

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**EN YÜKSEK m SKORUN
KARAKTERİZASYONU VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE İLİŞKİSİ**

Olgun ÖZDEMİR

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Halil TANIL

İstatistik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 406.02.01

Sunuş Tarihi : 19.08.2010

Bornova-İZMİR

2010

Olgun ÖZDEMİR tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “En Yüksek *m* Skorun Karakterizasyonu ve Genelleştirilmiş Sıra İstatistikleri ile İlişkisi” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 19.08.2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Prof. Dr. Nilgün MORALI
Raportör Üye:	: Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Sevcan DEMİR ATALAY

ÖZET

EN YÜKSEK m SKORUN KARAKTERİZASYONU VE GENELLEŞTİRİLMİŞ SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE İLİŞKİSİ

ÖZDEMİR, Olgun

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd.Doç.Dr. Halil TANIL

Ağustos 2010, 56 sayfa

Sıralanmış rasgele değişkenler kavramı kullanılarak en yüksek m skorun birleşik ve marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları daha önce elde edilmiştir.

Bu çalışmada, en yüksek m skorun dağılım fonksiyonları, momentleri ve karakteristik fonksiyonlarını içeren bir yapı fonksiyonu ortaya konulmuş, ayrıca, sıra istatistiklerinin momentleri, dağılım fonksiyonları ve karakteristik fonksiyonlarının yeni yineleme bağıntıları ile birlikte en yüksek m skorun çarpım momentleri elde edilmiştir.

Bunlara ek olarak, en yüksek m skorun; sıra istatistikleri, rekor değerler, k -rekorlar gibi sıralanmış rasgele değişken modellerini içeren genelleştirilmiş sıra istatistikleri ile ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: En yüksek m skor, genelleştirilmiş sıra istatistikleri, yineleme bağıntıları, karakteristik fonksiyonlar, Meijer'in G-fonksiyonu, momentler, rekor modeller, sıra istatistikleri

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF TOP m SCORES

AND THEIR RELATION

WITH GENERALIZED ORDER STATISTICS

ÖZDEMİR, Olgun

MSc in Statistics

Supervisor: Dr. Halil TANIL

August 2010, 56 pages

Using the concept of ordered random variables the joint and marginal probability density functions of top m scores have been derived previously.

In this study, a structure function containing distribution functions, moments and characteristic functions of top m scores is revealed; also, new recurrence relations of the moments, distribution functions and characteristic functions of ordinary order statistics, with the product moments of top m scores are obtained.

In addition, the relations between top m scores and generalized order statistics which include the models of ordered random variables such as ordinary order statistics, record values and k -records are investigated.

Keywords: Top m scores, generalized order statistics, recurrence relations, characteristic functions, Meijer's G-function, moments, record models, ordinary order statistics

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince, benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, beni motive eden ve yönlendiren, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Halil TANIL'a sonsuz saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca, beni yetiştiren, eğitim hayatım boyunca beni destekleyen ve her zaman yanımda olan Annem Özten ÖZDEMİR ve babam Kemal ÖZDEMİR'e, ve bu çalışma süresince bana destek olan ablam Leyla ÖZDEMİR'e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. SIRALANMIŞ RASGELE DEĞİŞKENLERE İLİŞKİN MODELLER	6
2.1 Sıra İstatistikleri	6
2.2 Rekor Değerler	9
2.3 k -Rekorlar	10
2.4 Genelleştirilmiş Sıra İstatistikleri	12
2.4.1 Marjinal ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları	13
2.4.2 Marjinal dağılım fonksiyonu	15
2.4.3 Momentler	18
2.4.4 Alt modeller	20

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
2.5 En Yüksek m Skor	22
3. EN YÜKSEK m SKORUN DAĞILIM FONKSİYONU, α . MOMENTİ VE KARAKTERİSTİK FONKSİYONU	26
4. EN YÜKSEK m SKORUN ÇARPIM MOMENTLERİ	32
5. EN YÜKSEK m SKORUN GENELLEŞTİRİLMİŞ SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE İLİŞKİSİ	40
6. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA	43
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
N	Doğal sayılar kümesi
N^+	Pozitif doğal sayılar kümesi
\Re	Reel sayılar kümesi
$\stackrel{d}{=}$	Dağılım olarak eşit
$f(x)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x)$	Dağılım fonksiyonu
$\overline{F}(x)$	$1 - F(x)$
Γ	Gama fonksiyonu
$B(a, b)$	Beta fonksiyonu
$I_p(a, b)$	Tamamlanmamış beta fonksiyonu
<u>Kısaltmalar</u>	
i.i.d.	Independent and identically distributed (Bağımsız ve aynı dağılımlı)
vd..	Ve diğerleri

1. GİRİŞ

Sıralanmış rasgele değişkenler teorisi, istatistiğin birçok alanında ve uygulamasında önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda sıralanmış istatistiksel verilerle ilgili çeşitli konularda birçok çalışma yapılmakta ve sıralanmış rasgele değişkenler teorisine artan ilgiyle beraber bu alanda hızlı bir gelişme sağlanmaktadır.

Güvenilirlik analizi (reliability analysis), sağ kalım analizi (survival analysis), yaşam süresi analizi (life-time analysis), şok modelleri (shock models), finansal ekonomi (financial economics) gibi istatistiksel uygulama alanlarına ve farklı gösterimlere sahip çeşitli sıralanmış rasgele değişken modelleri vardır. Örnek olarak, sıra istatistikleri (ordinary order statistics), II. tür ilerleyen sansürlenmiş sıra istatistikleri (progressively type II censored order statistics), rekor değerler (record values) verilebilir.

Sıralanmış verilerin kullanımının önemli olduğu birçok alanda sıra istatistikleri geniş uygulama alanına sahiptir. Sıra istatistikleri, yeterli istatistikler olma özellikleri sayesinde, istatistiksel çıkarımlarda, tahmin teorisinde, hipotez testlerinde, parametrik olmayan aralık tahmininde, ayrıca, mukavemet testleri (testing of strength of materials), yaşam analizi (life-time studies), güvenilirlik analizi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde, sıra istatistiklerinin (ordinary order statistics), ağırlıklı olarak momentlerine ilişkin pek çok çalışma bulunmakla birlikte, dağılım fonksiyonları ve karakteristik fonksiyonlarına ilişkin de çalışmalar bulunmaktadır. Joshi (1973), sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonları arasındaki yineleme bağıntılarının (recurrence relations) yanında, sıra istatistiklerinin tekli momentlerinin ve karakteristik fonksiyonlarının yineleme bağıntılarını da içeren özellikler vermiştir. Khan vd.. (1983), herhangi bir dağılımı ele almadan, sıra istatistiklerinin tekli momentlerinin bulunabileceği genel sonuçlar vermiş ve bu sonuçları kullanarak bazı dağılımlar için yineleme bağıntıları elde etmişlerdir. Balakrishnan ve Malik (1986), lineer-üstel dağılım için, sıra istatistiklerinin çarpım momentlerinin açık bir ifadesini elde etmiş, ayrıca sıra istatistiklerinin

tekli ve çarpım momentleri için yineleme bağıntıları elde etmişlerdir. Lin (1988), sıra istatistiklerinin iki farklı momenti arasında lineer ilişkiler tanımlayarak, bunları bazı dağılımlar için karakterize etmiştir. Kamps (1991), bazı dağılımları içeren dağılım fonksiyonu sınıfı için sıra istatistiklerinin momentleri arasında genel bir yineleme bağıntısı elde etmiştir. Thomas ve Samuel (1996), ilk olarak Joshi ve Balakrishnan'ın (1982) ortaya koymuş olduğu, sıra istatistiklerinin çarpım momentleri arasındaki önemli bir yineleme bağıntısının, bazı belirli durumları için daha açık ve basit formda ifadeler elde etmişlerdir. Saran ve Pushkarna (1998), sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonlarının ve momentlerinin lineer bağıntılarını içeren özellikler elde etmişlerdir. Yine Samuel ve Thomas (2000), Joshi ve Balakrishnan'ın (1982) yineleme bağıntısının daha geliştirilmiş alternatif bir halini türetmişlerdir. Özellikle, birçok araştırmacı, momentlerin hesaplanması için gereken birbirinden bağımsız işlem sayısının azaltılması amacıyla sıra istatistiklerinin momentleri arasındaki yineleme bağıntılarıyla ilgilenmişlerdir. Bunlar arasında, Cole (1951), Srikantan (1962), Govindarajulu (1963), Krishnaiah ve Rizvi (1966), Joshi ve Balakrishnan (1982), Malik vd.. (1988), Arnold vd.. (1992) verilebilir.

Sıra istatistikleri teorisindeki gelişmeler, sıralanmış bir veri dizisinde birbirini izleyen uç değerler olan rekor değerler (record values) üzerine yapılan çalışmaların artmasını sağlamıştır. Rekor değerler ve rekor değerlere dayalı birçok istatistik, meteorolojik analiz (meteorological analysis), hidroloji (hydrology), madencilik (mining), güvenilirlik analizi, spor, ekonomi, doğal afetlerin tahmini, stres testi (stress testing) gibi alanlarda ve belirli bir ürün parçasının ya da bir ürünün yaşam süresi ile ilgili problemlerde önemli olmaktadır. Rekor değerler ve özellikleri literatürde geniş bir şekilde çalışılmıştır. Matematiksel teorisi Chandler (1952) tarafından başlatılan rekor değerlerin, dağılım teorisi ve çeşitli özellikleri hakkında, Glick (1978), Galambos (1978), Nevzorov (1987), Nagaraja (1988), Balakrishnan ve Nevzorov (1998), Arnold vd.. (1998, 2008), Nevzorov (2001), Ahsanullah ve Nevzorov (2001), Ahsanullah (2004) tarafından kapsamlı incelemeler yapılmıştır. Son yıllarda rekor değerler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar daha çok, çeşitli yaşam süresi (life-time) verileri ve rekor değerlere dayalı istatistiksel

çıkarsama üzerine yapılmıştır. Örneğin, Bairamov (1997), üst rekor değerlere ilişkin aşan istatistikleri ele almış ve tekdüze dağılım için karakterizasyona yer vermiştir. Bairamov ve Eryılmaz (2000), rekor eşik modellerini ele alarak, bazı aşan istatistiklerin kesin ve asimptotik dağılımlarını elde etmişlerdir. Bairamov ve Eryılmaz (2001), rekor değerlere ilişkin invaryant güven aralıklarına ait bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Bairamov ve Kotz (2001), keyfi bir dağılım için rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin dağılımını incelemiştir. Ahmadi ve Balakrishnan (2004), rekorlar ve rekor aralığına dayalı kuantiller ve kuantil aralıkları için parametrik olmayan güven aralıkları elde etmişlerdir. Bairamov vd.. (2005), bir rekor değer için ortak değişken olan bitişik rekor değerleriyle fonksiyonunun regresyonunu üstel dağılım için karakterize etmişlerdir. Ahmadi ve Doostparast (2006), üst rekor değerlere dayalı iki parametrelili bazı yaşam dağılımları için Bayesgil çıkarımlar elde etmişlerdir. Bairamov ve Stepanov (2006), zayıf rekor değerlerin büyük sapmaları için limit teoremi vermişlerdir. Sultan (2007), modifiye Weibull ve log-gamma dağılımlarından gelen rekor değerlerin tekli ve çarpım momentlerine ait yineleme bağıntıları vermiştir. Raqab vd.. (2007), Pareto dağılımından gelen rekor değerlere dayalı Bayesgil çıkarım üzerine çalışmışlardır. Wu ve Tseng (2007), ilk n adet üst rekor değere bağlı olarak Weibull dağılımının şekil parametresine ilişkin güven aralıkları vermişlerdir. Bairamov ve Khan (2007), keyfi bir dağılım için, yakınsama oranlarıyla birlikte rekor değerlere dayalı aşan istatistiklerin kesin ve limit dağılımlarını elde etmişlerdir. Baklizi (2008), mevcut verinin rekor değerler formunda olması durumunda, stres-mukavemet güvenilirliğinin tahmini problemini ele almıştır. Khan ve Zia (2009), Gompertz dağılımından gelen üst rekor değerlerin tekli ve çarpım momentlerine ilişkin yineleme bağıntıları, ve rekor değerlerin koşullu beklenen değerlerini kullanarak bu dağılım için karakterizasyon elde etmişlerdir. Ayrıca, rekor istatistikleri (record statistics) kullanılarak çeşitli uygulama alanlarında, Devroye (1988), Dargahi-Noubary (1990), Kamps (1994), Pfeifer (1997), Sibuya ve Nishimura (1997), Munasinghe vd.. (2001), Vogel vd.. (2001), Barlevy (2003), Benestad (2004), Madi ve Raqab (2004), Barlevy (2005), Jain ve Krug (2005), Redner ve Petersen (2006), Soliman vd.. (2006), Gembris vd.. (2007), Madi ve Raqab (2007),

Davidson vd.. (2008), Pisarenko ve Rodkin (2008), Majumdar ve Ziff (2008), Kundu vd.. (2009) tarafından bazı çalışmalar yapılmıştır.

Rekor değerlerin kendileri değil de ikinci veya üçüncü gibi ardışık k 'inci en büyük değerler ile ilgileniliyorsa bu durumda, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, Dziubdziela ve Kopociński (1976) tarafından ileri sürülen k -rekorlar (k -records) modelinin kullanılması uygun olmaktadır. Literatürde k -rekorların, daha çok momentlerinin ilişkileri üzerine birtakım çalışmalar yapılmakla birlikte, k -rekor istatistikleri (k -record statistics) üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Grudzień ve Szynal (1985), üst k -rekorların (upper k -records) dağılım fonksiyonu için yineleme bağıntısı elde etmişlerdir (Bieniek ve Szynal, 2002). Grudzień ve Szynal (1997), üst k -rekorların momentlerini, tekdüze ve üstel dağılım için karakterize etmişlerdir. Pawlas ve Szynal (1998, 1999), bazı dağılımlardan gelen üst k -rekorlar için yineleme bağıntıları vermişlerdir. Raqab (2001), lineer-üstel dağılımdan gelen üst k -rekorların momentleri arasında yineleme bağıntılarına ulaşmıştır. Bieniek ve Szynal (2002), bazı dağılımlardan gelen üst k -rekorlar için yineleme bağıntıları vermişlerdir. Bieniek ve Szynal (2007), üst k -rekorların momentleri için, birincil tür Stirling sayıları cinsinden açık bir formül vermişlerdir. k -rekorlar hakkında ayrıntılı bilgi için Galambos (1978), Nevzorov (1987) ve Nagaraja (1988) tarafından yapılan derlemelere bakılabilir.

Genelleştirilmiş sıra istatistikleri (generalized order statistics), Kamps (1995a) tarafından, farklı gösterimlerde ve benzer yapılarda olan, sıra istatistikleri (ordinary order statistics), rekor değerler ve k -rekorlar gibi sıralanmış rasgele değişken modellerini teorik dağılım anlamında genel bir çatı altında birleştiren ve bu modellerin çeşitli dağılımsal ve moment özelliklerini indirgeyebilen, ayrıca tüm sıralanmış rasgele değişken modellerini içerdiği düşünülen bir kavram olarak ortaya konulmuştur. Genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin parametrelerinin özel durumlarına göre sıra istatistikleri, rekor değerler, k -rekorlar gibi çeşitli alt modeller elde edilebilmektedir. Genelleştirilmiş sıra istatistikleri için geçerli olan sonuç veya çıkarımlar

alt modelleri için de geçerli olmaktadır. Kamps (1995b), “A Concept of Generalized Order Statistics” isimli kitabında, sıralanmış rasgele değişkenlere ilişkin inceleme ve sonuçlara, çeşitli disiplinlere ilişkin uygulamalara, klasik sıra istatistiklerinin momentleri için yineleme bağıntılarına ve karakterizasyonlara yer vermiştir. Genelleştirilmiş sıra istatistikleri ve özel durumlarına ait bazı sonuçlar için, Cramer (2003) ve AL-Hussaini (2004) tarafından yapılmış derlemelere bakılabilir.

Sıralanmış rasgele değişkenler kavramı kullanılarak, rekor değerler ve k -rekorlar modellerinin genelleştirilmiş bir hali olan “ ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek m skora dayalı sıra istatistikleri” modeli ilk kez Tanıl (2009) tarafından çalışılmış olup en yüksek m skorun birleşik ve marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları elde edilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, sıra istatistikleri, rekor değerler, k -rekorlar, genelleştirilmiş sıra istatistikleri ve en yüksek m skor hakkında literatürdeki bazı genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, en yüksek m skorun dağılım fonksiyonları, momentleri ve karakteristik fonksiyonlarını içeren bir yapı fonksiyonu ortaya konulmuş, ayrıca, sıra istatistiklerinin momentleri, dağılım fonksiyonları ve karakteristik fonksiyonlarının yeni yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise en yüksek m skorun çarpım momentleri elde edilmiştir. En yüksek m skorun genelleştirilmiş sıra istatistikleri ile ilişkileri, ve genelleştirilmiş sıra istatistiklerinden hareketle en yüksek m skorun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı bir açılımının elde edilmesine beşinci bölümde yer verilmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular ise altıncı bölümde verilmiştir.

2. SIRALANMIŞ RASGELE DEĞİŞKENLERE İLİŞKİN MODELLER

Bu bölümde, sıralanmış rasgele değişken modelleri olarak sıra istatistikleri, rekor değerler, k -rekorlar ve bu modelleri içeren genelleştirilmiş sıra istatistikleri hakkında birtakım bilgiler verilecek, ayrıca en yüksek m skor üzerinde durulacaktır.

2.1 Sıra İstatistikleri

X_1, X_2, \dots, X_n , birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip (i.i.d.) rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenler büyüklüklerine göre artacak şekilde sıralansın. Bu durumda, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ sıralanmış rasgele değişkenleri, $X_{r:n}$, r 'inci sıra istatistiğine karşılık gelecek şekilde “sıra istatistikleri“ olarak adlandırılırlar ($r = 1, 2, \dots, n$). Burada, X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip iken, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ sıra istatistikleri, aralarındaki eşitsizlik ilişkileri nedeniyle bağımlı olacaktır. En küçük ve en büyük sıra istatistiği ise sırasıyla $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ve $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ şeklinde tanımlanır.

Sıra istatistikleri kavramı tanıtıldıktan sonra sıra istatistiklerine ilişkin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları verilebilir.

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip mutlak sürekli bir kitleden gelen rasgele bir örneklem olsun. $r = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $X_{r:n}$ ile tanımlanan r 'inci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ ile gösterilsin. Böylece, $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ olarak tanımlanan ve $F_n(x)$ ile gösterilen en büyük sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P\{X_{n:n} \leq x\} = P\{\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x\} \\
&= P\{\text{tüm } X_i \text{ ler } \leq x\} \\
&= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\
&= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} \dots P\{X_n \leq x\} \\
&= F(x_1)F(x_2) \dots F(x_n) \\
&= \{F(x)\}^n, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde elde edilecektir (David, 1970).

Benzer şekilde, $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ olarak tanımlanan ve $F_1(x)$ ile gösterilen en küçük sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= P\{X_{1:n} \leq x\} = P\{\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x\} \\
&= 1 - P\{\text{tüm } X_i \text{ ler } > x\} \\
&= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\} \\
&= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\} \dots P\{X_n > x\} \\
&= 1 - [1 - P\{X_1 \leq x\}][1 - P\{X_2 \leq x\}] \dots [1 - P\{X_n \leq x\}] \\
&= 1 - [1 - F(x_1)][1 - F(x_2)] \dots [1 - F(x_n)] \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde elde edilir (David, 1970).

En büyük ve en küçük sıra istatistiklerinin marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla (2.1) ve (2.2)'de edildikten sonra, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere, $X_{r:n}$ olarak gösterilen r . sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ 'e,

$$\begin{aligned}
F_r(x) &= P\{X_{r:n} \leq x\} \\
&= P\{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerden en az } r \text{ tanesi } x \text{ 'ten küçük veya eşit}\} \\
&= P\{r \text{ tane } X_i \leq x \text{ veya } (r+1) \text{ tane } X_i \leq x \text{ veya } \dots \text{ veya } n \text{ tane } X_i \leq x\} \\
&= \sum_{i=r}^n P\{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ lerden tam olarak } i \text{ tanesi } x \text{ 'ten küçük veya eşit}\} \\
&= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde ulaşılır (David, 1970).

Binom toplamları ve tamamlanmamış beta fonksiyonu arasındaki ilişkiye göre, (2.3) eşitliği ile verilen r 'inci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu $F_r(x)$,

$$F_r(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1), \quad (2.4)$$

şeklinde de yazılabilir (David, 1970). Burada,

$$I_p(a, b) = (B(a, b))^{-1} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad \text{ve} \quad B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

r 'inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise (2.4) eşitliğinden hareketle,

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilir (David, 1970).

$1 \leq r < s \leq n$, $-\infty < x \leq y < \infty$ olmak üzere, r . ve s . sıra istatistikleri olan $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{r,s}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} (F(x))^{r-1} f(x) (F(y) - F(x))^{s-r-1} \\ &\quad \times f(y) (1-F(y))^{n-s} \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak verilmiştir (David, 1970).

$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ ve $k < n$ olmak üzere, $X_{r_1} < X_{r_2} < \dots < X_{r_k}$ ile gösterilen k tane sıra istatistiğinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{(r_1 - 1)!(r_2 - r_1 - 1)! \dots (n - r_k)!} (F(x_1))^{r_1 - 1} (F(x_2) - F(x_1))^{r_2 - r_1 - 1} \\ \times (F(x_3) - F(x_2))^{r_3 - r_2 - 1} \dots (1 - F(x_k))^{n - r_k} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilmiştir (David, 1970).

r 'inci ve s 'inci sıra istatistikleri olan $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu, (2.6) eşitliğinde verilen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali alınarak bulunabileceği gibi kesikli durum için $1 \leq r < s \leq n$ olmak üzere,

$$F_{r,s}(x, y) = \sum_{i=r}^n \sum_{j=\max(0, s-i)}^{n-i} \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} \\ \times (F(x))^i (F(y) - F(x))^j (1 - F(y))^{n-i-j}, \quad x < y \\ \text{ve } F_{r,s}(x, y) = F_s(y), \quad x \geq y \quad (2.8)$$

şeklinde de verilmektedir (David, 1970).

Bunların yanı sıra, n tane sıra istatistiğinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{j=1}^n f(x_j), \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (2.9)$$

dir (David, 1970).

2.2 Rekor Değerler

$X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots$ birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ sürekli dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. $U(1) = 1$ ve

$U(n) = \min\{i : i > U(n-1), X_i > X_{U(n-1)}, n > 1\}$, rekor zamanlarını göstermek üzere, $\{X_{U(n)}, n \geq 1\}$ dizisinin elemanları, üst rekor değerler (upper record values) olmaktadır.

Rekor değer kavramı açıklandıktan sonra rekor değerlerin marjinal olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları verilebilir.

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri, $\{X_i, i \geq 1\}$ dizisine dayalı $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip mutlak sürekli bir kitleden gelen rasgele bir örneklem olsun. $X_{U(1)}, X_{U(2)}, \dots, X_{U(n)}$ şeklinde gösterilen ilk n adet üst rekor değerlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $R(x) = -\ln(1 - F(x))$ ve $r(x) = \frac{d}{dx} R(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$, $0 < F(x) < 1$ olmak üzere,

$$f^{X_{U(1)}, X_{U(2)}, \dots, X_{U(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} r(x_i) \right) f(x_n) \quad (2.10)$$

şekindedir. n 'inci üst rekor değerlerin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f^{X_{U(n)}}(x) = \frac{1}{(n-1)!} [R(x)]^{n-1} f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.11)$$

olarak verilmektedir. Ayrıca, n 'inci üst rekor değerlerin dağılım fonksiyonu,

$$F^{X_{U(n)}}(x) = 1 - (1 - F(x)) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} [R(x)]^j \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Chandler, 1952; Nagaraja, 1988).

2.3 k -Rekorlar

Rekor değerlerin uç değerler olarak gözlemlendiği bir dizide, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, ikinci veya üçüncü gibi ardışık k 'inci en büyük uç

değerlerle ilgilenilen durumlar vardır. Örneğin, hayat dışı sigortalara ilişkin birbirini takip eden sigorta tazminat talepleri, en yüksek su seviyeleri veya en yüksek sıcaklıklar gibi. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, bir dizideki k 'inci en büyük uç değerleri dikkate alarak, Dziubdziela ve Kopociński (1976), aşağıdaki k -rekorlar modelini önermişlerdir.

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip mutlak sürekli bir kitleden gelen rasgele bir örneklem olsun. $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ ise, X_1, X_2, \dots, X_n örneğine dayalı sıra istatistikleri olsun. $k \geq 1$ koşulunu sağlayan bir k pozitif tamsayı sabiti için, $U_k(1), U_k(2), \dots$ dizisi, $U_{(k)}(1) = 1$ ve $U_{(k)}(n) = \min \{ j > U_k(n-1) : X_{j:j+k-1} > X_{U_k(n-1):U_k(n-1)+k-1}, n > 1 \}$ koşullarını sağlayacak şekilde $\{X_n, n \geq 1\}$ dizisine dayalı üst k -rekor zamanları olmak üzere, $Y_n^{(k)} = X_{U_k(n):U_k(n)+k-1}, n \geq 1$ ile gösterilen $\{Y_n^{(k)}, n \geq 1\}$ dizisinin elemanları “üst k -rekorlar” olarak adlandırılırlar. Burada, $k = 1$ için $Y_n^{(1)} = X_{1:U_1(n)}$ yazılacak olursa, $\{X_i, i \geq 1\}$ dizisine ait üst rekor değerler elde edilmektedir. Ayrıca, $Y_1^{(k)} = X_{1:k} = \min(X_1, \dots, X_k)$ olduğu açıktır.

$Y_n^{(k)}$ ile gösterilen üst k -rekorların marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{Y_n^{(k)}}(x) = \frac{k^n}{(n-1)!} [-\log(1-F(x))]^{n-1} [1-F(x)]^{k-1} f(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

olarak verilmektedir. $Y_m^{(k)}$ ve $Y_n^{(k)}$ şeklindeki üst k -rekorların ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise, $1 \leq m < n$ olmak üzere,

$$f_{Y_m^{(k)}, Y_n^{(k)}}(x, y) = \frac{k^n}{(m-1)!(n-m-1)!} [\log(1-F(x)) - \log(1-F(y))]^{n-m-1}$$

$$\times [-\log(1 - F(x))]^{m-1} \frac{f(x)}{1 - F(x)} [1 - F(y)]^{k-1} f(y), \quad x < y \quad (2.14)$$

şeklindedir (Dziubdziela ve Kopociński, 1976; Grudzień, 1982).

Ayrıca, $Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)}$ ile gösterilen üst k -rekora ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$ için,

$$f_{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)}}(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{1 - F(x_i)} \right) k^n [1 - F(x_n)]^{k-1} f(x_n), \quad (2.15)$$

dir (Ahsanullah, 2004).

2.4 Genelleştirilmiş Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri, II. tür ilerleyen sansürlenmiş sıra istatistikleri, rekor değerler, k -rekolar, Pfeifer'in rekor modeli (Pfeifer's record model), ardışık sıra istatistikleri (sequential order statistics) gibi çeşitli sıralanmış rasgele değişken modelleri vardır. Tüm bu sıralanmış rasgele değişken modelleri veya bu modellerin uygun bir şekilde kısıtlandırılmış versiyonları, genelleştirilmiş sıra istatistikleri modelinde bulunmaktadır. Genelleştirilmiş sıra istatistikleri uygun parametre durumlarında alt modellere indirgenebilmektedir. Genelleştirilmiş sıra istatistikleri modeli için elde edilen tüm sonuçlar, ilgili parametrelerin seçimi ile, alt modellere uygulanabilir. Genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin tanımı, "uniform genelleştirilmiş sıra istatistikleri" nin tanımından hareketle yapılabilir.

Tüm $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ değerleri için $\gamma_r = k + n - r + M_r > 0$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathfrak{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$ ve $n \geq 2$ için $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ olsun. $r = 1, \dots, n$ için $U(r, n, \tilde{m}, k)$ rasgele değişkenleri $0 \leq u_1 < \dots < u_n < 1$ ilişkisini sağlayacak şekilde,

$$f^{U(1, n, \tilde{m}, k), \dots, U(n, n, \tilde{m}, k)}(u_1, \dots, u_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} (1 - u_j)^{m_j} \right) (1 - u_n)^{k-1} \quad (2.16)$$

ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduklarında “uniform genelleştirilmiş sıra istatistikleri” olarak adlandırılırlar (Kamps, 1995a; 1995b).

Yukarıda verilen tanımdan sonra, kuantil dönüşümü (quantile transformation) kullanılarak keyfi bir F dağılım fonksiyonuna dayalı genelleştirilmiş sıra istatistikleri tanımlanabilir. $r=1, \dots, n$ için mutlak sürekli F dağılım fonksiyonu ve f olasılık yoğunluk fonksiyonuna bağlı olarak, $X(r, n, \tilde{m}, k) = F^{-1}(U(r, n, \tilde{m}, k))$ şeklinde tanımlanan rasgele değişkenler, “genelleştirilmiş sıra istatistikleri” olarak adlandırılırlar.

2.4.1 Marjinal ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları

Kamps (1995a; 1995b), çalışmasında $X(1, n, \tilde{m}, k)$, $X(2, n, \tilde{m}, k)$, ..., $X(n, n, \tilde{m}, k)$ genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $F^{-1}(0) < x_1 \leq \dots \leq x_n < F^{-1}(1)$ olmak üzere,

$$f^{X(1, n, \tilde{m}, k), \dots, X(n, n, \tilde{m}, k)}(x_1, \dots, x_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - F(x_i))^{m_i} f(x_i) \right) \times (1 - F(x_n))^{k-1} f(x_n) \quad (2.17)$$

şeklinde vermektedir. Yine aynı çalışmasında, $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = m$ için $X(r, n, \tilde{m}, k)$ ile gösterilen “ r 'inci genelleştirilmiş sıra istatistiği” nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$$f^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} [1 - F(x)]^{\gamma_{r-1}} f(x) [g_m(F(x))]^{r-1} \quad (2.18)$$

şeklinde vermiştir. Burada, $c_{r-1} = \prod_{i=1}^r \gamma_i$, $\gamma_i = k + (n-i)(m+1)$, $r = 1, 2, \dots, n$,

$$g_m(x) = h_m(x) - h_m(0), \quad h_m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{m+1} (1-x)^{m+1}, & m \neq -1 \\ -\log(1-x), & m = -1 \end{cases}, \quad x \in [0, 1)$$

dir.

Kamps (1995a; 1995b), çalışmasında ayrıca, $1 \leq r < s \leq n$, $x < y$ için $X(r, n, \tilde{m}, k)$ ile $X(s, n, \tilde{m}, k)$ genelleştirilmiş sıra istatistiklerine ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$$f^{X(r, n, \tilde{m}, k), X(s, n, \tilde{m}, k)}(x, y) = \frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!} [1-F(x)]^m [g_m(F(x))]^{r-1} \\ \times [h_m(F(y)) - h_m(F(x))]^{s-r-1} [1-F(y)]^{s-1} f(x)f(y) \quad (2.19)$$

olarak vermektedir.

Kamps ve Cramer (2001), $X(r, n, \tilde{m}, k)$ genelleştirilmiş sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j$, $1 \leq i \leq r \leq n$ için

$$a_i(r) = \prod_{j=1, j \neq i}^r (1/(\gamma_j - \gamma_i)), \quad a_i(r) = \prod_{\emptyset} = 1 \quad \text{ve} \quad \forall i \neq j \quad \text{için} \quad \gamma_i \neq \gamma_j \quad \text{olmak üzere,}$$

$$f^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = c_{r-1} f(x) \sum_{i=1}^r a_i(r) (1-F(x))^{\gamma_i-1} \quad (2.20)$$

şeklinde vermişlerdir. $X(r, n, \tilde{m}, k)$ ve $X(s, n, \tilde{m}, k)$ genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu ise, $1 \leq r < s \leq n$,

$$r+1 \leq j \leq s \quad \text{için} \quad a_j^{(r)}(s) = \prod_{i=r+1, i \neq j}^s 1/(\gamma_i - \gamma_j) \quad \text{olmak üzere,}$$

$$f^{X(r, n, \tilde{m}, k), X(s, n, \tilde{m}, k)}(x_r, x_s) = c_{s-1} \left(\sum_{j=r+1}^s a_j^{(r)}(s) \left(\frac{1-F(x_s)}{1-F(x_r)} \right)^{\gamma_j} \right) \\ \times \left(\sum_{i=1}^r a_i(r) (1-F(x_r))^{\gamma_i} \right) \frac{f(x_r)}{(1-F(x_r))} \frac{f(x_s)}{(1-F(x_s))} \quad (2.21)$$

şeklinde ifade etmişlerdir.

Cramer ve Kamps (2003), daha sonra, $1 \leq r \leq n$ için, r . genelleştirilmiş sıra istatistiği $X(r, n, \tilde{m}, k)$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı bir gösterimini, $\gamma_1, \dots, \gamma_r > 0$ parametreler olmak üzere,

$$f^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) G_{r,r}^{r,0} \left[\overline{F}(x) \middle| \begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \dots, \gamma_r - 1 \end{matrix} \right] f(x), \quad x \in \mathfrak{R} \quad (2.22)$$

şeklinde, Meijer'in G- fonksiyonu cinsinden elde etmişlerdir. Burada,

$$G_{r,r}^{r,0} \left[s \middle| \begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \dots, \gamma_r - 1 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{s^z}{\prod_{j=1}^r (\gamma_j - 1 - z)} dz, \quad (2.23)$$

seçilmiş belirli parametrelere dayalı Meijer'in G-fonksiyonu olmaktadır ve Meijer'in G-fonksiyonu,

$$G_{p,q}^{m,n} \left[s \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - z) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + z)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + z) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - z)} s^z dz, \quad |s| < 1, \quad (2.24)$$

biçiminde, Mellin-Barnes tipindeki integrallerle tanımlanmaktadır. Meijer'in G-fonksiyonu hakkında ayrıntılı bilgi için Erdélyi vd.. (1953), Luke (1969), Mathai ve Saxena (1973), Mathai (1993), Mathai ve Haubold (2008) tarafından yapılmış olan çalışmalara bakılabilir.

2.4.2 Marjinal dağılım fonksiyonu

Kamps (1995a; 1995b), $r \in \{1, \dots, n\}$ için, $X(r, n, \tilde{m}, k)$ r 'inci genelleştirilmiş sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonunu, $m_1 = \dots = m_{r-1}$ varsayımı altında, keyfi bir F dağılım fonksiyonuna bağlı olarak,

$$F^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = 1 - c_{r-1} (1 - F(x))^{k+n-r-M_r} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! c_{r-1}} \left[g_m(F(x)) \right]^j \quad (2.25)$$

şeklinde vermiştir. Burada, $x \in [0,1)$ için,

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} (1 - (1-x)^{m+1}), & m \neq -1 \\ \log\left(\frac{1}{1-x}\right), & m = -1 \end{cases}$$

$$\text{ve } c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j, \quad r = 1, \dots, n \text{ ve } \gamma_n = k. \quad (2.26)$$

olmaktadır.

r 'inci genelleştirilmiş sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonunun farklı bir gösterimi ise Nasri-Roudsari (1996) tarafından verilmiştir. $r \in \{1, \dots, n\}$, $m_1 = \dots = m_{r-1} = m > -1$ ve F keyfi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x) = I_{1-(1-F(x))^{m+1}}\left(r, \frac{\gamma_r}{m+1}\right), \quad x \in \mathfrak{R} \quad (2.27)$$

şeklinde dir. Burada, $I_p(a,b) = (B(a,b))^{-1} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{b-1}$, $a, b > 0$, $p \in [0,1]$

olmaktadır.

Kamps ve Cramer (2001) ise, yaptıkları çalışmada, r 'inci genelleştirilmiş sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonunu, $c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j$,

$1 \leq i \leq r \leq n$ için $a_i(r) = \prod_{j=1, j \neq i}^r (1/(\gamma_j - \gamma_i))$, $a_i(r) = \prod_{\emptyset} = 1$ ve $\forall i \neq j$ için

$\gamma_i \neq \gamma_j$ olmak üzere,

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x) = 1 - c_{r-1} \sum_{i=1}^r \frac{a_i(r)}{\gamma_i} (1 - F(x))^{\gamma_i} \quad (2.28)$$

biçiminde tanımlamışlardır.

Cramer ve Kamps (2003), keyfi pozitif model parametreleri ile genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin dağılım teorisini oluşturmuşlardır. $X(r, n, \tilde{m}, k)$ 'in dağılım fonksiyonu için, Meijer'in G-fonksiyonunu içeren aşağıdaki integralli gösterimi elde etmişlerdir:

$$F^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = 1 - \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \int_0^{\bar{F}(x)} G_{r,r}^{r,0} \left[\bar{F}(x) \middle| \gamma_1, \dots, \gamma_r \right]_{\gamma_1-1, \dots, \gamma_r-1} ds, \quad x \in \mathfrak{R} \quad (2.29)$$

$$\text{Burada, } G_{r,r}^{r,0} \left[s \middle| \gamma_1, \dots, \gamma_r \right]_{\gamma_1-1, \dots, \gamma_r-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{s^z}{\prod_{j=1}^r (\gamma_j - 1 - z)} dz \text{ dir.}$$

Cramer ve Kamps (2003), ayrıca, (2.29) formülünden hareketle, $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ parametreleri ve F dağılım fonksiyonuna bağlı olarak, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonları arasında, aynı zamanda olasılık yoğunluk fonksiyonları ve momentler için de geçerli olan aşağıdaki yineleme bağıntısını elde etmişlerdir:

$$(\gamma_r - \gamma_1) F_{(\gamma_1, \dots, \gamma_r)}^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = \gamma_r F_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})}^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) - \gamma_1 F_{(\gamma_2, \dots, \gamma_r)}^{X(r-1, n, \tilde{m}, k)}(x), \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (2.30)$$

Burkschat ve Lenz (2009), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin dağılım teorisine ilişkin Cramer ve Kamps (2003)'ün elde ettiği sonuçlara dayalı olarak, $X(r, n, \tilde{m}, k)$ 'in dağılım fonksiyonunu (2.22)'ye benzer şekilde, doğrudan Meijer'in G-fonksiyonu cinsinden,

$$F^{X(r, n, \tilde{m}, k)}(x) = \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) G_{r+1, r+1}^{r+1, 0} \left[\bar{F}(x) \middle| \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_r + 1, 1 \right], \quad x \in \mathfrak{R} \quad (2.31)$$

şeklinde ifade etmişlerdir.

Cramer (2009), çalışmasında Hermite interpolasyon polinomu ile genelleştirilmiş sıra istatistikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki eşitliği vermektedir:

$$\mathcal{P}_s^{\mathcal{F}_x}(0) = \overline{F}_{(\gamma_1, \dots, \gamma_r)}^{X(r, n, \tilde{m}, k)}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (2.32)$$

Burada,

$$\mathcal{P}_s^{\mathcal{F}_x}(0) = \sum_{j=1}^r \frac{\prod_{v=1, v \neq j}^r (0 - \gamma_v)}{\prod_{v=1}^r (\gamma_j - \gamma_v)} \overline{F}^{\gamma_j}(x)$$

dir.

2.4.3 Momentler

Birçok araştırmacı, sıralanmış rasgele değişkenlerin momentleri arasındaki yineleme bağıntılılarıyla ilgilenmiştir. Yineleme bağıntılılarına genellikle, momentler için elde edilen açık ifadeler kullanılarak ulaşılmıştır. İndirgeme bağıntılarının elde edilmesinin önemine ilişkin aşağıdaki nedenler sıralanabilir:

- (i) Momentlerin hesaplanması için gereken birbirinden bağımsız (doğrudan) yapılan işlem sayısını azaltmaları ve böylece işlemleri kolaylaştırarak işlemlerin doğruluğunu arttırmaları;
- (ii) Yüksek mertebeden momentleri düşük mertebeden momentler cinsinden kullanışlı olacak şekilde ifade etmeleri ve böylece yüksek mertebeli momentlerin hesaplanmasını kolaylaştırmaları;
- (iii) Momentlerin hesabının kontrol edilmesi için oldukça kullanışlı olmaları;
- (iv) Moment üreten fonksiyonların elde edilmesinde ve dağılımların karakterize edilmesinde kullanışlı olmaları.

Genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin momentlerine ilişkin yineleme bağıntılıarı, alt modellere uygulanabilen genel sonuçlar verdikleri için

önemli olmaktadır (Al-Matrafı, 2006). Genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin momentleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Kamps (1995a; 1995b), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin tekli momentleri arasında, sıra istatistikleri ve k -rekörler özel durumlarına ilişkin sonuçları da içeren, genel bir dağılım sınıfına dayalı bir yineleme bağıntısı vermiştir. Yine aynı çalışmada, güç işlevi (power function), Pareto ve Weibull dağılımları için genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin momentlerinin açık ifadelerini elde etmiştir. Cramer ve Kamps (2000), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin fonksiyonlarının beklenen değerleri için, sıra istatistikleri ve rekor değerlere ilişkin çeşitli özellikleri de içeren bağıntılar elde etmişlerdir. Pawlas ve Szynal (2001), Pareto, genelleştirilmiş Pareto ve Burr dağılımlarından gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli ve çarpım momentleri için yineleme bağıntıları vermişlerdir. Kamps ve Cramer (2001), Pareto, güç işlevi ve Weibull dağılımlarından gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli momentleri arasında yineleme bağıntıları elde etmişlerdir. Cramer vd.. (2002), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin momentlerinin varlığı için yeter koşullar elde etmişlerdir. Ahmad ve Fawzy (2003), iki taraftan kesilmiş (doubly truncated) bir dağılım sınıfına ait genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli momentlerine ilişkin yineleme bağıntılarına ulaşmışlardır. Cramer ve Kamps (2003), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin tekli momentini Meijer'in G-fonksiyonunu içeren integralli bir ifade olarak vermişlerdir. Athar ve İslam (2004), genel bir dağılım sınıfından gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli ve çarpım momentlerine ilişkin yineleme bağıntıları elde etmişlerdir. Al-Matrafı (2006), lineer-üstel dağılımdan gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli momentlerine ilişkin açık ifade ve yineleme bağıntısı elde etmiştir. Ahmad ve Al-Matrafı (2006), genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin tekli ve koşullu momentlerine ilişkin yineleme bağıntıları vermişlerdir. Al-Matrafı ve Jawa (2008), iki taraftan kesilmiş sürekli dağılımlardan gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli momentlerine ait yineleme bağıntılarına ulaşmışlardır. Ahmad (2008), lineer-üstel dağılımdan gelen genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli ve çarpım momentleri için açık ifadeler ve yineleme bağıntıları elde etmiştir. Yine, Mahmoud ve Al-Nagar (2009), lineer-üstel dağılımdan gelen

genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin, tekli ve çarpım momentlerine ilişkin yineleme bağıntıları elde etmişlerdir.

Cramer ve Kamps (2003), r 'inci genelleştirilmiş sıra istatistiği $X(r, n, \tilde{m}, k)$ in α 'nıncı momentini, $s \in (0, 1)$ için $(F^{-1}(s))^\alpha$ tanımlı olmak üzere aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$E[X(r, n, \tilde{m}, k)]^\alpha = \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \int_0^1 (F^{-1}(s))^\alpha G_{r,r}^{r,0} \left[1-s \left| \begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \dots, \gamma_r - 1 \end{matrix} \right. \right] ds. \quad (2.33)$$

2.4.4 Alt modeller

Tüm sıralanmış rasgele değişken modelleri, genelleştirilmiş sıra istatistikleri modelinden indirgenebilmektedir. (2.17) formülünde, uygun parametre değerleri için, çeşitli sıralanmış rasgele değişken modellerine ait, aşağıdaki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları elde edilebilmektedir.

(i) $m_1 = \dots = m_{n-1} = 0$ ve $k = 1$ durumunda ($\gamma_r = n - r + 1$, $1 \leq r \leq n - 1$ için), sürekli, bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna bağlı, X_1, X_2, \dots, X_n şeklinde n adet sıra istatistiğinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$f^{X(1,n,0,1), \dots, X(n,n,0,1)}(x_1, \dots, x_n) = n! \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right), \quad -\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty \quad (2.34)$$

(ii) $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$ ve $k = 1$ durumunda ($\gamma_r = 1$, $1 \leq r \leq n - 1$ için), sürekli, bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna bağlı rasgele değişkenlere dayalı $X_{U(1)}, \dots, X_{U(n)}$ şeklindeki ilk n adet rekor değer, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$f^{X(1,n,-1,1), \dots, X(n,n,-1,1)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{(1-F(x_i))} \right) f(x_n),$$

$$-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty. \quad (2.35)$$

(iii) $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$ ve $k \in N$ durumunda ($\gamma_r = k$, $1 \leq r \leq n-1$ için), sürekli, bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna bağlı rasgele değişkenlere dayalı $Y_1^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)}$ şeklindeki ilk n adet k -rekorun, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned} f^{X(1,n,-1,k), \dots, X(n,n,-1,k)}(x_1, \dots, x_n) &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{1-F(x_i)} \right) k^n \\ &\quad \times [1-F(x_n)]^{k-1} f(x_n), \\ -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty. \end{aligned} \quad (2.36)$$

(iv) $m_i = R_i$ ve $k = R_n + 1$ durumunda ($\gamma_r = n - r + 1$, $1 \leq r \leq n-1$ için), $c = n(n - R_1 - 1) \dots (n - R_1 - \dots - R_{n-1} - n + 1)$ olmak üzere, II. tür ilerleyen sansürlenmiş sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned} f^{X(1,n,R,R_n+1), \dots, X(n,n,R,R_n+1)}(x_1, \dots, x_n) &= c \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) (1-F(x_i))^{R_i} \right), \\ -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty. \end{aligned} \quad (2.37)$$

(v) β_1, \dots, β_n pozitif reel sayılar olmak üzere, $m_i = \beta_i - \beta_{i+1} - 1$, $i = 1, \dots, n-1$ ve $k = \beta_n$ durumunda ($\gamma_r = \beta_r$, $1 \leq r \leq n-1$ için), Pfeifer'in rekor değerlerine ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned} f^{X(1,n,\bar{m},\beta_n), \dots, X(n,n,\bar{m},\beta_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \left(\prod_{j=1}^n \beta_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-F(x_i))^{m_i} f(x_i) \right) \\ &\quad \times (1-F(x_n))^{\beta_n-1} f(x_n), \\ -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty. \end{aligned} \quad (2.38)$$

(vi) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere, $m_i = (n-i+1)\alpha_i - (n-i)\alpha_{i+1} - 1$ ve $k = \alpha_n$ durumunda ($\gamma_r = (n-r+1)\alpha_r$, $1 \leq r \leq n-1$ için), ardışık sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned}
f^{X(1,n,\tilde{m},\alpha_n),\dots,X(n,n,\tilde{m},\alpha_n)}(x_1,\dots,x_n) &= n! \left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-F(x_j))^{m_i} f(x_i) \right) \\
&\quad \times (1-F(x_n))^{\alpha_n-1} f(x_n), \\
-\infty &< x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Aşağıdaki tablo, bazı sıralanmış rasgele değişken modellerinin, hangi parametrelerle genelleştirilmiş sıra istatistikleri modelinden indirgenebileceğini göstermektedir:

Tablo 2.1 Genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin alt modelleri

Model	\tilde{m} vektörü	k parametresi
1. Sıra istatistikleri	$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $m_i = 0$	$k = 1$
2. Rekor değerler	$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $m_i = -1$	$k = 1$
3. Pfeifer'in rekor değerleri	$i = 1, 2, \dots, n-1, j \geq 1$ ve $\beta_j > 0$ için $m_i = \beta_i - \beta_{i+1} - 1$	$k = \beta_n$
4. II. Tür ilerleyen sansürlenmiş sıra istatistikleri	$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $m_i = R_i$	$k = R_n + 1$
5. k -rekorlar	$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $m_i = -1$	$k \in \{1, 2, \dots\}$
6. Ardışık sıra istatistikleri	$i = 1, 2, \dots, n-1$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ için $m_i = (n-i+1)\alpha_i - (n-i)\alpha_{i+1} - 1$	$k = \alpha_n$

2.5 En Yüksek m Skor

$X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım ve f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişkenler dizisi ve bu dizinin ilk m elemanı başlangıç en yüksek m skor olsun. $m=1$ olması durumunda, $\ell \geq 0$ için, ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek skor, klasik üst rekor değerler ile modellenebilir. $X_{U(\ell+1)}$, ℓ 'inci güncelleme sonrası mevcut en yüksek skoru gösterecek olursa, $n=1, 2, \dots$ için $U(1)=1$, $U(n+1) = \min\{j > U(n) : X_j > X_{U(n)}\}$ olmak üzere, $X_{U(\ell+1)}$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$f^{X_{U^{(\ell+1)}}}(x) = \frac{1}{\ell!} (-\ln \bar{F}(x))^\ell f(x), \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (2.40)$$

Yukarıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip $X_{U^{(\ell+1)}}$ rasgele değişkeni, literatürde “ $(\ell + 1)$ 'inci üst rekor değer” olarak bilinmektedir.

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ dizisine dayalı olarak, üst rekor değerlerin genelleştirilmiş şekli olarak görülebilecek olan ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek m skorun, dağılım teorisi ilk kez Tanıl (2009) tarafından çalışılmıştır. $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$ için $X_{1:m}^{(\ell)} < X_{2:m}^{(\ell)} < \dots < X_{m:m}^{(\ell)}$, $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ skor dizisine ait ℓ 'inci güncellenme sonrasındaki en yüksek m skordan oluşan listeye dayalı sıra istatistikleri olsun. $\ell = 0$ için bu sıra istatistikleri, X_1, \dots, X_m 'ye dayalı olarak oluşturulur. $\ell \geq 1$ içinse; $L(0)$, X_1, \dots, X_m 'lerin en küçüğünün zaman indeksi ve $L(t) = \min\{j > \max(m, L(t-1)) : X_j > X_{1:m}^{(t-1)}\}$, $t \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ olmak üzere,

$$\{X_{L(t)}\} \cup \{X_{2:m}^{(\ell-1)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell-1)}\}$$

üzerine kurulur. $r = 1, 2, \dots, m$ için $X_{r:m}^{(\ell)}$, “ ℓ 'inci güncelleme sonrası listenin $(m - r + 1)$ 'inci en büyük değeri” olarak adlandırılır. Burada, $X_{r:m}^{(0)}$ 'in, X dizisinin ilk m elemanına dayalı r 'inci sıra istatistiği olduğu açıktır. $X_{1:m}^{(\ell)}$ ise, X dizisinde, aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip $(\ell + 1)$ 'inci üst m -rekoru göstermektedir:

$$f^{X_{1:m}^{(\ell)}}(x) = \frac{m^{\ell+1}}{\ell!} (-\ln \bar{F}(x))^\ell \bar{F}(x)^{m-1} f(x). \quad (2.41)$$

Tanıl (2009), $X_{1:m}^{(\ell)} < X_{2:m}^{(\ell)} < \dots < X_{m:m}^{(\ell)}$ şeklindeki en yüksek m skora ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $\ell \geq 0$ ve $m \geq 1$ için,

$$f^{X_{1:m}^{(\ell)}, X_{2:m}^{(\ell)}, \dots, X_{m:m}^{(\ell)}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{m^\ell m! (-\ln \bar{F}(x_1))^\ell \prod_{i=1}^m f(x_i)}{\ell!}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad (2.42)$$

şeklinde elde etmiştir. “ ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek m skora dayalı sıra istatistikleri modeli”, yukarıdaki formülde $m=1$ alınması durumunda, $(\ell+1)$ 'inci üst rekor değer olasılık yoğunluk fonksiyonu olan (2.40) formülüne indirgenerek, üst rekor değerlerin genelleştirilmiş bir modeli olarak ortaya çıkmaktadır.

$X_{r:m}^{(\ell)}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise, $\ell \geq 0$ ve $1 \leq r \leq m$ için,

$$f^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x) = \frac{m^\ell m! \bar{F}(x)^{m-r} f(x)}{(m-r)!} \Phi_{F(x)}(r-1, \ell), \quad x \in \mathfrak{R} \quad (2.43)$$

şeklinde verilmektedir (Tamlı, 2009). Ayrıca, $X_{r:m}^{(\ell)}$ ve $X_{s:m}^{(\ell)}$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu; $\ell \geq 0$, $1 \leq r < s \leq m$ ve $x < y$ için,

$$f^{X_{r:m}^{(\ell)}, X_{s:m}^{(\ell)}}(x, y) = \frac{m^\ell m! (F(y) - F(x))^{s-r-1} \bar{F}(y)^{m-s} f(x) f(y)}{(m-s)!(s-r-1)!} \times \Phi_{F(x)}(r-1, \ell) \quad (2.44)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Tamlı, 2009). Burada,

$$\Phi_{F(x)}(r-1, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{\ell!} (-\ln \bar{F}(x))^\ell & , r = 1 \text{ için} \\ \int_0^{F(x)} \frac{(-\ln(1-u))^\ell (F(x)-u)^{r-2}}{\ell!(r-2)!} du & , r > 1 \text{ için} \end{cases} \quad (2.45)$$

dir. $\ell \geq 0$ ve $k \geq 1$ için $\Phi_{F(x)}(k, \ell)$ 'nin polinomiyal açılımı ise,

$$\Phi_{F(x)}(k, \ell) = \frac{F(x)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_1^{(k, \ell, i)} F(x)^{k-i-1}$$

$$+ \overline{F}(x)^k \sum_{t=1}^k \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(k,\ell,j_1,\dots,j_k)} (-\ln \overline{F}(x))^{\ell-j_1-\dots-j_k} \quad (2.46)$$

şeklindedir (Tanıl, 2009). Burada,

$$\gamma_1^{(k,\ell,i)} = \sum_{t=1}^i \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (k-i-1)!},$$

$$\gamma_2^{(k,\ell,j_1,\dots,j_k)} = \frac{(-1)^k \prod_{u=1}^k u^{-1-j_u}}{(\ell-j_1-\dots-j_k)!},$$

$$\ell_t = \ell - \sum_{u=0}^{t-1} j_u, j_0 = 0 \text{ ve } \sum_{\emptyset} = 0$$

dır.

3. EN YÜKSEK m SKORUN DAĞILIM FONKSİYONU,

α . MOMENTİ VE KARAKTERİSTİK FONKSİYONU

Bu bölümde, en yüksek m skor için, marjinal dağılım fonksiyonunu, tekli momentleri ve karakteristik fonksiyonları içerecek bir yapı fonksiyonu ortaya konmuş ve bu yapı fonksiyonu, klasik sıra istatistikleri ve üst m -rekorların yapı fonksiyonlarıyla ilişkilendirilerek bir lineer bağıntı elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bu lineer bağıntı kullanılarak klasik sıra istatistiklerinin; dağılım fonksiyonlarının, momentlerinin ve karakteristik fonksiyonlarının bulunabileceği yeni yineleme bağıntılarına ulaşılmıştır.

Tanım 3.1 $x \in \mathfrak{R}$ ve g bir borel fonksiyonu olmak üzere,

$$G_{g(y)}^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x) := \int_{-\infty}^x g(y) f^{X_{r:m}^{(\ell)}}(y) dy \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilen fonksiyona $X_{r:m}^{(\ell)}$ rasgele değişkeninin yapı fonksiyonu adı verilir.

Yukarıdaki tanıma göre,

- (i) $X_{r:m}^{(\ell)}$ 'in dağılım fonksiyonu $G_1^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x)$,
- (ii) $\alpha \in \mathbb{N}^+$ için $X_{r:m}^{(\ell)}$ 'in α .momenti $\lim_{x \rightarrow \infty} G_{y^\alpha}^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x)$ ve
- (iii) $X_{r:m}^{(\ell)}$ 'in karakteristik fonksiyonu $\lim_{x \rightarrow \infty} G_{e^{iy}}^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x)$

olacaktır.

Yapı fonksiyonu tanımlandıktan sonra, $1 < r \leq m$ için, $X_{r:m}^{(\ell)}$ 'nin yapı fonksiyonunu, klasik sıra istatistikleri ve üst m -rekorların yapı fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde ifade eden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1 $1 < r \leq m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x) &= m^{\ell+1} G_{g(y)}^{X_{r-1,m-1}^{(0)}}(x) + \sum_{i=1}^{r-2} \psi_1^{(i,\ell,m)} G_{g(y)}^{X_{r-i-1,m-i-1}^{(0)}}(x) \\ &\quad + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \psi_2^{(r,m;j_1,\dots,j_{r-1})} G_{g(y)}^{X_{1,m}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}}(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği doğrudur. Burada,

$$\begin{aligned} \psi_1^{(i,\ell,m)} &= (-1)^i m^\ell c_{i+1,m} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{\prod_{u=1}^i u^{-j_u}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i}}, \\ \psi_2^{(r,m;j_1,\dots,j_{r-1})} &= \frac{(-1)^{r-1} c_{r-1,m-1}}{m^{-j_1-\dots-j_{r-1}} \prod_{u=1}^{r-1} u^{j_u}}, \\ c_{i,j} &= \frac{j!}{(j-i)!i!}, \quad \ell_t = \ell - \sum_{u=0}^{\ell_t} j_u, \quad j_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{\emptyset} = 0 \end{aligned}$$

dır.

İspat: $G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x)$ yapı fonksiyonunun (3.1) eşitliğindeki ifadesinde, eşitliğin sağ tarafındaki $X_{r,m}^{(\ell)}$ 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu açılacak olursa,

$$\begin{aligned} G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x) &= \int_{-\infty}^x g(y) f^{X_{r,m}^{(\ell)}}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \Phi_{F(y)}(r-1, \ell) dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki $\Phi_{F(y)}(r-1, \ell)$ ifadesinin yerine, $r > 1$ olduğu için polinomial açılımı yazıldığında, (3.3) eşitliği,

$$\begin{aligned} G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x) &= \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \left(\frac{F(y)^{r-2}}{(r-2)!} + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,\ell,i)} F(y)^{r-2-i} \right. \\ &\quad \left. + \bar{F}(y)^{r-1} \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1,\ell,j_1,\dots,j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} \right) dy \end{aligned} \quad (3.4)$$

haline gelecektir. (3.4) ifadesinde yer alan integral parantez içindeki terimlere dağıtılacak olursa, bu ifade,

$$\begin{aligned}
G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x) &= \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y) F(y)^{r-2}}{(m-r)!(r-2)!} dy \\
&+ \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,\ell,i)} F(y)^{r-2-i} dy \\
&+ \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \bar{F}(y)^{r-1} \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1,\ell,j_1,\dots,j_{r-1})} \\
&\times (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dy \tag{3.5}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, sırasıyla,

$$\eta_1 := \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y) F(y)^{r-2}}{(m-r)!(r-2)!} dy, \tag{3.6}$$

$$\eta_2 := \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1,\ell,i)} F(y)^{r-2-i} dy, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\eta_3 &:= \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \bar{F}(y)^{r-1} \\
&\times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1,\ell,j_1,\dots,j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dy \tag{3.8}
\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.5) ifadesi η_1 , η_2 ve η_3 terimlerinin toplamı olarak gösterilebilir.

(3.6) ifadesinden hareketle, η_1 terimi,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= m^\ell \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m! \bar{F}(y)^{m-r}}{(m-r)!(r-2)!} F(y)^{r-2} f(y) dy \\
&= m^\ell m \int_{-\infty}^x g(y) \frac{(m-1)!}{(m-r)!(r-2)!} F(y)^{r-2} \bar{F}(y)^{m-r} f(y) dy \\
&= m^{\ell+1} \int_{-\infty}^x g(y) f^{X_{r-1,m-1}^{(0)}}(y) dy \\
&= m^{\ell+1} G_{g(y)}^{X_{r-1,m-1}^{(0)}}(x) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilecektir. η_2 terimine geçilecek olursa,

$$\eta_2 = \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} F(y)^{r-2-i} dy \quad (3.10)$$

ifadesinde $\gamma_1^{(r-1, \ell, i)}$ çarpanı açılacak olursa,

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \\ &\times \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (r-2-i)!} F(y)^{r-2-i} dy \\ &= \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m! (-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(m-r)! (i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (r-2-i)!} \\ &\times \int_{-\infty}^x g(y) F(y)^{r-2-i} \bar{F}(y)^{m-r} f(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u} m^\ell m!}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (m-1-i)!} \int_{-\infty}^x g(y) \frac{(m-i-1)!}{(r-2-i)! (m-r)!} \\ &\times F(y)^{r-2-i} \bar{F}(y)^{m-r} f(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i m^\ell c_{i+1, m}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i} \prod_{u=1}^i u^{j_u}} G_{g(y)}^{X_{r-i-1; m-i-1}^{(0)}}(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu noktada,

$$\psi_1^{(i, \ell, m)} = (-1)^i m^\ell c_{i+1, m} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{\prod_{u=1}^i u^{-j_u}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i}} \quad (3.12)$$

olmak üzere,

$$\eta_2 = \sum_{i=1}^{r-2} \psi_1^{(i, \ell, m)} G_{g(y)}^{X_{r-i-1; m-i-1}^{(0)}}(x) \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilecektir. η_1 ve η_2 terimleri sırasıyla (3.9) ve (3.13)'deki gibi elde edildikten sonra, (3.8)'deki η_3 terimine geçilecek olursa,

$$\eta_3 = \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y)}{(m-r)!} \bar{F}(y)^{r-1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dy \\
& = \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^\ell m! \bar{F}(y)^{m-r} f(y) \bar{F}(y)^{r-1}}{(m-r)!} \\
& \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^{r-1} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u}}{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})!} (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dy \quad (3.14)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik,

$$\begin{aligned}
\eta_3 & = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m!}{(m-r)! m^{-j_1-\dots-j_{r-1}} m} (-1)^{r-1} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u} \\
& \times \int_{-\infty}^x g(y) \frac{m^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1}}{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})!} (-\ln \bar{F}(y))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} \\
& \times \bar{F}(y)^{m-1} f(y) dy \quad (3.15)
\end{aligned}$$

haline getirilirse, (3.15) eşitliğinin sağ tarafındaki integralli kısmın,

$G_{g(y)}^{X_{1:m}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}}(x)$ olduğu açıktır. O zaman,

$$\eta_3 = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^{r-1} c_{r-1, m-1}}{m^{-j_1-\dots-j_{r-1}} \prod_{u=1}^{r-1} u^{j_u}} G_{g(y)}^{X_{1:m}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}}(x) \quad (3.16)$$

şeklinde düzenlenebilir. Diğer yandan,

$$\psi_2^{(r, m; j_1, \dots, j_{r-1})} = \frac{(-1)^{r-1} c_{r-1, m-1}}{m^{-j_1-\dots-j_{r-1}} \prod_{u=1}^{r-1} u^{j_u}} \quad (3.17)$$

olduğundan, (3.16) eşitliği,

$$\eta_3 = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \psi_2^{(r, m; j_1, \dots, j_{r-1})} G_{g(y)}^{X_{1:m}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}}(x) \quad (3.18)$$

haline gelecektir. Sonuç olarak, sırasıyla (3.9), (3.13) ve (3.18)'de elde edilen η_1 , η_2 ve η_3 terimleri toplanırsa, (3.5) ifadesi,

$$G_{g(y)}^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x) = m^{\ell+1} G_{g(y)}^{X_{r-1:m-1}^{(0)}}(x) + \sum_{i=1}^{r-2} \psi_1^{(i, \ell, m)} G_{g(y)}^{X_{r-i-1:m-i-1}^{(0)}}(x)$$

$$+ \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \psi_2^{(r,m;j_1,\dots,j_{r-1})} G_{g(y)}^{X_{1:m}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}}(x) \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

4. EN YÜKSEK m SKORUN ÇARPIM MOMENTLERİ

$1 \leq r < s \leq m$ olmak üzere $X_{r:m}^{(\ell)}$ ve $X_{s:m}^{(\ell)}$ rasgele değişkenlerinin çarpım momenti,

$$E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv f^{X_{r:m}^{(\ell)}, X_{s:m}^{(\ell)}}(u, v) dudv \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte, (2.14)'den hareketle, iki ardışık üst $(m-s+1)$ -rekorun ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $u < v$ olmak üzere,

$$f^{X_{1:m-s+1}^{(\ell)}, X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}}(u, v) = \frac{(m-s+1)^{\ell+2}}{\ell! \bar{F}(u)} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında, $X_{r:m}^{(\ell)}$ ve $X_{s:m}^{(\ell)}$ 'nin çarpım momentleri; $h_{a;b}(x, y) = xy(1-F(x))^a (F(y)-F(x))^b$ ve $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, klasik sıra istatistiklerinin çarpım momentlerinin ve iki ardışık üst $(m-s+1)$ -rekora ait $h_{a;b}$ fonksiyonunun beklenen değerinin lineer birleşimleri olarak aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 4.1 $1 < s \leq m$ için, $X_{1:m}^{(\ell)}$ ve $X_{s:m}^{(\ell)}$ 'nin çarpım momenti,

$$E\left[X_{1:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] = \frac{m^{\ell} c_{1,s,m}}{(m-s+1)^{\ell+2}} E\left[h_{1,s-2}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell)}, X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}\right)\right] \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada,

$$h_{a;b}(x, y) = xy(1-F(x))^a (F(y)-F(x))^b \quad \text{ve} \quad c_{i,j,k} = \frac{k!}{(i-1)!(j-i-1)!(k-j)!}$$

dir.

İspat: (4.1) eşitliği, (2.44) formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv f^{X_{r:m}^{(\ell)}, X_{s:m}^{(\ell)}}(u, v) dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^{\ell} m! (F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \Phi_{F(x)}(r-1, \ell) dudv \tag{4.4}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman, $r=1$ için, (2.45) eşitliğinde verilen $\Phi_{F(x)}(r-1, \ell)$

fonksiyonu, $\frac{1}{\ell!}(-\ln \bar{F}(x))^{\ell}$ ifadesine eşittir. Bu durumda, $E\left[X_{1:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right]$

çarpım momenti,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{1:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= \frac{m^{\ell} m!}{(s-2)!(m-s)!\ell!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv (F(v) - F(u))^{s-2} \\
&\quad \times (-\ln \bar{F}(u))^{\ell} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) dudv \\
&= \frac{m^{\ell} m!}{(s-2)!(m-s)!(m-s+1)^{\ell+2}} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \bar{F}(u) (F(v) - F(u))^{s-2} \\
&\quad \times \frac{(m-s+1)^{\ell+2}}{\ell! \bar{F}(u)} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) dudv \tag{4.5}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir ve bu aşamada, $h_{a,b}(x, y) = xy(1-F(x))^a (F(y) - F(x))^b$ ve

$a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $a=1$ ve $b=s-2$ için, iki ardışık üst

$(m-s+1)$ -rekor olan $X_{1:m-s+1}^{(\ell)}$ ve $X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}$ değişkenlerine ait $h_{a,b}$

fonksiyonunun beklenen değeri, (4.2) formülüne dayalı olarak,

$$\begin{aligned}
E\left[h_{1;s-2}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell)}, X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v h_{1;s-2}(u, v) f^{X_{1:m-s+1}^{(\ell)}, X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}}(u, v) dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv (1-F(u))^1 (F(v) - F(u))^{s-2} \\
&\quad \times \frac{(m-s+1)^{\ell+2}}{\ell! \bar{F}(u)} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \bar{F}(u) (F(v) - F(u))^{s-2} \\
&\quad \times \frac{(m-s+1)^{\ell+2} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell} f(u)}{\ell! \bar{F}(u)} \\
&\quad \times \bar{F}(v)^{m-s} f(v) dudv \tag{4.6}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılıp, (4.5) ifadesinde yerine konulacak olursa,

$$E\left[X_{lm}^{(\ell)} X_{sm}^{(\ell)}\right] = \frac{m^\ell c_{1,s,m}}{(m-s+1)^{\ell+2}} E\left[h_{1,s-2}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell)}, X_{1:m-s+1}^{(\ell+1)}\right)\right] \quad (4.7)$$

sonucuna ulaşılır ve teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2 $1 < r < s \leq m$ için, $X_{r:m}^{(\ell)}$ ve $X_{s:m}^{(\ell)}$ 'nin çarpım momenti,

$$\begin{aligned} E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= m^{\ell+1} E\left[X_{r-1:m-1}^{(0)} X_{s-1:m-1}^{(0)}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{r-2} \phi_1^{(i,\ell,m)} E\left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)}\right] \\ &+ \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \phi_2^{(r,s,m,\ell;j_1,\dots,j_{r-1})} \\ &\times E\left[h_{r,s-r-1}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde dir. Burada,

$$\begin{aligned} \phi_1^{(i,\ell,m)} &= \sum_{t=1}^i \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i m^\ell c_{i+1,m} \prod_{u=1}^i u^{-j_u}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i}}, \\ \phi_2^{(r,s,m,\ell;j_1,\dots,j_{r-1})} &= \frac{(-1)^{r-1} m^\ell c_{r,s,m} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-j_u}}{(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}}, \\ h_{a,b}(x,y) &= xy(1-F(x))^a (F(y)-F(x))^b, \\ c_{i,j} &= \frac{j!}{(j-i)!i!}, c_{i,j,k} = \frac{k!}{(i-1)!(j-i-1)!(k-j)!}, \\ j_0 &= 0, \ell_t = \ell - \sum_{u=0}^{t-1} j_u \text{ ve } \sum_{\emptyset} = 0. \end{aligned}$$

İspat: (2.45) eşitliğinde verilen $\Phi_{F(x)}(r-1, \ell)$ fonksiyonunun $r > 1$ için,

$$\int_0^{F(x)} \frac{(-\ln(1-u))^\ell (F(x)-u)^{r-2}}{\ell!(r-2)!} du \quad (4.9)$$

şeklindeki ifadesinin (2.46) formülündeki polinomial açılımı kullanılarak,

$E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right]$ çarpım momenti,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv f^{X_{r:m}^{(\ell)}, X_{s:m}^{(\ell)}}(u, v) dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \Phi_{F(u)}(r-1, \ell) dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \left(\frac{F(u)^{r-2}}{(r-2)!} + \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} F(u)^{r-2-i} + \bar{F}(u)^{r-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} \right) dudv \tag{4.10}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen bu eşitliğin sağ tarafındaki integral parantez içindeki terimlere dağıtılacak olursa,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) F(u)^{r-2}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2)!} dudv \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} F(u)^{r-2-i} dudv \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) \bar{F}(u)^{r-1}}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dudv \tag{4.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\lambda_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) F(u)^{r-2}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2)!} dudv, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v) - F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} F(u)^{r-2-i} dudv, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m! (F(v) - F(u))^{s-r-1} \overline{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) \overline{F}(u)^{r-1}}{(m-s)!(s-r-1)!} \\ &\quad \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1, \ell, j_1, \dots, j_{r-1})} (-\ln \overline{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dudv \end{aligned} \quad (4.14)$$

olmak üzere, (4.11) eşitliği, λ_1 , λ_2 ve λ_3 terimlerinin toplamı olarak gösterilebilir. (4.12) eşitliğinden hareketle, λ_1 terimi,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m^\ell m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{(m-1)! (F(v) - F(u))^{s-r-1} \overline{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) F(u)^{r-2}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2)!} dudv \\ &= m^{\ell+1} E \left[X_{r-1; m-1}^{(0)} X_{s-1; m-1}^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde gösterilebilecektir. (4.12) eşitliğindeki λ_1 terimi, (4.15) eşitliğindeki gibi gösterildikten sonra, λ_2 terimine geçilecek olursa,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m! (F(v) - F(u))^{s-r-1} \overline{F}(v)^{m-s} f(u) f(v)}{(m-s)!(s-r-1)!} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{r-2} \gamma_1^{(r-1, \ell, i)} F(u)^{r-2-i} dudv \\ &= \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m! (-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2-i)!(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv F(u)^{r-2-i} (F(v) - F(u))^{s-r-1} \overline{F}(v)^{m-s} f(u) f(v) dudv \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.1) ve (2.44) formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} E \left[X_{r-1-i; m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i; m-1-i}^{(0)} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv f^{X_{r-1-i; m-1-i}^{(0)}, X_{s-1-i; m-1-i}^{(0)}}(u, v) dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{(m-1-i)! (F(v) - F(u))^{s-r-1} \overline{F}(v)^{m-s} F(u)^{r-2-i}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2-i)!} \\ &\quad \times f(u) f(v) dudv \end{aligned} \quad (4.17)$$

olmak üzere, (4.16) eşitliği,

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m! (-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (m-1-i)!}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{(m-1-i)!(F(v)-F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} F(u)^{r-2-i}}{(m-s)!(s-r-1)!(r-2-i)!} \\
& \times f(u)f(v)dudv \\
& = \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m!(-1)^i \prod_{u=1}^i u^{-1-j_u}}{(i+1)^{\ell+1-j_1-\dots-j_i} (m-1-i)!} E \left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)} \right] \\
& = \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i m^\ell c_{i+1,m}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i} \prod_{u=1}^i u^{j_u}} E \left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)} \right] \quad (4.18)
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu noktada,

$$\phi_1^{(i,\ell,m)} := \sum_{t=1}^i \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i m^\ell c_{i+1,m} \prod_{u=1}^i u^{-j_u}}{(i+1)^{\ell-j_1-\dots-j_i}} \quad (4.19)$$

olmak üzere, (4.18) eşitliği,

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{r-2} \phi_1^{(i,\ell,m)} E \left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)} \right] \quad (4.20)$$

şeklinde de yazılabilecektir. λ_1 ve λ_2 terimleri sırasıyla (4.15) ve (4.20)'deki gibi elde edildikten sonra, λ_3 terimine geçilecek olursa,

$$\begin{aligned}
\lambda_3 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \frac{m^\ell m!(F(v)-F(u))^{s-r-1} \bar{F}(v)^{m-s} f(u)f(v)\bar{F}(u)^{r-1}}{(m-s)!(s-r-1)!} \\
& \times \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \gamma_2^{(r-1,\ell,j_1,\dots,j_{r-1})} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} dudv \\
& = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m!(-1)^{r-1} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u}}{(m-s)!(s-r-1)!(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \bar{F}(u)^r (F(v)-F(u))^{s-r-1} \\
& \times \frac{(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}}{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})! \bar{F}(u)} (-\ln \bar{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} f(u)\bar{F}(v)^{m-s} f(v)dudv \quad (4.21)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu noktada, $h_{a,b}(x,y) = xy(1-F(x))^a (F(y)-F(x))^b$ ve $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $a = r$, $b = s-r-1$ için, iki ardışık üst $(m-s+1)$ -rekor

olan $X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}$ ve $X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}$ değişkenlerine ait $h_{a;b}$ fonksiyonunun beklenen değeri, (4.2) formülüne başvurularak,

$$\begin{aligned}
E\left[h_{r;s-r-1}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v h_{r;s-r-1}(u, v) \\
&\quad \times f_{X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}}(u, v) du dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^v uv \bar{F}(u)^r (F(v) - F(u))^{s-r-1} \\
&\quad \times \frac{(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}}{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})! \bar{F}(u)} \\
&\quad \times (-\ln \bar{F}(u))^{\ell-j_1-\dots-j_{r-1}} \\
&\quad \times f(u) \bar{F}(v)^{m-s} f(v) du dv \quad (4.22)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılıp, (4.21) ifadesinde yerine konulacak olursa,

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \frac{m^\ell m! (-1)^{r-1} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-1-j_u}}{(m-s)!(s-r-1)!(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}} \\
&\quad \times E\left[h_{r;s-r-1}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}\right)\right] \quad (4.23)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede,

$$\phi_2^{(r,s,m,\ell;j_1,\dots,j_{r-1})} := \frac{(-1)^{r-1} m^\ell c_{r,s,m} \prod_{u=1}^{r-1} u^{-j_u}}{(m-s+1)^{\ell+2-j_1-\dots-j_{r-1}}} \quad (4.24)$$

olmak üzere, (4.23) eşitliğinin son şekli,

$$\lambda_3 = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \phi_2^{(r,s,m,\ell;j_1,\dots,j_{r-1})} E\left[h_{r;s-r-1}\left(X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)}\right)\right] \quad (4.25)$$

olacaktır. Sonuç olarak, sırasıyla (4.15), (4.20) ve (4.25)'de elde edilen λ_1 ,

λ_2 ve λ_3 terimleri (4.11) ifadesinde yerlerine yazılacak olursa, $E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right]$

çarpım momenti,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{r:m}^{(\ell)} X_{s:m}^{(\ell)}\right] &= m^{\ell+1} E\left[X_{r-1:m-1}^{(0)} X_{s-1:m-1}^{(0)}\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-2} \phi_1^{(i,\ell,m)} E\left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \phi_2^{(r,s,m,\ell;j_1,\dots,j_{r-1})} \\
& \times E \left[h_{r;s-r-1} \left(X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1})}, X_{1:m-s+1}^{(\ell-j_1-\dots-j_{r-1}+1)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklinde elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

5. EN YÜKSEK m SKORUN GENELLEŞTİRİLMİŞ SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE İLİŞKİSİ

Bu bölümde, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan hareketle en yüksek m skorun ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilerek, en yüksek m skorun genelleştirilmiş sıra istatistikleri ile ilişkisi ortaya konulmuştur. Ayrıca, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak en yüksek m skorun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilebildiği gösterilmiştir.

$$X(1, \ell + m, \tilde{m}, k) < X(2, \ell + m, \tilde{m}, k) < \dots < X(\ell + m, \ell + m, \tilde{m}, k)$$

genelleştirilmiş sıra istatistikleri olmak üzere, $k=1$ ve $\tilde{m} := \tilde{m}^* = (\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\ell \text{ tane}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1 \text{ tane}})$ olarak seçilirse, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{\ell+1} = m$ ve $\gamma_{\ell+2} = m-1, \gamma_{\ell+3} = m-2, \dots, \gamma_{\ell+m-1} = 2$ olacaktır. Bu durumda yukarıdaki $\ell + m$ adet rasgele değişkenin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.17)'den hareketle, $y_1 < y_2 < \dots < y_{\ell+m}$ için,

$$\begin{aligned} & f^{X(1, \ell+m, \tilde{m}^*, 1), \dots, X(\ell+m, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)}(y_1, y_2, \dots, y_{\ell+m}) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{m+\ell-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{m+\ell-1} (1-F(y_i))^{m_i} f(y_i) \right) [1-F(y_{m+\ell})]^0 f(y_{m+\ell}) \\ &= m^{\ell+1} (m-1)! \left(\prod_{i=1}^{\ell} [1-F(y_i)]^{-1} \right) \left(\prod_{i=1}^{m+\ell} f(y_i) \right) \\ &= m^{\ell} m! \left(\prod_{i=1}^{\ell} \frac{f(y_i)}{1-F(y_i)} \right) \left(\prod_{i=\ell+1}^{m+\ell} f(y_i) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

olacaktır. Bu noktada, $X(\ell+1, \ell+m, \tilde{m}^*, 1), \dots, X(\ell+m, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)$ lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (5.1)'deki fonksiyondan hareketle,

$$f^{X(\ell+1, \ell+m, \tilde{m}^*, 1), \dots, X(\ell+m, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)}(y_{\ell+1}, y_{\ell+2}, \dots, y_{\ell+m})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{y_{\ell+1}} \int_{-\infty}^{y_{\ell}} \dots \int_{-\infty}^{y_2} f^{X(1, \ell+m, \tilde{m}^*, 1), \dots, X(\ell+m, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)}(y_1, y_2, \dots, y_{\ell+m}) dy_1 dy_2, \dots, dy_{\ell} \\
&= m^{\ell} m! \left(\prod_{i=\ell+1}^{m+\ell} f(y_i) \right) \int_{-\infty}^{y_{\ell+1}} \int_{-\infty}^{y_{\ell}} \dots \int_{-\infty}^{y_2} \left(\prod_{i=1}^{\ell} \frac{f(y_i)}{1-F(y_i)} \right) dy_1 dy_2 \dots dy_{\ell} \\
&= \frac{m^{\ell} m!}{\ell!} \left[-\ln \bar{F}(y_{\ell+1}) \right]^{\ell} \prod_{i=\ell+1}^{m+\ell} f(y_i) \tag{5.2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilecektir. (5.2)'deki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunda $x_i := y_{\ell+i}$ olarak belirlenirse bu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
&f^{X(\ell+1, \ell+m, \tilde{m}^*, 1), \dots, X(\ell+m, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\
&= \frac{m^{\ell} m!}{\ell!} \left[-\ln \bar{F}(x_1) \right]^{\ell} \prod_{i=1}^m f(x_i) \tag{5.3}
\end{aligned}$$

olarak yazılacaktır. Kolayca görülebilir ki, (5.3)'teki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, (2.42)'de verilen, Tanıl (2009)'ın elde etmiş olduğu ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek m skorun ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna eşittir. O zaman, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinde $k=1$ ve $\tilde{m} := \tilde{m}^* = (\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\ell \text{ tane}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1 \text{ tane}})$

parametreleri için $X_{r:m}^{(\ell)} = X(\ell+r, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)$ doğrudur.

Meijer'in G-fonksiyonunu kullanarak keyfi pozitif γ_j parametreleri için Cramer ve Kamps (2003)'ün vermiş olduğu (2.22)'deki marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ℓ 'inci güncelleme sonrası en yüksek m skora dayalı sıra istatistiklerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için kullanılabilir. Çünkü, (2.22)'deki olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r > 0$ olduğu varsayımı altında geçerlidir. $k=1$ ve $\tilde{m} := \tilde{m}^* = (\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\ell \text{ tane}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1 \text{ tane}})$ parametreleri için tüm γ_j 'ler pozitif olmaktadır. O zaman, $X_{r:m}^{(\ell)} = X(\ell+r, \ell+m, \tilde{m}^*, 1)$ olduğuna göre, Tanıl (2009) tarafından elde edilmiş olan (2.43)'teki olasılık yoğunluk fonksiyonunun

farklı bir gösterimi olarak $X_{r,m}^{(\ell)}$ 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu, $x \in \mathfrak{R}$ ve $1 \leq r \leq m$ için,

$$\begin{aligned}
f^{X_{r,m}^{(\ell)}}(x) &= f^{X^{(\ell+r, \ell+m, \vec{m}^*, 1)}}(x) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{\ell+r} \gamma_j \right) G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\overline{F}(x) \left| \begin{array}{c} \gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+r} \\ \gamma_1 - 1, \dots, \gamma_{\ell+r} - 1 \end{array} \right. \right] f(x) \\
&= m^\ell m(m-1)(m-2)\dots(m-r+1) \\
&\quad \times G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\overline{F}(x) \left| \begin{array}{c} \overbrace{m, m, \dots, m}^{\ell+1 \text{ tane}}, m-1, m-2, \dots, m-r+1 \\ m-1, m-1, \dots, m-1, m-2, m-3, \dots, m-r \end{array} \right. \right] f(x) \\
&= \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\overline{F}(x) \left| \begin{array}{c} \overbrace{m, m, \dots, m}^{\ell+1 \text{ tane}}, m-1, m-2, \dots, m-r+1 \\ m-1, m-1, \dots, m-1, m-2, m-3, \dots, m-r \end{array} \right. \right] f(x)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak elde edilecektir.

6. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, en yüksek m skorun, dağılım fonksiyonu, momentleri ve karakteristik fonksiyonlarıyla birlikte; genelleştirilmiş sıra istatistikleriyle ilişkisi incelenmiştir. Bu amaçla, en yüksek m skorun dağılım fonksiyonlarını, momentlerini ve karakteristik fonksiyonlarını içerecek bir yapı fonksiyonu verilmiş ve bu yapı fonksiyonu, klasik sıra istatistikleri ve üst m -rekorların yapı fonksiyonlarının lineer bağıntısı olarak elde edilmiştir.

Diğer yandan, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonundan, en yüksek m skorun birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilerek, en yüksek m skorun genelleştirilmiş sıra istatistiklerinden indirgenebildiği gösterilmiştir. Bunun yanında, en yüksek m skorun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun, genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonundan belirli parametreler ile direk indirgenebildiği gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmadan çıkarılabilecek bulgulardan bazıları aşağıda verilmiştir:

(i) $\ell = 0$ için Teorem 3.1,

$$\begin{aligned}
G_{g(y)}^{X_{r,m}^{(0)}}(x) &= m^{0+1} G_{g(y)}^{X_{r-1,m-1}^{(0)}}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{t=1}^i \sum_{j_i=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^i m^0 c_{i+1,m}}{(i+1)^{0-j_1-\dots-j_i} \prod_{u=1}^i u^{j_u}} G_{g(y)}^{X_{r-i-1,m-i-1}^{(0)}}(x) \\
&+ \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j_t=0}^{\ell_t} \frac{(-1)^{r-1} c_{r-1,m-1}}{m^{-j_1-\dots-j_{r-1}} \prod_{u=1}^{r-1} u^{j_u}} G_{g(y)}^{X_{1,m}^{(0)}}(x) \\
&= m G_{g(y)}^{X_{r-1,m-1}^{(0)}}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} G_{g(y)}^{X_{r-i-1,m-i-1}^{(0)}}(x) \\
&+ (-1)^{r-1} c_{r-1,m-1} G_{g(y)}^{X_{1,m}^{(0)}}(x) \tag{6.1}
\end{aligned}$$

şeklinde sadeleşir. Burada,

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=0}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} G_{g(y)}^{X_{r-i-1:m-1}^{(0)}}(x) \right) - \left(\sum_{i=1}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} G_{g(y)}^{X_{r-i-1:m-1}^{(0)}}(x) \right) \\
&= (-1)^0 c_{0+1,m} G_{g(y)}^{X_{r-0-1:m-0-1}^{(0)}}(x) \\
&= c_{1,m} G_{g(y)}^{X_{r-1:m-1}^{(0)}}(x) \\
&= \frac{m!}{(m-1)!} G_{g(y)}^{X_{r-1:m-1}^{(0)}}(x) \\
&= m G_{g(y)}^{X_{r-1:m-1}^{(0)}}(x) \tag{6.2}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabileceğinden, (6.1) eşitliği,

$$G_{g(y)}^{X_{r:m}^{(0)}}(x) = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} G_{g(y)}^{X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)}}(x) + (-1)^{r-1} c_{r-1,m-1} G_{g(y)}^{X_{1:m}^{(0)}}(x) \tag{6.3}$$

haline gelerek basit bir formda elde edilmiş olur. Burada açıkça görüleceği üzere, (6.3) eşitliği, klasik sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonlarının, α ' nıncı momentlerinin ve karakteristik fonksiyonlarının yeni yineleme bağıntılarını vermektedir. Örneğin, $r > 1$ için, $g(y) = 1$ seçilirse,

$$F^{X_{r:m}^{(0)}}(x) = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} F^{X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)}}(x) + (-1)^{r-1} c_{r-1,m-1} F^{X_{1:m}^{(0)}}(x), \tag{6.4}$$

$g(y) = y^\alpha$ seçilirse,

$$E\left[X_{r:m}^{(0)}\right]^\alpha = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} E\left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)}\right]^\alpha + (-1)^{r-1} c_{r-1,m-1} E\left[X_{1:m}^{(0)}\right]^\alpha, \tag{6.5}$$

ve $g(y) = e^{iy}$ seçilirse,

$$E\left[e^{itX_{r:m}^{(0)}}\right] = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} E\left[e^{itX_{r-1-i:m-1-i}^{(0)}}\right] + (-1)^{r-1} c_{r-1,m-1} E\left[e^{itX_{1:m}^{(0)}}\right] \tag{6.6}$$

bağıntıları elde edilir.

(ii) $\ell = 0$ için Teorem 4.1,

$$E\left[X_{1:m}^{(0)} X_{s:m}^{(0)}\right] = \frac{C_{1,s,m}}{(m-s+1)^2} E\left[h_{1;s-2}\left(X_{1:m-s+1}^{(0)}, X_{1:m-s+1}^{(1)}\right)\right] \tag{6.7}$$

haline gelecektir.

(iii) $\ell = 0$ için Teorem 4.2,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{r:m}^{(0)} X_{s:m}^{(0)}\right] &= mE\left[X_{r-1:m-1}^{(0)} X_{s-1:m-1}^{(0)}\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{r-2} (-1)^i c_{i+1,m} E\left[X_{r-1-i:m-1-i}^{(0)} X_{s-1-i:m-1-i}^{(0)}\right] \\
&+ \frac{(-1)^{r-1} c_{r,s,m}}{(m-s+1)^2} E\left[h_{r,s-r-1}\left(X_{1:m-s+1}^{(0)}, X_{1:m-s+1}^{(1)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

şeklinde basit bir forma dönüşür. Yukarıda elde edilen (6.7) ve (6.8) formüllerinin, klasik sıra istatistikleri ile üst $(m-s+1)$ -rekorlar arasındaki ilişkileri verdikleri açıkça görülmektedir.

(iv) (5.4) eşitliğinden hareketle, en yüksek m skor için marjinal dağılım fonksiyonu, α 'nıncı moment ve karakteristik fonksiyon Meijer'in G-fonksiyonu cinsinden sırasıyla,

$$\begin{aligned}
(i) \quad F^{X_{r:m}^{(\ell)}}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \\
&\times G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\bar{F}(y) \left| \begin{array}{c} \overbrace{m, m, \dots, m}^{\ell+1 \text{ tane}}, m-1, m-2, \dots, m-r+1 \\ m-1, m-1, \dots, m-1, m-2, m-3, \dots, m-r \end{array} \right. \right] \\
&\times f(y) dy
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad E\left[X_{r:m}^{(\ell)}\right]^\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} y^\alpha \frac{m^\ell m!}{(m-r)!} \\
&\times G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\bar{F}(y) \left| \begin{array}{c} \overbrace{m, m, \dots, m}^{\ell+1 \text{ tane}}, m-1, m-2, \dots, m-r+1 \\ m-1, m-1, \dots, m-1, m-2, m-3, \dots, m-r \end{array} \right. \right] \\
&\times f(y) dy
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad E \left[e^{itX_{r,m}^{(\ell)}} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{m^{\ell} m!}{(m-r)!} \\
&\times G_{\ell+r, \ell+r}^{\ell+r, 0} \left[\bar{F}(y) \left| \begin{array}{c} \overbrace{m, m, \dots, m}^{\ell+1 \text{ tane}}, m-1, m-2, \dots, m-r+1 \\ m-1, m-1, \dots, m-1, m-2, m-3, \dots, m-r \end{array} \right. \right] \\
&\times f(y) dy
\end{aligned}
\tag{5.44}$$

şeklinde olacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ahmad, A.A. and Fawzy, M.A.**, 2003, Recurrence relations for single moments of generalized order statistics from doubly truncated distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 117(2):241-249pp.
- Ahmad, A.A. and Al-Matrafi, B.N.**, 2006, Recurrence relations for moments and conditional moments of generalized order statistics, *University of Sharjah Journal of Pure & Applied Sciences*, 3(3).
- Ahmad, A.A.**, 2008, Single and product moments of generalized order statistics from linear exponential distribution, *Communications in Statistics & Theory and Methods*, 37(8):1162-1172pp.
- Ahmadi, J. and Balakrishnan, N.**, 2004, Confidence intervals for quantiles in terms of record range, *Statistics & Probability Letters*, 68(4):395-405pp.
- Ahmadi, J. and Doostparast, M.**, 2006, Bayesian estimation and prediction for some life distributions based on record values, *Statistical Papers*, 47(3):373-392pp.
- Ahsanullah, M. and Nevzorov, V.B.**, 2001, *Ordered Random Variables*, Nova Science Publishers, New York, 412p.
- Ahsanullah, M.**, 2004, *Record Values – Theory and Applications*, University Press of America Inc., New York, 314p.
- AL-Hussaini, E.K.**, 2004, Generalized order statistics: prospective and applications, *Journal of Applied Statistical Science*, 4:1-12pp.
- Al-Matrafi, B.N.**, 2006, Some results for the moments of generalized order statistics from linear exponential distribution, *Umm Al-Qura University Journal of Science – Medicine – Engineering*, 18(1):55-64pp.
- Al-Matrafi, B.N. and Jawa, T.M.**, 2008, Recurrence relations for single moments of generalized order statistics from doubly truncated continuous distributions, *Journal of King Abdulaziz University Science*, 20(2):79-89pp.
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.**, 1992, *A First Course in Order Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.**, 1998, *Records*, Wiley, New York.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.,** 2008, A First Course in Order Statistics, John Wiley & Sons, New York.
- Athar, H. and Islam, H.,** 2004, Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics from a general class of distribution, *Metron*, **LXII**(3):327-337pp.
- Bairamov, I.G.,** 1997, Some distribution free properties of statistics based on record values and characterizations of the distributions through a record, *Journal of Applied Statistical Science*, 5(1):17-25pp.
- Bairamov, I.G. and Eryilmaz, S.N.,** 2000, Distributional properties of statistics based on minimal spacing and record exceedance statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 90:21-33pp.
- Bairamov, I.G. and Eryilmaz, S.,** 2001, On properties of statistics connected with minimal spacing and record exceedances, *Journal of Applied Statistical Science*, V, 245-254.
- Bairamov, I.G. and Kotz, S.,** 2001, On distributions of exceedances associated with order statistics and record values for arbitrary distributions, *Statistical Papers*, 42:171-185pp.
- Bairamov, I., Ahsanullah, M. and Pakes, A.,** 2005, A characterization of continuous distributions via regression on pairs of record values, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 47(4):543-547pp.
- Bairamov, I. and Stepanov, A.,** 2006, A note on large deviations for weak records, *Statistics & Probability Letters*, 76:1449-1453pp.
- Bairamov, I.G. and Khan, M.K.,** 2007, On exceedances of record and order statistics, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(6):1935-1945pp.
- Baklizi, A.,** 2008, Estimation of $\Pr(X < Y)$ using record values in the one two parameter exponential distributions, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 37:692-698pp.
- Balakrishnan, N. and Malik, H.J.,** 1986, Order statistics from the linear exponential distribution, part I: increasing hazard rate case, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 15(1):179-203pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Balakrishnan, N. and Nevzorov, V.B.**, 1998, A record of records, *Handbook of Statistics*, 16.
- Barlevy, G.**, 2003, Estimating models of on-the-job search using record statistics, NBER Working Paper 10146, 2003-18, Federal Reserve Bank of Chicago.
- Barlevy, G.**, 2005, Identification of search models using the record statistics, *Review of Economic Studies*, 75(1):29-64pp.
- Benestad, R.E.**, 2004, Record-values, nonstationarity tests and extreme value distributions, *Global and Planetary Change*, 44(1-4):11-26pp.
- Bieniek, M. and Szynal, D.**, 2002, Recurrence relations for distribution functions and moments of k -th record values, *Journal of Mathematical Sciences*, 111(3):3511-3519pp.
- Bieniek M. and Szynal, D.**, 2007, On k -th record times, record values and their moments, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(1):12-22pp.
- Burkschat, M. and Lenz, B.**, 2009, Marginal distributions of the counting process associated with generalized order statistics, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 38(12):2089-2106pp.
- Chandler, K.N.**, 1952, The distribution and frequency of record values, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 14(2):220-228pp.
- Cole, R.H.**, 1951, Relations between moments of order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(2):308-310pp.
- Cramer, E. and Kamps, U.**, 2000, Relations for expectations of functions of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 89(1-2):79-89pp.
- Cramer, E., Kamps, U. and Rychlik, T.**, 2002, On the existence of moments of generalized order statistics, *Statistics & Probability Letters*, 59(4):397-404pp.
- Cramer, E.**, 2003, Contributions to Generalized Order Statistics, Habilitationsschrift, University of Oldenburg, 169p.
- Cramer, E. and Kamps, U.**, 2003, Marginal distributions of sequential and generalized order statistics, *Metrika*, 58(3):293-310pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Cramer, E.**, 2009, Hermite interpolation polynomials and distributions of ordered data, *Statistical Methodology*, 6(4):337-343pp.
- Dargahi-Noubary, G.R.**, 1990, Seismic hazard assesment using the theory of records, *Natural Hazards*, 3(2):161-171pp.
- David, H.A.**, 1970, Order Statistics, John Wiley & Sons, New York, 272p.
- Dauidsen, J., Grassberger, P. and Paczuski, M.**, 2008, Network of recurrent events, a theory of records, and an application to finding causal signatures in seismicity, *Physical Review E*, 77(6), 17p.
- Devroye, L.**, 1988, Applications of the theory of records in the study of random trees, *Informatica*, 26:(123-130)pp.
- Dziubdziela, W. and Kopociński, B.**, 1976, Limiting properties of the k -th record values, *Applicationes Mathematicae*, 15:187-190pp.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G.**, 1953, Higher Transcendental Functions, I, McGraw-Hill, New York.
- Galambos, J.**, 1978, The asymptotic theory of extreme order statistics, Wiley, New York.
- Gembris, D., Taylor, J.G. and Suter, D.**, 2007, Evolution of athletic records: statistical effects versus real improvements, *Journal of Applied Statistics*, 34(5):529-545pp.
- Glick, N.**, 1978, Breaking records and breaking boards, *The American Mathematical Monthly*, 85(1):2-26pp.
- Govindarajulu, Z.**, 1963, On moments of order statistics and quasi-ranges from normal populations, *The Annals of Mathematical Statistics*, 34(2):633-651pp.
- Grudzień, Z.**, 1982, Characterization of Distribution of Time Limits in Record Statistics, as Well as Distributions and Moments of Linear Record Statistics from the Samples of Random Numbers, Praca Doktorska, UMCS, Lublin.
- Grudzień, Z. and Szynal D.**, 1985, On the expected values of k -th record values and associated characterizations of distributions, 3516, Bieniek, M. and Szynal, D. (Eds), *Journal of Mathematical Sciences*, 111(3):3511-3519pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Grudzień, Z. and Szynal, D.**, 1997, Characterization of continuous distributions via moments of the k -th record values with random indices, *Journal of applied Statistical Science*, 5(4):259-266pp.
- Jain, K. and Krug, J.**, 2005, Evolutionary trajectories in rugged fitness landscapes, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P04008.
- Joshi, P.**, 1973, Two identities involving order statistics, *Biometrika*, 60(2):428-429pp.
- Joshi, P.C. and Balakrishnan, N.**, 1982, Recurrence relations and identities for the product moments of order statistics, *Sankhya, Series B*, 44:39-49pp.
- Kamps, U.**, 1991, A general recurrence relation for moments of order statistics in a class of probability distributions and characterizations, *Metrika*, 38(1):215-225pp.
- Kamps, U.**, 1994, Reliability properties of record values from non-identically distributed random variables, *Communication in Statistics – Theory and Methods*, 23(7):2101-2112pp.
- Kamps, U.**, 1995a, A concept of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48(1):1-23pp.
- Kamps, U.**, 1995b, A Concept of Generalized Order Statistics, Teubner, Stuttgart, 210p.
- Kamps, U. and Cramer, E.**, 2001, On distributions of generalized order statistics, *Statistics*, 35(3):269:280pp.
- Khan, A.H., Yaqub, M. and Parvez, S.**, 1983, Recurrence relations between Moments of order statistics, *Naval Research Logistics Quarterly*, 30(3):419-441pp.
- Khan, R.U. and Zia, B.**, 2009, Recurrence relations for single and product moments of record values from Gompertz distribution and a characterization , *World Applied Sciences Journal*, 7(10):1331-1334pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Krishnaiah, P.R. and Rizvi, M.H.**, 1966, A note on recurrence relations between expected values functions of order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(3):733-734pp.
- Kundu, C., Nanda, A.K. and Hu, T.**, 2009, A note on reversed hazard rate of order statistics and record values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(4):1257-1265pp.
- Lin, G.D.**, 1988, Characterizations of distributions via relationships between two moments of order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 19(1):73-80pp.
- Luke, Y.L.**, 1969, *The Special Functions and Their Approximations, I*, Academic Press, New York.
- Madi, M.T. and Raqab, M.Z.**, 2004, Bayesian prediction of temperature records using the Pareto model, *Environmetrics*, 15(7):701-710pp.
- Madi, M.T. and Raqab M.Z.**, 2007, Bayesian prediction of rainfall records using the generalized exponential distribution, *Environmetrics*, 18(5):541-549pp.
- Mahmoud, M.A.W. and Al-Nagar, H. S.**, 2009, On generalized order statistics from linear exponential distribution and its characterization, *Statistical Papers*, 50(2):407-418pp.
- Majumdar, S.N. and Ziff, R.M.**, 2008, Universal record statistics of random walks and levy flights, *Physical Review Letters*, 101(5).
- Malik, J.H., Balakrishnan, N. and Ahmed, S.E.**, 1988, Recurrence relations mid identities for moments of order statistics, i: arbitrary continuous distribution, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 17(8): 2623-2655pp.
- Mathai, A.M. and Saxena, R.K.**, 1973, *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*, Lecture Notes in Mathematics, 348, Springer, Berlin.
- Mathai, A.M.**, 1993, *A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences*, Clarendon Press, Oxford.
- Mathai, A.M. and Haubold, H.J.**, 2008, *Special Functions For Applied Scientists*, Springer, New York, 464p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Munasinghe, L., O'Flaherty, B. and Danninger, S.,** 2001, Globalization and the rate of technological progress: what track and field records show, *Journal of Political Economy*, 109(5):1132-1149pp.
- Nagaraja, H.N.,** 1988, Record values and related statistics – a review, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 17(7):2223-2238pp.
- Nasri-Roudsari, D.,** 1996, Extreme value theory of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 55(3):281-297pp.
- Nevzorov, V.B.,** 1987, Records, *Theory of Probability and its Applications*, 32(2):201-228pp.
- Nevzorov, V.B.,** 2001, Records: A Mathematical Theory, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 194, 164p.
- Pawlas, P. and Szynal, D.,** 1998, Relations for single and product moments of k -th record values from exponential and Gumbel distributions, *Journal of Applied Statistical Science*, 7:53-61pp.
- Pawlas, P. and Szynal, D.,** 1999, Recurrence relations for single and product moments of k -th record values from Pareto, generalized Pareto and Burr distributions, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 28(7):1699-1709pp.
- Pawlas, P. and Szynal, D.,** 2001, Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics from Pareto, generalized Pareto, and Burr distributions, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 30(4):739-746pp.
- Pfeifer, D.,** 1997, A statistical model to analyse natural catastrophe claims by means of record values, Proceedings of the 28 International ASTIN Colloquium, Cairns, August 10-12, 1997, The Institute of Actuaries of Australia, 45-57pp, Sydney.
- Pisarenko, V.F. and Rodkin, M.V.,** 2008, Nonparametric methods in studies of the seismic regime, *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 44(1):1-8pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Raqab, M.Z.**, 2001, Some results on the moments of record values from linear exponential distribuiton, *Mathematical and Computer Modeling*, 34(1): 1-8pp.
- Raqab, M.Z., Ahmadi, J. and Doostparast, M.**, 2007, Statistical inference based on record data from Pareto model, *Statistics*, 41(2):105-118pp.
- Redner, S. and Petersen, M.R.**, 2006, Role of global warming on the statistics of record-breaking temperatures, *Physical Review E*, 74:061114, doi:10.1103/PhysRevE.74.061114.
- Samuel, P. and Thomas, P.Y.**, 2000, An improved form of a recurrence relation on the product moments of order statistics, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 29(7):1559-1564pp.
- Saran, J. and Pushkarna, N.**, 1998, Some new identities for single moments of order statistics, *Statistics*, 30(4):345-355pp.
- Sibuya, M. and Nishimura, K.**, 1997, Prediction of record-breakings, *Statistica Sinica*, 893-906pp.
- Soliman, A.A., Abd Ellah, A.H. and Sultan, K.S.**, 2006, Comparison of estimates using record statistics from Weibull model: Bayesian and non-Bayesian approaches, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(3): 2065-2077pp.
- Srikantan, K.S.**, 1962, Recurrence relations between the PDF's of order statistics , and some applications, *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(1):169-177pp.
- Sultan, K.S.**, 2007, Record values from the modified Weibull distribution and applications, *International Mathematical Forum*, 2(41):2045-2054pp.
- Tanil, H.**, 2009, An order statistics model based on the list of top m scores after ℓ th change, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(7): 2189-2195pp.
- Thomas, P.Y. and Samuel, P.**, 1996, A note on recurrence relations for the product moments of order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 29(3)-245-249pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Vogel, R.M., Zafirakou-Koulouris, A. and Matalas, N.C.,** 2001, Frequency of record-breaking floods in the United States, *Water Resources Research*, 37(6):1723-1731pp.
- Wu, J.W. and Tseng H.C.,** 2007, Statistical inference about the shape parameter of the Weibull distribution by upper record values, *Statistical Papers*, 48(1)-95-129pp.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Ankara'da doğan Olgun ÖZDEMİR, ilk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamlamıştır. 2004 yılında girdiği Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nden 2008 yılında mezun olmuştur. Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Teorik İstatistik Anabilim Dalı'nda, 2008 yılında başladığı yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.