

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK UZAYIN MODELLERİ

ELİF AKSOY

Ağustos 2010

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK UZAYIN MODELLERİ

ELİF AKSOY

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Ağustos 2010

Doç.Dr. Atakan Tuğkan YAKUT danışmanlığında **Elif AKSOY** tarafından hazırlanan “**Hiperbolik Uzayın Modelleri**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Atakan Tuğkan YAKUT (Niğde Üniversitesi)



Üye : Yrd.Doç.Dr. Dağıstan ŞİMŞEK (Selçuk Üniversitesi)



Üye : Yrd. Doç.Dr. Durmuş DAĞHAN (Niğde Üniversitesi)



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../200..

Doç. Dr. Nurettin ACIR
MÜDÜR

ÖZET

HİPERBOLİK UZAYIN MODELLERİ

AKSOY, Elif

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atakan Tuğkan Yakut

Ağustos 2010, 40 sayfa

Bu çalışmada hiperbolik uzayın analitik modelleri araştırıldı. Hiperbolik geometri hakkında genel bilgi verildi. Riemann geometrinin temel bilgileri ve Stereografik izdüşüm tanıtıldı.

Anahtar sözcükler: Minkowski uzayı, Hiperbolik uzay, Stereografik izdüşüm

SUMMARY

MODELS OF HYPERBOLİK SPACE

AKSOY, Elif

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc Professor Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

August 2010, 40 pages

In this work, we research analitic models of hyperbolic space. We introduce hyperbolic geometry and presented foundations of Riemann geometry and, stereografik projection.

Keywords: Minkowski space, Hyperbolic space, Stereografik projection.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, değerli danışmanım Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT katkılarıyla gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışmanın geometri alanında çalışmalar yapanlara ve üniversitede bu konularda yapılan çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında başta emeği geçen danışman hocam Sayın Atakan Tuğkan Yakut'a, Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine, ve öğrenim hayatım boyunca bana ilgi ve desteklerini esirgemeyen çok değerli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMA VE SİMGELER	ix
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Lorentz-Minkowski Uzayı.....	4
2.2. Hiperbolik Uzay	6
BÖLÜM III. HİPERBOLİK GEOMETRİ	8
3.1. Bir Boyutlu Durum.....	9
3.2. Yüksek Boyutlu Durum.....	13
3.3. Riemann Geometrinin Temel Bilgileri.....	15
BÖLÜM IV. HİPERBOLİK UZAYIN MODELLERİ	17
4.1. Stereografik İzdüşüm.....	33
BÖLÜM IV. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR.....	40

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Hiperbolik uzay.....	7
Şekil 3.1	Minkowski uzayı	8
Şekil 3.2	S^1 Çember	10
Şekil 3.3	H^1 de Hiperbolik doğru	12
Şekil 3.4	Eğrinin uzunluğu.....	16
Şekil 4.1	Beş analitik model ve aralarındaki izometrilere $h \in H$, $l \in I$, $j \in J$, $k \in K$ ve $l \in L$ noktaları hiperbolik uzayda aynı noktalar gibidir.....	18
Şekil 4.2	J den H ya merkezi izdüşüm	20
Şekil 4.3	J den I ya merkezi izdüşüm.....	22
Şekil 4.4	K dan J ye dik izdüşüm.....	24
Şekil 4.5	L den J ye merkezi izdüşüm.....	26
Şekil 4.6	Stereografik izdüşüm.....	34
Şekil 4.7	qpr ve $qp'r$ açıları.....	38

KISALTMA VE SİMGELER

H^n	n- boyutlu Hiperbolik uzay
C^{n-1}	Işık konisi
R^n	n-boyutlu reel uzay
R_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
R^{n+1}	Öklidyen uzayı
E_1^3	Minkowski uzayı
$g(a, a)$	Öklidyen metrik
α	Birim normal eğri
$d_H(x, y)$	Hiperbolik metrik
ds^2	Riemann metrik
S_1^2	Pseudoküre
N	Düzlemin normalı
$\ \cdot\ $	Lorentz normu
$<, >_L$	Lorentz iççarpımı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Non-Öklidyen Geometriden söz edildiği zaman hemen akla Öklid'in beş temel postüladından beşincisi gelir. Çünkü Öklidyen olmayan Geometrilerin çıkışı bu beş temel postülatın beşincisine dayanmaktadır. Öklid'in beş temel postüladını aşağıdaki şekildedir.

- İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
- Bir doğru sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
- Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.
- Bütün dik açılar eşittir.
- Farklı iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta eş açılar oluşturursa iki doğru veya bunların uzantıları birbirini kesmez, veya uzantıları birbirini keserse kestiği tarafta oluşan açılar toplamı 180° den küçüktür.

Beşinci postüladın yerine paralellik postüladını (fair play) da kullanılmaktadır.

Paralellik postülatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmeyen bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer. 19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve beşinci postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlardır. Carl Friedrich Gauss(1777-1855), Lobatschewski(1793-1856), Farkas(Wolfgang)(1775-1856), Janos Bolyai(1802-1860). Lobatschewskii Öklidyen geometrinin Trigonometrik formüllerine dayanarak bir Non-Öklidyen trigonometri geliştirmiştir. Hiperbolik Non-Öklidyen geometrinin analitik çalışmasına esas gereksinim Euler, Gaspard Monge ve Gauss'un eğrisel yüzeyler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Bernhard Riemann(1826-1866), bu yüzeylerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştır. Riemann'ın çalışmaları bir sıçrama tahtası olmuştur. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından 1868' de vurgulanmıştır. Sonuçta aşağıdaki postülatlara ulaşılmıştır.

Bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan birden çok doğru bulunabilir.

Sabit eğrilikli üç farklı geometrinin varlığı kabul edilmiş, bunların üçü de Öklidin ilk dört postülatını aynen kullanmışlardır. Bu non-Öklidyen geometrilerden birincisi

beşinci postülatı “ bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez ” şeklinde alan Eliptik geometridir. Beltrami 1868 de ; bu gün adına Eliptik geometri dediğimiz Küresel Geometrinin Öklid Geometrisi ile uyuştuğunu göstermiştir İkincisi de “ Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir ” şeklindeki paralellik versiyonunu kullanan Hiperbolik geometridir. Hiperbolik geometri de benzer üçgenler kongrüenttir, bir üçgende açılarının toplamı 180° değildir gibi.

Diğer taraftan sabit eğrilikli tam semi Riemann manifoldlar da çok yüzlülerin hacim hesaplamaları oldukça ilginçtir. Bu doğrultuda bazı çalışmalar J.M. Schlenker tarafından yapılmıştır. J.M. Schlenker sabit eğriliği 1 olan tam Lorentz manifoldu olarak S_1^n de Sitter küresini göz önüne almıştır [1,2]. S_1^n de Sitter küresi ile H^n Hiperbolik uzayı R_1^{n+1} Minkowski uzayının alt manifoldları olarak göz önüne alındığında, bunlar arasında bir dualitenin varlığı söz konusudur. Bu ise S_1^n de Sitter küresindeki her bir v noktası, H^n Hiperbolik uzayının bir hiperdüzleminin birim normali olarak düşünülür [3]. Böylece S_1^n de Sitter küresindeki bir çok yüzlünün hacmi için Schlafli formülü, H^n deki hiperdüzlemlerin S_1^n ile arakesitinin oluşturduğu çokyüzlünün hacminin duali olur. $n=3$ için böyle bir formül Santalo tarafından verilmiştir[4]. Böyle bir dualite söz konusu olduğunda S_1^n de çokyüzlülerden bahsedilmektedir. Fakat S_1^n de alınan noktaların bir simplex olup olmadığı konusunda her hangi bir yorum yapılmamaktadır.

Bernhard Riemann(1826-1866), yüzeyleerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştır[5]. Bu ise günümüzde Riemann Manifoldları olarak adlandırılmaktadır. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından açık bir şekilde ortaya konmuştur[6]. Öklidyen Geometri ne kadar tutarlı ise non-Öklidyen Geometrinin de o kadar tutarlı olduğunun anlaşılması üzerine, non-Öklidyen geometri için analitik modeller kurularak çalışmalar yapılmıştır. Bu modellerin üç tanesi konformal olup iki tanesi Henri Poincare nin adıyla anılır.

Bu çalışmada, Hiperbolik uzayın modelleri araştırılmıştır.

Bölüm II de, R_1^{n+1} Lorentz-Minkowski uzayında temel tanımlar, Bölüm III de ise Hiperbolik uzayın modelleri verilmiştir. Bölüm IV de ise bu çalışmanın neticesinde yapılabilecekler tartışılmıştır.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lorentz-Minkowski Uzayı

$x, y \in R^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (2.1)$$

ile tanımlanan indefinit bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte R^n uzayına Lorentz uzayı denir ve R_1^n ile gösterilir [7]. R_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu;

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle_L|^{1/2}$$

ile, x ve y vektörünün Lorentz uzunluğu;

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlanır[7].

2.1.1. Tanım: R_1^n Lorentz uzayında, $\|x\| = 0$ olacak şekildeki bütün x lerin kümesine, yani;

$$\{x \in R_1^n \mid x_n^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2\}$$

şeklindeki C^{n-1} kümesine ışık-konisi (light-koni) denir. $\|x\| = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri (light-like veya null) vektör denir [7,8].

2.1.2. Tanım: $x \in R_1^n$ için, $\|x\| > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri (space-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin dışı; R_1^n nin uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir [7-9].

2.1.3. Tanım: $x \in R_1^n$ için, $\|x\| < 0$ oluyorsa x vektörüne (time-like) vektör denir. C^{n-1} hiperkonisinin içi; R_1^n nin zaman benzeri vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer, $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise x vektörüne pozitif (negatif) zaman benzeri denir[7-9].

2.1.4. Tanım: $x, y \in R_1^n$ için, $\langle x, y \rangle_L = 0$ oluyorsa x, y vektörlerine Lorentz ortogonal dir denir[7].

2.1.5. Teorem: x, y vektörleri, R_1^n de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer x vektörü zaman benzeri (time-like) ise, y vektörü uzay benzeri (space-like)dir.

İspat: [7] sayfa 60-61 den görülebilir.

2.1.6. Önerme: R_1^n nin bir V alt vektör uzayının;

- 1) Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart V nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır,
- 2) Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır,
- 3) Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart V deki sıfırdan farklı her vektör için $\|x\| = 0$ olmasıdır[7,8].

İspat: [7] sayfa 61 den görülebilir.

2.1.7. Tanım: x ve y , R_1^n de pozitif (negatif) zaman benzeri iki vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. x ve y arasındaki Lorentz zaman benzeri (time-like) açısı, $\eta(x, y)$ olarak tanımlanır[7-9].

2.2. Hiperbolik Uzay

$x, y \in R^{n+1}$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ile y nin Lorentzian iç çarpımı;

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1}$$

olmak üzere; $H_0^n = \{x \in R_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ kümesine de n -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir. H_0^n uzayının iki bağlantılı bileşeni $H_{0,+}^n$ ve $H_{0,-}^n$ olmak üzere, bu bileşenlerin her biri n -boyutlu hiperbolik uzayın bir modeli olarak alınabilir. $H_+^n = H^n \subset R_1^{n+1}$ olarak alınacaktır.

2.2.1. Tanım: $x, y \in H^n \subset R_1^{n+1}$ ve x ile y arasındaki Lorentzian zaman benzeri açısı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzunluk;

$$d_H(x, y) = \eta(x, y)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır. $\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \eta(x, y)$ olduğundan;

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

olur[7,8].

2.2.2. Teorem: d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir.

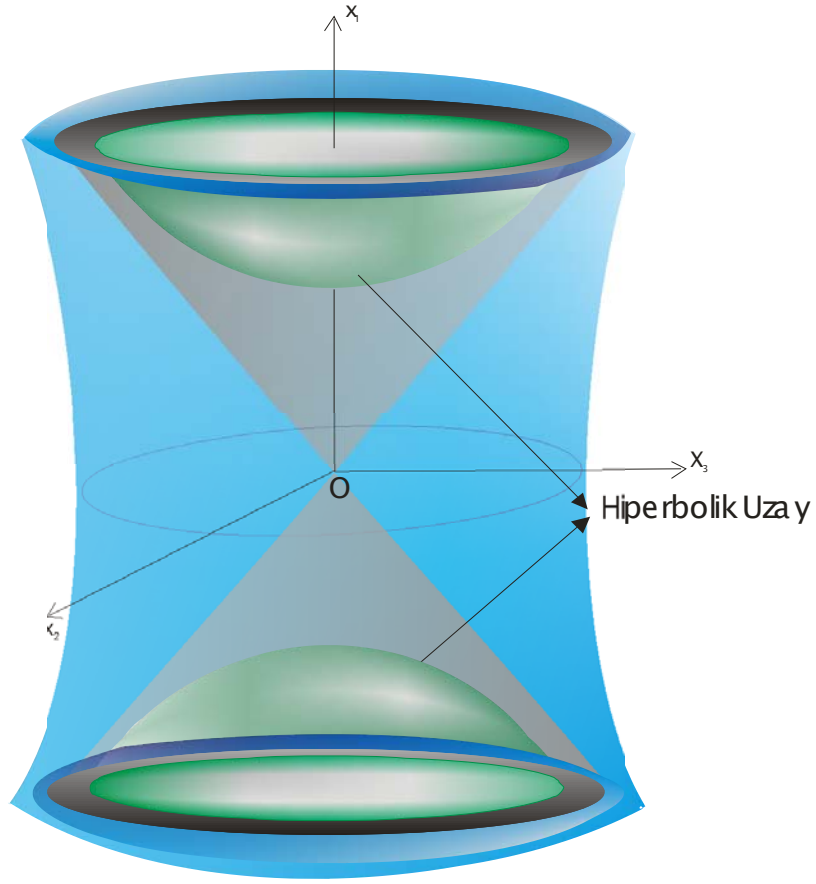
İspat: [7] den görülebilir.

2.2.3. Tanım: d_H metriği ile birlikte H^n uzayı hiperbolik n -uzay olarak adlandırılır[5].

2.2.4. Tanım: H^n nin bir doğrusu R_1^{n+1} in iki boyutlu zaman benzeri alt vektör uzayı ile H^n nin arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri R^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir zaman benzeri alt uzayını gererler. Böylece, $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$, x, y den geçen içeren H^n nin bir doğrusudur. Buna göre, H^n nin jeodezikleri onun doğrularıdır[7].

2.2.5. Tanım: S_1^n nin bir m -düzlemi R_1^{n+1} in $(m+1)$ boyutlu zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri alt vektör uzayları ile S_1^n nin arakesitidir[7].

S_1^n nin bir 1-düzlemi, onun uzay benzeri, ışık benzeri veya zaman benzeri doğruları, hiperbolik $(n-1)$ -düzlemi onun hiperdüzlemi olarak adlandırılır.



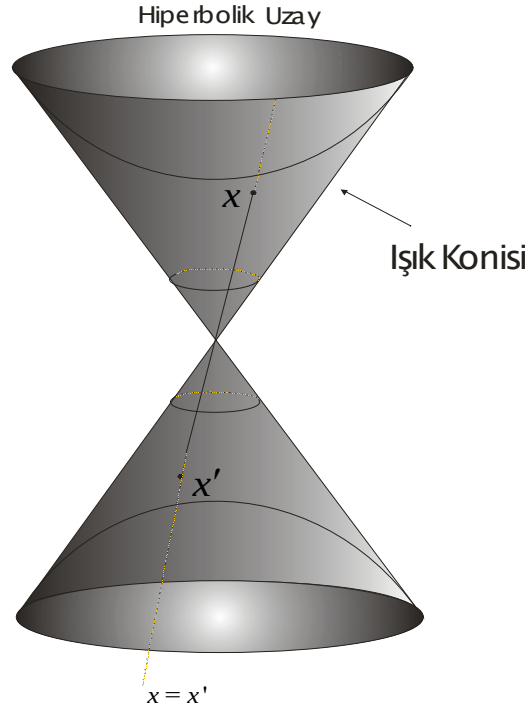
Şekil 2.1. Hiperbolik uzay

BÖLÜM III

HİPERBOLİK GEOMETRİ

Gauss, Lobachevski ve Bolyai' nin, Öklidyen olmayan geometrisi genellikle hiperbolik geometri olarak bilinir. Çünkü bunlar Öklidyen olmayan (non-Öklidyen) geometrinin analitik modelleridir.

Klasik olarak, uzay ve zaman bağımsız nicelikler olarak düşünülür. R^{n+1} de $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ koordinatları verildiği zaman x_{n+1} koordinatı zamanı temsil eder, sadece pozitif tanımlı Öklidyen metriği düşünülür ki bu metrik $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$ şeklindedir.



Şekil 3.1. Minkowski Uzayı

Relativitede ise bütün bunları değiştirmiştir. Düzlemsel uzay-zaman geometrisinde ışığın hızı durgun bir gözlemci açısından sabit olmalıdır.

Uzay-zaman geometrisi için Minkowski modeli tekrar R^{n+1} dedir. Fakat uzaklık tanımı $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ indefinit norm olarak tanımlanır. Işık konisi normu sıfır olan noktaların kümesi olarak tanımlanır. Işık konisi üzerindeki, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$ noktaları için, $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde ifade edilen Öklid uzaklığı, orijinden x_{n+1} zamanına eşittir. Bu eşitlik orijindeki ışığın sabit başlangıç hızını belirler. Bu normlar iç çarpımlar ile birleştirdiği zaman Öklid iç çarpımı “.” ile non-Öklidyen iç çarpımı ise “*” ile gösterilir.

Eğer noktaların orijinden sabit karesel uzaklıktaki kümesi göz önüne alınırsa; Öklidyen durumda çeşitli yarıçaplı küreleri, Minkowski uzayında bir veya iki kanatlı hiperboloidler elde edilir. Böylece $S^n = \{x \in R^{n+1} : x \bullet x = 1\}$ formülü ile R^{n+1} Öklidyen uzayında n- boyutlu birim küre tanımlanır ve $\{x \in R^{n+1} : x * x = -1\}$ formülü ile n- boyutlu hiperbolik uzay tanımlanır. Böylece hiperbolik uzay iki kanatlı bir hiperboloidin kanatlarından bir tanesi olarak ve yarıçapı -1 veya $i = \sqrt{-1}$ olan bir “küre” olarak düşünülür. Bu şekilde elde edilen yapı ise hiperbolik geometridir.

Hiperboloidin iki kanadı projektif olarak özdeş olduğundan genellikle tek kanadı Hiperbolik uzay olarak bilinir.

3.1. Bir Boyutlu Durum

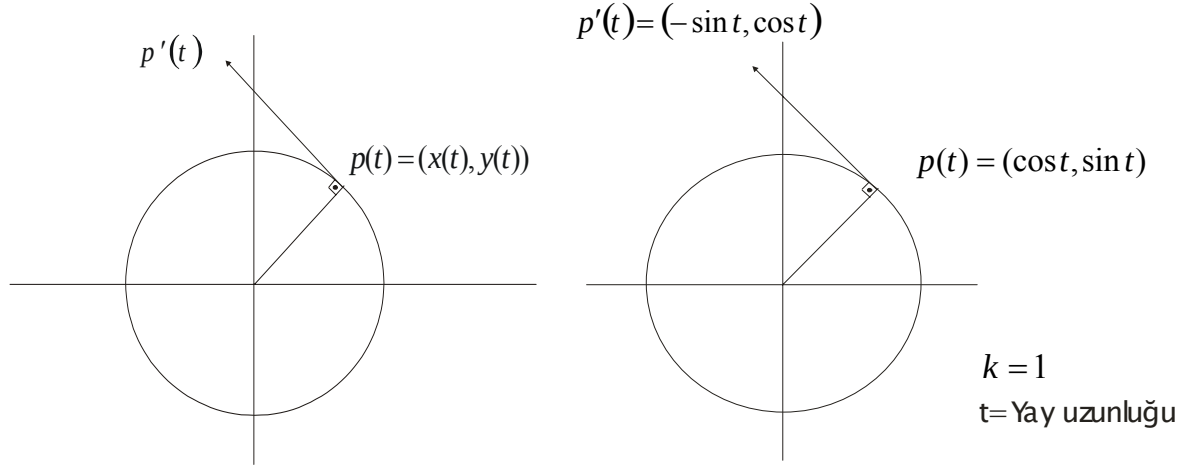
H^n hiperbolik uzayını anlamak için onun indefinit Minkowski iç çarpımından gelen kendine özgü metriği vardır. $n=1$ için bu durum incelenebilir. Bunun için Öklid durumundaki S^1 çember hatırlanarak başlanabilir.

$p : (-\infty, \infty) \rightarrow S^1$ e $p(0) = (1, 0)$ düzgün bir eğri olsun $p(t) = (x(t), y(t))$ koordinatlarından $x^2 + y^2 = 1$ olacak şekilde yazarsak ve bu denklemin diferansiyellenmesinden,

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

elde edilir. Veyahut da diğer bir ifadeyle $p(t) \cdot p'(t) = 0$ dır.

Yani, $p'(t)$ hız vektörü, $p(t)$ yer vektörüne Öklidyen anlamda diktir. Gerçekten $p'(t) = k(t)(-y(t), x(t))$ yazılabilir. Çünkü $p(t)$ noktasındaki S^1 teğet uzay bir boyutludur ve $(-y(t), x(t))$ ye Öklidyen diktir (Şekil 3. 2).



Şekil 3.2. S^1 Çember

Eğer $p(t)$ yi toplamının sabit hızı 1 kabul edilirse

$$1 = |p'(t)| = |k(t)| \sqrt{((-y)^2 + x^2)} = |k(t)|$$

dır ve böylece $k \equiv \mp 1$ olur.

$k \equiv 1$ alınırsa, $p(x, y)$ noktası Öklid düzleminde sabit 1 hızıyla birim çember etrafında dolandır.

Sonuç olarak, birim çember üzerindeki Öklidyen yay uzunluğu ile t özdeşlenebilir ve $x = x(t)$ yerine $\cos t$ ve $y = y(t)$ yerine $\sin t$ alınırsa, analizden hatırlanacağı gibi cosinüsün türevi eksi sinüs ve sinüsün türevi eksi cosinüstür.

Formüllerden, $k = 1$ alınarak x ve y (cosinüs ve sinüs) aşağıdaki diferansiyel denklemleri sağlar.

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t)$$

ile başlangıç şartları $x(0)=1$, $y(0)=0$ olacak şekilde sin ve cos için klasik kuvvet serilerinin açılımı göz önüne alınırsa bilinmeyen katsayılar belirlenir.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

H^1 de hiperbolik hesaplama yapılırken yeni başlangıç noktası (1,0) yerine (0,1) , S^1 yerine H^1 i, Öklid iç çarpımı “.” yerine “*” hiperbolik iç çarpımını, +1 yerine -1 i , Öklid yay uzunluğu yerine hiperbolik yay uzunluğunu, cosinüs yerine hiperbolik sinüs ve sinüs yerine hiperbolik cosinüs alınır.

Buradan;

$p : (-\infty, \infty) \rightarrow H^1$ e $p(0)=(0,1)$ düzgün bir eğri olursa. $p(t)=(x(t), y(t))$ koordinatlarından $x^2 - y^2 = -1$ olacak şekilde yazılan denklemin diferansiyellenmesinden

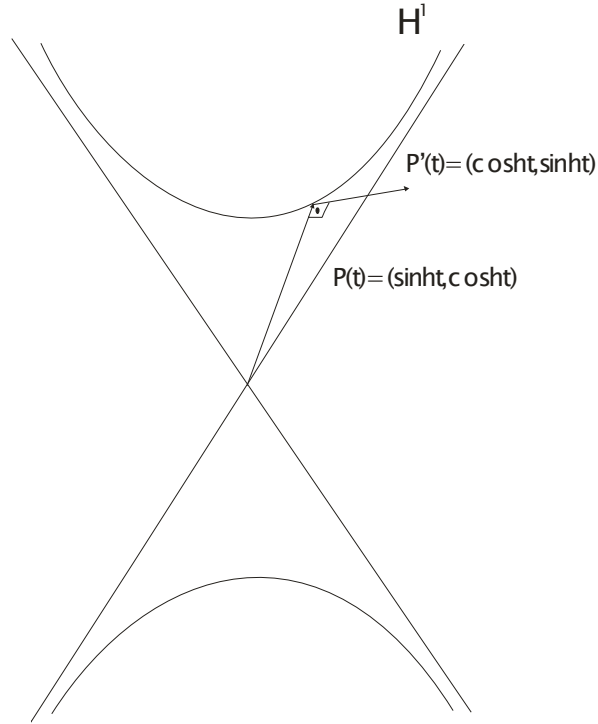
$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 0$$

elde edilir.

Diğer bir ifadeyle $p(t)p'(t) = 0$

Yani, $p'(t)$ hız vektörü , $p(t)$ yer vektörüne hiperbolik anlamda diktir. Gerçekten

$p'(t) = k(t)(y(t), x(t))$ yazabiliriz. Çünkü $p(t)$ noktasındaki H^1 hiperbolik uzayı bir boyutludur ve $(y(t), x(t))$, $p(x, y)$ ye hiperbolik diktir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. H^1 de Hiperbolik Doğru

Eğer $p(t)$ toplamının sabit hızı 1 kabul edilirse

$$1 = |p'(t)| = |k(t)|\sqrt{(y^2 - x^2)} = |k(t)|$$

böylece $k \equiv \mp 1$ olur. $k \equiv 1$ alınır, $p(x, y)$ Minkowski düzleminde sabit 1 hızıyla “birim” hiperbol etrafında dolunur.

Sonuç olarak, H^1 birim hiperbolde hiperbolik yay uzunluğu ile t 'yi özdeşleyebilir ve $x = x(t)$ yerine $\sinh t$ ve $y = y(t)$ yerine $\cosh t$ alınır, analizden hatırlanacağı gibi hiperbolik cosinüsün türevi hiperbolik sinüstür ve hiperbolik sinüsün türevi hiperbolik cosinüstür.

Formüllerden, $k = 1$ alınarak x ve y (hiperbolik cosinüs ve hiperbolik sinüs) aşağıdaki diferansiyel denklemleri sağlar.

$$x'(t) = y(t) \quad , \quad y'(t) = x(t)$$

ile başlangıç şartları $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ olacak şekilde hiperbolik sinüs ve hiperbolik cosinüs için klasik kuvvet serilerinin açılımı göz önüne alınırsa bilinmeyen katsayılar belirlenir.

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$

H^1 e sıfırdan farklı teğet vektör indefinit $*$ iç çarpımına göre pozitif bir kare normun varlığını gösterir yani Minkowski düzlemi üzerindeki indefinit iç çarpım, hiperbolik bir uzay üzerine pozitif tanımlı iç çarpım tahsis eder. Benzer sonuç daha yüksek boyutlar içinde geçerlidir.

3.2. Yüksek Boyutlu Durum

Daha yüksek boyutlarda, H^n içinde R^{n+1} de bir hiperboloid olarak göz önüne alınırsa. Eğer $p : (-\infty, \infty) \rightarrow H^n$ eğride düzgün bir yay parçası ise $p(t)$ noktasında herhangi bir doğrultuda yön seçilirse $p(t) * p'(t) = 0$ a $p(t)$ vektörünün hiperbolik ortogonal tümleyenini olarak düşünülebilir. $p(t)$ de H^n e teğettir. ($*$ iç çarpımı sıfır ise vektörler hiperbolik ortogonaldir .)

İndefinit iç çarpımının tanjant uzaya kısıtlanışının pozitif tanımlı olduğu iki şekilde belirlenebilir.

Birinci metod Cauchy- Schwartz eşitsizliği ile verilir.

Cauchy- Schwartz eşitsizliği;

$$(x.y)^2 \leq (x.x)(y.y)$$

şeklindedir.

$p = (\hat{p}, p_{n+1})$ ve $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \neq 0$ olsun

p , H^n tanjant uzayıdır. Burada

$$\hat{p}, \hat{x} \in R^n$$

Eğer $x_{n+1} = 0$ ise $x * x = x \cdot x$ dir.

Böylece

$$x * x > 0.$$

Eğer, $x_{n+1} = 0$ ise varsayalım ki $x_{n+1} \neq 0$ olsun.

$$0 = x * p = \hat{x} \cdot \hat{p} - x_{n+1} \cdot p_{n+1} \quad \text{ve} \quad -1 = p * p = \hat{p} \cdot \hat{p} - p_{n+1}^2$$

Bundan dolayı;

$$(\hat{x} \cdot \hat{x})(\hat{p} \cdot \hat{p}) \geq (\hat{x} \cdot \hat{p})^2 = (x_{n+1} p_{n+1})^2 = x_{n+1}^2 (\hat{p} \cdot \hat{p} + 1)$$

Cauchy- Schwartz eşitsizliğini verir.

İkinci metod ise

$$(x * x)(\hat{p} \cdot \hat{p}) \geq x_{n+1}^2$$

$x * x > 0$ içerir ki, eğer $x \neq 0$ ise $*$ iç çarpımının cebirsel analizi ile mümkündür.

$p, p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n+1)$ -lisi R^{n+1} için bir baz olsun. Burada; p , H^n de bir nokta kalan vektörler ise p noktasında H^n e teğet uzay olsun. Gram – Schmidt ortogonalleştirme yöntemine başvurulursa $p * p = -1$ den dolayı H^n için tanımlanan denklem, p vektör, birim vektör olur ve kalan p' nin ortogonal tümleyeni olarak göz önüne alınabilir. H^n e p noktasında teğet uzayı verir. “*” iç çarpımı non- dejenere olduğundan, sonuç matrisinde diagonal üzerindeki ∓ 1 olan elemanlardan sadece p vektörüne karşılık gelen -1 dir. Diğerleri +1 dir.

Sylvester ’ in teoremindeki diagonal üzerindeki +1 lerin ve -1 lerin sayısı iç çarpımın bir değişmezidir. (+1 lerin sayısı en büyük alt uzayın boyutudur ki burada metrik pozitif tanımlıdır.)

Fakat R^{n+1} için standart baz alındığında diagonal üzerinde bir tane -1 diğer elemanlar +1 dir. Bu durum bizim bazımız içinde aynıdır. İç çarpımın matrisi tanjant uzaya kısıtlanır ve $n \times n$ tipinde bir matrise karşılık gelir. Yani, metriğin tanjant uzayına kısıtlanması pozitif tanımlıdır. Sonuç olarak “*” iç çarpımı H^n ’e kısıtlandığında H^n üzerine gerçek bir Riemann metriği tanımlar.

3.3. Riemann Geometrinin Temel Bilgileri

Hiperbolik geometrinin analitik modelleri, bir Riemann metriklili diferansiyellenebilir manifoldlar olacaktır. İlk olarak Riemann metriği tanımlanır ve Öklid uzayındaki geometrik kavramlar ile özdeşlenir. R^n Öklidyen uzay üzerindeki ds^2 Riemann metriği her bir $p \in R^n$ noktasında, p noktasındaki tanjant uzaya pozitif tanımlı simetrik bir iç çarpım koyar ki bu iç çarpım p noktasındaki diferansiyellenebilme ile değişmez. İç çarpım verildiği zaman $|x|^2 = x \cdot x$ olmak üzere bir x vektörünün $|x|$ uzunluğu ile, iki $\cos \theta = (x \cdot y) / (|x| \cdot |y|)$ olmak üzere, x ve y vektörleri aralarındaki açı θ ve $ds = \sqrt{ds^2}$ şeklinde uzunluk elementi ve dA alan elementi hesaplanabilir. Alan elementi şu şekilde hesaplanır. Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ R^n nin standart koordinatları ise bu takdirde

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{i,j} dx_i dx_j$$

formundadır.

(g_{ij}) matrisi x üzerindeki diferansiyellenebilmesine bağlıdır ve pozitif tanımlı ve simetriktir. $\sqrt{|g|}$, (g_{ij}) determinantının karekökü olsun. Bu takdirde,

$$dA = \sqrt{|g|} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

dir.

Eğer $f : R^k \rightarrow R^n$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ise

$$f^*(ds^2)(v, w) = ds^2(Df(v), Df(w))$$

formülü ile $f^*(ds^2)$ pullback tanımlanabilir.

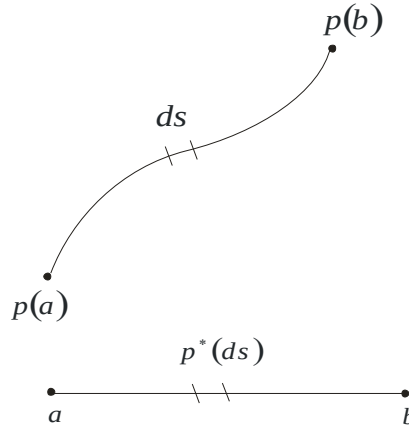
Burada v ve w vektörleri $u \in R^k$ noktasının teğet vektörleri ve Df ise $x = f(u)$ noktasındaki teğet vektörleri u noktasındaki teğet vektörlere dönüştüren türevidir.

$x \in R^n$ noktasında $g_{i,j}(x)$ ile $g_{i,j} \circ f(u)$ yer deđiřtirmesi ile pullback hesaplanabilir.

Burada ise $u \in R^k$ ve $f(u) = x$ dir ve dx_i ile $\sum_j (\partial f_i / \partial u_j) du_j$ yer değiştirmiştir.

P üzerinden ds integrasyonu ile $p : [a, b] \rightarrow R^n$ e giden yay parçasının uzunluğu hesaplanabilir.

$$\int_p ds = \int_a^b p^*(ds)$$



şekil 3. 4. Eğrinin Uzunluğu

R^n de p ve q gibi iki nokta arasındaki Riemann uzaklığı, p den q ya giden yay parçasının infimumu olarak tanımlanır.

Sonuç olarak, bu ifade edilen kavramlar manifoldlara genellenebilir. Yani, her bir koordinat haritası üzerindeki bir Riemann metriğinin varlığı bu metriğin bu haritalar üzerindeki tanımlı fonksiyonların aracılığıyla pullback dönüşümleri altında değişmez.

Eğer bir harita üzerindeki Riemann metriği ds^2 ve f bu iki haritayı bağlayan bir fonksiyon ise bu takdirde $f^*(ds_2^2) = ds_1^2$. Bu da göstermektedir ki uzunluklar ve alanlar harita değişimi altında invariant kalırlar.

BÖLÜM IV

HİPERBOLİK UZAYIN MODELLERİ

Burada hiperbolik uzayın beş modeli tanımlanmıştır. Her bir modelin kendine özgü özel metriği , jeodezikleri, izometrilere gibi geometrik özellikleri vardır. Bu modeller:

H, yarı-uzay modeli

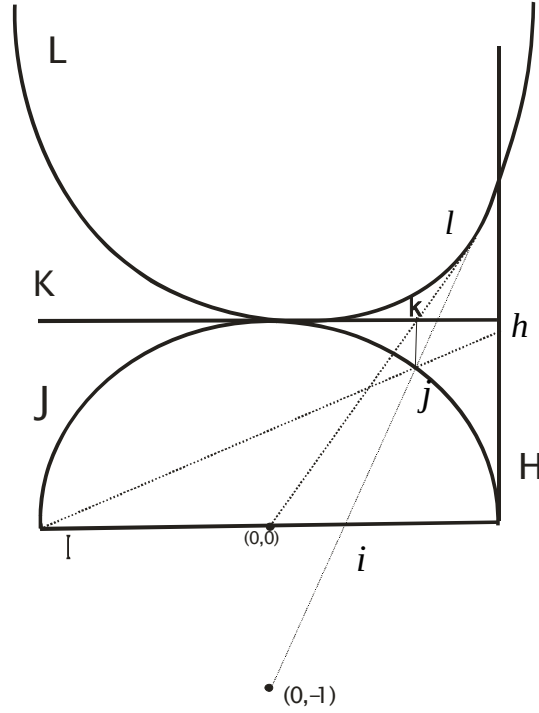
I, disk modeli

J, yarı küre modeli

K, klein modeli

L, hiperboloid model

olarak adlandırılır. Bu modeller analitik düzlemde Şekil 4.1 de verilmiştir.



Şekil 4.1. Beş analitik model ve aralarındaki izometrilere $h \in H, i \in I, j \in J, k \in K$ ve $l \in L$ noktaları hiperbolik uzayda aynı noktalar gibidir.

Her bir model, R^{n+1} 'in farklı alt kümelerinde tanımlanır ve $n=1$ için tanım kümeleri şekil 4.1 de şematik olarak verilmiştir[11].

Yukarıda ifade edilen Hiperbolik uzayın beş temel analitik modeli için tanım kümeleri cebirsel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

1- Yarı Uzay Modeli:

$$H = \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\};$$

2- Disk Modeli:

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\};$$

3- Yarı Küre Modeli:

$$J = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ ve } x_{n+1} > 0\};$$

4- Klein Modeli:

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\};$$

5- Hiperboloid Modeli:

$$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \text{ ve } x_{n+1} > 0\}$$

Bu beş model üzerinde ds^2 Riemann metriklerinin tam analitik tanımlaması aşağıdaki gibidir.

$$ds_H^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

$$ds_I^2 = 4 \cdot \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}$$

$$ds_K^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

$$ds_L^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

Burada; bu beş model arasındaki izometrik denkliği görebilmek için onlar arasındaki izometrilere tanımlamak gerekir.

Modeller arasındaki izometrilere aşağıda verilmiştir.

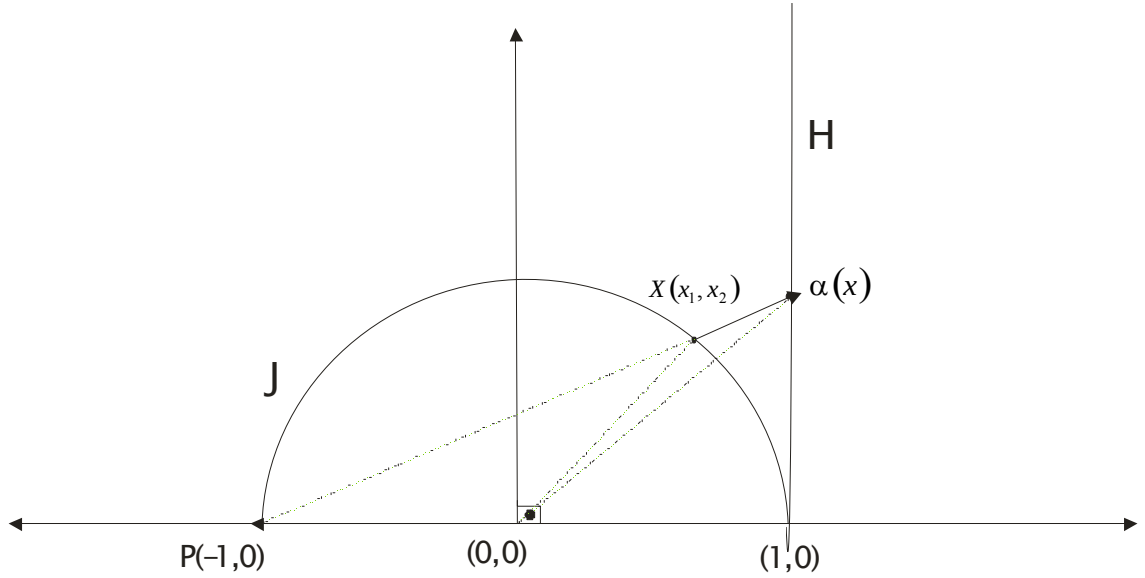
1. Yarı Uzay Modeli ile Yarı Küre Modeli arasındaki izometri:

$\alpha : J \rightarrow H$ dönüşümü, $(-1, 0, \dots, 0)$ noktasından merkezi izdüşüm olsun.

$$\alpha : J \rightarrow H$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(1, \frac{2x_2}{(x_1 + 1)}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{(x_1 + 1)} \right)$$

şeklinde ifade edilirse, $n=2$ için:



Şekil 4.2. J den H ya Merkezi İzdüşüm

$$x_1' \rightarrow 1, \quad x_2' \rightarrow \frac{2x_2}{x_1 + 1}$$

$$(x_1', x_2') \rightarrow \left(1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}\right)$$

iki boyutlu durum ele alınırsa,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0\alpha(x)} &= \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{P\alpha(x)} \\ &= \overrightarrow{0P} + \lambda \overrightarrow{PX} \\ &= \overrightarrow{0P} + \lambda \left[\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \right]\end{aligned}$$

olur. İfadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(1, x_2') &= (-1, 0) + \lambda \left[(x_1, x_2) - (-1, 0) \right] \\ &= (-1, 0) + \lambda (x_1 + 1, x_2) \\ &= [-1 + \lambda(x_1 + 1), \lambda x_2]\end{aligned}$$

$$1 = -1 + \lambda(x_1 + 1)$$

eşitliğinden

$$\lambda = \frac{2}{x_1 + 1}$$

elde edilir.

$$x_1' \rightarrow 1 \quad \text{ve} \quad x_2' \rightarrow \lambda x_2 \quad \text{olduğundan}$$

$$x_2' \rightarrow \frac{2x_2}{x_1 + 1}$$

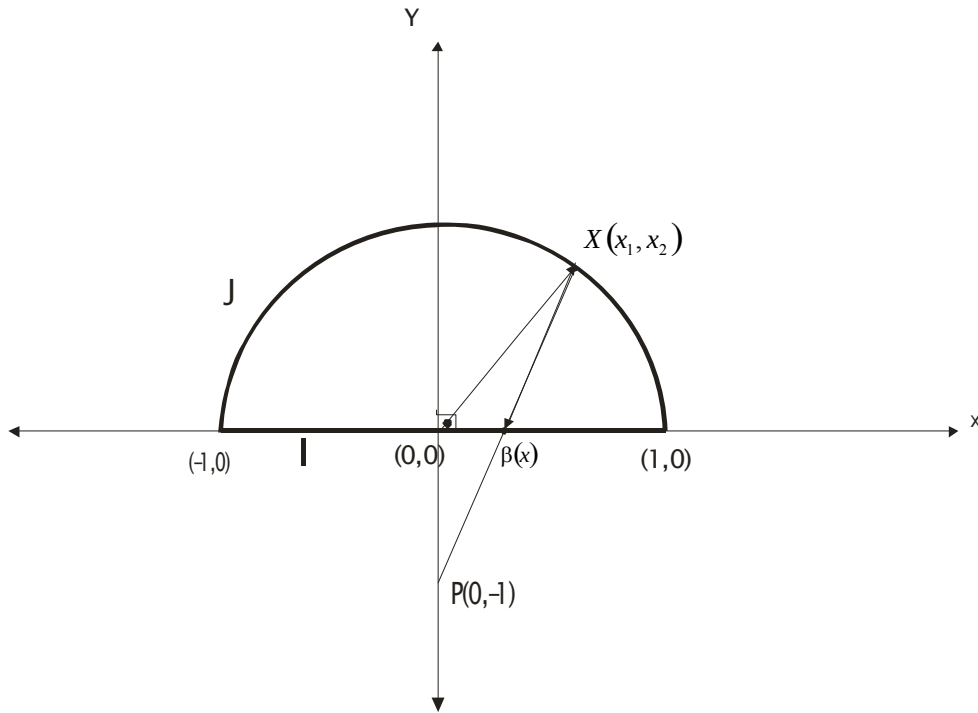
bulunur.

2. Yarı Küre Modeli ile Disk Modeli arasındaki İzometri:

$\beta : J \rightarrow I$ dönüşümü, $(0,0,\dots,-1)$ noktasından merkezi izdüşümdür.

$$\beta : J \rightarrow I$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{(x_{n+1} + 1)}, \dots, \frac{x_n}{(x_{n+1} + 1)}, 0 \right)$$



Şekil 4.3. J den I ya Merkezi İzdüşüm

n=2 için:

$$x_1' \rightarrow \frac{x_1}{x_2 + 1}$$

$$x_2' \rightarrow 0$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2 + 1}, 0 \right)$$

iki boyutlu durum ele alınırsa,

$$\overrightarrow{0\beta(x)} = \overrightarrow{0X} + \overrightarrow{X\beta(x)}$$

$$= \overrightarrow{0X} + \lambda \overrightarrow{XP}$$

$$= \overrightarrow{0X} + \lambda(\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0X})$$

dır. İfadeler yerine yazılırsa

$$(x_1', 0) = (x_1, x_2) + \lambda[(0, -1) - (x_1, x_2)]$$

$$= (x_1, x_2) + \lambda[-x_1, -1 - x_2]$$

$$(x_1', 0) = [(1 - \lambda)x_1, (x_2 - \lambda(1 + x_2))]$$

$$x_2 - \lambda(1 + x_2) = 0$$

$$\lambda = \frac{x_2}{x_2 + 1}$$

bulunur.

$$x_1' \rightarrow (1 - \lambda)x_1$$

İfadesinde λ değeri yazılacak olursa

$$x_1' \rightarrow \frac{x_1}{x_2 + 1} \quad \text{ve} \quad x_2' \rightarrow 0$$

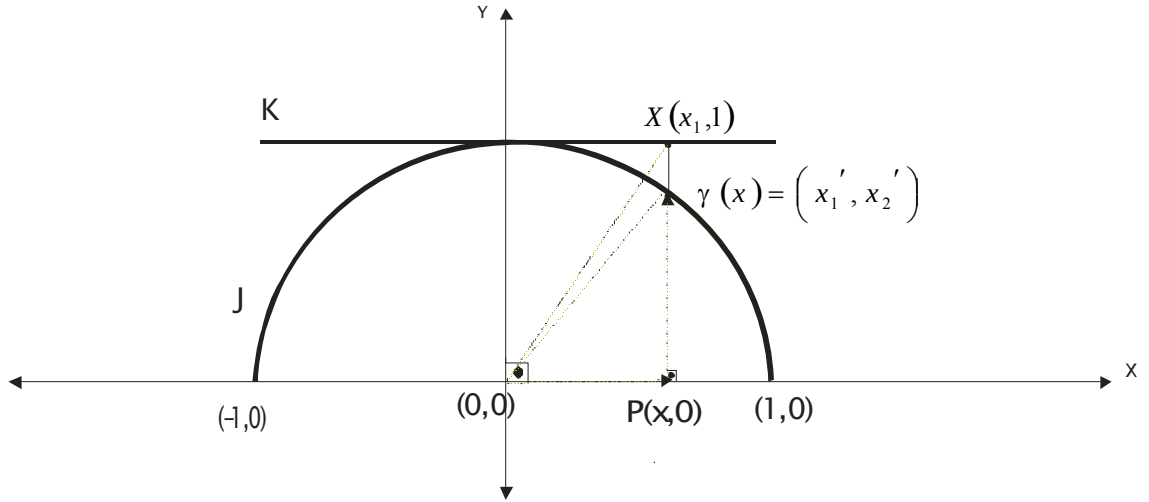
elde edilir.

3. Klein Modeli ile Yarı Küre Modeli Arasındaki İzometri:

$\gamma : K \rightarrow J$ dönüşümü, dik izdüşümdür.

$$\gamma: K \rightarrow J$$

$$(x_1, \dots, x_n, 1) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \sqrt{(1-x_1^2 - \dots - x_n^2)})$$



Şekil 4.4. K den J ye Dik İzdüşüm

n=2 için;

$$x_1' \rightarrow x_1, \quad x_2' \rightarrow \sqrt{(1-x_1^2)}$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, \sqrt{(1-x_1^2)})$$

iki boyutlu durum ele alınırsa,

$$\overrightarrow{0\gamma(x)} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{P\gamma(x)}$$

$$= \overrightarrow{0P} + \lambda \overrightarrow{PX}$$

$$= \overrightarrow{0P} + \lambda \left[\left(\overrightarrow{0X} \right) - \left(\overrightarrow{0P} \right) \right]$$

dır. İfadeler yerine yazılırsa

$$(x_1', x_2') = (x_1, 0) + \lambda [(x_1, 1) - (x_1, 0)]$$

$$(x_1', x_2') = (x_1, \lambda)$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 1$$

ifadesinde x_2' yerine λ yazılırsa

$$x_1^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt{(1 - x_1^2)}$$

bulunur.

$$x_1' \rightarrow x_1$$

$$x_2' \rightarrow \lambda \quad \text{den}$$

$$x_1' \rightarrow x_1 \quad \text{ve} \quad x_2' \rightarrow \sqrt{(1 - x_1^2)}$$

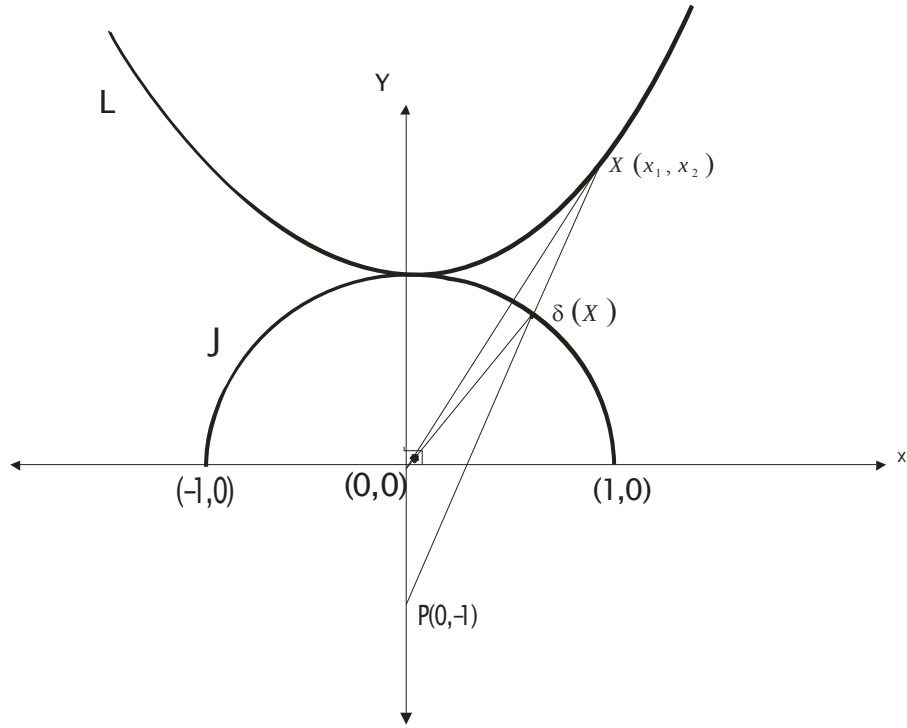
elde edilir.

4. Hiperboloid Modeli ile Yarı Küre Modeli Arasındaki İzometri:

$\delta : L \rightarrow J$ dönüşümü, $(0, 0, \dots, -1)$ noktasından merkezi izdüşümdür.

$$\delta : L \rightarrow J$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$



Şekil 4.5. L den J ye Merkezi İzdüşüm

n=2 için:

$$(x_1, x_2) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right)$$

$$x_1' \rightarrow \frac{x_1}{x_2} \text{ ve } x_2' \rightarrow \frac{1}{x_2}$$

iki boyutlu durum ele alınırsa,

$$\overrightarrow{0\delta(x)} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{P\delta(x)}$$

$$= \overrightarrow{0P} + \lambda \overrightarrow{PX}$$

$$= \overrightarrow{0P} + \lambda(\overrightarrow{0X} - \overrightarrow{0P})$$

$$= (0, -1) + \lambda[(x_1, x_2) - (0, -1)]$$

$$\overrightarrow{0\delta(x)} = [\lambda x_1, -1 + \lambda(x_2 + 1)]$$

$$x_1' \rightarrow \lambda x_1 \quad \text{ve} \quad x_2' \rightarrow -1 + \lambda(x_2 + 1)$$

ifadesi genellenirse;

$$x_1' \rightarrow \lambda x_1$$

.

.

.

$$x_{n+1}' \rightarrow -1 + \lambda(x_{n+1} + 1)$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 + x_{n+1}'^2 = 1$$

$$x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = 1 - x_{n+1}'^2$$

$$\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 1 - [-1 + (\lambda(x_{n+1} + 1))]^2$$

$$\lambda^2(x_{n+1}^2 - 1) = [1 - (-1 + \lambda(x_{n+1} + 1))][1 + (-1 + \lambda(x_{n+1} + 1))]$$

$$\lambda^2(x_{n+1} - 1)(x_{n+1} + 1) = (2 - \lambda(x_{n+1} + 1))(\lambda(x_{n+1} + 1))$$

$$\lambda x_{n+1} - \lambda = 2 - \lambda x_{n+1} - \lambda$$

$$\lambda = \frac{2}{2x_{n+1}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$x_1' \rightarrow \frac{x_1}{x_{n+1}}, \quad x_2' \rightarrow \frac{x_2}{x_{n+1}}, \quad \dots, \quad x_{n+1}' \rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$(x_1', x_2') = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right)$$

elde edilir.

Her bir dönüşüm değer kümesinden tanım kümesine pullback dönüşümdür. Riemann metriğinin standart bir şekilde pullback dönüşümü izometridir. Bu dönüşümler 20 farklı şekilde olabilir. K Klein model üzerindeki metriğe pullback uygulanırsa; J üzerinde metriğin yapısı $\gamma: K \rightarrow J$ dönüşümü yolu ile sağlanır. Bunlar sıra ile aşağıda gösterilmiştir.

1. $\alpha: J \rightarrow H$ alınır; $\alpha^*(ds_H^2) = ds_J^2$ olduğu görülebilir.

$$y_2 = \frac{2x_2}{(x_1 + 1)}, \dots, y_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{(x_1 + 1)}$$

alındığında,

$$y_i = \frac{2x_i}{x_1 + 1}$$

den

$$dy_i = \frac{2}{(x_1 + 1)} \left(dx_i - \frac{x_i}{(x_1 + 1)} dx_1 \right), \quad dy_1 = 0$$

dır.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

den dolayı

$$x_1 dx_1 = -(x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1})$$

ve

$$x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2$$

Aşağıdaki basit hesaplama denklemi doğrudur.

$$\begin{aligned}
\alpha^*(ds_H^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_2^2 + \dots + dy_{n+1}^2) \\
&= \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2} \cdot \frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{2dx_1}{x_1 + 1} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2}{(x_1 + 1)} x_1 dx_1^2 + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} (1 - x_1^2) \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2
\end{aligned}$$

$$\alpha^*(ds_H^2) = ds_J^2$$

dır.

2. $\beta: J \rightarrow I$ alınır; $\beta^*(ds_I^2) = ds_J^2$ olduğu görülebilir.

$$y_1 = \frac{x_1}{(x_{n+1} + 1)}, \quad y_2 = \frac{x_2}{(x_{n+1} + 1)}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{x_n}{(x_{n+1} + 1)}, \quad y_{n+1} = 0$$

alındığında

$$y_i = \frac{x_i}{(x_{n+1} + 1)}$$

olur.

Diferansiyeli ise

$$dy_i = \frac{1}{(x_{n+1} + 1)} \left[dx_i - \frac{x_i}{(x_{n+1} + 1)} dx_{n+1} \right]$$

şeklindedir.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2$$

den dolayı,

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i dx_i = -x_{n+1} dx_{n+1}$$

bulunur.

Şimdi ;

$$\begin{aligned} \beta^*(ds_I^2) &= 4. \frac{\sum_{i=1}^n dy_i^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^2} \\ &= 4. \frac{\frac{1}{(x_{n+1} + 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n \left(dx_i - \frac{x_i}{(x_{n+1} + 1)} dx_{n+1} \right)^2 \right]}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(x_{n+1} + 1)^2}\right)^2} \\ &= 4. \frac{\frac{1}{(x_{n+1} + 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \frac{dx_{n+1}}{(x_{n+1} + 1)} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1} + 1)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]}{\left[1 - \frac{1}{(x_{n+1} + 1)^2} (1 - x_{n+1}^2)\right]^2} \\ &= 4. \frac{\frac{1}{(x_{n+1} + 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \frac{x_{n+1}}{(x_{n+1} + 1)} dx_{n+1}^2 + \frac{(1 - x_{n+1}^2)}{(x_{n+1} + 1)^2} dx_{n+1}^2 \right]}{\left[\frac{(x_{n+1} + 1)^2 - (1 - x_{n+1}^2)}{(x_{n+1} + 1)^2} \right]^2} \end{aligned}$$

$$= 4. \frac{\frac{1}{(x_{n+1}+1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{(2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1 - x_{n+1}^2)}{(x_{n+1}+1)^2} dx_{n+1}^2 \right]}{\left[\frac{2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}}{(x_{n+1}+1)^2} \right]^2}$$

$$= 4. \frac{\frac{1}{(x_{n+1}+1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{(x_{n+1}+1)^2}{(x_{n+1}+1)^2} dx_{n+1}^2 \right]}{\left[\frac{2x_{n+1}(x_{n+1}+1)}{(x_{n+1}+1)^2} \right]^2}$$

$$= 4. \frac{1}{(x_{n+1}+1)^2} \cdot \frac{(x_{n+1}+1)^4}{4x_{n+1}^2(x_{n+1}+1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2 \right]$$

sonuç olarak

$$\beta^*(ds_I^2) = ds_J^2$$

dir.

3. $\beta: K \rightarrow J$ alınırsa; $\gamma^*(ds_J^2) = ds_K^2$ olduğu görülebilir.

$$y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n \quad \text{ve} \quad y_{n+1}^2 = 1 - y_1^2 - \dots - y_n^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2$$

Sonra

$$dy_i = dx_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{için} \quad \text{ve}$$

$$y_{n+1} dy_{n+1} = -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n)$$

dir.

Böylece

$$\gamma^*(ds_J^2) = \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2) + \frac{1}{y_{n+1}^2} dy_{n+1}^2$$

$$= \frac{1}{(1-x_1^2-\dots-x_n^2)}(dx_1^2+\dots+dx_n^2) + \frac{(x_1dx_1+\dots+x_ndx_n)^2}{(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^2}$$

$$\gamma^*(ds_J^2) = ds_K^2$$

dir.

4. $\beta: L \rightarrow J$ alınırsa; $\delta^*(ds_J^2) = ds_L^2$ olduğu görülebilir.

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_{n+1}}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}},$$

alındığında

$$y_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$$

$$dy_i = \frac{1}{x_{n+1}} \left(dx_i - \frac{x_i}{x_{n+1}} dx_{n+1} \right), \quad dy_{n+1} = -\frac{dx_{n+1}}{(x_{n+1})^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = -1 + x_{n+1}^2,$$

den dolayı

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n = x_{n+1} dx_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i dx_i = x_{n+1} dx_{n+1}$$

bulunur.

Aşağıdaki basit hesaplama denklemi doğrudur;

$$\delta^*(ds_J^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} dy_i^2}{(y_{n+1})^2}$$

$$= \frac{1}{(y_{n+1})^2} [dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2 + dy_{n+1}^2]$$

$$= (x_{n+1})^2 \left[\frac{1}{(x_{n+1})^2} \left(\sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1})^4} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \cdot \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \cdot x_{n+1} dx_{n+1} + (-1 + x_{n+1}^2) \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2dx_{n+1}^2 - \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} + dx_{n+1}^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2
\end{aligned}$$

$$\delta^*(ds_J^2) = ds_L^2$$

dir.

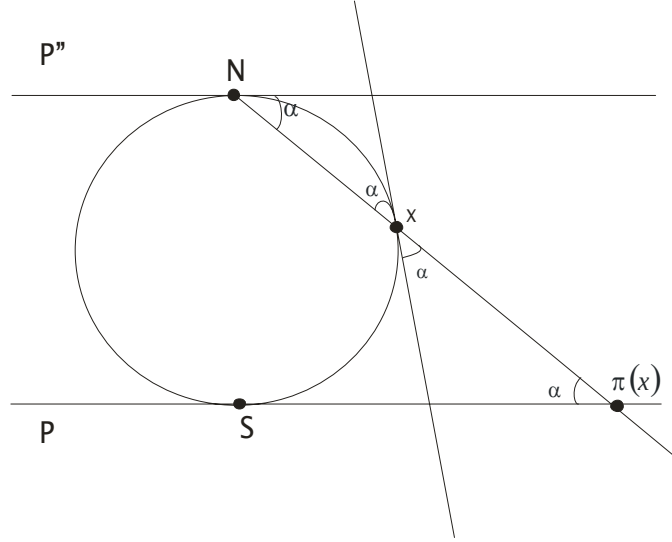
4.1. Stereografik İzdüşüm

Buradaki modeller arasındaki ilişkileri anlamak için dönüşümlerin geometrik özelliklerini anlamak faydalıdır. Bunların iki tanesi küreden düzleme doğru merkezi veya stereografik izdüşümdür. Bu bölümde, stereografik izdüşümün bazı özellikleri verilecektir.

Genel olarak analitik ispatı ve üç boyutlu uzayda geometrik ispatı verilecektir.

4.1.1. Tanım: $(n+1)$ - boyutlu R^{n+1} Öklidyen uzayda; S^n , n - boyutlu küre olsun.

P , S noktasında S^n küresinin teğet düzlemi olsun. S noktasını S^n ' nin güney kutbu gibi düşünülürse, N , S^n de S noktasının antipodal noktasını belirtsin. Buradaki noktayı S^n ' nin kuzey kutubu gibi düşünülürse, eğer $S^n \setminus \{N\}$ ise, x ve N ' i içeren doğru üzerinde P nin bir tek $\pi(x)$ noktası vardır. Buna x den P ye bir stereografik izdüşüm denir (Şekil 4.6).



Şekil 4.6. Stereografik İzdüşüm

4.1.2. Teorem: (Açıların Korunumu =Konformallik)

$S^n \subset R^{n+1}$, P, S, N ve π (genişletilmiş) yukarıdaki gibi verilsin. Bu durumda π , $S^n \setminus \{N\}$ de eğriler arasındaki açıları korur. Ayrıca, eğer $x \in S^n \setminus \{N, S\}$ ve $T = xy$; x de S^n nin teğet doğru parçası ise, $\pi(x)xy$ ve $x\pi(x)\pi(y)$ açıları ya eşit ya da $\pi(y)$ olduğu zaman tümleyen olarak tanımlanır.

İspat:

İlk olarak, keyfî boyutlarda $S^n \setminus \{N\}$ de ki eğriler arasındaki açıları koruyan π dönüşümü verilirse.

Her şey açıkça normalleştirebilirse öyle ki S^n , aslında R^{n+1} de birim küredir.

S , $(0,0,\dots,-1)$ koordinatları ile nokta,

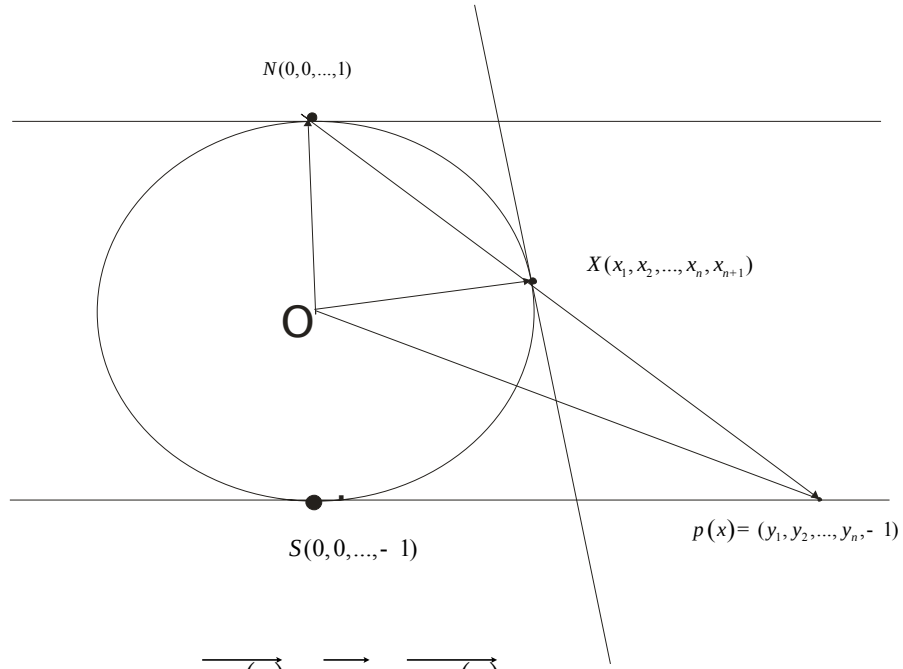
N , $(0,0,\dots,1)$ koordinatları ile nokta,

P , $x_{n+1} = -1$ düzlemdir ve $\pi : S^n \rightarrow P$, $\pi(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n, -1)$ formülü tarafından verilir.

Burada

$$y_i = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} x_i$$

dir.



$$\overrightarrow{0\pi(x)} = \overrightarrow{0N} + \overrightarrow{N\pi(x)}$$

$$= \overrightarrow{0N} + \lambda \overrightarrow{NX}$$

$$= \overrightarrow{0N} + \lambda(\overrightarrow{0X} - \overrightarrow{ON})$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_n, -1) = (0, 0, \dots, 1) + \lambda[(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) - (0, 0, \dots, 1)]$$

$$= [\lambda x_1, \dots, 1 + \lambda(x_{n+1} - 1)]$$

Bu durumda

$$y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, \dots, y_{n+1} = 1 + \lambda(x_{n+1} - 1)$$

den

$$y_i = \lambda x_i$$

dir.

$$y_{n+1} = -1$$

olduğundan

$$-1 = 1 + \lambda(x_{n+1} - 1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2}{x_{n+1} - 1}$$

Buradan

$$y_i = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} x_i$$

dir.

P de $ds^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2$ Öklidyen metrik ve S^n e pull back edilirse $(\pi^*(ds^2))$ pullback dönüşüm), dy_i nin pullback hali

$$\frac{-2}{x_{n+1} - 1} \left(dx_i - \frac{x_i}{x_{n+1} - 1} dx_{n+1} \right)$$

dir.

$x \in S^n$ olduğundan, aşağıdaki iki denklem yazılabilir;

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2$$

ve

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n + x_{n+1} dx_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i dx_i = -x_{n+1} dx_{n+1}$$

dır.

Buradaki denklemlerden,

$$\pi^*(ds^2) = dy_{n+1}^2$$

$$= \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 - 2 \cdot \frac{dx_{n+1}}{(x_{n+1} - 1)} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1} - 1)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]$$

$$= \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{2x_{n+1}}{(x_{n+1} - 1)} dx_{n+1}^2 - \frac{(x_{n+1}^2 - 1)}{(x_{n+1} - 1)^2} dx_{n+1}^2 \right]$$

$$= \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{2x_{n+1} - x_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1} dx_{n+1}^2 \right]$$

$$= \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} \left[\sum_{i=1}^n dx_i^2 + dx_{n+1}^2 \right]$$

$$\pi^*(ds^2) = \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2)$$

kolayca bu sonuç çıkar.

Bu hesaplama aslında özdeşlemedir. Buradan şu sonuç çıkarılabilir ki, P üzerindeki Öklidyen metriğin pullback i her bir noktada S^n üzerindeki Öklidyen metriğinin pozitif bir çarpan ile çarpımına eşittir.

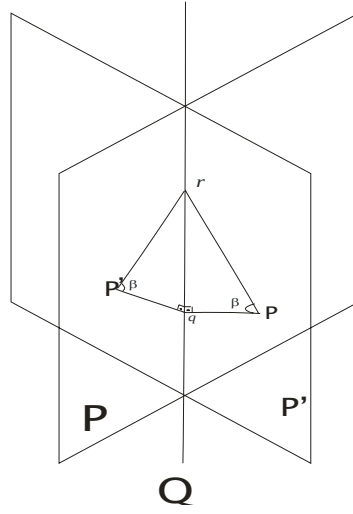
Teğet uzaydaki uzaklıkların pozitif sabite göre çarpılması açıları değiştirmez.

Dolayısıyla $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow P$ dönüşümü açıları korur .

Teoremin ikinci iddiası için $n+1=3$ boyutlu olması durumunda geometrik ispatı verilecektir.

$(n+1)$ - boyutlu R^{n+1} Öklidyen uzayında n - boyutlu P ve P' düzlemlerini göz önüne alınsın. Bu iki düzlem $(n-1)$ - boyutlu bir Q düzlemi boyunca kesişsin.

$p \in P$, $q \in Q$ ve $p' \in P'$ noktalarını aldığımız zaman pq ve $p'q$ doğru parçalarının uzunlukları eşittir ve Q ya diktir.



Şekil 4.7. qpr ve $qp'r$ açıları

Yukarıdaki şekil 4.7 den görüleceği gibi $r \in Q$ ise qpr ve $qp'r$ açıları eşittir. Benzer şekilde $p'pr$ ve $pp'r$ açıları da eşittir.

Teorem 4.1.2 nin 2. iddiasını ispatlamak için, x ve y yi içeren bir M doğrusu alındığı zaman M ile P kesişir. Böylece M ve P nin kesiştiğini kabul edilebilir. π dönüşümü, M nin noktalarını $\pi(x)$ ve $\pi(y)$ yi içeren doğru olarak tanımlanır.

Böylece kabul edilebilir ki $y \in P$ dir. Şekil 4.6 dan görülebiliyor. P düzlemini S^n küresine teğet olarak alınabilir. P' düzlemini de x noktasında S^n düzlemine teğet alınabilir. $p' \in P'$ ve $p \in P$ noktaları için, $p = \pi(x) \in P$ ve $p' = x \in P'$ noktalarını, Q düzlemi için P ve P' nün arakesiti olarak alınabilir. r noktası için y noktası alınabilir. Şimdi de söylenebilir ki $p'pr$ ve $pp'r$ açıları eşittir, üç boyutlu uzayda qpr ve $qp'r$ açılarının eşit olması göstermektedir ki π , verilen herhangi bir eğri arasındaki açıyı korumaktadır. Çünkü bu açı pq ve $p'q$ teğet doğrultuları arasındaki açıdır. Teorem 4.1.2 nin ikinci iddiasını ispatlar.

BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın sonucunda Hiperbolik uzayın beş temel analitik modeli verilmiş ve bu modeller arasındaki izometrilere gösterilmiştir. Bu modellerden bazılarının konformal bazılarının projektif olarak denk olduğu ortaya konmuştur. Daha ileriki çalışmalarımızda bu modeller üzerinde tanımlı geometrik nesnelerin özellikleri araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Schlenker, J.M., Polyedres dans les espaces de Sitter-hyperboliques, preprint,1996.
- [2] Schlenker, J.M., Metriques sur les polyedres hyperboliquesconvexes, Journal of Differential Geometry, 48, 323-405,1998.
- [3] Hodgson, C.D. and Rivin, I. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, Invent. Math., 111, 77-111, 1993.
- [4] Santalo, L., Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its applications,Vol 1, Addison-Wesley, 1976.
- [5]Beltrami, E., “Saggio di interpetrazione della geometria non-Euclidea”, Giorn. Mat. ,6, 248-312, 1868.
- [6]Cannon W.J.,Floyd W.J., Kenyon R., Parry R.W. “Hyperbolik Geometry” MSRI Puations Vol 31,1997.
- [7] Ratcliffe, J.G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag , Berlin, 1994.
- [8] Vinberg, E.B., Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 29, Springer-Verlag, 4-79, 1993.
- [9] O’neil, B., Semi-Riemannian Geometry , Academic Press. London, 1983.
- [10] Yakut, A.T., Hiperbolik Uzayda Simplexlerin Tepe Açılıarı, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Aralık, 2004.
- [11]Cannon W.J.,Floyd W.J., Kenyon R., Parry R.W., Hyperbolik Geometry, MSRI Publications Vol 31,1997.