

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN
İRDELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

TEMMUZ–2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN
İRDELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR
(08121102)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30.06.2010

TEMMUZ-2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN
İRDELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR
(08121102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30.06.2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 15.07.2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN (F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Doğan KAYA'ya, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN'a ve Arş. Gör. Dr. Yavuz UĞURLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha SARIATEŞ KÖRPINAR

Elazığ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	VIII
1. TEMEL TANIMLAR.....	1
2. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLARIN ANALİZİ.....	6
2.1. Adomian Ayrışım Metodu.....	6
2.2. Homotopi Analiz Metodu.....	10
2.2.1. Yakınsaklık Teoremi.....	13
2.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	15
3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU KULLANILARAK ADOMİAN AYRIŞIM METODUNUN TÜREVİ.....	17
3.1. Adomian Ayrışım Metodu.....	18
3.2. Homotopi Analiz Metodu.....	19
3.3. Adomian Ayrışım Metodunun Matematiksel Türevi.....	22
4. DOKUZUNCU MERTEBEDEN KORTEWEG-DE VRIES (dmKdV) DENKLEMİNİN SAYISAL OLARAK İRDELENMESİ.....	26
4.1. Adomian Ayrışım Metodunun dmKdV Denkleminde Uygulanması.....	26

4.2. Homotopi Analiz Metodunun dmKdV Denkleminde Uygulanması.....	32
4.3. Homotopi Pertürbasyon Metodunun dmKdV Denkleminde Uygulanması.....	34
5. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLARIN SAYISAL SONUÇLARININ ANALİZİ.....	37
5.1. Sayısal Sonuçların İrdelenmesi.....	38
6. SONUÇ.....	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	46

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada kullanılan temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için yarı analitik metotlardan olan Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu analiz edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Homotopi analiz metodu kullanılarak Adomian ayrışım metodunun türevi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, dokuzuncu mertebeden Korteweg-de Vries denklemi sayısal olarak irdelenmiş, Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu, dokuzuncu mertebeden Korteweg-de Vries denklemine uygulanarak yaklaşık çözüm serileri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen yaklaşık çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmış, yaklaşık çözüm fonksiyonunun ve analitik çözüm fonksiyonunun şekilleri çizilmiş, bulunan yaklaşık çözümde mutlak hatayı hesaplamak amacıyla tablolar oluşturulmuştur.

Altıncı bölümde, Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik çözüm, dokuzuncu mertebeden Korteweg-de Vries denklemi, Yarı analitik metotlar, Seri çözüm, Adomian ayrışım metot, Homotopi analiz metot, Homotopi pertürbasyon metot.

SUMMARY

The Solutions of Linear and Nonlinear Differential Equations and Analysis of Numerical Solutions

This study is constructed in six chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, it is made analyze of Adomian decomposition method, Homotopy analysis method and Homotopy perturbation method to obtain solutions of nonlinear partial differential equations.

In chapter three, the derivation of Adomian decomposition method using the homotopy analysis method is made analysis.

In chapter four, the ninth-order Korteweg-de Vries equation is made analyze as numerical, it is obtained series solutions which are Adomian decomposition method, Homotopy analysis method and Homotopy perturbation method apply to the ninth-order Korteweg-de Vries equation.

In chapter five, it is compared analytic solution which are obtained series solution by in fourth chapter. The figure is obtained approximate solution function and analytic solution function.

In chapter six, it is made a generalized assessment by Adomian decomposition method, Homotopy analysis method and Homotopy perturbation method.

Key Words: Analytical solution, The ninth-order Korteweg-de Vries equation, Semi analytical methods, Series solution, Adomian decomposition method, Homotopy analysis method, Homotopy perturbation method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. dmKdV denkleminin analitik çözümü ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($b = 0.2, k = 0.2$).....	38
a) dmKdV denkleminin analitik çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü.....	38
b) dmKdV denkleminin Adomian ayrışım metodu ile hesaplanan (4.6) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü.....	38
c) dmKdV denkleminin Homotopi analiz metodu ile hesaplanan (4.9) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü ($h = -1$).....	38
d) dmKdV denkleminin Homotopi pertürbasyon metodu ile hesaplanan (4.12) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü.....	38
Şekil 2. dmKdV denkleminin $\Phi_4(x, t)$ yaklaşık çözüm serisi için h eğrisinin grafiği.....	40
Şekil 3. dmKdV denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümü ile Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	41

TABLÖLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. dmKdV denkleminin Adomian ayrışım metodu ile hesaplanan (4.6) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2$).....	39
Tablo 2. dmKdV denkleminin Homotopi analiz metodu ile hesaplanan (4.9) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2, h = -1$).....	39
Tablo 3. dmKdV denkleminin Homotopi pertürbasyon metodu ile hesaplanan (4.12) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2$).....	39
Tablo 4. h keyfi parametresinin çözümün yakınsaklık aralığındaki farklı değerleri için dmKdV denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümüne göre mutlak hatası ($x = 0.5, b = 0.2, k = 0.2$).....	40

SEMBOLLER LİSTESİ

A_n	: Adomian Polinomu
h	: Keyfi bir parametre
h_n	: Homotopi analiz polinomu
$H(x,t)$	: Keyfi bir fonksiyon
L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: İntegral Operatörü
$N, \tilde{N}$	: Lineer Olmayan Operatör
$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu
p	: Küçük bir parametere
α	: Alpha
Γ	: Gamma
Ω	: Omega
ε	: Epsilon
Φ	: Phi
Φ_n	: n terim yaklaşımı
Σ	: Toplam Sembolü

KISALTMALAR

AAM	: Adomian ayrışım metodu
HAM	: Homotopi analiz metodu
HPM	: Homotopi pertürbasyon metodu
dmKdV	: Dokuzuncu mertebeden Korteweg-de Vries denklemi

1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1. 1. Bir fonksiyonu ve onun muhtelif mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemler *diferansiyel denklemler* olarak isimlendirilir. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere *adi diferansiyel denklemler* denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n . mertebeden adi bir diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

kapalı formunda gösterilebilir [1].

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0$$

ise Φ fonksiyonuna $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin *çözümüdür* denir.

Bir adi diferansiyel denklemin *genel çözümü*, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir [2].

Tanım 1. 2. İçinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan denklemlere *kısmi türevli diferansiyel denklemler* denir. z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

şeklindedir.

n tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), z = z(x)$$

olmak üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

formundadır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

dir.

Bir kısmi türevli diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir *özel çözümü* denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin basamağı kadar (sürekli türetilbilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin *genel çözümü* denir [3].

Tanım 1. 3. Bir kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferensiyel denklemlere kıyasla kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) *Sınır şartları* : Sınır şartları kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α , β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

$$\text{Dirichlet şartı : } u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann şartı : } \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Karışık (mixed) veya Robin şartı : } \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

(ii) *Başlangıç Şartları* : Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferensiyel denkleme '*Cauchy problemi*' denir.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. Bu denklem, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantının işaretine göre şu şekilde sınıflandırılır;

<u>Diskriminant</u>	<u>Denklem Tipi</u>
$\Delta > 0$,	Hiperbolik,
$\Delta = 0$,	Parabolik,
$\Delta < 0$,	Eliptik.

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, "*iyi durumda*", en az bir şartı sağlamaz ise "*kötü durumda*" olarak adlandırılır. Bu şartlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

- 1) *Varlık*,
- 2) *Teklik*,
- 3) *Kararlılık*.

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını ifade etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırma. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir. Adi diferansiyel denklemlere göre kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansır bu çözüme *kararlıdır* denir ve çözüm kararlı kabul edilir [4].

Tanım 1. 4. Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişkenin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa (veya birden küçük derecelerden kuvvetlerini içeriyorsa), bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevlerinin çarpımını içeriyorsa veya bağımlı değişkenin trigonometrik, üstel, logaritmik fonksiyonlarını içeriyorsa bu denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem*, aksi halde *lineer diferansiyel denklemdir* denir.

Tanım 1. 5. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine *başlangıç değer problemi*, verilen şartlara da *başlangıç şartları* adı verilir.

Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine *sınır değer problemi*, verilen şartlara da *sınır şartları* adı verilir [5].

Tanım 1. 6. X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir *operatör* veya *dönüşüm* denir.

Tanım 1. 7. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. X_0 cümlesi X uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in X_0$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne *linear operatör* denir.

Tanım 1. 8. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. $A: X \rightarrow Y$ operatörü $D(A) \subset X$ tanım bölgesindeki farklı noktalara farklı görüntüler karşılık getiriyorsa, yani herhangi $x_1, x_2 \in D(A)$ için,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$$

yada buna eşdeğer diğer bir ifade ile,

$$Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa, $A: D(A) \rightarrow Y$ operatörüne *birebir operatör* adı verilir.

Böyle bir durumda, $\forall y_0 \in R(A)$ elemanına $Ax_0 = y_0$ olacak şekilde $x_0 \in D(A)$ elemanına dönüştüren,

$$A^{-1}: R(A) \rightarrow D(A)$$

operatörü vardır. A^{-1} operatörüne A *linear operatörünün tersi* adı verilir [6].

Tanım 1. 9. Eğer belli bir kuralla her $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayısına bir x_n sayısı karşılık geliyorsa, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olarak numaralanmış gerçel sayılar kümesine *dizi* denir ve (x_n) ile gösterilir.

$\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ olacak şekilde $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ veya $|x_n - a| < \varepsilon$ sağlanıyorsa (x_n) dizisi *yakınsaktır* ve limiti a 'dır denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ veya } x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

Başka bir deyişle, $n \geq N(\varepsilon)$ ise x_n değerleri $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına, yani a 'nın ε civarına aittir. Yakınsak olmayan (x_n) dizilerine *ıraksaktır* denir [7].

Tanım 1. 10. (x_n) dizisi verilsin. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ ifadesine *seri* denir.

Burada x_n genel terimdir. $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ toplamı, *serinin kısmi toplamı* olarak adlandırılır.

(S_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğunda seriye *yakınsak seri*, aksi taktirde *ıraksak seri* adı verilir. $S_n \rightarrow S$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$ yazılır [7].

Tanım 1. 11. Kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f , z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Eğer kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse f , S üzerinde *analitiktir* denir. Bir f fonksiyonu, C kompleks sayılar kümesinin tüm noktalarında analitikse, f 'e *tam fonksiyon* denir [8].

2. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLARIN ANALİZİ

Doğadaki olayların ve problemlerin modellenmesi sonucunda genellikle lineer olmayan denklemlerin çözümleriyle karşılaşılır. Lineer olmayan denklemler fizik ve mühendislikte, özellikle ısı transferinde geniş uygulamalara sahiptirler. Bugüne kadar literatürde pekçok lineer olmayan problem sunulmuştur. Örneğin izole edilmiş dalgaların hareketi, hidrodinamiğin birçok alanı, plazma fiziği, lineer olmayan optik gibi alanlarda karşımıza çıkar. Lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerinin araştırılması lineer olmayan fiziksel olayların çalışılmasında önemli bir rol oynar.

Yüksek performanslı bilgisayarların ortaya çıkmasından bu yana bir lineer problemi çözmek daha kolaylaşmıştır. Fakat genel olarak söylenirse lineer olmayan problemlerin kesin çözümlerini elde etmek hala zordur. Özellikle Mathematica, Maple, Matlab gibi bazı yüksek performanslı sembolik programlama dillerinin varlığına rağmen verilen lineer olmayan problemin analitik yaklaşımını elde etmek, çoğunlukla sayısal yaklaşımını elde etmekten daha zordur. Bazı durumlarda ele alınan diferensiyel denklemin tam çözümlerini bulmak mümkün bile olmayabilir. Bu tür durumlarda sayısal olarak yaklaşık çözümler elde edilir. Bu da analitik metotların yanı sıra Adomian ayrışım metodu, Homotopi analiz metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu gibi bazı yarı analitik metotların tasarlanması gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu üç metot da lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

2. 1. ADOMIAN AYRIŞIM METODU

Adomian ayrışım metodu (AAM) [9,12], Amerikalı bilim adamı Adomian tarafından sunulmuştur. Metot, seri biçiminde bir çözüm elde edebilmek için yapılan çalışmalara dayanır. Bu metot mühendislik, fizik, biyoloji gibi birçok farklı alanda yapılan bilimsel çalışmalarda lineer veya lineer olmayan problemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bir yöntemdir. 1980'lerin başından beri, fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanmıştır.

AAM, lineer olmayan problemler için etkili bir yöntemdir. Üzerinde çalışılan diferensiyel denklemler küçük yada büyük parametreler içerseler de içermeseler de adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Yani, bu yöntem oldukça geneldir. Bu metotla bulunan çözümler seri formunda olup, sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçlar bulunur.

Yapılan çalışmalarla [13-15]; AAM kullanılarak, geleneksel yöntemlere göre yaklaşık çözümleri oluşturan serilerin elemanlarının hesaplanmasında daha hassas ve daha hızlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrışım metodu yalnızca başlangıç şartının kullanılmasıyla çözümün elde edilmesini de sağlar. Metot, minimum hesaplama ve yüksek doğruluklu, etkili bir açık çözümü üretir ve bu yönüyle de birçok bilim adamı tarafından da güvenilir bir yöntem olarak görülür. Ayrışım metodu; lineer, lineer olmayan, homojen veya homojen olmayan gibi değişik tipteki diferensiyel denklemler için kullanılabilir.

Yöntemin geleneksel yöntemlere göre birçok avantajı vardır. Bu metotla lineer ve lineer olmayan problemlerde lineerleştirmelere veya indislemeye ihtiyaç duyulmaksızın yakınsak çözümler elde edilebilir. Bazı durumlarda ele alınan diferensiyel denklemin tam çözümlerini bulmak mümkün olmayabilir. Bu tür durumlarda sayısal olarak yaklaşık çözümler elde edilir. Ayrıca AAM'de önemli bir yeri olan birbirini götüren terimler (noise terms) olgusu, sadece birkaç iterasyon kullanılarak çözümün bulunmasını sağlar. Yalnızca homojen olmayan problemlerde oluşan noise terimler, çözümün çeşitli elemanlarında oluşabilecek karşıt durumlu özdeş terimler olarak tanımlanır.

Ayrışım yönteminin bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir [14,15].

Genel olarak bu metot verilecek olursa; F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferensiyel operatör olmak üzere;

$$Fu(t) = g(t), \quad (2.1)$$

denklemini ele alınsın.

(2.1) denklemini, L ; lineer operatörü (verilen diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini), R ; lineer operatörün kalan kısmını ve N ; lineer olmayan terimi göstermek üzere;

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazılabilir. Burada $u(0) = A$, $u'(0) = B$ başlangıç şartı verilsin. (2.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu, \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. L lineer operatörünün tersi mevcut olsun. Verilen başlangıç şartı ile,

$$L = \frac{d^n}{dt^n},$$

için 0'dan 1'e tanımlanan L^{-1} operatörü, n katlı integral operatörünü tanımlar. (2.3) eşitliğinin her iki tarafına sol taraftan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.4)$$

elde edilir. L 'nin ikinci mertebeden ve tersi de mevcut olan lineer bir operatör olduğu kabul edilsin.

$$L = \frac{d^2}{dt^2},$$

operatörü için,

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0),$$

yazılır ve böylece (2.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra;

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.5) eşitliğindeki u , ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değerlerinden,

$$u_0 = A + Bt + L^{-1}g,$$

şeklinde (2.5) eşitliğinin ilk üç terimine eşittir.

Daha sonra u_0 terimi kullanılarak, $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (2.6)$$

yazılabilir.

Bu seri çözümü ve $u_0 = A + Bt + L^{-1}g$ eşitliği kullanılarak (2.5) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.7) eşitliği açık şekilde;

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

formunda yazılabilir.

Buradaki A_n polinomları herbir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0, u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (2.8) eşitliğindeki bütün A_n adomian polinomları elde edilebilir.

A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde aşağıdaki şekildedir [11];

$$A_0 = f(u_0),$$

$$A_1 = u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0),$$

$$A_2 = u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0),$$

$$A_3 = u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0),$$

$$\begin{aligned} A_4 &= u_4 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_2^2}{2!} u_1 u_3 \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \frac{u_1^2 u_2}{2!} \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\ &\quad + \left(\frac{u_1^4}{4!} \right) \left(\frac{d^4}{du_0^4} \right) f(u_0), \end{aligned}$$

$\vdots$

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0. \quad (2.9)$$

Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.9) genel formülünün kullanılması, (2.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=0}^n u_k(x, t), \quad n \geq 0, \quad (2.10)$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t) = u(x, t), \quad (2.11)$$

ifadesi, (2.8) indirgeme bağıntısı gözönüne alınarak kolayca hesaplanabilir.

Buna ilaveten (2.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Cherruault ve arkadaşları [10] tarafından incelenmiştir.

2. 2. HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Bu metot ilk kez 1992 yılında Liao [16] tarafından sunulmuş, 2003 yılında yine Liao tarafından yazılan bir kitapta [17] bu metodun fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları ve diğer analitik teknikler ile arasındaki ilişkileri ortaya koyulmuştur. Homotopi analiz metodu (HAM) pek çok lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlere [18-20] başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu tekniklerin çoğu Taylor serisine dayanmaktadır. Eğer başlangıç fonksiyonu iyi seçilirse serinin birkaç teriminde bile çok iyi yaklaşımlar elde edilebilir.

Genel olarak bu metot verilecek olursa;

$$N[V(t)] = 0, \quad (2.12)$$

lineer olmayan bir diferensiyel denklem olsun. Burada N hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferensiyel operatör, $V(t)$ denklemin çözümüdür. Ayrıca,

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Phi(t; q) = \Phi(t; 0) = V_0(t), \quad (2.13)$$

şeklinde bir $\Phi(t; q)$ fonksiyonu tanımlanır. Burada $q \in [0, 1]$ ve $V_0(t)$ ise başlangıç veya sınır şartlarını gerçekleyen tahmini bir başlangıç fonksiyonudur. Genel homotopi tekniği kullanılırsa

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Phi(t; q) = \Phi(t; 1) = V(t), \quad (2.14)$$

yazılır öyleki q parametresi 0 dan 1'e artarken, $\Phi(t; q)$, $V_0(t)$ başlangıç tahmininden $V(t)$ gerçek çözümüne kadar değişir. Topolojide varyasyonun bu türü *deformasyon* olarak adlandırılır. $h \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyonu tanımlarsa;

$$(1 - q)L[\Phi(t; q) - V_0(t)] = hqH(t)N[\Phi(t; q)] \quad (2.15)$$

sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi elde edilir. Burada h yakınsaklık aralığını belirlemede kullanılan keyfi bir parametre, L lineer bir operatördür.

Burada belirtilebilir ki; h yardımcı parametresinin, $H(t)$ yardımcı fonksiyonunun, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımının ve L yardımcı lineer operatörünün seçiminde büyük özgürlük sağlanır. Bu özgürlük daha sonra gösterileceği gibi, HAM'ın geçerliliğinin ve esnekliğinin köşe taşı kurar ve önemli roller oynar.

$\Phi(t; q)$ nun q parametresine göre m . *mertebeden türevi*, yani;

$$V_0^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (2.16)$$

mevcuttur, burada $m = 1, 2, 3, \dots$ şeklindedir. Kısaca $V_0^{[m]}(t)$, m . *mertebeden deformasyon türevi* olarak adlandırılır.

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (2.17)$$

tanımlanabilir.

Taylor açılımı ile, $\Phi(t; q)$ aşağıdaki gibi yardımcı parametre q 'nın bir kuvvet serisine açılabilir;

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m, \quad (2.18)$$

(2.17) denkleminde yukarıdaki kuvvet serisi,

$$\Phi(t; q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) q^m, \quad (2.19)$$

şeklinde olur.

h yardımcı parametresinin, $H(t)$ yardımcı fonksiyonunun, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımının ve L yardımcı lineer operatörünün öyle uygun bir şekilde seçildiğini varsayalım ki (2.19) serileri $q = 1$ de yakınsasınlar. O zaman, $q = 1$ de (2.19) serisi,

$$\Phi(t; 1) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t), \quad (2.20)$$

olur. Böylece (2.14) denklemini kullanarak,

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t), \quad (2.21)$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade şu ana kadar bilinmeyen, $V_0(t)$ başlangıç tahmini ve $V(t)$ gerçek çözümü arasındaki ilişkiyi $V_m(t)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) terimleri vasıtasıyla verir.

(2.15) ile verilen sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi q parametresine bağlı olarak m kez diferensiyellenir, sonra $q = 0$ alınıp ve son olarak $m!$ ile bölünürse, m . *mertebeden deformasyon denklemi* olarak adlandırılan

$$\mathcal{L}[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{V}_{m-1}), \quad (2.22)$$

denklemini

$$V_m(0) = 0, \quad (2.23)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak elde edilir. Burada,

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \quad (2.24)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \text{ iken} \\ 1, & m > 1 \text{ iken} \end{cases} \quad (2.25)$$

dir. (2.24) denkleminde,

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m), \quad (2.26)$$

ifadesi yazılabilir. Burada nokta, t 'ye göre türevi ifade etmektedir.

Yukarıdaki açıklama ile verilen $R_m(\vec{V}_{m-1})$, sadece (2.22) ve (2.23) m . mertebeden deformasyon denklemlerinin çözümünden bilinen,

$$V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_{m-1}(t)$$

ifadesine bağlıdır.

$V(t)$ 'nin m . mertebeden yaklaşımı,

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^m V_n(t), \quad (2.27)$$

ile verilir.

(2.15) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi L lineer yardımcı operatörü, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı, h yardımcı parametresi ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonu ile tanımlıdır. Teorik olarak, yukarıdaki yaklaşım ile verilen $V(t)$ çözümü; L lineer yardımcı operatörüne, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımına, h yardımcı parametresine ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna bağlıdır.

2. 2. 1. Yakınsaklık Teoremi

$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t)$ serisi yakınsak olduğu sürece, buradaki $V_m(t)$, (2.25) ve (2.26) tanımları altında (2.22) ve (2.23) yüksek mertebeden deformasyon denklemlerinden etkilenmektedir.

İspat:

$\sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$ yakınsak ise, $S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$ yazılabilir ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(t) = 0 \quad (2.28)$$

elde edilir. χ_m 'in (2.25) tanımını kullanılırsa,

$$\sum_{m=1}^n [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + (V_n - V_{n-1}) = V_n(t)$$

elde edilir. (2.28) denklemine göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = 0,$$

dır. Buradan,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{L}[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \mathbb{L} \sum_{m=1}^{+\infty} [V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = 0,$$

elde edilir. Yukarıdaki açıklamadan ve (2.22) denkleminde,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{L}[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = hH(t) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0,$$

bulunur.

$h \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ iken,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0, \quad (2.29)$$

olmalıdır. (2.26) tanımından,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=j+1}^{+\infty} V_j(t) V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{V}_m(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} V_j(t) \sum_{i=0}^{+\infty} \dot{V}_i(t) \\ &= \dot{S}(t) + S^2(t) - 1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.29) ve (2.30) denklemlerinden,

$$\dot{S}(t) + S^2(t) - 1 = 0, \quad t \geq 0$$

yazılabilir. (2.20) ve (2.23) denklemlerinden,

$$S(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} V_m(0) = V_0(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(0) = V_0(0) = 0,$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2. 3. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), ilk olarak lineer ve lineer olmayan diferensiyel ve integral denklemlerinin çözümü için 1999 yılında He [21] tarafından tasarlanmıştır ve çeşitli mühendislik problemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Metot, topolojide tanımlanan homotopi ve geleneksel pertürbasyon tekniklerinin birleşimidir. Bu metot, uygulamalı bilimlerde lineer olmayan problemlerin yaygın bir alanı için yaklaşık çözüm sağlaması açısından önemli bir avantaj sağlar.

Topolojide tanımlanan homotopi tekniği kullanılırsa, "küçük parametre" olarak düşünülen bir $p \in [0,1]$ parametresi ile bir homotopi kurulur [22-24].

Bu metodun temel kavramlarını tanımlamak için,

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.31)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemi,

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2.32)$$

sınır koşulları ile verilsin. Burada A bir genel diferensiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyondur ve Γ , Ω tanım kümesinin sınırıdır.

Genelde, A operatörü L ve N olarak iki bölüme ayrılabilir, burada L lineer fakat N lineer olmayan terimdir. Bu nedenle (2.31) denklemi,

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir. Homotopi tekniği ile [25], $p \in [0,1]$ $r \in \Omega$ olmak üzere,

$$H(V, p) = (1 - p)[L(V) - L(u_0)] + p[A(V) - f(r)] = 0, \quad (2.34)$$

veya

$$H(V, p) = L(V) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(V) - f(r)] = 0, \quad (2.35)$$

şartlarını sağlayan bir,

$$V(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

homotopisi kurulsun.

Burada $p \in [0, 1]$, parametre; u_0 , (2.32) sınır şartlarını sağlayan (2.31) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır.

Açıkça, (2.34) ve (2.35) denklemlerinden;

$$H(V, 0) = L(V) - L(u_0) = 0, \quad (2.36)$$

$$H(V, 1) = A(V) - f(r) = 0, \quad (2.37)$$

olur. 0 dan 1 e p 'nin değişim süreci, sadece $V(r, p)$ nin $u_0(r)$ den $u(r)$ ye kadar olanıdır. Topolojide bu ifade *deformasyon* olarak, $L(V) - L(u_0)$ ve $A(V) - f(r)$ ise *homotopik* olarak adlandırılır.

İlk olarak, p parametresi "küçük parametre" olarak kullanılır ve (2.34) ve (2.35) denklemlerinin çözümünün p 'nin kuvvet serisi olarak yazılabildiği varsayılır. Böylece,

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + \dots, \quad (2.38)$$

yazılabilir. (2.31) denkleminin yaklaşık çözümünde $p = 1$ alınırsa;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots, \quad (2.39)$$

elde edilir.

Pertürbasyon metodunun ve homotopi metodunun birleşimi HPM olarak adlandırılır ki bu metot genel pertürbasyon metotlarının sınırlamalarını ortadan kaldırır [21]. Diğer taraftan, bu yöntem genel pertürbasyon yöntemlerinin tüm avantajlarına sahip olabilir.

(2.39) serileri pek çok durum için yakınsaktır. Bununla beraber, yakınsaklık oranı lineer olmayan operatör $A(V)$ ye bağlıdır [22].

3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU KULLANILARAK ADOMİAN AYRIŞIM METODUNUN TÜREVİ

Lineer olmayan diferensiyel denklemler genellikle çoğu fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesinden ortaya çıkar. Çoğu durumlarda bu diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zordur. Sistemi lineerleştiren ortak analitik yaklaşımlar uygun metotlarla çözüme gidebilmek için gerçek problemi değiştirir. Daha önce anlatılan sayısal metotlar ve lineerleştirmenin dezavantajları, lineer olmayan diferensiyel denklemleri çözmek için; yarı analitik çözüm metotlarından alternatif teknikler araştırmanın gerekliliğidir.

AAM, verilen denklemin lineer ve lineer olmayan kısımlarını ayırmaya, her iki tarafındaki lineer operatörlerde kapsanan yüksek mertebe türev operatörlerine dönüştürmeye, başlangıç yaklaşımı olarak tek bağımsız değişken içeren terimler ve başlangıç veya sınır şartlarını bilmeye, tanımlanabilen bileşenlerin bir serisi içinde bilinmeyen fonksiyonu ayırtmaya, Adomian polinomları olarak adlandırılan özel polinomların terimlerinde lineer olmayan fonksiyonları ayırtmaya ve Adomian polinomları kullanılarak tekrarlayan ilişki ile çözüm serilerinin doğru terimlerini bulmaya dayanır. Metot, kısmi diferensiyel denklemlerin yanısıra lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerde, analitik çözüm türevi için kullanılmaktadır. Metodun değişik bir türü adi ve kısmi diferensiyel denklemler için analitik çözüm türevinde kullanılmaktadır. Adi diferensiyel denklemler için metodun uygulaması ilk olarak Shawagfeh [25,26] tarafından ortaya çıkarılmıştır.

Metodun yakınsaklık kriteri ve hata analizi çeşitli yazarlar tarafından araştırılmıştır. [10,27] de Cherruault sınır değer probleminin özel bir sınıfı için uygulanan metodun yakınsaklığını araştırmıştır. Isı iletiminde periyodik sıcaklık alanlarının özel bir problemi için uygulamada AAM'nin yakınsaklığı [28] araştırılmıştır.

Bir diğer teknik olarak lineer olmayan operatörler için bir analitik çözüm türevinde kullanılan HAM, sürekli olarak çözümün bağlı olduğu varsayılan parametreler ve operatörleri oluşturmayı içerir. Metot, çoğu yazar tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin bir analitik çözümünün türevinde çok etkin bir şekilde uygulanmaktadır.

Bununla beraber AAM, lineer olmayan problemlerin çözümü için yaygın olarak

kullanılmasına rağmen, metodun yakınsaklığı üzerine olan teori hakkında bilinenler çok azdır.

Bu bölümde AAM ve HAM yeniden analiz edilip, AAM'nin HAM kullanılarak türevlenebilir olduğu gösterilmiştir [30].

3. 1. Adomian Ayrışım Metodu

AAM,

$$F(x, y(x)) = 0, \quad (3.1)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemini ayrıştırmaya dayanır. Sırasıyla F 'in lineer ve lineer olmayan kısımları L ve N olmak üzere,

$$L(y(x)) + N(y(x)) = 0, \quad (3.2)$$

şeklinde iki bileşen içerir. $L(y)$ için çözüm,

$$L(y) = -N(y), \quad (3.3)$$

için elde edilir. (3.3) denkleminin her iki yanına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$y = L^{-1}(N(y)) + \varphi(x), \quad (3.4)$$

elde edilir. Varsayalımki y çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.5)$$

şeklinde seriye açılabilir ve lineer olmayan $N(y)$ terimi,

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (3.6)$$

şeklinde A_n Adomian polinomlarının terimleriyle seriye açılabilir. Burada (3.1) denklemi kullanılarak $N(y)$ nin A_n Adomian polinomları,

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n y_n)\right) \Big|_{\lambda=0},$$

şeklinde elde edilir. (3.5) ve (3.6) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \varphi(x) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right), \quad (3.7)$$

olur. (3.7) lineer denklem sisteminde terimler eşitlenirse, tekrarlayan ilişki ile,

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x) \\ y_{n+1} &= -L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Pratikte (3.7) serisinin tüm terimleri tanımlanabilir ve çözüme $\sum_{n=0}^N y_n$ serisi ile yaklaşılr.

3. 2. Homotopi Analiz Metodu

Homotopi analiz metodunu tanımlayabilmek için, $\tilde{N}$ lineer olmayan bir diferensiyel operatör, $h \neq 0$, λ bir kompleks sayı ve $A\lambda$ ve $B\lambda$, $|\lambda| \leq 1$ bölgesinde sırasıyla,

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1 \quad (3.9)$$

denklemlerini sağlayan iki kompleks analitik fonksiyon olsun.

$A\lambda$ ve $B\lambda$ nın $|\lambda| \leq 1$ bölgesinde analitik olmasından dolayı Maclaurin serileri sırasıyla,

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \lambda^k, \quad B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \lambda^k, \quad (3.10)$$

olsun. Bundan dolayı,

$$A(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} = 1, \quad B(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} = 1, \quad (3.11)$$

yazılabilir. Burada tanımlanan $A\lambda$ ve $B\lambda$ fonksiyonlar, λ ise parametredir.

Lineer olmayan diferensiyel denklem genel olarak,

$$\tilde{N}(y(x)) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.12)$$

şeklinde düşünölsün. Burada $\tilde{N}$ bir diferensiyel operatör, $y(x)$, $x \in \Omega$ bölgesinde tanımlı bir çözümdür. (3.12) denkleminin çözümü için HAM kullanılırsa,

$$[1 - B(\lambda)]L[\tilde{y}(x, \lambda) - y_0(x)] = hA(\lambda)\tilde{N}[\tilde{y}(x, \lambda)], \quad (3.13)$$

denklemini elde edilir. Burada L ,

$$L(0) = 0, \quad (3.14)$$

şartını sağlayan yardımcı bir lineer operatör, $h \neq 0$ yardımcı bir parametre, $y_0(x)$ başlangıç

yaklaşımıdır.

$A(0) = 0$ ve $B(0) = 0$ olduğu kullanılırsa, (3.13) denklemi,

$$L[\tilde{y}(x,0) - y_0(x)] = 0,$$

veya

$$\tilde{y}(x,0) = y_0(x), \quad (3.15)$$

denklemini verir.

Benzer şekilde, $\lambda = 1$ iken (3.13) denklemi, (3.12) denkleminin aynısı olmasından dolayı,

$$\tilde{y}(x,1) = y(x) \quad (3.16)$$

olur. (3.12) denklemi, özel olarak seçilen h , $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ ve tüm $0 \leq \lambda \leq 1$ için yakınsayan $\tilde{y}(x,\lambda)$ çözümüne sahip ve $\tilde{y}(x,\lambda)$, $\lambda = 0$ da sonsuz diferensiyellenebilen olsun. O halde $k = 0,1,2,\dots$ için,

$$\tilde{y}_0^k(x) = \left. \frac{\partial^k \tilde{y}(x,\lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0}, \quad k = 0,1,2,\dots \quad (3.17)$$

olur.

Böylece $\lambda; 0$ 'dan 1 'e artarken, (3.13) denkleminin $\tilde{y}(x,\lambda)$ çözümü, $y_0(x)$ başlangıç yaklaşımından (3.12) denkleminin $y(x)$ genel çözümüne kadar gider. (3.15) ve (3.16) denklemleri $y(x)$ genel çözümü ile $y_0(x)$ başlangıç yaklaşımı arasında doğrusal olmayan bir ilişki verir. HAM, aşağıdaki gibi tanımlanan iki çözüm arasında doğrusal bir ilişki bulma üzerine kurulur.

$\lambda = 0$ iken $\tilde{y}(x,\lambda)$ nın Maclaurin serisi düşünülürse,

$$\tilde{y}(x,\lambda) = \tilde{y}(x,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left. \frac{\partial^k \tilde{y}(x,\lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} \right) \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (3.18)$$

olur. Bu serinin $\lambda = 1$ de yakınsadığı varsayılırsa (3.15) ve (3.16) denklemleri arasındaki ilişki ile,

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x), \quad (3.19)$$

yazılabilir. Burada,

$$y_m(x) = \frac{\tilde{y}_0^m(x)}{m!} = \frac{\left. \frac{\partial^m \tilde{y}(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \right|_{\lambda=0}}{m!}, \quad m \geq 1, \quad (3.20)$$

dir.

Elde edilen $y_m(x)$ türev denklemi için, (3.13) denklemi λ ya göre m defa diferensiyellenirse,

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k [1 - B(\lambda)]}{d\lambda^k} \frac{d^{m-k}}{d\lambda^{m-k}} \{L[\tilde{y}(x, \lambda) - y_0(x)]\} = h \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k A(\lambda)}{d\lambda^k} \frac{d^{m-k}}{d\lambda^{m-k}} \tilde{N}[\tilde{y}(x, \lambda)], \quad (3.21)$$

elde edilir.

(3.21) denklemi $m!$ ile bölünüp $\lambda = 0$ alınırsa,

$$L \left[y_m(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} y_{m-k}(x) \right] = R_m(x), \quad (3.22)$$

m . mertebeye deformasyon denklemi elde edilir. Burada $R_m(x)$, daha önce hesaplanan $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{m-1}(x)$ değerlerine bağlıdır ve

$$R_m(x) = h \sum_{k=1}^m \alpha_{1,k} h_{m-k}(x), \quad (3.23)$$

ile verilir. Burada $h_k(x)$ ler homotopi polinomlarıdır ve

$$h_k(x) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \tilde{N}[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0}, \quad (3.24)$$

ile verilir.

(3.22) denkleminin lineer olduğunun vurgulanması çok önemlidir. Eğer ilk $(m-1)$. mertebeden yaklaşımlar elde edilebilirse $R_m(x)$ in sol tarafı elde edilebilir. Böylece seçilen $y_0(x)$ başlangıç yaklaşımı kullanılırsa $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$ elde edilebilir. HAM, L yardımcı lineer operatörlerini, $y_0(x)$ başlangıç yaklaşımını, $A\lambda$ ve $B\lambda$ fonksiyonlarını, sıfırdan farklı h yardımcı parametrelerini seçmek için büyük özgürlük sağlar.

3.3. Adomian Ayrışım Metodunun Matematiksel Türevi

Aşağıdaki teoremlerle AAM, HAM kullanılarak türevlenebilir [30].

Teorem 1.

$$A\lambda = \lambda \quad \text{ve} \quad B\lambda = \lambda, \quad (3.25)$$

ile verilen operatörler $A\lambda$ ve $B\lambda$, $h = -1$ yardımcı parametre olsun. Bu durumda,

$$h_n(x) = A_n(x), \quad (3.26)$$

yani, Homotopi analiz polinomları Adomian polinomlarına indirgenebilir.

İspat:

(3.1) denkleminin çözümü, $0 \leq \lambda \leq 1$ için λ parametresine bağlı olsun ve çözüm $\omega(x, \lambda)$ ile verilsin. Bu çözüm,

$$\omega(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left. \frac{\partial^k \omega(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0},$$

$\lambda = 0$ da analitik olan homotopi analiz polinomu olsun. Bu parametrelerin seçimi ile (3.13) denklemi,

$$(1 - \lambda) \{L[\omega(x, \lambda)] - L[y_0]\} = -\lambda F[\omega(x, \lambda)], \quad (3.27)$$

olur. Burada y_0 başlangıç tahmini, $L[\omega(x, 0)] = 0$ lineer operatörünün çözümüdür. $\lambda = 0$ iken, y_0 , (3.27) denkleminin çözümüdür ve $\lambda = 1$ iken çözüm, $F[\omega(x, \lambda)] = 0$ lineer olmayan esas denkleminin çözümü olan $y(x)$ olacaktır.

(3.27) denkleminin her iki yanı λ ya göre diferensiyellenirse, Homotopi analiz polinomları için aşağıdaki bağıntı elde edilecektir.

$$(1 - \lambda) \frac{\partial L[\omega(x, \lambda)]}{\partial \lambda} - \{L[\omega(x, \lambda)] - L[y_0]\} = -F[\omega(x, \lambda)] - \lambda \frac{\partial F[\omega(x, \lambda)]}{\partial \lambda},$$

ve $\lambda = 0$ iken y_1 için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$L \left[\left. \frac{\partial [\omega(x, \lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \right] = L[y_1] = -F[y_0] = -A_0, \quad (3.28)$$

veya

$$y_1(x) = L^{-1}(A_0)$$

olur.

(3.27) denklemi λ ya göre n defa diferensiyellenirse,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k [1-\lambda]}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial \lambda^{n-k}} \{L[\omega(x, \lambda)] - L[y_0]\} = -1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k (\lambda)}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial \lambda^{n-k}} F[\omega(x, \lambda)], \quad (3.29)$$

elde edilir.

(3.29) denklemi düzenlenir, $n!$ ile bölünüp ve $\lambda = 0$ alınır, y_n için aşağıdaki lineer denklem elde edilir.

$$L(y_n) = -A_{n-1}, \quad (3.30)$$

veya

$$y_n = -L^{-1}(A_{n-1}), \quad (3.31)$$

burada,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F[\omega(x, \lambda)]}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \delta_n, \quad (3.32)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.

$$y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x), \quad (3.33)$$

serisi yakınsak ise (3.1) denkleminin çözümüdür.

İspat:

(3.22) denkleminden,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} L \left[y_m(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} y_{m-k}(x) \right] = L \left[\sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} y_{m-k}(x) \right] \\ &= L \left[\sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \beta_{1,k} y_{m-k}(x) \right] = L \left[\sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \sum_{m=1}^{m-1} y_m(x) \right] \\ &= L \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \right) \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir.

$B(\lambda) = \lambda$ olduğu hatırlanırsa (3.34) denklemi ile verilen

$$\beta_{1,k} = \begin{cases} 0, & k = 0 \text{ iken} \\ 1, & k = 1 \text{ iken} \\ 0, & k > 1 \text{ iken} \end{cases}$$

olur. O halde

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) = 0, \quad (3.35)$$

olur.

Diğer yandan, (3.23) ve (3.24) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} h \sum_{k=1}^m \alpha_{1,k} h_{m-k}(x) = h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=k}^{\infty} h_{m-k}(x) \\ &= h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) = h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \tilde{N}[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^m} \right|_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir.

$A(\lambda) = \lambda$ olduğu hatırlanırsa (3.36) denklemi ile verilen $\alpha_{1,k}$,

$$\alpha_{1,k} = \begin{cases} 0, & k = 0 \text{ iken} \\ 1, & k = 1 \text{ iken} \\ 0, & k > 1 \text{ iken} \end{cases}$$

olur. O halde $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} = 1$ olacağından

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) = h \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x) = h \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m F[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^m} \right|_{\lambda=0}, \quad (3.37)$$

elde edilir. $h = -1$ olduğu dikkate alınır, (3.35) ve (3.36) denklemleri ile,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m F[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^m} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (3.38)$$

elde edilir.

Ayrıca $\tilde{y}(x, \lambda)$ genelde $\lambda \neq 1$ iken (3.1) denkleminin bir çözümü değildir. (3.1) denkleminin bir hatası olarak,

$$\Delta(x, \lambda) = F[\tilde{y}(x, \lambda)] - F[y(x)] = F[\tilde{y}(x, \lambda)]$$

alınırsa bu hatanın Maclaurin serisi $\lambda = 0$ iken,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \frac{d^m \Delta(x, \lambda)}{d\lambda^m} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \frac{d^m F[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^m} \Big|_{\lambda=0}, \quad (3.39)$$

olur. (3.33) denkleminde göre, $\lambda = 1$ de yukarıdaki maclaurin serisi yakınsaktır yani; (3.1) denkleminin çözümü olan

$$y(x) = \tilde{y}(x, 1) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x)$$

kullanılarak

$$\Delta(x, 1) = F[\tilde{y}(x, 1)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m F[\tilde{y}(x, \lambda)]}{d\lambda^m} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (3.40)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. DOKUZUNCU MERTEBEDEN KORTEWEG-DE VRIES (dmKdV) DENKLEMİNİN SAYISAL OLARAK İRDELENMESİ

Bu bölümde önceki bölümlerde teorik olarak analiz edilen metotlar bir örnek üzerinde açıklanacaktır. Bunun için dokuzuncu mertebeden Korteweg-de Vries (dmKdV) denklemi [31] ,

$$u_t + 45u_x u_{6x} + 45uu_{7x} + 210u_{3x} u_{4x} + 210u_{2x} u_{5x} + 1575u_x u_{2x}^2 + 3150uu_{2x} u_{3x} + 1260uu_x u_{4x} + 630u^2 u_{5x} + 9450u^2 u_x u_{2x} + 3150u^3 u_{3x} + 4725u^4 u_x + u_{9x} = 0 \quad (4.1)$$

gözönüne alınsın. Burada u_{kx} , $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $k = 1,2,3,\dots$ kısmi türevini tanımlar. Son çalışmalarda, Wazwaz [32,33], KdV denkleminin bilineer formunu genelleştirerek lineer olmayan (4.1) denklemini ortaya koymuş ve başarılı bir şekilde tanh-coth metodu yardımıyla dalga çözümlerini çalışmıştır. Bu denklem hem u_{9x} lineer yayılım terimini hem de $45u_x u_{6x}$, $45uu_{7x}$, $210u_{3x} u_{4x}$, $210u_{2x} u_{5x}$, $1575u_x u_{2x}^2$, $3150uu_{2x} u_{3x}$, $1260uu_x u_{4x}$, $630u^2 u_{5x}$, $9450u^2 u_x u_{2x}$, $3150u^3 u_{3x}$, $4725u^4 u_x$ lineer olmayan terimlerini içerir. Pek çok fizikçi ve matematikçi, son yıllarda bilimsel uygulamalardaki görünüşünden dolayı dmKdV denklemine dikkat çekmişlerdir [31-33].

Bu bölümde dmKdV denkleminin çözümü AAM, HAM ve HPM ile yaklaşık olarak elde edilmiştir.

4. 1. Adomian Ayrışım Metodunun dmKdV denklemine uygulanması

(4.1) ile verilen dmKdV denklemi,

$$u_0 = u(x,0) = \frac{2}{273} bk^2 (692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2), \quad (4.2)$$

başlangıç şartı [31] ile verilsin. Burada,

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, L_x = \frac{\partial}{\partial x}, L_{2x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_{3x} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}, L_{4x} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \dots$$

lineer operatörler ve bu operatörlerin tersleri de mevcut ve,

$$L_t^{-1} = \int_0^t (.) dt$$

şeklinde tanımlansın. (4.1) denklemi operatör formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} & L_t u + 45 L_x u L_{6x} u + 45 u L_{7x} u + 210 L_{3x} u L_{4x} u + 210 L_{2x} u L_{5x} u + 1575 L_x u (L_{2x} u)^2 \\ & + 3150 u L_{2x} u L_{3x} u + 1260 u L_x u L_{4x} u + 630 u^2 L_{5x} u + 9450 u^2 L_x u L_{2x} u + 3150 u^3 L_{3x} u \\ & + 4725 u^4 L_x u + L_{9x} u = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur.

L_t^{-1} operatörü sol taraftan (4.3) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & u(x, 0) - 45 L_t^{-1} (L_x u L_{6x} u) - 45 L_t^{-1} (u L_{7x} u) - 210 L_t^{-1} (L_{3x} u L_{4x} u) - 210 L_t^{-1} (L_{2x} u L_{5x} u) \\ & - 1575 L_t^{-1} (L_x u (L_{2x} u)^2) - 3150 L_t^{-1} (u L_{2x} u L_{3x} u) - 1260 L_t^{-1} (u L_x u L_{4x} u) - 630 L_t^{-1} (u^2 L_{5x} u) \\ & - 9450 L_t^{-1} (u^2 L_x u L_{2x} u) - 3150 L_t^{-1} (u^3 L_{3x} u) - 4725 L_t^{-1} (u^4 L_x u) - L_t^{-1} (L_{9x} u) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde çözüm fonksiyonu bulunur. (4.4) denkleminde lineer olmayan terimler,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n, \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \sum_{n=0}^{\infty} J_n, \sum_{n=0}^{\infty} K_n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

şeklinde ifade edilir.

(4.2) denklemi (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{273} b k^2 (692 - 273 \tanh[\sqrt{b} k x]^2) - 45 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) - 45 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) - 210 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right) \\ & - 210 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_n \right) - 1575 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n \right) - 3150 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n \right) - 1260 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n \right) - 630 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n \right) \\ & - 9450 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} J_n \right) - 3150 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n \right) - 4725 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_n \right) - L_t^{-1} (L_{9x} u) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Buradaki çözüm (2.6) seri formunda bir çözüm olacağından (4.2) başlangıç şartı kullanılarak

$$u_0 = \frac{2}{273} b k^2 (692 - 273 \tanh[\sqrt{b} k x]^2),$$

şeklinde serinin ilk terimi bulunur. Daha sonra u_0 terimi kullanılarak, $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (4.5)$$

şeklinde olur. Serinin diğer terimlerini bulmak için (2.8) ile verilen indirgeme bağıntısına benzer şekilde $n \geq 0$ için,

$$u_{n+1}(x, t) = -45 L_t^{-1}(A_n) - 45 L_t^{-1}(B_n) - 210 L_t^{-1}(C_n) - 210 L_t^{-1}(D_n) - 1575 L_t^{-1}(E_n) - 3150 L_t^{-1}(F_n) \\ - 1260 L_t^{-1}(G_n) - 630 L_t^{-1}(H_n) - 9450 L_t^{-1}(J_n) - 3150 L_t^{-1}(K_n) - 4725 L_t^{-1}(M_n) - L_t^{-1}(L_{9x} u),$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. (4.4) denklemindeki lineer olmayan terimler seriye açılırsa,

$$A_0 = u_{0x} u_{0_{6x}},$$

$$A_1 = u_{0x} u_{1_{6x}} + u_{1x} u_{0_{6x}},$$

$$A_2 = u_{0x} u_{2_{6x}} + u_{1x} u_{1_{6x}} + u_{2x} u_{0_{6x}},$$

$$A_3 = u_{0x} u_{3_{6x}} + u_{1x} u_{2_{6x}} + u_{2x} u_{1_{6x}} + u_{3x} u_{0_{6x}},$$

⋮

$$B_0 = u_0 u_{0_{7x}},$$

$$B_1 = u_0 u_{1_{7x}} + u_1 u_{0_{7x}},$$

$$B_2 = u_0 u_{2_{7x}} + u_1 u_{1_{7x}} + u_2 u_{0_{7x}},$$

$$B_3 = u_0 u_{3_{7x}} + u_1 u_{2_{7x}} + u_2 u_{1_{7x}} + u_3 u_{0_{7x}},$$

⋮

$$C_0 = u_{0_{3x}} u_{0_{4x}},$$

$$C_1 = u_{0_{3x}} u_{1_{4x}} + u_{1_{3x}} u_{0_{4x}},$$

$$C_2 = u_{0_{3x}} u_{2_{4x}} + u_{1_{3x}} u_{1_{4x}} + u_{2_{3x}} u_{0_{4x}},$$

$$C_3 = u_{0_{3x}} u_{3_{4x}} + u_{1_{3x}} u_{2_{4x}} + u_{2_{3x}} u_{1_{4x}} + u_{3_{3x}} u_{0_{4x}},$$

⋮

$$D_0 = u_{0_{2x}} u_{0_{5x}},$$

$$D_1 = u_{0_{2x}} u_{1_{5x}} + u_{1_{2x}} u_{0_{5x}},$$

$$D_2 = u_{0_{2x}} u_{2_{5x}} + u_{1_{2x}} u_{1_{5x}} + u_{2_{2x}} u_{0_{5x}},$$

$$D_3 = u_{0_{2x}} u_{3_{5x}} + u_{1_{2x}} u_{2_{5x}} + u_{2_{2x}} u_{1_{5x}} + u_{3_{2x}} u_{0_{5x}},$$

$\vdots$

$$E_0 = u_{0_{2x}}^2 u_{0_x},$$

$$E_1 = u_{0_{2x}}^2 u_{1_x} + 2u_{1_{2x}} u_{0_{2x}} u_{0_x},$$

$$E_2 = u_{0_{2x}}^2 u_{2_x} + 2u_{1_{2x}} u_{0_{2x}} u_{1_x} + 2u_{2_{2x}} u_{0_{2x}} u_{0_x} + u_{1_{2x}}^2 u_{0_x},$$

$$E_3 = u_{0_{2x}}^2 u_{3_x} + 2u_{1_x} u_{0_x} u_{2_x} + 2u_{2_{2x}} u_{0_{2x}} u_{1_x} + 2u_{3_{2x}} u_{0_x} u_{0_x} + u_{1_{2x}}^2 u_{1_x} + 2u_{2_{2x}} u_{1_{2x}} u_{0_x},$$

$\vdots$

$$F_0 = u_0 u_{0_{2x}} u_{0_{3x}},$$

$$F_1 = u_0 u_{0_{2x}} u_{1_{3x}} + u_0 u_{1_{2x}} u_{0_{3x}} + u_1 u_{0_{2x}} u_{0_{3x}},$$

$$F_2 = u_0 u_{0_{2x}} u_{2_{3x}} + u_0 u_{1_{2x}} u_{1_{3x}} + u_1 u_{1_{2x}} u_{0_{3x}} + u_1 u_{0_{2x}} u_{1_{3x}} + u_0 u_{2_{2x}} u_{0_{3x}} + u_2 u_{0_{2x}} u_{0_{3x}},$$

$$F_3 = u_0 u_{0_{2x}} u_{3_{3x}} + u_0 u_{1_{2x}} u_{2_{3x}} + u_0 u_{2_{2x}} u_{1_{3x}} + u_0 u_{3_{2x}} u_{0_{3x}} + u_1 u_{0_{2x}} u_{2_{3x}} + u_1 u_{1_{2x}} u_{1_{3x}} \\ + u_1 u_{2_{2x}} u_{0_{3x}} + u_2 u_{0_{2x}} u_{1_{3x}} + u_2 u_{1_{2x}} u_{0_{3x}} + u_3 u_{0_{2x}} u_{0_{3x}},$$

$\vdots$

$$G_0 = u_0 u_{0_x} u_{0_{4x}},$$

$$G_1 = u_0 u_{0_x} u_{1_{4x}} + u_0 u_{1_x} u_{0_{4x}} + u_1 u_{0_x} u_{0_{4x}},$$

$$G_2 = u_0 u_{0_x} u_{2_{4x}} + u_0 u_{1_x} u_{1_{4x}} + u_1 u_{1_x} u_{0_{4x}} + u_1 u_{0_x} u_{1_{4x}} + u_0 u_{2_x} u_{0_{4x}} + u_2 u_{0_x} u_{0_{4x}},$$

$$G_3 = u_0 u_{0_x} u_{3_{4x}} + u_0 u_{1_x} u_{2_{4x}} + u_0 u_{2_x} u_{1_{4x}} + u_0 u_{3_x} u_{0_{4x}} + u_1 u_{0_x} u_{2_{4x}} + u_1 u_{1_x} u_{1_{4x}} \\ + u_1 u_{2_x} u_{0_{4x}} + u_2 u_{0_x} u_{1_{4x}} + u_2 u_{1_x} u_{0_{4x}} + u_3 u_{0_x} u_{0_{4x}},$$

$\vdots$

$$H_0 = u_0^2 u_{0_{5x}} ,$$

$$H_1 = u_0^2 u_{1_{5x}} + 2u_1 u_0 u_{0_{5x}} ,$$

$$H_2 = u_0^2 u_{2_{5x}} + 2u_1 u_0 u_{1_{5x}} + 2u_2 u_0 u_{0_{5x}} + u_1^2 u_{0_{5x}} ,$$

$$H_3 = u_0^2 u_{3_{5x}} + 2u_1 u_0 u_{2_{5x}} + 2u_2 u_0 u_{1_{5x}} + 2u_3 u_0 u_{0_{5x}} + u_1^2 u_{1_{5x}} + 2u_2 u_1 u_{0_{5x}} ,$$

⋮

$$J_0 = u_0^2 u_{0_x} u_{0_{2x}} ,$$

$$J_1 = u_0^2 u_{1_x} u_{0_{2x}} + 2u_1 u_0 u_{0_x} u_{0_{2x}} + u_0^2 u_{0_x} u_{1_{2x}} ,$$

$$J_2 = u_0^2 u_{2_x} u_{0_{2x}} + 2u_1 u_0 u_{1_x} u_{0_{2x}} + 2u_2 u_0 u_{0_x} u_{0_{2x}} + u_1^2 u_{0_x} u_{0_{2x}} \\ + u_0^2 u_{1_x} u_{1_{2x}} + 2u_1 u_0 u_{0_x} u_{1_{2x}} + u_0^2 u_{0_x} u_{2_{2x}} ,$$

$$J_3 = u_0^2 u_{3_x} u_{0_{2x}} + 2u_1 u_0 u_{2_x} u_{0_{2x}} + 2u_2 u_0 u_{1_x} u_{0_{2x}} + 2u_3 u_0 u_{0_x} u_{0_{2x}} + u_1^2 u_{1_x} u_{0_{2x}} + 2u_2 u_1 u_{0_x} u_{0_{2x}} + u_0^2 u_{2_x} u_{1_{2x}} \\ + 2u_1 u_0 u_{1_x} u_{1_{2x}} + 2u_2 u_0 u_{0_x} u_{1_{2x}} + u_1^2 u_{0_x} u_{1_{2x}} + u_0^2 u_{1_x} u_{2_{2x}} + 2u_1 u_0 u_{0_x} u_{2_{2x}} + u_0^2 u_{0_x} u_{3_{2x}} ,$$

⋮

$$K_0 = u_0^3 u_{0_{3x}} ,$$

$$K_1 = u_0^3 u_{1_{3x}} + 3u_0^2 u_1 u_{0_{3x}} ,$$

$$K_2 = u_0^3 u_{2_{3x}} + 3u_0^2 u_1 u_{1_{3x}} + 3u_0 u_1^2 u_{0_{3x}} + 3u_0^2 u_2 u_{0_{3x}} ,$$

$$K_3 = u_0^3 u_{3_{3x}} + u_1^3 u_{0_{3x}} + 3u_0^2 u_1 u_{2_{3x}} + 3u_0 u_1^2 u_{1_{3x}} + 3u_0^2 u_2 u_{1_{3x}} + 3u_0^2 u_3 u_{0_{3x}} + 6u_0 u_1 u_2 u_{0_{3x}} ,$$

⋮

$$M_0 = u_0^4 u_{0_x} ,$$

$$M_1 = u_0^4 u_{1_x} + 4u_0^3 u_1 u_{0_x} ,$$

$$M_2 = u_0^4 u_{2_x} + 6u_0^2 u_1^2 u_{0_x} + 4u_0^3 u_1 u_{1_x} ,$$

$$M_3 = u_0^4 u_{3x} + 6u_0^2 u_1^2 u_{1x} + 12u_0^2 u_1 u_2 u_{0x} + 4u_0^3 u_1 u_{2x} + 4u_0^3 u_2 u_{1x} + 4u_0^3 u_3 u_{03x} + 4u_1^3 u_0 u_{03x},$$

⋮

Adomian polinomları elde edilir.

Buradaki Adomian polinomları kullanılarak, $n \geq 0$ olmak üzere n değerleri için,

$$u_{n+1}(x, t) = -45 L_t^{-1}(A_n) - 45 L_t^{-1}(B_n) - 210 L_t^{-1}(C_n) - 210 L_t^{-1}(D_n) - 1575 L_t^{-1}(E_n) - 3150 L_t^{-1}(F_n) \\ - 1260 L_t^{-1}(G_n) - 630 L_t^{-1}(H_n) - 9450 L_t^{-1}(J_n) - 3150 L_t^{-1}(K_n) - 4725 L_t^{-1}(M_n) - L_t^{-1}(L_{9x} u),$$

denklemini Mathematica programı yardımıyla çözülürse;

$$u_0 = \frac{2}{273} b k^2 (692 - 273 \tanh[\sqrt{b} k x]^2)$$

$$u_1 = \frac{34796911758272 b^{\frac{11}{2}} i k^{11} t \sec h[\sqrt{b} k x]^2 \tanh[\sqrt{b} k x]}{9796423}$$

$$u_2 = \frac{151353133489121021320053248 b^{10} k^{20} t^2 (-2 + \cosh[2\sqrt{b} k x]) \sec h[\sqrt{b} k x]^4}{95969903594929}$$

$$u_3 = (9459570843070063832503328 b^{\frac{29}{2}} k^{29} t^3 \sec h[\sqrt{b} k x]^{13} (576118951475102 \sinh[\sqrt{b} k x] \\ + 240565607778742 \sinh[3\sqrt{b} k x] - 96560861247595 \sinh[5\sqrt{b} k x] \\ - 50253988942927 \sinh[7\sqrt{b} k x] - 4308691386269 \sinh[9\sqrt{b} k x] \\ + 543701746223 \sinh[11\sqrt{b} k x])) / 2820485312655435416901$$

⋮

bulunur.

Elde edilen u_0, u_1, u_2, u_3 terimleri (4.5) seri çözümünde yerlerine yazılırsa diferensiyel

denklemin çözümü,

$$u(x, t) = \frac{2}{273} b k^2 (692 - 273 \tanh[\sqrt{b} k x]^2) + \frac{34796911758272 b^{\frac{11}{2}} i k^{11} t \sec h[\sqrt{b} k x]^2 \tanh[\sqrt{b} k x]}{9796423}$$

$$+ \frac{151353133489121021320053248 b^{10} k^{20} t^2 (-2 + \cosh[2\sqrt{b} k x]) \sec h[\sqrt{b} k x]^4}{95969903594929}$$

$$+ (9459570843070063832503328 b^{\frac{29}{2}} k^{29} t^3 \sec h[\sqrt{b} k x]^{13} (576118951475102 \sinh[\sqrt{b} k x]$$

$$\begin{aligned}
& + 240565607778742 \sinh[3\sqrt{b}kx] - 96560861247595 \sinh[5\sqrt{b}] \\
& - 50253988942927 \sinh[7\sqrt{b}kx] - 4308691386269 \sinh[9\sqrt{b}kx] \\
& + 543701746223 \sinh[11\sqrt{b}kx]) / 2820485312655435416901 + \dots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilir.

4. 2. Homotopi Analiz Metodunun dmKdV denkleminde uygulanması

Deformasyon denklemi, $\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1 \text{ iken} \\ 1, & n > 1 \text{ iken} \end{cases}$, $H(x, t) = 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}[u_n(x, t) - \chi_n u_{n-1}(x, t)] = hH(x, t)R_n[\bar{u}_{n-1}(x, t)], \tag{4.7}$$

şeklinde dir. dmKdV denkleminde,

$$\begin{aligned}
R_n[\bar{u}_{n-1}(x, t)] &= \frac{\partial u_{n-1}(x, t)}{\partial t} + 45 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^6 u_{n-1-k}(x, t)}{\partial x^6} + 45 \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x, t) \frac{\partial^7 u_{n-1-k}(x, t)}{\partial x^7} \\
&+ 210 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^3 u_k(x, t)}{\partial x^3} \frac{\partial^4 u_{n-1-k}(x, t)}{\partial x^4} + 210 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^5 u_{n-1-k}(x, t)}{\partial x^5} \\
&+ 1575 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} \sum_{i=0}^{n-1-k} \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_{n-1-k-i}(x, t)}{\partial x^2} \right) + 3150 \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_k(x, t) \sum_{i=0}^{n-1-k} \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u_{n-1-k-i}(x, t)}{\partial x^3} \right) \\
&+ 1260 \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_k(x, t) \sum_{i=0}^{n-1-k} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^4 u_{n-1-k-i}(x, t)}{\partial x^4} \right) + 630 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial^5 u_k(x, t)}{\partial x^5} \sum_{i=0}^{n-1-k} u_i(x, t) u_{n-1-k-i}(x, t) \right) \tag{4.8} \\
&+ 9450 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} \sum_{i=0}^{n-1-k} \left(\frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} \sum_{j=0}^{n-1-k-i} u_j(x, t) u_{n-1-k-i-j}(x, t) \right) \right) \\
&+ 3150 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial^3 u_k(x, t)}{\partial x^3} \sum_{i=0}^{n-1-k} \left(u_i(x, t) \sum_{j=0}^{n-1-k-i} u_j(x, t) u_{n-1-k-i-j}(x, t) \right) \right) \\
&+ 4725 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} \sum_{i=0}^{n-1-k} \left(u_i(x, t) \sum_{j=0}^{n-1-k-i} \left(u_j(x, t) \sum_{t=0}^{n-1-k-i-j} u_t(x, t) u_{n-1-k-i-j-t}(x, t) \right) \right) \right) + \frac{\partial^9 u_{n-1}(x, t)}{\partial x^9}
\end{aligned}$$

yazılır. (4.7) denkleminde (4.8) denklemi ve u_0 başlangıç şartı kullanılarak,

$n = 1$ için;

$$\mathbb{L}[u_1] = hR_1[u_0]$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^t hR_1[u_0] dt \\ &= \int_0^t h[u_{0_t} + 45u_{0_x}u_{0_{6x}} + 45u_{0_t}u_{0_{7x}} + 210u_{0_{3x}}u_{0_{4x}} + 210u_{0_{2x}}u_{0_{5x}} + 1575u_{0_{2x}}^2u_{0_x} + 3150u_{0_t}u_{0_{2x}}u_{0_{3x}} \\ &\quad + 1260u_{0_x}u_{0_{4x}} + 630u_{0_t}^2u_{0_{5x}} + 9450u_{0_x}^2u_{0_{2x}} + 3150u_{0_t}^3u_{0_{3x}} + 4725u_{0_x}^4u_{0_x} + u_{0_{9x}}] dt \\ &= -\frac{34796911758272b^{\frac{11}{2}}hk^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^2 \tanh[\sqrt{b}kx]}{9796423} \end{aligned}$$

$n = 2$ için;

$$\mathbb{L}[u_2 - u_1] = hR_2[u_1]$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + \int_0^t hR_2[u_1] dt \\ &= \frac{1}{95969903594929} 17398455879136b^{\frac{11}{2}}hk^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^4 (-17398455879136b^{\frac{9}{2}}hk^9t \\ &\quad + 8699227939568b^{\frac{9}{2}}hk^9t \cosh[2\sqrt{b}kx] - 9796423(1+h) \sinh[2\sqrt{b}kx]) \end{aligned}$$

$n = 3$ için;

$$\mathbb{L}[u_3 - u_2] = hR_3[u_2]$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 + \int_0^t hR_3[u_2] \\ &= -\frac{h}{2820485312655435416901} (9459570843070063832503328b^{\frac{29}{2}}k^{29}t^3 \sec h[\sqrt{b}kx]^{13} \\ &\quad (576118951475102 \sinh[\sqrt{b}kx] + 240565607778742 \sinh[3\sqrt{b}kx] \\ &\quad - 96560861247595 \sinh[5\sqrt{b}kx] - 50253988942927 \sinh[7\sqrt{b}kx] \\ &\quad - 4308691386269 \sinh[9\sqrt{b}kx] + 543701746223 \sinh[11\sqrt{b}kx])) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece diferensiyel denklemin çözümü,

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{2}{273}bk^2(692-273\tanh[\sqrt{b}kx]^2) - \frac{34796911758272b^{\frac{11}{2}}hk^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^2 \tanh[\sqrt{b}kx]}{9796423} \\
& + \frac{1}{95969903594929}17398455879136b^{\frac{11}{2}}hk^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^4 (-17398455879136b^{\frac{9}{2}}hk^9t \\
& + 8699227939568b^{\frac{9}{2}}hk^9t \cosh[2\sqrt{b}kx] - 9796423(1+h) \sinh[2\sqrt{b}kx]) \\
& - \frac{h}{2820485312655435416901}(9459570843070063832503328b^{\frac{29}{2}}k^{29}t^3 \sec h[\sqrt{b}kx]^{13} \\
& (576118951475102\sinh[\sqrt{b}kx] + 240565607778742\sinh[3\sqrt{b}kx] \\
& - 96560861247595\sinh[5\sqrt{b}kx] - 50253988942927\sinh[7\sqrt{b}kx] \\
& - 4308691386269\sinh[9\sqrt{b}kx] + 543701746223\sinh[11\sqrt{b}kx])) + \dots
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir.

HAM ile elde edilen u_1 , u_2 , u_3 değerleri $h = -1$ için AAM ile elde edilen u_1 , u_2 , u_3 değerlerine eşittir.

4. 3. Homotopi Perturbasyon Metodunun dmKdV denklemine uygulanması

(4.1) denklemi (4.2) başlangıç şartı ile verilsin. (4.1) denklemi için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$\begin{aligned}
(1-p)[\dot{Y} - \dot{u}_0] + p[\dot{Y} + 45Y'Y^{(6)} + 45YY^{(7)} + 210Y'''Y^{(4)} + 210Y''Y^{(5)} + 1575Y'(Y'')^2 \\
+ 3150YY''Y''' + 1260YY'Y^{(4)} + 630Y^2Y^{(5)} + 9450Y^2Y'Y'' + 3150Y^3Y''' + 4725Y^4Y' + Y^{(9)}] = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Burada,

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad Y''' = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}, \quad Y^{(4)} = \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}, \quad \dots$$

şeklindedir.

(4.10) denklemi için $Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + \dots$ şeklinde bir çözüm aranıldığı kabul edilsin.

$$\begin{aligned}
Y &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \\
\dot{Y} &= \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \\
Y' &= Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \\
Y'' &= Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots \\
Y''' &= Y'''_0 + pY'''_1 + p^2Y'''_2 + p^3Y'''_3 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olmak üzere (4.11) eşitlikleri (4.10) denkleminde yerlerine yazılırsa, p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki şekilde ayrışım yapılabilir;

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{2}{273}bk^2(692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2) \\
p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 &= 0 \Rightarrow Y_0 = u_0 = \frac{2}{273}bk^2(692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2) \\
p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 &+ 45Y'_0Y_0^{(6)} + 45Y_0Y_0^{(7)} + 210Y_0'''Y_0^{(4)} + 210Y_0''Y_0^{(5)} + 1575Y'_0(Y_0'')^2 + 3150Y_0Y_0''Y_0''' \\
&+ 1260Y_0Y_0'Y_0^{(4)} + 630Y_0^2Y_0^{(5)} + 9450Y_0^2Y_0'Y_0'' + 3150Y_0^3Y_0''' + 4725Y_0^4Y_0' + Y_0^{(9)} = 0 \\
p^2 : \dot{Y}_2 &+ 45(Y_0'Y_1^{(6)} + Y_1'Y_0^{(6)}) + 45(Y_0Y_1^{(7)} + Y_1Y_0^{(7)}) + 210(Y_0'''Y_1^{(4)} + Y_1'''Y_0^{(4)}) \\
&+ 210(Y_0''Y_1^{(5)} + Y_1''Y_0^{(5)}) + 1575(Y_1'(Y_0'')^2 + 2Y_1''Y_0''Y_0') + 3150(Y_0Y_0''Y_1''' + Y_0Y_1''Y_0''' + Y_1Y_0''Y_0''') \\
&+ 1260(Y_0Y_0'Y_1^{(4)} + Y_0Y_1'Y_0^{(4)} + Y_1Y_0'Y_0^{(4)}) + 630(Y_0^2Y_1^{(5)} + 2Y_1Y_0Y_0^{(5)}) + 9450(Y_0^2Y_1'Y_0'' \\
&+ 2Y_1Y_0Y_0'Y_0'' + Y_0^2Y_0'Y_1'') + 3150(Y_0^3Y_1''' + 3Y_0^2Y_1Y_0''') + 4725(Y_0^4Y_1' + 4Y_0^3Y_1Y_0') + Y_1^{(9)} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu denklemler $u_0 = \frac{2}{273}bk^2(692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2)$ başlangıç şartı gözönünde bulundurularak Mathematica programı yardımıyla çözülürse, $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ terimleri,

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{2}{273}bk^2(692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2) \\
Y_1 &= \frac{34796911758272b^{\frac{11}{2}}ik^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^2 \tanh[\sqrt{b}kx]}{9796423} \\
Y_2 &= \frac{151353133489121021320053248b^{10}k^{20}t^2(-2 + \cosh[2\sqrt{b}kx]) \sec h[\sqrt{b}kx]^4}{95969903594929}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = & (9459570843070063832503328b^{\frac{29}{2}}k^{29}t^3 \sec h[\sqrt{b}kx]^{13} (576118951475102\sinh[\sqrt{b}kx] \\
& + 240565607778742\sinh[3\sqrt{b}kx] - 96560861247595\sinh[5\sqrt{b}kx] \\
& - 50253988942927\sinh[7\sqrt{b}kx] - 4308691386269\sinh[9\sqrt{b}kx] \\
& + 543701746223\sinh[11\sqrt{b}kx]))/2820485312655435416901 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece bu değerler,

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} p^k Y_k$$

eşitliğinde kullanılırsa,

$$u(x, t) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{2}{273}bk^2(692 - 273 \tanh[\sqrt{b}kx]^2) + \frac{34796911758272b^{\frac{11}{2}}ik^{11}t \sec h[\sqrt{b}kx]^2 \tanh[\sqrt{b}kx]}{9796423} \\
& + \frac{151353133489121021320053248b^{10}k^{20}t^2(-2 + \cosh[2\sqrt{b}kx]) \sec h[\sqrt{b}kx]^4}{95969903594929} \\
& + (9459570843070063832503328b^{\frac{29}{2}}k^{29}t^3 \sec h[\sqrt{b}kx]^{13} (576118951475102\sinh[\sqrt{b}kx] \\
& + 240565607778742 \sinh[3\sqrt{b}kx] - 96560861247595 \sinh[5\sqrt{b}kx] \\
& - 50253988942927 \sinh[7\sqrt{b}kx] - 4308691386269 \sinh[9\sqrt{b}kx] \\
& + 543701746223 \sinh[11\sqrt{b}kx]))/2820485312655435416901 + \dots
\end{aligned} \tag{4.12}$$

çözümü elde edilir.

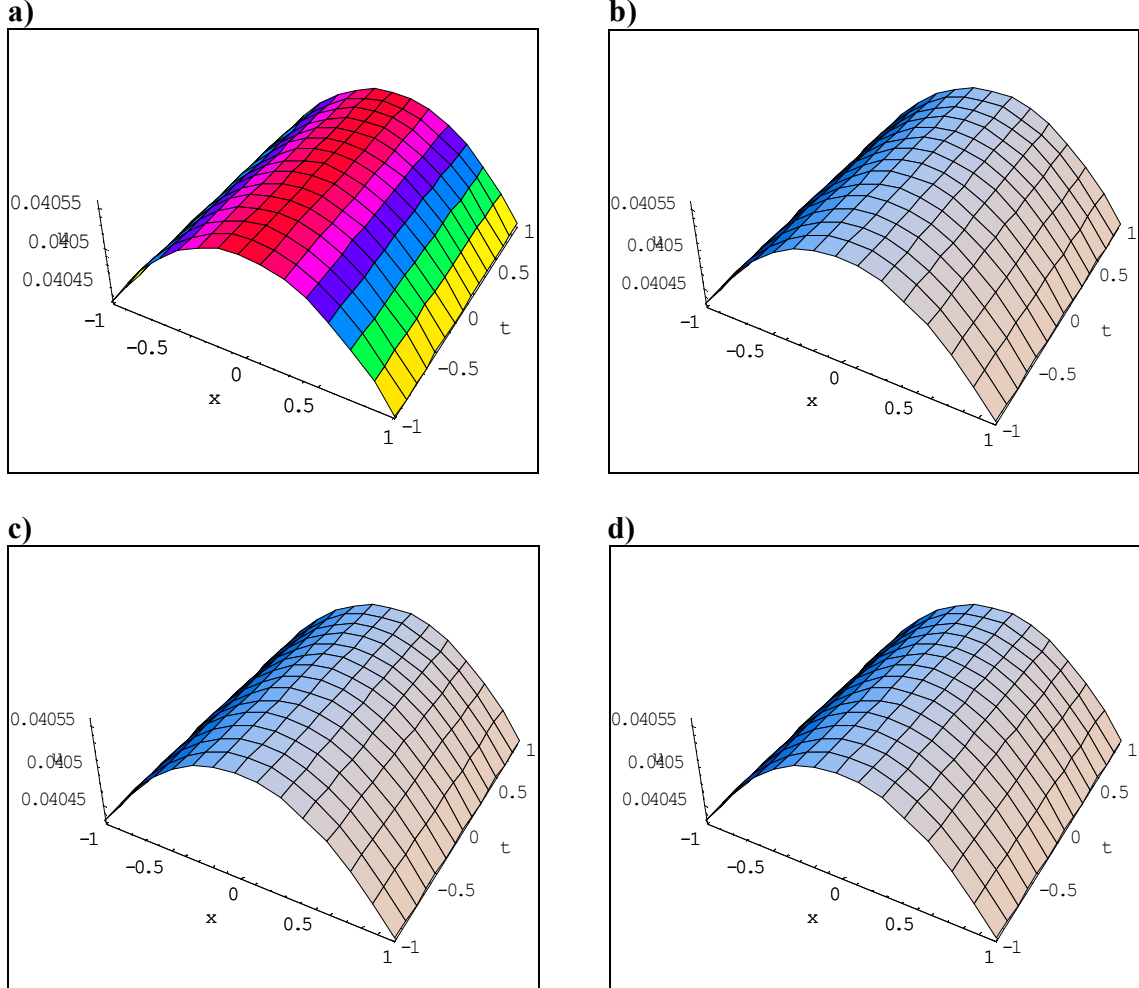
5. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLARIN SAYISAL SONUÇLARININ ANALİZİ

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri lineer denklemlere göre daha zordur. Bu nedenle ikinci bölümde bahsedilen bazı sayısal metotlar vardır. Bu metotlar yarı analitik metotlar olarak ta bilinirler. Bu metotlarda çözümler seri formunda aranıp, verilen bir başlangıç şartından hareketle serinin diğer terimlerini bulma esasına dayanır. Bu sayısal metotların yakınsaklık analizi teorik olarak yapılabileceği gibi, problemin gerçek çözümü ile elde edilen sayısal sonuçların arasındaki farkın mutlak değerine bakılarak ta yapılabilir.

Bu bölümde dmKdV denkleminin, AAM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlarının analizi amacıyla üç boyutlu görünümü verilmiş, bu sayısal çözümlerin analitik çözüm ile arasındaki mutlak hata değerleri tablolar üzerinde gösterilmiş ve grafikler yardımıyla yaklaşık çözümlerin analitik çözüme ne kadar yaklaşım sağladığı vurgulanmıştır. Ayrıca HAM’nda kullanılan ve elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynayan keyfi h parametresinin grafiği çizilerek belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisindeki hangi noktalarda en iyi yaklaşımın sağlandığı tablolarda gösterilmiştir.

dmKdV denkleminin analitik çözümü $u(x,t)$ olmak üzere, AAM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serisi $\Phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x,t)$, $n \geq 1$ şeklinde ifade edilmektedir.

5. 1. Sayısal Sonuçların İrdelenmesi



Şekil 1. dmKdV denkleminin analitik çözümü ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü **a)** dmKdV denkleminin analitik çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü, **b)** dmKdV denkleminin AAM ile hesaplanan (4.6) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü, **c)** dmKdV denkleminin HAM ile hesaplanan (4.9) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü ($h = -1$), **d)** dmKdV denkleminin HPM ile hesaplanan (4.12) yaklaşık çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü ($b = 0.2, k = 0.2$)

Şekil 1 de, (4.1) ve (4.2) eşitlikleri ile verilen dmKdV denkleminin AAM, HAM ve HPM ile elde edilen sayısal sonuçları verilmiştir. AAM ve HPM ile hesaplanan çözümlerin aynı olduğu (4.6) ve (4.12) ayrışım serisinin terimlerinden görülebilir. Ayrıca HAM ile elde edilen (4.9) ayrışım serisinin terimlerinin $h = -1$ olması durumunda AAM ve HPM ile elde edilen çözümlerle aynı olduğu görülmektedir.

Tablo 1. dmKdV denkleminin AAM ile hesaplanan (4.6) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2$)

$ u(x,t) - \Phi_4(x,t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		2.08137×10^{-17}	1.45717×10^{-16}	4.92661×10^{-16}	1.16573×10^{-15}	2.27596×10^{-15}
0.2		3.46945×10^{-17}	2.91434×10^{-16}	9.71445×10^{-16}	2.32453×10^{-15}	4.53804×10^{-15}
0.3		5.55112×10^{-17}	4.30211×10^{-16}	1.46411×10^{-16}	3.48332×10^{-15}	6.79318×10^{-15}
0.4		6.93889×10^{-17}	5.82867×10^{-16}	1.94983×10^{-16}	4.6213×10^{-15}	9.0275×10^{-15}
0.5		9.71445×10^{-17}	7.07767×10^{-16}	2.42861×10^{-16}	5.75234×10^{-15}	1.12341×10^{-15}

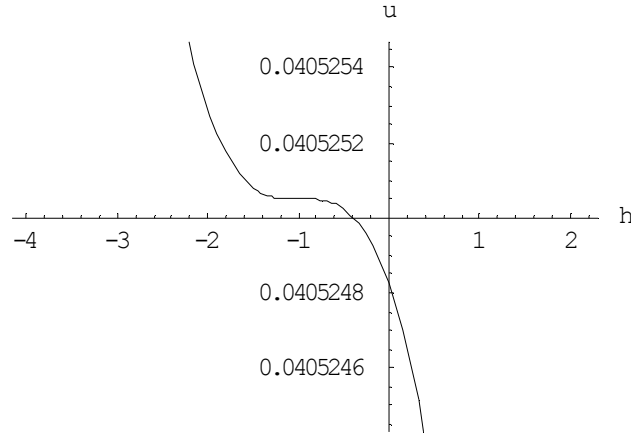
Tablo 2. dmKdV denkleminin HAM ile hesaplanan (4.9) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2, h = -1$)

$ u(x,t) - \Phi_4(x,t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		2.08137×10^{-17}	1.45717×10^{-16}	4.92661×10^{-16}	1.16573×10^{-15}	2.27596×10^{-15}
0.2		3.46945×10^{-17}	2.91434×10^{-16}	9.71445×10^{-16}	2.32453×10^{-15}	4.53804×10^{-15}
0.3		5.55112×10^{-17}	4.30211×10^{-16}	1.46411×10^{-16}	3.48332×10^{-15}	6.79318×10^{-15}
0.4		6.93889×10^{-17}	5.82867×10^{-16}	1.94983×10^{-16}	4.6213×10^{-15}	9.0275×10^{-15}
0.5		9.71445×10^{-17}	7.07767×10^{-16}	2.42861×10^{-16}	5.75234×10^{-15}	1.12341×10^{-15}

Tablo 3. dmKdV denkleminin HPM ile hesaplanan (4.12) yaklaşık çözümünün mutlak hatası ($b = 0.2, k = 0.2$)

$ u(x,t) - \Phi_4(x,t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		2.08137×10^{-17}	1.45717×10^{-16}	4.92661×10^{-16}	1.16573×10^{-15}	2.27596×10^{-15}
0.2		3.46945×10^{-17}	2.91434×10^{-16}	9.71445×10^{-16}	2.32453×10^{-15}	4.53804×10^{-15}
0.3		5.55112×10^{-17}	4.30211×10^{-16}	1.46411×10^{-16}	3.48332×10^{-15}	6.79318×10^{-15}
0.4		6.93889×10^{-17}	5.82867×10^{-16}	1.94983×10^{-16}	4.6213×10^{-15}	9.0275×10^{-15}
0.5		9.71445×10^{-17}	7.07767×10^{-16}	2.42861×10^{-16}	5.75234×10^{-15}	1.12341×10^{-15}

Tablo 1-3 de, dmKdV denkleminin için elde edilen yaklaşık çözümlerinin analitik çözüme hızlı bir şekilde yakınsadığı görülmektedir. Bu sayısal sonuçlar sadece beş terimde bile $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ yüksek hassasiyetle yaklaşım sağlar. Eğer serinin terimleri arttırılırsa daha iyi sonuçlar alınabilir.



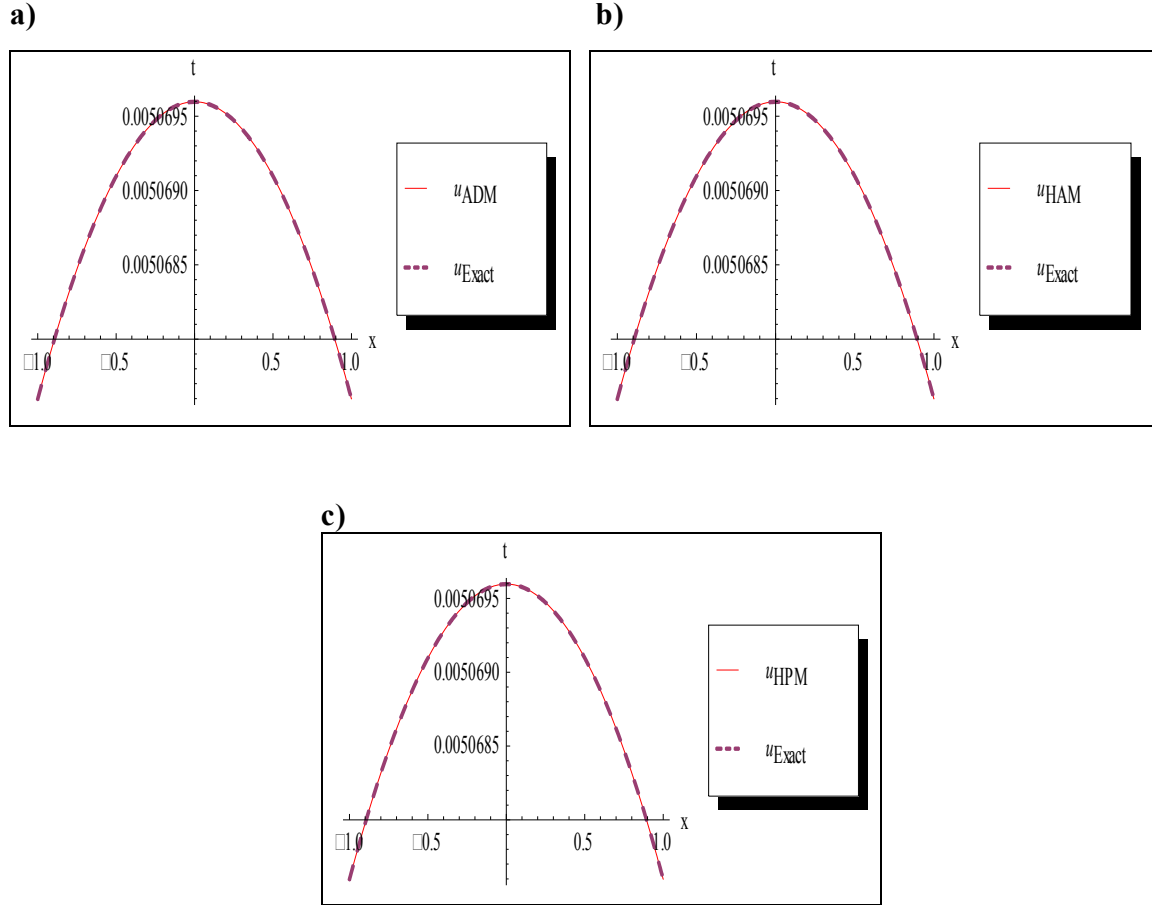
Şekil 2. dmKdV denkleminin HAM ile hesaplanan $\Phi_4(x, t)$ yaklaşık çözüm serisi için h eğrisinin grafiği

Tablo 4. h keyfi parametresinin çözümün yakınsaklık aralığındaki farklı değerleri için dmKdV denkleminin HAM ile hesaplanan (4.12) yaklaşık çözümünün $u(x, t)$ analitik çözümüne göre mutlak hatası ($x = 0.5, b = 0.2, k = 0.2$)

t	h	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.6
0.1		3.23693×10^{-9}	4.30082×10^{-10}	2.27596×10^{-15}	3.28447×10^{-10}	2.8304×10^{-9}
0.2		6.21498×10^{-9}	8.0253×10^{-10}	4.53804×10^{-15}	7.00807×10^{-10}	5.80811×10^{-9}
0.3		9.18964×10^{-9}	1.17468×10^{-9}	6.79318×10^{-15}	1.07282×10^{-9}	8.78222×10^{-9}
0.4		1.2159×10^{-8}	1.54629×10^{-9}	9.0275×10^{-15}	1.44423×10^{-9}	1.17508×10^{-8}
0.5		1.51212×10^{-8}	1.91713×10^{-9}	1.12341×10^{-15}	1.81482×10^{-9}	1.4712×10^{-8}

Şekil 2 de görüldüğü gibi HAM ile elde edilen seri çözümlerde gerçek çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak için keyfi h parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.4 \leq h \leq -0.6$ bulunmuştur. Tablo 4 de bu aralık içerisinde h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği hesaplanmış ve gerçek çözüme en iyi yakınsamanın $h = -1$ değerinde olduğu görülmüştür. Keyfi h

parametresinin bu şekilde seçilebilmesi HAM'nin bir avantajı olarak görülebilir. Bu tespitten hareketle dmKdV denkleminin HAM ile bulunan seri çözümlerinde $h = -1$ seçilmesi ile Tablo 2 den görüldüğü gibi AAM ve HPM'nin aslında HAM'nin özel bir durumu olduğu söylenebilir. Bu durum [34,35] çalışmalarında da gösterilmiştir.



Şekil 3. dmKdV denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümü ile AAM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 3 de görüldüğü gibi dmKdV denklemi için elde edilen yaklaşık çözümler analitik çözüme hızlı bir şekilde yakınsamaktadır. Bu sayısal sonuçlar sadece beş terimde bile yüksek hassasiyette yaklaşım sağlar. Eğer serinin terimleri arttırılırsa daha iyi sonuçlar alınabilir.

6. SONUÇ

Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellenmesi genellikle lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemler ile açıklanır. Bu gibi denklemlerin doğası hakkında bilgi veren analitik çözümler büyük bir öneme sahiptir. Bazen analitik çözümler elde edilemeyebilir. Bu durumda bilim adamları yarı analitik metotlar tasarlamıştır. Bu çalışmada da kullanılan AAM, HAM, HPM gibi yarı analitik metotlar başlangıç şartı altında serinin diğer terimlerini bularak seri çözüme ulaşma esasına dayanır.

Lineer olmayan denklemlerin sayısal çözümü yapılırken HPM'nun AAM gibi özel algoritmalar ve karmaşık hesaplamalar gerektirmediği görülmektedir. Bu durum, daha karmaşık lineer olmayan terimler içeren denklemlerin çözümünde HPM'nun bir avantajı olarak görülebilir.

HAM kullanılarak yapılan seri çözümlerde keyfi bir h parametresi ve keyfi bir $H(x,t)$ fonksiyonu kullanılır. h parametresinin grafiği çizilerek grafikte yatay doğrunun içinde bulunduğu h aralığı seri çözümün yakınsaklık aralığı olarak alınıp bu aralık içerisinde h parametresine değerler verilerek gerçek çözüme en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği hesaplanır. Keyfi h parametresinin bu şekilde seçilebilmesi HAM için bir avantaj olarak görülebilir. Bu tespitten hareketle dmKdV denkleminin HAM ile bulunan seri çözümlerinde $h = -1$ seçilmesi ile Tablo 2 den görüldüğü gibi AAM ve HPM'nun aslında HAM'nun özel bir durumu olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Duchateau, P. and Zachmann, D. W.**, 1986. Shaum's Outline of Theory and Problems of Partial Differential Equations, McGraw-Hill Companies.
- [2] **Cerit, C.**, 1997. Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri), Beta Basım Yayınevi.
- [3] **Duchateau, P. and Zachmann, D. W.**, 1986. Partial Differential Equations, McGraw Hill, Shaum's Outline Series.
- [4] **Gustafson, K. E.**, 1999. Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods, Dover Publications, Inc, Mineola.
- [5] **Dennemeyer, R.**, 1968. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems. New York; McGraw-Hill.
- [6] **Hutson, V. and Pym, J.**, 1980. Applications of Functional Analysis and Operator Theory, Acad. Press, London, New York.
- [7] **Silverman, R. A.**, 1985. Calculus with Analytic Geometry, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [8] **Franklin, P.**, 1964. Functions of Complex Analysis, Sir Isaac Pitman-Sons Ltd.
- [9] **Adomian, G.**, 1990. A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, *Mathematical and Computer Modelling*, **13**, 17-43.
- [10] **Cherruault, Y.**, 1989. Convergence of Adomian's Method, *Kybernetes*, **18**, 31-38.
- [11] **Adomian, G.**, 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [12] **Adomian, G.**, 1998. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **135**, 501-544.
- [13] **Yan, Z.**, 2003. Integrability for Two Types of (2+1)-Dimensional Generalized Sharma-Tasso-Olver Integro-Differential Equations, *Academia Sinica*, Beijing, **22**, 302-324.
- [14] **Kaya, D.**, 2000. A New Approach to Telegraph Equation: An Application of the Decomposition Method, *Inst. Math. Academia Sinica*, **28(1)**, 51-57.
- [15] **Kaya, D.**, 2005. An Implementation of the ADM for Generalized One Dimensional Klein-Gordon Equation, *Applied Mathematics and Computation*, **166**, 426-433.

- [16] **Liao, S. J.**, 2003. The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems, PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [17] **Liao, S. J.**, 2003. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Boca Raton: Chapman Hall CRC/Press.
- [18] **Wang, Z., Zou, L. and Zhang, H.**, 2007. Applying Homotopy Analysis Method for Solving Differential-Difference Equation, *Physics Letters A*, **369**, 77-84.
- [19] **Abbasbandy, S.**, 2006. The Application of Homotopy Analysis Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer, *Physics Letters A*, **360**, 109-113.
- [20] **Motsa, S. S., Sibanda, P. and Shateyi, S.**, 2009. A New Spectral-Homotopy Analysis Method for Solving A Nonlinear Second Order BVP, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 2293-2302.
- [21] **He, J. H.**, 1999. Homotopy-Perturbation Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257-262.
- [22] **He, J. H.**, 2006. Perturbation Methods: Basic and Beyond, Elsevier, Amsterdam.
- [23] **Sadighi, A. and Ganji, D. D.**, 2007. Exact Solutions of Laplace Equation by Homotopy-Perturbation and Adomian Decomposition Methods, *Physics Letter A*, **367**, 83-87.
- [24] **Olayiwola, M. O., Gbolagade, A. W., Adesanya, A. O. and Akinpelu, F. O.**, 2009. Application of Homotopy Perturbation Method for the Large Angle Period of Nonlinear Oscillator, *Researcher*, **1(1)**, 1-5.
- [25] **Momani, S. and Shawagfeh, N.**, 2006. Decomposition Method for Solving Fractional Riccati Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, **182(2)**, 1083-1092.
- [26] **Shawagfeh, N. T.**, 2002. Analytical Approximate Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, **131(2-3)**, 517-529.
- [27] **Cherruault, Y. and Adomian, G.**, 1993. Decomposition Methods: A New Proof of Convergence, *Mathematical and Computer Modelling*, **18**, 103-106.
- [28] **Lensic, D.**, 2002. Convergence of Adomian's Decomposition Method: Periodic Temperatures, *Computers Mathematics with Applications*, **44(1-2)**, 13-24.
- [29] **Golberg, M. A.**, 1999. A Note on the Decomposition Method for Operator Equations, *Applied Mathematics and Computation*, **106(2-3)**, 215-220.

- [30] **Allan, F. M.**, 2007. Derivation of the Adomian Decomposition Method Using the Homotopy Analysis Method, *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 6-14.
- [31] **Inan, I. E., Uğurlu, Y. and Duran, S.**, 2010. Complex Solutions for Ninth-Order Korteweg-de Vries (nKdv) Equation and 2-dimensional Burgers Equation, *Turkish Journal of Science & Technology*, **5(1)**, 37-42.
- [32] **Wazwaz, A. M.**, 2008. Multiple-Soliton Solutions for the Ninth-Order KdV Equation and Sixth-Order Boussinesq Equation, *Applied Mathematics and Computation*, **203**, 277-283.
- [33] **Wazwaz, A. M.**, 2008. Erratum to: "Multiple-Soliton Solutions for the Ninth-Order KdV Equation and Sixth-Order Boussinesq Equation", *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 1005.
- [34] **Liang, S. and Jeffrey, D. J.**, 2009. Comparison of Homotopy Analysis Method and Homotopy Perturbation Method Through an Evolution Equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 4057-4064.
- [35] **Ellahi, R., Abbasbandy, S., Hayat, T. and Zeeshan, A.**, 2009. On Comparison of Series and Numerical Solutions for Second Painleve Equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Wiley Periodicals, Inc., A Wiley Company.
- [36] **Kaya, D.**, 2006. The Exact and Numerical Solitary-Wave Solutions for Generalized Modified Boussinesq Equation, *Physics Letter A*, **348**, 244-250.
- [37] **Adomian, G. and Rach, R.**, 1990. Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, **19**, 9-12.
- [38] **Inc, M. and Uğurlu, Y.**, 2007. Numerical Simulation of the Regularized Long Wave Equation by He's Homotopy Perturbation Method, *Physics Letters A*, **369**, 173-179.
- [39] **Inan, I. E. and Kaya, D.**, 2007. Exact Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations, *Physica A*, **381**, 104-115.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2007 yılında Kovancılar Lisesine Matematik öğretmeni olarak atandım. 2008 yılı Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında tezli yüksek lisansa başladım. Halen Kovancılar Lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.