

**FİZİK VE MEKANİKTE TENSÖR
UYGULAMALARI**
Ayhan SARAÇOĞLU
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN
2010
Her Hakkı Saklıdır.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK VE MEKANİKTE TENSÖR UYGULAMALARI

Ayhan SARAÇOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2010

Her Hakkı Saklıdır

Prof. Dr Abdullah MAĞDEN danışmanlığında, Ayhan SARAĐOĐLU tarafından hazırlanan bu çalışma 22../11./2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Abdullah Mağden İmza

Üye Prof. Dr. Arif Salımov İmza

Üye Doç. Dr. Abdullah Kaylan İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİZİK VE MEKANİKTE TENSÖR UYGULAMALARI

Ayhan SARAÇOĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

Bu tezde, Euclidean ve Hermit lineer uzayları gibi uzayların afin uzaylarını oluşturan izdüşüm, momentum, dönme ve yansıma tensörleri verilmiştir. Ayrıca afiniteler, homoteziler, izometrilere gibi afin geometrik tensörler ve homografiler yardımıyla Fizik ve Mekanikte kullanılan bazı önemli tensörler incelenmektedir.

2010, 119 sayfa

Anahtar Kelimeler: Euclidean tensörü, izdüşüm tensörü, dönme tensörü, yansıma tensörü, afin geometrik tensörler, homografiler, stress ve strain tensörleri.

ABSTRACT

Master Thesis

TENSOR APPLICATIONS IN PHYSICS AND MECHANICS
Ayhan SARAÇOĞLU

Atatürk University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

In this thesis, projection, momentum, rotation and reflection tensors comprising the affine spaces of linear spaces such as Euclidean and Hermitian spaces are given moreover, affinities, homotheties, isometries, affine geometric tensors and with the help of homographies some important tensors used in physics and mechanics are discussed.

2010, 119 pages

Keywords: Euclidean tensors, projection tensor, rotation tensor, reflection tensor, affine geometric tensors, homographies, stress and strain tensors

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Semra KAYA'ya ve İngilizce öğretmeni Sayın Mustafa İŞGÖR'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman desteklerini esirgemeyen ve bana güvenlerinden ötürü sevgili eşim Mine SARAÇOĞLU'na ve anne babama sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim

Ayhan SARAÇOĞLU

Ağustos, 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	2
2.1. $E^n(\mathbb{R})$ de Euclidean Tensörü	2
2.2. İzdüşüm Tensörü	3
2.3. Momentum Tensörü	9
2.4. Dönme Tensörü	11
2.5. Yansıma Tensörü	14
3. MATERYAL VE YÖNTEM	27
3.1. Afın Geometrik Tensörler	27
3.2. Homografiler	30
3.3. Afinityeler	32
3.4. Homoteziler	38
3.5. İzometrilere	42
3.6. İzometrilere Çarpımı	66
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	72
4.1. Fizik ve Mekanikte Tensörler	72
4.2. ‘S’ Gerilim (Strees) Tensörü	74
4.3. ‘ Γ ’ Strain Tensörü	78
4.4. S ve Γ nin Tensör İlişkileri. Elastik Tensör	85
4.5. İç Moment Tensörü	105
5. SONUÇ	118
KAYNAKLAR	119
ÖZGEÇMİŞ	120

SİMGELER DİZİNİ

ω	Açısal Hız
T_{DE}	Deformasyon Vektörü
$R_{\bar{e}}$	Dönme Tensörü
$E^n(\mathbb{R})$	Euclidean Uzayı
D_∞	Homojen Koordinatlar
I_G	İç Moment
$P_{\bar{e}}$	İzdüşüm Tensörü
G	Kesme Modülü
$\vec{M}_F$	Kıvrılan Moment
M_{to}	Momentum Tensörü
ν	Poisson Oranı
S	Strees Tensörü
Γ	Strain Tensörü
$\vec{M}_T$	Tork Momenti
$H_{\bar{e}}$	Yansıma Tensörü
E	Young Modülü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. İzdüşüm Tensörü	3
Şekil 2.2. Merkezdeki Ağırlığı Gösteren Uzunluk	7
Şekil 2.3. Vektör Şeması.....	7
Şekil 2.4. Momentum Vektörü	10
Şekil 2.5. Dönme Tensörü	12
Şekil 2.6. Yansıma Tensörü	15
Şekil 3.1. Dik Koordinat Sisteminden Homojen Koordinatlara Geçiş	28
Şekil 3.2. Örnek 3.1. in Şeması.....	35
Şekil 3.3. Eksenel Simetri.....	46
Şekil 3.4. Trasformasyonların Çarpımı.....	67
Şekil 4.1. Strees Kavramı	73
Şekil 4.2. Strain Tensörü.....	78
Şekil 4.3. Termik ve Elastik Tensörler	89
Şekil 4.4. Metal Tüp	101
Şekil 4.5. Metal Tüp Üzerindeki Gerilmeler	102
Şekil 4.6. İç Moment Tensörü	105

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında en yaygın afin tensörlerden bahsedilecektir. Türev ve integral işlemlerini konu alan ve Öklit ve Hermit lineer uzayları gibi uzayların afin uzaylarını oluşturan fonksiyonel tensörlerden bahsedilmektedir. Konum (uzay koordinatları) ve zaman ise bahsedilen fonksiyonellerin başlıca değişkenleridir. Cebir açısından bakıldığında, son zamanlarda daha karmaşık ve anlaşılmaz görünen tensörlerin analizi mümkün görünmektedir. Tensor analizinin seçkin kurucuları Voigt, Levi-Civita, Ricci, Riemann, Christoffel, Einstein, v.b. malesef bu güzel matematiksel yapı ile uğrasmaya başladıklarında, yeteri kadar cebirsel altyapiya sahip değillerdi. Daha sonraki çalışmalarda cebirsel yapı kullanılarak konuya zenginlik kazandırılmıştır.

Bu tez çalışması tensörlerin, pratik problemlerin çözümüne nasıl olanak tanıdığını göstermeyi amaçlamaktadır. Tez çalışması üç kısma ayrılmaktadır. Birinci kısım izdüşüm, momentum, rotasyon ve yansıma tensörlerini içeren $E^n(\mathbb{R})$ deki Öklid tensörlerini kapsamaktadır.

İkinci kısım ise genel affinleri, homotezileri, izometrilere ve çarpımlarını konu alan afin geometrik tensörler ve homografilerden bahsetmektedir.

Son olarak, üçüncü kısım ise stress ve strain tensörleri, elastik tensör ve iç moment tensörleri gibi fizik ve mekanikte önemli bazı tensörleri konu almaktadır.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1. $E^n(\mathbb{R})$ 'de Euclidean Tensörü

$$\vec{x}_j \in V, \quad j = 1, \dots, q$$

vektör ve

$$\xi^i \in V^*, \quad i = 1, \dots, p$$

kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \right)$$

reel değerli fonksiyonun göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, buna multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\omega = t \left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \right) = \lambda t \left(\vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \right) + \mu t \left(\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \right)$$

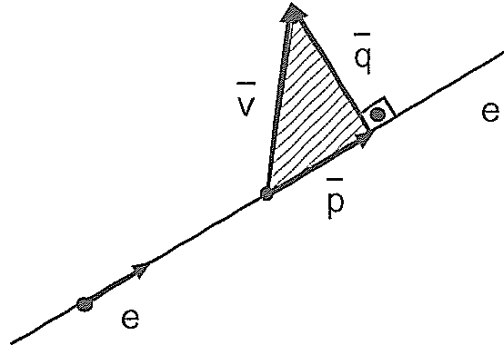
biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_q \times \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne V uzayında p . dereceden kontravaryant, q . dereceden kovaryant tensör adı verilir. $p \geq 0$, $q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentliği, (p, q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p, 0)$ tipli tensörlere kontravaryant tensörler ve $(0, q)$ tipli tensörlere kovaryant tensörler denir (Salimov ve Mağden 2008). $\{\bar{e}_\alpha\}$ ortonormal bazlı $E^n(\mathbb{R})$ Euclidean uzayını göz önüne alalım. Euclidean uzayında vektörlerinin skaler, vektörel ve karma çarpımları gibi temel tensörlerin yanı sıra değişik tensör işlemlerinde kullanılan ve tanımlanabilen diğer tensörler mevcuttur.

2.2. İzdüşüm Tensörü

$E^2(\mathbb{R})$ lineer uzayını ele alalım. Birim vektörü $\bar{e} = \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2$ ve belirli vektörü $\bar{v} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2$ olan bir $\bar{e}$ vektörünü eksen olarak kabul edelim (Şekil 1.1). Verilen eksen $\bar{v}$ nin ortogonal izdüşümü olan $\bar{p} = (x^1)' \bar{e}_1 + (x^2)' \bar{e}_2$ vektörünü bulmak istiyoruz.



Şekil 2.1. İzdüşüm Tensörü

Bu tensöre izdüşüm tensörü adı verilir ve $P_{\bar{e}}$ ile gösterilir:

$$P_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$\vec{P} = P_{\vec{e}}(\vec{v}); \begin{bmatrix} (x^1)' \\ (x^2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

yazarız.

Burada $\vec{p}$ vektörü yukarıda bahsedilen tensör çarpımının kendisi olan bir matris çarpımıdır. $\vec{v}$ vektörünü $\vec{q} = (x^1)''\vec{e}_1 + (x^2)''\vec{e}_2$ vektörüne dönüştüren ve $\vec{p} + \vec{q} = \vec{v}$ eşitliğini sağlayan ve $P_{\vec{e}^\perp}$ ile gösterilen tamamlayıcı izdüşüm tensörü tanımlanır. $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$ ifadesinden matris şeklini;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (x^1)'' \\ (x^2)'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & 1 - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \\ \vec{q} = P_{\vec{e}^\perp}(\vec{v}); \begin{bmatrix} (x^1)'' \\ (x^2)'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde ederiz. $P_{\vec{e}} + P_{\vec{e}^\perp} = I_2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde, $E^3(\mathbb{R})$ lineer uzayını ele alırsak aşağıdaki verileri elde ederiz.

$$\vec{e} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3; \vec{v} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{p} = (x^1)'\vec{e}_1 + (x^2)'\vec{e}_2 + (x^3)'\vec{e}_3; \text{ve } \vec{q} = (x^1)''\vec{e}_1 + (x^2)''\vec{e}_2 + (x^3)''\vec{e}_3;$$

$$P_{\vec{e}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \alpha & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix}$$

Böylece tensör işlemleri olarak:

$$\bar{p} = P_{\vec{e}}(\bar{v}); \begin{bmatrix} (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \alpha & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ve tamamlayıcı izdüşüme göre:

$$\bar{q} = P_{\vec{e}^\perp}(\bar{v}); \begin{bmatrix} (x^1)'' \\ (x^2)'' \\ (x^3)'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta & \sin^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

elde ederiz. Açıkçası

$$P_{\vec{e}} + P_{\vec{e}^\perp} = I_3 \quad (2.5)$$

olur. İzdüşümün temel kuralı olan eş kuvvetliliğe göre; $P_{\vec{e}}^2 = P_{\vec{e}}$ dir(Ruiz-Toloso and Castillo 2005).

Eğer $E^3(\mathbb{R})$ Euclidean uzayını ele alırsak $\bar{v}$ vektörünün bir π düzlemi üzerine izdüşümü vardır. Burada π düzlemi lineer alt uzayın tabanı olarak seçilen ve iki orthogonal birim vektörden elde edilen ($\bar{\pi}_1 \bullet \bar{\pi}_2 = 0$) vektör halinde bir düzlemdir.

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 &= \cos \alpha_1 \bar{e}_1 + \cos \beta_1 \bar{e}_2 + \cos \gamma_1 \bar{e}_3 \\ \bar{\pi}_2 &= \cos \alpha_2 \bar{e}_1 + \cos \beta_2 \bar{e}_2 + \cos \gamma_2 \bar{e}_3 \end{aligned}$$

biçiminde dir. Gerçekten $\bar{\pi}_1 \bullet \bar{\pi}_2 = 0$ dır. Bu izdüşüm tensörünü P_π olarak ifade ederiz. $\bar{\pi}_1$ ve $\bar{\pi}_2$ birim vektörleri ile gösterilen eksenlerin her biri üzerindeki $\bar{v}$ vektörünün üzerine $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ izdüşümlerinin vektör toplamı $P_\pi(\bar{v})$ olsun. $P_\pi(\bar{v}) = \bar{p}_\pi$ ise;

$$\bar{p}_\pi = P_\pi(\bar{v}) = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = P_{\bar{\pi}_1}(\bar{v}) + P_{\bar{\pi}_2}(\bar{v}); \bar{p}_\pi = (x^1)'_{\pi} \bar{e}_1 + (x^2)'_{\pi} \bar{e}_2 + (x^3)'_{\pi} \bar{e}_3$$

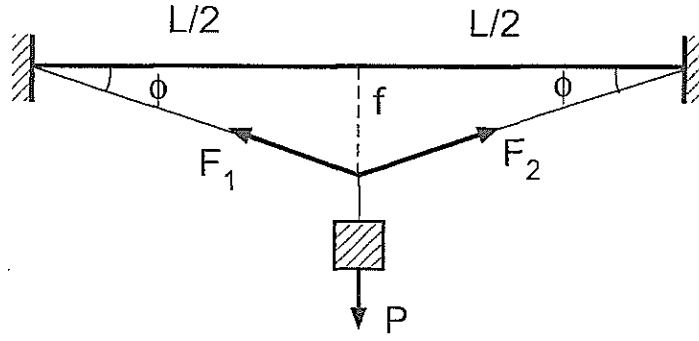
ve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{bmatrix}_{\pi} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \cos \beta_1 & \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_1 \cos \beta_1 & \cos^2 \beta_1 & \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 & \cos \beta_1 \cos \gamma_1 & \cos^2 \gamma_1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_2 & \cos \alpha_2 \cos \beta_2 & \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_2 \cos \beta_2 & \cos^2 \beta_2 & \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 & \cos \beta_2 \cos \gamma_2 & \cos^2 \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

olur.

Bazı yazarlar bu tensörü $k \neq 0$ ve $k \in \mathbb{R}$ için kP_π ile gösterir ve yer değişim tensörü adını verirler(Ruiz-Toloso and Castillo 2005).

Örnek 2.1. ($E^2(\mathbb{R})$ de $S = \sigma P_{\bar{e}}$ tensörü): L uzunluğunda yatay bir ipin orta noktasından bir P ağılığı asarsak ipte bir f yer değiştirmesi meydana gelir (Şekil 2.2).



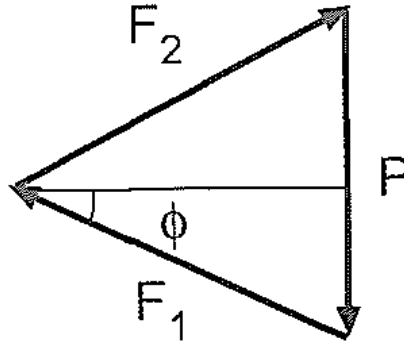
Şekil 2.2. Merkezdeki ağırlığı gösteren uzunluk

1. Ağırlık tarafından oluşturulan F çekme kuvvetini bulunuz.
2. A kesiti için ip gerilmesi σ olan ve e eksenine aynı doğrultuda olan σP_e tensörüne eşit bir S gerilme tensörünü bulunuz.
3. S yi kullanarak $\bar{e}$ normal birim vektörüyle θ açısı yapan ip gerilme kuvvetini bulunuz.

Çözüm:

1. Problemimizi $E^2(\mathbb{R})$ de gözönüne alalım. Şekil 2.3 teki vektörlerin bileşkesinden:

$$\frac{P/2}{F} = \sin \phi$$



Şekil 2.3. Vektör Şeması

Şekil 2.2 den $\frac{f}{L/2} = \sin \phi$ elde ederiz. Böylece:

$$\frac{P/2}{F} = \frac{f}{L/2} \rightarrow F = \frac{PL}{4f}$$

elde edilir..

2. İp gerilmesi ile $\overline{OX}$ eksenini aynı doğrultuda farz edersek, yani $\bar{e} = \cos 0 \bar{e}_1 + \sin 0 \bar{e}_2$ seçilirse (2.1) den:

$$\begin{aligned} S = \sigma P_{\bar{e}} &= \sigma \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{F}{A} \begin{bmatrix} \cos^2 0^0 & \sin 0^0 \cos 0^0 \\ \sin 0^0 \cos 0^0 & \sin^2 0^0 \end{bmatrix} = \frac{PL}{4fA} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz.

3. A' kesitine normal olan $\bar{n}$ birim vektör $\bar{n} = \cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2$ ve A' kesitindeki σ' gerilmesi $\bar{\sigma}' = S(\bar{n})$ dir, yani

$$\begin{bmatrix} (\sigma^1)' \\ (\sigma^2)' \end{bmatrix} = \frac{PL}{4fA} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \frac{PL}{4fA} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\sigma}' = \frac{PL}{4fA} \cos \theta \bar{e}_1$$

olur.

2.3. Momentum Tensörü

Bu bölümde, $\vec{v}$ vektörünü $\vec{r} \times \vec{v}$ vektörüne dönüştüren ve $M_{t_0}(\vec{r} \times)$ ile gösterilen bir tensör oluşturmaya çalışacağız. Doğal olarak uzayımız $E^3(\mathbb{R})$ dir. $\vec{r}$ ve $\vec{v}$ nin vektörel çarpımı: $\vec{r} = r^1 \vec{e}_1 + r^2 \vec{e}_2 + r^3 \vec{e}_3$ ve $\vec{v} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$,

için

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r^1 & r^2 & r^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = (r^2 x^3 - r^3 x^2) \vec{e}_1 + (r^3 x^1 - r^1 x^3) \vec{e}_2 + (r^1 x^2 - r^2 x^1) \vec{e}_3$$

içimindedir. O zaman

$$M_{t_0}(\vec{r} \times) \vec{v} \equiv \vec{r} \times \vec{v}$$

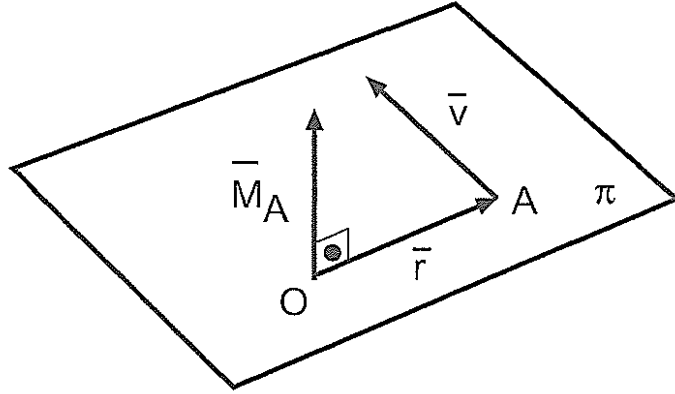
olur. Buradan,

$$M_{t_0}(\vec{r} \times) \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r^2 x^3 - r^3 x^2 \\ r^3 x^1 - r^1 x^3 \\ r^1 x^2 - r^2 x^1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{t_0}(\vec{r} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -r^3 & r^2 \\ r^3 & 0 & -r^1 \\ -r^2 & r^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

elde edilir. Bazı uygulamalarda $\vec{r}$, A noktasının yer vektörüdür ve $\vec{v}$ vektörü buna bağlıdır. Bu durumda dönüştürülen vektöre momentum tensörü denir ve

$$\vec{M} = M_{t_0}(\vec{r} \times)(\vec{v}) \quad (2.8)$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 2.4. Momentum vektörü

Momentum tensörünün izdüşüm tensörüne göre ilginç bir özelliği de bu tensörün ($\vec{r} = \vec{e}$ birimi ile verilen) bir uygulaması ($-P_{\vec{e}^\perp}$) tensörüdür. $\vec{e}$ birim vektör olarak alındığında (2.7) den:

$$\begin{aligned}
 [M_{t_0}(\vec{e} \times)]^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - 1 & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta - 1 & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma - 1 \end{bmatrix} = -(I_3 - P_{\vec{e}}) = -P_{\vec{e}^\perp} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $M_{t_0}(\vec{r} \times)$ tensörüyle ilişkili eksenlere göre momentum tensörü olarak adlandırılan $M_{(\vec{e})}$ ile gösterilen bir diğer tensörü elde ederiz. Bu tensörü $\vec{M}$ vektörünün $\vec{e}$ eksenine üzerine izdüşüm vektörü olarak tanımlarız (Ruiz-Toloso and Castillo). Bu durumda veriler;

1. $\vec{v}$ vektörü onun tatbik noktası A dır.
2. Bir $\vec{e}$ eksenidir.

Böylece,

$$\vec{M}_{(\bar{e})}(\vec{v}) = P_{\bar{e}}(\vec{M}) = P_{\bar{e}}(\vec{M}_{t_0}(\vec{r} \times)(\vec{v}))$$

olur. Ve

$$\vec{m} = \vec{M}_{(\bar{e})}(\vec{v}) = m^1 \bar{e}_1 + m^2 \bar{e}_2 + m^3 \bar{e}_3$$

için

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -r^3 & r^2 \\ r^3 & 0 & -r^1 \\ -r^2 & r^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

matrisi elde edilir.

2.4. Dönme Tensörü

Bu bölümde dönme (rotasyon) tensörlerinin matris halinde ifade edilmelerinden bahsedeceğiz. Dönme tensörü $\bar{e} = \cos \alpha \bar{e}_1 + \cos \beta \bar{e}_2 + \cos \gamma \bar{e}_3$ birim vektörüyle verilen e ekseni ile θ açısı yapan ve bu eksen etrafında $\vec{v}$ vektörünün dönmesini sağlayan bir tensör olup $R_{\bar{e}}$ ile gösterilir (Schouten 1989). Burada θ açısı pozitif yönlü bir açıdır. Şekil 2.5 deki vektörler yardımıyla vektörel bir işlem uygulayacağız. $\overrightarrow{OB} \equiv \vec{v}$ vektörünün eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan $R_{\bar{e}}(\vec{v}) \equiv \overrightarrow{OB}'$ vektörünü düşünelim. Bu vektörü diğer vektörlerin toplamı şeklinde bileşenlerine ayırırsak;

$$R_{\bar{e}} = P_{\bar{e}} + \cos \theta (I_3 - P_{\bar{e}}) + \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times)$$

veya

$$R_{\bar{e}} = \cos \theta I_3 + (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}} + \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times) \quad (2.13)$$

yada (2.3) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak matris formunda :

$$R_{\bar{e}} = \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \\ + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir ve $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ olduğu göz önüne alınarak:

$$R_{\bar{e}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos^2 \alpha + (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cos \theta \\ r_{12} &= \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \theta) - \cos \gamma \sin \theta \\ r_{13} &= \cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \theta) + \cos \beta \sin \theta \\ r_{21} &= \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \theta) + \cos \gamma \sin \theta \\ r_{22} &= \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \cos \theta \\ r_{23} &= \cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \theta) - \cos \alpha \sin \theta \\ r_{31} &= \cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \theta) - \cos \beta \sin \theta \\ r_{32} &= \cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \theta) + \cos \beta \sin \theta \\ r_{33} &= \cos^2 \gamma + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos \theta \end{aligned}$$

$\bar{v} = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3$ ve $R_{\bar{e}}(\bar{v}) = (x^1)' \bar{e}_1 + (x^2)' \bar{e}_2 + (x^3)' \bar{e}_3$ olmak üzere diğer tensörlerde olduğu gibi,

$$R_{\bar{e}} : \begin{bmatrix} (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{bmatrix} = R_{\bar{e}} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Dönme, $E^3(\mathbb{R})$ de bir izometri olduğunda ortogonal bir matris olmalıdır. $P_{\bar{e}}$ ve $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ tensörleri kullanılarak matris halini yazabilir ve şu özelliktedir.

$$\begin{aligned} R_{\bar{e}} \bullet R_{\bar{e}}^t &= \left([\cos \theta I_3 + (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}}] + \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times) \right) \left([\cos \theta I_3 + (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}}] - \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times) \right) \\ &= [\cos \theta I_3 + (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}}]^2 - \sin^2 \theta [M_{t_0}(\bar{e} \times)]^2 \end{aligned}$$

(2.9) eşitliği kullanılır ve $P_{\bar{e}}^2 = P_{\bar{e}}$ izdüşüm özelliği göz önüne alınırsa,

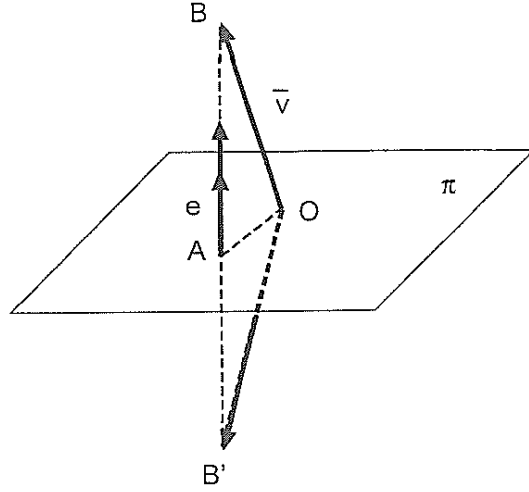
$$\begin{aligned} R_{\bar{e}} \bullet R_{\bar{e}}^t &= \cos^2 \theta I_3 + (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) P_{\bar{e}}^2 + 2 \cos \theta (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}} - \sin^2 \theta [P_{\bar{e}} - I_3] \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) I_3 + (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) P_{\bar{e}} \end{aligned}$$

$$R_{\bar{e}} \bullet R_{\bar{e}}^t = I_3 \rightarrow R_{\bar{e}}^t = R_{\bar{e}}^{-1}$$

bu da $R_{\bar{e}}$ nin ortogonal matrisle temsil edilen bir matris olduğunu gösterir.

2.5. Yansıma Tensörü

$E^3(\mathbb{R})$ Euclidean uzayında, $\bar{e}$ birim vektörü verilen eksene dik olan π düzlemi düşünelim.



Şekil 2.6. Yansıma tensörü

Yansıma tensörü aynı zamanda Householder tensörü olarak da adlandırılır. Bir ayna gibi $\bar{v}$ vektörünün görüntüsünü yansıtır. Bu tensör $H_{\bar{e}}$ ile gösterilir. $\bar{e}$ ve $\bar{v}$ vektörleri daha önceki bölümlerde kullanılmıştı. Şekil 2.6 gösterir ki $\overrightarrow{AB} = P_{\bar{e}}(\bar{v})$, $\overrightarrow{B'B} = 2P_{\bar{e}}(\bar{v})$ ve $\overrightarrow{OB'} = H_{\bar{e}}(\bar{v})$ olduğunda vektör eşitliği;

$$\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{B'B}$$

ve

$$H_{\bar{e}}(\bar{v}) = \bar{v} - 2P_{\bar{e}}(\bar{v}) = (I_3 - 2P_{\bar{e}})\bar{v} \quad (2.15)$$

olur. Daha sonra (2.3) de yerine yazarsak yansıma tensörünün matris gösterimi:

$$\bar{v} = H_{\bar{e}}(\bar{v}); \quad \begin{bmatrix} (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \cos \beta & -2 \cos \alpha \cos \gamma \\ -2 \cos \alpha \cos \beta & \sin^2 \beta - \cos^2 \beta & -2 \cos \beta \cos \gamma \\ -2 \cos \alpha \cos \gamma & -2 \cos \beta \cos \gamma & \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

biçimindedir. $H_{\bar{e}}$ tensörü aynı zamanda izometridir. Çünkü:

$$H_{\bar{e}} \bullet H_{\bar{e}}^t = (I_3 - 2P_{\bar{e}})(I_3 - 2P_{\bar{e}})^t = (I_3 - 2P_{\bar{e}})^2 = I_3 + 4P_{\bar{e}}^2 - 4P_{\bar{e}} = I_3 + 4P_{\bar{e}} - 4P_{\bar{e}} = I_3$$

olup

$$H_{\bar{e}}^t = H_{\bar{e}}^{-1}$$

bulunur.

Örnek 2.2. ($H_{\bar{e}}, R_{\bar{e}}$ ve $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ tensörlerinin özellikleri)

1. $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ tensörünün Levi-Civita tensör permütasyonunun ve $\bar{e}$ birim vektörünün daralması(kontraksiyonu) olduğunu gösteriniz.
2. $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ tensörünün eksen bileşenlerinin $\cos \alpha_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} m_{jk}$ ile gösterildiği ispatlayınız.
3. $\bar{e}$ nin $R_{\bar{e}}$ dönme tensörünün eigen(öz) vektörü olduğunu gösteriniz. Eigen değerini bulunuz.
4. $R_{\bar{e}}$ dönme tensörünün θ değerini bulunuz.
5. $|R_{\bar{e}}| = 1$ olduğunu gösteriniz.
6. $R_{\bar{e}}$ tensöründe $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ elde ediniz.
7. $H_{\bar{e}}$ nin kuvvet özelliği olduğunu gösteriniz(Yani iki kez uygulandığında başlangıç noktasına döner).
8. $|H_{\bar{e}}| = -1$ olduğunu gösteriniz.

Not: $\{\bar{e}_\alpha\}$ ortonormal tabanlarda tensör indisleri kontravaryant veya kovaryant olduğunu hatırlayınız.

Çözüm:

1. $n=3$ için Levi-Civita permutasyonunu düşünelim.

$$[\varepsilon_{ijk}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada i blok satır indisi, j her bloğun satırı ve k her bloğun sütunudur. $\bar{e}$ birim vektörü $\bar{e} = \cos \alpha \bar{e}_1 + \cos \beta \bar{e}_2 + \cos \gamma \bar{e}_3$ biçiminde olsun,

$$\begin{aligned} [m_{jk}] &= [-\varepsilon_{\theta jk} x^\theta] = [-\varepsilon_{1jk} x^1 - \varepsilon_{2jk} x^2 - \varepsilon_{3jk} x^3] \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cos \alpha - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cos \beta - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cos \gamma \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu $M_{t_0}(\bar{e} \times)$ tensörünün matris gösterimidir.

$$2. \cos \alpha_1 = -\frac{1}{2} [\varepsilon_{123} m_{23} + \varepsilon_{132} m_{32}] = -\frac{1}{2} ((-\cos \alpha) + (-1) \cos \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{1}{2} [\varepsilon_{213} m_{13} + \varepsilon_{231} m_{31}] = -\frac{1}{2} ((-1) \cos \beta + (-\cos \beta)) = \cos \beta$$

$$\cos \alpha_3 = -\frac{1}{2} [\varepsilon_{312} m_{12} + \varepsilon_{321} m_{21}] = -\frac{1}{2} ((-\cos \gamma) + (-1) \cos \gamma) = \cos \gamma$$

olduğundan

$$\cos \alpha_i \vec{e}_i = \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3 = \vec{e}$$

olur.

3. (2.13) eşitliğinden:

$R_{\vec{e}}(\vec{e}) = \cos \theta I_3(\vec{e}) + (1 - \cos \theta) P_{\vec{e}}(\vec{e}) + \sin \theta M_{t_0}(\vec{e} \times)(\vec{e})$ ve $\vec{e}$ birim vektörünün $\vec{e}$ üzerine izdüşümü kendisi olduğundan $P_{\vec{e}}(\vec{e}) = \vec{e}$ dir.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \alpha - \cos \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $M_{t_0}(\vec{e} \times)(\vec{e}) = \vec{0}$ elde ederiz ve sonra buradan da:

$$R_{\vec{e}}(\vec{e}) = \cos \theta \vec{e} + (1 - \cos \theta) \vec{e} + \vec{0} = \vec{e}$$

olur. Buda $\lambda = 1$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü olduğunu gösterir.

4. (2.14) ten $R_{\vec{e}}$ matrisinin trace(izini) elde ederiz. Bu da:

$$\text{trace}(R_{\vec{e}}) = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cos \theta = 1 + 2 \cos \theta$$

Buradan da $\cos \theta = \frac{\text{trace}(R_{\vec{e}}) - 1}{2}$ elde ederiz.

5. (2.4) bölümde dönme tensörün $R_{\bar{e}}$ ortogonal matrisle ifade edildiğini ve $|R_{\bar{e}}| = \pm 1$ olduğunu göstermiştik. $\bar{e}$ eksenini $\bar{e} \equiv \bar{e}_3$ (OZ eksenini), $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ ve $\cos \gamma = 1$ seçip determinantını aldıktan sonra (2.14) eşitliğinden:

$$|R_{\bar{e}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = +1$$

elde ederiz.

6. (2.13) teki matrisin transpozunu alırsak:

$$R_{\bar{e}}^t = \cos \theta I_3 + (1 - \cos \theta) P_{\bar{e}} - \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times)$$

bulunur. (2.13) ten bu eşitliği çıkarırsak:

$$R_{\bar{e}} - R_{\bar{e}}^t = 2 \sin \theta M_{t_0}(\bar{e} \times) \rightarrow M_{t_0}(\bar{e} \times) = \frac{1}{2 \sin \theta} (R_{\bar{e}} - R_{\bar{e}}^t)$$

olur.

7. (2.15) ten dolayı,

$$H_{\bar{e}}^2 = (I_3 - 2P_{\bar{e}})^2 = I_3^2 + 4P_{\bar{e}}^2 - 4P_{\bar{e}} = I_3 + 4P_{\bar{e}} - 4P_{\bar{e}} = I_3$$

olur.

8. $H_{\vec{e}}$ ortogonal matris olduğundan $|H_{\vec{e}}| = \pm 1$ dir ve $\vec{e} = \vec{e}_3$ seçersek yani $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ ve $\cos \gamma = 1$ alınırsa (2.16) dan:

$$|H_{\vec{e}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

olur.

Örnek 2.3. (Vektör sistemlerinin indirgenmesi): $E_p^3(\mathbb{R})$ afin uzayda veya sıradan bir geometrik uzayda $\vec{V}_i$ vektörler sistemini düşünelim.

Başlangıç noktası $A_1(-1, 0, 2)$ noktası olan vektör: $\vec{V}_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

Başlangıç noktası $A_2(1, 2, 3)$ noktası olan vektör: $\vec{V}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

Başlangıç noktası $A_3(2, 1, 0)$ noktası olan vektör: $\vec{V}_3 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Başlangıç noktası $A_4(0, 1, 2)$ noktası olan vektör: $\vec{V}_4 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

1. $\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{V}_i$ bileşke vektörünü bulunuz. (Bu vektör serbest vektördür.)

2. $O(0, 0, 0)$ için orijine göre sistemin $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^4 M_{t_0}(\vec{r}_i \times)(\vec{V}_i)$ momentum vektörünü

bulunuz. Burada A_i deki her bir noktanın yer vektörü $\vec{r}_i = \overline{OA_i}$ dir ve $\vec{M}_O$ vektörü de orijinden geçtiği kabul edilen serbest bir vektördür.

3. $O'(1, 1, 2)$ noktasına göre sistemin $\vec{M}_{O'}$ momet vektörünü bulunuz. Burada $\vec{r}'_i = \overline{O'A_i}$ dir. $\vec{M}_O$ ve $\vec{M}_{O'}$ vektörleri bağlantılı olmalıdır.

4. $\vec{M}_E = \lambda \vec{R}$ olacal şekilde bir E noktası bulunuz. Yani, $\vec{M}_E$ vektörü ve $\vec{R}$ vektörünün paralel olacak şekilde $E(x, y, z)$ noktası bulunuz. λ sabitini belirleyiniz.

5. Denklem doğrusu E noktasından geçen ve yönü $\vec{R}$ bileşke vektörü yönünde olan sistemin e merkez ekseninin kartezyen denklemi bulunuz.

6. E noktası üzerinde $\vec{M}_{E'} = \vec{M}_E$ eşitliğini sağlayan e ekseninde bir E' noktası belirleyiniz. Bu $\vec{m} = \vec{M}_E$ vektörü sistemin minimum vektörü olarak bilinir.
7. $\vec{m}$ vektörünün e ekseninde, $\vec{M}_O$ vektörünün izdüşümü olduğunu gösteriniz. Yani $\vec{m} = P_e(\vec{M}_O)$.
9. Sistemin dönme yarıçapı ρ sabitini bulunuz.

$$\rho = \frac{|P_{e^\perp}(\vec{M}_O)|}{|\vec{R}|}$$

Çözüm:

1. Dört vektör toplanırsa, yani

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$

$$\vec{R} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \text{ bulunur.}$$

2. (2.7) yi kullanırsak:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O = -\vec{e}_1 - 14\vec{e}_3$$

olur.

$$3. \vec{r}'_i - \vec{r}_i = \overrightarrow{O'A_i} - \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^4 \left[M_{t_0} (\vec{r}'_i \times) (\vec{V}_i) - M_{t_0} (\vec{r}_i \times) (\vec{V}_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^4 M_{t_0} ((\vec{r}'_i - \vec{r}_i) \times) (\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^4 M_{t_0} (\overrightarrow{O'O} \times) (\vec{V}_i) \\ &= M_{t_0} (\overrightarrow{O'O} \times) \left(\sum_{i=1}^4 \vec{V}_i \right) = M_{t_0} (\overrightarrow{O'O} \times) (\vec{R}); \end{aligned}$$

yazılır.

Buradan da $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + M_t (\overrightarrow{O'O} \times) (\vec{R})$ eşitliği elde edilir. Matris gösterimiyle:

$$\vec{M}_{O'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_{O'} = 2\vec{e}_1 - 11\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$$

bulunur.

4. Son eşitliği $E(x, y, z)$ noktasına uygularsak:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + M_{t_0} (\overrightarrow{EO} \times) (\vec{R}) = \lambda \vec{R},$$

bulunur. Burada,

$$\overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{OE} = -x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2 - z\vec{e}_3$$

ve matris yardımıyla:

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazılır. Bu ise:

$$\begin{cases} -y + 2z = 1 + 6\lambda \\ x - 6z = 2\lambda \\ -2x + 6y = 14 + \lambda \end{cases}$$

denklem sistemini verir. Bu sistemin bir çözümü:

$$E\left(-\frac{22}{41}, \frac{85}{41}, \frac{3}{41}\right); \lambda = -\frac{20}{41}$$

olduğundan,

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix}_E = \left(-\frac{20}{41}\right) \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{120}{41} \\ -\frac{40}{41} \\ -\frac{20}{41} \end{bmatrix} \rightarrow \bar{M}_E = \frac{1}{41}(-120\vec{e}_1 - 40\vec{e}_2 - 20\vec{e}_3)$$

elde edilir.

5. e merkez ekseninin denklemi:

$$e \equiv \frac{x + \frac{22}{41}}{6} = \frac{y - \frac{85}{41}}{2} = \frac{z - \frac{3}{41}}{1} = \mu$$

şeklindedir.

6. e eksenindeki keyfi E' noktasının koordinatları ($\mu = 0$ için E noktası):

$$E' \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{22}{41} + 6\mu \\ y = \frac{85}{41} + 2\mu \\ z = \frac{3}{41} + \mu \end{array} \right.$$

biçimindedir. Buna göre $\bar{M}_{E'}$ yi belirleriz. (2.17) E' noktasına uygulandığında

$\bar{M}_{E'} = \bar{M}_O + M_{t_0}(\overline{E'O \times})(\bar{R})$ ve matris gösterimiyle:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\frac{3}{41} + \mu) & -(\frac{85}{41} + 2\mu) \\ -(\frac{3}{41} + \mu) & 0 & (-\frac{22}{41} + 6\mu) \\ (\frac{85}{41} + 2\mu) & -(-\frac{22}{41} + 6\mu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + \frac{6}{41} + 2\mu - \frac{85}{41} - 2\mu \\ 0 - \frac{18}{41} - 6\mu - \frac{22}{41} + 6\mu \\ -14 + \frac{510}{41} + 12\mu + \frac{44}{41} - 12\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{120}{41} \\ -\frac{40}{41} \\ -\frac{20}{41} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\vec{M}_{E'} = \frac{1}{41}(-120\vec{e}_1 - 40\vec{e}_2 - 20\vec{e}_3)$$

bulunur.

7. $\vec{e}$ birim vektörü:

$$|\vec{R}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{41}; \quad \vec{e} = \frac{6}{\sqrt{41}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{41}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{41}}\vec{e}_3.$$

biçiminde bulunur.

$P_{\vec{e}}(\vec{v})$ izdüşüm tensörü (2.3) sağladığından $P_{\vec{e}}(\vec{M}_O)$:

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{41} & \frac{12}{41} & \frac{6}{41} \\ \frac{12}{41} & \frac{4}{41} & \frac{2}{41} \\ \frac{6}{41} & \frac{2}{41} & \frac{1}{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{120}{41} \\ -\frac{40}{41} \\ -\frac{20}{41} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$P_{\vec{e}}(\vec{M}_O) = \vec{m} = \frac{1}{41}(-120\vec{e}_1 - 40\vec{e}_2 - 20\vec{e}_3)$$

elde edilir.

8. (2.4) verilen izdüşüm tensörü, $P_{\vec{e}^\perp}(\vec{M}_O)$ ün matris hali:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{41} & -\frac{12}{41} & -\frac{6}{41} \\ \frac{12}{41} & \frac{37}{41} & -\frac{2}{41} \\ -\frac{6}{41} & -\frac{2}{41} & \frac{40}{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 79 \\ 40 \\ -554 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} |P_{\vec{e}^\perp}(\vec{M}_O)| &= \frac{1}{41} \sqrt{79^2 + 40^2 + 554^2} = \frac{3\sqrt{853 \times 41}}{41} \\ \rho &= \frac{|P_{\vec{e}^\perp}(\vec{M}_O)|}{|R|} = \frac{3\sqrt{853 \times 41}}{41\sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{853}}{41} \end{aligned}$$

bulunur. e eksenini üzerinde herhangi bir noktaya uygulanan $\vec{R}$ ve $\vec{m}$ vektörleri sistem vektörünün verilerine eşittir ve indirgeme olarak adlandırılır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Afin geometrik tensörler

$E_p^n(\mathbb{R})$ reel uzayı, E_p anlık uzayı ve n ise $E^n(\mathbb{R})$ Euclidean afin uzayının boyutunu gösterebilir.

$E_p^n(\mathbb{R})$ uzayı: $\{O, \bar{e}_\alpha\} \equiv \{\text{kartezyen eksenler, apsis eksenleri, ordinatlar, dereceleri, vb}\}$

Bu eksenler lineer Euclidean uzayının $\{\bar{e}_\alpha\}$ bazlı temel vektörlerinin temel bileşenlerini oluşturmaktadır. Diğer koşullar belirtilmedikçe klasik ortonormalize sistemlerini esas alacağız. Herhangi $P \in E^n(\mathbb{R})$ noktası

$$X \equiv \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

olacak şekilde kartezyen koordinatlara sahiptir ve konum vektörü:

$$\overline{OP} \equiv [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n] \quad X \equiv x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + \dots + x^n \bar{e}_n \in E^n(R) \quad (3.1)$$

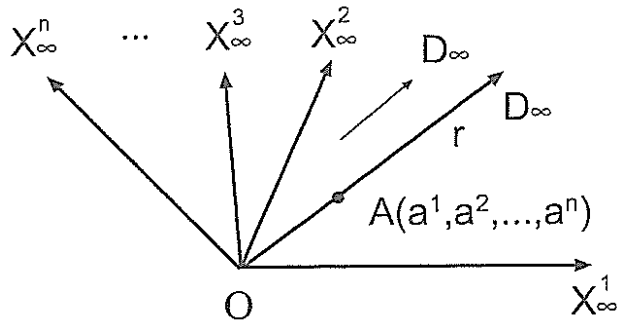
şeklinde. Geometrik uzaylarda sonsuzda sıklıkla noktalar mevcut olduğundan yeni bir P noktası için yeni bir koordinat tanımlanabilir. Bu yeni koordinat onun sonlu veya sonsuz olduğunu açıklar. Eğer P noktası sonlu bir nokta ise iki çeşit koordinata sahiptir.

Birincisi $P(x^1, x^2, \dots, x^n)$ Kartezyen koordinatlar ve ikincisi $P(x'^1, x'^2, \dots, x'^n, t)$ homojen koordinatlardır. Bu iki koordinat sistemi:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^1/t \\ x'^2/t \\ \vdots \\ x'^n/t \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

biçiminde yazılır. Sonlu P noktası Kartezyen koordinatlardan homojen koordinatlara taşıyabilmek için $t = 1$ alırız. Eğer P noktası sonsuz ise $t = 0$ da homojen koordinatlara sahiptir. Sonsuz bir noktanın yönünü belirleyebilmek için O tarafından oluşturulmuş (Şekil 3.1) paralel bir r yardımıyla r üzerinde sonlu bir A noktası olarak $t = 0$ da homojen koordinatları yardımıyla Kartezyen koordinatları oluştururuz (Ruiz-Toloso and Castillo 2005).

$$D_\infty(a^1, a^2, \dots, a^n, 0) \quad (3.3)$$



Şekil 3.1. Dik koordinat sisteminden homojen koordinatlara geçiş

Eğer istenilirse A noktası O noktasından bir birim uzaklıkta olabilir. Yani $|\overline{OA}| = 1$ dir.

Bunun için koordinatları vektörün boyuna bölmemiz gerekir. Sonuç olarak (esas metrik tensör $G \equiv I_n$) olduğundan:

$$D_\infty \left(\frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}}, \dots, \frac{a^n}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}}, 0 \right) \quad (3.4)$$

yazılır. Bunu bazı yazarlar birim vektör yöneticisi yada D_∞ verilen yönün tensörü olarak bazıları ise $D_\infty (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n, 0)$ (3.4) birim doğrultu vektörünün doğrultu kosinüsleri yardımıyla (3.4) den elde edilen her öge olarak ifade ederler:

$$\vec{v} \equiv \overline{OA} \equiv [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_n] \begin{bmatrix} \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \\ \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{a^n}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Buradan, j bileşen

$$\frac{a^j}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0] I_n \begin{bmatrix} \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \\ \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{a^n}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^n)^2}} \end{bmatrix} = \vec{e}_j \bullet \vec{v} = \cos \alpha_j \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Sonsuz noktaların problematiğini D_∞ olarak buluruz. Çünkü geometrik tensörlerin dönüşümlerinin uygulanması bazı durumlarda çok uygundur (Geometrik tensörlerin sonlu P noktalara uygulanmaları nadiren kullanılır).

3.2. Homografiler

$E_p^n(\mathbb{R})$ yi $\{\bar{e}_\alpha\} (G \equiv I_n)$ şeklinde orthonormalize tabanlara karşılık gelen $E^n(\mathbb{R})$ ye afin öklid uzayı olacak şekilde bir geometrik uzay olsun. Kabul edelim ki belirli bir lineer operatör veya endomorfizm T , $E^n(\mathbb{R})$ deki vektörleri dönüştürsün. Bir $A: E_p^n(\mathbb{R}) \rightarrow E^n(\mathbb{R})$ afin dönüşümü $E_p^n(\mathbb{R})$ uzayının P ve Q çiftini $\bar{v} \in E^n(\mathbb{R})$ ye karşılık getirir. Örneğin $A(P, Q) = \bar{v}$, $\{o, \bar{e}_\alpha\}$ ortonormal bazlı $E_p^n(\mathbb{R})$ uzayına karşılık gelir. $\{o, \bar{e}_\alpha\}$ ortonormal baz $E^n(\mathbb{R})$ Euclidean uzayının orthonormalize edilmiş tabanına karşılık gelir. Daha ötesi lineer T operatörü, afin bir transformasyon A benzerliğiyle $E_p^n(\mathbb{R})$ alanına girer. Bu transformasyon f ile gösterilir ve aşağıdaki özellikleri oluşturur.

1. $f = E_p^n(\mathbb{R}) \rightarrow E_p^n(\mathbb{R})$; f , $E_p^n(\mathbb{R})$ de lineer dönüşümdür. $\forall P, Q \in E_p^n(\mathbb{R})$: $f(P) = P'$; $f(Q) = Q'$; $P'Q' \in E_p^n(\mathbb{R})$ burada P' ve Q' noktalarının sonlu veya sonsuz olduğu belirlenmemiştir.

2. $E_p^n(\mathbb{R})$ uzayında P ve Q sonlu rasgele bir nokta olduğu yerde $A(O, Q') = T[A(O, Q)] = T[A(O, P)] + T[A(P, Q)]$ dir.

Eğer $X \in E_p^n(\mathbb{R})$ noktası;

$$f(X) = X \quad (3.7)$$

şartını sağlarsa X çifttir veya invaryat nokta diyebiliriz. $E_p^n(\mathbb{R})$ de afin bir transformasyon 0,1,2,...,n çift veya invaryat noktalara sahip olabilir ve hatta invaryat noktaların lineer alt uzaylarına (bir doğru, düzlem vb.) sahip olabilir. Bir tensör olarak afin transformasyonu işaret edebildiğimizden ve sonsuz P noktaları için onu kullanabildiğimizden, (n+1) sıralı matris sunumunu kullanır ve homojen koordinatlarla çalışırız. Afin geometrik tensör transformasyonları aynı zamanda homografik olarak adlandırılır ve bunların matris gösterimleri

$$X' = F \bullet X \rightarrow \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \\ - \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} & - & a^1 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} & - & a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & - & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} & - & a^n \\ - & - & \dots & - & - & - \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & - & b_{n+1} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ - \\ t \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

biçimindedir. burada F, afin tensördür (Hacısalıhoğlu 2005). (3.8) deki F homografisindeki n sıra bloğu $E_n(\mathbb{R})$ Euclidean uzayında ki T lineer operatörü $T = [t_{ij}]$ ye karşılık gelir. Homojen koordinatlarda $O'(a^1, a^2, \dots, a^n, b_{n+1})$ noktası orijin noktası olan $O, (0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 1)$ noktasına dönüştürülür. Eğer $b_{n+1} = 0$ ise O nun (orjinin) afin noktası O'_∞ da belirtilen doğrultuda sonsuz bir noktadır. Eğer $b_{n+1} \neq 0$ ise bütün koordinatları b_{n+1} birim olması için b_{n+1} ile böleriz. $O'(\frac{a^1}{b_{n+1}}, \frac{a^2}{b_{n+1}}, \dots, \frac{a^n}{b_{n+1}}, 1)$ noktası homojen koordinatlarda kartezyen sonlu bir noktadır.

$$O'(\frac{a^1}{b_{n+1}}, \frac{a^2}{b_{n+1}}, \dots, \frac{a^n}{b_{n+1}}), \quad (3.9)$$

Bu ikinci durumda O orijininin afin transformasyonudur. Bir invaryat nokta ve invaryat noktaların düz bir çizgisiyle (düzlemde) $n=2$ boyutunun homografikleri homojen olarak adlandırılır.

3.3. Afiniteler

Eğer bir homografi sonlu noktaları sonlu noktalara, sonsuz noktaları sonsuz noktalara doğrusal noktaları doğrusal noktalara dönüştürüyorsa ve ayrıca A,B,C doğrusal noktaları için belirli oranları sağlıyorsa o zaman;

$$(A, B, C) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow (A', B', C') = (A, B, C) \quad (3.10)$$

dir ve afinite veya afin homografik dönüşüm olarak adlandırılır. Geometrik dönüşümler $|F| \neq 0$ ise düzenli ve $|F| = 0$ ise tekil veya düzensiz olarak adlandırılır. Afinitelerin matris gösterimi,

$$X' = A \bullet X \rightarrow \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \\ - \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & l^1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & l^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & l^n \\ - & - & \cdots & - & + \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ - \\ t \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

burada dönüşüm matrisi A ile ifade edilir ve

$$|A| \neq 0 \quad (3.12)$$

dır. Yani, bire bir ilişki gereklidir ve buda düzenliliklerdir. A nın blok matrisi T, orthogonal

bir matris olduğunda ($T^t \equiv T^{-1}$) determinant değeri $|A| = \pm 1$ dir ve affinitesi izometri olarak adlandırılır.(doğrudan eğer $|A| = +1$ ise, ve tersine $|A| = -1$ ise) Affiniteler çarpımsal bir non-Abelian grup oluştururlar (Ruiz-Toloso and Castillo 2005).

Örnek 3.1. (Afinite): $n = 2$ boyutunda sıradan bir ($O - XY$) kartezyen sisteminde bir afinite farz edelim. Öyle ki D_∞ ikinci çeyrek dairenin açığırtayında invaryant bir nokta (afinite yönü) ve invaryant noktaların doğrusu (afinitenin e-ekseni) $2x - y - 6 = 0$ olsun. (Şekil 3.2) Ayrıca biliyoruz ki bu affinitede r doğrusu, B ve B' keyfi afin noktalarını birleştiren ve D_∞ eksenini (S, B', B) oranı sabit olacak şekilde bir S noktasını da kesen bir doğrudur. $(S, B', B) = k; k \in \mathbb{R}; k \neq 0$ böyle sabit bir afinite oranı olarak adlandırılır ve bizim durumumuzda bu oran $k = 3$ tür.

1. O ve D_∞ noktalarını birleştiren r doğrusunun kartezyen denklemini bulunuz ve eksenindeki S noktasını belirleyiniz.
2. $O' \in r$ ve $(S, O', O) = k$ olduğundan O' noktasını belirleyiniz.
3. Afinite tensörü A yı bulunuz.
4. Bir önceki sorunun sonucundan yola çıkarak A nın invaryant noktalarının elde edildiği yukarıdaki bilgiyi doğrulayınız.
5. $\Delta(O', P', Q')$ üçgeninin köşelerini bulunuz ve $O(0,0), P(3,0), Q(0,2)$ noktalarının affinitesini bulunuz.
6. $\Delta(O', P', Q')$ ve $\Delta(O, P, Q)$ üçgenlerinin σ alanlarının oranının affinite sabiti k ya eşit olduğunu gösteriniz.
7. Üçgenlerin ağırlık merkezleri G ve G' nün affın noktaları olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

1. D_∞ noktası $D_\infty(-1,1,0)$ homojen koordinatlara sahip olsun, sonlu O noktası $O(0,0,1)$ homojen koordinatlara sahiptir. Böylece homojen koordinatlarda r doğrusunun denklemi:

$$r \equiv \frac{X-0}{-1} = \frac{Y-0}{1} = \frac{t-1}{0} \rightarrow Y + X = 0$$

ve kartezyen koordinatlarda:

$$r \equiv y + x = 0$$

olur.

$$\begin{cases} Y + X = 0 \\ 2X - Y - 6t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini çözersek homojen koordinatlarda $S(2, -2, 1)$ noktasını elde ederiz.

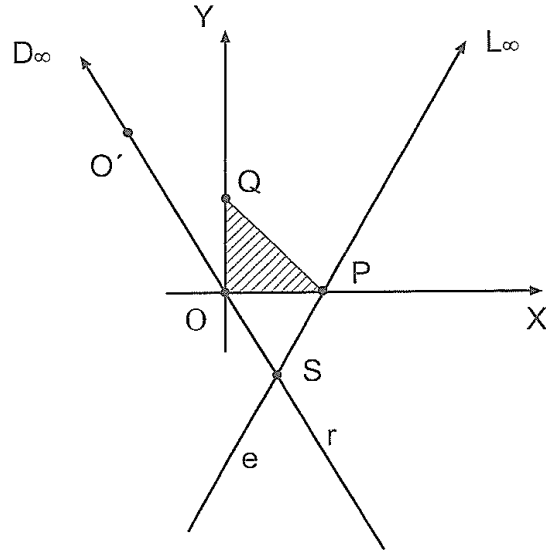
2. Afinite oranı $k > 0$ olduğunda eksen afin noktalarını ayırmaz. Afinite bağıntısını O ve O' noktalarına uygularsak;

$$(S, O', O) = \frac{SO'}{SO} \equiv \frac{X_S - X_{O'}}{X_S - X_O} = \frac{Y_S - Y_{O'}}{Y_S - Y_O} = k$$

elde ederiz. $S(2, 2, 1)$ ve $O(0, 0, 1)$ noktaları homojen koordinatlarda olduğundan

$$\frac{2 - X_{O'}}{2 - 0} = 3; \quad \frac{(-2) - Y_{O'}}{(-2) - 0} = 3; \rightarrow X_{O'} = -4; \quad Y_{O'} = 4$$

dür. Burada homojen koordinatlarda $O'(-4, 4, 1)$ olur.



Şekil 3.2. Örnek 3.1. ün şeması

3. Homojen koordinatlarda eksen denklemi $e \equiv 2X - Y - 6t = 0$ burada örneğin sonlu $P(3,0,1)$ noktası ve sonsuz $L_\infty(1,2,0)$ noktaları elde edebiliriz. Çünkü denklemi sağlamaktadırlar. D_∞, S, P, L_∞ invaryant noktalar olduğundan afin dönüşümlü noktalarını da biliriz. (3.11) deki matris denkleminde yerine yazmak için O,S,P noktalarını ve afin transformlarını seçersek:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada afinite tensörün matrisi olduğu görülür. Açıkçası; affinitenin düzenli karakterini sağlayan $|A| = 1 \neq 0$ elde edilir. A matrisini (3.11) eşitliğin de gereken formata sahip olduğunu gözlemledik.

4. $P(3,0,1)$ ve $L_\infty(1,2,0)$ noktalarından geçen e doğrusu $\frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{t-1}{0} = \lambda$ homojen doğrusuna sahiptir. Böylece homojen koordinatlarda sonlu noktalar için e nin parametrik denklemi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 3+\lambda \\ 2\lambda \\ 1 \end{bmatrix},$$

e nin noktalarını dönüştürürsek:

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}_e &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+\lambda \\ 2\lambda \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9+3\lambda \\ 0+6\lambda \\ 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\lambda \\ 2\lambda \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}_e \end{aligned}$$

burada e -ekseninin tüm noktalarının invaryant olduğunu gösterir. $D_\infty(-1,1,0)$ noktasını dönüştürürsek:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

burada ifadede şart koşulduğu gibi sonsuz $D_\infty(-1,1,0)$ noktası homojen koordinatlarda invaryanttır.

5. $O(0,0,1)$ noktasının transformu $O'(-4,4,1)$ dir ve $P(3,0,1)$ noktasının da $P'(3,0,1)$ dir. $\mathbb{Q}$ nun transformuda:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -16 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/3 \\ 22/3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{Q}'(-16/3, 22/3, 1)$$

dir.

$$6. \sigma \equiv \text{Alan}\Delta(O, P, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{olduğundan,}$$

$$\sigma' \equiv \text{Alan}\Delta(O', P', \mathbb{Q}') = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & -16/3 \\ 4 & 0 & 22/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(-\frac{64}{3} + 22 + \frac{88}{3} - 12 \right) = 9$$

dir.

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{9}{3} = 3 \equiv k$$

elde edilir.

7. Homojen koordinatlarda her iki üçgenin ağırlık merkezleri:

$$X_G = \frac{0+3+0}{3} = 1;$$

$$Y_G = \frac{0+0+2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow G(1, \frac{2}{3})$$

$$X_{G'} = \frac{-4+3-\frac{16}{3}}{3} = -\frac{19}{9};$$

$$Y_{G'} = \frac{4+0+\frac{22}{3}}{3} = \frac{34}{9} \rightarrow G'(-\frac{19}{9}, \frac{34}{9}, 1)$$

ve G ağırlık merkezinin afin dönüşümü:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}-5 \\ \frac{10}{3}+8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{9} \\ \frac{34}{9} \\ 1 \end{bmatrix} \equiv G'$$

bu da afin noktalar olduklarını gösterir.

3.4. Homoteziler (Benzeştirme Dönüşümleri)

Sonlu değişken olmayan birim H noktasına sahip (H; homotezi merkezi) afin dönüşümlere homotezi denir. Herhangi bir X noktası ve onun homotetiği X' , H ile doğrusal olur ve $(H, X', X) = \frac{\overline{HX'}}{\overline{HX}} = k$ durumunu sağlar. 'k' sabiti homotezi oranı olarak adlandırılır; $k \in R, k \neq 0$ Eğer $k > 0$ ise homoteziye düz, $k < 0$ ise homotezi ters olarak adlandırılır. Düz homotezilerde $H \notin \overline{XX'}$ ve ters homotezilerde $H \in \overline{XX'}$ dir. Homoteziler grubu çarpansal non-Abelian bir alt grup oluşturur. Homojen koordinatlarda F homotezi tensörünün matris gösterimi şöyledir.

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \\ - \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & (1-k)h^1 \\ 0 & k & \cdots & 0 & (1-k)h^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & (1-k)h^n \\ - & - & \cdots & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ - \\ t \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Burada $H(h^1, h^2, \dots, h^n)$ homotezi merkezinin kartezyen koordinatlarıdır (Ruiz-Toloso and Castillo 2005). Eşitlik (3.13) gösterir ki tensör, homotezi merkezi ve onun oranı veya diğer yeterli bilgiler verilirse bilinir.

Örnek 3.2 (Homotezi): $n=2$ boyutunda $(O-XY)$ kartezyen sisteminde $H(1,3)$ homotezi merkezi ve $\mathbb{Q}(0,2)$ ve $\mathbb{Q}'(3,5)$ homotetik noktalar çiftini düşünelim.

1. Homotezi oranını bulunuz.
2. Homotezi tensörü F yi bulunuz.
3. H nin invaryant nokta olduğunu ispatlayınız.
4. $x - y + 6 = 0$ doğrusunun homotetik doğrusunu bulunuz.
5. $x^2 - y^2 = 4$ hiperbolünün homotetik doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

1. Verilenleri eşitlik (3.13) te uygularsak:

$$F = \begin{bmatrix} k & 0 & (1-k).1 \\ 0 & k & (1-k).3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve $\mathbb{Q}'$ noktası $\mathbb{Q}$ noktasının transformu olduğundan $\mathbb{Q}'$ ve $\mathbb{Q}$ noktalarını homojen koordinatlara uygularsak;

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & (1-k) \\ 0 & k & (3-3k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3 = 1-k \\ 5 = 2k + 3 - 3k \rightarrow k = -2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

olur. Buda homotezinin ters karakterini gösterir.

2. F matrisinde $k = -2$ homotezi oranını yerine yazarsak

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

buda homotezi tensör matrisidir.

3. $H(1,3,1)$ noktasının transformu;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv H$$

olarak belirlersek invaryant karakteri ispatlar.

$$4. \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} \text{ homotezi denkleminde}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0$$

matris şeklinde verilen doğruyu (3.14) yerine yazarsak

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x' - y' - 6t' = 0$$

elde edilir. Buda kartezyen koordinatlarda $x - y - 6 = 0$ dir.

5. Hiperbolü homojen koordinatlarda ve matris şeklinde ifade edersek:

$$\begin{bmatrix} x & y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0$$

olur ve (3.14) de yerine yazarsak:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} x' & y' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = 0$$

Buradan da homotetik hiperbol

$$\begin{bmatrix} x' & y' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 9 \\ -3 & 9 & -88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = 0$$

olur. Kartezyen koordinatlarda $(x)^2 - (y)^2 - 6x + 18y - 88 = 0$ olur.

3.5. İzometrilere

$E_p^n(\mathbb{R})$ uzayı ile ilgili $E^n(\mathbb{R})$ öklid uzayında her bir vektörün ve dönüşümünün noktasal çarpımını değiştirmeyen lineer T operatörleri vardır.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E^n(\mathbb{R}) \rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = T(\vec{a}) \bullet T(\vec{b}) \quad (3.15)$$

$E^n(\mathbb{R})$ öklid uzayında böyle operatörlere izometrilere denir. Bu Öklid uzayının $\{\vec{e}_\alpha\}$ tabanına işaret ettiğini ve temel matris tensörünün ilgili G matrisine sahip olduğunu farz edersek bir T izometrisi tanımlanabilir. Çünkü T matrisi (3.15) i:

$$T^t G T = G \quad (3.16)$$

matris ilişkisiyle sağlar. Eğer $E^n(\mathbb{R})$ nin $\{\vec{e}_\alpha\}$ tabanı ortonormalize edilmiş ise $G \equiv I_n$ ve (3.16) ilişkisi:

$$T^t \bullet T = I_n \text{ yada } T^t = T^{-1} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Bu izometri tensörünün ortonormalize taban altında ortogonal matris olarak görüldüğünü ispatlar. Böylece (3.1) deki kısımda oluşturduğumuz klasik referanslar ortonormalize olduğundan izometri için duyulan gereksinim T_n orthogonal matris olmalıdır. Daha sonra en üstün izometrilere ilgileneceğiz. Bunların ilki $n=2$ boyutlu (düzlemdeki izometrilere) ve sonra $n=3$ boyutlu (uzaydaki izometrilere) dir. Belirli bir adı olmayan izometrilere vardır. Burada bunlara değinilmeyecek fakat varlığını vurgulayacağız. İzometrilere non-Abelian çarpımsal grup oluşturduğunu ve alt bölümlerinin düz izometrilere ($|M|=+1$) ve ters

izometrilere $(|M| = -1)$ olarak bölüm (2.4) te formüle edildiğini vurgulamak önemlidir.

Öteleme ($n = 2$): Bu izometri karşılıklı (yöndeş) iki noktanın vektör farkının $E^2(\mathbb{R})$ nin sabit bir vektörü olduğu gerçeğiyle karakterilize edilir. Eğer;

$$X' = MX \rightarrow A(XX') = \bar{t}; t \in E^2(\mathbb{R}) \text{ (Öteleme vektörü)}$$

$$\bar{t} = t^1 \bar{e}_1 + t^2 \bar{e}_2$$

öteleme vektörü olarak alalım, o zaman bu tensörün homojen koordinatlar da matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & t^1 \\ 0 & 1 & - & t^2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Bu formül sadece sonlu noktaların ötelenmesinde kullanılır. Burada invaryant olan bazı doğrular vardır. Bazı yazarlar bu doğruları çift doğrular, sabit doğrular, kılavuzlar vb. olarak adlandırır. Çift doğrular terimi karmaşık olabilir. Çünkü doğrudaki bu noktaların invaryant veya çift translasyon oldukları doğru değildir. Çünkü bu tensör invaryant noktalardan yoksundur. $(|M| = +1)$ in bir düz izometri olması bunun nedenidir (Kaya 2002).

Dönme ($n = 2$): Birim invaryant noktaya (dönme merkezi $C(a, b)$ olarak adlandırılan) sahip bir düzlemdeki düz izometriye dönme denir. Öyle ki eğer X ve X' karşılıklı iki nokta ise $(X' = MX)$ $\hat{C}XX' = \theta$ açısı sabit bir değerdir ve dönme açısı olarak adlandırılır. Bu dönme açısının yönü saat yönünde veya saat yönünün tersinde olabilir. Bu bölümde dönme tensörünü doğrudan önermek yerine izometrilere çarpansal grup

karakterlerinin önemini vurgulamak amacıyla oluştururuz. Kartezyen koordinatlarda $O(0,0)$ merkezli ve θ açılı klasik dönmesini farz edelim.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Sonra şu işlemi takip ederiz.

1. Öteleme M_1 . Orjine göre merkezi $C(a,b)$ noktasına öteleriz.
2. Dönme M_2 . Bir noktayı saat yönünün tersinde bir θ açısıyla (3.19) eşitliğini kullanarak merkezine göre dönme yapabiliriz.
3. Öteleme M_3 . C merkezini $C(a,b)$ başlangıç noktasını alarak ters öteleme uygularız.

Sonuç olarak:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & -a \\ 0 & 1 & - & -b \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & - & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}; \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & a \\ 0 & 1 & - & b \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix};$$

ve

$$M = M_3 \bullet M_2 \bullet M_1$$

ifadesinden

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & - & [(1-\cos \theta) \sin \theta] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \sin \theta & \cos \theta & - & [-\sin \theta (1-\cos \theta)] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

elde ederiz. Buda θ dönme tensörünün saat yönünün tersindeki matris gösterimidir. Özellikleri:

- $\overline{XX'}$ doğru parçasının merkez noktasındaki ortogonal doğru, dönme merkezinden geçer.
- İlgili r ve r' doğruları aralarında θ dönme açısını oluştururlar ve dönme merkezinden eşit uzaklıktadırlar.

Merkezi Simetri (n = 2): Merkez simetriği $k = -1$ oranı için homotezinin özel bir durumudur.(3.13) formülü bu durum için uygularsak:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & - & 2h^1 \\ 0 & -1 & - & 2h^2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Bu homotezinin kartezyen koordinatlarda merkezi, $H(h^1, h^2)$ noktası simetri merkezi olarak adlandırılır. Bu simetri bir izometridir. Çünkü ilgili matris $T \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ortogonaldır. $|M| = \pm 1$ olduğunda düz bir izometridir. Bazı yazarlar bu izometriyi $\theta = 180^\circ \equiv \pi$ nin dönmesi olarak sınıflandırır.

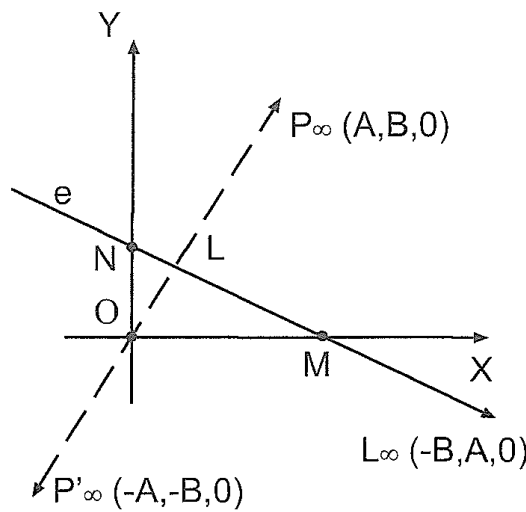
Eksenel Simetri ($n = 2$): Eksen simetriği simetri eksenini olarak adlandırılan invaryant bir doğruyla karakterilize edilir ve ilgili noktaları içeren $\overline{XX'}$ doğru parçasının merkezine ortogonal bir doğrudur. Dönme için yukarıda verilen metodu uygularsak bu tensörün matris gösterimini şu işlemlerle elde edebiliriz.

1. Eksenlerin eksen simetriğinin oluşturulması
2. Genel öteleme ve rotasyon, simetriden önce eksenleri keyfi bir noktaya yerleştirmek için simetriyi uygulayarak
3. Dönmesini ve ötelemeyi tersine çevirmek için ayrıca maksimum bilgi kriterleri takip edilerek bu kitapta bu tensörü oluşturmak için başka bir metot daha uygulayabiliriz. Farz edelim ki eksenin denklemi (Şekil 3.3) $e \equiv Ax + By + C = 0$ olsun, eğer

$e \equiv \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}$ bilgisi verilmişse ilk olarak bu bilgiyi önceki haliyle yazalım.

$M(-\frac{C}{A}, 0, 1)$ ve $N(0, -\frac{C}{B}, 1)$ noktalarının kartezyen eksenin kesenleri,

$AX + BY + Ct = 0$ denkleminin e-ekseninin invaryant noktaları olduğunu biliyoruz, çünkü denklemi sağlamaktadırlar.



Şekil 3.3. Eksenel Simetri

e nin L_∞ noktası $L_\infty(-B, A, 0)$ olduğundan denklemi sağlar. Ortogonal yönü $P_\infty(A, B, 0)$ olacaktır. Çünkü her iki vektörün $E^2(\mathbb{R})$ de noktasal çarpımı önemsizdir.

$$\begin{bmatrix} -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0,$$

bu $P_\infty(A, B, 0)$ ve $P'_\infty(-A, -B, 0)$ noktalarının simetrik olduğunu gösterir. Bu bilgiyi asıl tensör denkleminde ($X' = MX$) kullandığımızda;

$$\begin{bmatrix} -C/A & 0 & -A \\ 0 & -C/B & -B \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} -C/A & 0 & A \\ 0 & -C/B & B \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunu düzenlersek;

$$M = \begin{bmatrix} -C/A & 0 & -A \\ 0 & -C/B & -B \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -C/A & 0 & A \\ 0 & -C/B & B \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

olur. Buda eksen simetri tensörünün şöyle olduğunu gösterir.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} -A^2 + B^2 & -2AB & - & -2AC \\ -2AB & A^2 - B^2 & - & -2BC \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & A^2 + B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

(3.22) de M matrisinin T bloğu

$$T = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} -A^2 + B^2 & -2AB \\ -2AB & A^2 - B^2 \end{bmatrix}; T \bullet T^t \equiv T^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} (A^2 + B^2)^2 & 0 \\ 0 & (A^2 + B^2)^2 \end{bmatrix} \equiv I_2$$

ortogonal blok olduğundan M izometridir. Diğer yandan determinant;

$$|M| = \frac{-[(A^2 - B^2)^2 + 4A^2B^2](A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)^3} = -1$$

dir.

Bu sonuç $|M|$ nin ters bir izometri olduğunu ispatlar. Bu geometrik anlamda simetrik figürü XOY düzlemin dışına taşımamız gerektiği, çevirebilmek ve prototip figürünü elde edebilmek için (çakıştırma yoluyla) anlamına gelir. Uzayda ayna simetrisini elde ettiğimizde geometrik nesneleri ($n=3$) uzayında ($n=4$) uzayına dönüştürebileceği şeklinde bir açıklamanın mümkün olmadığı görülmektedir, bu yüzden geometrik düşünceleri ihmal ederek şimdiye kadar gösterilen tensör özelliklerini tercih edeceğiz.

Benzerlik($n = 2$): Geometride bir izometri ile bir homotezinin sonucuna benzerlik denir. En yaygın benzerliklerden biri homotezi $\times$ dönmedir. Burada rastgele dönme merkezi $C(a,b)$ ve homotezi merkezi $H(h^1, h^2)$ gerekli değildir. Bu yüzden bu benzerlik rasgele $C(s^1, s^2) \equiv H(s^1, s^2)$ bu merkezlere başka bir benzerlik oluşturacak şekilde indirgenebilir. Bu durumda birim merkez $H \equiv S_0(s^1, s^2)$ benzerlik merkezi olarak adlandırılır. Burada matris sonuçları geometrik uygulamalara göre ters yönlü uygulanabilir. Benzerliğin ilgili tensörü izometri ve homotezinin bir ters ürününe sahip olduğundan $S = M \bullet F$ dir. Sonraki bölümlerde benzerliğin matris gösteriminden bahsetmeyeceğiz. Benzerlikler non-Abelian çarpansal grup oluşturmaktadırlar. Düzlemde homotezi ile ilgili determinant $|F(n=2)| > 0$ dır ve böylece S determinantı; $|S| > 0$ dır. Eğer $|M| = +1$ ise (düz benzerlik) $|S| < 0$ dır. Eğer $|M| = -1$ ise (ters benzerlik) olacaktır.

Örnek 3.3. (Dönme × Dönme): $n=2$ boyutlu $(O-XY)$ kartezyen sisteminde $C_1(a_1, b_1)$ dönme merkezi ve θ_1 açısı takiben $C_2(a_2, b_2)$ dönme merkezi ve θ_2 açısını düşünelim.

1. İzometri tensörünü bulunuz.
2. Bu izometrinin başka bir dönmesi varmıdır.
3. Bu durumu $C_1(2,3)$ ve $\theta_1 = 60^\circ$ (saat yönü tersinde) ve $C_2(4,5)$ ve $\theta_2 = 60^\circ$ (saat yönünde) verileri için uygulayınız.
4. Aynı durumu $C_1(5,1), \theta_1 = 45^\circ$ ve $C_2(1,3), \theta_2 = 45^\circ$ (saat yönünün tersi) değerleri için belirleyiniz.

Çözüm:

1. (3.20) eşitliği kullanılarak;

$$G_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & - & a_1(1 - \cos \theta_1) + b_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & - & -a_1 \sin \theta_1 + b_1(1 - \cos \theta_1) \\ --- & --- & - & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & - & a_2(1 - \cos \theta_2) + b_2 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & - & -a_2 \sin \theta_2 + b_2(1 - \cos \theta_2) \\ --- & --- & - & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. $G = G_1 \times G_2$ şeklinde gösterilen izometri tensörü $G = G_1 \bullet G_2$ matrisine sahiptir.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & - & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & - & g_{23} \\ - - & - - & + & - - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Burada

$$\begin{aligned} g_{11} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ g_{12} &= -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ g_{13} &= a_1 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$+ b_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (a_2 - a_1)(1 - \cos \theta_2) + (b_2 - b_1) \sin \theta_2$$

$$\begin{aligned} g_{21} &= \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ g_{22} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ g_{23} &= -a_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + b_1 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$-(a_2 - a_1) \sin \theta_2 + (b_2 - b_1)(1 - \cos \theta_2) .$$

2. Aşağıdaki durumlarda

(a) Eğer;

$$\theta_1 + \theta_2 = 0 \text{ veya } \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \text{ ve } (a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) \rightarrow G \equiv I_3$$

dir.

(b) Eğer;

$$\theta_1 + \theta_2 = 0 \text{ veya } \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \text{ ve } (a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$$

ise izometri bir ötelemedir ve ilgili vektör

$$\bar{t} = t^1 \bar{e}_1 + t^2 \bar{e}_2 \begin{cases} t^1 = (a_2 - a_1)(1 - \cos \theta_2) + (b_2 - b_1) \sin \theta_2 \\ t^2 = -(a_2 - a_1) \sin \theta_2 + (b_2 - b_1)(1 - \cos \theta_2). \end{cases}$$

(c) Eğer; $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ise merkezi simetridir.

(d) Diğer durumlarda $\theta = \theta_1 + \theta_2$ açısına sahip bir dönmedir.

3. Verilenlere göre

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & - & 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & - & \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ --- & --- & + & ---- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}; G_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & - & 2 - \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & - & \frac{5}{2} - 2\sqrt{3} \\ --- & --- & + & ---- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = G_2 \bullet G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 1 - \sqrt{3} \\ 0 & 1 & - & 1 + \sqrt{3} \\ --- & --- & + & ---- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Buda $\bar{t} = (1 - \sqrt{3})\bar{e}_1 + (1 + \sqrt{3})\bar{e}_2$. vektörünün ötelemesidir.

4. Verilenleri uygularsak

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & - & 5+2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & - & 1-3\sqrt{2} \\ --- & --- & + & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}; G_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & - & 1+\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & - & 3-2\sqrt{2} \\ --- & --- & + & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = G_2 \bullet G_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & - & 2+3\sqrt{2} \\ 1 & 0 & - & -2+\sqrt{2} \\ - & - & + & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 & - & (2+\sqrt{2}).1+2\sqrt{2}.1 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 & - & -(2+\sqrt{2}).1+2\sqrt{2}.1 \\ --- & --- & + & --- \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

M izometrisi $M \equiv G$, $C(2+\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ merkezli ve $\theta = 90^0$ açılı bir dönmedir. Bu örnek rotasyonların çarpansal grup oluşturmadığını gösterir.

Örnek 3.4. (Eksen simetri $\times$ Öteleme): $n=2$ için $(O-XY)$ kartezyen düzleminde eksen simetriği $e \equiv 2x + y - 2 = 0$ ve öteleme vektörü $\vec{t} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ olsun;

1. Oluşan izometrinin matris gösterimini bulunuz.
2. Tensörü sınıflandırınız ve bu tensörün teoride bahsedilenlerden biri olup olmadığını cevabı doğrulayarak gösteriniz.
3. Bu izometriyi e simetri ekseninin ilk çeyrek dairede belirlediği üçgende uygulayınız.

Çözüm:

1. (3.22) ve (3.18) eşitlikleri kullanarak:

$$M_1 = \frac{1}{2^2 + 1^2} \begin{bmatrix} -2^2 + 1^2 & -2.2.1 & -2.2.(-2) \\ -2.2.1 & 2^2 - 1^2 & -2.1.(-2) \\ 0 & 0 & 2^2 + 1 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix};$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; M = M_2.M_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -4 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

2. Bu bir izometridir çünkü ilgili matrisi afinite formatına sahip (3.11) eşitliği ve T bloğu ortogonal matris olma şartlarını sağlar.

$$T.T^t = T^2 = \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \right)^2 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \equiv I_2$$

T nin yapısı T yi ötelemeye veya merkeze göre simetri olarak belirlememize izin vermez. Ayrıca T bir eksen simetriği değildir. Çünkü $m_{13} = 23$ ve $m_{23} = 24$ terimleri eşitlik (3.22) şartlarını sağlamaz. Sonuç olarak (bölüm 3.5) in girişinde bahsedilen tek bir izometridir ve belirli bir adı yoktur. Yapılan son açıklamalarda bazı yazarlar bu izometriyi ‘kayan izometri’ olarak adlandırır. Bu bizim açıkçası kaçındığımız bir isimdir. $|M| = -1$ iken izometri ters izometridir.

3. Bahsedilen üçgenin A, O, B köşe noktaları homojen koordinatlarda $A(1, 0, 1), O(0, 0, 1), B(0, 2, 1)$ noktalarına sahiptir ve homolog matrisleri:

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -4 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 & 23 & 15 \\ 20 & 24 & 30 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

dir. Buda dönüştürülen üçgenin kartezyen koordinatları:

$$A'(4,4), O'(\frac{23}{5}, \frac{24}{5}), B'(3,6)$$

olduğunu gösterir.

Örnek 3.5. (Benzerlik): $n = 2$ boyutunda $(O - XY)$ kartezyen sisteminde şu benzerliği düşünelim. Benzerlik $H(-6,4)$ merkezli ve $k = \frac{1}{4}$ oranına sahip F_1 homotezisi ve $C(0,0)$ merkezli $\theta = 90^\circ$ açılı (saat yönünün tersi) G_2 dönmesine sahip homotetik şekil olsun;

1. Benzerlik tensörünün matris gösterimini bulunuz.
2. Bahsedilen benzerliği sınıflandırınız.
3. Benzerlik merkezi olarak adlandırılan invaryant noktanın koordinatlarını belirleyiniz.
4. Bu benzerliğe göre H ve C noktalarının homolog formları olan H' ve C' noktalarını belirleyiniz.
5. C' noktasından geçen ve HC doğrusuna C noktasında teğet olan çemberin denklemini yazınız.
6. $\Delta(HCH')$ üçgeninin çevrel çemberinin denklemini bulunuz. Açıkça görülüyor ki bu iki çemberde C den geçer.
7. Verilen çemberlerin kesişen diğer noktasının benzerlik merkezi olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

1.

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \cdot (-6) \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \cdot (4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} \cos(-90^0) & -\sin(-90^0) & 0 \\ \sin(-90^0) & \cos(-90^0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$S = G_2 F_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12 \\ -1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

benzerlik tensörüdür.

2. Sınıflandırabilmek için şunu hesaplarız. $|S| = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16} > 0$ (düz benzerlik)

3. Aynı nokta şunu sağlamalıdır.

$$SX = X; (S - I_3)X = \Omega \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1/4 & 3 \\ -1/4 & -1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şu çözümle,

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1/4 & 3 \\ -1 & 9/2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1/4 & 9/2 \end{vmatrix}} = \frac{t}{\begin{vmatrix} -1 & 1/4 \\ -1/4 & -1 \end{vmatrix}} \rightarrow \frac{x}{66} = \frac{y}{60} = \frac{t}{17},$$

Buda gösterir ki kartezyen koordinatlarda benzerlik merkezi $S_0 = (\frac{66}{17}, \frac{60}{17})$ dir.

4. Homolog noktalar:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix}_{H'} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12 \\ -1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow H'(4, 6)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix}_{C'} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 12 \\ -1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9/2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow C'(3, 9/2)$$

5. Teğet doğrusunun C deki denklemi $\overline{CH} \equiv \frac{x-0}{-6} = \frac{y-0}{4} : \overline{CH} \equiv 2x+3y=0$ ve teğet doğrusunun C' deki denklemi $\overline{C'P} \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-9/2}{\lambda} : \overline{C'P} \equiv \lambda x - y + (9/2 - 3\lambda) = 0$ ve $\overline{CC'}$ kirişinin denklemi $\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{9/2} : \overline{CC'} \equiv 3x - 2y = 0$ dir. İki teğet ve kiriş tarafından oluşturulan koniklerin dizisi $(2x+3y)[\lambda x - y + (9/2 - 3\lambda)] + \mu(3x-2y)^2 = 0$ dır ve buda geliştirildiğinde şuna yol açar.

$$(2\lambda + 9\mu)x^2 + (-3 + 4\mu)y^2 + (-2 + 3\lambda - 12\mu)xy + (9 - 6\lambda)x + (27/2 - 9\lambda)y = 0 \quad (3.24)$$

Bu ifade bir çember olduğundan:

$$\begin{cases} 2\lambda + 9\mu = -3 + 4\mu \\ -2 + 3\lambda - 12\mu = 0 \end{cases}$$

buradan da şu parametreleri elde ederiz. $\lambda = -2/3; \mu = -1/3$ ve (3.24) de yerine yazarsak çemberin denklemi $2x^2 + 2y^2 - 6x - 9y = 0$ şeklinde olur.

6. $\Delta(HCH')$ üçgeninin çevrel çemberi

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ (-6)^2 + 4^2 & -6 & 4 & 1 \\ 0^2 + 0^2 & 0 & 0 & 1 \\ 4^2 + 6^2 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dır ve sonuç olarak $x^2 + y^2 + 2x - 10y = 0$ elde edilir.

7. Daha önce bahsedilen çemberlerle ilgili asıl eksen;

$$2(x^2 + y^2 + 2x - 10y) - (2x^2 + 2y^2 - 6x - 9y) = 0 \rightarrow 10x - 11y = 0$$

ve asıl eksen sistemlerinden biri ile çözersek:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 10y = 0 \\ 10x - 11y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C(0,0) \\ S_0(66/17, 60/17) \end{cases}$$

elde edilir buda istenilen sonucu verir.

Öteleme (n = 3): $n = 2$ boyutu için ötelemede verilenlere ek olarak sabitlenmiş vektör

$\vec{t} = t^1 \vec{e}_1 + t^2 \vec{e}_2 + t^3 \vec{e}_3$ hariç $t \in E^3(\mathbb{R})$ yi sağlayacak şekilde başka bir bilgiye gerek yoktur.

Bu durumda tensör şöyle gösterilir.

$$X' = MX \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - & t^1 \\ 0 & 1 & 0 & - & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & - & t^3 \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Merkez Simetri (n = 3): $n = 2$ boyutunda merkezi bölümünde anlatılanlara göre $k = -1$ için homotezi özel bir durumdur. Bu yüzden eşitlik (3.13) e uygularsak:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & - & 2h^1 \\ 0 & -1 & 0 & - & 2h^2 \\ 0 & 0 & -1 & - & 2h^3 \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

elde edilir. Homotezi merkezi simetri merkezi olarak adlandırılır. Bu nokta kartezyen koordinatlarda $H(h^1, h^2, h^3)$ ve bu durumda izometri oluşur. Çünkü ilgili

$$T \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi ortogonaldır. $|M| = -1$ olduğundan ters izometridir. Açıkçası H , $\overline{XX'}$ doğru parçalarının merkez noktasıdır.

Dönme ($n = 3$): Bölüm (2.4) de vektör uygulama tensörlerini açıklayan dönme tensörü hakkında detaylı bir analiz yaptığımızdan dolayı bu bölümde $E_p^3(\mathbb{R})$ afin uzayına denk bütün bilgileri buradan elde edeceğiz. Aşağıdaki rotasyon bilgilerine sahip olduğumuzu farz edelim.

1. Eksen kartezyen denklemi $\frac{x-a}{\ell} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ dir. Burada $(a, b, c, 1)$ noktası eksen üzerinde sonlu bir noktadır. $(\ell, m, n, 0)$ ise bu eksenin P_∞ yönüdür.
2. Dönme açısı θ (sağ el kuralına göre yönü bulunan) bölüm (2.4) de belirtilmiştir. Eksen yönünü belirten birim vektör:

$$\bar{e} \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \bar{e}_1 + \frac{m}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \bar{e}_2 + \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \bar{e}_3 \quad (3.27)$$

şeklindedir. G dönmesini elde etmek için şu işlemi uygulayız:

1. (a, b, c) noktasını tüm eksenleriyle birlikte kartezyen orijini $(0, 0, 0)$ noktasına getiren M_1 ötelemesi uygularız.
2. Eksen O noktasından geçerken θ açılı $R_{\bar{e}}$ dönmesini gerçek eksene göre uygularız. Bunu da ilgili tensör yardımıyla sağlarız.
3. Rotasyon uygulandıktan sonra tüm sistemi eski haline getirmek için ilk ötelemeye zıt olacak şekilde bir M_2 ötelemesi uygularız. Doğal olarak $G = M_2 \cdot R_{\bar{e}} \cdot M_1$ elde edilir. M_1 matrisi;

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - & -a \\ 0 & 1 & 0 & - & -b \\ 0 & 0 & 1 & - & -c \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. $R_{\bar{e}}$ tensörünün matrisini elde etmek için $\bar{e}$ vektörünün doğrultu kosinüs noktaları ile eşitlik (2.14) kullanılarak homojen koordinatlarda:

$$R_{\bar{e}} = \frac{1}{\ell^2 + m^2 + n^2} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & - & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & - & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & - & 0 \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & (\ell^2 + m^2 + n^2) \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada,

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \ell^2 + (m^2 + n^2) \cos \theta \\
r_{12} &= \ell m(1 - \cos \theta) - n \sin \theta \\
r_{13} &= \ell n(1 - \cos \theta) + m \sin \theta \\
r_{21} &= \ell m(1 - \cos \theta) + n \sin \theta \\
r_{22} &= m^2 + (\ell^2 + n^2) \cos \theta \\
r_{23} &= mn(1 - \cos \theta) - \ell \sin \theta \\
r_{31} &= \ell n(1 - \cos \theta) - m \sin \theta \\
r_{32} &= mn(1 - \cos \theta) + \ell \sin \theta \\
r_{33} &= n^2 + (\ell^2 + m^2) \cos \theta
\end{aligned}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - & a \\ 0 & 1 & 0 & - & b \\ 0 & 0 & 1 & - & c \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Sonuç olarak $G = M_2 \cdot R_{\epsilon} \cdot M_1$ dönme matrisidir. Matris gösterimiyle:

$$G = \frac{1}{\ell^2 + m^2 + n^2} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & - & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & - & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & - & g_{34} \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & g_{44} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

yazılır. Burada,

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \ell^2 + (m^2 + n^2) \cos \theta \\
g_{12} &= \ell m(1 - \cos \theta) - n \sin \theta \\
g_{13} &= \ell n(1 - \cos \theta) + m \sin \theta \\
g_{21} &= \ell m(1 - \cos \theta) + n \sin \theta \\
g_{22} &= m^2 + (\ell^2 + n^2) \cos \theta \\
g_{23} &= mn(1 - \cos \theta) - \ell \sin \theta \\
g_{31} &= \ell n(1 - \cos \theta) - m \sin \theta \\
g_{32} &= mn(1 - \cos \theta) + \ell \sin \theta \\
g_{33} &= n^2 + (\ell^2 + m^2) \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} g_{14} \\ g_{24} \\ g_{34} \\ - \\ g_{44} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}{\ell^2 + m^2 + n^2} \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{aligned}
s_{11} &= (m^2 + n^2)(1 - \cos \theta) \\
s_{12} &= -(\ell m(1 - \cos \theta) - n \sin \theta) \\
s_{13} &= -(\ell n(1 - \cos \theta) + m \sin \theta) \\
s_{21} &= -(\ell m(1 - \cos \theta) + n \sin \theta) \\
s_{22} &= (\ell^2 + n^2)(1 - \cos \theta) \\
s_{23} &= -(mn(1 - \cos \theta) - \ell \sin \theta) \\
s_{31} &= -(\ell n(1 - \cos \theta) - m \sin \theta) \\
s_{32} &= -(mn(1 - \cos \theta) + \ell \sin \theta) \\
s_{33} &= (\ell^2 + m^2)(1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

biçimindedir. G matrisinin T bloğu $T_3 = R_{\vec{e}}$ dir ve ayrıca daha önce ispat edildiği gibi rotasyon tensörü ortogonal matristir. Böylece G bir izometridir. $|G|=1$ ise düz izometridir. G nin bazı özellikleri:

- $\overline{XX'}$ doğru parçasına ortogonal olan ve merkezinden geçen düzlem dönme eksenini içerir.
- Homolog olan r ve r' doğruları rotasyon ekseninden eşit uzaklıktadırlar.

Not 3.1: Eğer dönme eksenini iki düzlemin kesişimi olarak verilirse,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ve dönme eksenini şu şekilde $\frac{x-a}{\ell} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ biçiminde yazılır. G dönme matrisini elde etmek için formülümüz.

$$\frac{x - \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} (B_1 - C_1) & D_1 \\ (B_2 - C_2) & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} (C_1 - A_1) & D_1 \\ (C_2 - A_2) & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} (A_1 - B_1) & D_1 \\ (A_2 - B_2) & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (3.30)$$

dır ve

$$\lambda = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

olur. Sonuç olarak eğer G tensörü bu şekilde ise örnek 2.2 nin 4. noktasında belirtildiği gibi R_{ϵ} dönme tensörünün izi kullanılarak invaryant noktalarının tensör doğrularını ve açısını elde ederiz.

Eksen Simetriği (n = 3): Bu izometri $\theta = 180^0$ açısıyla dönmenin özel bir durumudur ve simetri eksenini ile ilgili tek veri $\frac{x-a}{\ell} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ dir. $\bar{e}$ birim vektörünün eksen eşitliği (3.27) deki gibidir. Bu simetriyi $S_{\bar{e}}$ olarak adlandırırız.(3.28) ve (3.29) eşitliklerin de $\theta = 180^0$ olursa ilgili tensör matrisi:

$$S_{\bar{e}} = \frac{1}{\ell^2 + m^2 + n^2} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & - & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & - & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & - & s_{34} \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & (\ell^2 + m^2 + n^2) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

burada

$$\begin{aligned} s_{11} &= \ell^2 - (m^2 + n^2) \\ s_{12} &= 2\ell m \\ s_{13} &= 2\ell n \\ s_{14} &= 2[(m^2 + n^2)a - \ell mb - \ell nc] \\ s_{21} &= 2\ell m \\ s_{22} &= m^2 - (\ell^2 + n^2) \\ s_{23} &= 2mn \\ s_{24} &= 2[-\ell ma + (\ell^2 + n^2)b - mnc] \\ s_{31} &= 2\ell n \\ s_{32} &= 2mn \\ s_{33} &= n^2 - (\ell^2 + m^2) \\ s_{34} &= 2[-\ell na - mnb + (\ell^2 + m^2)c] \end{aligned}$$

şeklindedir. Dönme durumunda olduğu gibi düz bir izometridir. Burada $|S_{\bar{e}}| = 1$ dir. $S_{\bar{e}}$ matrisi involut dır ve $S_{\bar{e}}^2 = I_4$ dir.

Diğer Özellikleri:

- Homolog noktaların $\overline{XX'}$ doğru parçaları merkez noktasında ortogonal bir doğruya sahiptirler. Buda simetri eksenidir.
- Kesen ve eksene ortogonal olan herhangi bir doğru ve eksene ortogonal olan herhangi bir düzlem invaryanttır.

Not 3.2: $n = 2$ boyutunda ve (3.30) eşitliğinde verilen bilgiler burada da geçerlidir.

Ayna Simetri ($n = 3$): Bu tensör, simetri düzlemi olarak adlandırılan invaryant noktaların düzlemi ile karakterilize edilir. Bu düzlem, homolog noktaları birleştiren tüm $\overline{XX'}$ doğru parçalarına merkez noktasında ortogonaldır. Bu simetri düzlemde şu şekilde verilmiş olsun;

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.32)$$

Vektör tanımında bölüm 2.5 te uygulanan H_e tensörü yansıma tensörüdür. π düzlemi (şekil 2.6) da gösterilmiştir. H_e veri tensörü π düzlemine ortogonal bir vektör olduğundan bölüm 2.5 te verilenleri burada kullanacağız. π düzleminde $\bar{e}$ birim vektörünü alarak veri vektörümüz şu şekilde olur.

$$\bar{e} \equiv \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \bar{e}_1 + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \bar{e}_2 + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \bar{e}_3 \quad (3.33)$$

Buda $\cos \alpha, \cos \beta$ ve $\cos \gamma$ belirler Eğer

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ise

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

bulunur. Benzer sonuçlar diğer cosinüs değerler içinde bulunur. Bu bilgilere sahip olduktan sonra 4.sütunu olmayan S_π olarak adlandırılan ayna simetrisini oluşturmak için (2.16) eşitliğindeki yansıma tensöründe bu verileri kullanırız.

$$S_\pi = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & - & s_{41} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & - & s_{42} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & - & s_{43} \\ -- & -- & -- & + & ----- \\ 0 & 0 & 0 & - & A^2 + B^2 + C^2 \end{bmatrix}$$

burada

$$\begin{aligned} s_{11} &= -A^2 + B^2 + C^2; s_{12} = -2AB; s_{13} = s_{31} = -2AC \\ s_{22} &= A^2 - B^2 + C^2; s_{23} = s_{32} = -2BC; s_{33} = A^2 + B^2 - C^2 \end{aligned}$$

Koordinat eksenleri ile π düzleminin kesişim noktaları

$\left(-\frac{D}{A}, 0, 0, 1\right), \left(0, -\frac{D}{B}, 0, 1\right), \left(0, 0, -\frac{D}{C}, 1\right)$ olduğunu biliyoruz. Bu noktalar invaryanttır.

Böylece bu noktaları dönüştürürsek 4.sütunun elamanlarını belirleriz. İlk apsisi dönüştürürsek;

$$\frac{\left(-A^2 + B^2 + C^2\right)\left(-\frac{D}{A}\right) + 0 + 0 + s_{41}}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{D}{A} \rightarrow s_{41} = -2AD$$

benzer şekilde diğer iki elemanda $s_{42} = -2BD; s_{43} = -2CD$ olarak bulunur. Buda ayna

simetri tensörünü tamamlamamıza yardımcı olur. T determinant bloğu $|T| \equiv |H_{\bar{e}}| = -1$

şeklindedir. Buda $|S_\pi| = -1$ olmasını gerektirir. Bu yüzden ters izometridir. Bölüm 2.5 te $H_{\bar{e}}$ yansıma tensörünün involut karakterini ispatlamıştık. Bu yüzden S_π matrisi $S_\pi^2 = I_4$ eşitliğini sağlar.

3.6. İzometrilerin Çarpımı

Daha önce bahsedilen basit izometrilerin bir kaçının ardışık uygulamasından oluşan izometrilere izometrilerin çarpımı veya ayrışabilir izometriler denir. İlgili matris faktör izometrileri ile ilgili matrislerin çarpımından oluşur. Yani, $M = M_k \cdot M_{k-1} \dots M_2 \cdot M_1$ dir. Sonuçta izometri daha önce çalışılan izometrilerin biri olabilir veya olmayabilir. Eğer $|M| = 1$ ise izometri düz bir izometridir. Yoksa $|M| = -1$ ise ters izometridir. $|M| = -1$ olacak şekilde M izometrilerinin tümünün dizisi bazı yazarlar tarafından sözde izometriler olarak adlandırılır. Demek oluyor ki bu izometriler düzenli değildir. Şunu not edelim ki izometrilerin çift sayılı olanlarının çarpımı açıkça görülüyor ki düz bir izometridir. Bu durumu bazı soyut ayrışabilir izometrilere bahsetmek için düşünelim.

- İki ayrı izometrilerin çarpımı $S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}$:

1. Eğer π_1 ve π_2 paralel ise ötelemedir.

2. Eğer π_1 ve π_2 kesişiyor ise rotasyondur.

- İki merkez simetrisinin çarpımı bir ötelemedir.

- İki eksen simetrisinin çarpımı $S_{\bar{e}_2} \cdot S_{\bar{e}_1}$:

1. $\bar{e}_1$ ve $\bar{e}_2$ eksenleri kesişiyor ise dönmedir.

2. $\bar{e}_1$ ve $\bar{e}_2$ eksenleri kesişmeden karşıt iseler öteleme sonucu bir dönme çarpımıdır.

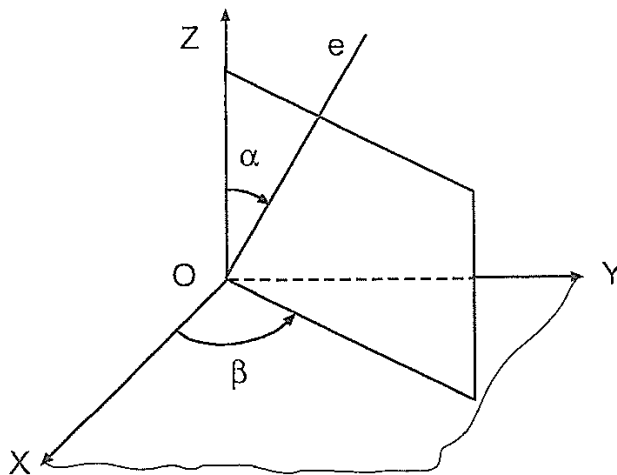
- Birbirinden bağımsız üç merkez simetrisinin çarpımı başka bir merkez simetrisidir.

Buda verilen simetrisinin merkezleri sonucu oluşan paralelkenarın merkezidir.

- Dönme eksenini doğrultusundaki ötelemenin sonucu oluşan rotasyonun çarpımı helisoidal izometridir. Fakat bazı yazarlar bu izometriyi öteleme doğrultusu, dönme eksenine uyuşmadığında eğik helisoidal olarak adlandırılır.

Örnek 3.6. (Transformasyonların Çarpımı): Saat yönünde θ değerine sahip klasik geometri uzayında $E_p^3(\mathbb{R})$ bir dönme düşünelim. (Şekil 3.4) Dönme eksenini $\overline{OZ}$ ekseninden geçen ve XOZ düzlemi ile β açısı oluşturan düzlemde yer alır. Orijin O noktasından geçen bu eksen (dönme eksenini) OZ eksenini ile α açısı oluşturmaktadır. Sonra bir derecelendirme uygulayacağız(kartezyen eksenlerin boyutlarında değişim).Buda k_1, k_2, k_3 değişkenleriyle gerçekleştirilir.

1. Dönme matrisi G_1 bulunuz.
2. Derecelendirme matrisi F_2 bulunuz.
3. Karma dönüşümün T matrisini bulunuz.
4. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemi ile verilen kürenin ötelenen küre denklemini $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ve $k_3 = 3$ değerleri için bulunuz.



Şekil 3.4. Trasformasyonların çarpımı

Çözüm:

1. Dönme ekseninin birim vektörü $\vec{e} \equiv \sin \alpha \cos \beta \vec{e}_1 + \sin \alpha \sin \beta \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3$ dir. (3.28)

ve (3.29) eşitliklerini uygularsak T_o bloğu:

$$T_o = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Burada:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha) \cos \theta \\ t_{12} &= \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta (1 - \cos \theta) - \cos \alpha \sin \theta \\ t_{13} &= \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \theta) + \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \\ t_{21} &= \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta (1 - \cos \theta) + \cos \alpha \sin \theta \\ t_{22} &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha) \cos \theta \\ t_{23} &= \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta (1 - \cos \theta) - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta \\ t_{31} &= \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \theta) - \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \\ t_{32} &= \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta (1 - \cos \theta) + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta \\ t_{33} &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta \end{aligned}$$

dir. Bu da ortogonal olduğunu gösterir. Çünkü $T_o.T_o^t = I_3$ tür. Homojen koordinatlarda dönme için:

$$G_1 = \begin{bmatrix} & & - & 0 \\ & T_o & - & 0 \\ & & 0 \\ - & - - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

2. Derecelendirme (3.11) eşitliğindeki matris formatında O (0,0,0) orijinli invaryant bir noktaya sahip bir afın dönüşümdür.

$$F_2 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & - & 0 \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

3. $T = F_2.G_1$ şeklindedir.

4. Sayısal değerler:

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \beta = \frac{1}{2}; \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3+5\cos\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)-4\sqrt{2}\sin\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\sqrt{2}\sin\theta}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+4\sqrt{2}\sin\theta}{8} & \frac{1+7\cos\theta}{8} & \frac{(1-\cos\theta)-\sqrt{6}\sin\theta}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)-\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{(1-\cos\theta)+\sqrt{6}\sin\theta}{4} & \frac{1+\cos\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

buda:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3+5\cos\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)-4\sqrt{2}\sin\theta}{8} & \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\sqrt{2}\sin\theta}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+4\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{1+7\cos\theta}{4} & \frac{(1-\cos\theta)-\sqrt{6}\sin\theta}{2} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(1-\cos\theta)-3\sqrt{2}\sin\theta}{4} & \frac{3(1-\cos\theta)+3\sqrt{6}\sin\theta}{4} & \frac{3+3\cos\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sonucuna yol açar. Fakat bu durumda operatörün uygulanması esnasında faktörleri kullanmak daha kolay olacaktır. Dönme eksen G_1 kürenin çaplarından biri olduğundan dönme küresi aynı küredir. Böylece küreye sadece derecelendirme tensörü uygulamak kalır.

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0 \text{ (küre)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = F_2^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

ve bunu küre denkleminde yerine yazarsak:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & t' \end{bmatrix} (F_2^{-1})^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} F_2^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = 0$$

olur. Buda:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (x')^2 + \frac{1}{4}(y')^2 + \frac{1}{9}(z')^2 = 1$$

ve bir elipsoid olduğunu gösterir.

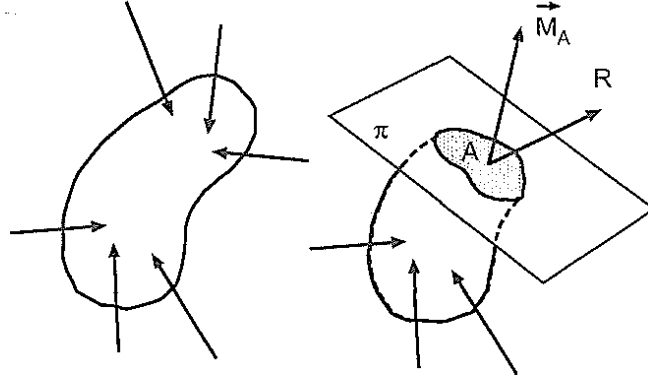
4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Fizik Ve Mekanikte Tensörler

Statik dengede bir dizi dış kuvvetler, mometler ve destekleyici koşullarla keyfi bir cisim düşünelim. Burada iç kuvvetlerin dağılımının belirlenmesi ve bu cisim üzerinde oluşan gerilmelerle ilgili problemi ele alacağız.

Bu problem gerçek cismin yerine, gerçeğe yakın sonuçlar elde edilebilen ve tensör metotlarının uygulanabildiği basit modeller kullanıldığı zaman karşımıza çıkmaktadır. Şimdi bu yaygın modellerden bazılarını ele alalım.

- **Sert Katı:** Sert katı rasyonel mekaniğin ideal tipik bozulmayan bir katısıdır. Mümkün olabilecek bozulmaları saymazsak bazı durumlar için (izostatik problem) reaksiyonları hesaplamamıza imkan tanır ve diğer durumlar için (hiperstatik problem) imkan tanımaz.
- **Elastik Katı:** Bu model, çözümü için yeterli sayıda fakat integrali zor olan tensör diferansiyel denklemlerini oluşturmamıza imkan tanıyan cismin elastik deformasyonunu ele alır. Hook kanununa göre kuvvet gerilim ilişkisinin lineerliği kabul edilmektedir. Buna göre cisim üzerine uygulanan kuvvetler ortadan kaldırıldığında cisim ilk halini alır(lineer elastik).Diğer durumlarda, yani problem daha karmaşık varsayımlar gerektirdiğinde, uygulanan kuvvetler ve mometlerin deformasyonunu kabul etmek gerekir ve böylece ‘lineer olmayan elastik’ e değinmiş oluruz.
- **Plastik Katı:** Burada kalıcı deformasyonlar mevcuttur.
- **İzotropik Katı:** Elastik ve plastik özellikler tüm doğrultularda aynıdır.
- **Anizotropik Katı:** Elastik ve plastik özellikler doğrultuya bağlıdır. Strees kavramı ile ilgili sadeleştirmeleri de ele alacağız.



Şekil 4.1. Stress Kavramı

Destek noktalarına uygulanan dış etkenler altında dengede bir katı düşünelim.(Şekil 4.1) Farz edelim ki A katının içerisinde bir nokta ve π , A noktasından geçen bir düzlem olsun. Katı π düzlemi ile iki parçaya ayrılır. Üst kısmı kaldırırsak A noktasına etkiyen kuvvetlerin yerine dengenin değişmemesi için mekanikten bildiğimiz gibi (Örnek 2.3) üst kısmın tüm kuvvetleri basit bir bileşke vektör $\vec{R}$ ve kuvvetler çifti $\vec{M}_A$ momentine indirgenebilir. π düzlemi üzerinde ve A nın komşuluğunda bir ΔS alanı ve aşağıdaki limiti ele alırsak; $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{R}}{\Delta S} = \vec{t}$; $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{M}_A}{\Delta S} = \vec{m} = 0$ (sıfırlama çifti) lineer elastikte $\vec{t}$ vektörü(stress vektörü) π nin yönelimi ile ilgili A noktasındaki gerilimdir ve $\vec{m}$ sıfır olmadığından düşünülmez. Fakat lineer olmayan elastikte $\vec{m}$ düşünülebilir. π düzlemine orthogonal olan birim vektörünü $\vec{e}$ ile gösterirsek $\vec{e}$ üzerindeki $\vec{t}$ nin orthogonal izdüşüm vektörü, izdüşüm tensörü yardımıyla elde edilebilir. $\vec{\sigma}$ ile gösterilir ve normal stress olarak adlandırılır. $\vec{\sigma} = P_{\vec{e}}(\vec{t})$ ve $\vec{t}$ nin komplementer izdüşüm vektörü $\vec{\tau}$ ile gösterilir ve kesme stress olarak adlandırılır. $\vec{\tau} = P_{\vec{e}^\perp}(\vec{t}) = (I_3 - P_{\vec{e}})(\vec{t})$ her ikisinde A noktası üzerinde ve π düzlemine göre dir.

4.2. ‘S’ Gerilim (Stress) Tensörü

Simetrik matrisi:

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, z) & \tau_{xy}(x, y, z) & \tau_{xz}(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) & \sigma_y(x, y, z) & \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{xz}(x, y, z) & \tau_{yz}(x, y, z) & \sigma_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

şeklinde olan gerilim tensörünü düşünelim. Bu tensör $E_p^3(\mathbb{R})$ geometrik uzayının her bir $A(x_0, y_0, z_0)$ noktası ile ilişkilidir. Buna göre S gerilme tensörünü sayı tensör olarak:

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır (Ruiz-Toloso and Castillo 2005). Kartezyen eksenleri A noktası orjinli ve koordinat sistemine paralel düşünürsek S tensörü her bir birim vektör $\bar{e} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$ olacak şekilde belirler. Bu da A noktasından geçen gerilimi $\bar{t} = t^1 \bar{i} + t^2 \bar{j} + t^3 \bar{k}$ olan ortogonal π düzleminin oryantasyonunu verir ve tensör olarak:

$$\bar{t} = S(\bar{e}); \begin{bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Örneğin, S tensörünün ilk sütununun sayıları, YOZ eksenindeki A noktasının $\bar{t}$ geriliminin bileşenleridir ve bu durumda $\bar{e}$ vektörü $(1, 0, 0)$ doğrultusundadır. $P_{\bar{e}}(\bar{t}) = \bar{\sigma}_{\bar{e}}$ vektörünü hesaplarsak A daki yüzey normal gerilimi elde ederiz. $P_{\bar{e}}$ tensörüne göre de modülü:

$$\sigma_e = \bar{e} \cdot \bar{t} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu da:

$$\begin{aligned} \sigma_e = & \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ & + 2\tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

ifadesini sağlar. Benzer şekilde $(I_3 - P_{(\bar{e})})(\bar{t}) = \bar{\tau}_\pi$ hesaplırsak kesme gerilim vektörünü elde ederiz. Pisagor teoreminden de modülünü: $\tau_\pi = \sqrt{|\bar{t}|^2 - \sigma_e^2}$ biçiminde bulunur. S matrisinin birim öz vektörleri ile ilgili ana yönler $\bar{e}_I, \bar{e}_{II}, \bar{e}_{III}$ şeklindedir. Bu doğrultularda oluşan $\bar{t}$ gerilimi sadece $\bar{\sigma}$ normal gerilim bileşenlerine sahiptir. Fakat kesme gerilim bileşenlerine sahip değildir. ($\bar{\tau}_\pi = \bar{0}$) Yani, $\bar{t} \equiv \bar{\sigma}$ dir. $\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}, \bar{\sigma}_{III}$ gerilimlerini ana gerilim olarak adlandırılır. S matrisinin polinom karakteristiği:

$$S(\bar{e}) = \sigma_{\bar{e}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

ifadesini sağlamalıdır. S simetri matrisinin $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ özdeğerlerini elde ettiğimizde, üç ortak ortogonal birim vektör belirlenebilir ve $\mathbb{Q}$ taban matrisinin değişimini sağlar. O halde;

$$\hat{S} = \mathbb{Q}^t S \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}^{-1} S \mathbb{Q} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

yazılır. Bazı yazarlara göre, tensörlerden değil fakat, S tensöründen başlayarak geometrik şekiller (Morh diyagram) yardımıyla A noktasında belirli bir yöndeki gerilimleri bulabiliriz. Gerilim tensörünün diğer bir özelliği de A noktası üzerinde $\bar{e}$ birim vektörünün doğrultusunu değiştirdiğimizde (A–XYZ) kartezyen sistemine göre $P(x, y, z)$ noktası başlangıç pozisyon vektörü olacak şekilde belirlersek P noktası tarafından çevrilen noktaların dizisi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresidir. Benzer bir şekilde, k skaler değeri için $\bar{t}$ gerilim vektörünün bileşenleri yardımıyla $P'(X, Y, Z) \equiv P'(kt^1, kt^2, kt^3)$ koordinatlarında $\bar{t}$ gerilim vektörünün P' başlangıcında belirleyebiliriz. Aynı şekilde $\bar{e}$ nin P başlangıç noktasına göre $\bar{t}$ nin P' noktası tarafından çevrelenen noktalar dizisi inceleyelim. S tensörünü kullanarak:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P'} = kS \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}_P$$

ve

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = k^{-1} S^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

elde edilir. Ve

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = 1 \quad (4.6)$$

olduğundan (4.5) ve (4.6) eşitliklerin de yerine yazarsak:

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 [X \ Y \ Z] (S^{-1})^t (S^{-1}) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 1$$

elde edilir. Bu ikinci derece denklemden;

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 [X \ Y \ Z] \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}^{-1} \right)^2 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 1 \quad (4.7)$$

bulunur. Bu denklemi; (4.4) deki taban değişimini (4.7) uygularsak kolayca sınıflandırabiliriz.

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 [\hat{X} \ \hat{Y} \ \hat{Z}] (\hat{S}^{-1})^t (S^{-1}) \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 [\hat{X} \ \hat{Y} \ \hat{Z}] \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sigma_I}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sigma_{II}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\sigma_{III}}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = 1$$

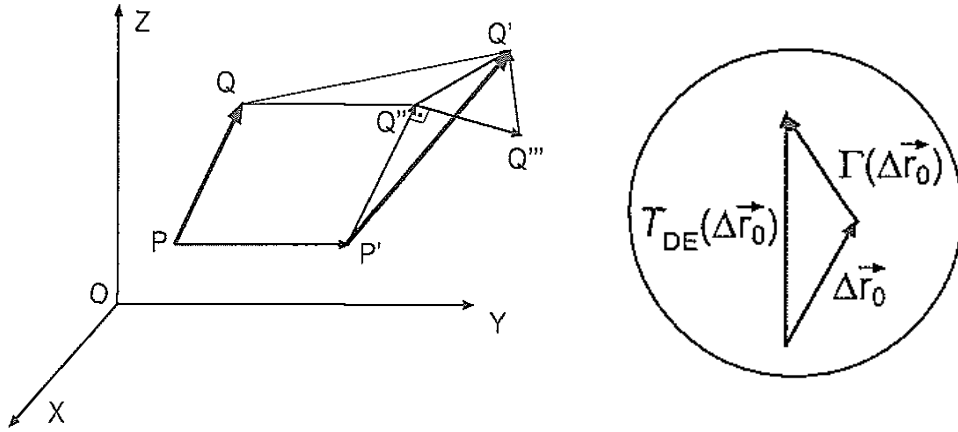
yazılır. Buradan;

$$\frac{\hat{X}^2}{(k\sigma_I)^2} + \frac{\hat{Y}^2}{(k\sigma_{II})^2} + \frac{\hat{Z}^2}{(k\sigma_{III})^2} = 1 \quad (4.8)$$

şeklinde yeni bir kartezyen denklem elde edilir (Hacısalıhoğlu 2005). Bu denklemde (4.7) nın elipsoid olduğunu ispatlar ve gerilim elipsoid olarak adlandırılır.

4.3. ‘ Γ ’ Strain Tensörü

$E_p^3(\mathbb{R})$ uzayında ($O-XYZ$) ortonormalize düzlemi ve dış kuvvetler ve mometler yardımıyla statik dengede duran elastik maddeden katı cisim ele alalım. Burada katının taneciklerinin bağıl konumunu değiştiren iç gerilmelerin oluşturduğu elastik deformasyon olarak bilinen bir durumla karşılaşırız. Bu durumda analizi yapılacak olgunun karmaşıklığını, ona yakın bir değerle matematiksel bir modelle yer değiştirebiliriz. Böylece daha uygun bir tahmin yapabiliriz. Bu bölümde bu modeli ele alacağız. $P(x, y, z)$ noktasında bulunan bir tanecik deformasyon sonrası $P'(x', y', z')$ noktasına kaymaktadır. Bu durumda $\overrightarrow{PP'} \equiv \vec{c} \equiv u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$ (Şekil 4.2) vektörü yer değiştirme vektörü olarak adlandırılır. Böylece her bir P_0 noktası için $\vec{c}_0$ yer değiştirme vektörü belirlenebilen bir $\vec{c}$ vektör alanı oluşur. (Eğer u, v ve w skaler değerleri biliniyorsa yer değiştirme vektörü sayısalıdır.)



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{QQ''} = \vec{c} \\
 \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{P'Q''} = \Delta \vec{r}_0 \\
 \overrightarrow{P'Q'} &= \Delta \vec{r} \\
 \overrightarrow{Q''Q'''} &= A(\Delta \vec{r}_0) = \Delta \vec{c}_1 \\
 \overrightarrow{Q'''Q'} &= \Gamma(\Delta \vec{r}_0) = \Delta \vec{c}_2 \\
 \overrightarrow{Q''Q'} &= \Delta \vec{c} = \Delta \vec{c}_1 + \Delta \vec{c}_2 \\
 \overrightarrow{QQ'} &= \vec{c} + \Delta \vec{c}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.2. Strain Tensörü

P ye yakın $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ noktasının yer değiştirmesi $\overline{QQ'}$ olsun. Buna göre P ve Q noktaları arası ilk uzaklık $|\overline{PQ}|$ ve son uzaklık $|\overline{P'Q'}|$ değişmelerini inceleyebiliriz. Benzer bir şekilde $\overline{PQ}$ ve $\overline{P'Q'}$ vektörlerinin elastik deformasyonundan dolayı bağlı konumlarını analiz edebiliriz. Aravektörlerden:

$$\Delta \vec{r}_0 = \overline{PQ} = \overline{OP} - \overline{OQ} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$$

yazıp düzenlersek:

$$\Delta r_0 = |\overline{PQ}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

olur. Burada:

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta r_0}; \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta r_0}; \cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta r_0} \quad \vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

dir. Farz edelim ki:

$$\Delta \vec{r}_0 = \overline{PQ} = \Delta r_0 \vec{e} \tag{4.9}$$

olsun ve benzer şekilde:

$$\Delta \vec{r} = \overline{P'Q'} = \Delta r^1 \vec{i} + \Delta r^2 \vec{j} + \Delta r^3 \vec{k} \tag{4.10}$$

olur. $\Delta \vec{r}_0$ vektörünü $\Delta \vec{r}$ vektörüne doğrudan çeviren tensör T_D ile gösterilir ve strain tensör olarak adlandırılır (Lichnerowicz 1962).

$$\Delta \vec{r} = T_D(\Delta \vec{r}_0) = T_D(\Delta r_0 \vec{e})$$

olur. Matris gösterimi de:

$$\begin{bmatrix} \Delta r^1 \\ \Delta r^2 \\ \Delta r^3 \end{bmatrix} = T_D \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca:

$$\begin{bmatrix} \Delta r^1 \\ \Delta r^2 \\ \Delta r^3 \end{bmatrix} = \Delta r_0 T_D \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde de gösterilir. Jacobian matrisini " J " ile gösterirsek:

$$J \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

olur. Tensör çözümleme kurallarına göre matris ilişkisi tahmini şu şekilde:

$$T_D = I_3 + J \quad (4.12)$$

kurulabilir. Her bir P_0 noktası için P_0 yakın $\Delta \vec{r}_0$ vektörleri ile ilgili çalışmalarımızda yararlı olacak T_D strain tensörü belirlenecek şekilde bir tensör alanı oluşturabiliriz. Şekil 4.2 de bu durum üç bölümde tarif edilmiştir.

1. Birinci basamakta $\overline{PQ} = \Delta \vec{r}_0$ vektörünü $\overline{P'Q''}$ konumuna taşımak için P noktasını $\vec{c}$ yer değiştirmesi kadar ötelememiz gerekir. Şekilden:

$$\overline{PQ} + \overline{QQ'} = \overline{PP'} + \overline{P'Q'}; \Delta \vec{r}_0 + (\vec{c} + \Delta \vec{c}) = \vec{c} + \Delta \vec{r}$$

elde ederiz. Buradan:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{c} \quad (4.13)$$

olur.

2. İkinci basamakta, $\Delta \vec{c}$ vektörünü incelediğimizde iki vektörün bileşkesi olduğunu görürüz. $\overline{Q''Q'''} = \overline{Q''Q'}$ birinci vektörü deformasyon sırasında $\Delta \vec{r}_0$ vektörünün rotasyonunu ifade eder. Bu rotasyon, rotasyon tensörü olarak adlandırılır ve A ile gösterilir. Matrisi anti simetrik matris olup:

$$A = \frac{1}{2}(J - J^t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklindedir. Eğer,

$$\overline{Q''Q'''} = \Delta \vec{c}_1 = (\Delta c_1)^1 \vec{i} + (\Delta c_1)^2 \vec{j} + (\Delta c_1)^3 \vec{k} \text{ ise } \Delta \vec{c}_1 = A(\Delta \vec{r}_0)$$

olur ve matrisi:

$$\begin{bmatrix} (\Delta c_1)^1 \\ (\Delta c_1)^2 \\ (\Delta c_1)^3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \Delta r_0 A \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Bu tensör $\Delta \vec{r}_0$ vektörünün rotasyonunu sağlar fakat deforme etmez.

3. Üçüncü adımda, $\Delta \bar{c}$ nin ikinci vektörünü yani, $\Delta \bar{r}_0$ vektörünün değişkenlerini ifade eden $\overline{Q''Q'}$ vektörünü inceleyeceğiz. $\Delta \bar{c} = \Delta \bar{c}_1 + \Delta \bar{c}_2$ toplamı başka bir vektörü oluşturur. Bu vektöre “**pure strain tensör**” adı verilir ve Γ ile gösterilir. Her bir P_0 noktası için Γ tensörlerinin belirlenmesiyle yeni bir tensör alanı oluşur.

$$\Gamma = \frac{1}{2} [J + J^t] \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde gösterilir. Sonuç olarak,

$$\overline{Q''Q'} = \Delta \bar{c}_2 = (\Delta c_2)^1 \bar{i} + (\Delta c_2)^2 \bar{j} + (\Delta c_2)^3 \bar{k}$$

ise Γ tensörü:

$$\Delta \bar{c}_2 = \Gamma(\Delta \bar{r}_0); \begin{bmatrix} (\Delta c_1)^1 \\ (\Delta c_1)^2 \\ (\Delta c_1)^3 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{bmatrix} = \Delta r_0 \Gamma \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

olarak ifade edilir. $\Delta \bar{c}_2$ vektörü, $\Delta \bar{r}_0$ vektörünün değişkenlerini (artış veya azalışını) verir. Böylece şekil 4.2 deki ayrıntıdan (dönmeleri görmezsek) “**tam deformasyon**” vektörü:

$$\Delta \bar{r}_0 + \Gamma(\Delta \bar{r}_0) = (I_3 + \Gamma)(\Delta \bar{r}_0) \equiv T_{DE}(\Delta \bar{r}_0) \quad (4.18)$$

şeklinde olur. Tam deformasyon vektörünü T_{DE} ile gösterir ve matrisi:

$$T_{DE} = I_3 + \Gamma \quad (4.19)$$

biçiminde olur. Dönme ve ötelemeleri ihmal edersek $T_{DE}(\Delta\vec{r}_0)$ vektörünün uzunluğu deformasyonun tam ölçümünü verir. (4.11), (4.15) ve (4.17) eşitliklerini:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + (\Delta\vec{c}_1 + \Delta\vec{c}_2)$$

eşitliğine uygularsak:

$$\begin{bmatrix} \Delta r^1 \\ \Delta r^2 \\ \Delta r^3 \end{bmatrix} = \Delta r_0 T_D \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \Delta r_0 I_3 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} + \Delta r_0 A \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} + \Delta r_0 \Gamma \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Buradan:

$$T_D = (I_3 + \Gamma) + A = T_{DE} + A \quad (4.20)$$

tensörü elde edilir.(Bu eşitlik elastik deformasyonda önemli bir kuraldır) Γ (strain) tensörünü, $\vec{e}$ birim vektörü üzerine uygularsak aynı doğrultuda “pure deformasyon” vektörü elde edilir. $\vec{e}$ doğrultusunda uygulanan bu vektör, $\Gamma(\vec{e})$ vektörünün $\vec{e}$ doğrultusunda birim uzama bileşeni ‘ ε ’ yi verir. ε :

$$\varepsilon = \vec{e} \bullet \Gamma(\vec{e}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

şeklindedir. $\Gamma(\vec{e})$ vektörünün diğer bileşeni, $\vec{e}$ vektörüne diktir. Açısal veya tanjant deformasyon olarak adlandırılır ve $\frac{1}{2}\gamma$ ile gösterilir. S gerilim tensörüne benzer şekilde Pisagor teoremi yardımıyla hesaplanabilir. O halde:

$$\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{|\Gamma(\vec{e})|^2 - \varepsilon^2} \quad (4.22)$$

elde edilir. $\vec{\varepsilon}$ ve $\frac{1}{2}\gamma$ vektörlerine göre izdüşümler kullanılabilir. $\vec{\varepsilon} = P_{\vec{e}}(\Gamma(\vec{e}))$:

$$\frac{1}{2}\vec{\gamma} = P_{\vec{e}^\perp}(\Gamma(\vec{e})) \quad (4.23)$$

olur. Buna göre $E_p^3(\mathbb{R})$ uzayının ortonormal bazı $\{\vec{e}_\alpha\}$ ise Γ tensörünün bileşenleri:

$$\Gamma_{\alpha\alpha} = \vec{e}_\alpha \bullet \Gamma(\vec{e}_\alpha) \text{ ve } \Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha} = \vec{e}_\alpha \bullet \Gamma(\vec{e}_\beta) = \vec{e}_\beta \bullet \Gamma(\vec{e}_\alpha), \quad \alpha \neq \beta \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur. Herhangi bir simetrik tensör için, Γ tensörü $(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})$ öz değerlerine sahiptir ve birim öz değerleri ortogonaldır. Buda maksimum veya minimum birim deformasyonunun(ε) doğrultusunu ve sıfır tanjant deformasyonu ($\gamma = 0$) belirler.

Verilen öz vektörlerle L ortogonal matrisi:

$$\hat{\Gamma} = L^t \Gamma L \equiv L^{-1} \Gamma L = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

şeklinde yazılır. Burada L matrisi S gerilme tensörü ile aynı özelliklerdedir. $\hat{\Gamma}$ tensörüne, $\vec{e}_a(0, \pm \cos 45, \pm \cos 45)$; $\vec{e}_b(\pm \cos 45, 0, \pm \cos 45)$; $\vec{e}_c(\pm \cos 45, \pm \cos 45, 0)$

doğrultularını uygulayarak ve (4.21), (4.22) kullanılarak maksimum tanjant deformasyon:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\max} \right) : \left(\frac{1}{2} \gamma_{\max} \right)_a &= \sqrt{\left| \hat{\Gamma}(\hat{\tilde{e}}) \right|^2 - (\hat{\tilde{e}}_a)^2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{II}^2 + \varepsilon_{III}^2}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}^2 + \varepsilon_{III}^2 - 2\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}}{4}} = \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III}}{2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde hesaplanır Benzer şekilde $\hat{\tilde{e}}_b$ ve $\hat{\tilde{e}}_c$ doğrultuları içinde hesaplanabilir. Γ tensörünün izi yani, polinomal karakteristiğin ilk değişkeni, P noktasındaki kübik birim genleşme katsayısı olarak adlandırılır ve c_v ile gösterilir.

$$c_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \quad (4.27)$$

Buda P nin komşuluğunda elastik deformasyondan dolayı δV birim hacim artışını gösterir (Ruiz-Toloso and Castillo 2005).

$$c_v = \frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} \quad (4.28)$$

olur.

4.4 S ve Γ nin Tensör İlişkileri Elastik Tensör

Anizotropi'nin en yaygın durumu olan Hook kanunu şu şekilde genelleştirilebilir (Timeshenko and Goodier 1970). (σ, τ) yi yalnızca bir doğrultuda değil de diğer doğrultularda da deformasyon oluşturduğunu kabul edelim. S gerilim tensörünü

oluşturan, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ gerilimlerden her biri Γ tensörünün, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ deformasyonlarının homojen lineer fonksiyonları olsun. Ayrıca, deformasyon potansiyel fonksiyonunun çakışık türevi olduğundan F matrisi simetrik olmalıdır ve matrisi:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x,x} & E_{x,y} & E_{x,z} & G_{x,xy} & G_{x,xz} & G_{x,yz} \\ E_{x,y} & E_{y,y} & E_{y,z} & G_{y,xy} & G_{y,xz} & G_{y,yz} \\ E_{x,z} & E_{y,z} & E_{z,z} & G_{z,xy} & G_{z,xz} & G_{z,yz} \\ G_{x,xy} & G_{y,xy} & G_{z,xy} & G_{xy,xy} & G_{xy,xz} & G_{xy,yz} \\ G_{x,xz} & G_{y,xz} & G_{z,xz} & G_{xy,xz} & G_{xy,xz} & G_{xy,yz} \\ G_{x,yz} & G_{y,yz} & G_{z,yz} & G_{xy,yz} & G_{xy,yz} & G_{xy,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

şeklindedir. (4.29) da verilen anizotropik elastik katının Hook kanununa göre tensörü, $E^3(\mathbb{R})$ Euclidean uzayında $\Gamma = [\gamma_{pq}]$ deformasyon tensörünün elastik özelliklerini gösteren ve elastik tensör olarak adlandırılan, $C = [c_{ijkl}]$ tensörünün indirgenmiş hali $S = [s_{ij}]$ gerilim tensörü gibidir. İndirgenen tensör denklemi indisleriyle:

$$s_{ij} = c_{ijkl} \gamma_{kl}$$

(4.30) şeklindedir. (4.30) eşitliğindeki tensörler ortonormalize tabandadırlar. Bu tensörlerin matris gösterimi:

$$S \equiv [s_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \Gamma \equiv [\gamma_{pq}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$C \equiv [c_{ijkl}] = \begin{bmatrix} E_{x,x} & G_{x,xy} & G_{x,xz} & - & G_{x,xy} & G_{xy,xy} & G_{xy,xz} & - & G_{x,xz} & G_{xy,xz} & G_{xz,xz} \\ G_{x,xy} & E_{x,y} & G_{x,yz} & - & G_{xy,xy} & G_{y,xy} & G_{xy,yz} & - & G_{xy,xz} & G_{y,xz} & G_{xz,yz} \\ G_{x,xz} & G_{x,yz} & E_{x,z} & - & G_{xy,xz} & G_{xy,yz} & G_{z,xy} & - & G_{xz,xz} & G_{xz,yz} & G_{z,xz} \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ G_{x,xy} & G_{xy,xy} & G_{xy,xz} & - & E_{x,y} & G_{y,xy} & G_{y,xz} & - & G_{x,yz} & G_{xy,yz} & G_{xz,yz} \\ G_{x,xy} & G_{y,xy} & G_{xy,yz} & - & G_{y,xy} & E_{y,y} & G_{y,yz} & - & G_{xy,yz} & G_{y,yz} & G_{yz,yz} \\ G_{xy,xz} & G_{xy,yz} & G_{z,xy} & - & G_{y,xz} & G_{y,yz} & E_{y,z} & - & G_{xz,yz} & G_{yz,yz} & G_{z,yz} \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ G_{x,xz} & G_{xy,xz} & G_{xz,xz} & - & G_{x,yz} & G_{xy,yz} & G_{xz,yz} & - & E_{x,z} & G_{z,xy} & G_{z,xz} \\ G_{xy,xz} & G_{y,xz} & G_{xz,yz} & - & G_{xy,yz} & G_{y,yz} & G_{yz,yz} & - & G_{z,xz} & E_{y,z} & G_{z,yz} \\ G_{xz,xz} & G_{xz,yz} & G_{z,xz} & - & G_{xz,yz} & G_{yz,yz} & G_{z,yz} & - & G_{z,xz} & G_{z,yz} & E_{z,z} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

şeklinde. Burada, $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ ve i , satır blok indisi, j sütun blok indisi, k her bloğun satır indisi ve l her bir bloğun sütun indisi. Elastik problem genel olarak şu şekilde düzenlenir.

1. Gerilim halinin tensör alanı $S(x, y, z)$ bilinmelidir.
2. Yapılacak çalışmalarda $C(x, y, z)$ elastik tensör alanı bulunmalıdır.
3. $\Gamma(x, y, z)$ tensör alanı (4.30) eşitliğiyle bulunur ve Jacobian ‘ J ’ kısmi türevleriyle ilişkilidir.
4. Bir önceki basamakta elde edilen kısmi diferansiyel denklemler, $\bar{c}$ yer değiştirme tensör alanını bulmak için kullanılır.
5. $\bar{c}$ bilinirse T_D, A ve T_{DE} deformasyon tensörleri elde edilir.

Homojen izotropik elastik katı durumunda bazı sabitler aşağıdaki gibidir:

1. Elastik veya young modülü ‘ E ’
2. Poisson oranı, ν
3. Shear modülü, G
4. Lamé sabiti, λ elde edilir. Bu sabitler arasındaki ilişkilerden bazıları:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}; E = \frac{(3\lambda+2G)G}{\lambda+G} \quad (4.32)$$

Şeklindedir (Timoshenko and Goodier 1970). Bu sabitler yardımıyla izotropik elastik tensör:

$$C \equiv [c_{ijkl}] = \begin{bmatrix} (\lambda+2G) & 0 & 0 & - & 0 & G & 0 & - & 0 & 0 & G \\ 0 & \lambda & 0 & - & G & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & - & 0 & 0 & 0 & - & G & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & G & 0 & - & \lambda & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & - & 0 & (\lambda+2G) & 0 & - & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & \lambda & - & 0 & G & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & G & - & 0 & 0 & 0 & - & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & G & - & 0 & \lambda & 0 \\ G & 0 & 0 & - & 0 & G & 0 & - & 0 & 0 & (\lambda+2G) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

şeklinde oluşturulur. (4.30) eşitliğini kullanarak izotropik elastik matrisi:

$$S = 2G\Gamma + \lambda(\text{trace}\Gamma)I_3 \quad (4.34)$$

veya

$$\Gamma = \frac{1+\nu}{E}S - \frac{\nu}{E}(\text{trace}S)I_3 \quad (4.35)$$

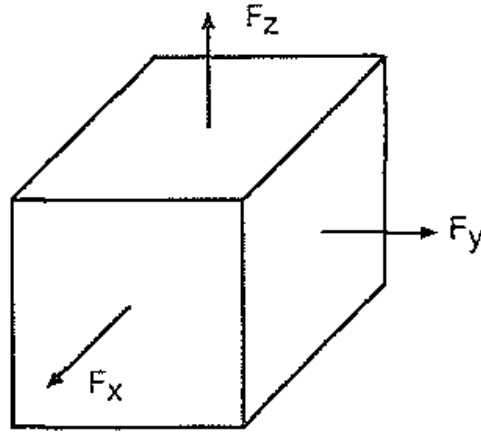
şeklinde elde edilir. Çünkü;

$$\text{trace}S = (3\lambda+2G)(\text{trace}\Gamma) \quad (4.36)$$

dir. Burada $trace\Gamma = c_v$ (kübik genleşme katsayısı) dir.(4.34),(4.35) ve (4.36) eşitlikleri Lamé eşitliğine denktir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda c_v + 2G\varepsilon_x; \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda c_v + 2G\varepsilon_y; \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \lambda c_v + 2G\varepsilon_z; \tau_{yz} = G\gamma_{yz}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Örnek 4.1.(Elastik ve Termik Tensörler): Young modülü E ve Poisson oranı ν olan l kenarlı küp şeklinde homojen elastik ve izotropik bir katı düşünelim. Bu katıya, üç farklı yüzden dik olarak F_x, F_y ve F_z dış kuvvetleri etki etmektedir (Şekil 4.3). Sıcaklık artışından dolayı katı içerisinde termik gerilmeler oluşmaktadır ve Δt sıcaklık farkı ile doğru orantılıdır. Burada maddenin orantılılık katsayısı k dır. k ve Δt sayısalıdır.



Şekil 4.3. Termik ve Elastik Tensörler

1. Verilen problemin tensör ve matris gösterimini yazınız.
2. Katının $B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ Bulk modülü ile verilen birim küpik genleşme katsayısı c_v yi bulunuz.
3. Katı sıkıştırılmaz ise Poisson oranını bulunuz.

4. Katıya etki eden dış kuvvetlerin olmadığını farz edersek termik hareketten dolayı oluşacak olan Γ deformasyonunu belirleyiniz.

Çözüm:

1. İlk olarak maddeye etki eden dış kuvvetlerden dolayı oluşan gerilmeler termik genişmeden dolayı dengelenecektir. Buda bize (4.30) daki tensör tanımını verir.

$$s_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - k_{ij}\Delta t$$

İzotropik katılarda (4.33) deki matris eşitliği kullanılır.

$$S = 2G\Gamma + \lambda(\text{trace}\Gamma)I_3 - kI_3\Delta t \quad (4.38)$$

2. (4.38) deki matris denkleminin köşegen terimlerinden:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(iz\Gamma) - k\Delta t$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(iz\Gamma) - k\Delta t$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(iz\Gamma) - k\Delta t$$

elde edilir ve bu terimleri toplarsak:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 3\lambda(iz\Gamma) - 3k\Delta t$$

veya

$$izS = (2G + 3\lambda)(iz\Gamma) - 3k\Delta t \quad (4.39)$$

olur. Bu ifade (4.36) eşitliğini verir. Diğer yandan (4.27) ve (4.32) den:

$$c_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = iz\Gamma$$

$$2G + 3\lambda = 2\frac{E}{2(1+\nu)} + 3\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{(1+\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 3\frac{E}{3(1-2\nu)} = 3B$$

elde edilir ve c_v ve $(2G + 3\lambda)$ ifadelerini (4.39) eşitliğine uygularsak:

$$izS = 3Bc_v - 3k\Delta t \rightarrow c_v = \frac{izS}{3B} + \frac{k\Delta t}{B}$$

olur. Bu durumda:

$$izS = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{F_x + F_y + F_z}{l^2}$$

olur. Sonuç olarak:

$$c_v = \frac{F_x + F_y + F_z}{3l^2 B} + \frac{k\Delta t}{B}$$

elde edilir.

3. Katı sıkıştırılmaz olduğundan $c_v = 0$ dır. Buda $iz\Gamma = 0$ olduğunu gösterir. (4.39) eşitliğinde $iz\Gamma$ yi yalnız bırakıp:

$$(2G + 3\lambda) = \frac{E}{(1 - 2\nu)}$$

eşitliğini de göz önüne alırsak:

$$iz\Gamma = \frac{izS + 3k\Delta t}{(2G + 3\lambda)} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} (izS + 3k\Delta t) = 0$$

elde edilir. Burada $\nu = \frac{1}{2}$ değeri için ifade sıfıra eşittir.

4. Eğer herhangi dış kuvvet yoksa gerilim tensörü $S = \Omega$ dir. Böylece $izS = 0$ olur. Buna göre (4.38) ve (4.39) eşitliklerinden:

$$2G\Gamma + \lambda(iz\Gamma)I_3 - kI_3\Delta t = \Omega$$

ve

$$iz\Gamma = \frac{3k\Delta t}{(2G + 3\lambda)}$$

olur. İkinci sorudaki Bulk modülünden elde edilen:

$$(2G + 3\lambda) = \frac{E}{(1 - 2\nu)}$$

eşitliğini ifadede yerine yazarsak:

$$2G\Gamma + \lambda(3k\Delta t \frac{(1 - 2\nu)}{E})I_3 - kI_3\Delta t = \Omega$$

olur. G ve λ değerlerini yerine yazarsak:

$$2\frac{E}{2(1 + \nu)}\Gamma + \left[\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(\frac{3(1 - 2\nu)}{E} \right) - 1 \right] k\Delta t I_3 = \Omega$$

$$\frac{E}{(1 + \nu)}\Gamma + \left[\frac{3\nu}{(1 + \nu)} - 1 \right] k\Delta t I_3 = \Omega ; E\Gamma + (2\nu - 1)k\Delta t I_3 = \Omega$$

olur. Yani:

$$\Gamma = \left(\frac{1-2\nu}{E} k \Delta t \right) I_3$$

elde edilir.

Örnek 4.2.(Temel Gerilimler): Bir katının belirli bir noktadaki gerilme durumu:

$\sigma_x = -4$; $\sigma_y = 2$; $\sigma_z = 1$; $\tau_{xy} = 4$; $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ şeklindedir.

1. S gerilme tensörünü bulunuz.
2. $\vec{r}(1,2,3)$ vektörüne dik olan ve π düzleminde yer alan $\vec{t}$ toplam gerilim tensörünü ve $\vec{t}$ nin modülünü bulunuz.
3. $\vec{t}$ tensörüne ait $\vec{\sigma}$ vektörünün normal bileşenini ve modülünü bulunuz.
4. $\vec{t}$ tensörüne ait π düzlemindeki $\vec{\tau}$ vektörünün tanjant bileşenini ve modülünü bulunuz.
5. $\vec{\sigma}_I, \vec{\sigma}_{II}, \vec{\sigma}_{III}$ temel gerilim vektörlerini ve modüllerini bulunuz.
6. Maksimum kesme gerilimini bulunuz.
7. Maksimum kesme geriliminin etki ettiği düzlemlerin ortogonal doğrultusunu bulunuz.
8. Maksimum kesme geriliminin normal gerilim değerini bulunuz.
9. Kesme durumu sıfır ($\sigma = 0$) olan düzlemin ortogonal doğrultusunu bulunuz.
10. Bir önceki durum için $\vec{\tau}$ vektörünü ve modülünü bulunuz.

Çözüm:

1. Gerilim tensörü: $S = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

2. $\vec{r}(1,2,3)$ yönündeki birim vektörü: $\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ dir ve $\vec{t}$ gerilim tensörü:

$$[\vec{t}] = S[\vec{e}_r] = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}; \vec{t} = (4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k})$$

bulunur ve modülü:

$$|\vec{t}| = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{4^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{89}{14}}$$

olarak bulunur.

3. (2.3) eşitliği kullanılarak:

$$P_{\vec{e}_r} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$P_{\vec{e}_r}(\vec{t}) = \frac{1}{14\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{29}{14} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{\sigma} = P_{\vec{e}_r}(\vec{t}) = \frac{29}{14} \vec{e}_r = \frac{29}{14\sqrt{14}} (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

elde edilir. Bu eşitlikten:

$$\sigma = |\vec{\sigma}| = \frac{29}{14}$$

olarak bulunur. Skaler çarpımla:

$$\sigma = \vec{e}_r \bullet \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{14}} [1 \ 2 \ 3] \frac{1}{\sqrt{14}} [4 \ 8 \ 3] = \frac{1}{14} (4 + 16 + 9) = \frac{29}{14}$$

aynı sonuç bulunur.

4. (2.4) kullanılarak tamamlayıcı izdüşüm tensörü :

$$P_{\vec{e}_r^\perp} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -13 & -2 & -3 \\ -2 & -10 & -6 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}; P_{\vec{e}_r^\perp}(\vec{t}) = \frac{1}{14\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -13 & -2 & -3 \\ -2 & -10 & -6 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{9\sqrt{70}}{14\sqrt{14}} \left(\frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{\tau} = P_{\vec{e}_r^\perp}(\vec{t}) = \frac{9\sqrt{5}}{14} \vec{e}_r^\perp = \frac{9}{14\sqrt{14}} [3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}]$$

bulunur: Buradan

$$\tau = |\vec{\tau}| = \frac{9\sqrt{5}}{14}$$

olarak bulunur. Ayrıca aynı sonuç pisagor teoreminden:

$$\tau = \sqrt{|\vec{t}|^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{89}{14} - \left(\frac{29}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{405}{14^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{14}$$

bulunabilir.

5. S nin karakteristik polinomu:

$$\begin{bmatrix} -4-\sigma & 4 & 0 \\ 4 & 2-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sigma \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\sigma-1)(\sigma^2+2\sigma-24)=0$$

şeklindedir. $\sigma_I = 4; \sigma_{II} = 1; \sigma_{III} = -6$ özdeğerleri temel gerilimin modüllerini verir.

Birim vektörler: $\sigma_I = 4$ için:

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\vec{a}_I = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$ elde edilir. $\sigma_{II} = 1$ için:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\vec{a}_{II} = \vec{k}$ elde edilir. $\sigma_{III} = -6$ için:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\vec{a}_{III} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$ elde edilir. Özvektörlerle ilgili taban değişimin doğrudan ortogonal matris olduğunu doğrular.

$$|\mathbb{Q}| = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Yani, yeni üç yüzlü bir direkt üçyüzlüdür. $\mathbb{Q}$ matrisinden, S nin ortogonal yükseltgenmesi:

$$\hat{S} = \mathbb{Q}^{-1} S \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}^t S \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuç olarak istenilen vektörler:

$$\vec{\sigma}_I = \frac{4}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}); \vec{\sigma}_{II} = \vec{k}; \vec{\sigma}_{III} = \frac{-6}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$$

elde edilir.

6. (4.26) eşitliğine göre S gerilim tensörü ve $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ doğrultularından:

$$\begin{aligned} (\tau_{\max})_a &= \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} = \frac{1 - (-6)}{2} = \frac{7}{2} \\ (\tau_{\max})_b &= \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{4 - (-6)}{2} = 5 \\ (\tau_{\max})_c &= \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\vec{e}_b (\cos 45, 0, \pm \sin 45)$ yönündeki maksimum kesme gerilimi $\tau_{\max} = 5$ dir.

7. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ortogonal vektörleri S nin maksimum kesme geriliminin doğrultusundadırlar. $\mathbb{Q}$ tabanlarını $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ almamız gerekir. Bu durumda matris hali:

$$X = \mathbb{Q}\hat{X};$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece $\tau = 5$ kesme geriliminin ortogonal doğrultusu:

$$\vec{e}_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{i} + \vec{j}) \text{ ve } \vec{e}_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\vec{i} + 3\vec{j})$$

dir.

8. Maksimum kesme geriliminin normal gerilimi:

$$\sigma_1 = \vec{e}_{b_1} \bullet S(\vec{e}_{b_1}) = \frac{1}{\sqrt{10}}[3 \quad 1 \quad 0] \bullet \left(\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10}[3 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}(-24 + 14 + 0) = \frac{-10}{10} = -1;$$

$$\sigma_2 = \vec{e}_{b_2} \bullet S(\vec{e}_{b_2}) = \frac{1}{\sqrt{10}} [-1 \ 3 \ 0] \bullet \left(\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10} [-1 \ 3 \ 0] \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} (-16 + 6 + 0) = \frac{-10}{10} = -1;$$

şeklinde bulunur. Böylece $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$ olur.

9. S tensör sistemi alınıp ve çözülürse ilk sisteme dönülür. İstenilen doğrultu $\vec{\hat{e}}(\hat{\ell}, \hat{m}, \hat{n})$ olsun: O zaman:

$$\sigma = \vec{e} \bullet \hat{S}(\vec{e}) = 0; \begin{bmatrix} \vec{\ell} & \vec{m} & \vec{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\ell} \\ \vec{m} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = 0; 4\hat{\ell}^2 + \hat{m}^2 - 6\hat{n}^2 = 0$$

olur. Bu denklemin parametrik koordinatlardaki çözümü:

$$\begin{cases} \hat{\ell} = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 - \lambda^2)\mu \\ \hat{m} = 2\sqrt{6}\lambda\mu \\ \hat{n} = (1 + \lambda^2)\mu \end{cases}$$

olur. Burada $\lambda = \mu = 1$ seçilirse, $(\hat{\ell}, \hat{m}, \hat{n}) = (0, 2\sqrt{6}, 2)$ olur. Yani vektör $\vec{\hat{r}}(0, \sqrt{6}, 1)$ olup tekrar ilk hale dönülür.

$$X = Q\hat{X}; \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{30} \end{bmatrix}$$

dir. Çözümü:

$$\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{30}\vec{k}; \vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{35}}(2\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{30}\vec{k})$$

bulunur.

10. $\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{35}}(2\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{30}\vec{k})$ vektörü $\vec{t}_r$ gerilimine sahiptir. Buna göre:

$$\begin{bmatrix} t_r^1 \\ t_r^2 \\ t_r^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{30} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ \sqrt{30} \end{bmatrix}$$

olur. $\sigma = 0$ olduğundan:

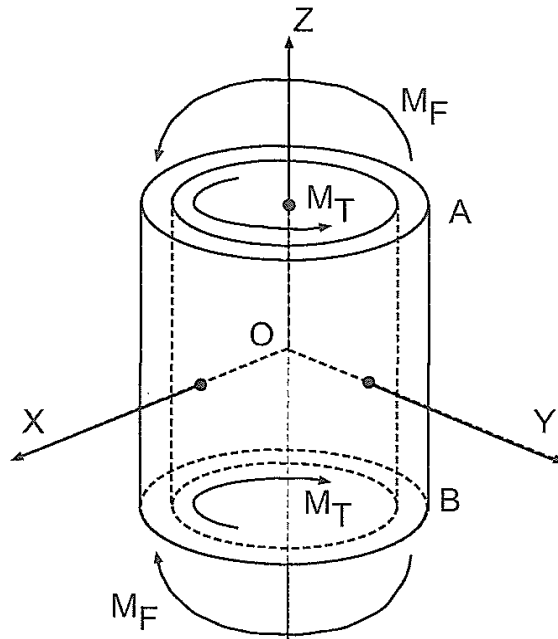
$$\vec{\tau} \equiv \vec{t}_r = \frac{1}{\sqrt{35}}(-12\vec{i} + 6\vec{j} + \sqrt{30}\vec{k}) \text{ ve } \tau = |\vec{t}_r| = \frac{\sqrt{12^2 + 6^2 + 30}}{\sqrt{35}} = \sqrt{6}$$

bulunur.

Örnek 4.3. (Karışık Gerilmeler): Genişliği $s = 2$ mm ve çapı $R = 30$ cm olan Şekil 4.4 de verilen metal tüpü düşünelim. Tüpün her iki ucundan momentler uygulanırsa:

- Değeri $\vec{M}_F = 3\vec{i}$ mT olan YOZ düzleminde kıvrılan moment.

- Değeri $\vec{M}_T = 4\vec{k}$ mT olan $\overline{OZ}$ düzlemindeki tork momenti.
1. Tüpün dışındaki bir P noktasındaki S gerilme tensörünü bulunuz.
 2. Maksimum gerilmelerin oluşacağı noktaları bulunuz.
 3. Maksimum gerilmenin değerini bulunuz.
 4. Maksimum gerilme üzerinde oluşan ve düzleme dik olan birim vektörü bulunuz.



Şekil 4.4. Metal tüp

Çözüm:

1. Çapı genişliğinden çok büyük olduğundan genişliğini ihmal edebiliriz. Bu durumda XOY düzlemindeki tork momenti tarafından meydana gelen tanjant gerilimi:

$$\tau = \frac{M_T}{R(2\pi Rs)} = \frac{M_T}{2\pi sR^2}$$

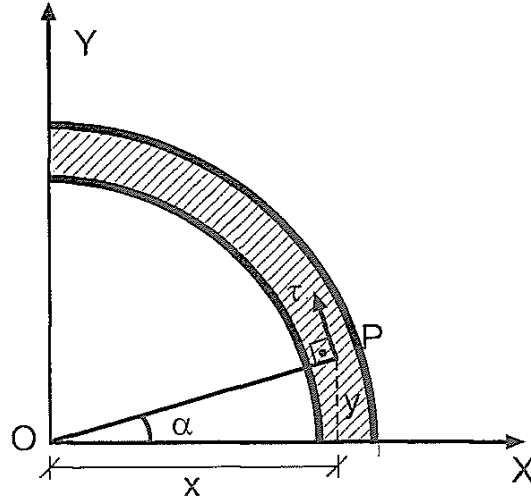
dir ve şekil 4.5 teki gibi $\overline{OX}$ ve $\overline{OY}$ eksenlerine paralel olan bu düzlemdeki kesme gerilimleri:

$$\vec{\tau} = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} = -\tau \sin \alpha \vec{i} + \tau \cos \alpha \vec{j} = -\tau \frac{y}{R} \vec{i} + \tau \frac{x}{R} \vec{j}$$

dir. Özetle:

$$\tau_{xz} = -\frac{M_T}{2\pi s R^2} \cdot \frac{y}{R} = -\frac{M_T y}{2\pi s R^3}; \quad \tau_{yz} = \frac{M_T}{2\pi s R^2} \cdot \frac{x}{R} = \frac{M_T x}{2\pi s R^3}$$

dir.



Şekil 4.5. Metal Tüp Üzerindeki Gerilmeler

Bir başka deyişle bükücü momentten dolayı XOY düzlemi üzerinde oluşan dış gerilim:

$\sigma_z = \frac{M_F y}{I_x}$ dir. $\overline{OX}$ eksenine göre düzlem kesitinin I_x iç momentini hesaplamak için

yine ilk varsayımımız olan genişliğin çapa göre ihmal edilebilirliğini uygulayalım. O zaman:

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{1}{2} (2\pi s R) R^2 = \pi s R^3$$

olur. Bu sonucu σ_z yerine yazarsak:

$$\sigma_z = \frac{M_F y}{\pi s R^3}$$

olur. Bu gerilimleri bulduğumuz zaman tüpün dışındaki $P(x, y, z)$ noktasına etki eden gerilim tensörünü de belirleyebiliriz. S gerilim tensörü:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi s R^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_T y \\ 0 & 0 & M_T x \\ -M_T y & M_T x & 2M_F y \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

2. Karakteristik polinom yardımıyla temel gerilimleri bulabiliriz. Buradan maksimum gerilmelerin yerini belirleyebiliriz.

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0; \quad \sigma \left[\sigma^2 - \sigma_z \sigma + (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] = 0$$

olur. Sonuç olarak:

$$\sigma \left[\sigma^2 - \sigma_z \sigma + \tau^2 \right] = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

ve τ sabit olduğundan σ maksimum değeri (+) için sağlanacaktır.

3. $\overline{AB}$ ($y = R$) ana doğrusundaki noktada σ_z değeri:

$$(\sigma_z)_{\max} \left(\frac{2M_F y}{2\pi s R^3} \right)_{y=R} = \frac{M_F}{\pi s R^2}$$

olur ve maksimum gerilim:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{(\sigma_z)_{\max}}{2} + \sqrt{\left[\frac{(\sigma_z)_{\max}}{2} \right]^2 + \tau^2} = \frac{M_F}{2\pi s R^2} + \sqrt{\left(\frac{M_F}{2\pi s R^2} \right)^2 + \left(\frac{M_T}{2\pi s R^2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi s R^2} + \left[M_F + \sqrt{M_F^2 + M_T^2} \right] \end{aligned}$$

olur. Momentleri $cm \times kg$ cinsinden alırsak:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2\pi \times 0.6 \times 30^2} \left[3 \times 10^5 + \sqrt{3^2 + 4^2} \times 10^5 \right] = \frac{8 \times 10^4}{339.292} = 235.8 kg / cm^2$$

veya

$$\sigma_{\max} = 235.8 \times 9.8 \times 10^4 = 2311 \times 10^4 \text{ pascal}$$

bulunur.

4. σ özdeğerine ait öz vektör:

$$\frac{\ell}{\tau_{xz}} = \frac{m}{\tau_{yz}} = \frac{n}{\sigma}$$

ve $\sigma_{\max}$ değeri için:

$$\tau_{xz} = \left(-\tau \frac{y}{R} \right)_{y=R} = -\tau; \quad \tau_{yz} = \left(\tau \frac{x}{R} \right)_{x=0} = 0$$

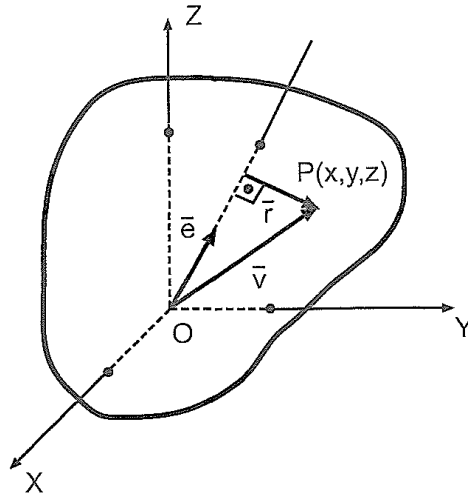
olur. Böylece öz vektör:

$$(\ell, m, n) = (-\tau, 0, \sigma_{\max}) = \frac{1}{2\pi s R^2} (-M_T, 0, M_F + \sqrt{M_F^2 + M_T^2}) = \lambda_0 (-4, 0, 8)$$

bulunur. Sonuç olarak $\vec{e}_{\sigma_{\max}}$ birim vektörü: $\vec{e}_{\sigma_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-\vec{i} + 2\vec{k})$ olarak bulunur.

4.5. İç Moment Tensörü

(O – XYZ) uzayında bir geometrik uzayı düşünelim.



Şekil 4.6. İç moment tensörü

O noktasından geçen bir eksen etrafında dönen ve anlık bir $\vec{e}$ doğrultusuna sahip homojen bir S katısını ele alalım. Katının $P(x, y, z)$ noktası komşuluğunda noktasal

kütlesini düşünelim (Şekil 4.6). Katının, kütleleri toplamı ile eksene uzaklığının karesi çarpımı katının $\vec{e}$ eksenine göre iç momenti olarak adlandırılır. Şu şekilde gösterilir.

$$I_e = \int_S r^2 dm \quad (4.40)$$

Eğer $\vec{e}$ birim vektörünü :

$$\vec{e} = \ell \vec{i} + m \vec{j} + n \vec{k}; \quad \ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

alınırsa ve P noktasının konum vektörü:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

alınırsa (3.4) eşitliğinden $P_{\vec{e}^\perp}$ komplementer izdüşüm vektörü kullanılarak $\vec{r}$ vektörü:

$$\vec{r} = P_{\vec{e}^\perp}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} (1-\ell^2) & -\ell m & -\ell n \\ -\ell m & (1-m^2) & -mn \\ -\ell n & -mn & (1-n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.

$P_{\vec{e}^\perp} \equiv P_{\vec{e}^\perp}^t$ olduğundan:

$$r^2 = \vec{r} \bullet \vec{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P_{\vec{e}^\perp}^t \bullet P_{\vec{e}^\perp} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P_{\vec{e}^\perp}^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olur. İzdüşümler eşkuvvetlik özelliğini sağladığından:

$$r^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P_{\vec{e}^\perp} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\ell^2) & -\ell m & -\ell n \\ -\ell m & (1-m^2) & -mn \\ -\ell n & -mn & (1-n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m^2 + n^2) & -\ell m & -\ell n \\ -\ell m & (\ell^2 + n^2) & -mn \\ -\ell n & -mn & (\ell^2 + m^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadeyi düzenleyip (4.40) ta yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} I_e &= \int_S r^2 dm = \int_S (m^2 + n^2)x^2 + (\ell^2 + n^2)y^2 + (\ell^2 + m^2)z^2 - (\ell mxy + \ell nxz + mnyz) dm \\ &= \ell^2 \int_S (y^2 + z^2) dm + m^2 \int_S (x^2 + z^2) dm + n^2 \int_S (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2 \left(\ell m \int_S xy dm + \ell n \int_S xz dm + mn \int_S yz dm \right) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak:

$$I_x = \int_S (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_S (x^2 + z^2) dm; \quad I_z = \int_S (x^2 + y^2) dm \quad P_{xy} = \int_S xy dm; \quad P_{xz} = \int_S xz dm;$$

$$P_{yz} = \int_S yz dm \quad (4.41)$$

olur. I_x, I_y, I_z ifadeleri Kartezyen eksenine göre iç momenttirler. Çünkü I_x, I_y, I_z ifadleri daima pozitifdirler. P_{xy}, P_{xz}, P_{yz} ifadeleri ise iç çarpımlardır ve merkezkaç momentler olarak adlandırılırlar. (4.41) ifadelerini I_e da yerine yazarsak:

$$I_e = I_x \ell^2 + I_y m^2 + I_z n^2 - 2P_{xy} \ell m - 2P_{xz} \ell n - 2P_{yz} mn$$

$$= \begin{bmatrix} \ell & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix} = \vec{e} \bullet I(\vec{e}) \quad (4.42)$$

olur. I ifadesi iç moment tensörü olup bir simetrik tensördür. Matris gösterimi:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

şeklindedir. Eğer Kartezyen sisteminde orjin ile S katısının G ağılık merkezi kesişir ise iç moment tensörü I_G ile gösterilir (Schouten 1989). Eğer katının ağırlık merkezinden e eksenine değil de e paralel başka bir eksen geçerse bu eksene göre iç moment $(I_G)_e$ ile gösterilir ve I_e ile ilişkisi Steiner teoremi olarak bilinir.

$$I_e = m\Delta^2 + (I_G)_e \quad (4.44)$$

Burada m katının kütlesi, Δ ise paralel eksenler arasındaki uzaklığı ifade eder. Konunu başında ifade edilen dönme ω açısal hızına sahipse e eksenine etrafında açısal hız vektörü:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e} = \omega \ell \vec{i} + \omega m \vec{j} + \omega n \vec{k} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \quad (4.45)$$

şeklinde olur. Burada ω açısal hızı rad/sn cinsindendir. $I(\vec{\omega})$ vektörü e eksenine göre S katısının kinetik momentidir ve $\vec{h}_e$ ile gösterilir. Eğer,

$$\vec{h}_e = h_1 \vec{i} + h_2 \vec{j} + h_3 \vec{k} \text{ ise } (\ell^2 + m^2 + n^2 = 1):$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = I(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \omega I(\vec{e}) = \omega \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

olur. $\frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{h}_e$ skaler çarpımı E_c ile gösterilir ve $\vec{\omega}$ dönme açısına göre S katısının kinetik enerjisi denir. Kinetik enerji şu şekilde:

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{h}_e = \frac{1}{2} (\omega \vec{e}) \bullet I(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega \vec{e}) \bullet (\omega I(\vec{e})) = \frac{1}{2} \omega^2 (\vec{e} \bullet I(\vec{e}))$$

yazılır. (4.42) ifadesini E_c de yerine yazarsak:

$$E_c = \frac{1}{2} I_e \omega \quad (4.47)$$

elde edilir. İkinci dereceden tüm simetrik tensörler için I tensörünün polinom karakteristiği pozitif değerdeki I_1, I_2, I_3 öz değerlerini verir ve temel iç momentler olarak adlandırılır. Bu özdeğerlerle ilgili $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ öz birim vektörleride temel yönlerdir. Buda iç çarpımları sıfır olan maksimum ve minimum iç momentleri verir. $\mathbb{Q}$ ortogonal matrisinin sütunlarındaki öz vektör bileşenleri I tensörünün derecesini artırır. I tensörü:

$$\hat{I} = \mathbb{Q}^{-1} I \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}' I \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}; I_1 > I_2 > I_3 > 0 \quad (4.48)$$

şeklindedir. (4.42) eşitliği $\vec{e}$ birim vektörünün (ℓ, m, n) bileşenlerinin fonksiyonu cinsinden katının iç momenti I_e verir ve şu şekilde:

$$1 = I_x \left(\frac{\ell}{\sqrt{I_e}} \right)^2 + I_y \left(\frac{m}{\sqrt{I_e}} \right)^2 + I_z \left(\frac{n}{\sqrt{I_e}} \right)^2 - 2P_{xy} \left(\frac{\ell}{\sqrt{I_e}} \right) \left(\frac{m}{\sqrt{I_e}} \right) - 2P_{xz} \left(\frac{\ell}{\sqrt{I_e}} \right) \left(\frac{n}{\sqrt{I_e}} \right) - 2P_{yz} \left(\frac{m}{\sqrt{I_e}} \right) \left(\frac{n}{\sqrt{I_e}} \right)$$

yazılır. Eğer $A(x, y, z)$ noktasını seçersek bu şartları sağlayan koordinatlar:

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{I_e}}; y = \frac{m}{\sqrt{I_e}}; z = \frac{n}{\sqrt{I_e}}$$

şeklindedir. $\overline{OA}$ konum vektörünün A ucu katı yüzeyinde olup:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{xy} xy - 2P_{xz} xz - 2P_{yz} yz = 1 \quad (4.49)$$

yazılır. Bu ifade S katısının e eksenine göre iç elipsoididir.

Örnek4.4. (Katı ile İlgili İç Tensörler): Dik bir paralel yüz düşünelim. Bu paralel yüzün kenarları a, b, c tepe noktalarında kesişmektedir. Ayrıca bu cismin yoğunluğunun $(\rho = 1)$ olduğunu farz edelim.

1. Katının iç tensörünü, $a \in \overline{OX}$, $b \in \overline{OY}$ ve $c \in \overline{OZ}$ olacak şekilde bulunuz.
2. $(G - XYZ)$ sistemine göre I_G iç momentin bulunuz.
3. (a) $(O - XYZ)$ ve (b) $(G - XYZ)$ sistemleri için $e \equiv \overline{OG}$ eksenine göre katının I_e iç momentini bulunuz.
4. $(O - XYZ)$ sisteminde katının konumunu $b \in \overline{OX}; c \in \overline{OY}; a \in \overline{OZ}$ olacak şekilde yerleştirelim. Bu durumda 1,2 ve 3 soruları yeniden cevaplayınız. 5. I_{abc} ve I_{bca} iç moment tensörlerinin değerleri eşitmidir.

Çözüm:

1. (4.41) eşitliğine göre:

$$I_x = \int_S (y^2 + z^2) dm = \iiint_S (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (y^2 + z^2) dz = \frac{abc}{3} (b^2 + c^2)$$

$$I_y = \int_S (x^2 + z^2) dm = \iiint_S (x^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + z^2) dz = \frac{abc}{3} (a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{abc}{3} (a^2 + b^2)$$

$$P_{xy} = \int_S (xy) dm = \iiint_S (xy) dx dy dz = \int_0^a x dx \int_0^b x dy \int_0^c dz = \frac{abc}{4} (ab) \quad P_{xz} = \frac{abc}{4} (ac)$$

$$P_{yz} = \frac{abc}{4} (bc)$$

dir.(4.43) eşitliğine göre iç tensör:

$$I = (abc) \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2 + c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2. Katıyı $(G - XYZ)$ sisteminde orjini $G\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ noktası olan ve eksenleri

$(O - XYZ)$ eksenine paralel şekilde düşünelim. G noktasında katı üç simetri eksenine

sahip olacağından ve integralin sınırları değişeceğinden iç çarpımların tümü sıfır olur.

Özetle:

$$\begin{aligned}(I_G)_x &= \int_S (y^2 + z^2) dm = \iiint_S (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{c/2}^{c/2} (y^2 + z^2) dz = \frac{abc}{12} (b^2 + c^2)\end{aligned}$$

$$(I_G)_y = \frac{abc}{12} (a^2 + c^2)$$

$$(I_G)_z = \frac{abc}{12} (a^2 + b^2)$$

ve

$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$$

olup buda iç tensörün:

$$I_G = \frac{abc}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterir. Burada ki $(I_G)_x, (I_G)_y, (I_G)_z$ momentleri temel iç momentlerdir ve doğrultuları Kartezyen eksenini doğrultusundadır. (I_G tensörü için)

3. (a) $\overline{OG}$ doğrultu vektörü $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ dir ve birim vektörü:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

şeklindedir. (4.42) eşitliğini kullanarak:

$$\begin{aligned} I_e &= (abc) \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} [abc] \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2 + c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{b^2 + c^2}{3} a^2 + \frac{a^2 + c^2}{3} b^2 + \frac{a^2 + b^2}{3} c^2 - 2\frac{ab}{4} ab - 2\frac{ac}{4} ac - 2\frac{bc}{4} bc \right) \\ I_e &= \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)}{3} - \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{2} \right) = \frac{abc}{6} \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

bulunur.

(b) Aynı förmülü kullanarak I_G tensörü:

$$\begin{aligned} (I_G)_e &= \frac{abc}{12} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} [abc] \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{abc}{12} \frac{(b^2 + c^2)a^2 + (a^2 + c^2)b^2 + (a^2 + b^2)c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{abc}{6} \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

bulunur. Aynı eksene sahip olduklarından aynı sonucu verirler.

4. (a) Benzer işlemler uygulanarak:

$$I_x = \frac{abc}{3}(c^2 + a^2); I_y = \frac{abc}{3}(b^2 + a^2); I_z = \frac{abc}{3}(b^2 + c^2)$$

$$P_{xy} = \frac{abc}{4}bc; P_{xz} = \frac{abc}{4}ba; P_{yz} = \frac{abc}{4}ac$$

$$I' = (abc) \begin{bmatrix} \frac{a^2 + c^2}{3} & -\frac{bc}{4} & -\frac{ab}{4} \\ -\frac{bc}{4} & \frac{a^2 + b^2}{3} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} & \frac{b^2 + c^2}{3} \end{bmatrix}$$

olur.

(b)

$$(I_G)_x = \frac{abc}{12}(a^2 + c^2); (I_G)_y = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2); (I_G)_z = \frac{abc}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I'_G = \frac{abc}{12} \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

olur.

(c) i. $\overline{OG}$ doğrultu vektörü bu defa (b, c, a) olur. Birim vektörü:

$$\vec{e}' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(b\vec{i} + c\vec{j} + a\vec{k})$$

olur.

$$I'_{e'} = \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} [bca] \begin{bmatrix} \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} & -\frac{ab}{4} \\ -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} & \frac{b^2+c^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$I'_{e'} = \frac{abc}{6} \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \equiv I_e$$

elde edilir.

ii.

$$(I'_G)_{e'} = \frac{abc}{12} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} [bca] \begin{bmatrix} a^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$(I'_G)_{e'} = \frac{abc}{6} \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \equiv (I_G)_e$$

bulunur.

5. Görölüyorki: $M^t IM = M^{-1} IM = I'$ dir. Yani, eğer

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $MM^t = I_3$ ise sonuç:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (abc) \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
& = (abc) \begin{bmatrix} \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} & -\frac{ab}{4} \\ -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} & \frac{b^2+c^2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. M matrisini almazsak I ve I' matrisleri aynı polinom karakteristiğine sahip olup ortogonal benzerdirler. Böylece I, I' matrisleri aynı özdeğerlere ve temel iç metrelere sahiptirler. Gerçekte M matrisi, O noktasından geçen anlık bir eksen etrafında dönen bir matristir. Çünkü verilen sabit bir nokta için katının yer değişimine eşittir. Aslında M matrisini analiz edersek $|M|=1$ dir. Yani dönme matrisidir. Örnek 2.2 nin 4. noktasında θ dönme açısının değerini veren formülü, ilgili M matrisi için kullanılırsa:

$$\cos \theta = \frac{izM - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = 120; \cos \theta = -\frac{1}{2}; \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olur. (2.14) eşitliğinde ki dönme tensörüne göre m_{11} ve m_{22} terimleri bilindiğinde e eksenin cosinüs bileşenlerini bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \cos^2 \alpha + (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cos \theta = \cos^2 \alpha + (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\
m_{22} &= \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \cos \theta = \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \left(-\frac{1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

ise çözüm:

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

dür. Buda

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ eksenine göre rotasyonu çeyrek düzlemin açıortayı, $\theta = 120$ değerini ve katının 1.sorudaki ve 4.sorudaki konumlarının birbirine eşdeğer olduğunu yani izometri olduğunu gösterir.

5. SONUÇ

Euclidean ve Hermit linear uzayların afin uzaylarını oluşturan izdüşüm, momentum, dönme ve yansıma tensörleri verilerek, $E^n(\mathbb{R})$ uzayında afiniteler, homoteziler izometrilere gibi afin geometrik tensörler incelendi. Afin geometrik tensör dönüşümleri olan homografiler ele alındı. $E^2(\mathbb{R})$ ve $E^3(\mathbb{R})$ uzaylarında öteleme, dönme, merkezi simetri, eksenel simetri ve benzerlik kavramları incelendi. Fizik ve Mekanikte kullanılan Strees ve Strain tensörleri tanıtıldı. Bu tensörlerin tensör ilişkisi olan Elatik tensör kavramı ile iç moment tensörü özellikleri incelendi. Ayrıca bu tensörlere ait problemler çözümleriyle birlikte verildi.

KAYNAKLAR

- Brillouin, L. 1964, Tensor in mechanics and elasticity. Academic Prees..
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2005, Analitik Geometri ,7.Baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Ankara.
- Kaya, R.2002, Analitik Geometri, 7.Baskı Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul.
- Lichnerowicz, A. 1962, Elements of tensor calculus.Translated by J.W.Leech and D.J.Newman from the 4th revised ed.Methuen's Monographs on Physical Subjects.London:Methuen&Co.Ltd. New York.
- Musayev, B. Koca, K. Mustafa, N. 2006 AnalizIV, Şeçkin Yayınevi, Ankara.
- Ramon Ruiz-Toloso, and J. Castillo, E.2005, From Vectors to Tensors, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Sabuncuoğlu, A.2006,Diferansiyel Geometri, 3.Baskı, Nobel Yayın Dağıtım,İstanbul.
- Salimov, A. ve Mağden, A. 2008, Diferansiyel Geometri, Aktif Yayın Evi, İstanbul.
- Schouten, J.A. 1989, Tensor analysis for physicists, Dover Publications, Inc,New York.
- Timoshenko, S.P. Goodier, J.N. 1970,Theory of Elasticity, 3.Baskı, Mc Grow-Hill Book Company.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Erzurum'un Pasinler ilçesinde doğdu. İlk, orta öğrenimini Pasinler ve lise öğrenimini Denizlide'de tamamladı. 1997 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl M.E.B. da Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen M.E.B. da ki görevine devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.