i=0}^{m+k} \binom{m+k}{i} (-1)^i t^i = \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{i!(m+k-i)!} (-1)^i t^i \quad (3.36)$$

Böylece

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1}} \int_0^{2u-1} t^{m-k-1+i} dt \\
 &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i (2u-1)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} (A + B) \\
 F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)} \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2j+1}}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} + \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i (2u-1)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} \right) \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak medyan istatistiğinin dağılım fonksiyonunu

$$A = \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-1-k)! (m+k)}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
F(u) &= \begin{cases} 0 & , \quad u \leq 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} A \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j ((2u-1)^{m-k+j} - (-1)^{m-k+j})}{m-k+j} \frac{1}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} \right) & , \quad 0 < u < \frac{1}{2} \\ - \frac{(-1)^{m+k} ((2u-1)^{2m} - 1)}{4m} & \\ = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} A \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2j+1}}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} \right) & , \quad \frac{1}{2} \leq u < 1 \\ - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} + \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i (2u-1)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} & \\ 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Medyan istatistiği örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı olan ve Düzgün(0,1) dağılımından gelen bir örneklem üzerinden elde edildiğinde medyan istatistiği $X_{(m+1)}$ olur. Bu durumda medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$, formül (2.1) ve (2.2)'den yararlanılarak, sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} x^m (1-x)^m & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

$$F_U(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^x x^m (1-x)^m dx \quad (3.39)$$

$$= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^x x^m \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (-1)^k x^k dx$$

$$= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \int_0^x x^{m+k} dx$$

$$= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{m+k+1}}{k! (m-k)! (m+k+1)}$$

olarak elde edilir.

Öyleyse

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{m+k+1}}{k! (m-k)! (m+k+1)} & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

olur.

3.1.2. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin ilk iki merkezi momenti ve varyansı

Teorem 3.3. $X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve Düzgün(0,1) dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(U)$, ikinci merkezi momenti $E(U^2)$ ve varyansı $V(U)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \right. \\ &\times \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \\ &\left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \right. \\ &\times \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{8} \\ &\times \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\ &\times \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
V(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \right. \\
&\times \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{8} \\
&\times \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\times \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \Bigg) \\
&- \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \right. \right. \\
&\times \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \\
&\left. \left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \right) \right)^2 \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde tek bir sayı olduğunda medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(X)$, ikinci merkezi momenti $E(X^2)$ ve varyansı $V(X)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$E(X) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)! (m+k+2)} \quad (3.43)$$

$$E(X^2) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)! (m+k+3)} \quad (3.44)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+3)} - \left(\frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+2)} \right)^2 \quad (3.45)$$

İspat. Düzgün(0,1) dağılımından gelen ve örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olan örneklem için medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(U)$, ikinci merkezi momenti $E(U^2)$ ve varyansı $V(U)$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du = \int_0^{\frac{1}{2}} uf(u)du + \int_{\frac{1}{2}}^1 uf(u)du \quad (3.46)$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} uf(u)du \text{ ve } B = \int_{\frac{1}{2}}^1 uf(u)du$$

ise

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \\ &\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} u(2u-1)^{m-k-1} [(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}] du \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(2u-1)^{m-k-1} (1-u)^{m+k} du \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{1}{2}} u(2u-1)^{m-k-1} (1-2u)^{m+k} du \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} u(2u-1)^{m-k-1} (1-u)^{m+k} du, \quad (3.48)$$

$$D = \int_0^{\frac{1}{2}} u(2u-1)^{m-k-1} (1-2u)^{m+k} du \quad (3.49)$$

diyelim. Bu durumda

$$A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} (C-D)$$

olacaktır.

C integrali için:

$$2u-1=t \text{ ise } 1-u = \frac{1-t}{2}, u = \frac{t+1}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1)}{2} \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_{-1}^0 (t^{m-k} + t^{m-k-1})(1-t)^{m+k} dt \\ &= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_{-1}^0 (t^{m-k} + t^{m-k-1}) \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{i! (m+k-i)!} (-1)^i t^i dt \\ &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\int_{-1}^0 t^{m-k+i} dt + \int_{-1}^0 t^{m-k+i-1} dt \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{0 - (-1)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} + \frac{0 - (-1)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} (-1)^{m-k+i+1} \left(\frac{1}{m-k+i} - \frac{1}{m-k+i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) \quad (3.50) \end{aligned}$$

D integrali için:

$$2u - 1 = t \text{ ise } 1 - 2u = -t, u = \frac{t+1}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1)}{2} t^{m-k-1} (-1)^{m+k} t^{m+k} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{(-1)^{m+k}}{4} \int_{-1}^0 (t+1) t^{2m-1} dt \\ &= \frac{(-1)^{m+k}}{4} \int_{-1}^0 (t^{2m} + t^{2m-1}) dt \\ &= \frac{(-1)^{m+k}}{4} \left(\frac{0 - (-1)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{0 - (-1)^{2m}}{2m} \right) \\ &= \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

ise

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} (C - D) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$B = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \int_{\frac{1}{2}}^1 u(1-u)^{m+k} (2u-1)^{m-k-1} du$$

İntegral incelenecek olursa,

$$2u - 1 = t \text{ ise } u = \frac{t+1}{2}, 1 - u = \frac{1-t}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 u(1-u)^{m+k}(2u-1)^{m-k-1} du &= \int_0^1 \frac{(t+1)}{2} \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_0^1 (t^{m-k} + t^{m-k-1})(1-t)^{m+k} dt \\
&= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_0^1 (t^{m-k} + t^{m-k-1}) \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{j!(m+k-j)!} (-1)^j t^j dt \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\int_0^1 t^{m+j-k} dt + \int_0^1 t^{m+j-k-1} dt \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{1}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \quad (3.53)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \left(\sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+2}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \right) \quad (3.54)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i!(m+k-i)! 2^{m+k+2}} \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Düzgün(0,1) dağılımından gelen $n = 2m$ ölçümlü bir örneklem için medyan istatistiğinin ikinci merkezi momenti aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_U(u) du = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 f_U(u) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 f_U(u) du = A + B \quad (3.55)$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 f_U(u) du \text{ ve } B = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 f_U(u) du \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \\ &\quad \times \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 (2u-1)^{m-k-1} [(1-u)^{m+k} - (1-2u)^{m+k}] du \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} u^2 (2u-1)^{m-k-1} (1-u)^{m+k} du \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 (2u-1)^{m-k-1} (1-2u)^{m+k} du \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 (2u-1)^{m-k-1} (1-u)^{m+k} du \quad (3.57)$$

ve

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 (2u-1)^{m-k-1} (1-2u)^{m+k} du \quad (3.58)$$

olsun.

Bu durumda

$$A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} (W - V)$$

W integrali için:

$$2u - 1 = t \text{ ise } 1 - u = \frac{1-t}{2}, u = \frac{1+t}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-1}^0 \left(\frac{(t+1)}{2} \right)^2 \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_{-1}^0 (t^2 + 2t + 1)(1-t)^{m+k} t^{m-k-1} dt \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_{-1}^0 (t^{m-k+1} + 2t^{m-k} + t^{m-k-1}) \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{i! (m+k-i)!} (-1)^i t^i dt \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \int_{-1}^0 (t^{m-k+1+i} + 2t^{m-k+i} + t^{m-k-1+i}) dt \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{0 - (-1)^{m-k+i+2}}{m-k+i+2} + 2 \frac{0 - (-1)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{0 - (-1)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(-1)^{m-k+i+3}}{m-k+i+2} + 2 \frac{(-1)^{m-k+i+2}}{m-k+i+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{m-k+i+1}}{m-k+i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

V integrali için:

$$2u - 1 = t \text{ ise } 1 - 2u = -t, u = \frac{t+1}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^2}{2^2} t^{m-k-1} (-1)^{m+k} t^{m+k} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \int_{-1}^0 (t^2 + 2t + 1) t^{2m-1} dt \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \int_{-1}^0 (t^{2m+1} + 2t^{2m} + t^{2m-1}) dt \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \left(\frac{0 - (-1)^{2m+2}}{2m+2} + 2 \frac{0 - (-1)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{0 - (-1)^{2m}}{2m} \right) \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \right. \\
&\times \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{8} \\
&\times \left. \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) \right) \tag{3.61}
\end{aligned}$$

B integrali için:

$$B = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 (1-u)^{m+k} (2u-1)^{m-k-1} du \tag{3.62}$$

İntegral incelenecek olursa:

$$2u - 1 = t \text{ ise } u = \frac{t+1}{2}, 1-u = \frac{1-t}{2} \text{ ve } du = \frac{dt}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 u^2(1-u)^{m+k}(2u-1)^{m-k-1} du &= \int_0^1 \frac{(t+1)^2}{2^2} \frac{(1-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_0^1 (t^2 + 2t + 1) t^{m-k-1} (1-t)^{m+k} dt \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_0^1 (t^{m-k+1} + 2t^{m-k} + t^{m-k-1}) \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{j!(m+k-j)!} (-1)^j t^j dt \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+3}} \int_0^1 (t^{m-k+1+j} + 2t^{m-k+j} + t^{m-k-1+j}) dt \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right)
\end{aligned}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak medyan istatistiğinin ikinci merkezi momenti

$$\begin{aligned}
E(U^2) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i!(m+k-i)! 2^{m+k+3}} \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{8} \\
&\quad \times \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j!(m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

X rasgele değişkeni Düzgün(0,1) dağılımına sahip olduğunda ve örneklem ölçümü $n = 2m$ gibi çift bir sayı olduğunda medyan istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V(U) = E(U^2) - [E(U)]^2 \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m-k+i+2} - \frac{2}{m-k+i+1} + \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{8} \\
&\quad \times \left(\frac{-1}{2m+2} + \frac{2}{2m+1} + \frac{-1}{2m} \right) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{m-k+j+2} + \frac{2}{m-k+j+1} + \frac{1}{m-k+j} \right) \Bigg) \\
&\quad - \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (m+k)} \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^{m-k+2i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \right. \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \frac{1}{2m(2m+1)} \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)} \right) \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ gibi bir tek sayı ise medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(X)$, ikinci merkezi momenti $E(X^2)$ ve varyansı $V(U)$ sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(X) = \int_0^1 x f_U(x) dx \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 x x^m (1-x)^m dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 x^{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (-1)^k x^k dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \int_0^1 x^{m+k+1} dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)! (m+k+2)} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_U(x) dx \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 x^2 x^m (1-x)^m dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \int_0^1 x^{m+k+2} dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)! (m+k+3)} \end{aligned}$$

X rasgele değişkeni Düzgün(0,1) dağılımına sahipse ve örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ gibi bir tek sayı ise medyan istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (3.67)$$

$$V(X) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+3)} - \left(\frac{(2m+1)!}{m!} \times \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+2)} \right)^2$$

olarak elde edilir.

3.1.3. Düzgün(0,1) dağılımı için medyan istatistiğinin hesaplanmış ilk iki merkezi momenti ve varyansı

Bu bölümde $n = 2m$ ve $n = 2m + 1$ örneklem düzeylerinde farklı m değerleri için medyan istatistiğinin beklenen değeri, ikinci merkezi momenti ve varyansı hesaplanarak tablolar halinde verilmiştir.

Düzgün(0,1) dağılımı ve $n = 2m$ örneklem ölçümü için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 3.1. Düzgün(0,1) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	0,5	0,291667	0,041667
2	0,5	0,283333	0,033333
3	0,5	0,276786	0,026786
4	0,5	0,272222	0,022222
5	0,5	0,268939	0,018939

Düzgün(0,1) dağılımı ve $n = 2m + 1$ örneklem ölçümü için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 3.2. Düzgün(0,1) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	0,5	0,300000	0,050000
2	0,5	0,285714	0,035714
3	0,5	0,277778	0,027778
4	0,5	0,272727	0,022727
5	0,5	0,269231	0,019231

3.1.4. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

X rasgele değişkeni Düzgün(a,b) dağılımına sahip ise, $a < b$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (3.69)$$

Teorem 3.4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve Düzgün(a,b) ($a < b$) dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(u)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(u)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
f(u) &= \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)! (2u - b - a)^{m-k-1}}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} & , \quad a < u < \frac{a+b}{2} \\ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m}} & , \quad \frac{a+b}{2} \leq u < b \\ \times ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) & \\ \times (2u - b - a)^{m-k-1} \frac{(b-u)^{m+k}}{m+k} & \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.70}$$

$$K = \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad u \leq a \\ \sum_{k=0}^{m-1} K \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} \right. & , \quad a < u < \frac{a+b}{2} \\ \quad \times ((2u - (b+a))^{m-k+i}) - (a-b)^{m-k+i} \\ \quad \left. - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} ((2u - (b+a))^{2m} - (a-b)^{2m}) \right) & \\ \sum_{k=0}^{m-1} K \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} \right. & , \quad \frac{a+b}{2} \leq u < b \\ \quad \times (a-b)^{m-k+i} - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} (a-b)^{2m} \\ \quad + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} \\ \quad \times (2u - (b+a))^{m-k+j} & \\ 1 & , \quad u \geq b \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.71}$$

Eğer örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \frac{(x-a)^m (b-x)^m}{(b-a)^{2m+1}} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (3.72)$$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k} (-1)^k}{k! (m-k)!} \frac{(x-a)^{m+k+1}}{m+k+1} & , \quad a < x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases} \quad (3.73)$$

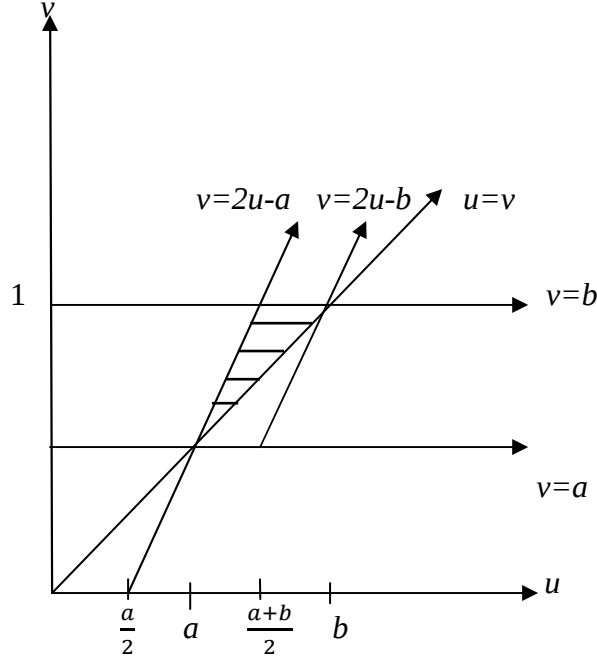
İspat. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde çift bir sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi için öncelikle fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin belirlenmesi gerekmektedir.

$a < 2u - v < b$ eşitsizliğinden yola çıkılarak $v < 2u - a$ ve $v > 2u - b$ eşitsizlikleri elde edilir.

$a < v < b$ eşitsizliği ve $u < v$ koşulu unutulmamalıdır.

Böylece medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için alınacak integralin sınırlarını belirlemek amacıyla grafik yönteminden yararlanılabilir.

Şekil 3.2. Düzgün(a,b) dağılımı için $f_U(u)$ 'nin tanımlı olduğu bölge



Şekilde gösterilen taralı alan medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgedir. Bu bölge a 'dan $\frac{a+b}{2}$ 'ye ve $\frac{a+b}{2}$ 'den b 'ye olmak üzere iki alt bölgeden oluşmaktadır. Bu nedenle elde edilecek olasılık yoğunluk fonksiyonu parçalı bir fonksiyon olacaktır.

$\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ bölgesi için:

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_u^{2u-a} \left(\frac{2u-v-a}{b-a}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{v-a}{b-a}\right)^{m-1} \frac{1}{(b-a)^2} dv \quad (3.74)$$

$$= \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_u^{2u-a} \frac{((2u-v-a)(b-v))^{m-1}}{(b-a)^{2m}} dv$$

$b-v=t$ ise $dv = -dt$ ve $v = b-t$ olur.

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2 (b-a)^{2m}} \int_{b-u}^{b+a-2u} (t(2u-b+t-a))^{m-1} (-dt)$$

$$= \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2 (b-a)^{2m}} \int_{b+a-2u}^{b-u} t^{m-1} ((2u-b-a)+t)^{m-1} dt \quad (3.75)$$

$$((2u-b-a)+t)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (2u-b-a)^{m-k-1} t^k \quad (3.76)$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2 (b-a)^{2m}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (2u-b-a)^{m-k-1} \\ &\quad \times \int_{b+a-2u}^{b-u} t^{m+k-1} dt \\ &= \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2 (b-a)^{2m}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)! (2u-b-a)^{m-k-1}}{k! (m-k-1)! (m+k)} \\ &\quad \times ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)! (2u-b-a)^{m-k-1}}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\ &\quad \times ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

elde edilir.

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ bölgesi için:

$$f(u) = \frac{2(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_u^b \left(\frac{2u-v-a}{b-a}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{v-a}{b-a}\right)^{m-1} \frac{1}{(b-a)^2} dv \quad (3.78)$$

Burada integral hesaplanırken yapılacak dönüşümler $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ bölgesi için yapılan dönüşümlerle aynıdır. Değişen tek faktör integralin sınırlarıdır. Bu nedenle bu bölge için bulunan olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(u)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$f(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m}} (2u-b-a)^{m-k-1} \times \frac{(b-u)^{m+k}}{m+k} \quad (3.79)$$

elde edilir.

Sonuç olarak medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(u) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)! (2u-b-a)^{m-k-1}}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} & , \quad a < u < \frac{a+b}{2} \\ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m}} & , \quad \frac{a+b}{2} \leq u < b \\ \times ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) & \\ \times (2u-b-a)^{m-k-1} \frac{(b-u)^{m+k}}{m+k} & \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (3.80)$$

Şimdi $F(u)$ dağılım fonksiyonunu elde edelim,

$\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ bölgesi için;

$$F(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \times \int_a^u (2u-(a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) du \quad (3.81)$$

$$A = \int_a^u (2u-(a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^u (2u - (a + b))^{m-k-1} (b - u)^{m+k} du - \int_a^u (2u - (a + b))^{m-k-1} \\
&\quad \times (b + a - 2u)^{m+k} du
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$B = \int_a^u (2u - (a + b))^{m-k-1} (b - u)^{m+k} du \tag{3.83}$$

$$C = \int_a^u (2u - (a + b))^{m-k-1} (b + a - 2u)^{m+k} du \tag{3.84}$$

$$A = B - C \tag{3.85}$$

B integrali için:

$$2u - (b + a) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a + b)}{2},$$

$$b - u = b - \frac{t + (a + b)}{2} = \frac{(b - a) - t}{2} \text{ olur.}$$

Bu eşitliklerden yola çıkılırsa

$$B = \int_{a-b}^{2u-(b+a)} t^{m-k-1} \frac{((b - a) - t)^{m+k}}{2^{m+k}} \frac{dt}{2} \tag{3.86}$$

$$= \frac{1}{2^{m+k+1}} \int_{a-b}^{2u-(b+a)} t^{m-k-1} ((b - a) - t)^{m+k} dt$$

$$((b - a) - t)^{m+k} = \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{i! (m+k-i)!} (b-a)^{m+k-i} (-1)^i t^i \tag{3.87}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1}} \int_{a-b}^{2u-(b+a)} t^{m-k+i-1} dt \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} ((2u - (b + a))^{m-k+i} \\
&\quad - (a - b)^{m-k+i})
\end{aligned} \tag{3.88}$$

olarak elde edilir.

C integrali için:

$$\begin{aligned}
 2u - (b + a) = w \text{ ise } du &= \frac{dw}{2} \\
 C &= \int_{a-b}^{2u-(b+a)} w^{m-k-1} (-1)^{m+k} w^{m+k} \frac{dw}{2} = \frac{(-1)^{m+k}}{2} \int_{a-b}^{2u-(b+a)} w^{2m-1} dw \\
 &= \frac{(-1)^{m+k}}{4m} ((2u - (b + a))^{2m} - (a - b)^{2m}) \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} ((2u - (b + a))^{m-k+i} \\
 &\quad - (a - b)^{m-k+i}) - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} ((2u - (b + a))^{2m} - (a - b)^{2m}) \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} ((2u - (b + a))^{m-k+i} \right. \\
 &\quad \left. - (a - b)^{m-k+i}) - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} ((2u - (b + a))^{2m} - (a - b)^{2m}) \right) \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ bölgesi için;

$$\begin{aligned}
 F(u) = & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 & \times \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (2u - (a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) du \right. \\
 & \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^u (2u - (b+a))^{m-k-1} (b-u)^{m+k} du \right) \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

$$B = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (2u - (a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) du$$

ve (3.93)

$$C = \int_{\frac{a+b}{2}}^u (2u - (b+a))^{m-k-1} (b-u)^{m+k} du \text{ diyelim.} \quad (3.94)$$

B integrali için:

$$\begin{aligned}
 B = & \sum_{i=i}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} \left(\left(2 \frac{a+b}{2} - b - a \right)^{m-k+i} \right. \\
 & \left. - (2a - b - a)^{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} \left(\left(2 \frac{a+b}{2} - b - a \right)^{2m} - (2a - b - a)^{2m} \right) \\
 = & \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} (-1) (a-b)^{m-k+i} \\
 & - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} (-1) (a-b)^{2m} \\
 = & \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} (a-b)^{m-k+i} \\
 & - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} (a-b)^{2m} \quad (3.95)
 \end{aligned}$$

C integrali için:

$$2u - (b + a) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{(b + a) + t}{2} \text{ ve } b - u = \frac{(b - a) - t}{2}$$

Böylece

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2u-(b+a)} t^{m-k-1} \frac{((b-a)-t)^{m+k}}{2^{m+k}} \frac{dt}{2} \\ &= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1}} \int_0^{2u-(b+a)} t^{m-k+j-1} dt \\ &= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} (2u - (b+a))^{m-k+j} \text{ elde edilir.} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} (B + C) \quad (3.97) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{(m-1)! k! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+1} (m-k+i)} (a-b)^{m-k+i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} (a-b)^{2m} + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+1} (m-k+j)} \right. \\ &\quad \left. \times (2u - (b+a))^{m-k+j} \right) \quad (3.98) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak medyan istatistiğinin dağılım fonksiyonu

$$K = \frac{2(2m)!}{(m-1)!k!(m-k-1)!(b-a)^{2m}(m+k)}$$

olmak üzere,

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \leq a \\ \sum_{k=0}^{m-1} K \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!(b-a)^{m+k-i}(-1)^i}{i!(m+k-i)!2^{m+k+1}(m-k+i)} \right. \\ \quad \times ((2u-(b+a))^{m-k+i} - (a-b)^{m-k+i}) \\ \quad \left. - \frac{(-1)^{m+k}}{4m} ((2u-(b+a))^{2m} - (a-b)^{2m}) \right) & , \quad a < u < \frac{a+b}{2} \\ = \sum_{k=0}^{m-1} K \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!(b-a)^{m+k-i}(-1)^{i+1}}{i!(m+k-i)!2^{m+k+1}(m-k+i)} \right. \\ \quad \times (a-b)^{m-k+i} - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4m} (a-b)^{2m} \\ \quad + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!(b-a)^{m+k-j}(-1)^j}{j!(m+k-j)!2^{m+k+1}(m-k+j)} \\ \quad \times (2u-(b+a))^{m-k+j} \Big) & , \quad \frac{a+b}{2} \leq u < b \\ 1 & , \quad u \geq b \end{cases}$$

olarak bulunur.

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı ise medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_U(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_U(x)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} f_U(x) &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^m \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \right)^m \frac{1}{b-a} \\ &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \left(\frac{(x-a)(b-a-x+a)}{(b-a)^2} \right)^m \frac{1}{b-a} \\ &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \frac{(x-a)^m (b-x)^m}{(b-a)^{2m+1}} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Sonuç olarak medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \frac{(x-a)^m (b-x)^m}{(b-a)^{2m+1}} & , \quad a < x < b, \quad a < b \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2 (b-a)^{2m+1}} \int_a^x (x-a)^m (b-x)^m dx \quad (3.100)$$

$\int_a^x (x-a)^m (b-x)^m dx$ integralini inceleyelim:

$x-a=t$ ise $dx=dt$, $x=t+a$ ise $b-x=b-a-t$ olur.

Böylece

$$\int_a^x (x-a)^m (b-x)^m dx = \int_0^{x-a} t^m ((b-a)-t)^m dt \text{ olur.} \quad (3.101)$$

$$((b-a)-t)^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (b-a)^{m-k} (-1)^k t^k \text{ ise} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{x-a} t^m ((b-a)-t)^m dt \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (b-a)^{m-k} (-1)^k \int_0^{x-a} t^{m+k} dt \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (b-a)^{m-k} (-1)^k \frac{(x-a)^{m+k+1}}{m+k+1} \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$F(x) = \frac{(2m+1)!}{m! (b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k} (-1)^k (x-a)^{m+k+1}}{k! (m-k)! (m+k+1)} \quad (3.104)$$

Sonuç olarak medyan istatistiğinin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ \frac{(2m+1)!}{m! (b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k} (-1)^k (x-a)^{m+k+1}}{k! (m-k)! (m+k+1)} & , \quad a < x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases}$$

olarak elde edilir.

3.1.5. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin ilk iki merkezi momenti ve varyansı

Teorem 3.5. $X_1, X_2, \dots, X_n$ birbirinden bağımsız ve Düzgün(a,b) dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. Örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olduğunda medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(U)$, ikinci merkezi momenti $E(U^2)$ ve varyansı $V(U)$ sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 &\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \right) \quad (3.105)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(U^2) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 &\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a-b)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a-b)^2}{m-k+i+2} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + 2(a+b) \frac{(a-b)}{m-k+i+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a-b)^{2m} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{(a-b)^2}{2m+2} + \frac{2(a+b)(a-b)}{2m+1} + \frac{(a+b)^2}{2m} \right) \right) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{2m} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
 &\times \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \quad (3.106)
 \end{aligned}$$

Düzgün(a,b) dağılımı altında, $n = 2m$ örneklem ölçümü için medyan istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
V(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a-b)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a-b)^2}{m-k+i+2} \right. \right. \right. \\
&+ 2(a+b) \frac{(a-b)}{m-k+i+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+i} \Bigg) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a-b)^{2m} \\
&\times \left(\frac{(a-b)^2}{2m+2} + \frac{2(a+b)(a-b)}{2m+1} + \frac{(a+b)^2}{2m} \right) \Bigg) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{2m} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\times \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \Bigg) \\
&- \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \right. \\
&\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \right. \right. \\
&+ \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \Bigg) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \Bigg) \\
&+ \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \\
&\times \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \Bigg) \Bigg)^2
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Medyan istatistiğinin, $n = 2m + 1$ örneklem ölçümü ve Düzgün(a,b) dağılımı için beklenen değeri $E(X)$, ikinci merkezi momenti $E(X^2)$ ve varyansı $V(X)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(X) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{b-a}{m+k+2} + \frac{a}{m+k+1} \right) \quad (3.108)$$

$$E(X^2) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{(b-a)^2}{m+k+3} + 2a \frac{(b-a)}{m+k+2} + \frac{a^2}{m+k+1} \right) \quad (3.109)$$

$$V(X) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{(b-a)^2}{m+k+3} + 2a \frac{(b-a)}{m+k+2} + \frac{a^2}{m+k+1} \right) - \left(\frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{b-a}{m+k+2} + \frac{a}{m+k+1} \right) \right)^2 \quad (3.110)$$

İspat. Düzgün(a,b) dağılımından gelen ve örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı olan örneklem için medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(U)$, ikinci merkezi momenti $E(U^2)$ ve varyansı $V(U)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du = \int_a^{\frac{a+b}{2}} uf(u)du + \int_{\frac{a+b}{2}}^b uf(u)du \quad (3.111)$$

$$A = \int_a^{\frac{a+b}{2}} uf(u)du \text{ ve } B = \int_{\frac{a+b}{2}}^b uf(u)du \text{ dersek, } E(U) = A + B \text{ olur.}$$

(3.112)

$$A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(b-a)^{2m}(m+k)} \times \int_a^{\frac{a+b}{2}} (2u - (a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) u du \quad (3.113)$$

İntegrali inceleyecek olursak,

$$W = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u(b-u)^{m+k}(2u-(a+b))^{m-k-1} du \text{ ve} \quad (3.114)$$

$$V = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u(2u-(a+b))^{m-k-1}(b+a-2u)^{m+k} du \text{ ise} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^{\frac{a+b}{2}} (2u-(a+b))^{m-k-1}((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) u du \\ &= W - V \end{aligned} \quad (3.116)$$

W integrali için:

$$2u-(a+b)=t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t+(a+b)}{2} \text{ ve } b-u = \frac{(b-a)-t}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{a-b}^0 \frac{t+(a+b)}{2} \frac{((b-a)-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_{a-b}^0 (t^{m-k} + (a+b)t^{m-k-1}) ((b-a)-t)^{m+k} dt \\ &= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_{a-b}^0 (t^{m-k} + (a+b)t^{m-k-1}) \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{i!(m+k-i)!} \\ &\quad \times (b-a)^{m+k-i} (-1)^i t^i dt \\ &= \frac{1}{2^{m+k+2}} \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i!(m+k-i)!} \\ &\quad \times \int_{a-b}^0 (t^{m-k+i} + (a+b)t^{m-k-1+i}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(-1)(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \\
&\quad \left. + (a+b) \frac{(-1)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \\
&\quad \times \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) \tag{3.117}
\end{aligned}$$

V integrali için:

$$2u - (a+b) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a+b)}{2} \text{ ve } (a+b) - 2u = -t \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{a-b}^0 \frac{t + (a+b)}{2} t^{m-k-1} (-1)^{m+k} t^{m+k} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{4} \int_{a-b}^0 (t + (a+b)) t^{2m-1} dt \\
&= \frac{(-1)^{m+k}}{4} \int_{a-b}^0 (t^{2m} + (a+b)t^{2m-1}) dt \\
&= \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \right) \tag{3.119}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$B = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \times \int_{\frac{a+b}{2}}^b u(2u - (a+b))^{m-k-1} (b-u)^{m+k} du \quad (3.120)$$

İntegrali incelenecek olursak,

$$2u - (a+b) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a+b)}{2} \text{ ve } b-u = \frac{(b-a) - t}{2} \text{ olur.}$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b u(2u - (a+b))^{m-k-1} (b-u)^{m+k} du \quad (3.121)$$

$$= \int_0^{b-a} \frac{t + (a+b)}{2} t^{m-k-1} \frac{((b-a) - t)^{m+k}}{2^{m+k}} \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_0^{b-a} (t^{m-k} + (a+b)t^{m-k-1})((b-a) - t)^{m+k} dt$$

$$= \frac{1}{2^{m+k+2}} \int_0^{b-a} (t^{m-k} + (a+b)t^{m-k-1})$$

$$\times \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j!} t^j dt$$

$$= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \int_0^{b-a} (t^{m-k+j} + (a+b)t^{m-k-1+j}) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}}$$

$$\times \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \quad (3.122)$$

Öyleyse

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 &\times \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} \right. \\
 &\left. + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak medyan istatistiğinin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
 &\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \right) \\
 &+ \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \\
 &\times \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Düzgün(a,b) dağılımından gelen bir $n = 2m$ ölçümlü örneklem için medyan istatistiğinin ikinci merkezi momenti aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 f(u) du + \int_{\frac{a+b}{2}}^b u^2 f(u) du \quad (3.124)$$

$$A = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 f(u) du \text{ ve } B = \int_{\frac{a+b}{2}}^b u^2 f(u) du \text{ olsun.} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\ &\times \int_a^{\frac{a+b}{2}} (2u - (a+b))^{m-k-1} ((b-u)^{m+k} - (b+a-2u)^{m+k}) u^2 du \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\ &\times \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 (b-u)^{m+k} (2u - (a+b))^{m-k-1} du \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 (2u - (a+b))^{m-k-1} (b+a-2u)^{m+k} du \right) \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$W = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 (b-u)^{m+k} (2u - (a+b))^{m-k-1} du \text{ ve} \quad (3.127)$$

$$V = \int_a^{\frac{a+b}{2}} u^2 (2u - (a+b))^{m-k-1} (b+a-2u)^{m+k} du \text{ diyelim.} \quad (3.128)$$

W integrali için:

$$2u - (a+b) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a+b)}{2} \text{ ve } b-u = \frac{(b-a) - t}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
W &= \int_{a-b}^0 \frac{(t + (a + b))^2}{2^2} \frac{((b - a) - t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_{a-b}^0 (t^2 + 2t(a + b) + (a + b)^2) ((b - a) - t)^{m+k} t^{m-k-1} dt
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$((b - a) - t)^{m+k} = \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m + k)!}{i! (m + k - i)!} (b - a)^{m+k-i} (-1)^i t^i \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_{a-b}^0 (t^{m-k+1} + 2t^{m-k}(a + b) + (a + b)^2 t^{m-k-1}) \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m + k)!}{i! (m + k - i)!} (b - a)^{m+k-i} (-1)^i t^i dt \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m + k)! (b - a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m + k - i)! 2^{m+k+3}} \int_{a-b}^0 (t^{m-k+i+1} + 2(a + b)t^{m-k+i} \\
&\quad + (a + b)^2 t^{m-k+i-1}) dt \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m + k)! (b - a)^{m+k-i} (-1)^i}{i! (m + k - i)! 2^{m+k+3}} \left(\int_{a-b}^0 t^{m-k+i+1} dt \right. \\
&\quad \left. + 2(a + b) \int_{a-b}^0 t^{m-k+i} dt + (a + b)^2 \int_{a-b}^0 t^{m-k+i-1} dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m + k)! (b - a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a - b)^{m-k+i}}{i! (m + k - i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a - b)^2}{m - k + i + 2} \right. \\
&\quad \left. + 2(a + b) \frac{(a - b)}{m - k + i + 1} + (a + b)^2 \frac{1}{m - k + i} \right)
\end{aligned} \tag{3.131}$$

olarak bulunur.

V integrali için:

$$2u - (a + b) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a + b)}{2} \text{ ve } (a + b) - 2u = -t \text{ olur.}$$

$$V = \int_{a-b}^0 \frac{(t + (a + b))^2}{2^2} (-1)^{m+k} t^{m+k} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \quad (3.132)$$

$$= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \int_{a-b}^0 (t^2 + 2(a + b)t + (a + b)^2) t^{2m-1} dt$$

$$= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \int_{a-b}^0 (t^{2m+1} + 2(a + b)t^{2m} + (a + b)^2 t^{2m-1}) dt$$

$$= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \left(\int_{a-b}^0 t^{2m+1} dt + 2(a + b) \int_{a-b}^0 t^{2m} dt + (a + b)^2 \int_{a-b}^0 t^{2m-1} dt \right)$$

$$= \frac{(-1)^{m+k}}{8} \left(\frac{(-1)(a - b)^{2m+2}}{2m + 2} + \frac{(-1)2(a + b)(a - b)^{2m+1}}{2m + 1} \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)(a + b)^2 t^{2m}}{2m} \right)$$

$$= \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a - b)^{2m} \left(\frac{(a - b)^2}{2m + 2} + \frac{2(a + b)(a - b)}{2m + 1} + \frac{(a + b)^2}{2m} \right)$$

(3.133)

Öyleyse

$$A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m - 1)! (m - k - 1)! (b - a)^{2m} (m + k)} (W - V) \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a-b)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a-b)^2}{m-k+i+2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(a+b) \frac{(a-b)}{m-k+i+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a-b)^{2m} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{(a-b)^2}{2m+2} + \frac{2(a+b)(a-b)}{2m+1} + \frac{(a+b)^2}{2m} \right) \right) \quad (3.135)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$B = \int_{\frac{a+b}{2}}^b u^2 f(u) du \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \int_{\frac{a+b}{2}}^b u^2 (b-u)^{m+k} (2u-(a+b))^{m-k-1} du \quad (3.137)
\end{aligned}$$

İntegral incelenirse,

$$2u - (a+b) = t \text{ ise } du = \frac{dt}{2}, u = \frac{t + (a+b)}{2} \text{ ve } b-u = \frac{(b-a)-t}{2} \text{ olur.}$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b u^2 (b-u)^{m+k} (2u-(a+b))^{m-k-1} du \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{b-a} \frac{(t + (a+b))^2}{2^2} \frac{((b-a)-t)^{m+k}}{2^{m+k}} t^{m-k-1} \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2^{m+k+3}} \int_0^{b-a} (t^2 + 2(a+b)t + (a+b)^2) \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)!}{j! (m+k-j)!} (b-a)^{m+k-j} \\
&\times t^{m-k-1} (-1)^j t^j dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \left(\int_0^{b-a} (t^{m-k+j+1} + 2(a+b)t^{m-k+j} \right. \\
&\quad \left. + (a+b)^2 t^{m-k-1+j}) dt \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+2}}{m-k+j+2} \right. \\
&\quad \left. + 2(a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j (b-a)^{m-k+j}}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} \right. \\
&\quad \left. + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \tag{3.139}
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{2m} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} \right. \\
&\quad \left. + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \tag{3.140}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
E(U^2) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a-b)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a-b)^2}{m-k+i+2} \right. \right. \right. \\
&+ 2(a+b) \frac{(a-b)}{m-k+i+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+i} \Bigg) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a-b)^{2m} \\
&\times \left(\frac{(a-b)^2}{2m+2} + \frac{2(a+b)(a-b)}{2m+1} + \frac{(a+b)^2}{2m} \right) \Bigg) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{2m} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}} \\
&\times \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiş olur.

X rasgele değişkeni Düzgün(a,b) dağılımına sahip ise ve örneklem ölçümü $n = 2m$ şeklinde bir çift sayı ise medyan istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$V(U) = E(U^2) - [E(U)]^2 \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \\
&\times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1} (a-b)^{m-k+i}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+3}} \left(\frac{(a-b)^2}{m-k+i+2} \right. \right. \right. \\
&+ 2(a+b) \frac{(a-b)}{m-k+i+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+i} \Bigg) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{8} (a-b)^{2m} \\
&\times \left(\frac{(a-b)^2}{2m+2} + \frac{2(a+b)(a-b)}{2m+1} + \frac{(a+b)^2}{2m} \right) \Bigg) + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{2m} (-1)^j}{j! (m+k-j)! 2^{m+k+3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{(b-a)^2}{m-k+j+2} + 2(a+b) \frac{(b-a)}{m-k+j+1} + (a+b)^2 \frac{1}{m-k+j} \right) \\
& - \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2(2m)!}{k! (m-1)! (m-k-1)! (b-a)^{2m} (m+k)} \right. \\
& \times \left(\left(\sum_{i=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-i} (-1)^{i+1}}{i! (m+k-i)! 2^{m+k+2}} \left(\frac{(a-b)^{m-k+i+1}}{m-k+i+1} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(a+b)(a-b)^{m-k+i}}{m-k+i} \right) - \frac{(-1)^{m+k+1}}{4} \left(\frac{(a-b)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{(a+b)(a-b)^{2m}}{2m} \right) \right) \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{m+k} \frac{(m+k)! (b-a)^{m+k-j} (-1)^j}{(m+k-j)! j! 2^{m+k+2}} \right. \\
& \left. \times \left(\frac{(b-a)^{m-k+j+1}}{m-k+j+1} + (a+b) \frac{(b-a)^{m-k+j}}{m-k+j} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı olduğunda medyan istatistiğinin beklenen değeri $E(X)$, ikinci merkezi momenti $E(X^2)$ ve varyansı $V(X)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(X) = \int_a^b x f_U(x) dx \text{ ise} \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_a^b x \frac{(x-a)^m (b-x)^m}{(b-a)^{2m+1}} dx \\
&= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2 (b-a)^{2m+1}} \int_a^b x (x-a)^m (b-x)^m dx
\end{aligned}$$

$x - a = t$ ise $dx = dt$, $x = t + a$ ve $b - x = (b - a) - t$ olur.

$$E(X) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2 (b-a)^{2m+1}} \int_0^{b-a} (t+a) t^m ((b-a)-t)^m dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2(b-a)^{2m+1}} \int_0^{b-a} (t^{m+1} + at^m) \sum_{k=0}^m \frac{m!(b-a)^{m-k}(-1)^k}{k!(m-k)!} t^k dt \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!(b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k}(-1)^k}{k!(m-k)!} \int_0^{b-a} (t^{m+1+k} + at^{m+k}) dt \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!(b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k}(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{(b-a)^{m+k+2}}{m+k+2} + a \frac{(b-a)^{m+k+1}}{m+k+1} \right) \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!(b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k}(-1)^k(b-a)^{m+k+1}}{k!(m-k)!} \\
&\quad \times \left(\frac{b-a}{m+k+2} + \frac{a}{m+k+1} \right) \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{b-a}{m+k+2} + \frac{a}{m+k+1} \right)
\end{aligned}$$

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı olduğunda medyan istatistiğinin ikinci merkezi momenti aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f_U(x) dx \quad (3.143)$$

$$= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_a^b x^2 \frac{(x-a)^m(b-x)^m}{(b-a)^{2m+1}} dx$$

$x - a = t$ ise $dx = dt$, $x = t + a$ ve $b - x = (b - a) - t$ olur.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2(b-a)^{2m+1}} \int_0^{b-a} (t+a)^2 t^m ((b-a)-t)^m dt \\
&= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2(b-a)^{2m+1}} \int_0^{b-a} (t^2 + 2at + a^2) t^m ((b-a)-t)^m dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2(b-a)^{2m+1}} \int_0^{b-a} (t^{2+m} + 2at^{m+1} + a^2t^m) \\
&\times \sum_{k=0}^m \frac{m! (b-a)^{m-k} (-1)^k}{k! (m-k)!} t^k dt \\
&= \frac{(2m+1)!}{m! (b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k} (-1)^k}{k! (m-k)!} \\
&\times \int_0^{b-a} (t^{2+m+k} + 2at^{m+k+1} + a^2t^{m+k}) dt \\
&= \frac{(2m+1)!}{m! (b-a)^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^{m-k} (-1)^k}{k! (m-k)!} \left(\frac{(b-a)^{m+k+3}}{m+k+3} \right. \\
&\left. + 2a \frac{(b-a)^{m+k+2}}{m+k+2} + a^2 \frac{(b-a)^{m+k+1}}{m+k+1} \right) \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \left(\frac{(b-a)^2}{m+k+3} + 2a \frac{(b-a)}{m+k+2} + \frac{a^2}{m+k+1} \right)
\end{aligned}$$

X rasgele değişkeni Düzgün(a,b) dağılımına sahip ise ve örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ şeklinde bir tek sayı ise medyan istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \left(\frac{(b-a)^2}{m+k+3} + 2a \frac{(b-a)}{m+k+2} + \frac{a^2}{m+k+1} \right) \\
&- \left(\frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k! (m-k)!} \left(\frac{b-a}{m+k+2} + \frac{a}{m+k+1} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

3.1.6. Düzgün(a,b) dağılımı için medyan istatistiğinin hesaplanmış ilk iki merkezi momenti ve varyansı

Bu bölümde $n = 2m$ ve $n = 2m + 1$ örneklem düzeylerinde farklı (a, b) değerleri ve farklı m değerleri için medyan istatistiğinin beklenen değeri, ikinci merkezi momenti ve varyansı hesaplanarak tablolar halinde verilmiştir.

Örneklem ölçümü $n = 2m$ ve Düzgün(1,2) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.3. Düzgün(1,2) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1,5	2,291667	0,041667
2	1,5	2,283333	0,033333
3	1,5	2,276786	0,026786
4	1,5	2,272222	0,022222
5	1,5	2,268939	0,018939

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ ve Düzgün(1,2) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.4. Düzgün(1,2) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1,5	2,300000	0,050000
2	1,5	2,285714	0,035714
3	1,5	2,277778	0,027778
4	1,5	2,272727	0,022727
5	1,5	2,269231	0,019231

Örneklem ölçümü $n = 2m$ ve Düzgün(0,2) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.5. Düzgün(0,2) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1	1,166667	0,166667
2	1	1,133333	0,133333
3	1	1,107143	0,107143
4	1	1,088889	0,088889
5	1	1,075758	0,075758

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ ve Düzgün(0,2) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.6. Düzgün(0,2) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1	1,200000	0,200000
2	1	1,142857	0,142857
3	1	1,111111	0,111111
4	1	1,090909	0,090909
5	1	1,076923	0,076923

Örneklem ölçümü $n = 2m$ ve Düzgün(1,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.7. Düzgün(1,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	2	4,166667	0,166667
2	2	4,133333	0,133333
3	2	4,107143	0,107143
4	2	4,088889	0,088889
5	2	4,075758	0,075758

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ ve Düzgün(1,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.8. Düzgün(1,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	2	4,200000	0,200000
2	2	4,142857	0,142857
3	2	4,111111	0,111111
4	2	4,090909	0,090909
5	2	4,076923	0,076923

Örneklem ölçümü $n = 2m$ ve Düzgün(0,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.9. Düzgün(0,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1,5	2,625000	0,375000
2	1,5	2,550000	0,300000
3	1,5	2,491071	0,241071
4	1,5	2,450000	0,200000
5	1,5	2,420455	0,170455

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ ve Düzgün(0,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.10. Düzgün(0,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	1,5	2,700000	0,450000
2	1,5	2,571429	0,321429
3	1,5	2,500000	0,250000
4	1,5	2,454545	0,204545
5	1,5	2,423077	0,173077

Örneklem ölçümü $n = 2m$ ve Düzgün(2,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.11. Düzgün(2,3) ve $n = 2m$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	2,5	6,291667	0,041667
2	2,5	6,283333	0,033333
3	2,5	6,276786	0,026786
4	2,5	6,272222	0,022222
5	2,5	6,268939	0,018939

Örneklem ölçümü $n = 2m + 1$ ve Düzgün(2,3) dağılımı için hesaplanan değerler aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.12. Düzgün(2,3) ve $n = 2m + 1$ için elde edilen sonuçlar

m	$E(U)$	$E(U^2)$	$V(U)$
1	2,5	6,300000	0,050000
2	2,5	6,285714	0,035714
3	2,5	6,277778	0,027778
4	2,5	6,272727	0,022727
5	2,5	6,269231	0,019231

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde medyan istatistiğinin dağılımı ve karakteristikleri incelenmiştir. Medyan istatistiği örneklem ölçümünün tek veya çift bir sayı olmasına bağlı olarak değişiklik gösterdiğinden her iki durum içinde ayrı ayrı genel olasılık yoğunluk fonksiyonu ve genel dağılım fonksiyonu elde edilmiştir.

Çalışma boyunca sıra istatistiklerinden ve onların dağılım özelliklerinden yararlanılmıştır. Elde edilen genel olasılık yoğunluk fonksiyonları ve genel dağılım fonksiyonları bazı sürekli dağılımlar düzeyinde örneklendirilmiştir. Bu örneklendirme kapsamında incelenen sürekli dağılımlar için medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu bulunmuştur. Bu fonksiyonlardan yola çıkılarak medyan istatistiğinin ilgili dağılımlar altındaki ilk iki merkezi momenti ile varyansı, farklı örneklem ölçümleri için, elde edilmiştir. Tez kapsamında incelenen dağılımlar Düzgün(0,1) ve Düzgün(a,b) dağılımlarıdır.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, değişik parametrelili Düzgün dağılımlar için beklenen değerin tanımlı olduğu bölgenin orta noktası olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bulgular ise, elde edilen sonuçların doğruluğunu desteklemektedir. Ayrıca, örneklem ölçümü artırıldığında medyan istatistiğinin varyansının incelenen tüm dağılımlar altında azaldığı gözlemlenmektedir. Düzgün dağılım altında yapılan hesaplamalar sonucu dağılımın tanımlı olduğu bölgenin alt ve üst sınır değerleri arasındaki açıklık azaldığında medyan istatistiğinin varyansının da azaldığı gözlemlenmiştir. Bunlara ek olarak, örneklem ölçümü çift sayıda olduğunda, tek örneklem ölçümüne göre daha küçük varyans değeri elde edilmiştir. Bunun durum ise, iki rasgele değişkenin ortalamasının varyans değerinin daha da küçük olmasının bir sonucudur. Dolayısıyla bu sonuçların uygun bulgular olduğu görülmektedir.

Elde edilen bu teorik sonuçlar; değişik parametrelili Düzgün dağılımlar için, tek ya da çift sayıda örneklem ölçümünün olması durumunda, medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı konusunda araştırmacılara yol gösterici olabilir.

KAYNAKLAR

- Ahsanullah, M. and Nevzorov, V.B.**, 2004, Order Statistics: Examples and Exercices, Nova Science Publishers.
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, N.**, 2008, First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics), SIAM –Society for Industry and Applied Mathematics.
- Balakrishnan, N. and Cohen, A.**, 1990, Order Statistics & Inference: Estimation Methods (Statistical Modeling and Decision Science), Academic Press.
- Balakrishnan, N. and Rao, C.R.**, 1998, Order Statistics: Theory and Methods, Handbook of Statistics 16, Elsevier Science Pub. Co.
- Balakrishnan, N. and Rao, C.R.**, 1998, Order Statistics: Theory and Methods, Handbook of Statistics 17, Elsevier Science Pub. Co.
- Bonett, D.G. and Price, R.M.**, 2001, Estimating the Variance of the Sample Median, Journal of Statistical Computation and Simulation, 68 (3), 295-305 pp.
- Chu, T.J.**, 1955, On the Distribution of the Sample Median, The Annals of the Mathematical Statistics, 26 (1), 112-116 pp.
- Chu, T.J. and Hotelling, H.**, 1955, The Moments of the Sample Median, The Annals of the Mathematical Statistics, 26 (4), 593-606 pp.
- David, H.A. and Nagaraja, N.**, 2003, Order Statistics, Wiley.
- Maritz, J.S. and Jarrett, R.G.**, 1978, Note on Estimating the Variance of the Sample Median, Journal of the American Statistical Association, 73 (361), 194-196 pp.
- Siddiqui, M.M.**, 1962, Approximations to the Moments of the Sample Median, The Annals of the Mathematical Statistics, 33 (1), 157-168 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Burak KİTAPÇI, 6 Nisan 1985 tarihinde İzmir’de doğmuştur. Orta öğrenimini Buca Anadolu Lisesi’nde tamamladıktan sonra 9 Eylül 2003 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü’ne kayıt yaptırmıştır. 13 Haziran 2008 tarihinde bu bölümden mezun olduktan sonra 8 Eylül 2008 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır ve halen öğrenimini adı geçen Anabilim Dalı’nda sürdürmektedir.