

**Monte Carlo Stokastik Optimizasyonu  
İle Optimal Saklama Payı Seviyesi**

**Optimal Retention Limit With  
Monte Carlo Stochastic Optimization**

**ERBİL TAŞAR**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....  
Prof. Dr. Cenap ERDEMİR

Üye (Danışman) :.....  
Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

Üye :.....  
Yrd. Doç. Dr. Serpil CULA

ONAY

Bu tez .../.../2010 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Adil DENİZLİ  
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

# MONTE CARLO STOKASTİK OPTİMİZASYONU İLE OPTİMAL SAKLAMA PAYI SEVİYESİ

**Erbil TAŞAR**

## ÖZ

Sigortanın temel işlevi, zararı ekonomik açıdan önemsiz bir duruma getirmektir. Kişilerin tek başlarına karşılayamayacakları zararların bir organizasyon aracılığıyla aralarında paylaşılmasıdır. Reasürans ise, sigortacının üstlendiği riskin bir kısmını veya tamamını diğer bir sigortacıya devretmesi olarak tanımlanabilir.

Sigorta şirketleri, üstlendikleri riskleri azaltmak ve kendilerini beklenmeyen risklere karşı koruyabilmek için kendi portföy yapıları ve gelecek stratejilerine en uygun reasürans yöntemini belirlemelidir. Reasürans yönteminin belirlenmesinin yanı sıra sigorta şirketinin üzerinde tuttuğu riskin ne kadarının sigortalaması gerektiğinin belirlenmesi de reasürans uygulamalarının önemli problemlerinden birisidir.

Sedan şirket saklama payını hesaplarken, üzerinde daha fazla risk tutmak ile olası hasar dalgalanmalarını karşılayabilmek arasındaki dengeyi iyi kurmak zorundadır.

Bu çalışmada, son yıllarda finans sektöründe yaygın olarak kullanılan Riske Maruz Değer (Value-at-Risk, VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (Conditional Tail Expectation, CTE) risk ölçümleri ile toplam hasar fazlası reasürans yöntemi altında farklı prim ilkeleri açısından sigortacının maruz kalacağı toplam ödemeyi Monte Carlo stokastik optimizasyonu yöntemi ile minimize ederek sigortacı için optimal saklama payının hesaplanması incelenmiştir. Böylece analitik çözümün elde edilemediği durumlarda optimal saklama payının Monte Carlo stokastik optimizasyonu yöntemi ile elde edilebileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Reasürans, optimal saklama payı, riske maruz değer, koşullu riske maruz değer, Monte Carlo optimizasyon, stokastik optimizasyonu.

**Danışman:** Öğr. Gör. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

# OPTIMAL RETENTION LIMIT WITH MONTE CARLO STOCHASTIC OPTIMIZATION

**Erbil TAŞAR**

## ABSTRACT

The fundamental function of insurance is to make loss economically insignificant. The losses that people are unable to cover on their own, are shared between them through an organization. The reinsurance, also can be defined as a method of reducing risk by transferring all or part of an insurance policy to another insurer.

Insurance companies have to determine the most appropriate reinsurance method for their portfolio structure and future plans in order to minimize the risk they took over and to protect themselves against unexpected risks. In addition to the determination of reinsurance methods, one of the most significant problems of reinsurance applications is the determination of how much risk the insurance company must insure.

While calculating the retention limit, cedent company must establish a good balance between keeping more risk on it and covering possible loss fluctuations.

In this study, VaR (Value-at-Risk) and CTE (Conditional Tail Expectation) risk measures which are commonly used in financial sector in recent years, are analyzed by minimizing cedent's total risk of exposure using Monte Carlo Stochastic optimization method, with calculating the optimal retention limit in terms of different premium principles under the stop loss reinsurance contract for the cedent. Thus, it is revealed that, in the circumstances, when analytic solution is not achieved, the optimal retention limit can be achieved by Monte Carlo stochastic optimization method.

**Key Words:** Reinsurance, optimal retention limit, value-at-risk (VaR), conditional tail expectation (CTE), Monte Carlo optimization, stochastic optimization.

**Advisor:** Dr. Murat BÜYÜKYAZICI, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesi sırasında,

Katkı ve önerileriyle yol gösteren, karşılaşılan zorlukların aşılmasında ve çalışmanın sonuçlandırılmasında bana yardımcı olan danışmanım Sayın Öğr. Gör. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Tez sürecindeki katkılarından dolayı bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Ömer ESENSOY'a,

Yüksek lisans eğitimi boyunca maddi desteklerinden ötürü TÜBİTAK Bilim Adamı Destekleme Daire Başkanlığı'na,

Hiçbir zaman desteğini esirgemeyen sevgili Aileme,

en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                      | <u>Sayfa</u> |
|------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZ.....                                              | i            |
| ABSTRACT .....                                       | ii           |
| TEŞEKKÜR.....                                        | iii          |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....                             | iv           |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                 | v            |
| ÇİZELGELER DİZİNİ.....                               | vii          |
| ŞİMGELER VE KISALTMALAR .....                        | viii         |
| 1. GİRİŞ.....                                        | 1            |
| 2. SİGORTA VE REASÜRANS KAVRAMI.....                 | 5            |
| 2.1. Reasürans Yöntemleri.....                       | 7            |
| 2.1.1. İhtiyari reasürans (Facultative).....         | 7            |
| 2.1.2. Otomatik reasürans (Anlaşma reasüransı) ..... | 8            |
| 2.1.3. Karşılıklı iş alış verişi (Reciprocity) ..... | 11           |
| 2.1.4. Pool anlaşmaları.....                         | 11           |
| 3. OPTİMAL SAKLAMA PAYI .....                        | 13           |
| 3.1. Saklama Payı Kavramı.....                       | 13           |
| 3.2. Optimal Saklama Payının Belirlenmesi .....      | 13           |
| 3.2.1. Fayda kuramı.....                             | 15           |
| 3.2.2. İflas ve artık süreci.....                    | 15           |
| 3.2.3. Genel risk ölçümleri .....                    | 19           |
| 4. VaR VE CTE İLE OPTİMAL SAKLAMA PAYI.....          | 20           |
| 4.1. Giriş.....                                      | 20           |
| 4.2. VaR ile Optimal Saklama Payı .....              | 21           |
| 4.3. CTE ile Optimal Saklama Payı .....              | 27           |
| 5. MONTE CARLO STOKASTİK OPTİMİZASYONU .....         | 34           |
| 6. UYGULAMA.....                                     | 37           |
| 7. SONUÇ.....                                        | 72           |
| KAYNAKLAR.....                                       | 74           |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                       | 76           |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. Reasürans yöntemleri.....                                                                          | 7  |
| Şekil 4.1. VaR optimizasyonu (Cai and Tan, 2007) .....                                                        | 25 |
| Şekil 4.2. VaR ve CTE karşılaştırması (Cai and Tan, 2007).....                                                | 28 |
| Şekil 5.1. Deterministik optimizasyon modeli (Mun, 2006) .....                                                | 35 |
| Şekil 5.2. Stokastik optimizasyon modeli (Mun, 2006) .....                                                    | 35 |
| Şekil 6.1. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi ve $p=0,2$ .....                                               | 38 |
| Şekil 6.2. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,2$ için<br>optimal saklama payı (0,1000) .....           | 39 |
| Şekil 6.3. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,2$ için<br>optimal saklama payı (56, 270) .....          | 39 |
| Şekil 6.4. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi ve $p=0,4$ .....                                               | 40 |
| Şekil 6.5. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,4$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....          | 41 |
| Şekil 6.6. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,4$ için<br>optimal saklama payı (193, 590) .....         | 42 |
| Şekil 6.7. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi ve $p=0,189$ .....                                       | 43 |
| Şekil 6.8. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi, $p=0,189$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....  | 44 |
| Şekil 6.9. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi, $p=0,189$ için<br>optimal saklama payı (0, 190) .....   | 44 |
| Şekil 6.10. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi ve $p=0,378$ .....                                      | 45 |
| Şekil 6.11. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi, $p=0,378$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) ..... | 46 |
| Şekil 6.12. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi, $p=0,378$ için<br>optimal saklama payı (0, 182) .....  | 46 |
| Şekil 6.13. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi ve $p=0,000178$ .....                                          | 47 |
| Şekil 6.14. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi, $p=0,000178$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....     | 48 |
| Şekil 6.15. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi, $p=0,000178$ için<br>optimal saklama payı (0, 100) .....      | 49 |
| Şekil 6.16. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi ve $p=0,000356$ .....                                          | 50 |
| Şekil 6.17. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi, $p=0,000356$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....     | 51 |
| Şekil 6.18. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi, $p=0,000356$ için<br>optimal saklama payı (0, 178) .....      | 51 |
| Şekil 6.19. Üstel dağılım, ortalama değer prim ilkesi.....                                                    | 52 |
| Şekil 6.20. Üstel dağılım, ortalama değer prim ilkesi için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....            | 53 |
| Şekil 6.21. Üstel dağılım, ortalama değer prim ilkesi için<br>optimal saklama payı (0, 100) .....             | 53 |
| Şekil 6.22. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi ve $p=0,2$ .....                                             | 54 |
| Şekil 6.23. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,2$ için<br>optimal saklama payı (0, 1000) .....        | 55 |
| Şekil 6.24. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi, $p=0,2$ için<br>optimal saklama payı (60, 306) .....        | 56 |
| Şekil 6.25. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi ve $p=0,4$ .....                                             | 57 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 6.26. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi, $\rho=0,4$ için            |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 58 |
| Şekil 6.27. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi, $\rho=0,4$ için            |    |
| optimal saklama payı (100, 435) .....                                        | 58 |
| Şekil 6.28. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi ve $\rho=0,115$ ..... | 59 |
| Şekil 6.29. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi, $\rho=0,115$ için    |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 60 |
| Şekil 6.30. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi, $\rho=0,115$ için    |    |
| optimal saklama payı (0, 100) .....                                          | 61 |
| Şekil 6.31. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi ve $\rho=0,23$ .....  | 62 |
| Şekil 6.32. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi, $\rho=0,23$ için     |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 63 |
| Şekil 6.33. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi, $\rho=0,23$ için     |    |
| optimal saklama payı (0, 100) .....                                          | 63 |
| Şekil 6.34. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi ve $\rho=0,000065$ .....     | 64 |
| Şekil 6.35. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi, $\rho=0,000065$ için        |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 65 |
| Şekil 6.36. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi, $\rho=0,000065$ için        |    |
| optimal saklama payı (0, 100) .....                                          | 66 |
| Şekil 6.37. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi ve $\rho=0,00013$ .....      | 67 |
| Şekil 6.38. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi, $\rho=0,00013$ için         |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 68 |
| Şekil 6.39. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi, $\rho=0,00013$ için         |    |
| optimal saklama payı (0, 150) .....                                          | 68 |
| Şekil 6.40. Pareto dağılım, ortalama değer prim ilkesi .....                 | 69 |
| Şekil 6.41. Pareto dağılım, ortalama değer prim ilkesi için                  |    |
| optimal saklama payı (0, 1000) .....                                         | 70 |
| Şekil 6.42. Pareto dağılım, ortalama değer prim ilkesi için                  |    |
| optimal saklama payı (0, 205) .....                                          | 71 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                      | <u>Sayfa</u> |
|----------------------------------------------------------------------|--------------|
| Çizelge 1.1. Prim ilkeleri / reasürans yöntemleri.....               | 3            |
| Çizelge 7.1. 14 senaryo için elde edilen optimizasyon sonuçları..... | 72           |

## **SİMGELER VE KISALTMALAR**

|       |                                                 |
|-------|-------------------------------------------------|
| CTE   | Conditional Tail Expectation                    |
| TSEV  | Türkiye Sigorta Enstitüsü Vakfı                 |
| TSRŞB | Türkiye Sigorta ve Reasürans Şirketleri Birliği |
| VaR   | Value at Risk                                   |

## 1. GİRİŞ

Sigorta şirketleri, üzerlerine aldıkları riski azaltmak ve kendilerini beklenmeyen hasarlara karşı koruyabilmek için portföy yapılarını ve gelecek planlarına en uygun reasürans yöntemini belirlemelidir.

Reasürans yönteminin belirlenmesinin yanı sıra sigorta şirketinin üzerinde tuttuğu riskin ne kadarını sigortalaması gerektiğinin belirlenmesi de reasürans uygulamalarının önemli problemlerinden biridir.

Optimal reasürans konusu, aktüerya bilimlerinde klasik bir problemdir. Araştırmacılar problemi reasürör ya da sedan şirket açısından inceleyebilirler. Bu konudaki ilk makale Borch tarafından ortaya konulmuştur. Birkaç yıl sonra, Arrow ise beklenen değer prim ilkesi ile toplam hasar fazlası (stop loss) reasürans yönteminin, riskten kaçınan sigortacının dönem sonu varlığını beklenen fayda kuramı ile maksimize ettiğini göstermiştir (Balbas et al., 2009). Optimal reasürans modelleri ile ilgili olarak, araştırmaların önemli bir kısmı ya sigortacının faydasını maksimize etmeye ya da sigortacının riskini minimize etmeye adanmıştır.

Reasürans yapısına bakıldığında, sedan reasüröre kısmen risk aktardığında, bunun karşılığı olan reasürans primini ödeyerek ek bir maliyete maruz kalmaktadır. Bu nedenle, sedan şirket kendi üzerinde sakladığı risk arttıkça daha düşük, azaldıkça daha yüksek bir reasürans primi ödemesi beklenir. Bu da, sigortacı reasürans koruması aradığında; reasürans priminin maliyeti ile üzerinde sakladığı riskin maliyeti arasında karar vermek zorunda kalacaktır. Bu nedenle bu konuda literatürde birçok çalışma gerçekleştirilmiştir. Önceki çalışmalar; Gerber, Waters, Pesonen, Goovaerts vd., ve Hesselager. Son zamanlarda ise Gajek ve Zagrodny, Kaluszka, Cai ve Tan ve Cai vd. bu konuya katkı sağlamışlardır (Tan et al., 2009).

Reasüran yapısı içerisinde bir diğer önemli konu da saklama payı kavramıdır. Sigorta şirketlerinin sigorta etmiş olduğu riske ilişkin olarak, reasüröre devretmeyip üzerinde tuttuğu kısmı saklama payı olarak adlandırılır. Saklama payının doğru ve optimal belirlenmesi sigorta şirketi açısından büyük önem ifade etmektedir. Çünkü saklama payının yüksek tutulması halinde büyük bir hasarın meydana gelmesi sigortacıyı büyük kayıplara uğratacağı gibi, saklama payının düşük tutulması da sigorta şirketinin gereksiz prim kaybına yol açacaktır.

Optimal saklama payının belirlenmesinde çeşitli yöntemler kullanılabilir. Bunların başında fayda kuramı, iflas olasılığı gelmektedir. Bu klasik yaklaşımların dışında, son dönemde pazar risklerini belirlemede, portföy optimizasyonları vb. konularda gittikçe önem kazanan Riske Maruz Değer (Value-at-Risk, VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (Conditional Tail Expectations, CTE) gibi risk ölçümleri de kullanılmaktadır.

Cai ve Tan (2007), beklenen prim ilkesi altında toplam hasar fazlası reasürans yöntemini kullanarak, sigortacının toplam ödemesini VaR ve CTE risk ölçümleriyle minimize ederek, optimal saklama payının varlığı için gerek ve yeter koşulları belirtmişlerdir.

Ayrıca optimal saklama payının çözümüne ışık tutacak bazı önemli bulgulara değinmişlerdir, bunlar:

- i. Optimal saklama payı basit bir analitik forma sahiptir.
- ii. Optimal saklama payı sadece hasar dağılımı ve reasürörün güvenlik yükleme katsayısına bağlıdır.
- iii. CTE risk yöntemi VaR'a göre daha etkin bir ölçümtür.
- iv. Eğer optimal çözüm varsa hem VaR hem de CTE optimizasyonu aynı sonucu verir (Cai and Tan, 2007).

Reasürans primi beklenen prim ilkesi ile hesaplandığında; çok sayıda reasürans anlaşma tipi arasından toplam hasar fazlası anlaşmaları, sedanın sakladığı riskin varyansını en küçük yaptığı için, en uygun olanıdır (Daykin, 1994; Bowers, 1997; Kaas, 2001, Cai and Tan, 2007; Cai et al., 2008; Balbas et al., 2009).

Literatürde yer alan optimal reasürans çalışmalarının çoğunda beklenen prim ilkesi varsayımı kullanılmıştır (Tan et al., 2009). Beklenen prim ilkesi dışında literatürde sıklıkla karşılaşılan temel prim hesaplama yöntemleri aşağıdaki gibidir (Young, 2004). Burada  $S$ , reasürörün beklenen hasar değerini ifade etmektedir.

- i. Net prim:  $\pi = E[S]$ .
- ii. Beklenen değer yöntemi:  $\pi = (1 + \beta)E[S]$ ,  $\beta > 0$ .
- iii. Karma yöntem:  $\pi = E[S] + \beta \text{Var}[S]/E[S]$ ,  $\beta > 0$ .
- iv. Değiştirilmiş varyans yöntemi:  $\pi = E[S] + \beta \sqrt{\text{Var}[S]} + \gamma \text{Var}[S]/E[S]$ ,  $\beta, \gamma > 0$ .
- v. Ortalama değer yöntemi:  $\pi = \sqrt{E[S]^2 + \text{Var}[S]}$ .
- vi. Varyans yöntemi:  $\pi = E[S] + \beta \text{Var}[S]$ ,  $\beta > 0$ .
- vii. Standart sapma yöntemi:  $\pi = E[S] + \beta \sqrt{\text{Var}[S]}$ ,  $\beta > 0$ .
- viii. Üstel Yöntem:  $\pi = \frac{1}{\beta} \log E[\exp \beta S]$ ,  $\beta > 0$ .

Cai ve Tan (2007)'in çalışmasından yola çıkarak Tan vd. (2009), toplam hasar fazlası yöntemine ek olarak yine yaygın bir biçimde kullanılan kot-par yöntemini analiz etmişlerdir. Ayrıca, 17 farklı reasürans prim ilkesi altında optimal saklama payını değerlendirerek konuyu iki farklı yöne doğru genişletmişlerdir. Seçilen prim ilkelere bağlı olarak kot-par ve toplam hasar fazlası reasürans yöntemlerini, VaR ve CTE risk ölçümleri altında optimal çözüm aramanının anlamlı olup/olmadığını ve optimal çözüm var ise, analitik olarak çözümün elde edilip/edilemediğini göstermiştir. Aşağıda Çizelge 1.1'de sadece toplam hasar fazlası reasürans yöntemi ve dört prim ilkesi için buldukları sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 1.1. Prim ilkeleri / reasürans yöntemleri

| Prim İlkesi    | Toplam Hasar Fazlası |     |
|----------------|----------------------|-----|
|                | VaR                  | CTE |
| Beklenen       | NT                   | NT  |
| Standart sapma | -                    | -   |
| Varyans        | NT                   | NT  |
| Ortalama değer | T                    | T   |

Çizelge 1.1.'de;

- T : optimal çözümün anlamsız (trivial),
- NT : optimal çözümün anlamlı (nontrivial),
- : optimizasyon probleminin karışıklığı nedeniyle analitik olarak optimal çözümün elde edilemediğini

ifade etmektedir.

Bu çalışmada reasürans yöntemlerinin özellikleri ve sigorta şirketlerinin üzerlerinde tutmaları gereken optimal saklama payının hesaplanması konuları incelenmiştir.

Bu çalışmada, son yıllarda finans sektöründe yaygın olarak kullanılan VaR ve CTE risk ölçümleri ile toplam hasar fazlası reasürans yöntemi altında dört farklı prim ilkesi açısından sigortacının maruz kalacağı toplam ödemeyi Monte Carlo stokastik optimizasyonu yöntemi ile minimize ederek sigortacı için optimal saklama payının hesaplanması incelenmiştir. Böylece analitik çözümün elde edilemediği durumlarda optimal saklama payının Monte Carlo stokastik optimizasyonu yöntemi ile elde edilebileceği gösterilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde konuya giriş yapılmış, önceki çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmada farklı olarak ne yapıldığı belirtilmiştir. İkinci bölümde sigorta ve reasürans kavramları ve reasürans yöntemleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde çalışmanın asıl amacı olan saklama payı kavramı, saklama payına etki eden faktörler ve optimal saklama payının belirlenmesi konuları genel olarak incelenmiştir. Dördüncü bölümde toplam hasar fazlası reasürans yöntemi altında sigortacı toplam ödemesine ilişkin VaR ve CTE ölçümlerini kullanarak optimal saklama payının analitik olarak elde edilmesi anlatılmıştır. Beşinci bölümde Monte Carlo stokastik optimizasyon yönteminden genel olarak bahsedilmiş; altıncı bölümde ondört farklı stokastik reasürans optimizasyon senaryosu için ModelRisk 3.0 yazılımı kullanılarak Monte Carlo stokastik optimizasyon yöntemiyle optimal saklama payları hesaplanmıştır.

## 2. SİGORTA VE REASÜRANS KAVRAMI

Sigorta, aynı türden tehlikeyle karşı karşıya olan kişilerin, belirli bir miktar para ödemesi yoluyla toplanan tutarın, sadece o tehlikenin gerçekleşmesi sonucu fiilen zarara uğrayanların zararını karşılamada kullanıldığı, bir risk transfer sistemidir. Bu sistem sayesinde kişiler, karşı karşıya bulundukları tehlikelerin neden olabileceği, parayla ölçülebilen zararlarını, nisbeten küçük miktarlarda ödemiş oldukları primler yoluyla paylaşmaktadırlar.

Sigortanın temel işlevi, zararı ekonomik açıdan önemsiz bir duruma getirmektir. Kişiler tek başına karşılayamayacakları zararları bir organizasyon aracılığıyla aralarında paylaşmaktadırlar (TSRŞB, 2010).

TSEV (Türk Sigorta Enstitüsü Vakfı)'e göre sigorta, belirli bir prim karşılığında bir kimsenin para ile ölçülebilir, yasa ile korumaya değer bir sigortalanabilir menfaatine zarar veren bir rizikonun gerçekleşmesi halinde bu zararı karşılayacak tutarda sigortalının tazminata hak kazanmasını sağlayan çift taraflı bir sözleşmedir. Sigorta sözleşmesinin hukuki geçerlilik kazanabilmesi için tarafların, teminat altına alınmak istenen riziko, sigorta konusu, sigorta bedeli, sigorta süresi, sigorta şartları ve prim gibi esaslı unsurların üzerinde mutabık kalmaları gerekmektedir. Sigorta, hiçbir zaman bir kazanç kaynağı olmamakla birlikte, sigortalının refahını hasardan bir gün öncesine getirme fonksiyonu ile hem ülke ekonomisinde hem de bireyler açısından büyük önem taşımaktadır.

Reasürans ise sigorta şirketlerinin üstlerindeki riskleri tekrar sigortalatarak kendilerini güvence altına almasıdır. Sigorta şirketleri, teminat verdikleri rizikolarda büyük hasarların aynı zamana gelme ihtimaline karşı, hasar ödemelerinde zorlanmamak için reasürans yaptırır. Reasürans, sigorta şirketlerine, mali yönden mümkün olmayan riskleri, sigortalayabilme imkânı verir. Birtakım mali ölçüler esas alınarak, branş esasıyla tespit edilen saklama payları, sedan şirketin risk üzerindeki sorumluluk miktarını göstermekte, aşan kısımlar ise çeşitli reasürans anlaşmalarıyla, reasürans şirketlerine devredilmektedir.

Reasürans işlemlerinde riski bu şekilde devreden şirkete sedan, devir alan şirkete reasürör denir. Sedan şirket, sigortalıdan toplamış olduğu primlerin ve sigortalıya ödemiş olduğu hasarların belli bir kısmını, değişik tekniklere göre yapılmış

reasürans anlaşmaları vasıtasıyla, reasürans şirketine yansır. Ancak sedan şirket ile reasürör arasındaki risk transferi işlemi, yıllık anlaşmalar olmaksızın da yapılabilmekte; sedan şirket, her bir risk için, ihtiyari olarak, reasüröre müracaat edebilmektedir.

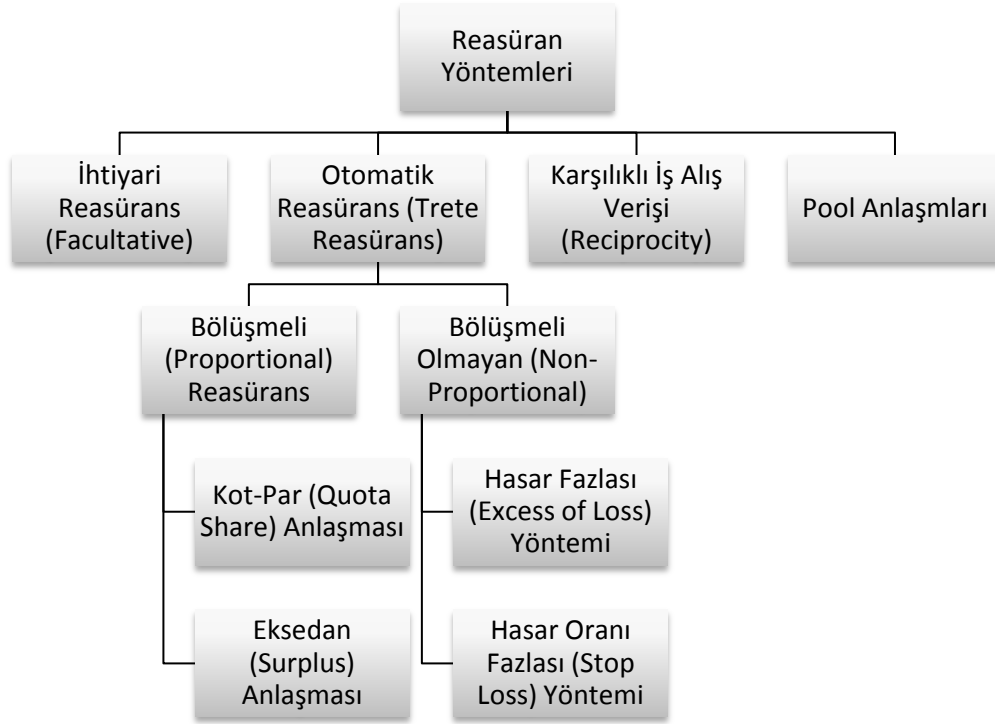
Sigorta şirketinin reasüransa duyduğu gereksinimin nedenleri,

- Rizikonun yayılması,
- Sigortacının iş kabul kapasitesinin artması,
- Sigortacının iş kabul esnekliğinin artması,
- Sigorta şirketinin mali yapısının desteklenmesi,
- Birikim fazlasının yol açabileceği doğal afet hasarlarının kontrolü,
- Reasürörden sigortacıya teknik bilgi aktarımıdır (TSRŞB, 2010).

Ülkemizde kurulan reasürans şirketlerinin başında, 1929 yılında kurulan Milli Reasürans T.A.Ş. gelmektedir. Onu, 1945 yılında kurulan Destek Reasürans T.A.Ş., 1979 yılında kurulan İstanbul Reasürans A.Ş. ve 1980 yılında kurulan Halk Reasürans A.Ş. izlemiştir (Keleş, 2007).

## 2.1. Reasürans Yöntemleri

Reasürans yöntemlerini başlıca dört başlığa ayırmak mümkündür.



Şekil 2.1. Reasürans yöntemleri

### 2.1.1. İhtiyari reasürans (Facultative)

Bu yöntem en eski reasürans yöntemi olup, her riskin teker teker ve birbirinden bağımsız olarak değerlendirildiği, en eski reasürans şeklidir. Sigorta şirketinin devir, reasürans şirketinin ise kabul zorunluluğu yoktur ve her iki taraf, kendi çıkarına uyduğu takdirde devir veya kabul etmektedirler.

Sigorta şirketleri, anlaşmalı reasürans kapasitesinin tükenmesi, ilgili riskin anlaşmalı reasürans kapsamında olmaması, anlaşma dengesinin bozulmak istenmemesi veya reasürans politikalarını ilgilendiren herhangi bir nedenle ihtiyari reasürans yoluna başvurabilmektedir.

### **2.1.2. Otomatik reasürans (Anlaşma reasüransı)**

Anlaşma kapsamlı bir reasürans anlaşmasıdır. Reasürans verecek ve alacak olan taraflar, başlangıçta yaptıkları anlaşmayla, bir yıllık süre içinde aralarındaki alışverişin tüm esaslarını (yani işlerin niteliği, limiti, komisyonu, hesaplama şekli vb.) belirleyerek, reasürans ihtiyacı olan şirketin otomatik bir teminata sahip olmasını mümkün kılar. Saptanan esaslar ve sınırlar içinde reasürans anlaşmasının kapsamına giren bütün rizikolar reasürör şirketince peşin olarak kabul edilmiş demektir. Özetle, başlangıçta saptanan koşullar çerçevesinde reasürörün sedana belirli bir süre için otomatik teminat sağladığı anlaşmalardır (Nomer ve Yunak, 2003).

#### **2.1.2.1. Bölüşmeli (Proportional) reasürans**

Sigorta şirketi açısından zorunlu devri, reasürans şirketi açısından ise zorunlu kabulü öngören reasürans anlaşmalarıdır. Sigorta şirketi, reasürans anlaşması kapsamında devretmeyi kabul ettiği her rizikoyu, önceden tespit edilmiş bir orana göre devreder ve taraflar arasındaki prim ve hasar paylaşımı bu oran üzerinden yapılır.

Sigorta şirketi tarafından yapılan rizikolar üzerinde reasürör denetiminin olmadığı bölüşmeli reasürans anlaşmalarının "kotpar" ve "eksedan" olmak üzere iki değişik uygulaması vardır (TSRŞB, 2010).

#### **Kot-Par (Quota Share) Anlaşması**

Bu bölüşmeli otomatik reasürans anlaşmasının özelliği gereği, ilgili branşın bütün işleri belli bir oran dahilinde reasüransa devredilir. Örneğin, eğer %50 oranında bir kotpar anlaşması yapılmışsa, reasürör, her bir rizikonun yarısını kabul etmiş ve dolayısıyla primin yarısına (komisyona tabi olmak üzere) hak kazanmış ve hasarların da yarısını üstlenmiş demektir (Nomer ve Yunak, 2003).

Bu tür reasüransta, sedan ve reasürörün sorumluluğu her bir poliçenin belli bir oranı olarak belirlenmektedir. Ancak, nasıl sedan saklama payı tespit ederek üzerine aldığı riziko miktarını sınırlandırıyor, reasürör de reasürans anlaşmasında bir limit belirleyerek kabul edeceği riskleri sınırlandırmak zorundadır. Kot-Par reasüransında sedan ve reasürörün sorumluluk dağılımı oran

dahilinde olması nedeniyle sedanın saklama payı kot-par anlaşmasının teminat kabul limitinin belirleyicisi olmaktadır.

Kot-Par anlaşması, sedan ve reasürör arasında her bir sigorta işinin paylaşılması esasına dayandığından, hasar-prim oranları her ikisi içinde aynı olacağından, sedanın reasüranstan bekleyebileceği büyük hasarların şirket portföyü üzerindeki olumsuz etkisinin azaltılması fonksiyonu tam olarak yerine getirilemez. Bu tip reasüransın en önemli olumsuzluklarından biri, sedan şirketin mali gücünün yetebildiği poliçelerde bile reasürans yapma ve prim devretme mecburiyetinde kalınmasıdır. Bunun yanı sıra, Kot-par reasüransı, bir tek riskin ne olduğunu belirlemenin güç olduğu branşlar için, doğal felaketler için verilen teminatlardan doğan sorumlulukların azaltılması için ve mesuliyet sigortaları gibi hasar büyüklüğü ve frekansının tespitinin zor olduğu branşlarda yararlı olduğu değerlendirilmektedir (Özer, 2010b).

### **Eksedan (Surplus) Anlaşması**

Kotpar anlaşmasından farklı olarak, burada bütün rizikolar reasürörlere devredilmemekte, fakat sadece sigorta şirketinin saklama payını aşan kısımlar reasürörlere devredilmektedir. Böylece şirket, iyi olarak düşündüğü rizikoları kapasite dahilinde kendisinde tutmakta, tutmadığı kısmı veya tutmak istemediklerini reasüröre devredebilmektedir. (Nomer ve Yunak, 2003)

Eksedan anlaşma reasüransında, sedan şirket mali gücüne ve teknik birikimine dayanarak üzerine almış olduğu risklerin ağırlığına göre saklama payını belirler ve anlaşma kapsamına giren tüm işlerin saklama payını aşan kısmını anlaşma limitine kadar reasüröre devreder (Keleş, 2007).

Eksedan anlaşmalarının kot-par anlaşmalarına göre en olumlu yönü, sedan şirketin saklama payı miktarına karışmayarak gereksiz yere reasüröre prim devrini önlemesidir. Bu yönüyle kot-par anlaşmasının en önemli eksikliği ortadan kalkmış olmaktadır. Eksedan anlaşmalarının olumsuz yanı ise, sedanın iyi rizikolarda daha yüksek, kötü rizikolarda daha az saklama payı tutması, reasürörün iyi rizikodan daha az, kötü rizikodan daha fazla pay almasını doğurmasıdır. Bunun yanı sıra, kot-par anlaşmasının aksine, sedan şirketin her bir poliçede kendi

konservasyonunu ayrı ayrı belirleyeceğinden, idari masraflar yükselecektir (Özer, 2010b).

#### **2.1.2.2. Bölüşmeli olmayan (Non-Proportional) reasürans**

Bu otomatik reasürans türünde sigorta şirketi ile reasürörün akıbeti birbirini takip etmez; bunlardan biri sigorta konusundaki hasara maruz kalırken diğeri hasardan hiç etkilenmeyebilir. Reasürör, ancak, orijinal hasarın belirli bir tutarı geçmesi halinde hasarla ilgilenir ve aldığı primin orijinal teminatın primi ile doğrudan ilişkisi yoktur (Nomer ve Yunak, 2003).

Bölüşmesiz reasüransın en önemli özelliği, reasürörün sigorta bedellerinden ziyade sigortalı risklerin uğrayabileceği hasarlarla ilgili olmasıdır. Yalnızca poliçenin uğrayacağı hasar önceden belirlenmiş bir miktarı aşarsa reasürör sorumlu olmakta, sorumluluk ve hasar miktarları arasında orantılı bir paylaşma olmadığı için primlerin paylaşılması da önceden tespit edilmiş bir orana göre yapılmamaktadır (Özer, 2010b).

Sorumluluk, prim ve hasar, “hasar bedeli” üzerinden paylaşılmaktadır. Bu reasürans türünde, hasar fazlası ve hasar oranı fazlası olmak üzere 2 türü bulunmaktadır.

#### **Hasar Fazlası (Excess of Loss) Yöntemi**

Hasar fazlası reasürans anlaşmalarının bölüşmeli reasürans anlaşmalarından en büyük farkı, sadece hasara ilişkin bir anlaşma olmasıdır. Tek bir branş için olabildiği gibi birkaç branşa birlikte de uygulanabilir ve özellikle kümül oluşturan hasarlarda ve katastrofik olaylarda, sigorta şirketinin korunması açısından oldukça etkili anlaşmalardır (TSRŞB, 2010).

Bu anlaşma türünde sigorta tutarına bakılmaksızın reasürör, sigortacının saklama payını geçen hasarı belli bir limite kadar ödemek zorundadır. Diğer bir deyişle, reasürörün hasarla ilgisi ancak hasarın belli bir miktarı (sedanın saklama payını) aşması halinde başlar ve reasürör anlaşmada belirlenmiş olan alt ve üst limit arasında kalan hasarlardan sorumludur.

### **Toplam Hasar Fazlası (Stop Loss) Yöntemi**

Aslında hasar fazlası anlaşması'nın özel bir türü sayılabilecek bu anlaşma türünde reasürörün sorumluluğu, belirli bir süre (genellikle bir yıl) içinde meydana gelen hasarlar toplamının belirli bir miktarı veya hasar oranının belirli bir yüzdeyi geçmesi halinde ortaya çıkar. Bu sorumluluk da belirli bir miktar ya da yüzde ile sınırladılır (Nomer ve Yunak, 2003).

Toplam hasar fazlası reasüransta, olay sayısına bakmadan, bir yıl içinde saklama payına isabet eden hasarın belli bir tutarı geçmesi halinde devreye girer.

Bu anlaşma özellikle hasar frekansının birden ve beklenmedik bir şekilde artması karşısında sedanın devretmediği risklerden (saklama payı) dolayı zarar verme ihtimaline karşı kullanılan bir yöntemdir. Bir risk ya da olay sonucu ortaya çıkacak zarara karşı değil bir portföyün tamamının uğrayabileceği zarara karşı sedanı koruma altına almaktadır.

#### **2.1.3. Karşılıklı iş alış verişi (Reciprocity)**

Sedanın reasüröre verdiği reasürans işi karşılığında reasürörden aldığı reasürans veya retrosesyon işidir. Diğer bir deyişle, bir şirketin reasürans yoluyla devrettiği işe karşılık aynı hacim ve nitelikte iş istemesi sonucu karşılıklı iş alış-verişi doğar. Burada amaç, bir portföydeki kötü sonuçların bir diğer portföydeki iyi sonuçlarla dengelenmesidir. Riskin etkin bir biçimde yayılması için bu iş alış-verişlerinin farklı piyasalarda çalışan ve farklı portföylere sahip şirketler arasında yapılması gerekmektedir (Nomer ve Yunak, 2003).

#### **2.1.4. Pool anlaşmaları**

Verilen teminatın tamamen ya da kısmen üye şirketler tarafından ortaklaşa paylaşıldığı sigorta ve reasürans düzenlemeleridir. Genellikle sigorta bedeli yüksek ve hasar ihtimali büyük olan rizikolarda, sigorta şirketlerinin bir araya gelip aralarından birini lider seçerek ve saklama paylarını (konservasyonlarını) bir araya getirerek reasürans piyasasına daha güçlü çıkmalarına olanak sağlayan üyelik sistemine "pool" adı verilir. Pool'ün yaptığı işlerde sigorta poliçesi pool adına düzenleneceği gibi, ilk sigortacı durumunda olan şirket adına da düzenlenebilir.

Pfeiffer'e göre bu anlaşmalar, belli limitler içinde yeni tür tehlikeli rizikoların yayılması için kullanılabilir. Pool anlaşmaları sayesinde üyeler hem geniş bir portföye katılmış hem de büyük rizikoları tanıma ve değerlendirme imkânı bulmuş olurlar (Keleş, 2007).

### **3. OPTİMAL SAKLAMA PAYI**

#### **3.1. Saklama Payı Kavramı**

Sigorta şirketlerinin, sigorta etmiş olduğu riske ilişkin olarak, reasüröre devretmeyip, üzerinde tutmuş olduğu kısmı ifade etmektedir. Sedan şirketlerin saklama payları, ilgili sigorta branşına, riskin ölçüsüne, sedan şirketin mali gücüne ve diğer birçok faktöre bağlı olarak değişebilmektedir. Bunun yanı sıra, aynı branş içerisinde dahi sedan şirketin saklama payı miktarı veya oranı, örneğin riskin derecesi gibi, birtakım ölçülere bağlı olarak değişebilmektedir. Sigortacının üzerinde tutacağı risk miktarına saklama payı ya da konservasyon (retention) denilmektedir.

#### **3.2. Optimal Saklama Payının Belirlenmesi**

Sigorta şirketinin reasüransa başvurmasının ana nedeni kendi üzerinde tuttuğu riskin zararından, mali sıkıntılarından ve iflastan koruyabilmektir.

Saklama payının belirlenmesi konusunda, sedan şirket, bir yandan daha çok primi konservasyonunda tutmak, bir yandan da portföyünü, meydana gelen hasarlardaki dalgalanmalara karşı korumak ikilemi içindedir. Bu konuda standart bir formül ortaya konulmasa da bazı genel ilkelerden bahsedilebilir. Şunu da hemen belirtmek gerekir ki, aynı özellikte portföylere sahip sigorta şirketlerinin bile çeşitli etkenlere verdikleri öznel önem aynı olmayacağından saklama payı düzeyleri de farklılık gösterecektir (Alanya, 1991; Nomer ve Yunak, 2003).

Bir sedan şirketin saklama payını tespit ederken göz önüne alması gereken faktörler;

- Portföyün büyüklüğü, prim geliri ve portföy karlılığı,
- Portföy yapısı, portföy dağılımı, hasar ihtimali ve hasar tecrübesi,
- Hasar büyüklüğü, hasarların sıklığı ve sigortacının hasar içindeki payı,
- Şirketin finansal gücü,
- Yatırım politikası,
- Reasürans maliyeti,
- Reasürans politikası ile ilgili uzun vadeli planlar

olarak sıralanabilir (Friedlos et al., 1997).

Tüm bu parametrelerin ağırlıkları şirketten şirkete değiştiğinden, saklama payı rakamını herkes tarafından kabul edilebilen bir formül yardımıyla tespit etmek kolay değildir. Ancak, sigortacının fon ve rezervi fazlaysa, prim oranlarının genel seviyesinde bir artış gözleniyorsa ve portföy içinde büyük hasarların ağırlığı az ise saklama payı miktarı da o kadar büyük olmaktadır (Keleş, 2007).

Optimal saklama payı konusunda sedan şirketin stratejisi, üzerine aldığı risklerin değerlendirmesini yaparak, hasar olasılığının yüksek olduğu risklerin saklama payını kısıtlamak, hasar olasılığının düşük olduğu risklerin saklama payı seviyesini mali gücü çerçevesinde belirlemek olacaktır. Bu noktada sedan şirket açısından dikkat edilecek konu, saklama payının yüksek tutulması halinde büyük bir hasarın meydana gelmesi sigortacıyı büyük kayıplara uğratacağı gibi saklama payının düşük tutulması ise sigorta şirketinin gereksiz prim kaybına yol açacaktır.

Temel olarak sigorta şirketi ödeyeceği hasarların dağılımının beklenen değerini prim olarak topladığında başa baş durumunda kalması beklenebilir. Ancak topladığı primlerden elde edecek olduğu kazanç oranı (güvenlik yüklemesi) ve yükümlülüklerini yerine getirebilme oranı primlerin hesaplanmasında oldukça büyük önem taşımaktadır.

Sonuç olarak, doğru ve kesin bir saklama payı hesaplamasında kabul görmüş bir formül yoktur. Sigorta şirketlerinin, mali araçları ve portföyünün özellikleri bakımında belirlenmiş bir hacmi vardır. Bu hacmin saklama payı hesaplamasında rolü büyüktür. Saklama payı hesabı şirketin karlılığını ve ödeme gücünü etkileyen önemli bir faktördür. Şirketin sermayesi, aktifler toplamı, serbest rezervleri, likitide durumu ekonomik açıdan güçlülüğü ile doğru orantılıdır. Ekonomik güce sahip şirketlerin, büyük risklerin meydana gelmesi durumunda, büyük sarsıntı geçirme olasılıkları, küçük portföylü şirketlere oranla çok daha düşüktür. Böylece, büyük prim getiren büyük ve riskli işlerde saklama payı oranlarını daha yüksek miktarda tutarak düşük saklama payının sebep olacağı prim kaybını önlemiş olurlar (Özer, 2010a).

Saklama payının optimal seviyede belirlenmesi sedan için büyük önem ifade etmektedir. Optimal saklama payını belirlemenin birçok yolu vardır. Bunlardan ikisi,

sigortacının faydasını maksimize edecek biçimde ya da sigortacı için iflas olasılığını minimize edecek biçimde optimal saklama payının belirlenmesidir (Centeno, 2002; 2004). Bu iki yöntem dışında Cai ve Tan (2007), VaR ve CTE risk ölçümlerini kullanarak optimal saklama payını belirlemişlerdir.

### 3.2.1. Fayda kuramı

Genel olarak sigortacının üstel fayda fonksiyonu temelinde kararlar aldığı varsayılır. Üstel fayda fonksiyonu,  $\beta > 0$  olmak üzere  $u(x) = -\exp\{-\beta x\}$  biçiminde ifade edilir. Risk bir yıllık periyot şeklinde düşünüldüğünde sigortacının yıl sonundaki varlığı,

$$U + P - \delta(d) - X_I \quad (3.1)$$

şeklinde olacaktır.

Burada  $U$  sigortacının yıl başındaki varlığı,  $P$  sigortacının riski karşılamak için aldığı prim,  $\delta(d)$  reasürans primi ve  $X_I$  sigortacı tarafından ödenen hasar tutarını gösteriyor.

Amacımız, sigortacının yıl sonundaki varlığını ve beklenen faydasını maksimize eden saklama payını bulmak. Burada  $U$  ve  $P$  saklama payına bağlı değildir. Öyleyse amacımız,  $-\exp\{\beta\delta(d)\}E[\exp\{\beta X_I\}]$ 'yı maksimize etmek olacaktır (Dickson, 2005).

Ancak sigorta şirketleri kendi fayda fonksiyonlarını bilemedikleri ve de matematiksel olarak ifade edemedikleri için fayda teorisi pratikte uygulama alanı bulamamaktadır.

### 3.2.2. İflas ve artık süreci

Waters, Gerber, Centeno, Hesselager iflas olasılığının reasüransa olan etkisi ile ilgili çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalar daha çok düzeltme katsayısının reasüransa olan etkisi üzerine yoğunlaşmışlardır (Centeno, 2002).

Klasik risk modeli altında, artık süreci  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$

$$U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0 \quad (3.2)$$

$u$ :  $t = 0$  anındaki başlangıç sermayesi,

$c$ : sürekli olarak ödenen yıllık prim miktarı,

$S(t)$ :  $(0, t]$  aralığındaki toplam hasar miktarını göstermektedir.

$$S(t) = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N(t)}$$

$N(t)$ :  $(0, t]$  aralığında meydana gelen hasar sayısı,

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{N(t)}$ : negatif olmayan hasar miktarları,

$U(t)$ :  $t$  anındaki artık'ı ifade eder (Kaas et al., 2001).

Sigortacının sermaye işlemlerini tanımlayan uygun bir model bulabilmek için öncelikle birtakım varsayımların yapılması gerekmektedir.

- Sigorta şirketinin portföyünün belirlenen zaman aralığında değişmediği, dönem içindeki prim gelirlerinin sabit olduğu varsayılmaktadır.
- Ödenen hasarlar dışındaki masraflar ve prim geliri dışındaki gelirler yok sayılmaktadır.
- Toplam hasar miktarı  $\{S(t), t \geq 0\}$ 
  - $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$  hasar miktarlarının resgele bağımsız değişkenler olduğu,
  - $\{N(t), t \geq 0\}$   $\lambda$  parametresi ile Poisson dağıldığı,
  - $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$  ve  $\{N(t), t \geq 0\}$  nin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında,
  - $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  tanımı ile birleşik Poisson dağıldığı varsayılmaktadır.

### **Birleşik Poisson artık süreci**

Hasarların poisson sürecine uyduğu varsayıldığında,  $[0, t]$  aralığında meydana gelen hasar sayısı  $N(t)$ ,  $\lambda t$  parametresi ile Poisson dağılımına sahip olur.

Hasar zamanları  $T_1 < T_2 < \dots$  ise ardışık hasarlar arasındaki bekleme zamanları  $W_1 = T_1, W_2 = T_2 - T_1, \dots$  olur. Poisson süreci varsayımından dolayı bekleme zamanları bağımsız ve aynı dağılımlıdır ve dağılımları  $\lambda$  ile üsteldir.

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$S(t)$ ,  $\lambda t$  parametresi ile birleşik poisson dağılımına sahiptir.

$$E\{S(t)\} = \lambda t E\{x\} \quad (3.3)$$

$$\text{Var}\{S(t)\} = \lambda t E\{x^2\} \quad (3.4)$$

Ayrıca  $t$  yıllık bir periyotta  $[s, s + t]$  aralığında meydana gelen toplam hasar

$S(s + t) - S(s)$ ,  $\lambda t$  parametresi ile durağan birleşik poisson dağılımına sahiptir.

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (3.5)$$

$$E\{U(t)\} = u + ct - E\{S(t)\} = u + ct - \lambda t E\{x\} = u + [c - \lambda E\{x\}]t \quad (3.6)$$

$E\{U(t)\}$ ,  $t$ 'ye göre doğrusaldır ve doğrunun eğimi yıllık prim ile yıllık beklenen toplam hasar arasındaki farktır.

$c > \lambda E\{x\}$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{U(t)\} = \infty$  olur. Yani uzun vadede iflas gözüküyor, kısa vadede iflas söz konusu olabilir.

$c$ ;  $\lambda E\{x\}$  ve  $u$ 'ya göre azalan bir fonksiyondur.

### **Bileşik Poisson süreci modelinde düzeltme katsayısı ve iflas olasılığı**

İflas olasılığının belirlenmesi için kullanılan en yaygın model sermaye sürecinin temelini oluşturan toplam hasar miktarı ile toplam prim arasındaki farkın ilişkilendirildiği düzeltme katsayısının kullanıldığı modeldir.

$R$ : Poisson hasar sürecinde düzeltme katsayısı

$\rho$ : Reasürör güvenlik yükleme katsayısı ve  $1 + \rho = \frac{c}{\lambda E\{x\}}$  olarak tanımlanır.

$\lambda + cR = \lambda M_x(R)$  olarak tanımlanan eşitlikten  $R$  için tek ve sıfırdan farklı çözümü olarak tanımlanıyor (Kaas et al., 2001).

$$1 + \frac{c}{\lambda} \cdot R = M_x(R), \quad c = (1 + \rho)\lambda E(x) \text{ olur.}$$

Örnek olarak hasar dağılımının üstel (exponential)  $\beta$  parametresi ile dağılması halinde düzenleme katsayısına bakacak olursak,

$$M_x(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \text{ olacaktır. O halde } 1 + (1 + \rho) \frac{1}{\beta} R = \frac{\beta}{\beta - R} \text{ ve } R = \frac{\rho\beta}{1+\rho} \text{ olacaktır (Kaas et al., 2001).}$$

Hasar dağılımının üstel (exponential) dağılması halinde çözümü vardır. X'in diğer dağılımları için R, düzeltme katsayısı çeşitli sayısal çözümleme yöntemleriyle bulunabilir. Hasar dağılımının üstel dağılmaması durumunda R için kapalı bir ifade yazılamamaktadır.

Düzenleme katsayısı R ile iflas olasılığı  $\varphi(u)$  arasında,

$$\varphi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\{e^{-Ru} | T < \infty\}} \text{ şeklinde bir ilişki söz konusudur. Burada,}$$

T: İflas zamanı

u: Başlangıç sermayesi

$\varphi(u)$ : İflas olasılığını göstermektedir.

Ayrıca buradan da anlaşılacağı gibi düzenleme katsayısı arttıkça ( $R \uparrow$ ), iflas olasılığı  $\varphi(u) \downarrow$  düşecektir.

Başlangıç sermayesinin sıfır olduğu ve hasar miktarının üstel dağıldığı istisnai durumlar dışında yukarıdaki eşitlikteki paydayı hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle eşitlik yerine eşitsizlikler kullanılabilir.  $u(t), T < \infty$  için negatif değer alması ve paydanın biri aşması ile eşitlik,

$$\varphi(u) < e^{-Ru} \tag{3.7}$$

ifadesine dönüşmektedir.

Reaüsüransın iflas olasılığı üzerindeki etkisini inceleyen Gerber, Waters , Centeno ve Hesselager reasüransın düzeltme katsayısındaki etkisi üzerine yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalar sonucunda düzeltme katsayısını maksimize eden reasürans

yönteminin ve saklama payının belirlenmesi ile iflas olasılığının üst limitinin minimize edileceği anlaşılmıştır.

### **3.2.3. Genel risk ölçümleri**

Genel risk ölçümleri sigorta ve finans sektörlerinde her geçen gün daha fazla önem kazanmaktadır.

Tutarlı risk ölçümleri konusundaki makalesi ile yeni bir bakış açısı kazandıran Artzner (1999), pek çok yazara ilham vererek bu görüşü geliştirmelerine öncülük etmiştir. Son dönemde yeni pazarlar ve ürünlerdeki gelişmeler, yeni tip risk ölçümlerinin gerekliliği (kredi riski, operasyonel risk gibi), uygun risk yöntemleri ve risk yönetme tekniklerinin önemini artırmıştır (Balbas et al., 2009).

Bu bağlamda VaR ve CTE gibi risk ölçümleri akademisyenler arasında son zamanlarda büyük ilgi oluşturmuştur. Banka ve sigortacılık sektöründe pazar risklerini belirlemede, portföy optimizasyonunda, sermaye yeterliliğinde vb işlerde yoğun olarak kullanılmaktadır. Örnekleri; Artzner vd., Basak ve Shapiro, McNeil vd., Cai ve Li, Inui ve Kijima, Yamai ve Yoshida tarafından verilmiştir (Cai et al., 2008).

## 4. VaR VE CTE İLE OPTİMAL SAKLAMA PAYI

### 4.1. Giriş

Son yıllarda finansal alanda yaşanan gelişmeler, risk yönetimini oldukça önemli hale getirmiştir. Finansal alanlardaki gelişmelere paralel olarak risk yönetimi konusunda da VaR ve CTE gibi çeşitli risk ölçümleri geliştirilmiştir.

Bu risk ölçümlerini kullanarak optimal saklama payı konusunu araştıran Cai ve Tan (2007), toplam hasar fazlası reasürans yöntemini kullanarak beklenen prim ilkesi altında, sigortacının toplam ödemesini VaR ve CTE risk ölçümleriyle minimize ederek, optimal saklama payını hesaplamıştır. Ayrıca optimal saklama payının sadece hasar dağılımı ve reasürörün güvenlik yükleme katsayısına bağlı olduğunu, CTE risk ölçümünün VaR'a göre daha etkin bir ölçüm olduğunu belirtmişlerdir.

Cai ve Tan (2007)'in çalışmasına ek olarak, Tan vd. (2009) optimal saklama payı konusunu 17 farklı prim ilkesi için araştırmışlardır. Ayrıca toplam hasar fazlası reasürans yönteminin yanısıra kot-par reasürans yöntemini incelemiş, VaR ve CTE risk ölçümleri altında anlamlı bir optimalitenin ve analitik çözümün varlığını göstermiştir.

VaR ve CTE ölçümleri için optimal saklama payı hesaplanmasının ayrıntılarına geçmeden önce, uygulamada kullanılacak toplam hasar fazlası yöntemine ilişkin temel tanım ve eşitliklerin gösterilecektir.

$X$ , sigortacının toplam hasar miktarını belirten negatif olmayan bir değişken olsun. Dağılım fonksiyonu  $F_X(x) = \Pr\{X \leq x\}$ , yaşam fonksiyonu  $S_X(x) = \Pr(X > x)$  olmak üzere, beklenen değeri  $E(X) > 0$  olsun. Burada  $X_I$  sedanın hasar değişkeni ve  $X_R$  ise reasürörün hasar değişkeni olsun ve saklama payı  $d > 0$  olmak üzere  $X_I$  ve  $X_R$  için,

$$X_I = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d \quad (4.1)$$

ve

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} = (X - d)_+ \quad (4.2)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $(a)_+ = \max\{a, 0\}$  ifade etmektedir.

Toplam hasar fazlası anlaşmasında reasürör, saklama payını aşan  $X - d$  miktarını öder. Bu da gösteriyor ki reasürör, saklama payının üzerindeki riskleri absorbe ederken aynı zamanda sigortacı da potansiyel büyük bir riskten saklama payını sınırlayarak etkili bir şekilde korunmuş olur.

Riski üzerine alan reasüröre, sedan tarafından reasürans primi ödenir. Reasürans primi  $\delta(d) = (1 + \rho)\pi(d)$ ,  $\rho > 0$  olmak üzere kısmi yükleme katsayısını göstermektedir ve  $\pi(d)$  ise toplam hasar fazlası net primini gösteriyor (Cai, 2004).

$$\pi(d) = E[X_R] = E[(X - d)_+] = \int_d^\infty S_x(x)dx \quad (4.3)$$

Saklama payı büyüdükçe reasürans primi azalacağından,  $\pi(d)$ ,  $d$ 'nin azalan fonskiyonudur. Sedan açısından toplam ödeme  $T$ , devredilmeyen hasar ve reasürans priminden oluşur (Cai and Tan, 2007).

$$T = X_I + \delta(d) \quad (4.4)$$

#### 4.2. VaR ile Optimal Saklama Payı

Riske maruz değer (VaR), belirli bir zaman aralığında ve belirli bir olasılık düzeyinde, beklenen maksimum zarar miktarını ölçen yöntemdir (Artzner et al., 1999).

Riske maruz değer, bir mali kuruluşun ya da firmanın risk durumunu bir bütün olarak ortaya koyabilen, klasik risk ölçümlerine kıyasla anlaşılması daha kolay olan ve risk tutarlarını riskin meydana gelme olasılığıyla ilişkilendirerek ifade edilebilen bir ölçüm olarak bilinmektedir.

Riske maruz değerın faydaları,

- Tek bir rakamla toplam portföyün riski hakkında önemli şeyler söylemesi,
- Anlaşılması kolay bir yöntem olması,
- “İşler ne kadar kötüye gidebilir” basit sorusunu sorması,

- Kurumların piyasa riskleri karşısında tutmaları gereken minimum sermayenin hesaplanmasında temel oluşturmaktadır.

Ancak diğer yandan;

- Geçmiş dönemdeki verilerin gelecekteki gelişmeleri temsil etme gücünün zayıf olabilmesi,
- VaR modelinin varsayımlarının sapmalı sonuçlara yol açabilmesi,
- Modellerin olağanüstü olaylar nedeniyle ortaya çıkabilecek riskleri dikkate almaması,
- Modellerin kullanımının ileri tecrübe ve bilgi gerektirmesi

nedenleriyle de kullanıcılar açısından sakınca oluşturmaktadır.

VaR,  $X$  bağımsız değişkeni olmak üzere  $(1 - \alpha)$  güven aralığında  $(0 < \alpha < 1)$  aşağıdaki gibidir;

$VaR_X(\alpha) = \inf\{x: P\{X > x\} \leq \alpha\} = \inf\{x: P\{X \leq x\} \geq 1 - \alpha\}$ . Yani  $X$ 'in  $100(1 - \alpha)$ . yüzdesine karşılık gelir. Bu yüzden, her  $x < VaR_X(\alpha)$  ve  $P\{X > x\} > \alpha$  için  $P\{X > VaR_X(\alpha)\} \leq \alpha$  olarak tanımlayabiliriz.

Eğer  $X$ ,  $[0, \infty)$  aralığında birebir sürekli dağılımlı ise  $VaR_X(\alpha)$  aşağıdaki iki denklem için tek çözümdür.

$$P\{X > VaR_X(\alpha)\} = \alpha \quad (4.5)$$

$$P\{X \leq VaR_X(\alpha)\} = 1 - \alpha$$

Ayrıca

$$VaR_X(\alpha) = S_X^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(1 - \alpha). \quad (4.6)$$

Sigortacının devredilmeyen hasarı ve toplam ödemesi için VaR,

$$VaR_{X_I}(d, \alpha) = \inf\{x: P\{X_I > x\} \leq \alpha\} \quad (4.7)$$

$$VaR_T(d, \alpha) = \inf\{x: P\{T > x\} \leq \alpha\}$$

şeklinde olacaktır.

Yöntemin basitliği VaR için bir avantajdır. Eğer herhangi bir risk için VaR değeri biliniyorsa, bu değeri aşma olasılığının  $\alpha$ 'dan daha büyük olamayacağı söylenebilir. Bu açıdan  $\alpha$  parametresi hoşgörülebilir risk olasılığı olarak açıklanabilir. Pratikte,  $\alpha$  genellikle %5 gibi küçük bir değer olarak seçilir. VaR ölçüsünün sakıncası, VaR değeri sigortacı toplam ödemesi için eşik değeri ifade eder ancak bu eşik değer aşıldığında ne olacağı hakkında bilgi vermez. (Cai and Tan, 2007).

İlk olarak devredilmeyen hasar  $X_I$ 'nin yaşam fonksiyonu,

$$S_{X_I} = \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq x < d, \\ 0, & x \geq d. \end{cases} \quad (4.8)$$

Yukarıdaki sonuç doğrultusunda, eğer  $0 < \alpha \leq S_X(d)$  ya da  $0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha)$  ise,  $VaR_{X_I}(d, \alpha) = d$ ;

eğer  $\alpha > S_X(d)$  ya da  $d \geq S_X^{-1}(\alpha)$  ise,

$VaR_{X_I}(d, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$  olur.

$X_I$  için VaR değerine bakıldığında,

$$VaR_{X_I}(d, \alpha) = \begin{cases} d, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha), \\ S_X^{-1}(\alpha), & d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases} \quad (4.9)$$

olacaktır.

Daha önce  $d > 0$  olacağını belirtmiştik.  $X_I$  rastgele değişkeni  $0 \leq X_I \leq d$  arasındayken, her  $\alpha \in (0, S_X(d)]$  için  $VaR_{X_I}(d, \alpha) = d$  olur.

Toplam ödeme için VaR değerine bakıldığında,

$$VaR_T(d, \alpha) = VaR_{X_I}(d, \alpha) + \delta(d) \quad (4.10)$$

olacaktır (Cai and Tan, 2007).

Burada  $VaR_{X_I}(d, \alpha)$ ;  $d$ 'nin artan bir fonksiyonu iken,  $\delta(d)$  ise  $d$ 'nin azalan bir fonksiyonudur. Bunları biraraya getirildiğinde  $VaR_T(d, \alpha)$  için aşağıdaki eşitlik bulunur.

**Öneri 4.1:**

Her  $d > 0$  ve  $0 < \alpha \leq S_X(0)$  için,

$$\text{VaR}_T(d, \alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha), \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d), & d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases} \quad (4.11)$$

$\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)$ 'da olduğu gibi  $\text{VaR}_T(d, \alpha)$ 'da da  $d > 0$  için  $\alpha \in (0, S_X(d)]$  şeklindedir.

Bu bölümün temel sonucu olarak aşağıdaki eşitlik gösterilebilir (Cai and Tan, 2007).

$$\rho^* = \frac{1}{1+\rho} \quad (4.12)$$

Bu eşitlik optimizasyon problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynayacaktır. Aşağıdaki teorem VaR optimizasyonundaki optimal saklama payının varlığı için gerek ve yeter koşulları belirtiyor (Cai and Tan, 2007).

**Teorem 4.1:**

a)  $\text{VaR}_T(d^*, \alpha) = \min_{d>0} \{\text{VaR}_T(d, \alpha)\}$  eşitliğindeki optimal saklama payı  $d^*$ , yalnız ve yalnız,

$$\alpha < \rho^* \leq S_X(0) \quad (4.13)$$

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\{S_X^{-1}(\rho^*)\} \quad (4.14)$$

durumunda var olur.

b) Eğer optimal saklamayı var ise o zaman,

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) \quad (4.15)$$

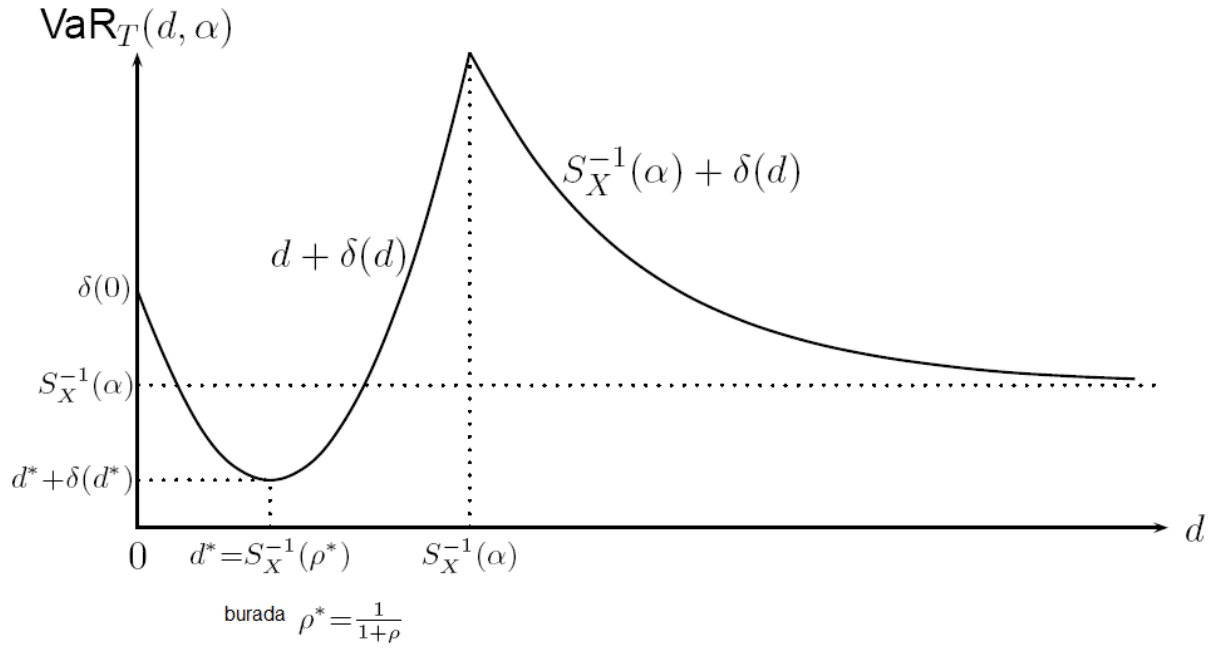
ve toplam ödemenin VaR'ı ise

$$\text{VaR}_T(d^*, \alpha) = d^* + \delta(d^*) \quad (4.16)$$

olacaktır.

**İspat 4.1:**

a) (4.11)'den de görüleceği gibi  $VaR_T(d, \alpha)$ ,  $d \in (0, \infty)$  aralığında sürekli ve  $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$  aralığında azalan bir değerdir. Ayrıca  $\rho^* < S_X(0)$  iken,  $d \in (0, d_0)$  aralığında  $d + \delta(d)$  azalan;  $d \in (d_0, \infty)$  aralığında artan bir fonksiyondur. Burada  $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$  ve fonksiyon minimum değerini  $d_0$  noktasında  $d_0 + \delta(d_0)$  değeri ile alır. Dolayısıyla eğer (4.13) ve (4.14) geçerliyse  $0 < d_0 < S_X^{-1}(\alpha)$  ve minimum değer olan  $d_0 + \delta(d_0)$ ,  $d \in (0, \infty)$  aralığında  $VaR_T(d, \alpha)$  için de geçerlidir. Bu yüzden  $d_0 > 0$ , optimal saklama payıdır.



Şekil 4.1. VaR optimizasyonu (Cai and Tan, 2007)

Bunun tersine, eğer (4.13),  $\alpha \geq \rho^*$  şartını sağlamaz ise, o halde  $d_0 \geq S_X^{-1}(\alpha)$  ve  $VaR_T(d, \alpha)$ ,  $d \rightarrow \infty$  iken  $S_X^{-1}(\alpha)$ 'nın sınırlı değeri  $d \in (0, \infty)$  aralığında azalıyor olacaktır, bu nedenle en optimal saklama payı  $d^*$  var olmayacaktır; eğer (4.13)  $\rho^* \geq S_X(0)$  şartını sağlamaz ise, bu halde  $d_0 = 0$  ve tekrar  $VaR_T(d, \alpha)$ ,  $d \rightarrow \infty$  iken  $S_X^{-1}(\alpha)$  sınırlı değeri ile,  $d \in (0, \infty)$  aralığında azalıyor olacaktır, böylece optimal saklama payı  $d^*$  var olmayacaktır; eğer (4.13) sağlanıyor ancak (4.14) sağlanmıyor ise, bu halde  $\inf_{d>0} VaR_T(d, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$ , ancak öyle bir  $d^* > 0$  değeri  $VaR_T(d^*, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$  için yoktur. Bu nedenle, hem (4.13) hem de (4.14), en optimal saklama payı  $d^* > 0$  değerinin var olması için gereklidir.

b) En uygun (optimal) saklama payı  $d^* > 0$  varsa, (a)'nın kanıtından  $d^* = d_0$  için VaR'ın en düşük değeri  $(0, \infty)$  aralığında  $d_0 + \delta(d_0)$  olacaktır.

#### **Açıklama 4.1:**

Yukarıdaki sonuçların bazı pratik önemlerini vurgulayacak olursak; ilk olarak (4.13) ve (4.14) diğerlerine göre daha kolay doğrulanabilir. İkinci olarak, optimal saklama payı açık ve hesaplaması kolaydır. Üçüncü ve son olarak, eğer saklama payı var ise, sadece varsayılan hasar dağılımı ve kısmi güvenlik katsayısına bağlıdır.

Aşağıdaki sonuç, (4.19) daki optimal saklama payının varlığı için gerekli şartları verir.

#### **Sonuç 4.1:**

(4.19) daki optimal saklama payı  $d^* > 0$  varsa, ancak (4.13) ve

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq (1 + \rho)E[X] \quad (4.17)$$

durumlarında kabul edilir ve optimal saklama payı ve minimum VaR, (4.15) ve (4.16) da verildiği şekilde hesaplanır.

#### **Sonuç 4.1'in ispatı:**

(4.14), (4.17)'yi doğrulamak için yeterlidir.

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq (1 + \rho) \int_0^{S_X^{-1}(\rho^*)} S_X(x) dx + (1 + \rho) \pi \{S_X^{-1}(\rho^*)\} \quad (4.18)$$

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + (1 + \rho) \pi \{S_X^{-1}(\rho^*)\}$$

Bu şekilde (4.14) sağlanır.

### VaR-optimizasyonu

Sigortacı açısından bakıldığında, tedbirli bir risk yöneticisi toplam zarar T'yi mümkün olduğunca küçük görmek isteyecektir. Bu bize saklama payını optimal düzeyde aramak için aşağıdaki optimizasyon kriterine götürecektir.

$$\text{VaR} - \text{optimizasyonu: } \text{VaR}_T(d^*, \alpha) = \min_{d>0} \{\text{VaR}_T(d, \alpha)\} \quad (4.19)$$

Sigortacının toplam ödemesinin VaR değerini,  $\alpha$  risk hoşgörü düzeyi için minimize ederek optimal saklama payını  $d^*$  hesaplamamızı sağlar. Bu yöntem VaR-optimizasyonu diye adlandırılır (Cai and Tan, 2007).

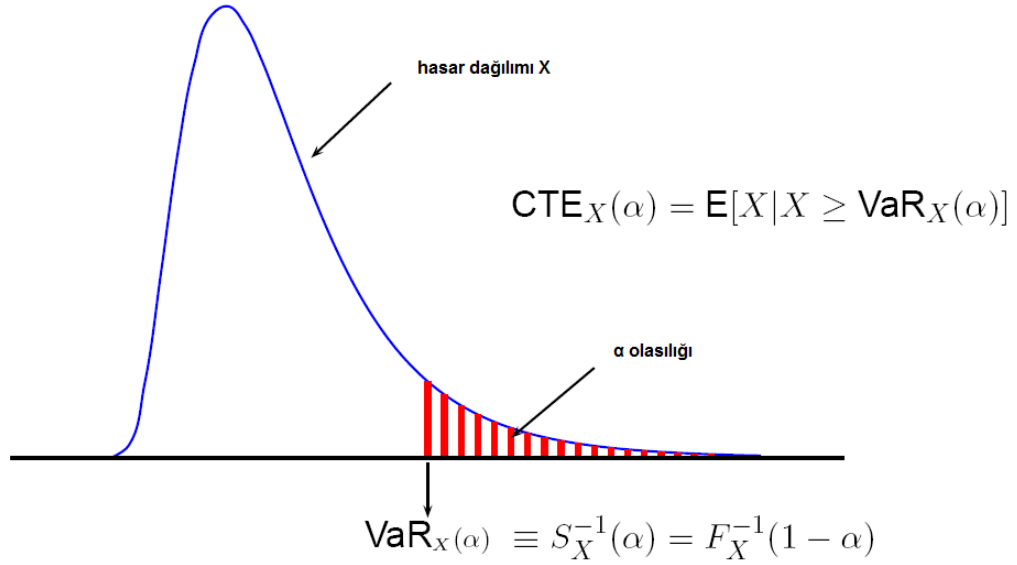
### **4.3. CTE ile Optimal Saklama Payı**

Artzner vd. (1999) tarafından geliştirilen bir model olan koşullu riske maruz değer, VaR ölçümüne getirilen eleştirilerden yola çıkarak tasarlanan bir modeldir.

CTE, temel olarak potansiyel kaybın riske maruz değeri aştığı beklenen kayıp olarak tanımlanmaktadır. Bu da potansiyel riskin eşik değerini aştığında, yaşanabilecek riskin beklenen boyutunu açıklar ve right-tail-risk (sağ kuyruk riski) için önemli bir ölçü vermektedir.

Kuyruk zararlarının şiddetini ortaya koymak açısından CTE, VaR'dan daha etkili bir risk ölçümüdür. CTE, VaR'a kıyasla dağılımların kuyruk bölümlerindeki zararlara daha duyarlı bir alternatiftir.

CTE tutarlı bir risk ölçümü için arzu edilen bütün özellikleri sağlamakta ve aynı derecede güvenli olan VaR'dan daha ihtiyatlı bir risk ölçümü temin etmektedir. Bu nedenle bir çok uygulamada CTE, VaR'a göre daha çok tercih edilmekte, sigorta ve finans literatüründe son zamanlarda gittikçe daha fazla dikkat çekmektedir (Cai and Li, 2005).



$$\Pr\{X > \text{VaR}_X(\alpha)\} = \alpha \Leftrightarrow \Pr\{X \leq \text{VaR}_X(\alpha)\} = 1 - \alpha$$

Şekil 4.2. VaR ve CTE karşılaştırması (Cai and Tan, 2007)

Artzner vd. (1999)'a göre CTE aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{aligned} \text{CTE}_X(\alpha) &= E[X | X \geq \text{VaR}_X(\alpha)] \\ \text{CTE}_X(\alpha) &= E[X | X > \text{VaR}_X(\alpha)] \end{aligned} \tag{4.20}$$

Eğer  $X$  sürekli bağımsız değişken ise yukarıdaki iki eşitlik özdeştir. Ayrıca yukarıdaki eşitlikten de anlaşılacağı gibi  $\text{CTE}_X(\alpha) \geq \text{VaR}_X(\alpha)$ 'dir. Daha da önemlisi riskin sürekli olduğu koşullar altında, CTE daha tutarlı bir risk ölçümüdür.

CTE için sigortacının devredilmeyen hasarı ve toplam maruz kalacağı zararını yazacak olursak,

$$\text{CTE}_{X_I}(d, \alpha) = E[X_I | X_I \geq \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)] \tag{4.21}$$

$$\text{CTE}_T(d, \alpha) = E[X_T | X_T \geq \text{VaR}_{X_T}(d, \alpha)] \tag{4.22}$$

şeklinde olacaktır.

### CTE-optimizasyonu

Saklama payını optimal düzeyde aramak için ikinci olarak aşağıdaki CTE-optimizasyon kriteri kullanılabilir.

$$\text{CTE} - \text{optimizasyonu: } \text{VaR}_T(\tilde{d}, \alpha) = \min_{d>0} \{\text{CTE}_T(d, \alpha)\} \quad (4.23)$$

CTE-optimizasyonundaki optimal saklama payı  $\tilde{d}$ , sağ kuyruk riski için önemli bilgi vermektedir. Özellikle aşırı olayların beklenen kaybını minimize etme konusunda ilgi çekici özelliğe sahiptir (Cai and Tan, 2007).

CTE-optimizasyonu için optimal saklama payını (4.23) düşündüğümüzde, CTE'nin toplam zararı (4.4), (4.22) ve (4.10) ile aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$$\text{CTE}_T(d, \alpha) = E[X_I + \delta(d) \mid X_I + \delta(d) \geq \text{VaR}_T(d, \alpha)] = \text{CTE}_{X_I}(d, \alpha) + \delta(d) \quad (4.24)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{CTE}_{X_I}(d, \alpha) &= E[\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha) + X_I - \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha) \mid X_I \geq \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)] \\ \text{CTE}_{X_I}(d, \alpha) &= \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha) + \frac{\int_{\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x) dx}{\Pr\{X_I \geq \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)\}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$0 < \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha) \leq d$ , (4.8) ve (4.9)'dan takip edilirse,

$$\int_{\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x) dx = \int_{\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)}^{\infty} S_X(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \quad (4.26)$$

ve

$$\Pr\{X_I \geq \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)\} = \Pr\{X_I = \text{VaR}_{X_I}(d, \alpha)\} + S_{X_I}(\text{VaR}_{X_I}(d, \alpha))$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \Pr(X_I = d) + S_{X_I}(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr(X_I = S_X^{-1}(\alpha)) + S_{X_I}(S_X^{-1}(\alpha)), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Pr(X \geq d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X(S_X^{-1}(\alpha)) = \alpha, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir.

Böylece, (4.24)-(4.26) ve (4.11)'i birleştirerek,  $CTE_T(d, \alpha)$  için aşağıdaki ifade yazılabilir.

Her  $d > 0$  ve  $0 < \alpha < S_X(0)$  olmak üzere,

$$CTE_T(d, \alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \quad (4.28)$$

#### Açıklama 4.2:

$d > 0$  iken,  $CTE_T(d, \alpha)$  her  $\alpha \in (0, S_X(d)]$  için aynıdır. Eğer  $0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha)$  ise  $VaR_{X_I}(d, \alpha) = d$  ve  $VaR_T(d, \alpha) = d + \delta(d)$ . Dolayısıyla  $0 \leq X_I \leq d$  ve  $0 \leq T \leq d + \delta(d)$  durumunda,  $X_I > VaR_{X_I}(d, \alpha)$  ve  $T > VaR_T(d, \alpha)$  geçerli olmaz.  $0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha)$  için  $CTE_T(d, \alpha) = VaR_T(d, \alpha)$  ve  $d > S_X^{-1}(\alpha)$  için  $CTE_T(d, \alpha) > VaR_T(d, \alpha)$  olacaktır (Cai and Tan, 2007).

#### Teorem 4.2:

a) (4.23) eşitliğinde saklama payı  $\tilde{d} > 0$ , yalnız ve yalnız:

$$0 < \alpha \leq \rho^* < S_X(0) \quad (4.29)$$

durumunda vardır.

b) Yine (4.23) eşitliğindeki optimal saklama payı  $\tilde{d} > 0$  varsa,

$$\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*), \text{ eğer } \alpha < \rho^*, \quad (4.30)$$

ve

$$\tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*), \text{ eğer } \alpha = \rho^* \quad (4.31)$$

olacaktır.

#### İspat 4.2:

a) (4.28)'den de görüldüğü gibi  $CTE_T(d, \alpha)$ ,  $d \in (0, \infty)$  aralığında süreklidir. Ayrıca  $\rho^* < S_X(0)$  iken  $d + \delta(d)$ ,  $d \in (0, d_0)$  aralığında azalan bir fonksiyon ve

$d \in (d_0, \infty)$  aralığında artan bir fonksiyondur. Burada  $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*) > 0$ . Buradan  $d$ 'ye göre diferansiyel alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial d} \left( S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx \right) = \left( \frac{1}{\alpha} - (1 + \rho) \right) S_X(d) \quad (4.32)$$

olacaktır.

Böylece (4.29),  $0 < d_0 \leq S_X^{-1}(\alpha)$ 'yı ifade eder ve  $\alpha \leq \rho^*$  ise  $S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx$  fonksiyonu  $d$ 'de artan bir fonksiyondur. Bundan dolayı, eğer  $\alpha < \rho^*$ ,  $CTE_T(d, \alpha)$  minimum değerine  $d_0 = \tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*)$  eşitliğinde ulaşır ve minimum değeri  $d_0 + \delta(d_0)$  olur, burada  $d_0 > 0$  en uygun (optimal) saklama payıdır. Ayrıca eğer  $\alpha = \rho^*$  eşitliğinde ise yine  $CTE_T(d, \alpha)$  minimum değerine  $d_0 = \tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*)$  eşitliğinde ulaşır ve minimum değeri  $d_0 + \delta(d_0)$  olur. Sonuç olarak optimal saklama payı duruma göre  $\tilde{d} \geq d_0 \geq 0$  şeklinde olur.

Bunun tersine, eğer (4.29) için  $\alpha > \rho^*$  geçerli olursa o zaman  $d_0 \geq S_X^{-1}(\alpha)$  ve azalan fonksiyon  $S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx$  olur. Bu yüzden  $CTE_T(d, \alpha)$ ,  $d \in (0, \infty)$  aralığında azalan ve  $S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x) dx$  limitiyle minimum olur.

Eğer (4.19)'daki optimal saklama payı yoksa ve (4.29)'daki ifade  $\rho^* \geq S_X(0)$  şeklinde ise  $d_0 = 0$  olur ve  $\tilde{d} > 0$  olacak bir saklama payından (4.31)'den bahsedilemez.

b) (4.23)'deki saklama payı  $\tilde{d}$  varsa, yukarıdan elde edilen,

$$d_0 = \tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*) \text{ eğer } \alpha < \rho^* \quad (4.33)$$

ve

$$\tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*) \text{ eğer } \alpha = \rho^* \quad (4.34)$$

şeklinde olacaktır (Cai and Tan, 2007).

**Örnek 4.1:**  $\alpha = 0.1$ ,  $\rho = 0.2$  ve  $X$ 'in  $E(X) = 1000$  ile üstel dağıldığını varsayalım. O zaman  $S_X(x) = e^{-0.001x}$ ,  $x \geq 0$ ;  $S_X^{-1}(x) = -1000 \log x$ ,  $0 < x < 1$  ve  $S_X(0) = 1$ . Ayrıca  $\rho^* = 0.83 > \alpha = 0.1$  ve  $S_X^{-1}(\alpha) = -1000 \log \alpha = 2302.59 > (1 + \rho)E[X] = 1200$

olduğundan hem (4.13) hem de (4.17) sağlanır. Buradan en uygun (optimal) saklama payı  $d^*$  mevcuttur ve  $d^* = S_X^{-1}(\rho^*) = 1000 \log(1 + \rho) = 182.32$  olacaktır.

**Örnek 4.2:** Bir önceki örnekteki gibi,  $\alpha = 0.1$  ve  $\rho = 0.2$  fakat  $X$ 'in Pareto dağıldığı varsayımı altında  $S_X(x) = \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3, x \geq 0$  ise  $S_X^{-1}(x) = 2000x^{-1/3} - 2000, 0 < x < 1$  olacaktır.  $\rho^* = 0.83 > \alpha = 0.1$  ve  $S_X^{-1}(\alpha) = 2000\alpha^{-1/3} - 2000 = 2308.87 > (1 + \rho)E[X] = 1200$  olduğundan hem (4.13) hem de (4.17) sağlanır ve en uygun (optimal) saklama payı  $d^* = S_X^{-1}(\rho^*) = 125.32$  olacaktır.

#### Açıklama 4.2:

Yukarıdaki iki örnekte de hasarların ( $X$ ) ortalaması aynıydı. Pareto dağılımı ağır kuyruklu bir dağılımdır. Bu da pareto dağılımının üstel dağılıma göre daha daha büyük kayıplara neden olacağı anlamına gelir. Sonuç olarak pareto dağılımı için elde edilecek optimal saklama payı, üstel dağılıma göre daha düşük olmalıdır.

CTE optimizasyonu VaR ile karşılaştırıldığında, en uygunluk koşulları çerçevesinde CTE daha az kısıtlayıcıdır. Ancak her iki optimizasyon yöntemi de aynı optimal saklama payını verir.

Reasürörün, yükleme katsayısı  $\rho$ 'yu artırması, sedan açısından daha pahalı bir risk transferi anlamına gelir. Dolayısıyla, sedanın saklama seviyesini yükselterek daha fazla risk üstlenmesini sağlar.  $\rho \rightarrow \infty$  iken  $\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) \rightarrow \infty$  olacaktır. Böylece sedan riskini reasüre etmez.

Reasürörün güvenlik yükleme katsayısı arttığında saklama payı seviyesinin nasıl değiştiğini görmek için aşağıda iki örnek verecek verilmiştir.

**Örnek 4.3:**  $\alpha = 0.1$ ,  $\rho = 2.7$  ve  $X$ 'in üstel dağıldığı varsayalım.

$$S_X^{-1}(\alpha) - (S_X^{-1}(\rho^*) + (1 + \rho) \int_{S_X^{-1}(\rho^*)}^{\infty} S_X(x) dx) = -5.75 < 0.$$

Dolayısıyla, en uygun (optimal) saklama payı  $d^*$ , (2.6) koşulunu sağlamadığı için mevcut değildir. Ancak en uygun (optimal) saklama payı  $\tilde{d}$ ,  $\rho = 0.27 > \alpha$  iken  $\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) = 1308.33$  olacaktır.

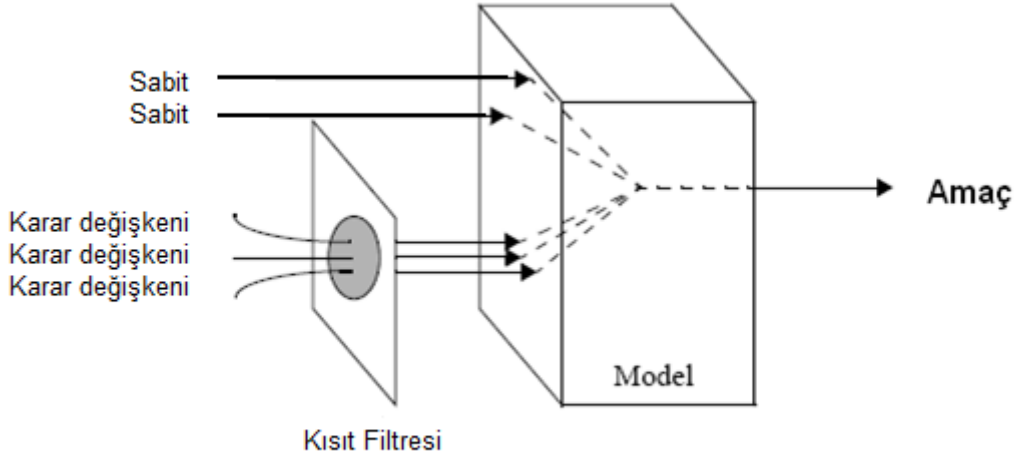
**Örnek 4.4:** Yukarıdaki örnekte olduğu gibi;  $\alpha = 0.1$ ,  $p = 2.7$  ve  $X$ 'in pareto dağıldığı varsayalım. Buradan kolayca  $d^*$ 'nin var olmadığı fakat  $\tilde{d}$ 'nin var olduğu görülecektir.  $\tilde{d} = S_X^{-1}(p^*) = 1093.36$  olacaktır ve yukarıdaki örnekten de görüldüğü üzere daha düşük bir değerdir (Cai and Tan, 2007).

## 5. MONTE CARLO STOKASTİK OPTİMİZASYONU

Bir matematik sözlüğü optimizasyon (eniyeleme) sürecini, "bir probleme en iyi mümkün çözüm bulma süreci olarak" tanımlamaktadır. Matematikte bu süreç, genellikle bir fonksiyonun değerinin verilen kısıtlar altında maksimize ya da minimize edilmesinden oluşur (Bronson, 1982).

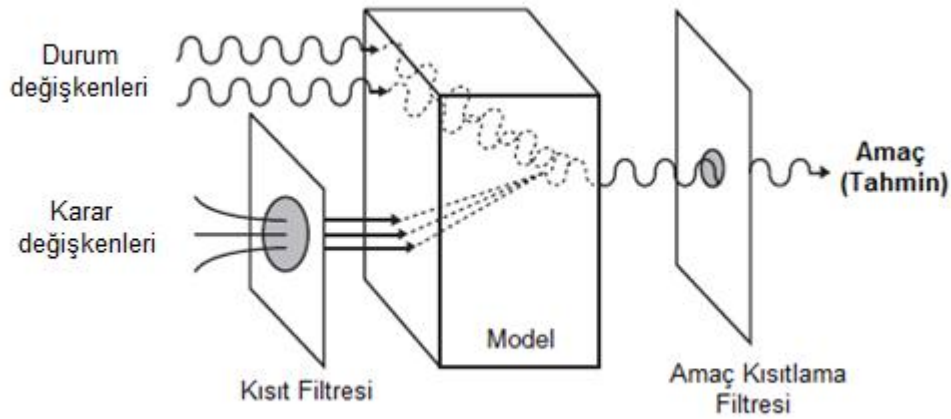
Günümüzdeki rekabetçi küresel ekonomide, şirketler zor kararlar ile karşı karşıya gelmektedirler. Bu kararlar; finansal kaynak ayırımı, bina veya tesis genişletilmesi, stok yönetimi ve ürün karma stratejilerinin belirlenmesi gibi çeşitli konuları içermektedir. Bu tür kararlar binlerce ya da milyonlarca olası alternatif içerebilir. Her birinin tek tek dikkate alınması ve değerlendirilmesi mümkün olmamaktadır. En iyi sonucu verecek kararı belirlemek için, bir matematiksel optimizasyon modeli kurmak gerekmektedir. Optimizasyon modelinin üç önemli unsuru bulunmaktadır. Bunlar; karar değişkenleri, kısıtlar ve amaç. Kısacası optimizasyon yöntemi, kısıtları sağlayacak şekilde amaç fonksiyonunu maksimize ya da minimize eden karar değişkeni değerlerinin en iyi kombinasyonunu belirler.

Optimal değerler elde etmek genellikle, hedefe doğru ve tekrarlayan işlemlerden oluşan bir araştırma sürecini gerektirir. Bu süreç, karar değişkenlerinin başlangıçtaki değerleri için amaç fonksiyonu değerleri hesaplama, sonuçları analiz etme, bir veya daha fazla karar değişkenini değerlerini değiştirme, modeli tekrar çalıştırma ve tatmin edici bir sonuç bulana dek aynı işlemleri tekrar etmeyi içerir.



Şekil 5.1. Deterministik optimizasyon modeli (Mun, 2006)

Eğer problem basit ve durum değişkenlerinin değerleri tam olarak biliniyorsa, optimizasyon modelindeki tüm girdiler sabit ise, model deterministik olacaktır. Şekil 5.1.'de deterministik bir optimizasyon modeli görülmektedir. Ancak birçok durumda deterministik bir model, karar verme probleminin içerdiği tüm karmaşıklığı açıklayamayabilir. Bir modeldeki bazı girdiler belirsiz ve dolayısıyla sadece olasılık dağılımları ile tanımlanabiliyor ise karar değişkenlerinin seçilen çözüm kümesi için amaç fonksiyonu değerlerinin olasılık dağılımı elde edilebilir.



Şekil 5.2. Stokastik optimizasyon modeli (Mun, 2006)

En az bir tane rastgele parametre içeren bu tür modeller ise stokastik optimizasyon modeli olarak adlandırılır. Şekil 5.2.'te stokastik bir optimizasyon

modeli görülmektedir. Karar değişkenlerinin seçilen bir çözüm kümesi için amaç fonksiyonu kesin bir değeri olmayacağı da şeklinden görülmektedir.

Deterministik bir modelin optimal çözümü analitik olarak ya da Monte Carlo optimizasyonu adı verilen, rastgele seçilen çok sayıda uygun çözüm kümeleri içinde amaç fonksiyonuna en iyi değeri verenin bulunması yöntemiyle olabilir (Dickman and Gilman, 1989).

Stokastik modellerin optimizasyonu, deterministik modellere göre çok daha zordur. Stokastik bir modelin optimal çözümü analitik yollarla bulunamıyorsa; optimal çözüm, hem model girdilerinin (durum değişkenleri, sistem parametreleri vs.) belirlenmesinde, hem de optimal sonucun aranmasında belli bir olasılık dağılımına uygun rastgele sayılar üreten Monte Carlo benzetimi kullanılarak elde edilebilir (Mun, 2006).

Optimal saklama payının belirlenmesi gibi risk analizlerinde kullanılan deterministik modeller günümüzde etkinliğini kaybetmekte, gerçek karar verme süreçlerindeki karmaşıklığı açıklayamamaktadır. Bunun yerine rastlantıya bağlı olayların ortaya çıkma durumunu içeren stokastik modeller tercih edilmelidir. Ancak stokastik modellerin optimal çözümünün analitik olarak bulunması çok basitleştirici varsayımlarla yapıldığında bile çoğu zaman mümkün değildir (Tan et al., 2009). Bu çalışmanın uygulama bölümünde optimal saklama payı belirleme stokastik modelinin çözümü, hem model girdilerinin hem de optimal sonucun aranmasında belli bir olasılık dağılımına uygun rastgele sayılar üreten Monte Carlo tekniğini kullanan ModelRisk 3.0 programı yardımıyla elde edilecektir.

## 6. UYGULAMA

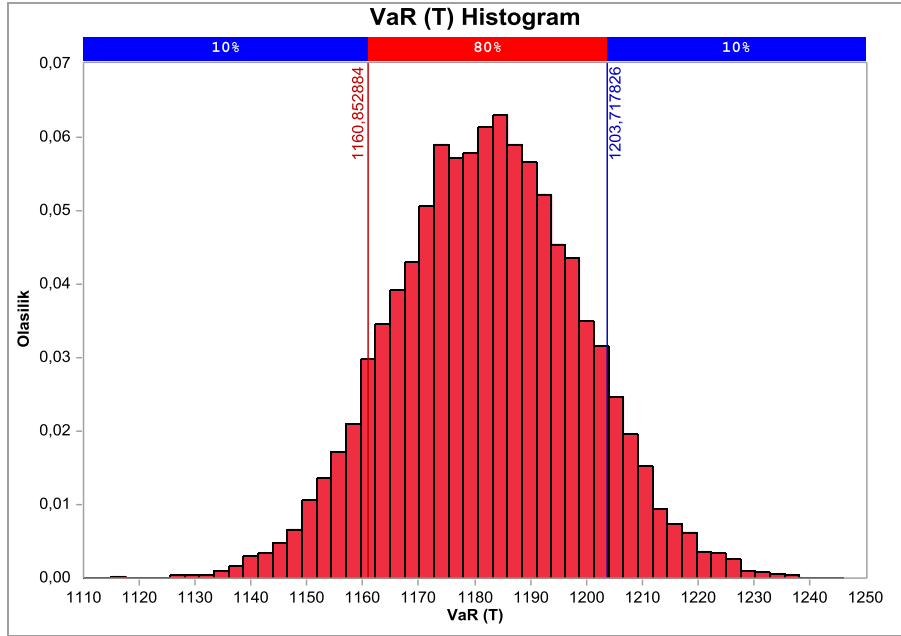
Çalışmanın bu bölümünde toplam hasar fazlası reasürans yöntemi kullanarak sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme (saklama payına kadar hasar ödemesi ve reasürans prim ödemesi) için VaR ölçümünü minimize eden stokastik model oluşturulmuş ve optimal saklama payı uygulaması yapılmıştır. Toplam hasar dağılımı için üretilen rastgele değerler ile optimal çözümün stokastik olarak aranmasında ModelRisk 3.0 programının deneme sürümünden yararlanılmıştır.

Bu çalışmada sigortacının optimal saklama payı seviyesi; hasar dağılımı, reasürör güvenlik yükleme katsayısı, reasürans prim ilkeleri açılarından ele alınmıştır. Sigortacının toplam hasar dağılımı için pareto ve üstel dağılımlar incelenmiştir. Reasürans prim ilkelerinden beklenen, varyans, standart sapma ve ortalama değer için de ayrı senaryolar oluşturulmuştur. Ayrıca ortalama değer dışındaki prim ilkeleri için reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho$  ve  $2\rho$  oranlarında ayrı senaryolar gerçekleştirilmiştir. Toplamda oluşturulan 14 senaryo için sigortacının optimal saklama payı seviyeleri VaR ölçümü için  $(1 - \alpha) = 0,90$  güven aralığında hesaplanmıştır.

Kullanılan programda her bir senaryo için belirlenen optimal saklama payı seviyelerinin makul bir bilgisayar çalışma süresinde elde edilebilmesi ve tutarlı olabilmesi için 100 örnekli (sample) 5000 sonuç (solution) elde edilmiştir. Tutarlılığı sağlamak için aynı zamanda her bir senaryo için elde edilen en iyi 10 sonucun ortalaması optimal saklama payı olarak belirlenmiştir.

### Senaryo 1.

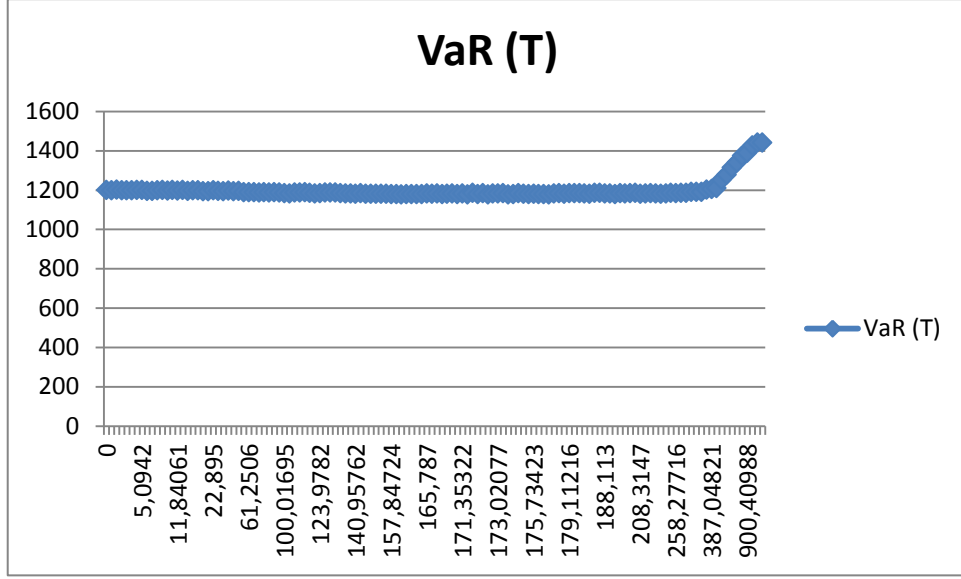
Beklenen prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $p = 0,2$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.1. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi ve  $p=0,2$

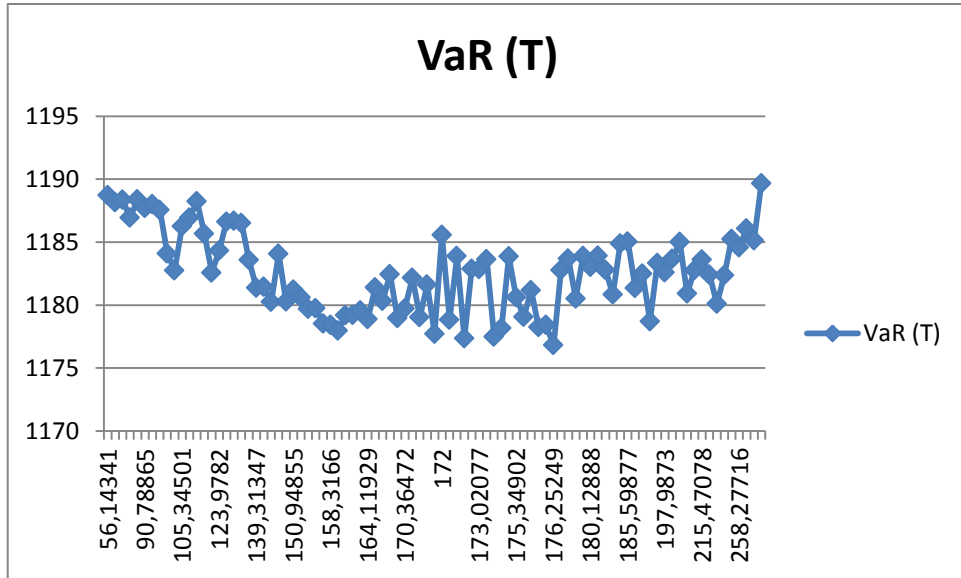
sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.1.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1182,30778, varyansı ise 279,7974274'tür.

Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 174,92$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1176,83$ 'tür.



Şekil 6.2. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi,  $p=0,2$  için Optimal saklama payı (0,1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 174,92$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1176,83$  hasar ödemesine maruz kalacaktır. Şekil 6.2.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



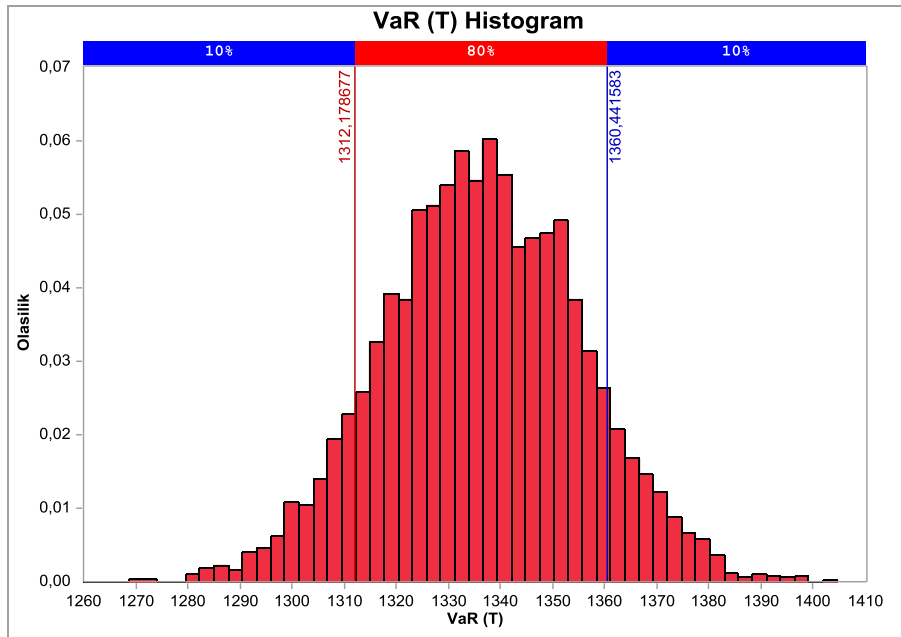
Şekil 6.3. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi,  $p=0,2$  için optimal saklama payı (56, 270)

Şekil 6.3’de saklama payının (56, 270) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.3.’te optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 174,92$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.2. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 387,05$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 387,05$  için  $VaR_T = 1204,83$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.2.’de  $d$ ’nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 174,92$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 387$  olarak belirleyebilir.

## **Senaryo 2.**

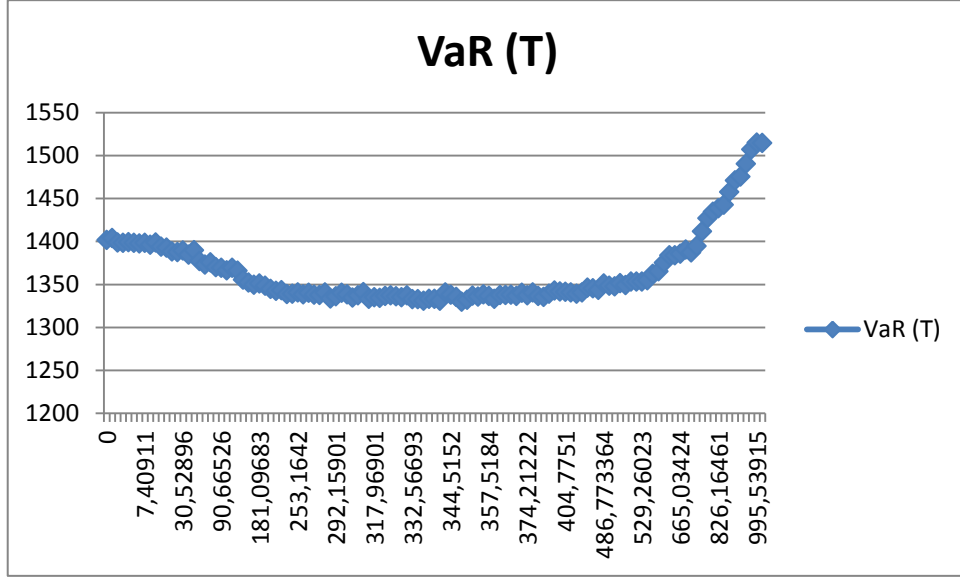
Beklenen prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,4$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.4. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi ve  $\rho=0,4$

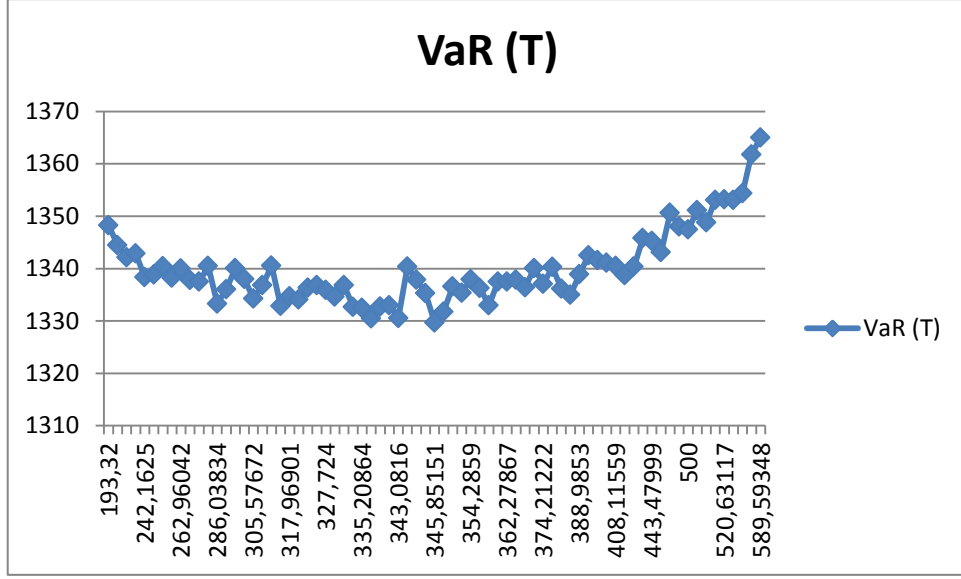
sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ ’nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.4.’de verilmiştir.  $VaR_T$ ’nin ortalaması 1336,448002, varyansı ise 356,8395024’tür.

Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 344,52$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1329,71$ 'dir.



Şekil 6.5. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi,  $\rho=0,4$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 344,52$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1329,71$  hasar ödemesine maruz kalacaktır. Şekil 6.5'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



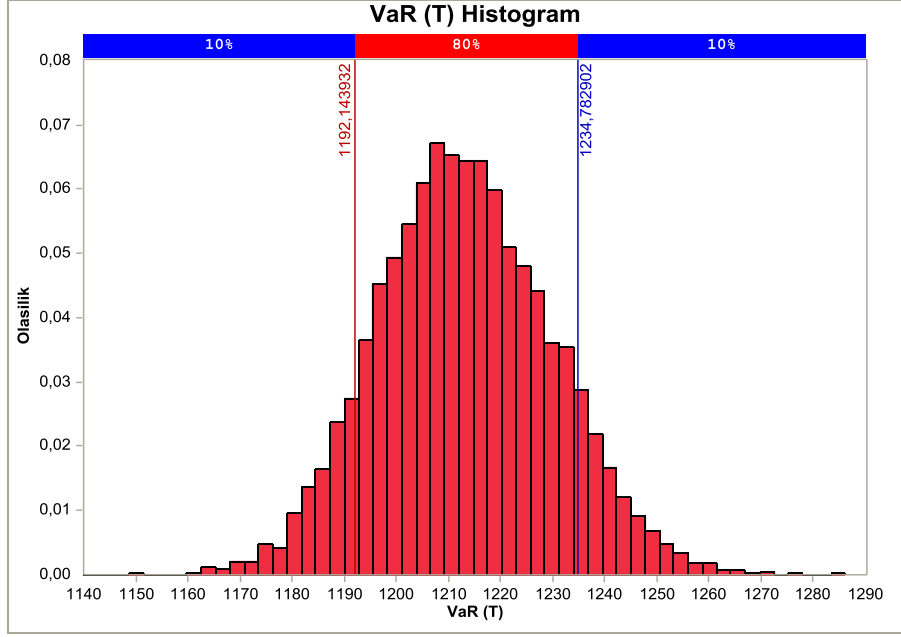
Şekil 6.6. Üstel dağılım, beklenen prim ilkesi,  $\rho=0,4$  için optimal saklama payı (193, 590)

Şekil 6.6'da saklama payının (193, 590) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.6.'da optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 344,52$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.5. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 510,75$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 510,75$  için  $VaR_T = 1348,78$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.5.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 344,52$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 510$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 3.**

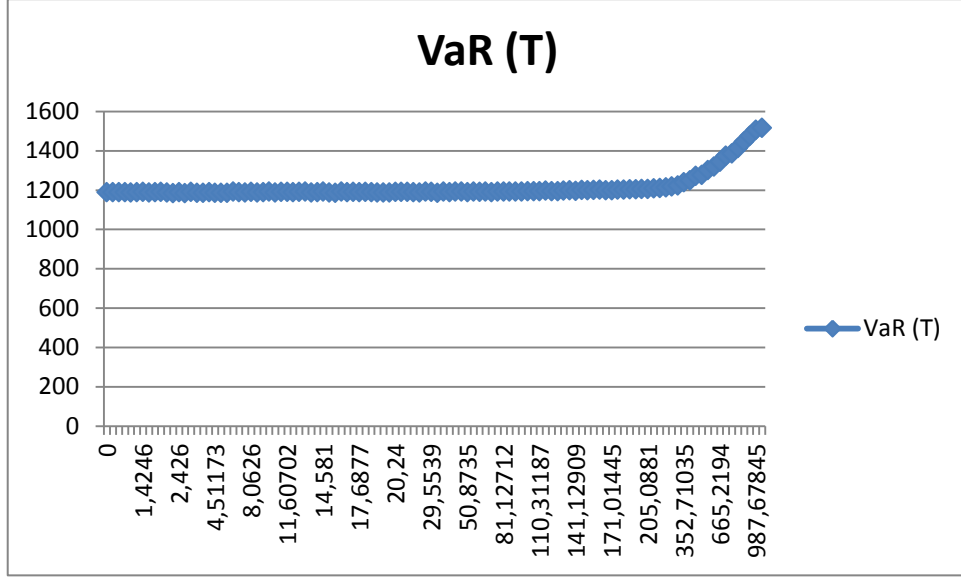
Standart sapma prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,189$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.7. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi ve  $p=0,189$

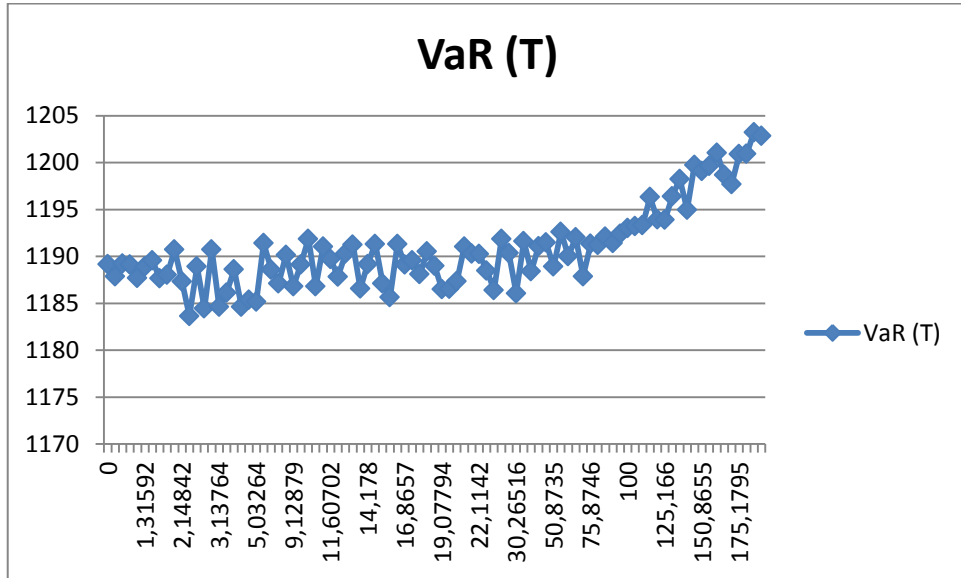
sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 4.7.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1213,066897, varyansı ise 277,210593'tür.

Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 12,17$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1183,66$ 'dır.



Şekil 6.8. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,189$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 12,17$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1183,66$  hasar ödemesine maruz kalacaktır. Şekil 6.8'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



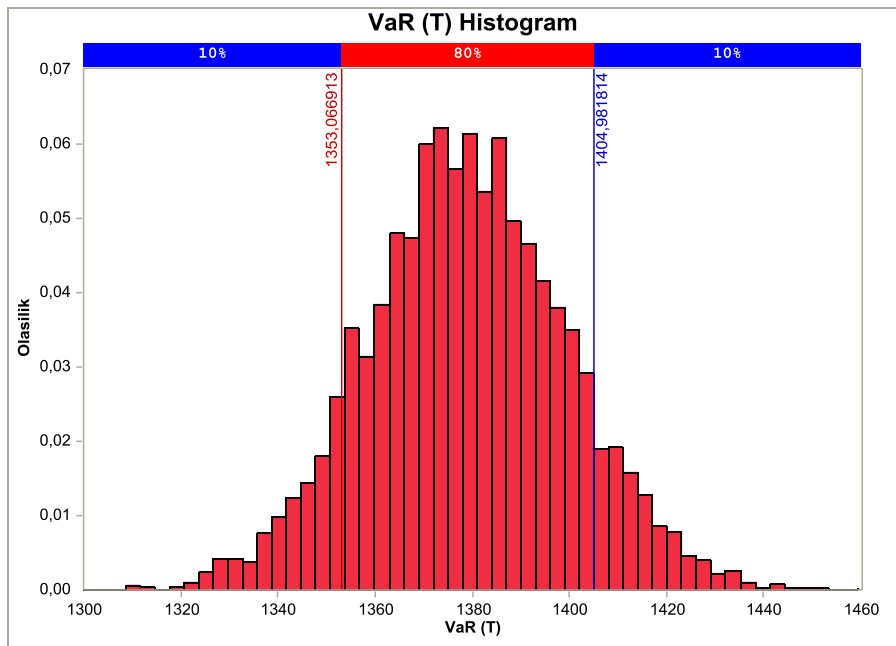
Şekil 6.9. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,189$  için optimal saklama payı (0, 190)

Şekil 6.9'da saklama payının (0, 190) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.8. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 205,09$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 205,09$  için  $VaR_T = 1204,36$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.8.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 12,17$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 205$  olarak belirleyebilir.

#### Senaryo 4.

Standart sapma prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,378$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,

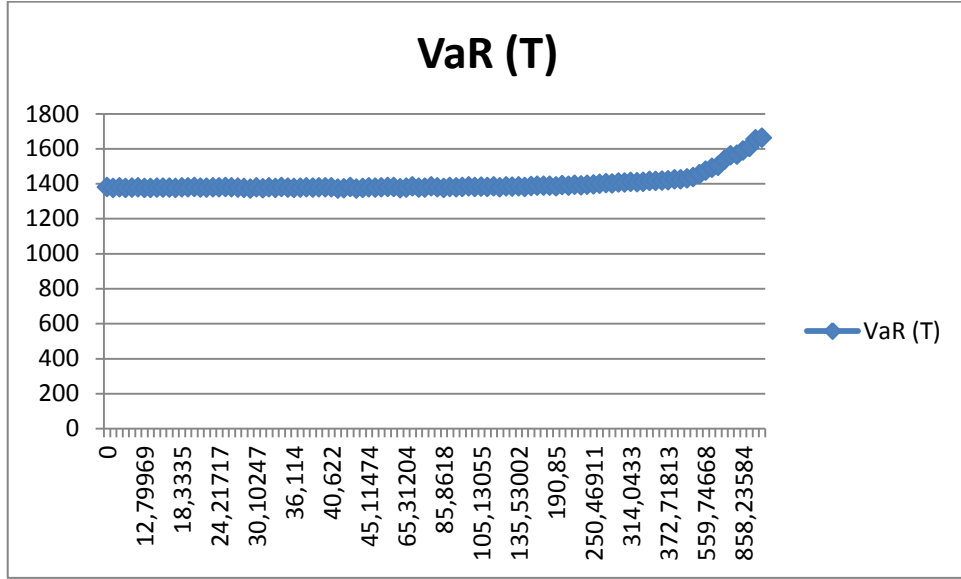


Şekil 6.10. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi ve  $\rho=0,378$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.10'da verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1378,972548, varyansı ise 417,090955'tir.

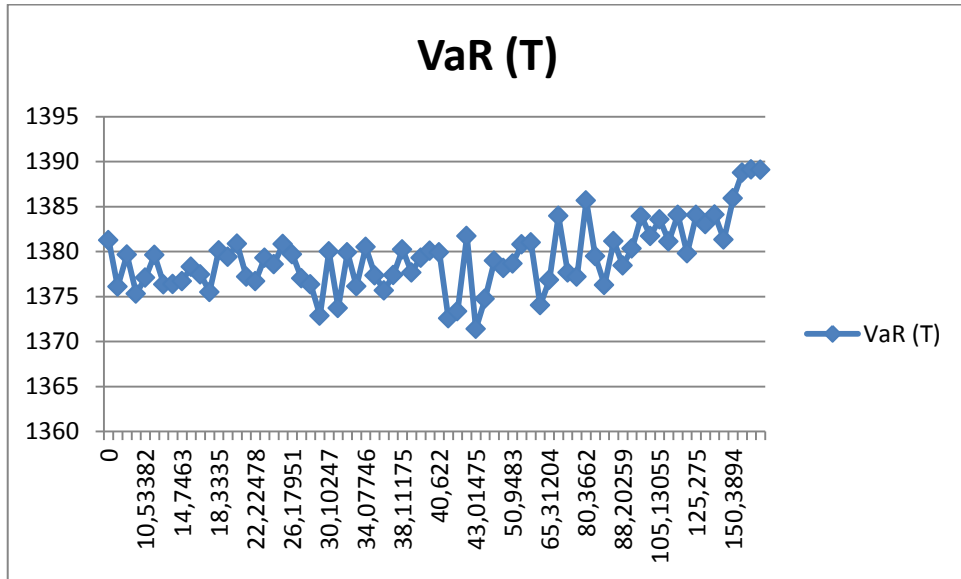
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 42,93$  olarak

bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1372,38$ 'dir.



Şekil 6.11. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,378$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 42,93$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1372,38$  hasar ödemesine maruz kalacaktır. Şekil 6.11.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



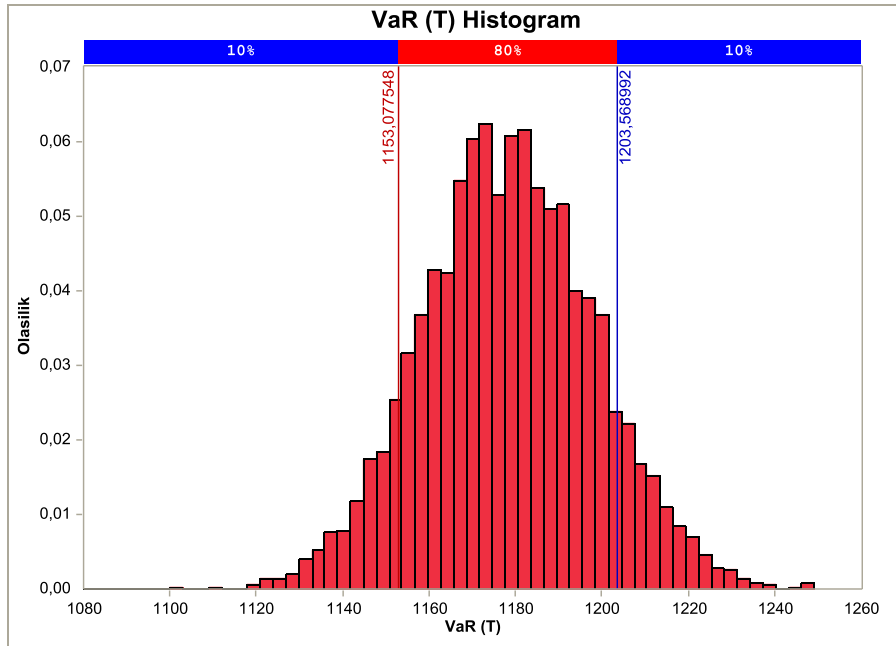
Şekil 6.12. Üstel dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,378$  için optimal saklama payı (0, 182)

Şekil 6.12.'de saklama payının (0, 182) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.12.'de optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 42,93$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.11. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 250,47$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 250,47$  için  $VaR_T = 1395,54$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.11.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 42,93$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 250$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 5.**

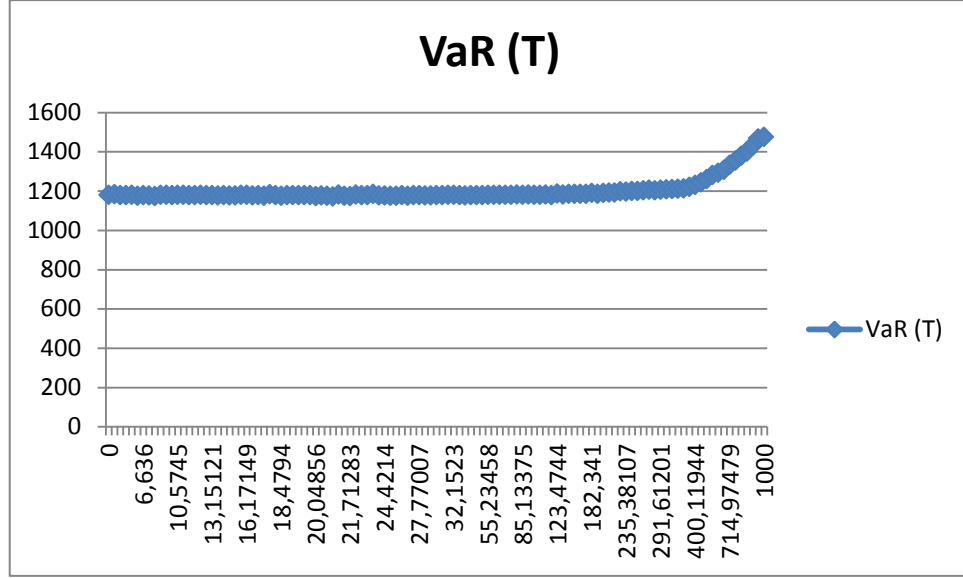
Varyans prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,000178$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.13. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi ve  $\rho=0,000178$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.13'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1178,360689, varyansı ise 388,371430'dur.

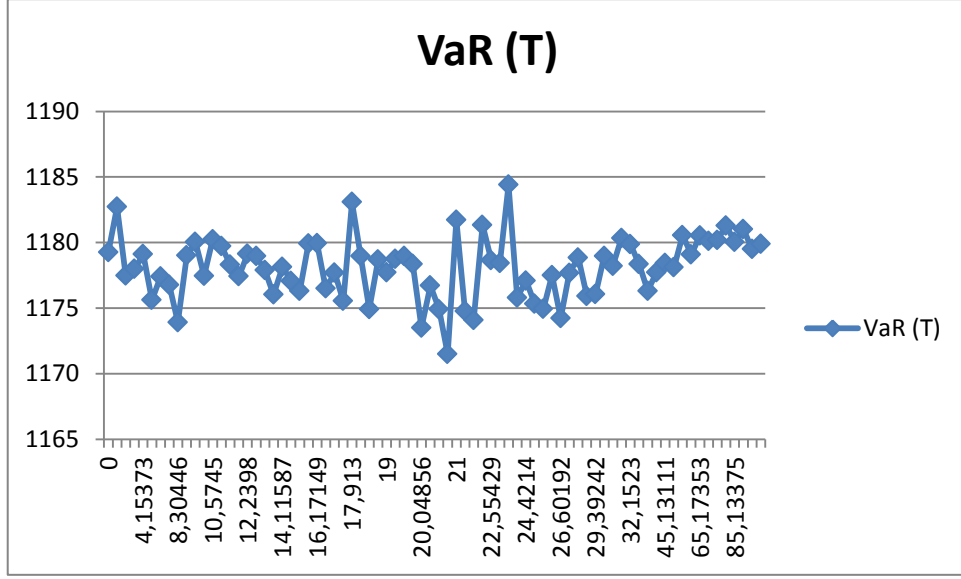
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 22,48$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1172,14$ 'tür.



Şekil 6.14. Üstel, varyans,  $\rho=0,000178$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 22,48$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1172,14$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.14.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



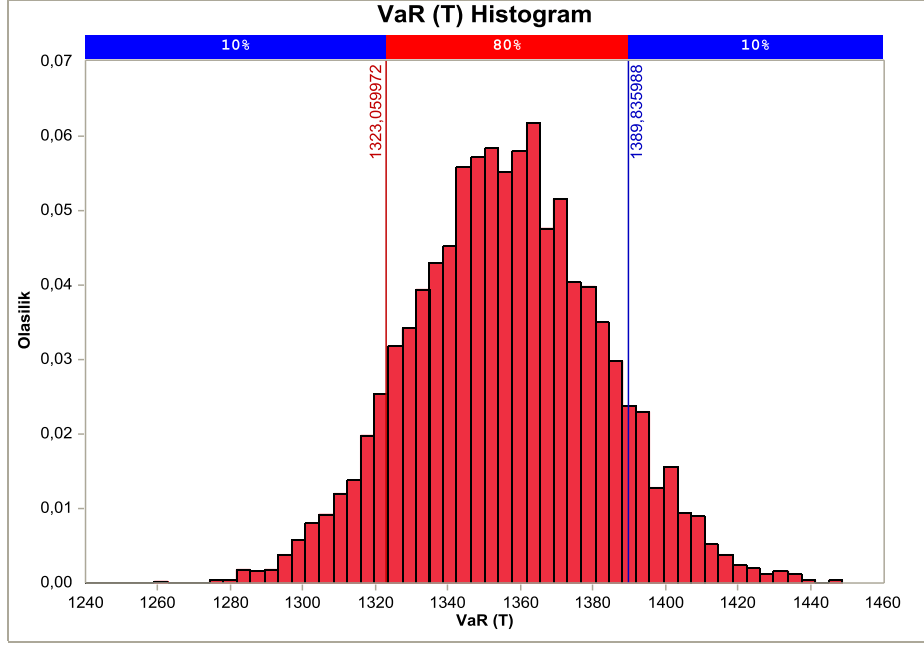
Şekil 6.15. Üstel, varyans,  $\rho=0,000178$  için optimal saklama payı (0, 100)

Şekil 6.15.'de saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.15.'de optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 22,48$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.14. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 245,82$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 245,82$  için  $VaR_T = 1199,79$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.14.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 22,48$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 245$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 6.**

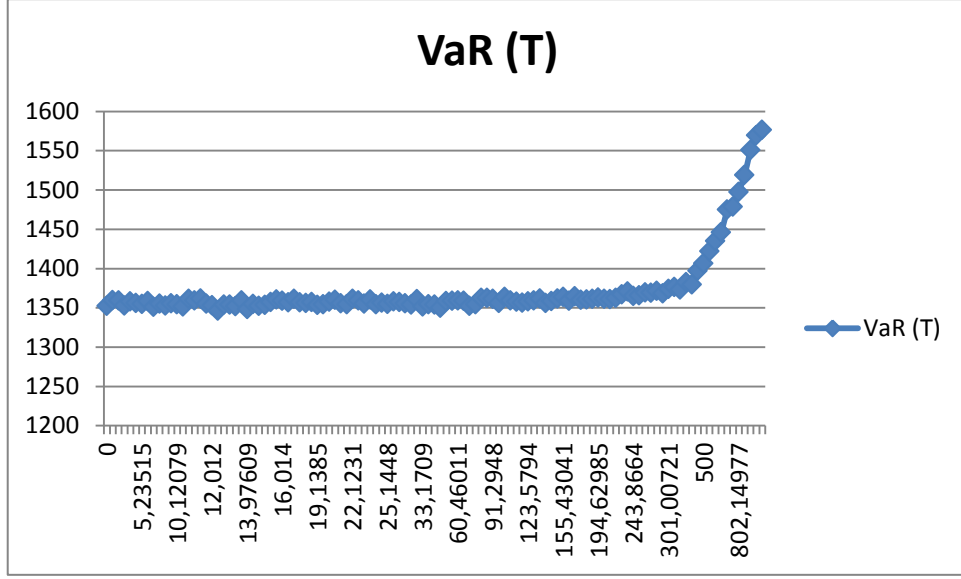
Varyans prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,000356$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.16. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi ve  $p=0,000356$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.13'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1356,212352, varyansı ise 677,7351368'dir.

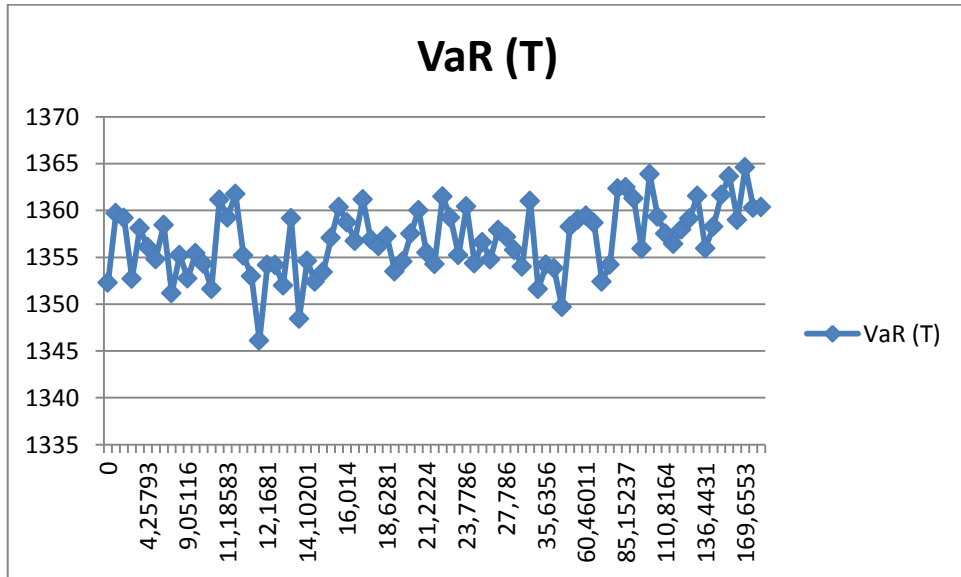
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 31,13$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1348,48$ 'dir.



Şekil 6.17. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,000356$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 31,13$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1348,48$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.17.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



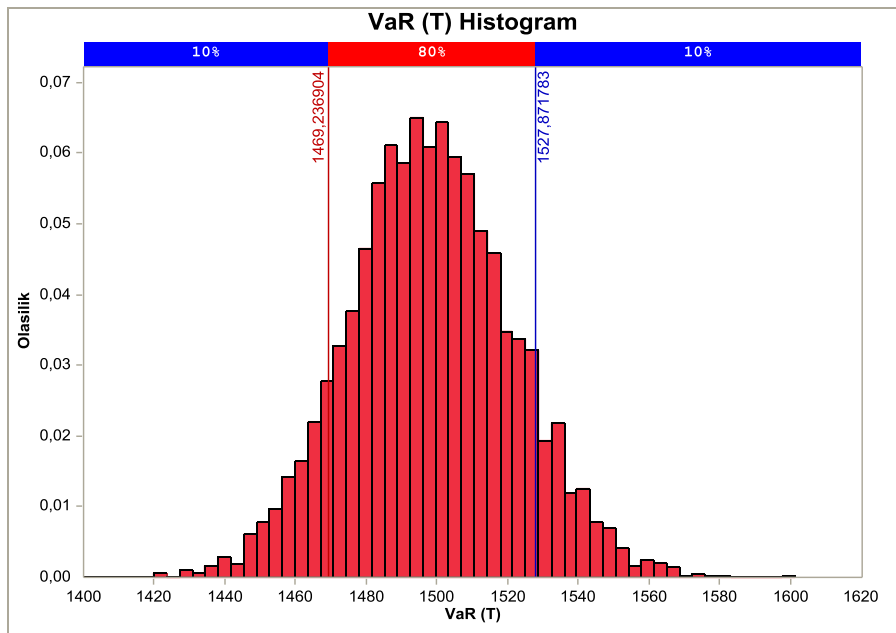
Şekil 6.18. Üstel dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,000356$  için optimal saklama payı (0, 178)

Şekil 6.18.'de saklama payının (0, 178) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.17. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 243,87$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 243,87$  için  $VaR_T = 1364,94$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.17.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 31,13$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 243$  olarak belirleyebilir.

### Senaryo 7.

Ortalama değer prim ilkesi altında, sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile üstel dağıldığı varsayıldığında,

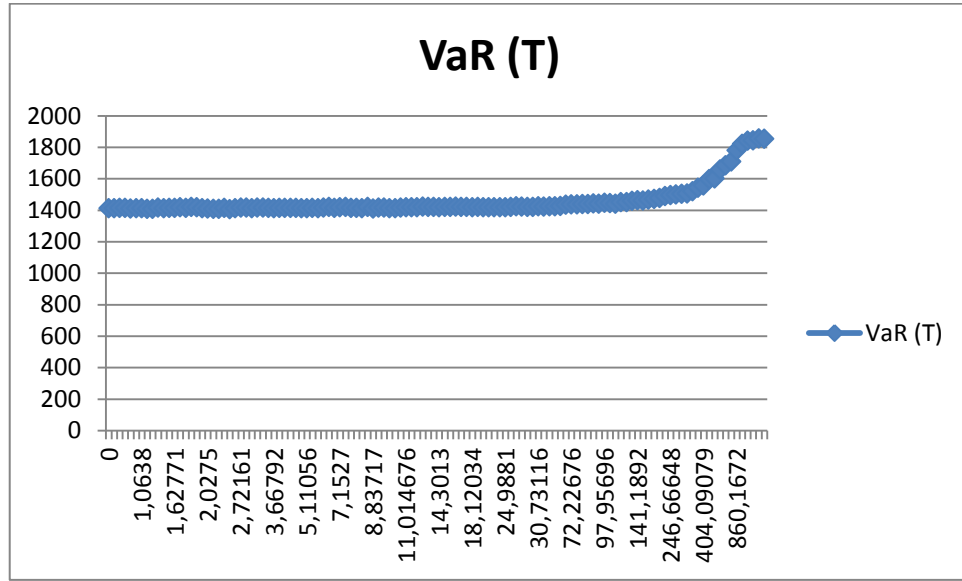


Şekil 6.19. Üstel dağılım, ortalama değer prim ilkesi

Sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.19'da verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1498,316731, varyansı ise 529,6101822'dir.

Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 2$  olarak

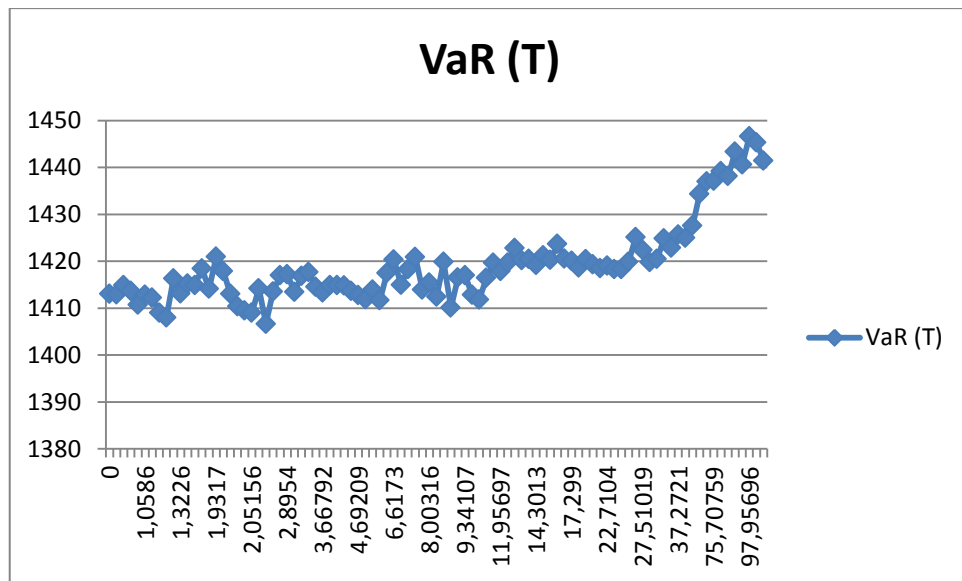
bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1406,63$ 'tür.



Şekil 6.20. Üstel dağılım, ortalama değer için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 2$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1406,63$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.20.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



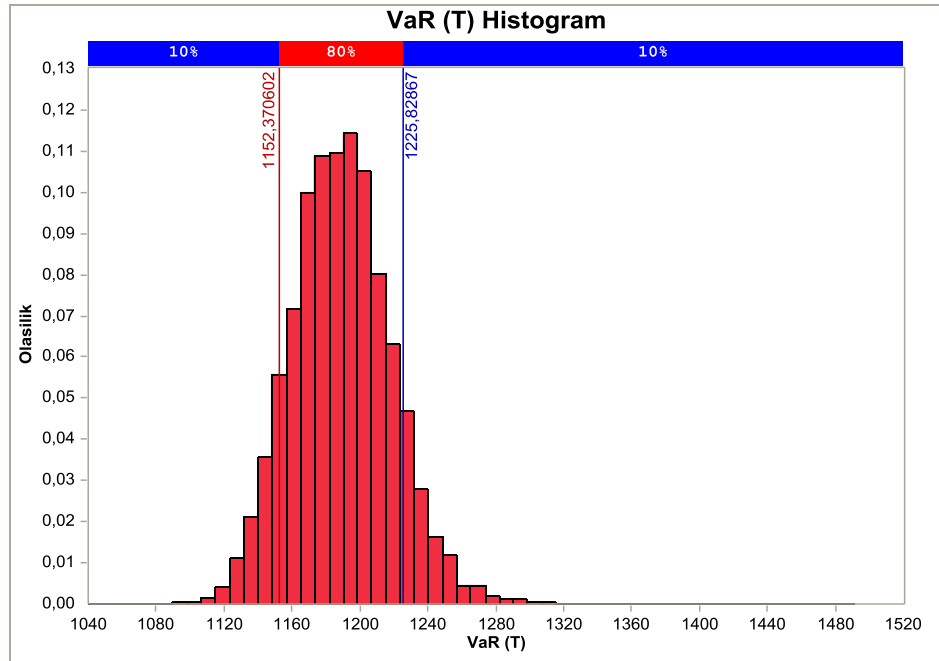
Şekil 6.21. Üstel dağılım, ortalama değer için optimal saklama payı (0, 100)

Şekil 6.21.'de saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.21.'de optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 2$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.20. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 98,27$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 98,27$  için  $VaR_T = 1445,3$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.20.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 2$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 98$  olarak belirleyebilir.

### Senaryo 8.

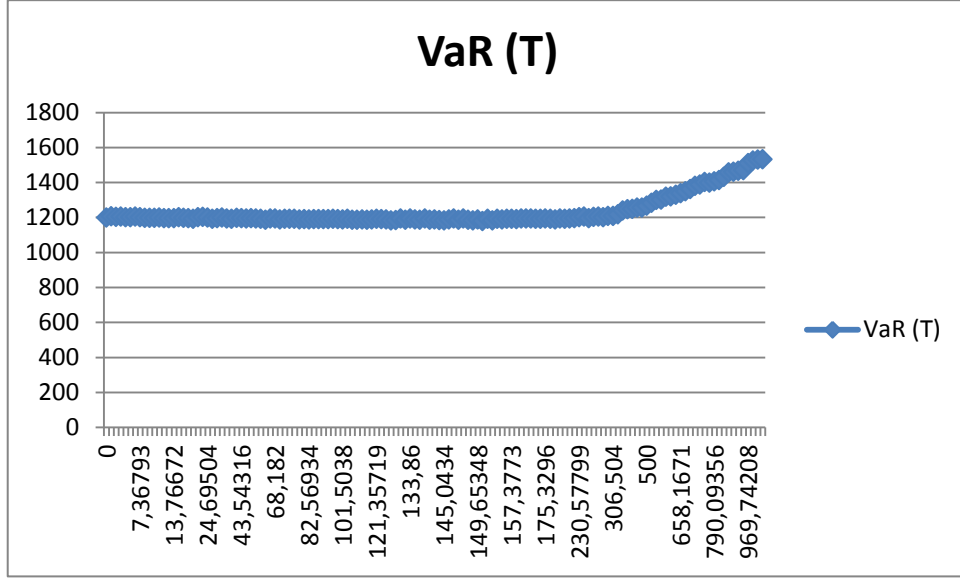
Beklenen prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,2$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.22. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi ve  $\rho=0,2$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.22.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1188,98549, varyansı ise 851,7999826'dır.

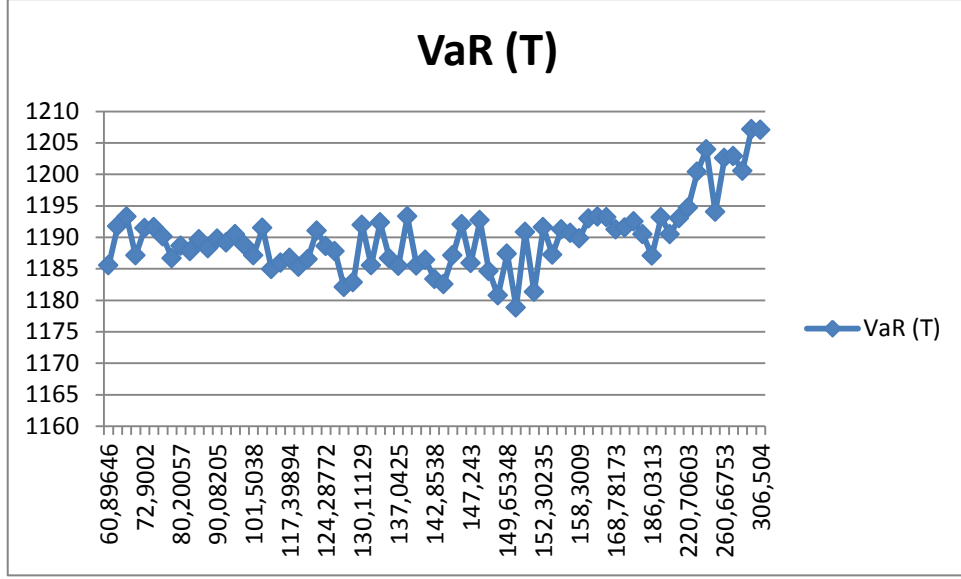
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 126,64$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1178,86$ 'dır.



Şekil 6.23. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi,  $p=0,2$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 126,64$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1178,86$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.23.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



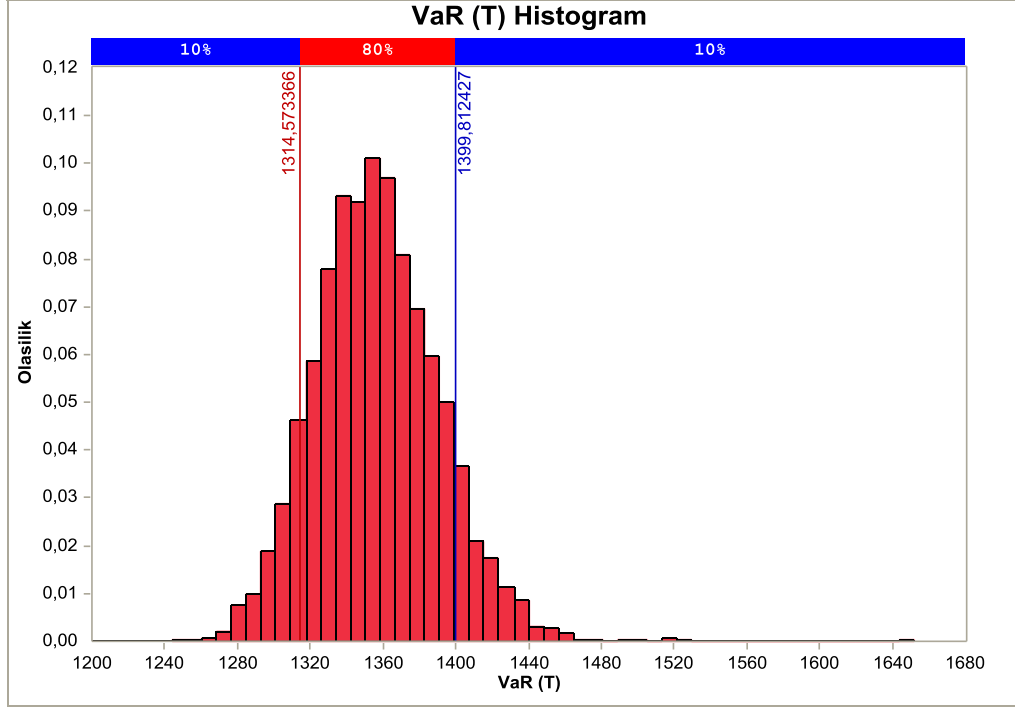
Şekil 6.24. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi,  $\rho=0,2$  için optimal saklama payı (60, 306)

Şekil 6.24.'de saklama payının (60, 306) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.23. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 290,77$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 290,77$  için  $VaR_T = 1207,15$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.23.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 126,64$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 290$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 9.**

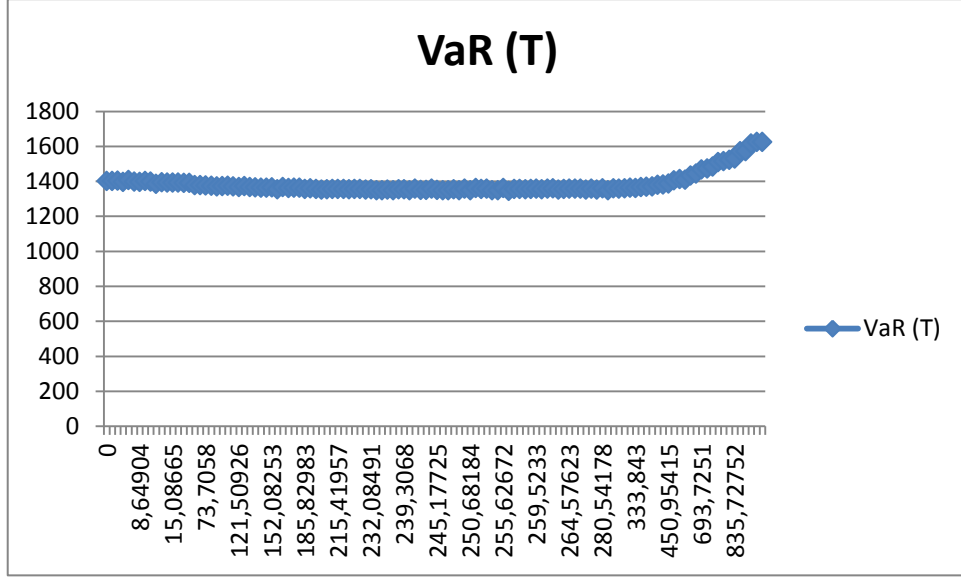
Beklenen prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,4$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.25. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi ve  $\rho=0,4$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.22.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1356,728222, varyansı ise 1145,227885'tir.

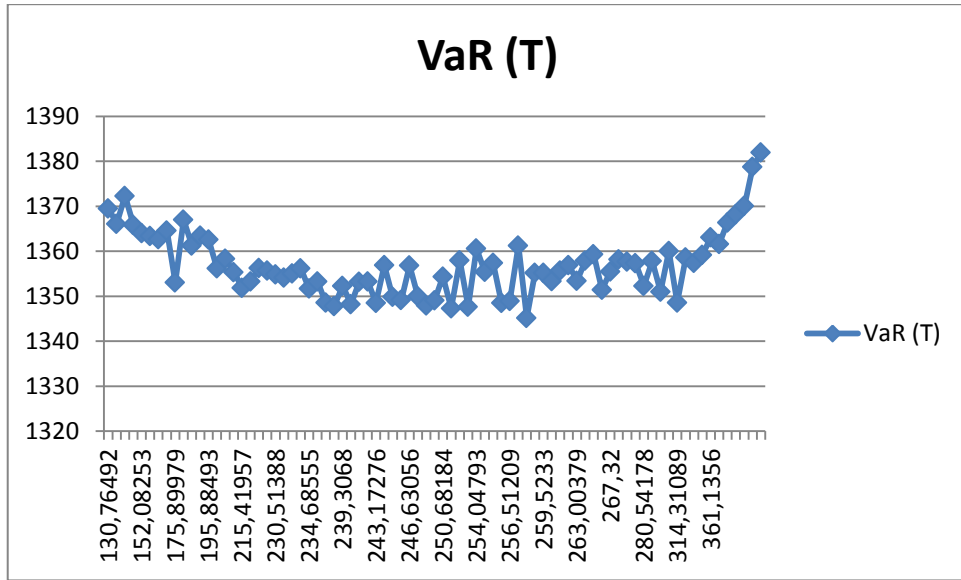
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 256,63$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1345,17$ 'dir.



Şekil 6.26. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi,  $p=0,4$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 256,63$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1345,17$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.26.'da saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



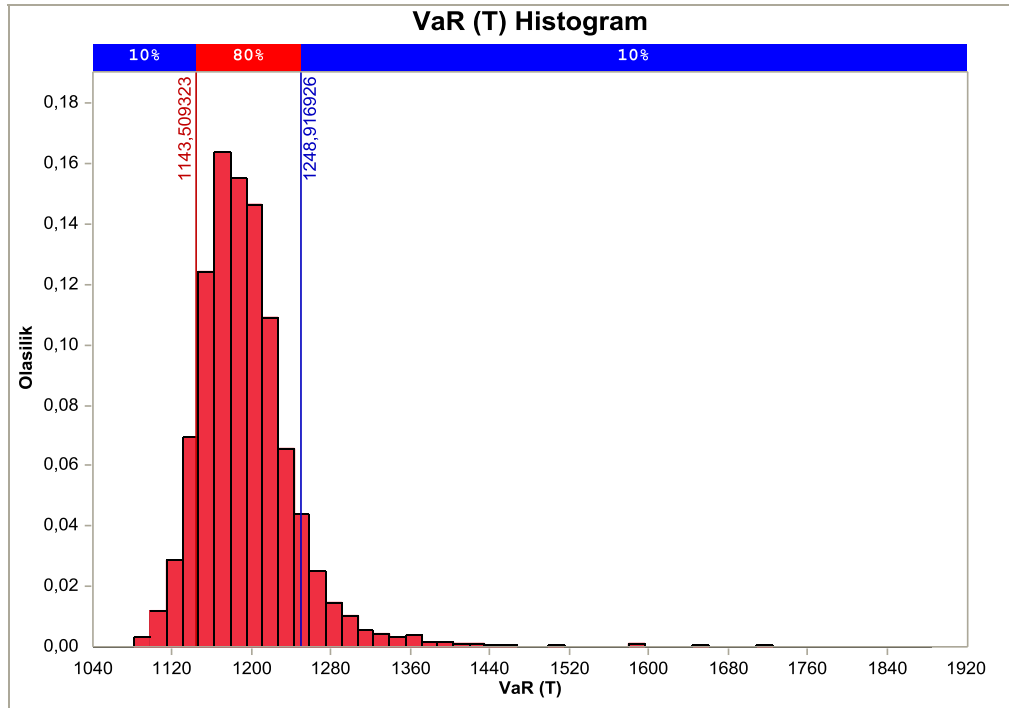
Şekil 6.27. Pareto dağılım, beklenen prim ilkesi,  $p=0,4$  için optimal saklama payı (100, 435)

Şekil 6.27.'de saklama payının (100, 435) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.27.'de optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 256,63$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.26. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 361,13$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 361,13$  için  $VaR_T = 1368,24$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.26.'da  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 256,63$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 361$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 10.**

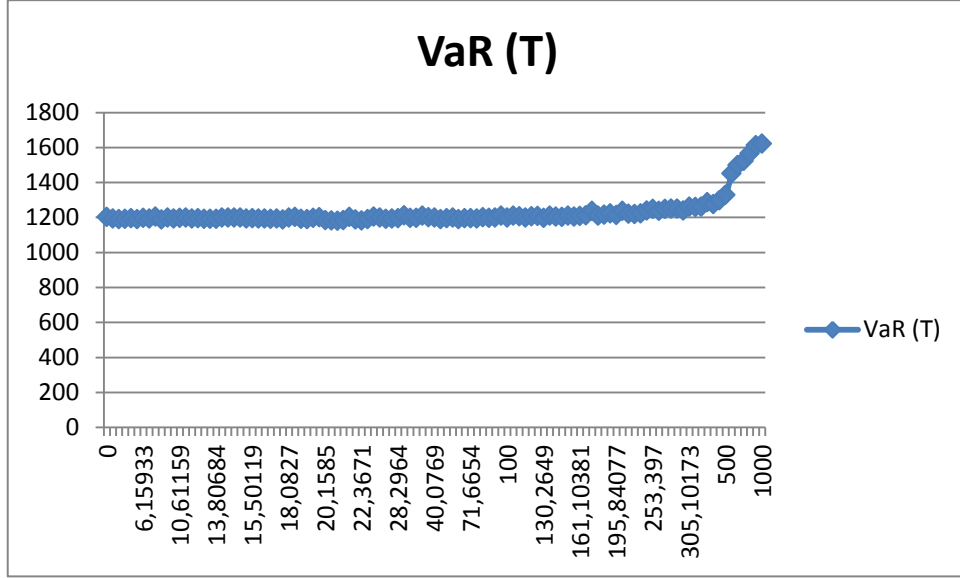
Standart sapma prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,115$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.28. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi ve  $\rho=0,115$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.28.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1195,337787, varyansı ise 2909,371734'tür.

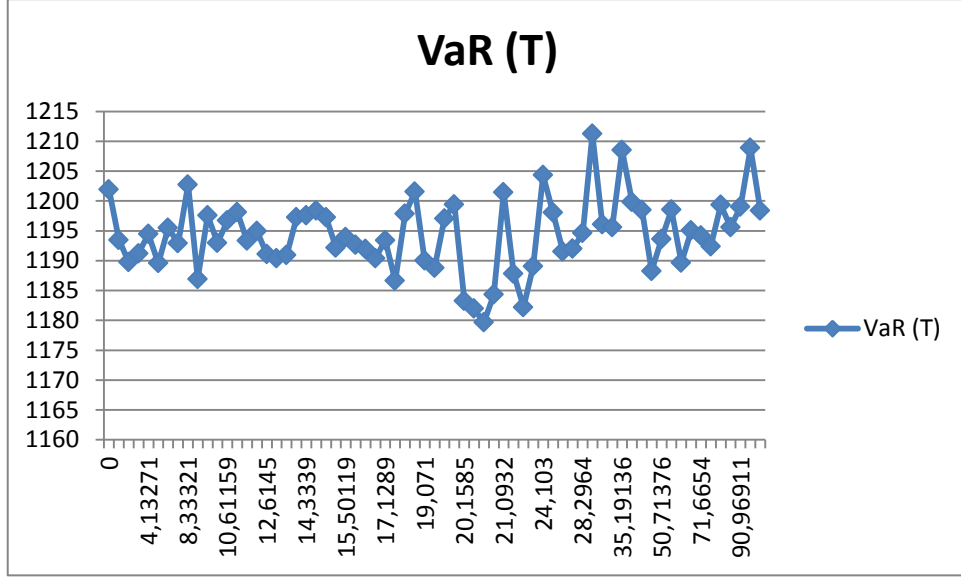
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 19,64$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1179,65$ 'tir.



Şekil 6.29. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,115$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 19,64$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1179,65$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.29.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



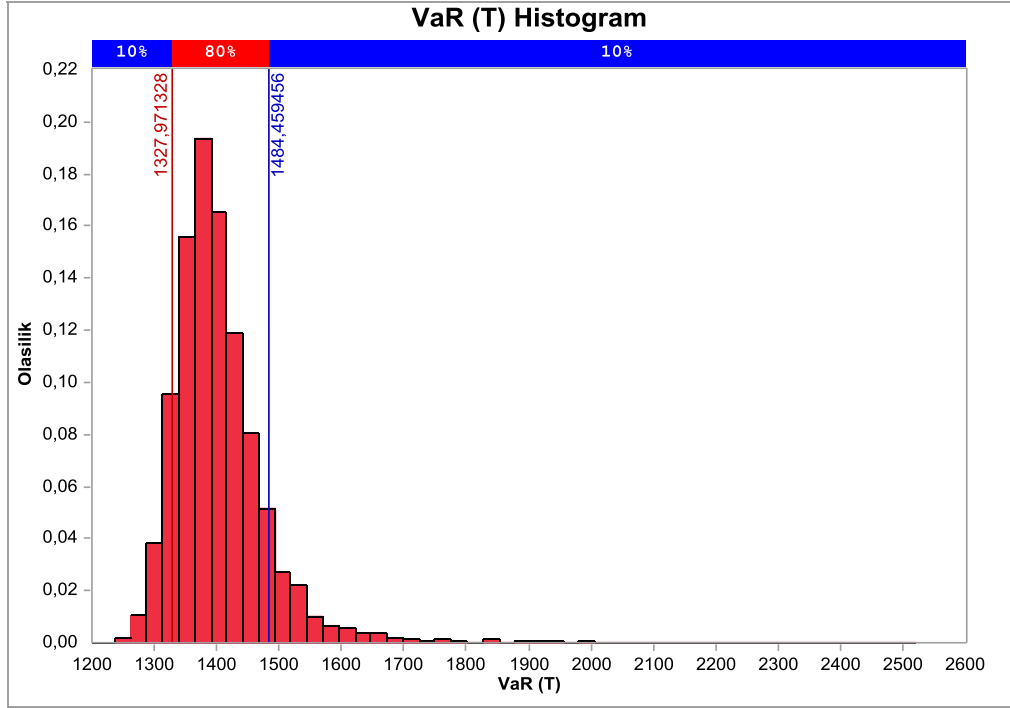
Şekil 6.30. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $p=0,115$  için optimal saklama payı (0, 100)

Şekil 6.30.'da saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.29. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 195,84$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 195,84$  için  $VaR_T = 1213,52$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.29.'da  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 19,64$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 195$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 11.**

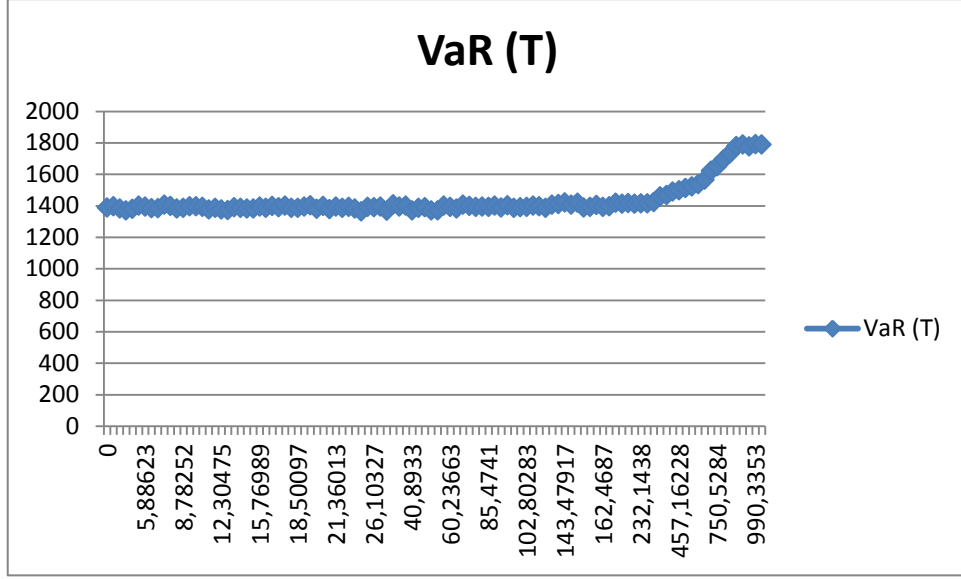
Standart sapma prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $p = 0,23$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.31. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi ve  $p=0,23$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.28.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1403,353507, varyansı ise 6135,46827'dir.

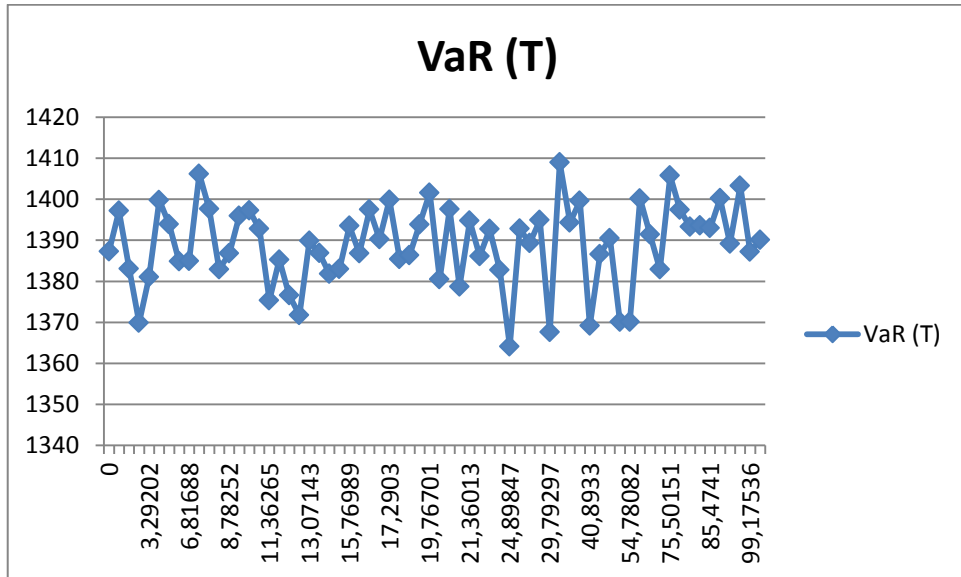
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 29,42$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1364,09$ 'dur.



Şekil 6.32. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $\rho=0,23$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 29,42$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1364,09$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.32.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



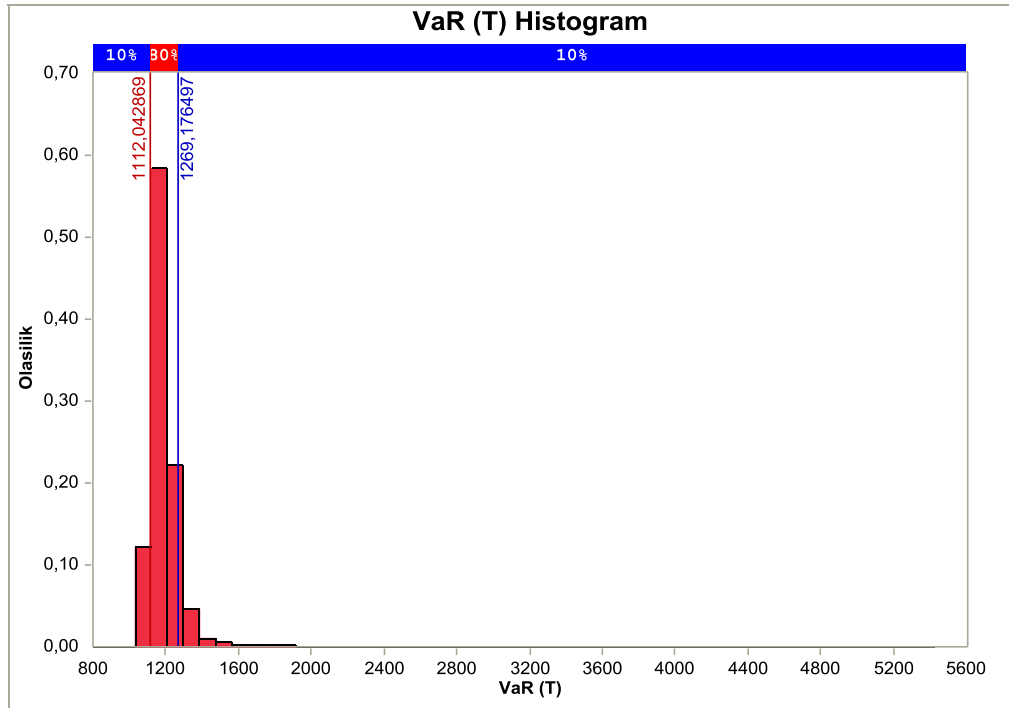
Şekil 6.33. Pareto dağılım, standart sapma prim ilkesi,  $\rho=0,23$  için optimal saklama payı (0, 100)

Şekil 6.33.'de saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir. Şekil 6.33.'de optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 29,42$  için  $VaR_T$  değerinin en küçük olduğu yaklaşık olarak görülmektedir.

Şekil 6.32. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 162,47$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 162,47$  için  $VaR_T = 1391,27$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.32.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 29,42$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 162$  olarak belirleyebilir.

### Senaryo 12.

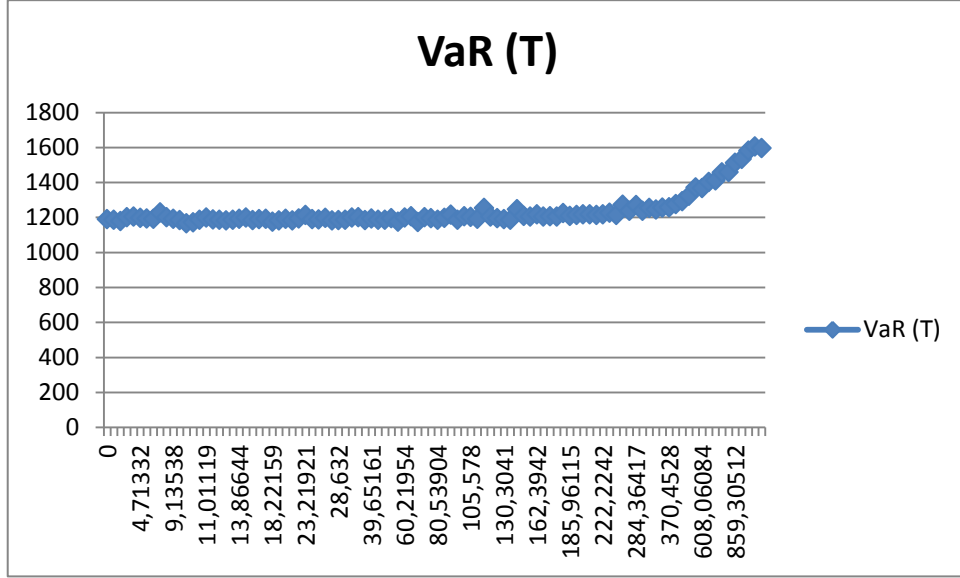
Varyans prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $\rho = 0,000065$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.34. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi ve  $\rho=0,000065$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.34.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1194,0018678, varyansı ise 19594,671591'dir.

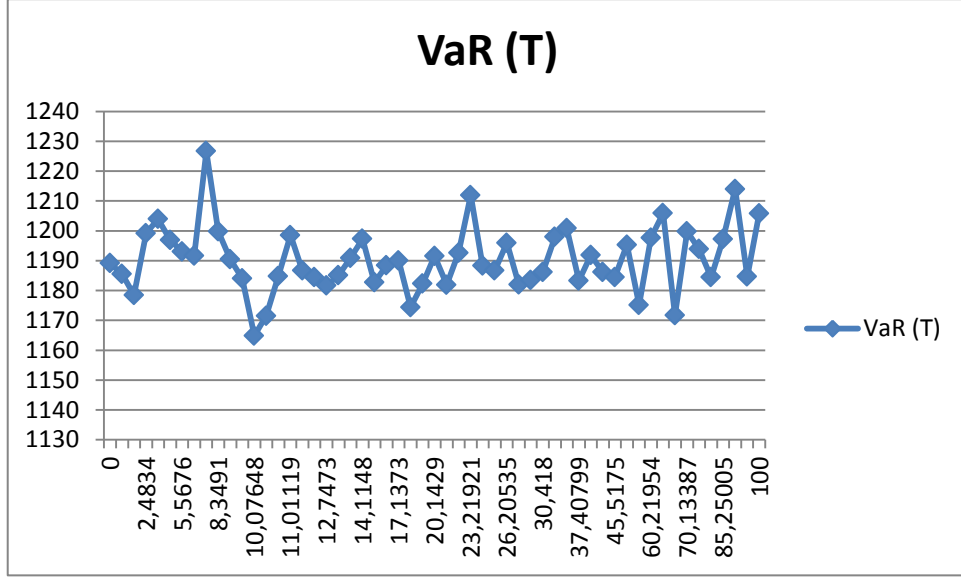
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 21,44$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1164,88$ 'dir.



Şekil 6.35. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,000065$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 21,44$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1164,88$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.35.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



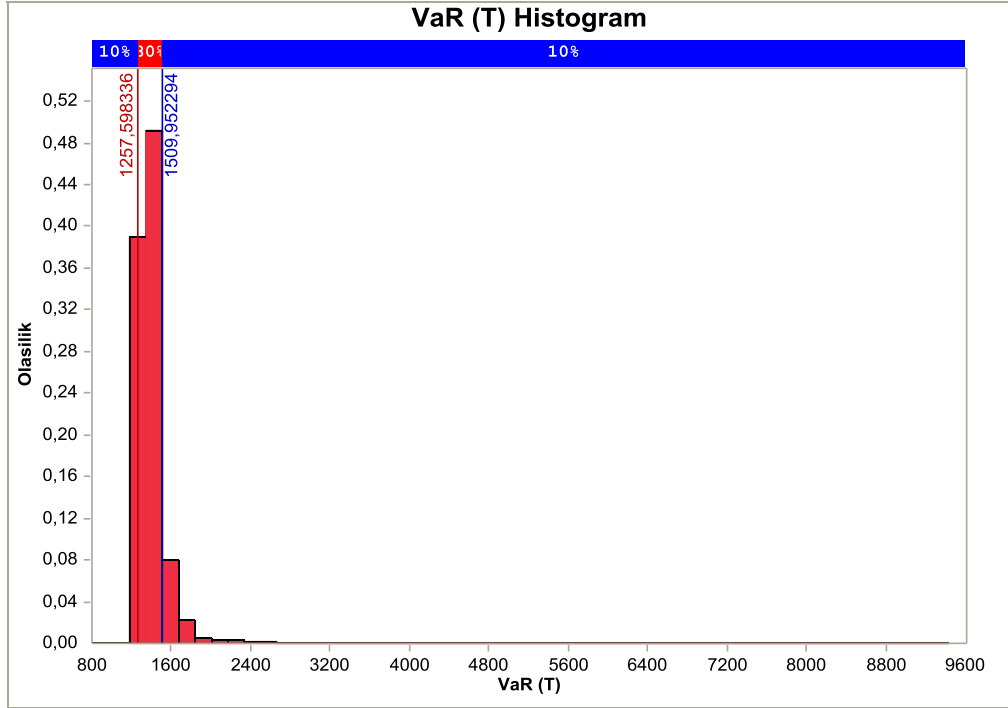
Şekil 6.36. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,000065$  için optimal saklama payı (0, 100)

Şekil 6.36.'da saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.35. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 130,30$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 130,30$  için  $VaR_T = 1189,32$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.35.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 21,44$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 130$  olarak belirleyebilir.

### **Senaryo 13.**

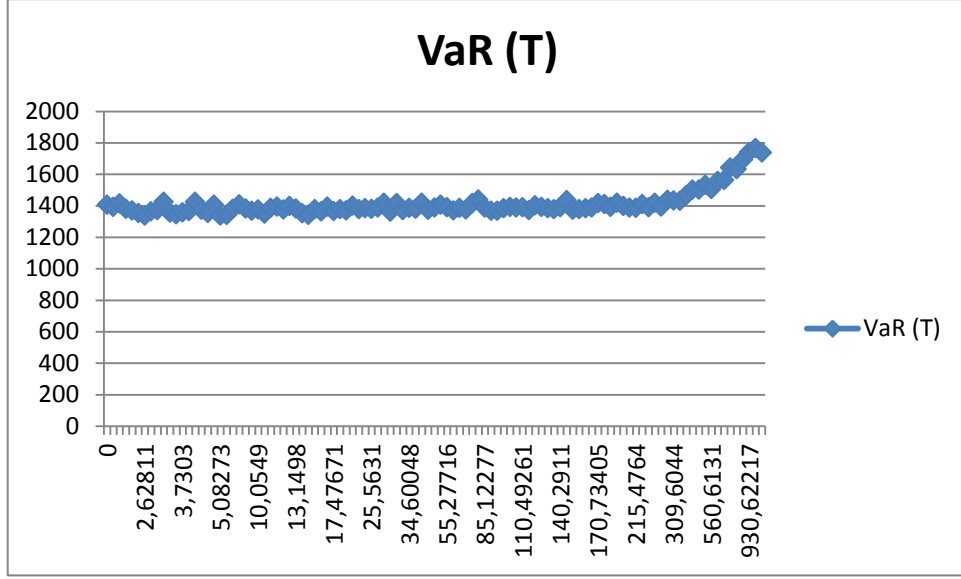
Varyans prim ilkesi altında, reasürörün güvenlik yükleme katsayısı  $p = 0,00013$  olmak üzere sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.37. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi ve  $\rho=0,00013$

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.37.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 1388,9076734, varyansı ise 42112,99360'dır.

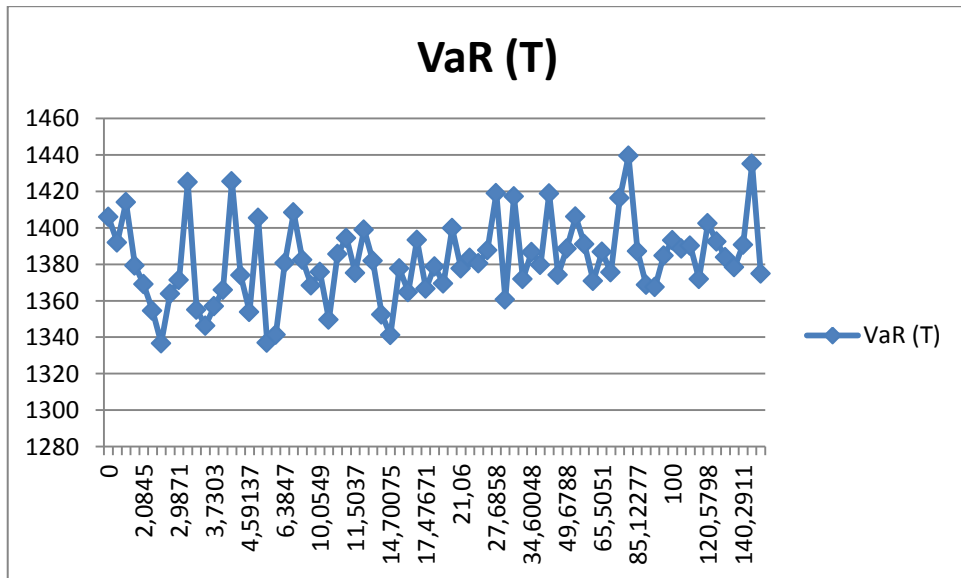
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 26,06$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1342,33$ 'tür.



Şekil 6.38. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,00013$  için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 26,06$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1342,33$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.38.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



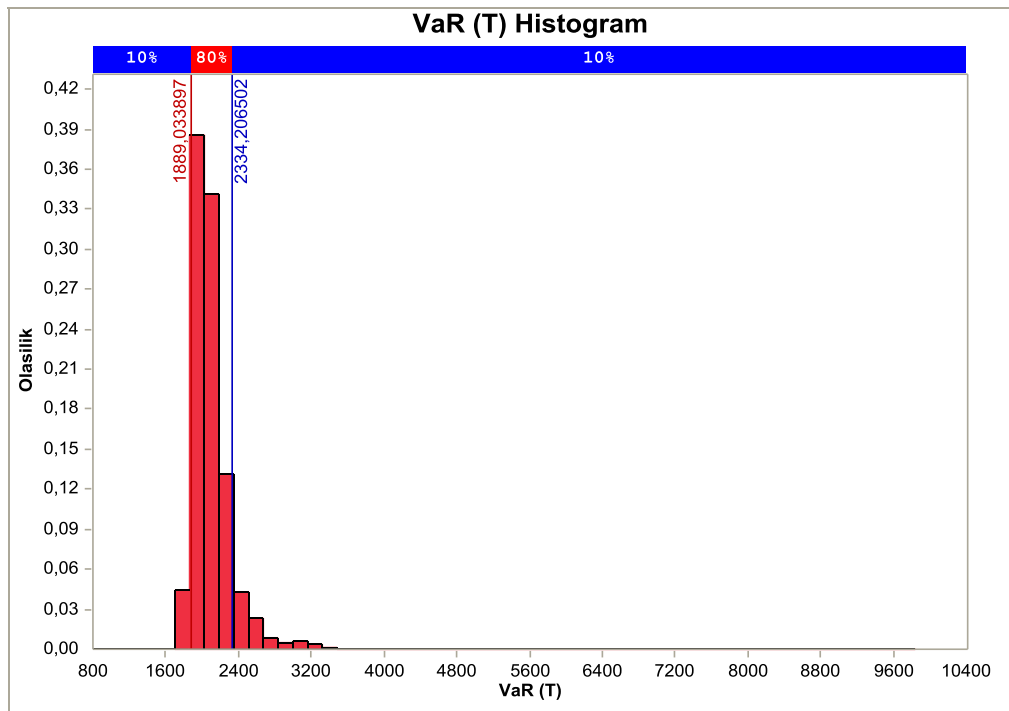
Şekil 6.39. Pareto dağılım, varyans prim ilkesi,  $p=0,00013$  için optimal saklama payı (0, 150)

Şekil 6.39.'da saklama payının (0, 100) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.38. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 215,47$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 215,47$  için  $VaR_T = 1385,94$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.38.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 26,06$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 215$  olarak belirleyebilir.

#### **Senaryo 14.**

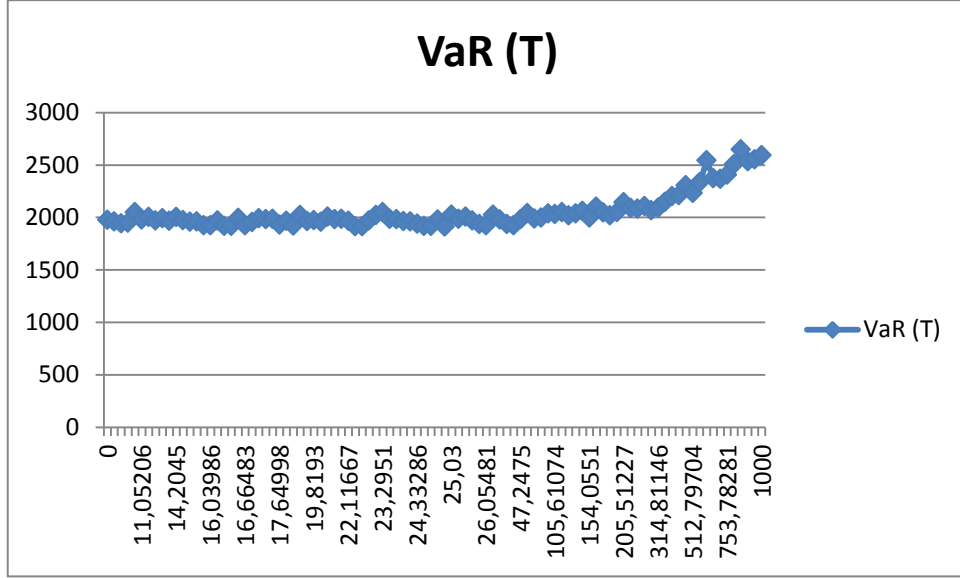
Ortalama değer prim ilkesi altında, sigortacının toplam hasarının 1000 ortalama ile pareto dağıldığı varsayıldığında,



Şekil 6.40. Pareto dağılım, ortalama değer prim ilkesi

sigortacının maruz kaldığı toplam ödeme için  $VaR_T$ 'nin 10000 tekrarlı benzetim ile elde edilen dağılımı Şekil 6.37.'de verilmiştir.  $VaR_T$ 'nin ortalaması 2106,560662, varyansı ise 90618,32852'dir.

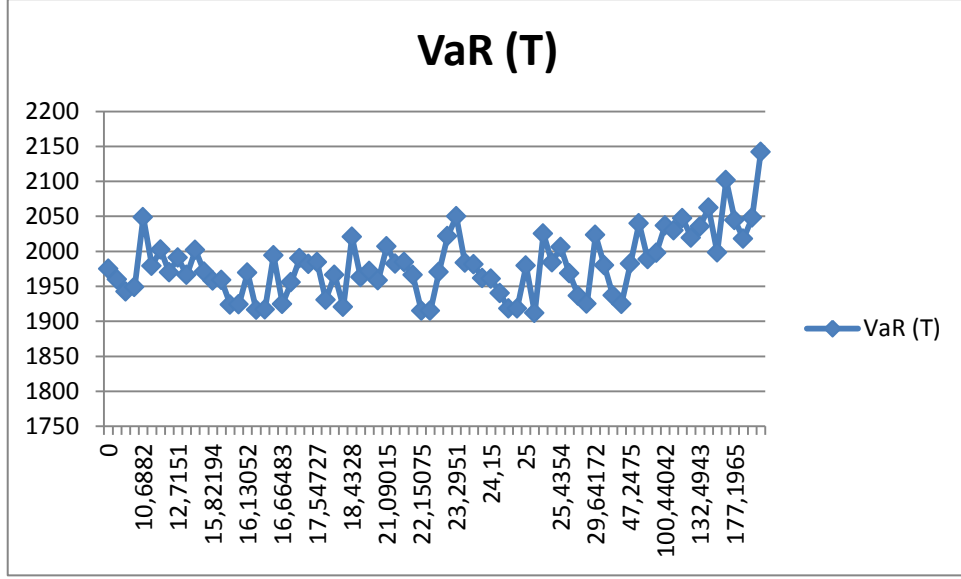
Bu senaryo için, 100 örnek ve 5000 sonuçlu optimizasyon algoritması çalıştırıldığında elde edilen optimal saklama payı seviyesi  $d^* = 20,46$  olarak bulunmuştur. Bu optimal saklama payı seviyesine karşılık gelen  $VaR_T = 1911,68$ 'tir.



Şekil 6.41. Pareto dağılım, ortalama değer için optimal saklama payı (0, 1000)

Bu sonuca göre bu senaryo için en uygun saklama payı  $d^* = 20,46$  seviyesinde bulunmuştur. Sigortacı %90 olasılıkla en çok  $VaR_T = 1911,68$  hasar ödemesine maruz kalacaktır.

Şekil 6.41.'de saklama payının (0, 1000) aralığındaki değerlerine karşılık elde edilen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.



Şekil 6.42. Pareto dağılım, ortalama değer için optimal saklama payı (0, 205)

Şekil 6.42.'de saklama payının (0, 205) aralığındaki değerlerine karşılık gelen  $VaR_T$  değerleri verilmiştir.

Şekil 6.41. incelendiğinde yaklaşık olarak  $d = 47,24$  seviyesine kadar  $VaR_T$  değerinin görece olarak az değiştiği görülmektedir. Program tarafından üretilen değerler incelendiğinde  $d = 47,24$  için  $VaR_T = 1982,4$  olduğu görülmüştür. Şekil 6.41.'de  $d$ 'nin bu değerinden sonra  $VaR_T$  değerinin daha hızlı arttığı görülmektedir. Bu durumda her ne kadar optimal saklama payı  $d^* = 20,46$  olarak hesaplanmış olsa da sigorta şirketi saklama payını  $d = 47$  olarak belirleyebilir.

## 7. SONUÇ

Çalışmada 14 senaryo için elde edilen sonuçlar aşağıda Çizelge 7.1’de verilmiştir.

Çizelge 7.1. 14 senaryo için elde edilen optimizasyon sonuçları

| Toplam Hasar Dağılımı | Prim İlkeleri  | Optimal Saklama Payı $d^*$ |            | VaR (T) $(p)$ | VaR (T) $(2p)$ |
|-----------------------|----------------|----------------------------|------------|---------------|----------------|
|                       |                | $(p)$                      | $(2p)$     |               |                |
| Üstel                 | Beklenen       | 174,915876                 | 344,5217   | 1176,828      | 1329,706       |
| Pareto                | Beklenen       | 126,638715                 | 256,630066 | 1178,856      | 1345,174       |
| Üstel                 | Standart sapma | 12,166143                  | 42,930874  | 1183,659      | 1372,376       |
| Pareto                | Standart sapma | 19,637887                  | 29,418685  | 1179,651      | 1364,094       |
| Üstel                 | Varyans        | 22,480603                  | 31,131933  | 1172,143      | 1348,485       |
| Pareto                | Varyans        | 21,437784                  | 26,058459  | 1164,88       | 1342,327       |
| Üstel                 | Ortamala değer | 2,008949                   |            | 1406,63489    |                |
| Pareto                | Ortamala değer | 20,45586                   |            | 1911,68443    |                |

Senaryo sonuçları incelendiğinde, beklenen prim ilkeleri için optimal saklama paylarının diğer prim ilkelerlerine göre yüksek olduğu görülmektedir. Toplam hasar seviyesinin 1000 olduğu düşünüldüğünde diğer prim ilkeleri için elde edilen optimal saklama paylarının, sigorta sektöründe uygulamada kabul edilebilir olmadığı görülmektedir. Bu durum sektörde yaygın olarak kullanılan prim ilkesin, beklenen prim ilkesi olduğu gerçeği ile uyuşmaktadır.

Reasürörün güvenlik yükleme katsayısı arttıkça, optimal saklama payı seviyesinin de arttığı Çizelge 7.1.’de gözlemlenmektedir.

Bununla birlikte optimal saklama payı seviyesine etki eden bir başka faktör de sigortacının toplam hasar dağılımı olarak göze çarpmaktadır.

Beklenen ve varyans prim ilkeleri için, toplam hasar dağılımı pareto olduğunda, üstel dağılıma göre daha düşük bir optimal saklama payının çıktığı görülmektedir. Bu durum pareto dağılımının üstel dağılıma göre daha kalın kuyruklu, yani daha riskli olması gerçeği ile örtüşmektedir. Aynı durum standart sapma prim ilkesinin  $2p$  güvenlik katsayısı için de geçerli olmakla beraber  $p$  güvenlik katsayısı için geçerli değildir.

Tan vd. (2009) çalışmasında ortalama değer prim ilkesi için optimal saklama payı aramanın anlamsız olduğunu belirtmektedir. Çizelge 5.1.'de ortalama değer prim ilkesi ile üstel dağılımın için elde edilen  $d^* = 2$  optimal saklama payı seviyesinden ve Şekil 6.21.'de görüldüğü gibi  $VaR_T$ 'nin sürekli artan olmasından Tan vd. (2009)'nin bu tespitinin sağlamasının yapıldığı görülmektedir. Ancak pareto dağılımı için çalışmada elde edilen  $d^* = 20$  ve Şekil 6.42.'de  $VaR_T$ 'nin önce bir miktar azalan, sonra artan olmasından tespit sağlanamadığı görülmüştür.

Literatürde stokastik reasürans problemlerinin bazı durumlarda analitik çözümünün elde edilebildiği çoğu durumda ise elde edilemediği görülmektedir. Bu çalışmada, analitik çözümün elde edilemediği durumlarda optimal saklama payının Monte Carlo stokastik optimizasyonu ile elde edilebileceği gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Alanya, Ç., 1991, Reasürans Notları, Milli Reasürans T.A.Ş., İstanbul.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999, Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9, 203-228.
- Balbas, A., Balbas, B. and Heras, A., 2009, Optimal Reinsurance with General Risk Measures, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 374-384.
- Bronson, R., 1982, *Theory and Problems of Operation Research*, Schaum's Outline Series, USA, McGraw-Hill.
- Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt, 1997, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, USA.
- Cai, J., 2004, Stop-loss Premium, *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley and Sons, Chicster, Volume 3, 1615-1619.
- Cai, J., and Li, H., 2005, Conditional Tail Expectations for Multivariate Phase Type Distributions, *Journal of Applied Probability* 42, 810–825.
- Cai, J. and Tan K.S., 2007, Optimal Retention For a Stop-Loss Reinsurance Under the VaR and CTE Risk Measures, *ASTIN Bulletin*, 37(1), 93-112.
- Cai, J., Tan K.S., Weng, C. and Zhang, Y., 2008, Optimal Reinsurance Under VaR and CTE Risk Measures, *Insurance Math. and Econom.*, 43, 185-196.
- Centeno, M.L., 2002, Measuring the Effects of Reinsurance by the Adjustment Coefficient in the Sparre Anderson model, *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 37–49.
- Centeno, M.L., 2004, Retention and Reinsurance Programmes, *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley and Sons, Chicster.
- Daykin, C. D., And T. Pentikainen, and M. Pensonen, 1994, *Practical Risk Theory for Actuaries*. London: Chapman and Hall.
- Dickman, B. H., and Gilman, M. J., 1987, *Journal of Optimization Theory and Applications*: Vol. 60, No 1.
- Dickson, David C. M., 2005, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge.
- Friedlos, J., Schmitter, H., and Straub, E., 1997, *Setting Retentions*, Product Management Department Knowledge Transfer Section, Swiss Reinsurance Company.

- Kaas, T., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., 2001, Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Keleş, Z., 2007, Reasürans Denetimi: Ülke Örnekleri ve Türkiye Uygulması, Sigortacılık Genel Müdürlüğü, Uzmanlık Tezi, Ankara.
- Nomer, C. ve Yunak, H., 2003, Reasürans, Milli Reasürans T.A.Ş.
- Mun, J., 2006, Modeling Risk Applying Monte Carlo Simulation, Real Options Analysis, Forecasting, And Optimization Techniques, New Jersey.
- Özer, U., 2010a, Finansal Analiz Yöntemi ile Sigorta Şirketlerinin Saklama Paylarının Düzeyinin Değerlendirilmesi.
- Özer, U., 2010b, Sigorta Şirketlerinde Reasürans Stratejisi.
- Tan, K. S., Weng, C., And Zhang, Y., 2009, VaR and CTE criteria for Optimal Quota-Share and Stop-Loss Reinsurance, The North American Actuarial Journal, Volume 13, No: 4.
- Türkiye Sigorta ve Reasürans Şirketleri Birliği, 2010, Sigorta Tanımları, <http://www.tsrsb.org.tr/tsrsb/Sigorta/Sigorta+tan%C4%B1mlar%C4%B1/>
- Türkiye Sigorta Enstitüsü Vakfı, 2009, Sigortanın Tanımı ve Önemi, <http://www.tsev.org.tr/tr/>
- Young, V. R., 2004, Premium Principles, In Encyclopedia of Actuarial Science, vol. 3, ed. J. Teugels and B. Sundt, pp. 1323-31, John Wiley.

## **ÖZGEÇMİŞ**

**Adı Soyadı** : Erbil TAŞAR

**Doğum Yeri** : Ankara

**Doğum Yılı** : 1984

**Medeni Hali** : Bekar

**Eğitim ve Akademik Durumu** :

Lise 1998-2002 Ankara Bahçelievler Deneme (Y.D.A.) Lisesi

Lisans 2002-2006 İstanbul Ticaret Üniversitesi İstatistik Bölümü

**Yabancı Dil** : İngilizce

**İş Tecrübesi** :

2008-2009 Hewlett-Packard Görüntüleme ve Baskı Grubu, Satış Temsilcisi

2009-.... Hewlett-Packard Toplam Müşteri Deneyimi ve Kalite Uzmanı