

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YIĞINLAR VE SÜZGEÇLER**

**Tezi Hazırlayan  
Ahmet KILIÇ**

**Tezi Yöneten  
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2010  
KAYSERİ**

- \* Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Ahmet KILIÇ** tarafından hazırlanan “**Yığınlar ve Süzgeçler**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

03/08/2010

**JÜRİ :**

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

**ONAY :**

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun 31.08.2010 tarih ve 2010/31-10 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

31 / 08 / 2010



Enstitü Müdürü

**TEŞEKKÜR**

“Yığınlar ve Süzgeçler” isimli yüksek lisans tezi çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen ve yönlendiren saygı değer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA’ ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

## YIĞINLAR VE SÜZGEÇLER

Ahmet KILIÇ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2010

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

### ÖZET

Bu tezde Yığın Yakınsak Uzaylar, Süzgeç Yakınsak uzaylar, Limit Uzayları ve Pretopolojik Uzaylar gibi topolojik kategorilerde genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarının karakterizasyonunda ihtiyaç duyulacak belli bazı sonuçları, teknik teoremleri ifade ve ispat edeceğiz.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde kısaca Yığınlar ve Süzgeçlerin tarihçesi üzerinde durulmuş olup literatür taraması mahiyetindedir.

İkinci bölümde, amaca yönelik kategori, fanktor, topolojik fanktor, diskre ve indiskre objeler, yığınlar, süzgeçler ve topolojik kategori gibi temel tanımlara ve bunlarla ilgili temel teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, süzgeçler ve yığınlar hakkında bazı teknik teoremler ifade ve ispat edilmektedir. Bir  $B$  cümlesi üzerinde  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j=1, 2$  süzgeçleri verildiğinde  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$ ,  $i, j=1, 2$  (burada  $\pi_{ij}$  projeksiyon fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır) olacak şekilde bir  $\sigma$  süzgecinin  $B^2 \nabla_{\nabla} B^2$  üzerinde mevcut olması için gerek ve yeter şartları veren temel bir sonuç verilmektedir. Ayrıca bu temel sonuçtan bazı önemli sonuçlar elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde, Sabit Yakınsak Süzgeç Uzayı Kategorisi (**ConFCO**) da  $\text{Pre } \bar{T}_2$  ve  $\text{Pre } T_2'$  objeleri karakterize edildi.

**Anahtar Kelimeler:** Yığınlar ve Süzgeçler, Süzgeç Yakınsak Uzayı, Limit Uzayı, Pretopolojik Uzaylar.

## STACKS AND FILTERS

Ahmet KILIÇ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, August 2010

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Muammer KULA

### ABSTRACT

In this thesis, we state and prove some certain results that will be needed to give an explicit characterization of each of these generalized separation properties in categories of Stack Convergence Spaces, Filter Convergence Spaces, Limit Spaces and Pretopological Spaces.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the historical development of the stacks and filters is given.

In the second chapter, the basic definitions such as a category, functor, topological functor, discrete and indiscrete objects, stacks, filters and topological category were given.

In the third chapter, we state and prove some technical theorems about stacks and filters. The main result is concerned with finding necessary and sufficient conditions on filters  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j=1, 2$  on set  $B$  for which there exists a filter  $\sigma$  on the wedge  $B^2 \vee_{\nabla} B^2$  such that  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$  for all  $i, j=1, 2$ , where  $\pi_{ij}$  are defined in terms of projections. We deduce from this some certain results.

In the fourth chapter,  $\text{Pre } \overline{T}_2$  ve  $\text{Pre } T'_2$  objects are characterized in the category of constant filter convergent spaces (**ConFCO**).

**Keywords:** Stacks and Filters, Filter Convergent Spaces, Limit Spaces, Pretopological Spaces.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| KABUL VE ONAY .....                                               | i   |
| TEŞEKKÜR.....                                                     | ii  |
| ÖZET .....                                                        | iii |
| ABSTRACT.....                                                     | iv  |
| KISALTMALAR VE SİMGELER .....                                     | vi  |
| <br>1. BÖLÜM                                                      |     |
| GİRİŞ .....                                                       | 1   |
| 2. BÖLÜM                                                          |     |
| TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER                                       |     |
| 2.1. Kategori.....                                                | 3   |
| 2.2.Fanktor .....                                                 | 5   |
| 2.3. Topolojik Fanktor .....                                      | 7   |
| 2.4. Diskre ve İndiskre Yapılar .....                             | 10  |
| 2.5. Süzgeçler.....                                               | 13  |
| 2.6. Topolojik Kategori Örnekleri.....                            | 16  |
| 3. BÖLÜM                                                          |     |
| YIĞINLAR VE SÜZGEÇLER                                             |     |
| 3.1. Yığın ve Süzgeç Tanımı.....                                  | 21  |
| 3.2. Wedge Çarpımı ve Dönüşümler.....                             | 21  |
| 3.3. Yığınlarla İlgili Bazı Teknik Sonuçlar.....                  | 23  |
| 3.4. Süzgeçlerle İlgili Bazı Teknik Sonuçlar .....                | 25  |
| 4. BÖLÜM                                                          |     |
| SABİT YAKINSAK SÜZGEÇ UZAYI KATEGORİSİNDE $\text{PreT}_2$ OBJELER |     |
| 4.1. ConFCO nun Topolojik Kategorisi.....                         | 38  |
| 4.2. ConFCO da $\text{PreT}_2$ Objeler .....                      | 38  |
| KAYNAKLAR .....                                                   | 42  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                    | 44  |

## KISALTMALAR VE SİMGELER

|                                           |                                                      |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| SET                                       | Cümleler Kategorisi                                  |
| TOP                                       | Topolojik Uzaylar Kategorisi                         |
| FCO                                       | Yakınsak Süzgeç Uzayların Kategorisi                 |
| ConFCO                                    | Sabit Yakınsak Süzgeç Uzaylar Kategorisi             |
| $\alpha, \beta, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ | Süzgeçler                                            |
| $F(X)$                                    | $X$ üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi               |
| $[x]$                                     | Tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen süzgeç |

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herlich [1], Kent [2], Wyler [3], Nell [4], Schwartz [5] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herlich [1] de belli kaynakların başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategori tanımlamıştır. Wyler [3] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fonktora dayandırarak tanımlamıştır.

Matematik bilim dalının farklı branşlardaki ayrışma (farklılaşma) ve uzmanlaşmanın (specialization) artması matematikçileri, bu çok sayıdaki farklı branşların ortak bir alan üzerinde düşünmelerini zorunlu kılmıştır. İşte kategori teorisi bu ortak alanlarda bir tanesidir ki, farklı alanlardaki araştırmacıların daha kolay bir iletişim kurmaları için ortak bir dil sağlamaktadır. Genel topoloji matematiğin cebir, analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, lattice teorisi gibi pek çok teoride uygulamalara sahip olduğundan topologlar topolojik fikirleri (ideas) kategori diline çevirmeyi tercih ederler.

Eğer Genel Topolojide ki teoremleri topolojik kategorilerde daha genel yapılarda formüle etmek ve ispatlamak istenirse, öncelikle başlangıç kaldırması, bitiş kaldırması ve diskre yapılar gibi belli temel kavramları herhangi bir topolojik kategori için tekrardan formüle etmek gerekmektedir.

Topolojide ki bazı önemli kavramlar (Kompaktlık, Bağlantılılık, Tam Bağlantısızlık, Ayrılma Aksiyomları, Kapalılık vb.) Manes [6] ve Herrlich, Salicrup ve Strecker [7] tarafından değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemelerin çoğu kapanış operatörleri kullanılarak yapılmıştır.



Tam (Complete) ve Cocomplete kategorileri için kapanış operatörlerinin tanımlarını Dikranjan ve Giuli [8] de verilmiştir. Bu kapanış operatörleri kullanılarak Hausdorff uzayı, kompaktlık ve bağlantılılık kavramları karakterize edilmiştir.

Yine aynı kapanış operatörleri, verilen her bir  $\varepsilon$  kategorisinin dolgun bir alt kategorisi  $\mathcal{A}$  nın epimorfizmlerini karakterize etmek için de kullanılmıştır. Brummer [9], Hoffman [10], Marny [11] ve Baran [12],  $T_0$ -aksiyomunu değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmesini yaptılar. Hang [13], Schwartz [5] ve Baran [14] de bu genişlemeler arasında ki ilişkileri incelediler. Baran [12] da ayrılma aksiyomlarını  $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_{\frac{3}{2}}, T_4, T_5)$ , [15] de kapalılık kavramını ve [16] da da kompaktlık kavramını

kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Bu genişlemeleri yapmanın bir amacı, bu kavramların topolojinin önemli teoremlerinden Tietze Genişleme Teoremi, Urysohn Lemması, Urysohn Metrikleşme Teoremi, Tychonoff Teoremi gibi teoremlerin ifadelerinde yer almalarıdır. Diğer bir amacıda, kapalılık kavramı ile karakterize edilebilen kompaktlık ve bağlantılılık kavramlarını topolojik kategoriye genişletmektir.

Bu tezde, Yığın Yakınsak Uzaylar, Süzgeç Yakınsak Uzaylar, Limit Uzayları ve Pretopolojik Uzaylar gibi kategorilerde bu genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarının karakterizasyonunda ihtiyaç duyulacak bazı belli sonuçları ifade ve ispat edilecek. Yani, süzgeçler ve yığınlar hakkında bazı teknik teoremleri ifade ve ispat etmeye çalışacağız. Bir  $B$  cümlesi üzerinde  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  süzgeçleri verildiğinde  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  (burada  $\pi_{ij}$  projeksiyon (izdüşüm) fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır), olacak şekilde bir  $\sigma$  süzgecinin  $B^2V_\Delta B^2$  ( $B^2$  nin iki ayrı kopyasının diagonalı boyunca kesişmesi) üzerinde mevcut olması için gerek ve yeter şartları veren temel bir sonucu [17] makalesinde inceleyeceğiz. Ayrıca bu temel sonuç kullanılarak yeni sonuçlar elde edeceğiz. Daha sonra bu sonuçların yukarıda bahsedilen kategorilerde nasıl kullanıldığını örneklerle açıklamaya çalışacağız.

## 2. BÖLÜM

### TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar ve bunlarla ilgili bazı teoremler ifade edildi.

#### 2.1. Kategori

**Tanım 2.1.1.**  $\mathcal{K}$  bir sınıf olsun.  $\mathcal{K}$  daki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi ve verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi verilsin. Bu bileşke aynı zamanda aşağıdaki şartları sağlarsa  $\mathcal{K}$  ya bir Kategori denir.

1.  $\mathcal{K}$  da ki her  $A$  nesnesi için  $1_A : A \rightarrow A$  birim dönüşümü vardır öyle ki her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  dönüşümü için  $1_A \circ g = g$  olmalıdır.

2.  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$  olmak üzere bileşke “ $\circ$ ” işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  sağlanmalıdır.

$\mathcal{U}$  da ki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı kısaca  $Ob(\mathcal{K})$  (veya  $\mathbf{O}_K$ ) şeklinde, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi;

$\mathcal{K}(A, B) = Hom(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ dönüşüm} \}$  şeklinde verilen iki dönüşümün bileşkesi de

$$\circ : \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) \rightarrow \mathcal{K}(A, C)$$

$$(f, g) \rightarrow \circ(f, g) = g \circ f$$

şeklinde gösterilebilir.

**Örnek 2.1.2.**  $\mathcal{K}$  nın objeleri  $(X, \tau), (Y, \sigma), (Z, \delta), \dots$  topolojik uzaylar, dönüşümleri  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  sürekli fonksiyonlar ve bileşkede fonksiyonların bileşkesi olsun.

$\mathcal{K}$  nın kategori olduğunu gösterelim.

1.  $(X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  olacak şekilde  $1_X : X \rightarrow X$  birim fonksiyonu vardır ve bu birim fonksiyonu sürekli dir. Ayrıca her  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $f \circ 1_X = f$  ve her  $g : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$  için  $1_X \circ g = g$  dir.

2.  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma), g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \delta)$  ve  $h : (Z, \delta) \rightarrow (W, \mu)$  olmak üzere  $f, g, h$  fonksiyonları sürekli olduklarından bunların bileşkeleri olan  $h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$  de sürekli ve eşittirler.

Dolayısıyla  $\mathcal{K}$  bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *topolojik uzayların kategorisi* denir ve  $\mathcal{K} = \mathbf{TOP}$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.3.**  $\mathcal{K}$  nın objeleri  $A, B, C, \dots$  cümleleri, dönüşümleri fonksiyonlar ve bileşke işlemi olarak da fonksiyonların bileşkesini alalım.

$\mathcal{K}$  nın kategori olduğunu gösterelim.

1. Her  $A$  cümlesi için  $1_A : A \rightarrow A$  birim fonksiyonu vardır. Ayrıca her  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  fonksiyonu için  $1_A \circ g = g$  dir.

2.  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$  olmak üzere fonksiyonlarda  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  birleşme özelliği sağlanır.

Dolayısıyla  $\mathcal{K}$  bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *cümlelerin kategorisi* denir ve  $\mathcal{K} = \mathbf{SET}$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.4.**  $\mathcal{K}$  bir kategori ve  $T, \mathcal{K}$  nın bir objesi olsun. Eğer  $\mathcal{K}$  nın herhangi bir objesi  $A$  olmak üzere  $\mathcal{K}(A, T) = \{ f \mid f : A \rightarrow T \text{ dönüşüm} \}$  tek elemanlı ise  $T$  ye  $\mathcal{K}$  nun *son (terminal) objesi* denir [18].

**Tanım 2.1.5.**  $\mathcal{K}$  bir kategori ve  $i, \mathcal{K}$  nun bir objesi olsun. Eğer  $\mathcal{K}$  nın herhangi bir  $A$  objesi için  $\mathcal{K}(i, A) = \{ f \mid f : i \rightarrow A \text{ dönüşüm} \}$  tek elemanlı ise  $i$  ye  $\mathcal{K}$  nın *ilk (initial) objesi* denir [18].

**Tanım 2.1.6.**  $\mathcal{K}$  bir kategori ve  $Z$ ,  $\mathcal{K}$  nin bir objesi olsun. Eğer  $Z$ ,  $\mathcal{K}$  nin hem ilk hem de son objesi ise  $Z$  ye  $\mathcal{K}$  nin *sıfır (zero) objesi* denir [18].

**Örnek 2.1.7.**  $\mathcal{K} = \text{SET}$  olsun.  $\mathcal{K}$  nun varsa ilk, son ve sıfır objelerini bulalım.

$i = \emptyset$  ilk objedir ; çünkü

Herhangi bir  $A$  objesi için  $\mathcal{K}(\emptyset, A) = \{f | f : \emptyset \rightarrow A \text{ fonksiyon}\} = \{\text{boş fonksiyon}\}$

tek elemanlı cümledir.

$T = \{x\}$  tek elemanlı cümle, son objedir ; çünkü

$\mathcal{K}(A, \{x\}) = \{f | f : A \rightarrow \{x\} \text{ fonksiyon}\} = \{\text{sabit fonksiyon}\}$  tek elemanlı cümledir.

*Sıfır objesi* yoktur ; çünkü  $i = \emptyset \neq \{x\} = T$  dir.

## 2.2. Fanktor

**Tanım 2.2.1.**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{L}$  iki kategori olsun. Eğer  $\mathcal{K}$  da ki her  $A$  nesnesi için  $F(A)$ ,  $\mathcal{L}$  nin nesnesi ve  $\mathcal{K}$  nin her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ ,  $\mathcal{L}$  nin bir dönüşümü oluyorsa ve;

$$1. F(1_A) = 1_{F(A)} \quad (\text{Her } A \in \text{Ob}(\mathcal{K}) \text{ için})$$

$$2. F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

şartları sağlanıyorsa  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  ye  $\mathcal{K}$  dan  $\mathcal{L}$  ye bir *fanktor* denir [18].

**Örnek 2.2.2.**  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ ,  $F(X, \mu) = X$  şeklinde tanımlanan  $F$  nin bir fanktor olduğunu gösterelim.

$F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  de  $F(X, \tau) = X$  ve  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $F(f) = f : X \rightarrow Y$  olarak tanımlansın. Bu taktirde kolayca görülür ki  $F$  bir fanktordur.

$$a) F(1_{(X, \tau)}) = 1_{U(X, \tau)} = 1_X$$

$$b) F(g \circ f) \text{ yine } F(g) = g \text{ ve } F(f) = f \text{ olduklarından } F(g) \circ F(f) = g \circ f \text{ tir.}$$

Dolayısıyla  $F$  bir fanktordur. Bu fanktora *unutkan (forgetful) fanktor* denir.

**Tanım 2.2.3.**  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  fanktor olsun.

1. Her  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  ve her  $f : F(A) \rightarrow F(B)$  için en az bir  $g : A \rightarrow B$  ye  $F(g) = f$  olacak şekilde bir dönüşümü varsa  $F$  ye *dolgun (full) fanktor* denir.
2. Eğer her  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  ve  $f, g : A \rightarrow B$  dönüşümleri için  $F(f) = F(g)$  olduğunda  $f = g$  ise  $F$  ye *düzenli (faithful) fanktor* denir.
3.  $F$  ye *amnestik* denir ancak ve ancak  $f : A \rightarrow A$  izomorfizmi için eğer  $F(f) = \text{Id} = 1_{F(A)}$  ise  $f = \text{Id}_A = 1_A$  olmalıdır.
4.  $F$  hem *düzenli fanktor* hem de *amnestik* ise  $F$  ye *belirli (concrete) fanktor* denir [18].

**Örnek 2.2.4.**  $F : \text{SET} \rightarrow \text{TOP}$  dönüşümü dolgun ( full), düzenli (faithfull), amnestik ve belirli ( concrete) fanktor dir.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & F(X) = (X, P(X)) \\
 \downarrow f & & \downarrow F(f) = f \text{ sürekli} \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & F(Y) = (Y, P(Y))
 \end{array}$$

i)  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\text{SET})$  ve  $\forall h : F(X) \rightarrow F(Y)$  için en az bir  $g : X \rightarrow Y$  dönüşümü var ve  $F(g) = h$  ise  $F$  ' ye dolgun (full) fanktor denir.

$g : X \rightarrow Y$  ise  $F(g) : F(X) \rightarrow F(Y)$  olur.  $F(g) = h$  olduğundan  $F$  dolgun (full) fanktor dur.

ii)  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\text{SET})$  olmak üzere  $f, g : X \rightarrow Y$  dönüşümleri için  $F(f) = F(g)$  olduğunda  $f = g$  ise  $F$  ' ye düzenli (faithfull) denir.

$F(f) = f, F(g) = g$  olmak üzere  $F(g) = F(f)$  ise  $f = g$  olduğundan düzenli (faithfull) dir.

iii)  $F$  amnestiktir ancak ve ancak  $f : A \rightarrow A$  için  $F(f) = 1_{F(A)}$  ve  $f$  izomorfizm ise  $f = 1_A$  olmalıdır.

$f: A \rightarrow A$  1: 1 fonksiyon ve  $F(f) = F(A) = (A, P(A)) \rightarrow F(A) = (A, P(A))$  sürekli ve

$F(f) = 1_{(A, P(A))} = 1_{F(A)}$  dır. Buradan  $f: A \rightarrow A$  ya  $f = 1_A$  birim fonksiyondur.

iiii)  $F$  dönüşümü hem düzenli, hemde amnestik olduğundan belirli (concrete) fanktor dur.

**Tanım 2.2.5.**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{L}$  iki kategori olsun.  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  fanktoru düzenli, dolgun ve her  $A \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  için en az bir  $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  vardır öyleki  $F(B) \cong A$  oluyorsa  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{L}$  kategorilerine denktir denir [19].

### 2.3. Topolojik Fanktor

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [1], Kent [2], Wyler [3], Schwartz [5] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [1] de belli kaynakların başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategori tanımlamıştır. Wyler [3] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır.

**Tanım 2.3.1.**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{L}$  kategorileri verilsin. Eğer  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $F$  ye *topolojik fanktor* ya da  $\mathcal{K}$  ya  $\mathcal{L}$  kategorisi üzerinde *topolojik kategori* denir.

1.  $F$  belirli (concrete) olmalıdır.

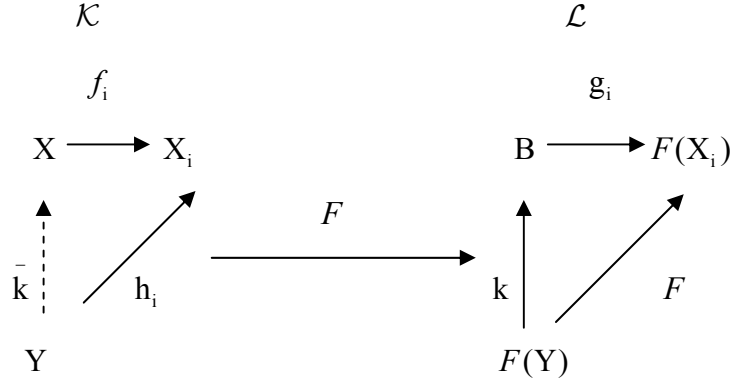
2.  $F$  küçük demetlere sahiptir. Yani, her  $B \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  için  $F^{-1}(B)$  bir cümledir.

Burada  $F^{-1}(B) = \{ X \in \text{Ob}(\mathcal{K}) \mid F(X) = B \}$  şeklinde tanımlanır ve  $B$  üzerindeki demet olarak adlandırılır.

3. Her  $F$  - kaynağı için yani  $\mathcal{L}$  'de  $g_i: B \rightarrow F(X_i)$  ailesi için  $\mathcal{K}$  'da  $f_i: X \rightarrow X_i$

ailesi vardır öyle ki  $F(f_i) = g_i$  dır ve eğer  $F(h_i: Y \rightarrow X_i) = g_i \circ k: F(Y) \rightarrow B =$

$F(X) \rightarrow F(X_i)$  ise bu takdirde  $k : F(Y) \rightarrow F(X) = B$  nin en az bir  $\bar{k} : Y \rightarrow X$  kaldırması vardır, yani  $F(\bar{k}) = k$  dır ve  $f_i \circ \bar{k} = h_i$  dir. Bunu diagramla gösterelim.



Bu son şartın anlamı, her  $F$  - kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir. Keyfi bir  $F$  - kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi  $F$  -kavşağı ( $F$  -sink) için bitiş kaldırmasına (final lift) denktir (Bitiş kaldırma, başlangıç kaldırmanın dualidir) [1].

**Tanım 2.3.2**  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  topolojik fanktorunda her  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  sabiti için  $F^{-1}(\mathcal{L})$  tek bir yapıya sahipse bu takdirde  $F$  ya normalleştirilmiş fanktor denir. Burada son nesnenin alt nesneleri sabit olarak adlandırılır ( $Z$  sabittir ancak ve ancak  $Z \subset 1$  = son eleman olmalıdır).

**Teorem 2.3.3**  $f_i : (A, \mu) \rightarrow (A_i, \mu_i)$  sürekli fonksiyonlar ailesi olsun.  $\mu = \mu_*$  olması için gerek ve yeter şart her  $(B, \sigma)$  topolojik uzayı ve her  $g_i : (B, \sigma) \rightarrow (A_i, \mu_i)$  sürekli fonksiyonları için eğer  $g_i = f_i \circ h$  olacak şekilde en az bir  $h : B \rightarrow A$  fonksiyonu varsa,  $h$  süreklidir [18].

Burada  $\mu_*$ ,  $f_i$  ler tarafından doğrulan topolojidir. Yani,  $S = \bigcup_{i \in I} \{ f_i^{-1}(H) : H \in \mu_i \}$

alt bazı tarafından üretilen topolojidir. Buna *doğrulan (induced) topoloji* denir ve  $\mu_*$

ile gösterilir. Bu topoloji  $f_i : (A, \mu) \rightarrow (A_i, \mu_i)$  fonksiyonlarını sürekli kılan en küçük topolojidir [18].

**Teorem 2.3.4.**  $f_i : (A_i, \mu_i) \rightarrow (A, \mu)$  sürekli fonksiyonlar olsunlar.  $\mu = \mu^*$  olması için gerek ve yeter şart her  $(B, \sigma)$  topolojik uzayı ve her  $g_i : (A_i, \mu_i) \rightarrow (B, \sigma)$  sürekli fonksiyonları için  $g_i = h \circ f_i$  ise  $h$  fonksiyonu da sürekli dir ( $h : A \rightarrow B$  bir fonksiyon) [18].

Burada  $\mu^* = \{ U \subset A \mid \text{her } i \in I \text{ için } f_i^{-1}(U) \in \mu_i \}$   $A$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *zayıf (coinduced) topoloji* denir. Bu topoloji  $f_i$  leri sürekli kılan en büyük topolojidir [18].

**Teorem 2.3.5.**  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

**İspat: 1.**  $F$  nun belirli olduğunu gösterelim.  $f, g : (A, \mu) \rightarrow (B, \mu')$  sürekli iki fonksiyon ve  $F(f) = F(g)$  olsun.  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  de  $F(X, \mu) = X$  ve  $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \sigma)$  için  $F(f) = f : X \rightarrow Y$  olarak tanımlansın. Böylece  $F$  unutkan (forgetful) fanktor olur.

Bundan dolayı  $F(f) = f$  ve  $F(g) = g$  dir. Böylece  $f = g$  olur. Dolayısıyla  $F$  faithfuldur.

$f : (A, \mu) \rightarrow (B, \mu')$  sürekli,  $F(f) = 1_A$  ve  $f$  homeomorfizm olsun.  $F(f) = f = 1_A$  olduğundan  $A = B$  dir. Dolayısıyla  $f : (A, \mu) \rightarrow (A, \mu')$  olur. Bu durumda  $\mu = \mu'$  olduğunu göstermeliyiz.

$f$  sürekli olduğundan  $f^{-1}(\mu') \subset \mu$  dur.  $f \circ f^{-1}(\mu') \subset f(\mu)$  dan  $\mu' \subset f(\mu)$  olur.

$f = I$  olduğundan  $\mu' \subset \mu$  dur.

$g : (A, \mu') \rightarrow (A, \mu)$  olsun.  $g$  sürekli olduğundan  $g^{-1}(\mu) \subset \mu'$  dür.

$g \circ g^{-1}(\mu) \subset g(\mu')$  den  $\mu \subset g(\mu')$  olur.  $f^{-1} = g = I$  idi. Öyleyse  $\mu \subset \mu'$  olur.

Yani  $F$  amnestiktir.

O halde  $F$  hem faithful, hem de amnestik olduğundan, belirli (concrete) dir.



2.  $F^{-1}(A) = \{ (A, \mu) \mid F(A, \mu) = A, \mu \subset P(A) \text{ ve } f : (A, \mu) \rightarrow (A, \mu_1) \text{ sürekli ve } F(f) = 1_A : A \rightarrow A \}$  ise her  $A \in \text{Ob}(\mathbf{SET})$  için  $F^{-1}(A)$  nın bir cümle olduğunu göstereceğiz.

$F^{-1}(A)$ , **TOP** un alt kategorisidir. Öte yandan;  $\phi = \{ \mu \mid \mu, A \text{ üzerinde bir topoloji} \}$  olsun.  $\theta : F^{-1}(A) \rightarrow \phi$  alalım.  $\theta(A, \mu) = \mu$  şeklinde tanımlanırsa kolayca görülür ki

$\theta$ , bire bir ve örtendir.

Dolayısıyla,  $F^{-1}(A) \approx \phi \subset P^2(A)$  dır, yani  $F^{-1}(A)$  bir cümledir.

3. Eğer  $\{ f_i : A \rightarrow F(A_i, \mu_i) = A_i, i \in I \}$  **SET** de herhangi bir  $F$  - kaynağı ve  $\mu_*$  üretilen (induced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.3 den  $f_i : (A, \mu_*) \rightarrow (A_i, \mu_i)$  verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır.

Yine;  $\{ f_i : F(A_i, \mu_i) = A_i \rightarrow A, i \in I \}$ , **SET** de herhangi bir  $F$  -kavşağı ( $F$  -sink) ve  $\mu^*$  zayıf (coinduced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.4 den  $f_i : (A_i, \mu_i) \rightarrow (A, \mu^*)$  verilen kaynağın bitiş kaldırmasıdır.

Dolayısıyla  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  topolojik fanktordur.

Son olarak  $F$  nun normalleştirilmiş olup olmadığına bakalım.

$1 = \{x\}$  tek nokta cümlesi son nesne olduğundan bunun alt nesneleri

$Z = \emptyset$  ve  $Z = \{x\}$  dir.

$F^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \{\emptyset\})$  ve  $F^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$  dir.

Böylece tek nokta ve boş cümle üzerinde sadece bir tek topoloji olduğundan  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiştir.

O halde  $F : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

## 2.4. Diskre ve İndiske Yapılar

**Tanım 2.4.1.**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  birer kategori,  $F$  ve  $G$  de  $\mathcal{K}$  dan  $\mathcal{K}'$  ne iki fanktor olsunlar. Eğer her  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  ve her  $f : A \rightarrow B$  dönüşümü için  $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$   $\mathcal{K}'$  de bir dönüşüm ve  $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$  oluyorsa  $\alpha : F \rightarrow G$  ya bir *doğal dönüşüm* (**natural transformation**) denir. Buda aşağıdaki diyagramın değişmeli olmasına karşılık gelir.

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{K} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}' & \\
& & & \alpha_A & \\
A & & F(A) & \xrightarrow{\quad} & G(A) \\
\downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
B & & F(B) & \xrightarrow{\quad} & G(B) \\
& & \alpha_B & & 
\end{array}$$

Yani  $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$  olmasıdır.

**Tanım 2.4.2.**  $\mathcal{K}$  ve  $\mathcal{K}'$  birer kategori,  $R$  ve  $L$  de fanktor olmak üzere;  $\mathcal{K} \xrightleftharpoons[L]{R} \mathcal{K}'$

fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $L$  ye  $R$  nin sol adjointi veya  $R$  ye  $L$  nin sağ adjointi denir ve  $L \multimap R$  şeklinde gösterilir. Bu şartlar;

(1)  $\eta : I \rightarrow R \circ L$  ve  $\varepsilon : L \circ R \rightarrow I$  doğal dönüşümler olmalıdır.

(2)  $L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$  de  $(\varepsilon L) \circ (L\eta) = I$  ve

$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R$  ve  $(R\varepsilon) \circ (\eta R) = I$  eşitlikleri sağlanmalıdır.

**Tanım 2.4.3.** 1)  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  topolojik fanktoru bir  $D : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$  sol adjointine sahiptir ki bu sol adjointe diskre fanktoru denir. Yani  $K = D(F(K))$  nesnesi,  $\mathcal{K}$  da diskre nesne olarak adlandırılır.

2)  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  topolojik fanktoru bir  $D^* : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$  sağ adjointine sahiptir ki bu sağ adjointe indiskre fanktoru denir. Yani  $X = D^*(F(X))$  nesnesi  $\mathcal{K}$  da indiskre nesne olarak adlandırılır [1].

**Teorem 2.4.4.** 1)  $E$  topolojik kategori olsun.  $e \in E$  nesnesi diskredir. Yani  $e = DFe$  olması için gerek ve yeter şart her  $c \in E$  için her  $Fe \rightarrow Fc$  dönüşümünün,  $e \rightarrow c$  dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

2)  $d \in E$  indiskre, yani  $d = D^*Fd$  olması için gerek ve yeter şart her  $c \in E$  için her  $Fc \rightarrow Fd$  dönüşümünün,  $c \rightarrow d$  dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

**İspat:1** ( $\Rightarrow$ )  $e$  diskre ve her  $c \in E$  için  $f : F(e) \rightarrow F(c)$  olsun. En az bir  $\bar{k} : e \rightarrow c$  dönüşümünün var olduğunu ve  $F(\bar{k}) = f$  olduğunu göstereceğiz.

$F$  topolojik fanktor olduğundan  $\bar{f} : \bar{e} \rightarrow c$ ,  $f$  nin başlangıç kaldırması olsun. Burada  $F(\bar{e}) = F(e)$  ve  $e$  diskre olduğu için tanım gereği  $e \leq \bar{e}$  dir, yani  $h : e \rightarrow \bar{e}$  bir dönüşüm vardır öyleki  $F(h) = Id : F(e) \rightarrow F(\bar{e}) = F(e)$  dir.  $\bar{k} = \bar{f} \circ h$  olsun.  $F(\bar{k}) = F(\bar{f} \circ h) = F(\bar{f}) \circ F(h) = f \circ Id = f$  olur.

$\Leftarrow$  Her hangi bir  $c \in E$  için her  $F(e) \rightarrow F(c)$  dönüşümü  $e \rightarrow c$  dönüşümüne kaldırılabilirsin,  $e$ 'nin diskre olduğunu gösterelim. Özel olarak  $F(e) \rightarrow F(c)$  ve  $id : F(e) \rightarrow F(c)$  alalım. Hipotezden  $\bar{k} = e \rightarrow c$  ye bir dönüşüm vardır öyle ki  $F(\bar{k}) = Id$  dir. Bu demet üzerinde alınan her  $c$  nesnesi için geçerli olduğundan,  $e$  bu demet de en küçük nesnedir. Bu da  $e$ 'nin diskre olduğunu gösterir.

**2** ( $\Rightarrow$ )  $d$  indiskre ve her  $c \in E$  için  $f : F(c) \rightarrow F(d)$  olsun.  $F$  topolojik fanktor olduğundan  $\bar{f} : c \rightarrow \bar{d}$   $f$ 'nin bitiş kaldırması olsun.

Burada  $F(d) = F(\bar{d})$  ve  $d$  indiskre olduğu için  $\bar{d} \leq d$  dir. Yani  $h : \bar{d} \rightarrow d$  ye bir dönüşüm vardır, öyle ki  $F(h) = Id : F(\bar{d}) = F(d) \rightarrow F(d)$  dir.  $\bar{k} = h \circ \bar{f}$  olsun.

$F(\bar{k}) = F(h \circ \bar{f}) = F(h) \circ F(\bar{f}) = Id \circ f = f$  dolayısıyla  $F(\bar{k}) = f$  dir.

( $\Leftarrow$ ) Her  $c \in E$  için her  $F(c) \rightarrow F(d)$  dönüşümü,  $c \rightarrow d$  dönüşümüne kaldırılabilirsin.  $d$ 'nin indiskre olduğunu gösterelim.

Özel olarak  $F(d) = F(c)$  ve  $Id : F(c) \rightarrow F(d)$  alalım. Hipotezden  $\bar{k} : c \rightarrow d$  dönüşümü vardır, öyle ki  $F(\bar{k}) = Id$  dir. Bu dönüşüm her  $c$  için geçerli olduğundan  $d$  bu demette en büyük nesnedir. Bu da  $d$ 'nin en büyük olduğunu gösterir, yani  $d$  indiskre nesnedir.

Görülür ki  $e \in E$  diskre nesne kavramı, topolojik uzayların kategorisi  $Top$ 'daki  $e$  diskre topolojik uzayı kavramının genelleştirilmesidir. Çünkü tanım cümlesi diskre uzayı olan her fonksiyon süreklidir.

## 2.5.Süzgeçler

**Tanım 2.5.1.**  $(X, \mu)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olsun.

1. Bir  $\mathcal{N} \subset X$  alt cümlesine  $x$  noktasının bir komşuluğudur denir  $\Leftrightarrow$  en az bir  $G \in \mu$  vardır öyleki  $x \in G \subset \mathcal{N}$  dur.

$x$  noktasının  $\mu$  topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan ailesi  $\mathcal{N}_\mu(x)$  veya topolojinin belirtmenin gerekmediği yerlerde kısaca  $\mathcal{N}(x)$  ile göstereceğiz ve buna “ $x$  in komşuluklar sistemi” diyeceğiz.

2.  $M \subset X$  alt cümle ise bir  $\mathcal{N} \subset X$  alt cümlesine  $M$  nin bir komşuluğudur denir  $\Leftrightarrow$  en az bir  $G \in \mu$  vardır öyleki  $M \subset G \subset \mathcal{N}$  dur [20].

**Tanım 2.5.2.**  $X$  boş olmayan bir cümle ve  $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$ ,  $X$ 'in kuvvet cümlesini gösterebilir.  $\mathcal{F}$ ,  $P(X)$ in bir alt sınıfı aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir (öz) süzgeçtir.

f1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  dır.

f2)  $\forall A, B \in \mathcal{F}$  için  $A \cap B \in \mathcal{F}$  dır.

f3)  $\forall A \in \mathcal{F}$  ve  $A \subseteq B$  ise  $B \in \mathcal{F}$  dır [15].

(f1) ve (f2) aksiyomundan  $\mathcal{F}$  süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve (f3) aksiyomundan  $\mathcal{F}$  süzgecine ait her sayıda kümelerin birleşiminin  $\mathcal{F}$  süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca (f1) aksiyomundan  $P(X)$  kümesinin kendisi bir süzgeç değildir. (f3) aksiyomu ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir. Eğer  $\emptyset \in \mathcal{F}$  ve (f2) , (f3) şartları sağlanırsa  $\mathcal{F} = P(X)$  dir. Bu durum da  $\mathcal{F}$  e öz olmayan süzgeç denir.

$X$  kümesi üzerinde bir  $\mathcal{F}$  süzgeci var ise bu küme üzerinde bir yapı tanımlanmış demektir ve  $X$  kümesi de  $\mathcal{F}$  ile süzölmüş kümedir.

**Örnek 2.5.3.**  $X$  herhangi bir küme ve  $X$  in boş olmayan bir alt kümesi  $Y$  olsun.  $X$ 'in alt kümesi olan  $Y$ ' yi kapsayan kümelerin sınıfı olan

$$\mathcal{F} = \{A \mid Y \subset A \subset X\}$$

kümesi  $X$  üzerinde bir süzgeçtir. Gerçekten,

1)  $Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \subset A$  olduğundan  $Y$  'nin üst kümesi olan  $A$  'larda boştan farklıdır. O halde  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  dir.

2)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow Y \subset A \subset X$  ve  $Y \subset B \subset X$

$$\Rightarrow Y \subset A \cap B \subset X$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

3)  $A \in \mathcal{F}$  ise  $Y \subset A \subset X$  ve  $A \subset B$  ise  $Y \subset A \subset B \subset X$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{F}$$

Bu tür süzgeçlere temel süzgeç denir.

**Tanım 2.5.4.**  $X$  üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı  $F(X)$  ile gösterilir. Eğer  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  iki süzgeç ve  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  ise,  $\mathcal{G}$ 'ye  $\mathcal{F}$ 'den daha incedir veya  $\mathcal{F}$ 'ye  $\mathcal{G}$ 'den daha kabadır denir,  $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$  veya  $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$  şeklinde gösterilir.  $\mathcal{F}$  süzgeci için  $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$  olduğunda  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  oluyorsa  $\mathcal{F}$ 'e ultrasüzgeç denir. Bu da  $\mathcal{F}$  den daha ince süzgecin var olmadığı anlamına gelir.  $X$  üzerinde ultrasüzgeçlerin sınıfı  $U(X)$  ile gösterilir.

$\mathcal{F}$  süzgeç ve  $\cap\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$  ise  $\mathcal{F}$ 'e sabit süzgeç denir. Ayrıca  $\cap\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{F}\} = \emptyset$  ise  $\mathcal{F}$ 'e free süzgeç denir.

**Tanım 2.5.5.**  $\mathcal{F}$ ,  $(X, \mu)$  uzayındaki bir süzgeç ve  $x \in X$  olsun.  $N_x = \{U \subset X : \exists V \ni x \text{ açığı vardır öyleki } x \in V \subset U\}$  cümlesine  $x$  noktasının komşuluklar ailesi denir.

**Tanım 2.5.6.**  $\mathcal{F}$ ,  $(X, \mu)$  uzayındaki bir süzgeç ve  $x \in X$  olsun. Eğer  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$

noktasının  $\mathcal{N}(x)$  komşuluklar süzgecinden daha ince ise, yani  $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$  ise  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsıyor denilir ve  $\mathcal{F} \rightarrow x$  veya  $\lim \mathcal{F} = x$  şeklinde gösterilir.

Eğer  $X$  üzerindeki bir  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsıyor ise,  $X$  üzerinde  $\mathcal{F}$  den ince olan tüm süzgeçlerin de  $x$  noktasına yakınsayacağı tanımdan aşıkardır. Ayrıca  $X$  kümesi üzerinde  $x$  noktasına yakınsayan tüm süzgeçlerin arakesiti de  $\mathcal{N}(x)$  komşuluklar süzgecidir.

**Teorem 2.5.7.**  $X$  uzayının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki yakınsak bir süzgecin tek bir noktaya yakınsamasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $X$  uzayı Hausdorff uzayı olsun. Bu uzaydaki yakınsak bir  $\mathcal{F}$  süzgecinin tek bir noktaya yakınsadığını göstereceğiz.  $\mathcal{F}$  süzgecinin  $x$  ve  $y$  gibi farklı iki noktaya yakınsadığını kabul edelim.  $X$  uzayı  $H$ -uzayı olduğundan  $\exists N \in \mathcal{N}(x)$  ve  $\exists M \in \mathcal{N}(y)$  vardır ki  $N \cap M = \emptyset$  dir. Oysa  $\mathcal{F}$  süzgeci  $x$  noktasına yakınsadığından  $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$  dir ve dolayısı ile  $N \in \mathcal{F}$  dir. Benzer şekilde  $M \in \mathcal{F}$  dir.  $(f_2)$  süzgeç aksiyomundan  $N \cap M = \emptyset \in \mathcal{F}$  elde edilir ki, bu da  $(f_1)$  ile çelişir. O halde  $x=y$  dir, yani  $\mathcal{F}$  tek noktaya yakınsar.

$(\Leftarrow)$ : Yakınsak bir süzgeç tek noktaya yakınsasın.  $X$  uzayının  $H$ -uzayı olmadığını kabul edelim. O halde  $\exists x, y \in X$  vardır ki  $\forall N \in \mathcal{N}(x), \forall M \in \mathcal{N}(y)$  için  $N \cap M \neq \emptyset$  dir. Buradan  $N \not\subset M^c$  elde edilir ve  $\forall M \in \mathcal{N}(y)$  için  $M \in \mathcal{N}(x)$  dir. O halde  $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{N}(x)$  elde edilir ki bu da hipoteze aykırıdır. Çünkü  $X$  uzayındaki  $\mathcal{N}(x)$  süzgeci hem  $x$  hem de  $y$  noktasına yakınsar.

**Tanım 2.5.8.**  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(A), \mathcal{H} \in F(B)$  ve  $f : A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{ U \mid U \in \mathcal{F} \text{ ve } U \in \mathcal{G} \}$$

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{ U \subset A \mid U \supset V \cap W, V \in \mathcal{F} \text{ ve } W \in \mathcal{G} \} \text{ ve}$$

$$f^{-1}(\mathcal{H}) = \{ U \mid U \supset f^{-1}(C) \text{ olacak şekilde en az bir } C \in \mathcal{H} \text{ mevcuttur} \} \text{ şeklinde tanımlanırlar. Görülür ki bunların her biri birer süzgeçtirler [14].}$$

## 2.6. Topolojik Kategori Örnekleri

$A$  bir cümle ve  $\mathcal{F} \subset P(A)$  olsun.  $[\mathcal{F}] = \{ B \subset A \mid \text{en az bir } C \in \mathcal{F} \text{ vardır öyle ki } C \subset B \}$  şeklinde tanımlansın [21].

**Tanım 2.6.1.** Eğer  $[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$  ise  $\mathcal{F} \subset P(A)$  ya  $A$  üstünde bir *yığın (stack)* denir. Yani  $\mathcal{F}$  süper cümle altında kapalıdır [5].

$\mathcal{F}$ ,  $A$  üzerinde boş olmayan bir yığın olsun. Eğer  $B, C \in \mathcal{F}$  iken  $B \cap C \in \mathcal{F}$  oluyorsa  $\mathcal{F}$  ya  $A$  üzerinde *süzgeç (filter)* denir [5].

$\mathcal{F}$  yığınının (süzgeç), *öz yığın (süzgeç) (proper)* olması için gerek ve yeter şart  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , yani  $\mathcal{F} \neq [P(A)]$  olmasıdır. Aksi durumda  $\mathcal{F}$  ya *öz olmayan yığın (süzgeç) (improper)* denir.  $A$  üzerinde yığın ve süzgeçlerin cümlesi sırasıyla  $S(A)$  ve  $F(A)$  ile gösterilir.

Eğer  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G} \in F(A)$  ise bu taktirde  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{ B \subset A \mid B \in \mathcal{F} \text{ ve } B \in \mathcal{G} \}$  da bir süzgeçtir.

Yani  $[\mathcal{F} \cap \mathcal{G}] = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  dır.  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subset [\mathcal{F} \cap \mathcal{G}]$  süzgecin tanımından dolayı açıktır.

Şimdi  $[\mathcal{F} \cap \mathcal{G}] \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  olduğunu gösterelim.  $B \in [\mathcal{F} \cap \mathcal{G}]$  alalım. En az bir  $G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  vardır öyle ki  $G \subset B$  dir.  $G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  olduğundan  $G \in \mathcal{F}$  ve  $G \in \mathcal{G}$  dır.  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  süzgeç olduğundan  $B \in \mathcal{F}$  ve  $B \in \mathcal{G}$  dır.

$A$  bir cümle ve  $K : A \rightarrow P(S(A))$  her bir  $a \in A$  için  $K(a)$ ,  $A$  nın  $a$  noktasına ‘yakınsayan’ boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun.

**Tanım 2.6.2.** Eğer  $\mathcal{F}$ ,  $A$  üzerinde en büyük öz süzgeç ise  $\mathcal{F}$  ya **maksimum süzgeç (ultrafilter)** denir ve  $\mathcal{F}$  aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

$A$  nın her  $B$  alt cümlesi için ya  $B \in \mathcal{F}$  ya da  $B^c \in \mathcal{F}$  dır.

$A$  bir cümle ve  $K : A \rightarrow P(S(A))$  şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Her bir  $a \in A$  için  $K(a)$ ,  $A$  nın  $a$  noktasına “yakınsayan” boş olmayan tüm yığınların cümlesidir.

**Önerme 2.6.3.**  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(A)$  ve  $f : A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$(1) f(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = f(\mathcal{F}) \cap f(\mathcal{G})$$

$$(2) f(F \cup G) \supset f(F) \cup f(G)$$

$$(3) f^{-1}f(F) \subset F \text{ dır [12].}$$

**Tanım 2.6.4.**  $A$  bir cümle ve  $K:A \rightarrow P(F(A))$  her bir  $a \in A$  için  $K(a)$ ,  $A$  nın  $a$  noktasına “yakınsayan” boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer  $K$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $(A, K)$  çiftine yakınsak süzgeç uzayı (filter convergence space) denir.

1. Her  $a \in A$  için  $[a] \in K(a)$ , burada  $[a] = \{B \subset A \mid a \in B\}$  dir.

2.  $F$  ve  $G$ ,  $A$  üstünde süzgeçler ve  $F \subset G$  olsun. Eğer  $F \in K(a)$  ise  $G \in K(a)$  dır.  $(A, K)$  dan  $(B, L)$  ye bir  $f$  dönüşümü,  $f: A \rightarrow B$  fonksiyondur öyleki eğer  $F \in K(a)$  ise  $f(F) \in L(f(a))$  Yani  $f$  süreklidir.

Burada  $[f(F)] = \{U \mid U \subset B \text{ ve en az bir } C \in F \text{ için } U \supset f(C)\}$  şeklinde tanımlanır.

Nesneleri yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri yukarıda tanımlanan sınıfa yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi denir ve FCO ile gösterilir [5].

**Tanım 2.6.5.**  $(A, K)$  yakınsak süzgeç uzay olsun. Eğer  $K$  sabit fonksiyon ise  $(A, K)$  ya sabit yakınsak süzgeç uzayı denir. Nesneleri sabit yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri Tanım 2.6.4 deki gibi tanımlanan sınıfa sabit yakınsak süzgeç uzayların kategorisi denir ve ConFCO ile gösterilir. ConFCO, FCO nun dolgun alt kategorisidir.

**Örnek 2.6.6. i)**  $(A, K) \in \text{Ob}(\text{Con FCO})$  olsun.  $(A, K)$  nın diskre uzay olması için gerek ve yeter şart  $a \in A$  için  $K = \{[a], P(A) = [\emptyset] \mid a \in A\}$  olmalıdır.

**ii)**  $(A, K)$  nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart  $K = F(A)$  olmasıdır.

**İspat:** Teorem 2.4.4 den yararlanarak;

**i)**  $e = (A, K) \in \text{Ob}(\text{Con FCO})$ ,  $c = (B, L) \in \text{Ob}(\text{Con FCO})$  olsun. Eğer  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon ise bu takdirde  $f$  ConFCO’da  $(A, K) \rightarrow (B, L)$  dönüşümüne kaldırılabilir. Yani  $F \in K$  ise  $f(F) \in L$  olduğu gösterilmelidir.



$\mathcal{F} \in K$  olsun.  $\mathcal{F} = [a]$  veya  $[\emptyset]$ , buradan  $f(\mathcal{F}) = [f(a)]$  veya  $[\emptyset]$  dur.

Dolayısıyla  $f(\mathcal{F}) \in L$ , yani  $f$  süreklidir.

ii)  $d = (A, K) \in \text{Ob}(\text{Con FCO})$ ,  $c = (B, L) \in \text{Ob}(\text{Con FCO})$  olsun. Eğer  $f : B \rightarrow A$  bir fonksiyon ise  $f$  kaldırılabilir.

$\mathcal{F} \in L$  ise  $f(\mathcal{F}) \in K$  olduğunu göstermeliyiz. Hipotezden  $K = F(A)$  idi.

$\mathcal{F} \in L$  olsun. Bu durumda  $f(\mathcal{F}) \in F(A)$  olur. O halde  $f(\mathcal{F}) \in K$  dır.

**Teorem 2.6.7.**  $F : \text{ConFCO} \rightarrow \text{SET}$  topolojik fanktordur.

**İspat:** Önce fanktor olduğunu gösterelim.  $(A, K)$ ,  $(B, L)$  ConFCO uzaylarında obje olmak üzere;

$F(A, K) = A \in \text{Ob}(\text{SET})$  ve  $f : (A, K) \rightarrow (B, L)$  için

$F(f) = f : A \rightarrow B$  tanımlasın.

1)  $F(1_{(A, K)}) = 1_{F(A, K)}$  olduğunu gösterelim

$1_{(A, K)} : (A, K) \rightarrow (A, K)$  ConFCO 'da birim morfizm olmak üzere

$F(1_{(A, K)}) : F(A, K) = A \rightarrow F(A, K) = A$  olan  $1_A$  birim fonksiyon ve

$F(1_{(A, K)}) = 1_A = 1_{F(A, K)} \Rightarrow F(1_{(A, K)}) = 1_{F(A, K)}$  olur.

2)  $(A, K) \xrightarrow{f} (B, L) \xrightarrow{g} (C, T)$  tanımlasın.

$F(g \circ f) = g \circ f = F(g) \circ F(f) \Rightarrow F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  olur. Böylece bu bir fanktordur.

Şimdi düzenli olduğunu gösterelim.

1)  $(A, K)$ ,  $(B, L) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$ ,  $f, g : (A, K) \rightarrow (B, L)$  ve  $F(f) = F(g)$  olsun.

Tanımdan  $F(f) = f$  ve  $F(g) = g$  olduğundan  $f = g$  dir. Böylece  $F$  düzenlidir.

$f:(A, K) \rightarrow (A, L)$  olacak şekilde  $F(f) = f \circ 1_A : A \rightarrow A$  ve  $f$  izomorfizm olsun.  $K=L$  olduğunu gösterelim:

$\mathcal{F} \in K$  olsun.  $f$  sürekli olduğundan  $f(\mathcal{F}) = 1_A(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in L$  olur ki  $K \subset L$  dır.

Benzer şekilde  $f^1$  sürekli olduğundan,  $\mathcal{F} \in L$  olmak üzere  $f^1(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in K$  dır.  $\mathcal{F} \in K$  olduğundan  $L \subset K$  dır. Böylece  $K=L$  elde edilir.  $f=1_{(A,K)}$  yani amnestik olduğunu gösterir. O halde belirlidir.

2)  $F^{-1}(A) = \{(A, K) \mid F(A, K) = A\}$  ve  $\phi = \{K \mid K \subset (A, P(F(A)))\}$  olsun.

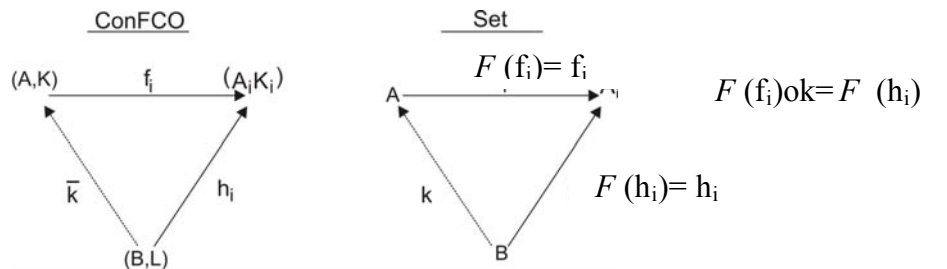
$\theta : F^{-1}(A) \rightarrow \phi$  de  $\theta(A, K) = K$  şeklinde tanımlanır.

$\theta$  nın birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla  $F^{-1}(A) \approx \phi$  ve  $\phi$  cümle olduğundan  $F^{-1}(A)$  bir cümledir.

3)  $(A_i, K_i)$ , ConFCO nun nesneleri ve  $f_i : A \rightarrow F(A_i, K_i) = A_i$  ( $i \in I$ ) Set de  $F$  kaynağı olsun.  $K = \{\mathcal{F} \mid f_i(\mathcal{F}) \in K_i, i \in I\}$  şeklinde tanımlansın;  $(A, K) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$  olduğunu gösterelim.  $\forall a \in A$  için  $f_i[a] = [f_i(a)] \in K_i$  dir. Çünkü  $(A_i, K_i) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$  dur.  $K$  nın tanımından  $[a] \in K$  olur. Yine  $\mathcal{F} \in K$  ve  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  olsun.  $f_i(\mathcal{F}) \in K_i$  ve  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  olduğundan  $f_i(\mathcal{F}) \subset f_i(\mathcal{G})$  dır.  $(A_i, K_i) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$  olduğundan  $f_i(\mathcal{G}) \in K_i$ ,  $K$  nın tanımından  $\mathcal{G} \in K$  dır.

Şimdi  $f_i : (A, K) \rightarrow (A_i, K_i)$  nin  $f_i : A \rightarrow A_i$  kaynağının başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim.

Her  $(B, L) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$ ,  $(A_i, K_i) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$  ve ConFCO da herhangi  $h_i : (B, L) \rightarrow (A_i, K_i)$  dönüşümlerin ailesi için en az bir  $k : B \rightarrow A$  vardır ve  $F(f_i) \circ k = U(h_i)$  dir.



Göstereceğizki en az bir  $\bar{k}:(B, L) \rightarrow (A, K)$  morfizmi vardır, öyle ki  $F(\bar{k})=k$  dır. Yani  $\forall F \in L$  için  $\bar{k}(F) \in L$  olduğunu göstermeliyiz.  $F(h_i) = h_i, F(f_i) = f_i$

$F \in L$  olsun.  $h_i$  sürekli olduklarından  $h_i(F) \in K_i$  dir.

Diğer taraftan  $F(f_i) \in K_i = F(h_i)$  olduğundan

$h_i(F) = (F(f_i) \circ F(k))(F) = F(f_i(\bar{k}(F))) = f_i(\bar{k}(F)) \in K_i$  olur.  $K$  nın tanımından

$\bar{k}(F) \in K$  dır.

### 3. BÖLÜM

#### YIĞINLAR VE SÜZGEÇLER

Bu bölümde, Yığın Yakınsak Uzaylar, Süzgeç Yakınsak Uzaylar, Limit Uzayları ve Pretopolojik Uzaylar gibi kategorilerde bu genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarının karakterizasyonunda ihtiyaç duyulacak bazı belli başlı sonuçları ifade ve ispat edeceğiz. Yani, süzgeçler ve yığınlar hakkında bazı teknik teoremleri ifade ve ispat etmeye çalışacağız.

##### 3.1. Yığın ve Süzgeç Tanımı

**Tanım 3.1.1.** A bir cümle ve  $\sigma \subset P(A)$ , A'nın alt cümlelerinin bir sınıfı olsun.

$[\sigma] = \{B \mid B \subset A, C \in \sigma \text{ ve } C \subset B\}$  olarak tanımlansın.

**Tanım 3.1.2.** A üzerinde bir yığın  $[\sigma] = \sigma$  olacak şekilde  $P(A)$  nın bir altcümlesidir.

Yani burada  $\sigma$  üst cümleler altında kapalıdır [5].

F, A üzerinde boş olmayan bir yığın olsun. B,  $C \in F$  iken  $B \cap C \in F$  oluyorsa F ye A üzerinde bir süzgeç denir [5].

##### 3.2. Wedge Çarpımı ve Dönüşümler

X'in iki ayrı kopyasının p noktasında çakışmasına X'in kendisi ile Wedge çarpımı denir ve  $X \vee_p X$  şeklinde gösterilir.  $X \vee_p X$  te ki bir x noktası  $X \vee_p X$  in birinci bileşeninde ise  $x_1$  ile ikinci bileşeninde ise  $x_2$  ile gösterilir.

X bir cümle ve  $p \in X$ ,  $X \vee_p X$  de X in p wedge çarpımı olsun.

**Tanım 3.2.1.  $p$  de Temel Eksen Dönüşümü (Principle  $p$  Axis Map):**

$$A_p : X \vee_p X \rightarrow X^2, A_p(x_1)=(x, p), A_p(x_2)=(p, x)$$

**$p$  de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed  $p$  Axis Map):**

$$S_p : X \vee_p X \rightarrow X^2, S_p(x_1)=(x, x) \text{ ve } S_p(x_2)=(p, x)$$

**$p$  de Katlama Dönüşümü (The Fold Map):**

$$\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow X, \nabla_p(x_i) = x, i=1, 2 \text{ olarak tanımlanır [12] ve [14].}$$

**Örnek 3.2.2.** Eğer  $X$  reel sayılar cümlesi ve  $p=0$  olursa  $p$  temel eksen dönüşümünün (Principle  $p$  Axis map) görüntüsü  $x$  ve  $y$  eksenlerinin birleşimidir.  $p$  skewed eksen dönüşümünün bir görüntüsü ise  $y=x$  doğrusu ve  $y$  ekseninin birleşiminden oluşur. Burada  $A_p$  ve  $S_p$  nin görüntüsünü  $X^2$  de  $p$  orijinli eksenler olarak göz önüne alabiliriz.

$X$  bir cümle ve  $X^2=X \times X$ ,  $X$  in kendisi ile kartezyen çarpımı olsun.

$X^2$  nin iki ayrı kopyasının diagonal boyunca kesişmesi  $X^2 \vee_{\Delta} X^2$  ile gösterilir.

$X^2 \vee_{\Delta} X^2$  de bir  $(x, y)$  noktası birinci bileşeni ise  $(x, y)_1$  ile, ikinci bileşeni ise  $(x, y)_2$  ile gösterilir.

Açık olarak  $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x=y$  dir.

**Tanım 3.2.3. Temel Eksen Dönüşümü(Principle Axis Map):**

$$A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3, A(x, y)_1=(x, y, x) \text{ ve } A(x, y)_2=(x, x, y) \text{ olarak tanımlanır.}$$

**Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map):**  $S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3, S(x, y)_1=(x, y, y)$  ve  $S(x, y)_2=(x, x, y)$  olarak tanımlanır

**Katlama Dönüşümü (The Fold Map):**

$$\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2, i=1, 2 \text{ için } \nabla(x, y)_i=(x, y) \text{ olarak tanımlanır [12] ve [14].}$$

**Uyarı 3.2.4.**  $p_1, p_2, \nabla, \pi_{ij}$  fonksiyonlarını ;

$1+p, p+1, 1+1: B \vee_p B \rightarrow B$  ve  $\pi_i + \pi_j: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B$  fonksiyonları yardımı ile tanımlarız. Burada sırasıyla  $1: B \rightarrow B$  birim fonksiyon,  $p: B \rightarrow B$   $p$  noktasındaki sabit

fonksiyon ve  $\pi_i : B^2 \rightarrow B$  ( $i=1, 2$ ) i inci izdüşüm fonksiyonudur.  $\pi_j : B^3 \rightarrow B$   $j=1, 2, 3$  izdüşüm fonksiyonunda benzer şekilde tanımlanabilir [12].

$A, A_p, S, S_p$  temel ve skewend eksen dönüşümleri olduğundan,

$$\pi_1 A_p = p_1 = \pi_1 S_p, \pi_2 A_p = p_2, \pi_2 S_p = \nabla, \pi_1 A = \pi_{11} = \pi_1 S, \pi_2 A = \pi_{21} = \pi_2 S, \pi_3 A = \pi_{12} \text{ ve } \pi_3 S = \pi_{22} \text{ dir.}$$

### 3.3. Yığınlar İle İlgili Bazı Teknik Sonuçlar

Şimdi Yığınlar ile ilgili bazı teknik sonuçları ifade ve ispat edelim.

$\alpha$  ve  $\beta$   $X$  üzerinde iki yığın,  $\gamma$  da  $Y$  üzerinde bir yığın ve  $f: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.

#### Tanım 3.3.1.

$$\alpha \cup \beta = \{U \mid U \subset X \text{ ve } \alpha \text{ yada } \beta \text{ da ki bir } V \text{ için } V \subset U\}$$

$$\alpha \cap \beta = \{U \mid U \subset X \text{ ve } U \in \alpha \text{ ve } \beta\}$$

$$f^{(-1)}(\gamma) = \{U \mid U \subset X \text{ ve } \gamma \text{ da ki bir } W \text{ için } f^{(-1)}(W) \subset U\}$$

$$f(\alpha) = \{V \mid V \subset Y \text{ ve } \alpha \text{ da ki bir } U \text{ için } f(U) \subset V\}$$

Bunların yığın oldukları açıktır.

$$\textbf{Lemma 3.3.2. } f(\alpha \cup \beta) = f(\alpha) \cup f(\beta) \text{ ve } f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta)$$

**İspat:**  $f(\alpha \cup \beta) = f(\alpha) \cup f(\beta)$  olduğunu gösterebilmek için;

$f(\alpha) \cup f(\beta) \subset f(\alpha \cup \beta)$  ve  $f(\alpha \cup \beta) \subset f(\alpha) \cup f(\beta)$  kapsamalarının doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha \subset \alpha \cup \beta \Rightarrow f(\alpha) \subset f(\alpha \cup \beta)$$

$$\beta \subset \alpha \cup \beta \Rightarrow f(\beta) \subset f(\alpha \cup \beta) \Rightarrow f(\alpha) \cup f(\beta) \subset f(\alpha \cup \beta) \dots (1)$$

$$U \in f(\alpha \cup \beta) \Rightarrow \exists V \in (\alpha \cup \beta) \ni U \supset f(V)$$

$$V \in (\alpha \cup \beta) \Rightarrow \exists W \in \alpha \text{ veya } \exists W \in \beta \ni V \supset f(W) \text{ dir}$$

$$\exists W \in \alpha \Rightarrow V \supset W \Rightarrow f(V) \supset f(W) \Rightarrow U \supset f(W) \Rightarrow U \in f(\alpha)$$

$$\exists W \in \beta \Rightarrow V \supset W \Rightarrow f(V) \supset f(W) \Rightarrow U \supset f(W) \Rightarrow U \in f(\beta) \text{ olur.}$$

Buradan

$$U \in f(\alpha) \cup f(\beta) \Rightarrow f(\alpha \cup \beta) \subset f(\alpha) \cup f(\beta) \dots (2) \text{ olur ki}$$

(1) ve (2) den  $f(\alpha \cup \beta) = f(\alpha) \cup f(\beta)$  olur.

Şimdide

$f(\alpha \cap \beta) \subset f(\alpha) \cap f(\beta)$  ve  $f(\alpha) \cap f(\beta) \subset f(\alpha \cap \beta)$  ifadelerini göstermeliyiz.

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha \Rightarrow f(\alpha \cap \beta) \subset f(\alpha)$$

$$\alpha \cap \beta \subset \beta \Rightarrow f(\alpha \cap \beta) \subset f(\beta) \text{ buradan}$$

$$f(\alpha \cap \beta) \subset f(\alpha) \cap f(\beta) \dots (1) \text{ olur.}$$

$$U \in f(\alpha) \cap f(\beta) \Rightarrow W \in \alpha \text{ ve } W_1 \in \beta \text{ için } f(W) \subset U \text{ ve } f(W_1) \subset U \text{ olur}$$

$$\text{Oysa } f(W) \cup f(W_1) = f(W \cup W_1) \subset U \text{ idi.}$$

$$\text{Böylece } W \cup W_1 \in \alpha \cap \beta \text{ olduğundan } U \in f(\alpha \cap \beta) \text{ olurki}$$

$$\text{Bu da } f(\alpha) \cap f(\beta) \subset f(\alpha \cap \beta) \dots (2) \text{ olmasını gerektirir.}$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta) \text{ olur.}$$

**Tanım 3.3.3.**  $\alpha$ ,  $B$  üzerinde bir yığın veya süzgeç olsun. Eğer  $\alpha \neq [\emptyset]$  ise  $\alpha$  'ya özdür denir.

**Lemma 3.3.4.** Eğer,  $i, j=1, 2$  için  $\alpha_{ij}$  'ler  $B$  üzerinde yığın ise bu durumda  $B^2 V_{\Delta} B^2$  üzerinde

$$\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha \text{ yığını özdür} \Leftrightarrow \forall i, j=1, 2 \text{ için } \alpha_{ij} \text{ özdür. Burada } \pi_{ij} \text{ 'ler Uyarı 3.2.4 de}$$

ki gibi tanımlanır.

**İspat:**

$$\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha \text{ özdür} \Leftrightarrow \emptyset \notin \sigma \Leftrightarrow \forall i, j=1, 2 \text{ için } \emptyset \notin \sigma = \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij} \Leftrightarrow \forall i, j=1, 2$$

$$\text{için } \pi_{ij} \text{ örten olduğundan } \emptyset \notin \alpha_{ij} \Leftrightarrow \forall i, j=1, 2 \text{ için } \alpha_{ij} \text{ özdür.}$$

**Lemma 3.3.5.** Eğer,  $i, j=1, 2$  için  $\alpha_{ij}$  ler  $B$  üzerinde öz yığın iseler bu taktirde  $B^2 V_{\Delta} B^2$  üzerinde  $\forall i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij} \sigma = \alpha_{ij}$  olacak şekilde bir  $\sigma$  öz yığını vardır.

**İspat:**

Lemma 3.3.4 ten  $\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij}$   $B^2 V_{\Delta} B^2$  üzerinde bir öz yığındır.

Şimdi bazı  $k, l$  için  $\pi_{kl} \sigma$  hesaplayalım. Lemma 3.3.2 den;  $\pi_{kl} \sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{kl} \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij}$  idi.

Buradan eğer  $k=i$  ve  $j=1$  ise  $\pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}\alpha_{ij}=\alpha_{kl}$  dir. Çünkü  $\pi_{ij}$  epiktir. Aksi halde  $\pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}\alpha_{ij}=[B]$  olur. B bütün yığınlarda bulunduğundan dolayı  $[B] \subset \pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}\alpha_{ij}$  dir.

Eğer  $U \in \pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}\alpha_{ij}$  ise  $\alpha_{ij}$  deki bazı  $V \neq \emptyset$  ler için  $\pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}V \subset U$  dur.

$$\pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}V = \pi_k\pi_{ij}^{-1}V \cup \pi_l\pi_{ij}^{-1}V = \left\{ \begin{array}{l} B \cup V \text{ eğer } k \neq i \text{ ve } j=1 \\ V \cup B \text{ eğer } k=i \text{ ve } j \neq 1 \\ B \cup B \text{ eğer } k \neq i \text{ ve } j \neq 1 \end{array} \right\} = B$$

Bu yüzden  $B = U \in [B]$  ve dolayısıyla  $\pi_{kl}\pi_{ij}^{-1}\alpha_{ij}=[B]$  dir

Eğer ki  $k \neq i$  veya  $j \neq 1$  ise  $\alpha \cup [B] = \alpha$ , olduğundan sonuç doğrudur.

### 3.4. Süzgeçlerle İlgili Bazı Teknik Teoremler

Bu bölümde süzgeçlerle ilgili bazı önemli teorem ve sonuçları vereceğiz. Burada ki temel sonuç B üzerinde  $i, j=1, 2$   $\alpha_{ij}$  süzgeçlerinin durumları ile ilgilidir ki burada  $\forall i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\sigma=\alpha_{ij}$  olacak şekilde  $B^2V_\Delta B^2$  üzerinde bir  $\sigma$  süzgeci vardır.

$\alpha$  ve  $\beta$  A üzerinde iki süzgeç olsun.

**Tanım 3.4.1.**  $\alpha \cup \beta = \{U | U \subset A \text{ ve bir } V \in \alpha \text{ ve } W \in \beta \text{ için } V \cap W \subset U\}$

**Lemma 3.4.2.** Eğer  $f:A \rightarrow B$  bir fonkiyon,  $\alpha$  ve  $\beta$  da sırasıyla A ve B üzerinde süzgeç ise; bu durumda

1.  $f^{-1}(f(\alpha)) \subset \alpha$
2.  $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$
3.  $f(\alpha) = f(f^{-1}(f(\alpha)))$
4.  $f(f^{-1}(\beta)) = \beta \Leftrightarrow f(A) \in \beta$
5.  $f^{-1}(\beta \cup \gamma) = f^{-1}(\beta) \cup f^{-1}(\gamma)$  ( $\gamma$  B üzerinde bir süzgeç iken)

**İspat:1.**  $U \in f^{-1}(f(\alpha)) \Rightarrow \exists V \in f(\alpha) \ni U \supset f^{-1}(V)$

Buradan,  $V \in f(\alpha) \Rightarrow \exists V_1 \in \alpha \ni V \supset f(V_1)$  olur.



$U \supset f^{-1}(V) \supset f^{-1}(f(V_1)) \supset V_1$  olur ki burada  $V_1 \in \alpha$  olduğundan  $U \in \alpha$  olur. Bu sonuçta ispatı tamamlar.

2. Eğer  $U \in \beta$  ise  $f(f^{-1}(U)) \in f(f^{-1}(\beta))$  ve  $f(f^{-1}(U)) \subset U$  olduğundan sonuç olarak  $U \in f(f^{-1}(\beta))$  dır. Buradan  $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$  dır.

3. Eğer  $\beta = f(\alpha)$  ise Lemma 3.4.2 nin 2 sinden  $f(\alpha) \subset f(f^{-1}(f(\alpha)))$  dır. Yine Lemma 3.4.2 nin 1 incisinden  $f(f^{-1}(f(\alpha))) \subset f(\alpha)$  dır. Buradan eşitlik elde edilir.

4. Kabul edelim ki  $f^{-1}(f(\beta)) = \beta$  olsun. Biliyoruz ki  $A \in f^{-1}(\beta)$  ve buradan  $f(A) \in f(f^{-1}(\beta)) = \beta$  yani  $f(A) \in \beta$  dır.

Aksine olarak, eğer  $U \in f(f^{-1}(\beta))$  ise en az bir  $V \in \beta$  için  $U \supset f(f^{-1}(V))$  dir. Çünkü  $\beta$  bir süzgeçtir.  $V \cap f(A) \in \beta$  ve dolayısıyla  $U \supset f(f^{-1}(V)) \supset f(f^{-1}(V \cap f(A))) = V \cap f(A)$  ve  $U \in \beta$  dır. Yani  $f(f^{-1}(\beta)) \subset \beta$  fakat 2. özellikten biliyoruz ki  $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$  dır. Bu yüzden  $f(f^{-1}(\beta)) = \beta$  olur.

5. Açık olarak  $f^{-1}(\beta \cup \gamma) \supset f^{-1}(\beta) \cup f^{-1}(\gamma)$  dır. Eğer  $U \in f^{-1}(\beta \cup \gamma)$  ise bu taktirde en az bir  $V \in \beta$  ve en az bir  $W \in \gamma$  için  $U \supset f^{-1}(V \cap W)$  dır.  $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(V \cap W)$  ve  $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \in f^{-1}(\beta) \cap f^{-1}(\gamma)$  olduğundan  $U \in f^{-1}(\beta) \cup f^{-1}(\gamma)$  dır. Buradan  $f^{-1}(\beta \cup \gamma) = f^{-1}(\beta) \cup f^{-1}(\gamma)$  dır.

**Sonuç 3.4.3.**  $\sigma$ ,  $B^2 V_{\Delta} B^2$  üzerinde bir süzgeç olsun.

Eğer  $\sigma_0 = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \pi_{ij} \sigma$  ise bu taktirde  $\forall i, j = 1, 2$  için  $\sigma_0 \subset \sigma$  ve  $\pi_{ij} \sigma_0 = \pi_{ij} \sigma$  olur.

**İspat:** Lemma 3.4.2. nin 1. özelliğinden  $\sigma_0 \subset \sigma \cup \sigma \cup \sigma \cup \sigma = \sigma$  yani  $\sigma_0 \subset \sigma$  dir.

Dolayısıyla  $\pi_{ij} \sigma_0 \subset \pi_{ij} \sigma \dots (1)$  olur.

Lemma 3.4.2. nin 3. özelliğinden  $\pi_{ij} \pi_{ij}^{-1} \pi_{ij} \sigma = \pi_{ij} \sigma$  ve  $\sigma_0$  in tanımından

$\pi_{ij} \pi_{ij}^{-1} \pi_{ij} \sigma \subset \pi_{ij} \sigma_0$  dır. Bu yüzden  $\pi_{ij} \sigma \subset \pi_{ij} \sigma_0 \dots (2)$  olur ki (1) ve (2) den;

$\pi_{ij} \sigma_0 = \pi_{ij} \sigma$  (  $\forall i, j = 1, 2$  için) eşitliği çıkar.

**Lemma 3.4.4.**  $i, j = 1, 2$  için  $\alpha_{ij}$  ler B üzerinde öz süzgeç ve  $\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij}$  olsun.

(1)  $\sigma$  özdür  $\Leftrightarrow$  ya (a)  $(\alpha_{11} \cup \alpha_{22})$  ve  $(\alpha_{22} \cup \alpha_{21})$  özdür, ya da  $(\alpha_{11} \cup \alpha_{21})$  ve  $(\alpha_{22} \cup \alpha_{12})$  özdür.

(2) Eğer  $\alpha$  öz ise, bu taktirde;

$$\pi_{11}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{11} \cup \alpha_{12}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{21}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{22} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{21} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{12}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{12} \cup \alpha_{22}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{11} \cup \alpha_{12}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{12} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{22}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{22} \cup \alpha_{12}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{22} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{22} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat:** (1)  $\sigma$  nın bir elamanı

$W = \bigcap_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} U_{ij} = \bigcap_{i,j=1}^2 (\pi_i^{-1} U_{ij} + \pi_j^{-1} U_{ij})$  olacak şekilde  $W$  elemanını içerir. Burada  $W$  nin,

$(i, j=1, 2)$  iken bazı  $U_{ij} \in \alpha_{ij}$  ler için

$W=(U_{11} \cap U_{12}) \times (U_{22} \cap U_{21}) \times (U_{11} \cap U_{21}) \times (U_{22} \cap U_{12})$  olduğu kolayca görülür.

Biz burada  $W$  yi kanonik formda belirtiyoruz. Açık olarak,  $W \neq \emptyset \Leftrightarrow$  wedge çarpımının en az bir bileşeni boştan farklıdır. Çünkü bir çarpanın boştan farklı olması için gerek ve yeter şart her iki çarpanının da boştan farklı olması gerekir. Buradan ilk çarpan (sırasıyla ikinci çarpan) boştan farklıdır ancak ve ancak (a) (sırasıyla (b)) sağlanması gerekir.

**(2)** Kabul edelim ki  $\sigma$  öz olsun. İspatı sadece  $\pi_{11}\sigma$  için yapacağız. Çünkü diğerleri içinde benzer şekilde yapılabilir.

Eğer  $U \in \pi_{11}\sigma$  ise, bu durumda  $\pi_{11}W \subset U$  olacak şekilde en az bir  $W \in \sigma$  mevcuttur.

Hatta  $W$  yı kanonik formda farz edelim. O halde;

$$\pi_{11}W = \begin{cases} (U_{11} \cap U_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (U_{11} \cap U_{12}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ (U_{11} \cap U_{12}) \cup (U_{11} \cap U_{21}) = U_{11} \cap (U_{12} \cap U_{21}) & \text{eğer her ikisi de geçerli değilse} \end{cases}$$

Şu halde, eğer (a) geçerli değilse  $\pi_{11}\sigma \subset \alpha_{11} \cup \alpha_{21}$ , eğer (b) geçerli değilse  $\pi_{11}\sigma \subset \alpha_{11} \cup \alpha_{12}$ , eğer her ikiside geçerli değilse  $\pi_{11}\sigma \subset \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21})$  olur. Bunun sonucunda eğer  $U \in \alpha_{11} \cup \alpha_{21}$  ise  $i=1, 2$  olmak üzere bazı  $U_{ij} \in \alpha_{ij}$  ler için  $U \supset U_{11} \cap U_{21}$  dir. Eğer (a) geçerli değilse,

$$W_0 = (\emptyset \times B) \vee (U_{11} \cap U_{21}) \times B \in \sigma \text{ dan}$$

$\pi_{11}W_0 = (U_{11} \cap U_{21}) \subset U$  olur. Bu yüzden  $\alpha_{11} \cup \alpha_{21} \subset \pi_{11}\sigma$  dir. İkinci durumda benzer şekilde ispatlanır. Sonuç olarak,  $U \in \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21})$  ise bu taktirde  $U_{ij} \in \alpha_{ij}$  için  $U \supset U_{11} \cap (U_{12} \cup U_{21})$  dir.

$$W = (U_{11} \cap U_{12} \times B \cap U_{21}) \vee (U_{11} \cap U_{21} \times B \cap U_{12}) \text{ şeklinde alalım.}$$

Açık olarak  $W \in \sigma$  dir. Çünkü  $B, B$  üzerindeki bütün süzgeçlerin içindedir. Buradan

$$\pi_{11}W = (U_{11} \cap U_{12}) \cup (U_{11} \cap U_{21}) \subset U \text{ olur ki bu da ispatı tamamlar.}$$

**Teorem 3.4.5.**  $i, j=1, 2$  olmak üzere  $\alpha_{ij}$   $B$  üzerinde bir öz süzgeç olsun. O halde her  $i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$  olacak şekilde  $B^2V_\Delta B^2$  üzerinde bir öz süzgecin mevcut olması için gerek ve yeter şart

1. Eğer Lemma 3.4.4 ün (a) maddesi sağlanmıyorsa,  $\alpha_{11} = \alpha_{21}$  ve  $\alpha_{22} = \alpha_{12}$  dir.
2. Eğer Lemma 3.4.4 ün (b) maddesi sağlanmıyorsa,  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$  ve  $\alpha_{22} = \alpha_{21}$  dir.
3. Eğer Lemma 3.4.4 te ne (a) ne de (b) sağlanmıyorsa,  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} = \alpha_{12} \cap \alpha_{21}$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki her  $i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$  olacak şekilde  $B^2V_\Delta B^2$  üzerinde bir  $\sigma$  süzgeci bulunsun. Eğer,

$$\sigma_0 = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \pi_{ij} \sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij} \text{ ise bu taktirde Sonuç 3.4.3 ten } \sigma_0 \subset \sigma \text{ ve } \pi_{ij} \sigma_0 = \pi_{ij} \sigma \text{ olur.}$$

Şu halde Lemma 3.4.4 teki  $\sigma = \sigma_0$  alalım. Burada  $\sigma_0$  özdür. Lemma 3.4.4 teki (a) sağlanmıyorsa, bu taktirde  $\pi_{11} \sigma_0 = \alpha_{11} \cup \alpha_{21}$ ,  $\pi_{12} \sigma = \alpha_{12} \cup \alpha_{22} = \pi_{22} \sigma$  ve  $\pi_{21} \sigma = \alpha_{11} \cup \alpha_{21}$  dir. Buradan  $\pi_{11} \sigma = \pi_{21} \sigma$  yani  $\alpha_{11} = \alpha_{21}$  ve  $\pi_{22} \sigma = \pi_{12} \sigma$  yani  $\alpha_{22} = \alpha_{12}$  dir. Bu da (1) in sağlandığını gösterir.

Lemma 3.4.4 te ki (b) sağlanmıyorsa bu taktirde  $\pi_{11} \sigma = \alpha_{11} \cup \alpha_{12} = \pi_{12} \sigma$  yani  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$  ve  $\pi_{22} \sigma = \alpha_{22} \cup \alpha_{21} = \pi_{21} \sigma$  yani  $\alpha_{22} = \alpha_{21}$  dir. Bu da (2) nin doğru olduğunu gösterir.

Şimdi ne (a) ne de (b) nin sağlanmadığını kabul edelim.

Lemma 3.4.4 ten,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \pi_{11} \sigma = \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) \quad \alpha_{11} = \pi_{11} \sigma = \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}), \\ \alpha_{12} &= \pi_{12} \sigma = \alpha_{12} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}), \quad \alpha_{21} = \pi_{21} \sigma = \alpha_{21} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) \quad \text{ve} \\ \alpha_{22} &= \pi_{22} \sigma = \alpha_{22} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} \subset \alpha_{12} \cap \alpha_{21}$ ,  $\alpha_{12} \cap \alpha_{21} \subset \alpha_{11} \cap \alpha_{22}$ , ve dolayısıyla  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} = \alpha_{12} \cap \alpha_{21}$  olur. Bu da (3) ün doğru olduğunu gösterir.

Aksine olarak kabul edelim ki (1) sağlasın fakat (a) sağlanmasın.

$$\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij} \text{ ifadesini alalım. Bu durumda Lemma 3.4.4 ün (1) inden } \sigma \text{ } B^2V_\Delta B^2$$

üzerinde bir öz süzgeçtir. O halde geriye her  $i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$  olduğunu göstermek kalır. Lemma 3.4.4 ün (2) sinden biliyoruz ki  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11} \cup \alpha_{21} = \pi_{21}\sigma$  dir.

Çünkü  $\alpha_{11} = \alpha_{21}$ ,  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11}$  ve  $\pi_{21}\sigma = \alpha_{21}$  dir. Hatta  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22} \cup \alpha_{12} = \pi_{12}\sigma$  ve şu

halde kabulden  $\alpha_{22} = \alpha_{12}$  dir. Buradan  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22}$  ve  $\pi_{12}\sigma = \alpha_{12}$  olur. Eğer (2) sağlanır ve (b) sağlanmaz ise  $\sigma$  yı da yukarıda ki gibi alalım. Yine Lemma 3.4.4 ün (2) sinden  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11} \cup \alpha_{12} = \pi_{12}\sigma$  ve  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22} \cup \alpha_{21} = \pi_{21}\sigma$  eşitlikleri elde edilir. Açık olarak kabulllerden  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$  ve  $\alpha_{22} = \alpha_{21}$  dir. Buradan  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11}$ ,  $\pi_{12}\sigma = \alpha_{12}$ ,  $\pi_{21}\sigma = \alpha_{21}$  ve  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22}$  dır. Son olarak kabul edelim ki (3) sağlansın ve ne (a) ne de (b) sağlanmasın. Aynı  $\sigma$  için Lemma 3.4.4 ün (2) sinden,  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21})$ ,  $\pi_{12}\sigma = \alpha_{12} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22})$ ,  $\pi_{21}\sigma = \alpha_{21} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22})$  ve  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22} \cup (\alpha_{21} \cap \alpha_{12})$  olur. Şimdi (3) ten  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) = \alpha_{11} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) = \alpha_{11}$  ve benzer olarak bütün  $i$ ,  $j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\sigma = \alpha_{ij}$  ifadesi içinde sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 3.4.6.**  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$  B üzerinde öz süzgeçler olsunlar. Eğer,  $\sigma = \pi_{11}^{-1}\alpha_{11} \cup \pi_{12}^{-1}\alpha_{12} \cup \pi_{21}^{-1}\alpha_{21}$  ise, bu taktirde

1.  $\sigma$  özdür  $\Leftrightarrow$  ya (a)  $\alpha_{11} \cup \alpha_{12}$  ya da (b)  $\alpha_{11} \cup \alpha_{21}$  özdür.

2. Eğer  $\sigma$  öz ise, bu taktirde

$$\pi_{11}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{11} \cup \alpha_{12}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{11} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{12}\sigma = \begin{cases} \alpha_{12} & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{11} \cup \alpha_{12}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{12} & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{21}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_{21} & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{21} & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat:** Lemma 3.4.4 de  $\alpha_{22} = [B]$  olarak alalım. B üzerinde herhangi  $\alpha$  öz süzgeci için  $\alpha \cup [B] = \alpha$  ve  $\alpha \cap [B] = [B]$  olduğundan ispatın doğruluğu görülür.

**Sonuç 3.4.7.**  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$  B üzerinde öz süzgeçler olsun. Eğer,  $\sigma = \pi_{11}^{-1}\alpha_{11} \cup \pi_{21}^{-1}\alpha_{21} \cup \pi_{22}^{-1}\alpha_{22}$  ise, bu taktirde

1.  $\sigma$  özdür  $\Leftrightarrow$  ya (a)  $\alpha_{22} \cup \alpha_{21}$  ya da (b)  $\alpha_{11} \cup \alpha_{21}$  özdür
2. Eğer  $\sigma$  öz ise, buradan

$$\pi_{11}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_{11} & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{11} & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{21}\sigma = \begin{cases} (\alpha_{11} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{22} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{21} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\pi_{22}\sigma = \begin{cases} \alpha_{22} & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ (\alpha_{22} \cup \alpha_{21}) & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_{22} & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat:** Lemma 3.4.4 de  $\alpha_{12} = [B]$  olarak alalım. B üzerinde herhangi  $\alpha$  öz süzgeci için  $\alpha \cup [B] = \alpha$  ve  $\alpha \cap [B] = [B]$  olduğundan ispatın doğruluğu görülür.

**Teorem 3.4.8.**  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  ve  $\alpha_{21}$  B üzerinde öz süzgeçler olarak alalım. Bu taktirde,  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11}$ ,  $\pi_{12}\sigma = \alpha_{12}$  ve  $\pi_{21}\sigma = \alpha_{21}$  olacak şekilde  $B^2V_\Delta B^2$  üzerinde en az bir  $\sigma$  öz süzgeci vardır  $\Leftrightarrow$

1. Eğer Sonuç 3.4.6'nın (a) sı geçerli değilse,  $\alpha_{11} = \alpha_{21}$  dır.
2. Eğer Sonuç 3.4.6'nın (b) sı geçerli değilse,  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$  dır.
3. Eğer Sonuç 3.4.6'nın ne (a) sı ne de (b) si geçerli değilse,  $\alpha_{12} \cap \alpha_{21} \subset \alpha_{11}$  dır.

**İspat:** Lemma 3.4.4 ten Teorem 3.4.5 in elde edilmesinde kullanılan verilere benzer olarak Sonuç 3.4.6'nın ispatına benzer olarak burada ispatı yapılır.

**Teorem 3.4.9.**  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$  ve  $\alpha_{22}$  B üzerinde öz süzgeçler olsun.  $\pi_{11}\sigma = \alpha_{11}$ ,  $\pi_{21}\sigma = \alpha_{21}$  ve  $\pi_{22}\sigma = \alpha_{22}$  olacak şekilde  $B^2V_\Delta B^2$  üzerinde en az bir tane  $\sigma$  öz süzgeci mevcuttur  $\Leftrightarrow$

1. Eğer Sonuç 3.4.7'nin (a) sı geçerli değilse,  $\alpha_{11} = \alpha_{21}$  dır.
2. Eğer Sonuç 3.4.7'nin (b) sı geçerli değilse,  $\alpha_{22} = \alpha_{21}$  dır.
3. Eğer Sonuç 3.4.7'nin ne (a) sı ne de (b) si geçerli değilse,  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} \subset \alpha_{21}$  dır.

**İspat:** Teorem 3.4.5 in ispatında kullanılan aynı yöntemlerle Sonuç 3.4.7'nin ispatındanda yararlanılarak teoremin ispatı kolayca bulunur.

Bundan sonra Teorem 3.4.5 in bir yerel versiyonunu olan Teorem 3.4.11 vereceğiz. Bunu sonuçlandırmak için k:  $BV_p B \rightarrow B^2V_\Delta B^2$  dönüşümü  $BV_p B$  yi  $B^2V_\Delta B^2$  nin  $(p \times B \vee p \times B) = \pi_{11}^{-1}(p)$  alt cümlesine götüren içine (inclusion) dönüşüm olarak alalım. Açık olarak  $\pi_{21}k = 1+p = p_1$ ,  $\pi_{12}k = p+1 = p_2$ , ve  $\pi_{22}k = \nabla$  (Uyarı 3.2.4 e bak) dır.

**Sonuç 3.4.10.** B üzerinde  $\alpha_i$ ,  $i=1, 2, 3$  öz süzgeçlerini alalım. Eğer,  $\sigma = p_1^{-1}\alpha_1 \cup p_2^{-1}\alpha_2 \cup \nabla^{-1}\alpha_3$  ise, bu taktirde

1.  $\sigma$  öz süzgeçtir  $\Leftrightarrow$  ya (a)  $\alpha_2 \subset [p]$  ve  $\alpha_1 \cup \alpha_3$  özdür ya da (b)  $\alpha_1 \subset [p]$  ve  $\alpha_2 \cup \alpha_3$  özdür.
2. Eğer  $\sigma$  öz ise, bu taktirde

$$p_1\sigma = \begin{cases} [p] & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ [p] \cap (\alpha_1 \cup \alpha_3) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$p_2\sigma = \begin{cases} \alpha_2 \cup \alpha_3 & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ [p] & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ [p] \cap (\alpha_2 \cup \alpha_3) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\nabla\sigma = \begin{cases} \alpha_2 \cup \alpha_3 & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_3 \cup (\alpha_1 \cap \alpha_2) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat:** Bunu ispat etmek için, ilk olarak  $\alpha_{11}=[p]$ ,  $\alpha_{21}=\alpha_1$ ,  $\alpha_{12}=\alpha_2$  ve  $\alpha_{22}=\alpha_3$  ile birlikte yukarıdaki gibi tanımlanan  $k$  içine dönüşümü olmak üzere Lemma 3.4.4 ün  $\sigma$  sınıfı  $\sigma=k^{-1}(\sigma')$  olduğunu yani,

$$\sigma'=\pi_{11}^{-1}\alpha_{11}\cup\pi_{21}^{-1}\alpha_{21}\cup\pi_{12}^{-1}\alpha_{12}\cup\pi_{22}^{-1}\alpha_{22}=\pi_{11}^{-1}[p]\cup\pi_{21}^{-1}\alpha_1\cup\pi_{12}^{-1}\alpha_2\cup\pi_{22}^{-1}\alpha_3 \quad \text{olduğunu gösterelim.}$$

Lemma 3.3.2. nin (5) inden;

$$k^{-1}(\sigma')=k^{-1}\pi_{11}^{-1}[p]\cup k^{-1}\pi_{21}^{-1}\alpha_1\cup k^{-1}\pi_{12}^{-1}\alpha_2\cup k^{-1}\pi_{22}^{-1}\alpha_3 \text{ ve}$$

$$p_1=\pi_{21}k, \quad p_2=\pi_{12}k, \quad \nabla=\pi_{22}k, \quad \text{ve} \quad p+p=\pi_{11}k \quad \text{bağıntılarının görüntüsünden}$$

$$k^{-1}\sigma^{-1}=[BV_pB]\cup p_1^{-1}\alpha_1\cup p_2^{-1}\alpha_2\cup \nabla^{-1}\alpha_3=p_1^{-1}\alpha_1\cup p_2^{-1}\alpha_2\cup \nabla^{-1}\alpha_3=\sigma \quad \text{olduğu elde}$$

edilir, yani  $k^{-1}\sigma^{-1}=\sigma$  dır.  $k(BV_pB)=\pi_{11}^{-1}p\in\sigma'$  olduğundan Lemma 3.4.2. nin (4)

üçüncü özelliğinden  $kk^{-1}\sigma'=\sigma'$  eşitliği elde edilir ( $\beta=\sigma'$ ,  $f=k$ ,  $A=BV_pB$ ). 1. bölüm

Lemma 3.4.2 den kolayca ispatlanır ve  $\alpha\cup[p]$  özdür  $\Leftrightarrow B$  üzerindeki herhangi bir

$\alpha$  süzgeci  $\alpha\subset[p]$  olmasıdır. 2. bölüm  $p_1\sigma=\pi_{21}kk^{-1}\sigma'=\pi_{21}\sigma'$ ,  $p_2\sigma=\pi_{12}kk^{-1}\sigma'=\pi_{12}\sigma'$

ve  $\nabla\sigma=\pi_{22}kk^{-1}\sigma'=\pi_{22}\sigma'$  olduğu göz önüne alınarak Lemma 3.4.4 ün (2) sinden direkt olarak ispatlanır.



**Teorem 3.4.11.**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  B üzerinde öz süzgeçler olsun.  $p_1\sigma = \alpha_1$ ,  $p_2\sigma = \alpha_2$  ve  $\nabla\sigma = \alpha_3$  olacak şekilde  $BV_pB$  üzerinde en az bir  $\sigma$  öz süzgeci vardır  $\Leftrightarrow$

1. Eğer Teorem 3.4.10 un (a) sı geçerli değilse,  $\alpha_2 = \alpha_3$  ve  $\alpha_1 = [p]$  dır.
2. Eğer Teorem 3.4.10 un (b) sı geçerli değilse,  $\alpha_1 = \alpha_3$  ve  $\alpha_2 = [p]$  dır.
3. Eğer Teorem 3.4.10 un hem (a) sı (b) sı geçerli değilse,  $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \alpha_3 \cap [p]$  dır.

**İspat:** Teorem 3.4.5 ispatında kullanılan aynı veriler kullanılarak Teorem 3.4.10 dan kolayca ispatlanır.

**Sonuç 3.4.12.** B üzerinde  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  öz süzgeçlerini alalım. Eğer  $\sigma = p_1^{-1}\alpha_1 \cup p_2^{-1}\alpha_2$  ise, butaktirde

1.  $\sigma$  özdür  $\Leftrightarrow$  hem (a)  $\alpha_2 \subset [p]$  hem de (b)  $\alpha_1 \subset [p]$  dır.
2.  $\sigma$  öz ise, butaktirde

$$p_1\sigma = \begin{cases} [p] & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_1 & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_1 & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$p_2\sigma = \begin{cases} \alpha_2 & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ [p] & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_2 & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat :**  $\alpha_3 = [B]$  ve B üzerinde ki her  $\alpha$  süzgeci için  $\alpha \cup [B] = \alpha$  olduğu göz önüne alınarak Sonuç 3.4.10 dan sonuç ispatlanır.

**Teorem 3.4.13.** B üzerinde  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  öz süzgeçlerini alalım.  $p_1\sigma = \alpha_1$  ve  $p_2\sigma = \alpha_2$  olacak şekilde  $BV_pB$  üzerinde en az bir  $\sigma$  öz süzgeci vardır  $\Leftrightarrow$

1. Eğer  $\alpha_2 \not\subset [p]$  ise,  $\alpha_1 = [p]$  dır.
2. Eğer  $\alpha_1 \not\subset [p]$  ise,  $\alpha_2 = [p]$  dır.
3. Eğer  $[p] \subset \alpha_1$  ve  $\alpha_2$  yi içeriyor ise, bu taktirde her zaman böyle bir  $\sigma$  süzgeci vardır.

**İspat:** Teorem 3.4.11 in ispatında kullanılan aynı veriler kullanılarak Sonuç 3.4.12 den teorem ispatlanır.

**Sonuç 3.4.14.**  $\alpha_1$  ve  $\alpha_3$  B üzerinde öz süzgeçler olsun. Eğer  $\sigma = p_1^{-1}\alpha_1 \cup \nabla^{-1}\alpha_3$  ise, bu taktirde

1.  $\sigma$  özdür  $\Leftrightarrow$  hem (a)  $\alpha_1 \cup \alpha_3$  özdür hemde (b)  $\alpha_1 \subset [p]$  dır.
2. Eğer  $\sigma$  öz ise, bu taktirde

$$p_1\sigma = \begin{cases} [p] & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_1 \cup (\alpha_3 \cap [p]) & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

$$\nabla\sigma = \begin{cases} \alpha_3 & \text{eğer (a) geçerli değilse} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & \text{eğer (b) geçerli değilse} \\ \alpha_3 & \text{eğer hem (a) hem de (b) geçerli değilse} \end{cases}$$

**İspat:**  $\alpha_2 = [B]$  alınarak Sonuç 3.4.10 dan kolayca ispatı yapılır.

**Teorem 3.4.15.** B üzerinde  $\alpha_1$  ve  $\alpha_3$  öz süzgeçlerini alalım.  $p_1\sigma = \alpha_1$  ve  $\nabla\sigma = \alpha_3$  olacak şekilde  $BV_pB$  üzerinde en az bir  $\sigma$  öz süzgeci vardır  $\Leftrightarrow$  Eğer  $\alpha_1 \cup \alpha_3$  öz değilse,  $\alpha_1 = [p]$  ve  $p_2\sigma = \alpha_3$  dır.

1. Eğer  $\alpha_1 \not\subset [p]$  ise,  $\alpha_1 = \alpha_3$  ve  $p_2\sigma = [p]$  dır.
2. Eğer  $\alpha_1 \subset [p]$  ve  $\alpha_1 \cup \alpha_3$  öz ise,  $\alpha_1 \supset \alpha_3 \cap [p]$  ve  $p_2\sigma = \alpha_3 \cap [p]$  dır.

**İspat:** Teorem 3.4.5 in ispatında kullanılan benzer veriler ile Sonuç 3.4.14 ten ispatlanır.

$q:B \rightarrow B/F$  dönüşümünü B nin boş olmayan bir alt kümesi F yi  $*$  a eşleyen özdeşlik fonksiyonu olarak alalım.

**Lemma 3.4.16.**  $\alpha$  yı B üzerinde bir süzgeç olarak alalım.

1.  $a \notin F$  için,  $q(\alpha) \subset [q(a)] \Leftrightarrow \alpha \subset [a]$  dır.
2.  $q(\alpha) \subset [*] \Leftrightarrow \alpha \cup [F]$  özdür.

**İspat: 1.**  $q(\alpha) \subset [q(a)]$  olduğunu varsayalım. Eğer  $[a] \alpha$  yı kapasamaz ise, butaktirde  $a \notin U$  olacak şekilde  $\alpha$  nın içinde en az bir  $U$  vardır. Burada  $q(U) \in q(\alpha) \subset [q(a)]$  ve sonuç olarak  $q(a) = a \in q(U)$  dur. Buradan  $q(x) = a$  olacak şekilde  $U$  nun içinde en az bir  $x$  vardır.  $a \notin F$  olduğundan,  $x = a \in U$  almalıyız ki bu da bir çelişkidir. Bunun sonucunda  $\alpha \subset [a]$  olur. Tersini ispatı açıktır. Çünkü  $\alpha \subset [a]$  ise, bu taktirde  $a \notin F$  için  $q(\alpha) \subset q[a] = [q(a)]$  dir.

**2.** Kabul edelim ki  $q(\alpha) \subset [*]$  olsun. Eğer  $\alpha \cup [F]$  öz değil ise, bu taktirde  $V \cap F = \emptyset$  olacak şekilde  $\alpha$  nın içinde en az bir  $V$  vardır. Buradan  $q(V) \in q(\alpha) \subset [*]$  ve sonuç olarak  $* \in q(V)$  dir. Buradan  $q(x) = *$  olacak şekilde  $V$  nin içinde en az bir  $x$  vardır. Bunun sonucunda  $x, V \cap F$  nin bir elemanı olur ki bu da bir çelişkidir. Bu yüzden  $\alpha \cup [F]$  özdür. Tersine olarak varsayalım ki  $\alpha \cup [F]$  öz olsun. Eğer  $q(\alpha) \not\subset [*]$  ise,  $* \notin W$  olacak şekilde  $W \in q(\alpha)$  vardır.  $W \in q(\alpha)$  olduğundan  $q(V) \subset W$  olacak şekilde en az bir  $V \in \alpha$  vardır.  $\alpha \cup [F]$  öz olduğundan,  $V \cap F \neq \emptyset$ . Bunun sonuncunda  $q(V \cap F) = * \in q(V) \subset W$  yani  $* \in W$  olur ki bu da bir çelişkidir. Buradan  $q(\alpha) \subset [*]$  elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

**Uyarı 3.4.17.**  $\alpha$  ve  $\beta$   $A$  üzerinde süzgeçler olsun. Eğer  $f: A \rightarrow B$  bir fonkiyon ise, bu taktirde  $f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta)$  dir. Bu da Lemma 3.3.2 nin özel bir halidir.

**Uyarı 3.4.18.** Eğer  $f: A \rightarrow B$  epik ve  $\gamma$   $B$  üzerinde bir süzgeç ise,  $f^{-1}(\gamma)$  özdür  $\Leftrightarrow \gamma$  özdür. Bunun ispat açıktır.

**Lemma 3.4.19.**  $\alpha$  ve  $\beta$   $B$  üzerinde süzgeçler ve  $q: B \rightarrow B/F$   $F$  yi  $*$  a özdeşleyen birim dönüşüm olarak alalım.

1. Eğer  $\alpha \cup [F]$  öz değil ise,  $q(\sigma) \subset q(\alpha) \Leftrightarrow \sigma \subset \alpha$  dir.
2. Eğer  $\alpha \cup [F]$  öz ise,  $q(\sigma) \subset q(\alpha) \Leftrightarrow \sigma \cap [F] \subset \alpha$  ve  $\alpha \cup [F]$  özür.

**İspat: 1.**  $\alpha \cup [F]$  öz olmasın. Bu taktirde  $V \cap F = \emptyset$  olacak şekilde en az bir  $V \in \alpha$  vardır. Eğer  $q(\sigma) \subset q(\alpha)$  ve  $U \in \sigma$  ise,  $q(U) \in q(\sigma) \subset q(\alpha)$  ve en az bir  $V_1$  için  $q(U) \supset q(V_1) \supset q(V \cap V_1)$  ve sonuç olarak  $V_1 \cap V \in \alpha$  dir. Buradan

$U \cup F \supset q^{-1}(q(U)) \supset q^{-1}(q(V \cap V_1)) = V \cap V_1$  ve şu halde  $V \cap F = \emptyset$  olduğundan  $V \cap V_1 \subset U$  dur. Bunun sonucunda  $U \in \alpha$  yani  $\sigma \subset \alpha$  dır. Tersinin ispatı açıktır.

2.  $\alpha \cup [F]$  yi öz olarak ifade edersek Lemma 3.4.16 nın (2) sinden  $q(\alpha) \subset [*]$  ve sonuç olarak  $q(\sigma) \subset q(\alpha)$  ise,  $q(\sigma) \subset [*]$  dir. Tekrar Lemma 3.4.16 dan  $\sigma \cup [F]$  özdür. Geriye  $\sigma \cap [F] \subset \alpha$  olduğunu göstermek kalır. Eğer  $U \in \sigma \cap [F]$  ise,  $F \subset U \in \sigma$  ve  $q(U) \in q(\sigma) \subset q(\alpha)$  dır. Şu halde  $\alpha \cup [F]$  öz olduğundan  $V \cap F \neq \emptyset$  olacak şekildeki  $\alpha$  daki bir  $V$  için  $q(U) \supset q(V)$  dır. Sonuç olarak  $V \subset V \cup F = q^{-1}(q(V)) \subset q^{-1}(q(U)) = U$  yani  $\sigma \cap [F] \subset \alpha$  dır. Tersine olarak kabul edelim ki  $\sigma \cap [F] \subset \alpha$  ve  $\sigma \cup [F]$  öz olsun.  $q(\sigma) \subset q(\alpha)$  olduğunu gösterelim.  $\sigma \cup [F]$  öz olduğundan Lemma 3.4.16 nın (2) sinden  $q(\sigma) \subset [*]$  dır. Uyarı 3.4.17 den  $q(\sigma \cap [F]) = q(\sigma) \cap [q(F)] = q(\sigma) \cap [*] = q(\sigma)$  ve sonuç olarak  $q(\sigma) = q(\sigma \cap [F]) \subset q(\alpha)$  yani  $q(\sigma) \subset q(\alpha)$  dır ki bu da ispatı tamamlar.

## 4. BÖLÜM

### SABİT YAKINSAK SÜZGEÇ UZAYI KATEGORİSİNDE $\text{PreT}_2$ OBJELER

Bu bölümde Sabit Yakınsak Süzgeç Uzayı Kategorisinin (**ConFCO**) nun topolojik kategori olduğu gösterildi. Ayrıca 3. bölümde verilen teoremlerin kullanılmasına örnek olması açısından  $\text{Pre } \bar{T}_2$  ve  $\text{Pre } T'_2$  objeleri karakterize edildi.

#### 4.1. Con FCO Topolojik Kategorisi

**Teorem 4.1.1.**  $F : \text{Con FCO} \rightarrow \text{SET}$  topolojik fanktordur.

**İspat :** Teorem 2.6.7 den ispat açıktır.

**Tanım 4.1.2.**  $(B, K) \in \text{Ob}(\text{ConFCO})$ ,  $(B, K)$  diskre ise  $K = \{ [a], [\emptyset] : a \in A \}$  yapıdadır.

#### 4.2. ConFCO da $\text{PreT}_2$ Objeler

$X$  bir cümle ve  $X^2 = X \times X$ ,  $X$  in kendisi ile Kartezyen çarpımı olsun.

$X^2$  nin iki ayrı kopyasının diagonalı boyunca kesişmesi  $X^2 V_\Delta X^2$  ile gösterilir.

$X^2 V_\Delta X^2$  de bir  $(x, y)$  noktası birinci bileşeni ise  $(x, y)_1$  ile, ikinci bileşeni ise  $(x, y)_2$  ile gösterilir.

Açık olarak  $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x = y$  dir.

**Tanım 4.2.1. Temel Eksen Dönüşümü(Principle Axis Map):**

$A: X^2 V_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ ,  $A(x, y)_1 = (x, y, x)$  ve  $A(x, y)_2 = (x, x, y)$  olarak tanımlanır.

**Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map):**

$S: X^2 V_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$ ,  $S(x, y)_1 = (x, y, y)$  ve  $S(x, y)_2 = (x, x, y)$  olarak tanımlanır

**Katlama Dönüşümü (The Fold Map):**

$\nabla: X^2 V_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$ ,  $i=1, 2$  için  $\nabla(x, y)_i = (x, y)$  olarak tanımlanır [12] ve [14].

**Tanım 4.2.2.**  $X$  in  $\text{Pre } \bar{T}_2$  olması için gerek ve yeter şart  $\{S: B^2 V_{\Delta} B^2 \rightarrow U(x^3) = B^3\}$  ve  $\{A: B^2 V_{\Delta} B^2 \rightarrow U(x^3) = B^3\}$  U- kaynaklarının başlangıç kaldırmalarının çakışmasıdır [14].

**Tanım 4.2.3.**  $X$  in  $\text{Pre } T_2'$  olması için gerek ve yeter şart  $\{S: B^2 V_{\Delta} B^2 \rightarrow U(x^3) = B^3\}$  U- kaynağının başlangıç kaldırması ile  $\{i_1, i_2: U(x^2) = B^2 \rightarrow B^2 V_{\Delta} B^2\}$  U- kavşağının bitiş kaldırmasının çakışmasıdır [14].

**Uyarı 4.2.4.**  $\{f_i: (B, K) \rightarrow (B_i, K_i) \mid i \in I\}$  kaynağı **ConFCO** başlangıç kaldırmadır ancak ve ancak  $\alpha \in K$  olduğunda tüm  $i \in I$  için  $f_i(\alpha) \in K_i$  dır.

**Uyarı 4.2.5.**  $i_1$  ve  $i_2$  kanonik dönüşümler olmak üzere  $\{i_1, i_2: (B^2, K) \rightarrow (B^2 V_{\Delta} B^2, L)\}$  örten kavşağının (epi sink) **ConFCO** da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak wedgedeki herhangi bir  $\alpha$  süzgeci için  $k=1$  veya  $2$  iken en az bir  $\alpha_i \in K$  için  $\alpha \supset i_k \alpha_i$  olmasıdır.

**Uyarı 4.2.6.**  $\pi_i: B^3 \rightarrow B$  i inci izdüşüm fonksiyonları ( $i=1, 2, 3$ ) olmak üzere  $\pi_{ij}$  ler  $\pi_{ij} = \pi_i + \pi_j: B^2 V_{\Delta} B^2 \rightarrow B$  şeklinde tanımlanmış dönüşümlerdir. Buradan  $\pi_1 S = \pi_{11} = \pi_1 A$ ,  $\pi_2 S = \pi_{21} = \pi_2 A$ ,  $\pi_3 A = \pi_{12}$  ve  $\pi_3 S = \pi_{22}$  dır [12].

**Teorem 4.2.7. Con FCO** da  $(B, K)$  objesi  $\text{Pre } \bar{T}_2$  dir ancak ve ancak herhangi  $\alpha, \sigma \in K$  öz süzgeçleri için  $\alpha \cup \sigma$  öz ise  $\alpha \cap \sigma \in K$  dır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $(B, K)$   $\text{Pre } \bar{T}_2$  olsun. Yani Tanım 4.2.1, Tanım 4.2.2 ve Uyarı 4.2.4 den wedge çarpımındaki her hangibir  $\beta$  süzgeci için eğer  $\pi_{11}\beta$  ve  $\pi_{21}\beta$ ,  $K$  da ise  $\pi_{12}\beta \in K$  olması için gerek ve yeter şart  $\pi_{22}\beta \in K$  olmasıdır.  $K$  da

verilen  $\alpha$ ,  $\beta$  süzgeçleri için Teorem 3.4.5 de  $\alpha_{11} = \alpha \cup \sigma$ ,  $\alpha_{21} = \alpha$ ,  $\alpha_{12} = \beta$  ve  $\alpha_{22} = \alpha \cap \sigma$  olsun. Dikkat edelim ki  $\alpha_{11} \cup \alpha_{12} = \alpha \cup \sigma$ ,  $\alpha_{22} \cup \alpha_{21} = \alpha$ ,  $\alpha_{11} \cup \alpha_{21} = \alpha \cup \sigma$  ve  $\alpha_{22} \cup \alpha_{12} = \sigma$  özdürler ve  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} = \alpha \cap \sigma = \alpha_{12} \cap \alpha_{21}$  olur. Böylece Teorem 3.4.5 den her  $i, j=1, 2$  için  $\pi_{ij}\beta = \alpha_{ij}$  olacak şekilde wedge üzerinde en az bir öz  $\beta$  süzgeci vardır. Buradan  $\alpha_{22} = \alpha \cap \sigma \in K$  dır.

Tersine olarak, kabul edelim ki istenilen şart sağlansın. Eğer  $\beta$  öz olmayan süzgeç ise, butaktirde ispat açıktır. Varsayalım ki  $\beta$  öz ve  $\pi_{11}\beta, \pi_{21}\beta \in K$  olsun. Teorem 3.4.5 de  $\alpha_{11} = \pi_{11}\beta$ ,  $\alpha_{21} = \pi_{21}\beta$ ,  $\alpha_{12} = \pi_{12}\beta$  ve  $\alpha_{22} = \pi_{22}\beta$  olarak alalım. Eğer Teorem 3.4.5 de ki (1) sağlanırsa,  $\alpha_{22} = \alpha_{12}$  olur ve bunun sonucunda  $\alpha_{22} \in K$  ancak ve ancak  $\alpha_{12} \in K$  dır. Eğer Teorem 3.4.5 de ki (2) sağlanırsa  $\alpha_{11} = \alpha_{12}$  ve  $\alpha_{22} = \alpha_{21}$  dir ve bunun sonucunda  $\alpha_{22} \in K$  ve  $\alpha_{12} \in K$  olur. Eğer Teorem 3.4.5 de ki (3) sağlanırsa  $\alpha_{11} \cap \alpha_{22} = \alpha_{12} \cap \alpha_{21}$  dir.  $\alpha = \pi_{21}\beta$ ,  $\sigma = \pi_{12}\beta$ ,  $\alpha_{11} = \alpha \cup \sigma$  olarak alalım ve buradan  $\alpha \cup \sigma$  özdür. Kabulden  $\alpha \cap \sigma \in K$  'yı elde ederiz. Fakat  $\alpha \cap \sigma \subseteq \alpha_{22} = \pi_{22}\beta$  olması  $\alpha_{22} \in K$  olmasını gerektirir. Benzer olarak eğer  $\pi_{11}\beta, \pi_{21}\beta, \pi_{22}\beta \in K$  ise  $\pi_{12}\beta \in K$  olur. Böylece  $(B, K)$  Pre  $\bar{T}_2$  dır.

**Teorem 4.2.8. ConFCO** da ki  $(B, K)$  objesi Pre  $T_2'$  dir ancak ve ancak  $(B, K)$  diskre objedir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $(B, K)$  objesi Pre  $T_2'$  olsun. Yani Tanım 4.2.3, Uyarı 4.2.4 ve Uyarı 4.2.5 den wedge üzerinde ki her hangi bir  $\beta$  süzgeci için (I)  $\pi_{11}\beta, \pi_{21}\beta, \pi_{22}\beta \in K$  dır ancak ve ancak (II)  $B^2$  üzerinde ki çarpım yapısı  $K^2$  ve  $k=1$  veya  $2$  için herhangi bir  $\beta_1 \in K^2$  için  $\beta \supset i_k \beta_1$  olmasıdır.  $\alpha \in K$  olsun. Eğer  $\alpha$  öz değil ise ispat aşıkardır. Kabul edelim ki  $\alpha$  öz süzgeç olsun. Teorem 3.4.9 u uygulayalım. Teorem 3.4.9 da  $\alpha_{11} = \alpha = \alpha_{21} = \alpha_{22}$  olsun. Dikkat edelim ki  $\alpha_{11} \cup \alpha_{12} = \alpha = \alpha_{21} \cup \alpha_{22}$  özdür. Böylece Teorem 3.4.9 dan  $\pi_{11}\beta = \alpha = \pi_{21}\beta = \pi_{22}\beta \in K$  olacak şekilde wedge üzerinde en az bir tane  $\beta$  öz süzgeci vardır.  $(B, K)$  objesi Pre  $T_2'$  olduğundan en az bir  $\beta_1 \in K^2$  ve  $k=1$  veya  $2$

için  $\beta \supset i_k \beta_1$  dir. Eğer  $k=1$  ve  $W \in i_1 \beta_1$  ise, en az bir  $V \in \pi_1 \beta_1$  ve  $T \in \pi_2 \beta_2$  için  $W \supset i_1 (V \times T) = (V \times T)_1$  ve bunun sonucunda da  $(V \times T)_1 \in \beta$  olur. Fakat  $\beta$  nın tipik bir elemanı, Teorem 3.4.9 da ki (3) sağlandığından dolayı en az bir  $N \in \alpha$  için  $N^2 \Delta N^2$  formunda bir eleman içerir ve bunun sonucunda  $(V \times T)_1 \supset N^2 \Delta N^2$  olur. Bu durumun gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart en az bir  $y \in B$  için  $N = \{y\}$  olmasıdır. Böylece  $\alpha = [y]$  dir. Benzer şekilde eğer  $k=2$  ve  $W \in i_2 \beta_1$  ise en az bir  $y \in B$  için  $\alpha = [y]$  olur.

Tersine olarak,  $(B, K)$  diskre olsun. [22] den (II), (I) i sağlar. Biz ise (I) in (II) yi sağladığını göstermeliyiz. Eğer  $\beta$  öz değilse, sonuç açıktır. Kabul edelim ki  $\alpha$  öz olsun. Teorem 3.4.9 da  $\alpha_{11} = \pi_{11} \beta$ ,  $\alpha_{21} = \pi_{21} \beta$  ve  $\alpha_{22} = \pi_{22} \beta$  olarak alalım. Eğer teorem 3.4.9 daki (1) sağlanırsa  $\pi_{11} \beta = \pi_{21} \beta$  olur.  $(B, K)$  diskre olduğundan  $\pi_{11} \beta = [x] = \pi_{21} \beta$  ve  $\pi_{22} \beta = [y]$  olacak şekilde **Con FCO** daki  $(B, K)$  için  $B$  de  $x$  ve  $y$  noktaları vardır.  $\beta_1 = \pi_1^{-1} \pi_{11} \beta \cup \pi_2^{-1} \pi_{22} \beta$  olsun ve dikkat edelim ki  $\beta_1 \in K^2$  dir. Sonuç 3.4.3 den  $\beta \supset i_1 \beta_1$  olduğu görülür. Eğer Teorem 3.4.9 daki (2) şartı sağlanırsa benzer olarak  $\beta \supset i_2 \beta_1$  olur. Eğer Teorem 3.4.9 daki (3) şartı sağlanırsa  $\pi_{11} \beta \cap \pi_{22} \beta \subset \pi_{21} \beta$  olur.  $(B, K)$  **Con FCO** da olduğundan  $x, y \in B$  için  $\pi_{11} \beta = [x]$ ,  $\pi_{22} \beta = [y]$  dir ve bunun sonucunda  $(B, K)$  diskre olduğundan  $\pi_{21} \beta = [x]$  ve ya  $[y]$  olur. Böylece  $k=1$  ve ya 2 için  $\beta \supset i_k \beta_1$  dir. Bu ise ispatı tamamlar.



### KAYNAKLAR

1. Herrlich, H., Topological Functors, Gen. Top. Appl., 4, 125-142, 1975.
2. Kent, D. C., Convergence Quotient Maps, Fund. Math., 165, 197-205, 1969.
3. Wyler, O., Topological Categories and Categorical Topology, Gen. Top. Appl, 11, 17-28, 1971.
4. Nel, L. D., Initially Structured Categories and Cartesian Closedness, Can. Journal of Math., 6, 1361-1377, 1975.
5. Schwartz, F., Connections Between Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math. No. 719, Springer-Verlag, 345-354, 1978.
6. Manes, E. G.: Function Classes of Cauchy Continuous Maps, Marcel Dekker Inc., New York, 1989.
7. Herrlich, H., Salicrup, G. ve Strecker, G. E.: Factorizations, denseness, separation ve relatively compact objects, Topology Appl. 27(1987), 157-169.
8. Dikranjan, D. And Giuli, E., Closure operators I, Topology Appl., 27, 129-143, 1987.
9. Brümmer, G.L.C., A Categorical Study of Initialy in Uniform Topology, Ph. D. Thesis, Univ. of Cape Town, 1971.
10. Hoffmann, E. R., (E, M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, Dusseldorf, 1973.
11. Marny, T. H., Rects-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien Dissertation, Frei Univ., Berlin, 1973.
12. Baran, M., Seperation Properties in Topological Categories, A Disserttion, University of Miami, 154 pages, 1990.
13. Hang, H. H., Limit Operators and Reflective Subcategories, Topo 72 II Pittsburg Internat. Confer., 378 Springer-Verlag, Berlin, 1973.
14. Baran, M., Separation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math., 23 (5), 333-341, 1992.
15. Baran, M., The Notion of Closedness in Topological Categories, Comment. Math. Univ. Carolinae, 34, 383-395, 1993.
16. Baran, M., A Notion of Compactness in Topological Categories, Publ. Math. Debrecen, 50, 221-234, 1997.
17. Baran, M., Stacks and Filters, Doğa-Tr. J. of Mathematics, 16, 95-108, 1992.

18. Munkres, J. R., Topology: A First Course, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1975.
19. MacLane, S., Categories For Working Mathematician Springer-Verlag, New York, 1971.
20. Bourbaki, N., Elements of Mathematics General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
21. Mielke, M. V., Geometric Topological Competitions with Universal Final Lifts, Top. and Appl., 9, 277-293, 1985.
22. M. Baran, Generalized Local Separation Properties, Indian J. Pure Appl. Math. 25(6) (1994), 615-620.

## ÖZGEÇMİŞ

Ahmet KILIÇ, 1981 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. 1998 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2003 yılında mezun oldu. Halen Erciyes Üniversitesi Fen- Bilimleri Enstitüsü Matematik ana bilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

### İletişim Bilgileri

**Adres** : Mevlana Mahallesi Kınaş E/19

Anaşehir Kooperatifi No:31

Talas / KAYSERİ

**e- posta** : a38kilic@hotmail.com