

**HİPERBOLİK GEOMETRİNİN POINCARÉ YUVAR
MODELİ ÜZERİNE**

DOKTORA TEZİ

Oğuzhan DEMİREL

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
EYLÜL 2010**

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**HİPERBOLİK GEOMETRİNİN POINCARÉ YUVAR
MODELİ ÜZERİNE**

Oğuzhan DEMİREL

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL 2010

ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE' nin danışmanlığında, Oğuzhan DEMİREL tarafından hazırlanan "Hiperbolik Geometrinin Poincaré Yuvar Modeli Üzerine" başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 17.09.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Şükrü OLGUN	
Danışman	Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE	
Üye	Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI	
Üye	Yar. Doç. Dr. Derya SAĞLAM	
Üye	Yar. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
...../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

HİPERBOLİK GEOMETRİNİN POINCARÉ YUVAR MODELİ ÜZERİNE

Oğuzhan DEMİREL

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, $(\mathbb{R}_1^n, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında periyodik doğruların bulunmadığı kanıtlanmış ve bu uzayda her bir gyrodoğrunun ve cogyrodoğrunun birer metrik doğru olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, gyrotrigonometri yardımıyla hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modelinde hiperbolik Breusch lemması, hiperbolik Urquhart teoremi ve hiperbolik Steiner-Lehmus teoremleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, hiperbolik ikizkenar üçgenler ve hiperbolik düzgün çokgenler yardımıyla Möbius dönüşümlerinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

2010, 118 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Gyrogrup, Gyrovektör uzayı, Poincaré yuvar modeli, Gyrotrigonometri, Möbius dönüşümleri.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE POINCARÉ BALL MODEL OF HYPERBOLIC GEOMETRY

Oğuzhan DEMİREL

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature. In the second chapter, some required concepts are mentioned. In the third chapter, non-existence of periodic lines in the Möbius gyrovector space $(\mathbb{R}_1^n, \oplus, \otimes)$ is proved and it is showed that all gyrolines and cogyrolines in this space are metric lines. In the fourth chapter, hyperbolic Breusch lemma, the hyperbolic Urquhart theorem and the hyperbolic Steiner-Lehmus theorem in the Poincaré ball model of hyperbolic geometry are examined. In the fifth chapter, a characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic isosceles triangles and hyperbolic regular polygons is given.

2010, pages 118

KEY WORDS : Gyrogroup, Gyrovector spaces, Poincaré ball model, Gyrotrigonometri, Möbius transformations.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE' ye teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili babam Raşit DEMİREL'e ve sevgili annem Sevim DEMİREL'e, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman desteğini yanımda hissettiğim sevgili eşim Yasemin DEMİREL'e ve canım kızım Öykü İpek DEMİREL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Oğuzhan DEMİREL

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^n	n – boyutlu Öklid Uzayı
\mathbb{R}_s^n	\mathbb{R}^n uzayında s -yarıçaplı yuvar
\mathbb{V}_s	\mathbb{V} reel iç çarpım uzayında s -yarıçaplı yuvar
\mathbb{D}	Kompleks birim disk
\mathbb{H}^2	Poincaré disk modeli
\mathbb{U}^2	Poincaré üst yarı düzlem modeli
\langle, \rangle	İç çarpım
$\ , \ $	Norm fonksiyonu
\oplus_M	Yuvar üzerinde Möbius toplamı
\oplus_E	Yuvar üzerinde Einstein toplamı
$gyr [a, b]$	a ve b elemanlarıyla üretilen gyrootomorfizm
Id	Birim dönüşüm
\boxplus	Gyrogrup işleminin duali
$Oto(G, \oplus)$	G gyro grubunun \oplus işlemine göre gyro grubu
$Oto_0(G, \oplus)$	$gyr [a, b]$ biçimindeki gyrootomorfizmler kümesi
γ_u	Gamma faktörü
β_u	Beta faktörü
$B_{p,k}$	Lorentz artışı
$l(x, y)$	x ve y arasındaki Lorentz-Minkowski uzaklığı
(S, d)	Reel uzaklık uzayı
i_S	Çember inversiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 3.4.1.1 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında bir gyrodoğru
- Şekil 3.4.1.2 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında bir gyrodoğruya dışındaki bir noktadan çizilen paralel gyrodoğrular
- Şekil 3.4.1.3 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında bir cogyrodoğru
- Şekil 3.4.1.4 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında bir cogyrodoğruya dışındaki bir noktadan çizilen paralel cogyrodoğru
- Şekil 3.5.1 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_E, \otimes_E)$ Einstein gyrovektör uzayında bir gyrodoğru
- Şekil 3.5.2 $(\mathbb{R}_1^2, \oplus_E, \otimes_E)$ Einstein gyrovektör uzayında bir cogyrodoğru
- Şekil 4.2.1.1 $(\mathbb{R}_s^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında bir gyroüçgen
- Şekil 4.2.1.2 Bir ABC gyroüçgeninin f Möbius dönüşümü altındaki görüntüsü
- Şekil 4.2.1.3 \mathbb{D} de hiperbolik Carnot teoremi
- Şekil 4.2.1.4 $(\mathbb{R}_s^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında gyrosinüs kuralı
- Şekil 4.2.1.5 $(\mathbb{R}_s^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında hiperbolik Urquhart
- Şekil 5.1.1 S de inversiyon
- Şekil 5.1.2 İversiyon altında geometrik olarak görüntü bulma
- Şekil 5.1.3 \mathcal{C} çemberine ortogonal olan \mathcal{C}' çemberi üzerindeki bir noktanın inversiyon altındaki görüntüsü yine \mathcal{C} çemberi üzerinde olması
- Şekil 5.1.1.1 \mathbb{H}^2 üzerinde hiperbolik yansıma
- Şekil 5.1.2.1 \mathbb{H}^2 üzerinde hiperbolik öteleme
- Şekil 5.1.2.2 \mathbb{U}^2 üzerinde hiperbolik öteleme
- Şekil 5.1.3.1 \mathbb{H}^2 üzerinde hiperbolik dönme
- Şekil 5.1.4.1 \mathbb{H}^2 üzerinde parabolik izometri
- Şekil 5.1.4.2 \mathbb{U}^2 üzerinde parabolik izometri
- Şekil 5.2.2.1 Diskin sınırında kesişen hiperbolik doğruların görüntülerinin de diskin sınırdaki kesişmesi
- Şekil 5.2.2.2 f dönüşümü altında hiperbolik doğruların üzerindeki noktaların sırasının korunması

Şekil 5.2.2.3 $g(x)$ noktasının u tarafından tanımlanması

Şekil 5.2.2.4 \mathbb{U}^2 üzerinde bir 1 hiperbolik doğrusuna göre hiperbolik yansıma

İÇİNDEKİLER

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
İÇİNDEKİLER	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	8
2.1. Gyrogruplar.....	8
2.2. Gyrodeğişmeli Gyrogruplar.....	20
2.3. Möbius Kompleks Disk Gyrogrubu.....	27
2.4. Möbius Gyrogrupları.....	30
2.4.1. Yuvar Üzerinde Möbius Toplamı.....	31
2.5. Einstein gyrogrupları.....	33
2.5.1. Yuvar Üzerinde Einstein Toplamı.....	34
3. GYROVEKTÖR UZAYLARI	40
3.1. Gyrovektörler ve Cogyrovektörler.....	40
3.2. Gyrovektör Uzayları.....	42
3.3. Gyrodoğrular ve Cogyrodoğrular.....	46
3.4. Möbius.Gyrovektör Uzayları.....	53
3.4.1. Möbius gyrometriğinin Poincaré Gyrometriğine Dönüşümü.....	55
3.4.2. Metrik ve Periyodik Doğrular.....	59
3.5. Einstein Gyrovektör Uzayları.....	70
3.5.1. Einstein Gyrometriğinin Metriğe Dönüşümü.....	71
3.6. Gyrovektör Uzay İzomorfizmleri.....	72

4. GYROTRİGONOMETRİ	75
4.1. Gyroaçılar.....	75
4.2. Möbius Gyrovektör Uzaylarında Gyrotrigonometri.....	77
5. HİPERBOLİK İZOMETRİ	91
5.1. Çember İncersiyonu.....	92
5.1.1. Hiperbolik Yansıma İzometrisi.....	95
5.1.2. Hiperbolik Öteleme İzometrisi.....	96
5.1.3. Hiperbolik Dönme İzometrisi.....	97
5.1.4. Parabolik İzometri.....	98
5.2. Möbius Dönüşümlerinin Bazı Karakterizasyonları.....	99
5.2.1. Möbius Dönüşümlerinin Hiperbolik Çokgenlerle Karakterizasyonu....	99
5.2.2. Möbius Dönüşümlerinin Hiperbolik Doğrularla Karakterizasyonu.....	110
KAYNAKLAR	116
ÖZGEÇMİŞ	x

1 GİRİŞ

Geometri, tarihi binlerce yıl öncesine dayanan matematiğin en eski branşlarından biri olmasına rağmen henüz kesin bir tanımı yapılamamıştır. Literatürde "cisimlerin büyüklük ve biçimlerini ölçen bilim dalı" olarak geçmesine rağmen bu tanım çoğu matematikçi ve geometrici tarafından kabul edilebilir olmaktan uzaktır. Geometrinin en benimsenen tanımı Alman matematikçi Felix Klein tarafından verilmiştir. Klein geometriyi " \mathcal{S} bir küme ve G ise \mathcal{S} kümesini kendisine döndürtüren döndürüşümlerden meydana gelen bir grup olmak üzere, \mathcal{S} kümesinin G nin elemanları olan döndürüşümler altında değişmez kalan özelliklerinin incelenmesi" olarak tanımlamıştır. Bu tanım açıkça geometriyi döndürüşümler grubuyla birleştirmek zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır. Döndürüşümler de genel olarak geometrik kavram olmayan *noktaların koordinatları* yardımıyla formüleleştirilebilir. Bu sebeple, Klein' in tanımı geometriyi bağımsız ve kendine özgü yöntemlerle incelenebilen bir dal olarak düşünmek fikrine aykırı görüldüğünden bazı geometriciler tarafından eleştiriye uğramaktadır. Böylece bu tanım genel bir geometri tanımı değil fakat bir kümenin geometrisinin tanımı olarak düşünülebileceği için geometri kavramına daha geniş bir açıdan bakılmasını mümkün kılmıştır (Kaya, 1992).

Kaynaklar; geometrinin önce Eski Mısır'da başladığını, Eski Yunanlılar'ın geometriyi Eski Mısır'dan öğrenmiş olduklarını belirtmektedir. Eski Yunanlılar, geometriyi sistemli ispatlara dayanan müstakil bir bilim haline getirmişlerdir. Thales (M.Ö. 624–M.Ö. 546), Pythagoras (M.Ö. 570-M.Ö. 490) ve Euclides (Öklid, M.Ö. 325 - M.Ö. 265) bu dönemin en ünlü geometricileridir. Öklid'in M.Ö. 300 yılında yazdığı "Elements" adlı 13 ciltten oluşan kitap, geometrinin sistemli bir bilgi haline gelmesine öncülük etmiştir. Günümüzde orta öğrenim boyunca öğretilen geometri, Öklid' in ortaya koyduğu bu düzlem geometridir.

Öklid düzlem geometrisinde temel elemanlar noktalar ile doğrulardır. Nokta ve doğru, tanımlanamayan ilkel kavramlardır. Öklid geometrisi; tanımlar, aksiyomlar ve postülatlar olmak üzere üç temel kavrama dayandırılmıştır. Tanımlar, kendine özgü bir takım özellikleri olan geometrik nesnelere belirlemek yada diğerlerinden ayırmak için onlara

verilen isimden ibarettir. Aksiyomlar ise doğruluğundan şüphenilmeyen ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Postülatlar ise aksiyomlar gibi ispatsız kabul edilen fakat doğruluklarına o zamanki anlayışa göre aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir.

Öklid' in beş postülatı vardır. Bunların günümüz modern matematiğindeki karşılıkları şöyledir:

- i. Bir noktadan diğer bir noktaya bir tek doğru çizilebilir.
- ii. Herhangi bir doğru parçası bir doğrultuda istenildiği kadar uzatılabilir.
- iii. Merkezi ve yarıçapı verilen bir tek çember vardır.
- iv. Bütün dik açılar eşittir.
- v. Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.

İlk dört postülat kısa ve kesindir. Beşinci postülat ise bazı matematikçiler tarafından çokça tartışılmış olup, Öklid geometrisinde bir boşluk olabileceği düşüncesine itmiştir. Ömer Hayyam ile Tûsî'nin Öklid'in beşinci postulatını incelenmesi yeni bir devrin başladığını gösterir. Ömer Hayyâm'ın Fî Şerhi mâ Eşkale min Müsaderat Kitabı Öklid (Öklid Elemanlarının Zorluğu Üzerine) adlı eseri bir anlamda Öklid dışı geometrilere açılan ilk kapıdır. Bu Müslüman geometri alimlerinin çalışmaları, Rönesanstan sonra Avrupa'da yetişen geometricilere rehberlik etmiştir. Öklid'in paraleller postulatının ilk eleştirmenleri, bu postulatın doğruluğundan değil, açık bir noktanın olmayışından şüphelenmişler ve bu postulatı bir tarafa bırakarak, açıklığı olan başka bir postulatı ortaya koymaya çalışmışlardır. On sekizinci asırda paraleller postulatı üstüne Avrupa'da Saccheri, Legender, Lambert gibi matematikçiler ile 19. asırda Alman Matematikçi Gauss tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu araştırmalardaki başarısızlık, bu postulatın "kabul edilebilir" özellikteki açık önermelerden faydalanarak ispat edilemeyeceği düşüncesini ortaya koymuştur. Gerçekten çok geçmeden bu düşünce 1832 de Janos Bolyai ve 1855 de Nikolai Ivanovch Lobachevsky "paraleller postulatı" yerine "Lobacevski postulatı" nı (bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebileceğini kabul eden postulat) koyarak, yeni bir geometri kurulabileceğinin farkına varmışlardır. Böylece "hiperbolik geometri" olarak adlandırılan yeni bir geometrinin

temelleri atılmıştır. Karl Friedrich Gauss da bu alanda çeşitli çalışmalar yapmasına rağmen çalışmalarını gizli tutmuştur. Sonrasında Eugenio Beltrami yeni modeller oluşturarak ve bu modelleri kullanarak eğer Euclid Geometrisi tutarlıysa hiperbolik geometrinin de tutarlı olduğunu kanıtlamıştır. Daha sonra Georg Friedrich Bernhard Riemann paralellliğini kabul etmeyen “Eliptik Geometri”nin (gerçek projektif düzlem) temellerini atmıştır.

Öklid dışı geometrilerin gelişiminin fizik için çok önemli olduğu, yirminci yüzyılda kanıtlanmıştır. 1900 lü yıllara kadar yeryüzünün mutlak hızına dair yapılan tüm varsayımlar başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Bu yönde yapılan çalışmaların en meşhuru 1887 yılında Michelson ve Morley tarafından yapılmıştır. Fakat 18 yıl sonra, Einstein daha sonra kendi adıyla anılacak olan yeni hız toplamını tanımlayarak rölativitenin (göreceliğin) özel teorisini bulmuştur. Einstein hızları, Öklidyen \mathbb{R}^3 uzayının vektörleri olan Newton hızlarının aksine görecelidir, yani büyüklüğü boşluktaki ışık hızını ($3 \times 10^5 km/sn^{-1}$) geçemez.

c boşluktaki ışık hızını göstermek üzere

$$\mathbb{R}_c^3 = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| < c \}$$

uzayı tanımlansın. \mathbb{R}_c^3 üzerinde Einstein toplamı $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_c^3$ için

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \right)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada “ \cdot ” ve “ \times ” ile sırasıyla \mathbb{R}^3 den \mathbb{R}_c^3 üzerine indirgenen iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermekte olup,

$$\gamma_{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{c^2}}}$$

dir. Einstein toplamı

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \right)$$

biçiminde de yazılabilir. Üstelik bu yeni toplam sadece 3–boyutlu uzay için değil, yüksek boyutlu uzaylarda da geçerlidir. Newton limiti altında yukarıdaki toplamda $c \rightarrow \infty$

durumunda \mathbb{R}_c^3 açık yuvarı \mathbb{R}^3 reel iç çarpım uzayına genişler ve \oplus_E Einstein toplamı ise \mathbb{R}^3 üzerindeki $+$ vektör toplamına indirgenir. $(\mathbb{R}_c^3, \oplus_E)$ Einstein gyrogrubunda Einstein skalar çarpımı

$$r \otimes_E \mathbf{v} = \frac{1 - \left(\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}\right)^{2r}}{1 + \left(\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}\right)^{2r}} \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}} \mathbf{v}$$

biçiminde tanımlı olup, bu durumda $(\mathbb{R}_c^3, \oplus_E, \otimes_E)$ cebirsel yapısı bir gyrovektör uzayıdır. Bu gyrovektör uzayı Einstein gyrovektör uzayı olarak adlandırılır. Hiperbolik geometride Einstein gyrovektör uzayı Beltrami-Klein modeline karşılık gelir. Buradaki Einstein toplamı literatürde özel rölativistik toplam olarak da adlandırılır. Burada tanımlanan toplamaya verilebilecek en iyi örnek Lorentz dönüşümleri ve Lorentz boost-ları yardımıyla verilir.

\mathbb{V} boyutu en az iki olan (sonlu yada sonsuz) boyutlu bir Hilbert uzayı ve $\langle t, t \rangle = t \cdot t = 1$ olacak biçimde sabit bir $t \in \mathbb{V}$ verilsin. Bu durumda $\mathbb{V} = t^\perp \oplus \mathbb{R}t$ olup $\forall x \in \mathbb{V}$ için

$$x = \bar{x} + x_0 t \quad \bar{x} \in t^\perp \text{ ve } x_0 \in \mathbb{R}$$

olacak biçimde tek türlü yazılır. $x, y \in \mathbb{V}$ için x ile y arasındaki Lorentz-Minkowski uzaklığı

$$l(x, y) = (\bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y}) - (x_0 - y_0)^2$$

biçiminde tanımlanır. $\lambda : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ fonksiyonu tanımlansın. $\forall x, y \in \mathbb{V}$ için

$$l(\lambda(x), \lambda(y)) = l(x, y)$$

oluyorsa λ dönüşümüne \mathbb{V} den \mathbb{V} ye bir Lorentz dönüşümü denir.

$p^2 = p \cdot p < 1$ olacak biçimde ve $p \in t^\perp$, $k^2(1 - p^2) = 1$ olacak biçimde $k \neq -1$ reel sayısı verilsin. $\forall x \in \mathbb{V}$ için

$$A_p(x) := x_0 p + (\bar{x} \cdot p) t$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu durumda A_p dönüşümü yardımıyla

$$B_{p,k} = Id + kA_p + \frac{k^2}{k+1} A_p^2$$

dönüşümü tanımlansın. $B_{p,k}$ dönüşümü de lineer olup aynı zamanda bir Lorentz dönüşümüdür. $k > 0$ için $B_{p,k}$ dönüşümüne Lorentz artışı (boost) denir. Boyutu en az iki olan (sonlu yada sonsuz) bir \mathbb{V} Hilbert uzayında tanımlı Lorentz dönüşümlerinin karakterizasyonu Benz tarafından verilmiştir (Benz, 2000). Benz'e göre bir λ Lorentz dönüşümü

$$\lambda(x) = B_{p,k}w(x) + d$$

biçiminde tek türlü yazılır. Burada w dönüşümü $w(t) = t$ olacak biçimde bir Lorentz dönüşümü ve d ise \mathbb{V} nin bir elemanıdır. $k > 0$ ve $K > 0$ için $B_{p,k}$ ve $B_{q,K}$ dönüşümleri sırasıyla B_p ve B_q ile gösterilsin. Bu durumda

$$B_p B_q = B_{r,m}w$$

olup

$$m = \frac{1 + p \cdot q}{\sqrt{1 - p^2} \sqrt{1 - q^2}}$$

ve

$$p * q := r = \frac{p + q}{1 + p \cdot q} + \frac{k}{k + 1} \frac{(p \cdot q)p - p^2 q}{1 + p \cdot q}$$

dir. Buradaki $*$ işlemi rölativistik toplama işlemidir. $Boy\mathbb{V} = 4$ için, bu toplamın bazı özellikleri Ungar tarafından incelenmiştir (Ungar^{1,2}, 1990). Demirel ve Seyrantepe ise her lineer Lorentz dönüşümünün sınırlı ve sürekli olduğunu buradaki rölativistik toplama işleminin özelliklerini kullanarak ispatlamışlardır (Demirel¹&Seyrantepe¹, 2010).

Hiperbolik geometride Beltrami-Klein modelinin dışında Poincaré yuvar modeli, Poincaré üst yarı yuvar modeli, Weierstrass modeli gibi birçok model vardır. Bu modeller her ne kadar farklı modeller olsalar da aralarında birer izomorfizm tanımlıdır. Bu modeller, nokta sayıları sonlu olmadığından hiperbolik geometrinin sonlu olmayan modelleridir.

\mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve

$$\mathbb{V}_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{v}\| < s\}$$

ise \mathbb{V} nin $s > 0$ yarıçaplı açık yuvarı olsun. $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$ için \mathbb{V}_s üzerindeki Möbius toplamı ve Möbius skalar çarpımı sırasıyla

$$\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v} = \frac{(1 + (2/s^2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (1/s^2) \|\mathbf{v}\|^2) \mathbf{u} + (1 - (1/s^2) \|\mathbf{u}\|^2) \mathbf{v}}{1 + (2/s^2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (1/s^4) \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}$$

ve

$$r \otimes_M \mathbf{v} = s \frac{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r - (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r}{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r + (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

biçiminde tanımlanır (Ungar, 2005). Bu durumda $(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ cebirsel yapısı bir gyrovektör uzayı olup, bu gyrovektör uzayı Möbius gyrovektör uzayı olarak adlandırılır. Möbius gyrovektör uzayı hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modeline karşılık gelir.

Literatürde Einstein gyrovektör uzayları ve Möbius gyrovektör uzayları üzerine yazılmış birçok kitap, makale ve bilimsel çalışma mevcuttur. Özellikle bu alanda yazılmış temel kaynak oluşturabilecek en önemli kitapların son on yıl içinde yazılmış olması hiperbolik geometrinin günümüzdeki popülerliğini göstermektedir (Ungar¹, 2001, Ungar, 2005, Ungar, 2008).

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında, bu doktora tez çalışmasında hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modeli üzerine yeni çalışmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde, gyrogruplar, gyrodeğişmeli gyrogruplar, Möbius kompleks disk gyrogrubu, Möbius gyrogrupları, yuvar üzerinde Möbius toplamı, Einstein gyrogrupları, yuvar üzerinde Einstein gyrogrupları ve Lorentz dönüştürmeleriyle ilgili temel tanım ve teoremler ile bu konularda yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir. Lorentz dönüştürmelerinin sınırlı ve sürekli olduğu, Benz tarafından verilen karakterizasyon yardımıyla gösterilmiştir (Benz, 2000, Demirel¹&Seyrantep¹, 2010).

Üçüncü bölümde, gyrovektör uzayları, Möbius gyrovektör uzayları, Einstein gyrovektör uzayları, gyrodoğrular, cogyrodoğrular, metrik doğrular, periyodik doğrulara yer verilmiş olup, hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modelindeki her hiperbolik doğrunun bir metrik doğru olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Poincaré yuvar modelinde tanımlı her metrik doğrunun aslında bir hiperbolik doğru olduğu da gösterilmiştir. Dual hiperbolik

doğruların da birer metrik doğru olduğu ve hiperbolik uzaklık yerine dual hiperbolik uzaklık alındığında yuvarın metrik doğrularının aslında yuvarın dual hiperbolik doğruları olduğu gösterilmiştir. Ayrıca yuvar üzerinde hiperbolik uzaklık veya dual hiperbolik uzaklık alındığında yuvarda periyodik doğruların bulunmadığı ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, gyrotrigonometri ve Möbius gyrovektör uzayında gyrotrigonometriye yer verilmiştir. Hiperbolik Carnot teoreminin tersinin, Öklidyen Carnot teoreminin tersinin aksine bazı koşullar altında sağlandığı gösterilmiştir (Demirel&Soytürk, 2008). Möbius gyrovektör uzayında gyrotrigonometri yardımıyla hiperbolik Carnot teoremi, hiperbolik Breusch lemması, hiperbolik Urquhart teoremi ve hiperbolik Steiner-Lehmus teoremi verilmiştir.

Beşinci bölüm ise hiperbolik izometri konusuna ayrılmıştır. Bu bölümde hiperbolik izometrilerin hiperbolik doğrular, Lambert ve Saccheri dörtgenleri, \mathcal{A} -tipindeki hiperbolik çokgenler yardımıyla karakterize edildiği belirtilmiştir. Hiperbolik ikizkenar üçgenler ve hiperbolik regüler çokgenler yardımıyla Möbius dönüşümlerinin bir karakterizasyonu verilmiştir (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Gyrogruplar

Değişmeli gruplar yardımıyla vektör uzaylarının tanımladığı gibi, gyrodeğişmeli gyrogruplar yardımıyla da gyrovektör uzayları tanımlanır. Literatürde kullanıldığı gibi bu çalışmada da Öklidyen geometride kullanılan bir terim hiperbolik geometride kullanıldığında bu terimin başına "gyro" ön eki getirilecektir. Buradaki gyro ön eki fizikte önemli bir yeri olan Thomas gyration (daireseel dönme) kavramından gelmektedir. Gyrogrupların ve gyrovektör uzayların teorik kavramlarının geliştirilmesiyle, Bolyai ve Lobachevski' nin hiperbolik geometrisinin Öklidyen geometrinin yalnızca gyro-karşılığı olduğu görülür.

Tanım 2.1.1 : G bir küme ve "*" ise G üzerinde bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısına bir grupoid denir.

Tanım 2.1.2 : $(G, *)$ bir grupoid olsun. $\forall a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ olacak biçimde $x, y \in G$ varsa bu grupoide kuasi grup (grupsu) denir.

Tanım 2.1.3 : $(G, *)$ bir kuasi grup olsun. $\forall a \in G$ için $a * e = a = e * a$ olacak biçimde $e \in G$ varsa bu kuasi gruba bir ilmik (loop) denir.

Tanım 2.1.4 : $(G, *)$ bir ilmik olsun. $\forall a, b, c \in G$ için

$$a * (b * (a * c)) = (a * (b * a)) * c$$

oluyorsa bu ilmige sol Bol-ilmik denir. $\forall a, b, c \in G$ için

$$((c * a) * b) * a = c * ((a * b) * a)$$

oluyorsa bu ilmik sağ Bol-ilmik denir.

Tanım 2.1.5 : $(G, *)$ bir grupoid olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu grupoide bir grup adı verilir:

- (i) $\forall a \in G$ için $a * e = a = e * a$ olacak biçimde $\exists e \in G$ vardır.
- (ii) $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ olacak biçimde $\exists a^{-1} \in G$ vardır.
- (iii) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

Eğer $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ sağlanıyorsa gruba değişmelidir denir.

Önerme 2.1.1 : $(G, *)$ bir grupoid olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (i) $(G, *)$ birleşmeli bir kuasi gruptur.
- (ii) $(G, *)$ birleşmeli bir ilmiktir.
- (iii) $(G, *)$ bir gruptur.

Tanım 2.1.6 : (G, \oplus) bir grupoid ve G üzerinde

- (g1) $\forall a \in G$ için $0 \oplus a = a$ olacak biçimde $\exists 0 \in G$ vardır.
- (g2) $\forall a \in G$ için $\ominus a \oplus a = 0$ olacak biçimde $\exists \ominus a \in G$ vardır.
- (g3) $\forall a, b, c \in G$ için

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a, b](c)$$

olacak biçimde bir tek $gyr[a, b](c) \in G$ vardır.

- (g4) $\forall a, b \in G$ için $gyr[a, b] \in (Oto(G), \oplus)$ dir.
- (g5) $\forall a, b \in G$ için $gyr[a, b] = gyr[a \oplus b, b]$ dir.

aksiyomları geçerli ise G ye bir gyrogrup denir. Burada $gyr[a, b]$ fonksiyonu (G, \oplus) grupoidinin $gyr[a, b] : G \rightarrow G$ biçiminde tanımlı bir otomorfizması olup, $gyr[a, b]$ otomorfizmine G nin a ve b elemanları yardımıyla üretilen gyrootomorfizması denir. (g5) aksiyomuna sol ilmik özelliği denir.

(G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için adına gyrodeğişme özelliği denilen

$$(g6) a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a)$$

özelliği sağlanıyorsa (G, \oplus) gyrogrupuna gyrodeğişmeli gyrogrup denir.

Teorem 2.1.1 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, x \in G$ için aşağıdakiler sağlanır (Ungar, 2005).

- (i) $a \oplus b = a \oplus c$ ise $b = c$ dir. (Sol sadeleştirme kuralı)
- (ii) $gyr[0, a] = Id$ (Id birim dönüşümü göstermektedir).

- (iii) $gyr [\ominus a, a] = Id$.
- (iv) $gyr [a, a] = Id$.
- (v) Sol birim aynı zamanda sağ birimdir.
- (vi) Sol birim bir ve yalnız bir tanedir.
- (vii) $\ominus a \oplus a = 0$ ise $a \oplus (\ominus a) = 0$ dir.
- (viii) $\ominus a \oplus a = 0$ ve $b \oplus a = 0$ ise $\ominus a = b$ dir.
- (ix) $\ominus a \oplus (a \oplus b) = b$ dir.
- (x) $gyr [a, b] (x) = \ominus (a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x))$.
- (xi) $gyr [a, b] (0) = 0$.
- (xii) $gyr [a, b] (\ominus x) = \ominus gyr [a, b] (x)$.
- (xiii) $gyr [a, 0] = Id$.

İspat :

(i) $a \in G$ ve G nin sol birimi 0 olsun. x ise a nın 0 a göre sol tersi olsun. Bu durumda $x \oplus (a \oplus b) = x \oplus (a \oplus c)$ olup sol gyrobirleşme özelliğinden $(x \oplus a) \oplus gyr [x, a] (b) = (x \oplus a) \oplus gyr [x, a] (c)$ bulunur. Buradan $gyr [x, a] (b) = gyr [x, a] (c)$ olup $gyr [,]$ bir otomorfizm olduğundan birebirdir ve böylece $b = c$ elde edilir.

(ii) $a \oplus x = 0 \oplus (a \oplus x) = (0 \oplus a) \oplus gyr [0, a] (x) = a \oplus gyr [0, a] (x)$ olup (i) den $x = gyr [0, a] (x)$ bulunur. Böylece $gyr [0, a] = Id$ bulunur.

(iii) Sol ilmik özelliğinden ve (ii) den $gyr [\ominus a, a] = gyr [(\ominus a) \oplus a, a] = gyr [0, a] = Id$ bulunur.

(iv) Sol ilmik özelliğinden ve (ii) den $gyr [a, a] = gyr [0 \oplus a, a] = gyr [0, a] = Id$ bulunur.

(v) $a \in G$ ve G nin sol birimi 0 olsun. x ise a nın 0 a göre sol tersi olsun. Sol gyrobirleşme özelliğinden ve (iii) den $x \oplus (a \oplus 0) = (x \oplus a) \oplus gyr [x, a] (0) = 0 \oplus 0 = 0 = x \oplus a$ bulunur.

(i) den $a \oplus 0 = a$ olup böylece sol birim aynı zamanda sağ birimdir.

(vi) 0 ve 0^* G nin iki birim elemanı olsun. Sol birim aynı zamanda sağ birim olduğundan $0 = 0 \oplus 0^* = 0^*$ olup, böylece $0 = 0^*$ bulunur.

(vii) x , a nın sol tersi olsun. Bu durumda sol gyrobirleşme özelliği, (iii), (v) ve (vi) dan $x \oplus (a \oplus x) = (x \oplus a) \oplus gyr [x, a] (x) = 0 \oplus x = x = x \oplus 0$ bulunur. (i) den $a \oplus x = 0$ olup böylece bir elemanın sol tersi aynı zamanda onun sağ tersidir.

(viii) x ve y , a nın sol tersleri olsun. (vii) den dolayı bu elemanlar aynı zamanda a nın sağ tersi olacağından $a \oplus x = 0 = a \oplus y$ olup böylece $x = y$ bulunur.

(ix) Sol gyrobirleşme özelliğinden ve (iii) den $\ominus a \oplus (a \oplus b) = (\ominus a \oplus a) \oplus gyr [\ominus a, a] (b) = b$ bulunur.

(x) Gyrobirleşme özelliğinden dolayı $a \oplus (b \oplus x) = (a \oplus b) \oplus gyr [a, b] (x)$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $\ominus (a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x)) = \ominus (a \oplus b) \oplus ((a \oplus b) \oplus gyr [a, b] (x))$ olup (ix) dan $gyr [a, b] (x) = \ominus (a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x))$ bulunur.

(xi) (x) da $x = 0$ alınırsa istenen eşitlik kolayca elde edilir.

(xii) $gyr [a, b]$, G nin bir otomorfizmi olduğundan dolayı (xi) den $gyr [a, b] (\ominus x) \oplus gyr [a, b] (x) = gyr [a, b] (\ominus x \oplus x) = gyr [a, b] (0) = 0$ olup böylece $gyr [a, b] (\ominus x) = \ominus gyr [a, b] (x)$ bulunur.

(xiii) (x) daki eşitlikte $b = 0$ alınıp, (ix) dan kolayca ispatlanır.

Tanım 2.1.7 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$a \boxplus b = a \oplus gyr [a, \ominus b] (b)$$

biçiminde tanımlanan " \boxplus " işlemine gyrogrupun co-işlemi yada dual işlemi denir. $\forall a \in G$ için $a \boxplus 0 = 0 = 0 \boxplus a$ olup

$$\begin{aligned} a \boxplus b &= a \boxplus (\ominus b) \\ &= a \oplus gyr [a, \ominus (\ominus b)] (\ominus b) \\ &= a \ominus gyr [a, b] (b) \end{aligned}$$

dir (Ungar¹, 2001, Ungar, 2005). Ayrıca $\forall a \in G$ için $\boxplus a \boxplus b = 0 = a \boxplus (\boxplus b)$ dir.

Gyrogrup otomorfizmaları gyrogrup aksiyomları tarafından tek türlü tanımlıdır. $gyr[a, b]$ otomorfizmleri birim dönüşüme eşit olduğu özel durumlarda (gyrodeğişmeli) gyrogruplar (değişmeli) gruplara, gyrogrup işlemleri de grup işlemlerine indirgenir. Ayrıca bu durumda gyrogrup işlemiyle co-gyrogrup işlemi özdeştir.

Teorem 2.1.2 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c \in G$ için

$$gyr [a, b \oplus c] gyr [b, c] = gyr [a \oplus b, gyr [a, b] c] gyr [a, b] \quad (1)$$

$$gyr [a, \ominus gyr [a, b] b] gyr [a, b] = I \quad (2)$$

iç içe gyrootomorfizm özdeşlikleri ve

$$gyr [\ominus a, a \oplus b] gyr [a, b] = I \quad (3)$$

ve

$$gyr [b, a \oplus b] gyr [a, b] = I \quad (4)$$

gyrootomorfizm özdeşlikleri sağlar (Ungar, 2005).

İspat : $\forall a, b, c, x \in G$ için sol gyrobirleşme özelliğinin iki kez uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus (c \oplus x)) &= a \oplus ((b \oplus c) \oplus gyr [b, c] (x)) \\ &= (a \oplus (b \oplus c)) \oplus gyr [a, b \oplus c] gyr [b, c] (x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus (c \oplus x)) &= (a \oplus b) \oplus gyr [a, b] (c \oplus x) \\ &= (a \oplus b) \oplus (gyr [a, b] (c) \oplus gyr [a, b] (x)) \\ &= ((a \oplus b) \oplus gyr [a, b] (c)) \oplus gyr [a \oplus b, gyr [a, b] (c)] gyr [a, b] (x) \\ &= (a \oplus (b \oplus c)) \oplus gyr [a \oplus b, gyr [a, b] (c)] gyr [a, b] (x) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitlikten sol sadeleştirme kuralıyla

$$gyr [a, b \oplus c] gyr [b, c] = gyr [a \oplus b, gyr [a, b] (c)] gyr [a, b]$$

bulunur. Son eşitlikte $c = \ominus b$ alınır

$$Id = gyr [a \oplus b, \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b]$$

elde edilir. Bu eşitlikten sol ilmik özelliği ve sol gyrobirleşme özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned} Id &= gyr [a \oplus b, \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b] \\ &= gyr [(a \oplus b) \ominus gyr [a, b] (b), \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b] \\ &= gyr [a \oplus (b \ominus b), \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b] \\ &= gyr [a, \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b] \end{aligned}$$

elde edilir. (1) de özel olarak $b = \ominus a$ alınır

$$gyr [a, \ominus a \oplus c] gyr [\ominus a, c] = gyr [0, gyr [a, \ominus a] (c)] gyr [a, \ominus a] = Id$$

olup, bu son eşitlikte a yerine $\ominus a$ ve c yerine b yazılırsa (3) elde edilir. Son olarak (4) eşitliği ise (3) den

$$\begin{aligned} Id &= gyr [\ominus a, a \oplus b] gyr [a, b] \\ &= gyr [\ominus a \oplus (a \oplus b), a \oplus b] gyr [a, b] \\ &= gyr [b, a \oplus b] gyr [a, b] \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 2.1.3 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$a \oplus b = a \boxplus gyr [a, b] (b)$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : $a, b \in G$ olsun. $a \boxplus b = a \oplus gyr [a, \ominus b] (b)$ biçiminde tanımlandığından

$$\begin{aligned} a \boxplus gyr [a, b] (b) &= a \oplus gyr [a, \ominus gyr [a, b] (b)] gyr [a, b] (b) \\ &= a \oplus b \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c \in G$ için

$$(\ominus a \oplus b) \oplus \text{gyr} [\ominus a, b] (\ominus b \oplus c) = \ominus a \oplus c$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : Teorem 2.1.2 de elde edilen $Id = \text{gyr} [a \oplus b, \ominus \text{gyr} [a, b] b] \text{gyr} [a, b]$ eşitliğinden ve sol gyrobirleşme özelliğinden

$$\begin{aligned} (\ominus a \oplus b) \oplus \text{gyr} [\ominus a, b] (\ominus b \oplus c) &= (\ominus a \oplus b) \oplus (\ominus \text{gyr} [\ominus a, b] (b) \oplus \text{gyr} [\ominus a, b] (c)) \\ &= ((\ominus a \oplus b) \ominus \text{gyr} [\ominus a, b] (b)) \oplus Id (c) \\ &= (\ominus a \oplus (b \ominus b)) \oplus c \\ &= \ominus a \oplus c \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.1.5 (Birinci gyroöteleme teoremi): (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c \in G$ için

$$\ominus (\ominus a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus c) = \text{gyr} [\ominus a, b] (\ominus b \oplus c)$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : Teorem 2.1.4 de verilen eşitlikte sol sadeleştirme kuralı uygulanırsa ispat kolayca elde edilir.

Teorem 2.1.6 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$a \oplus x = b$$

denkleminin tek bir çözümü vardır ve

$$x = \ominus a \oplus b$$

dir. Ayrıca $\forall a, b \in G$ için

$$x \oplus a = b$$

denkleminin tek bir çözümü vardır ve

$$x = b \boxminus a$$

dir (Ungar, 2005).

Teorem 2.1.7 (Cogyroöteleme teoremi) : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, x \in G$ için

$$(a \oplus \text{gyr}[a, b](x)) \boxminus (b \oplus x) = a \boxminus b$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : $\forall a, b, x \in G$ için

$$\begin{aligned} (a \boxminus b) \oplus (b \oplus x) &= ((a \boxminus b) \oplus b) \oplus \text{gyr}[a \boxminus b, b](x) \\ &= a \oplus \text{gyr}[a, b](x) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.1.8 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ ve $\forall A \in \text{Oto}(G, \oplus)$ için

$$\text{Agyr}[a, b] = \text{gyr}[A(a), A(b)]A$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : $\forall a, b, x \in G$ ve $\forall A \in \text{Oto}(G, \oplus)$ için

$$\begin{aligned} (A(a) \oplus A(b)) \oplus A(\text{gyr}[a, b](x)) &= A((a \oplus b) \oplus \text{gyr}[a, b](x)) \\ &= A(a \oplus (b \oplus x)) \\ &= A(a) \oplus (A(b) \oplus (A(x))) \\ &= (A(a) \oplus A(b)) \oplus \text{gyr}[A(a), A(b)]A(x) \end{aligned}$$

olup, buradan $\text{Agyr}[a, b] = \text{gyr}[A(a), A(b)]A$ elde edilir.

Teorem 2.1.9 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ ve $A \in \text{Oto}(G, \oplus)$ olsun.

Bu durumda

$$\text{gyr}[a, b] = \text{gyr}[A(a), A(b)]$$

olması için gerek ve yeter koşul $Agyr[a, b] = gyr[A(a), A(b)]A$ olmasıdır (Ungar, 2005).

Teorem 2.1.10 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere (G, \oplus) gyrogrubuyla (G, \boxplus) grupoidi aynı otomorfizmlar grubuna sahiptir (Ungar, 2005).

İspat : $\varphi \in Oto(G, \oplus)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi(a \boxplus b) &= \varphi(a \oplus gyr[a, \ominus b](b)) \\ &= \varphi(a) \oplus \varphi(gyr[a, \ominus b](b)) \\ &= \varphi(a) \oplus gyr[\varphi(a), \ominus\varphi(b)](b) \\ &= \varphi(a) \boxplus \varphi(b)\end{aligned}$$

olup böylece $Oto(G, \oplus) \subseteq Oto(G, \boxplus)$ dir.

Tersine $\varphi \in Oto(G, \boxplus)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi((a \oplus b) \boxplus b) \\ &= \varphi(a \oplus b) \boxplus \varphi(b)\end{aligned}$$

olup buradan

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

elde edilir. Böylece $Oto(G, \boxplus) \subseteq Oto(G, \oplus)$ olup

$$Oto(G, \oplus) = Oto(G, \boxplus)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.8 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $Oto(G) = Oto(G, \oplus)$, G nin otomorfizmlar grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere G nin $gyr[a, b]$ biçimindeki tüm otomorfizmlerinin $Oto_0(G)$ kümesi $Oto(G)$ grubunun bir altgrubudur.

$$G \times Oto(G) = \{(x, X) : x \in G, X \in Oto(G)\}$$

gyroyarıdirekt çarpım kümesi üzerinde tanımlanan

$$(x, X)(y, Y) = (x \oplus Xy, gyr[x, Xy]XY)$$

gyroyarırdirekt çarpım işlemine göre $G \times Oto(G)$ bir gruptur. Bu durumda $G \times Oto(G)$ kümesine G nin gyroholomorfi kümesi denir (Ungar, 2005).

Teorem 2.1.11 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$\ominus (a \oplus b) = gyr [a, b] (\ominus b \ominus a)$$

gyrotoplama inversiyon özelliği ve

$$gyr^{-1} [a, b] = [\ominus b, \ominus a]$$

gyrootomorfizm inversiyon özelliği sağlanır (Ungar, 2005). Burada $gyr^{-1} [a, b]$ ile $(gyr [a, b])^{-1}$ dönüşümü gösterilmektedir.

İspat : $G \times Oto(G)$ bir grup olduğuna göre $G \times Oto(G)$ kümesindeki her elemanın bir tek tersi vardır. Bu durumda $(a, Id) (b, Id) = (a \oplus b, gyr [a, b])$ çarpımının da

$$\begin{aligned} (b, Id)^{-1} (a, Id)^{-1} &= (\ominus b, Id) (\ominus a, Id) \\ &= (\ominus b \ominus a, gyr [\ominus b, \ominus a]) \end{aligned}$$

biçiminde bir tek tersi vardır. Ayrıca $\forall a, b \in G$ için

$$(a \oplus b, gyr [a, b]) = (\ominus gyr^{-1} [a, b] (a \oplus b), gyr^{-1} [a, b])$$

olduğundan

$$\ominus b \ominus a = \ominus gyr^{-1} [a, b] (a \oplus b)$$

ve

$$gyr [\ominus b, \ominus a] = gyr^{-1} [a, b]$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten ise

$$\ominus b \ominus a = gyr [\ominus b, \ominus a] (a \oplus b)$$

bulunur. $\ominus b$ yerine a ve $\ominus a$ yerine b yazılırsa

$$\ominus (a \oplus b) = gyr [a, b] (\ominus b \ominus a)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.12 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$\ominus (a \boxplus b) = (\ominus b) \boxplus (\ominus a)$$

cogyrootomorfik özelliği sağlanır (Ungar, 2005).

İspat : $\forall a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} a \boxplus b &= a \oplus \text{gyr}[a, \ominus b] (b) \\ &= \ominus \text{gyr}[a, \text{gyr}[a, \ominus b] (b)] (\ominus \text{gyr}[a, \ominus b] b \ominus a) \\ &= \text{gyr}[a, \text{gyr}[a, \ominus b] (b)] (\ominus (\ominus \text{gyr}[a, \ominus b] (b) \ominus a)) \\ &= \text{gyr}[a, \ominus \text{gyr}[a, \ominus b] (\ominus b)] (\ominus (\ominus \text{gyr}[a, \ominus b] (b) \ominus a)) \\ &= \text{gyr}^{-1}[a, \ominus b] (\ominus (\ominus \text{gyr}[a, \ominus b] (b) \ominus a)) \\ &= (\ominus (\ominus b \ominus \text{gyr}^{-1}[a, \ominus b] (a))) \\ &= (\ominus (\ominus b \ominus \text{gyr}[b, \ominus a] (a))) \\ &= \ominus ((\ominus b) \boxplus (\ominus a)) \end{aligned}$$

dir.

Gyrogruplarda birçok özdeşlik sağlanır. (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c, x \in G$ ve $\forall A, X, Y \in \text{Oto}(G, \oplus)$ için aşağıdakiler sağlanır (Ungar, 2005) :

<i>Formüller</i>	<i>Adları</i>
$a \oplus (\ominus a \oplus b) = b$	Sol sadeleşme kuralı
$(b \ominus a) \boxplus a = b$	Sağ sadeleşme kuralı
$(b \boxminus a) \oplus a = b$	Sağ sadeleşme kuralı
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr [a, b] (c)$	Sol gyrobirleşme özl.
$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus gyr [b, a] (c))$	Sağ gyrobirleşme özl.
$a \boxplus b = a \oplus gyr [a, \ominus b] (b)$	
$a \oplus b = a \boxplus gyr [a, b] (b)$	
$\ominus (a \boxplus b) = (\ominus b) \boxplus (\ominus a)$	Gyrootomorfik ters özl.
$(a \boxplus b) \oplus c = a \oplus gyr [a, \ominus b] (b \oplus c)$	
$gyr [a, b] (c) = \ominus (a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus c))$	
$gyr [\ominus a, \ominus b] = gyr [a, b]$	Çift simetri
$gyr^{-1} [a, b] = gyr [b, a]$	
$gyr [a \oplus b, b] = gyr [a, b]$	Sol ilmik özl.
$gyr [a, b \oplus a] = gyr [a, b]$	Sağ ilmik özl.
$gyr [a \boxminus b, b] = gyr [a, b]$	Sol co-ilmik özl.
$gyr [a, b \boxminus a] = gyr [a, b]$	Sağ co-ilmik özl.
$gyr [a \oplus b, \ominus a] = gyr [a, b]$	
$gyr [\ominus a, a \oplus b] = gyr [b, a]$	
$\ominus (a \oplus b) = gyr [a, b] (\ominus b \ominus a)$	
$a \oplus gyr [a, b] (x) \boxminus (b \oplus x) = a \boxminus b$	
$(\ominus a \oplus b) \oplus gyr [\ominus a, b] (\ominus b \oplus c) = \ominus a \oplus c$	
$(a \boxminus b) \oplus (b \boxminus c) = a \ominus gyr [a, b] gyr [b, c] (c)$	
$Agyr [a, b] = gyr [Aa, Ab] A$	
$gyr [b, \ominus gyr [b, a] (a)] = gyr [a, b]$	İç içe gyrootomorfizm özl.
$gyr [\ominus gyr [a, b] (b), a] = gyr [a, b]$	İç içe gyrootomorfizm özl.
$y = \ominus gyr [a, x] (x) \Leftrightarrow x = \ominus gyr [a, y] (y)$	
$Y = \ominus gyr [b, Xa] X \Leftrightarrow X = \ominus gyr [b, Ya] Y$	

2.2 Gyrodeğişmeli Gyrogruplar

Tanım 2.2.1 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$\ominus(a \oplus b) = \ominus a \ominus b$$

oluyorsa (G, \oplus) gyro grubuna gyrootomorfik ters özelliğe sahiptir denir.

Teorem 2.2.1 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere gyro grubun gyrodeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul gyro grubun gyrootomorfik ters özelliğe sahip olmasıdır (Ungar, 2005).

İspat : Öncelikle gyro grubun gyrootomorfik ters özelliğe sahip olduğu kabul edilsin. $\forall a, b \in G$ için $\ominus(a \oplus b) = gyr[a, b](\ominus b \ominus a)$ gyrotoplama inversiyon özelliğinden ve $gyr[\ominus a, \ominus b] = gyr[a, b]$ çift simetri özelliğinden

$$\begin{aligned} \ominus a \ominus b &= \ominus(a \oplus b) \\ &= gyr[a, b](\ominus b \ominus a) \\ &= gyr[\ominus a, \ominus b](\ominus b \ominus a) \end{aligned}$$

olup $\ominus a$ yerine a ve $\ominus b$ yerine b yazılırsa

$$(a \oplus b) = gyr[a, b](b \oplus a)$$

gyrodeğişme özelliği sağlanır.

Tersine gyro grubun gyrodeğişmeli olduğu kabul edilsin. Bu durumda gyrotoplama inversiyon özelliğinden

$$gyr[a, b](\ominus(\ominus b \ominus a)) = a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a)$$

olup, buradan

$$\ominus(b \oplus a) = \ominus b \ominus a$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2 (İkinci gyroöteleme teoremi): (G, \oplus) gyrodeğişmeli bir gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c \in G$ için

$$\begin{aligned}\ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus c) &= gyr[a, b](\ominus b \oplus c) \\ (a \oplus b) \ominus (a \oplus c) &= gyr[a, b](b \ominus c)\end{aligned}$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : İlk eşitlik, birinci gyroöteleme teoreminde $\ominus a$ yerine a yazılmasıyla kolayca elde edilir. Üstelik bu eşitlik gyrodeğişmeli olmayan gyrogruplarda da sağlanır.

İkinci eşitlik ise Teorem 2.2.1 den elde edilir.

Tanım 2.2.2 : (G, \oplus) bir gyrogrup olmak üzere G üzerinde

$$L_x : G \rightarrow G, \quad L_x a := x \oplus a$$

fonksiyonu tanımlansın. $a \in G$ olmak üzere $\forall (x, X) \in G \times Oto(G, \oplus)$ elemanı

$$(L_x, X) a = x \oplus X a$$

biçiminde (L_x, X) hareketini tanımladığından dolayı $G \times Oto(G, \oplus)$ kümesinin elemanlarına gyrogrupun hareketleri denir.

(L_x, X) ve (L_y, Y) , (G, \oplus) gyrogrupun iki hareketi olsun. Bu durumda $\forall x, y, a \in G$ ve $X, Y \in Oto(G, \oplus)$ için

$$\begin{aligned}(L_x, X)(L_y, Y)a &= (L_x, X)(y \oplus Y a) \\ &= x \oplus X(y \oplus Y a) \\ &= x \oplus (X y \oplus X Y a) \\ &= (x \oplus X y) \oplus gyr[x, X y] X Y a \\ &= (L_{x \oplus X y}, gyr[x, X y] X Y) a\end{aligned}$$

dir. Böylece iki hareketin bileşimi de bir harekettir. Ayrıca

$$(L_x, X)^{-1} = (L_{\ominus X^{-1} x}, X^{-1})$$

olup $G \times Oto(G, \oplus)$ kümesi hareketlerin bileşke işlemine göre bir gruptur.

(G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere $\forall x, q \in G$ için

$$L_x L_{\ominus x} q = q \quad (5)$$

ve

$$L_{\ominus y} L_y q = q \quad (6)$$

olduğundan $(L_x)^{-1} = L_{\ominus x}$ dir. Ayrıca $\forall z \in G$ için

$$\begin{aligned} gyr [x, y] (z) &= \ominus (x \oplus y) \oplus (x \oplus (y \oplus z)) \\ &= (L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y) (z) \end{aligned}$$

olduğundan

$$gyr [x, y] = L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$$

dir. İlmik teoride $gyr [x, y] = l(x, y)$ ile gösterilir. Bu durumda $l(x, y) = L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$ dir.

(g6) aksiyomundan

$$\begin{aligned} x \oplus y &= gyr [x, y] (y \oplus x) \\ &= (L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y) (y \oplus x) \\ &= \ominus (x \oplus y) \oplus (x \oplus (y \oplus (y \oplus x))) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte ise sol sadeleştirme kuralı uygulanırsa

$$(x \oplus y) \oplus (x \oplus y) = (x \oplus (y \oplus (y \oplus x)))$$

elde edilir. Bu eşitliğe literatürde *Bruck özdeşliği* denir (Sabinin vd. 1998).

(g5) aksiyomundan ise

$$L_{(x \oplus y) \oplus y}^{-1} \circ L_{x \oplus y} \circ L_y = L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$$

yada buna denk olan

$$L_{x \oplus y} \circ L_{(x \oplus y) \oplus y}^{-1} \circ L_{x \oplus y} = L_x$$

özdeşliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} L_{(x \oplus y) \oplus y} &= L_{x \oplus y} \circ L_x^{-1} \circ L_{x \oplus y} \\ &= L_{x \oplus y} \circ L_{\ominus x} \circ L_{x \oplus y} \end{aligned} \quad (7)$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. Özel olarak $x = 0$ alınırsa

$$L_{y \oplus y} = L_y \circ L_y$$

elde edilir (Sabinin vd, 1998). Bu eşitliğe *sol alternatif özellik* denir. Üstelik keyfi x, w elemanları için $y = \ominus x \oplus w$ alınırsa (7) deki eşitlikten

$$\begin{aligned} L_{(x \oplus (\ominus x \oplus w)) \oplus (\ominus x \oplus w)} &= L_{w \oplus (\ominus x \oplus w)} \\ &= L_w \circ L_{\ominus x} \circ L_w \end{aligned}$$

bulunur. $x = \ominus q$ alınırsa sol ilmik özelliğinden sol Bol-ilmik özelliği yani

$$L_w \circ L_q \circ L_w = L_{w \oplus (q \oplus w)} \quad (8)$$

eşitliği elde edilir. Bir sol Bol ilmikte $x \oplus a = b$ denklemi iki taraflı birim eleman yardımıyla tek türlü çözülür ve

$$x = \ominus a \oplus ((a \oplus b) \oplus (\ominus a)) \quad (9)$$

dir (Sabinin, 1990). $\ominus x \oplus (x \oplus a) = a$ olduğundan

$$\begin{aligned} x \oplus a = b &\Leftrightarrow \ominus x \oplus (x \oplus a) = \ominus x \oplus b \\ &\Leftrightarrow a = \ominus x \oplus b \end{aligned}$$

bulunur. (9) daki özelliğin $(\ominus x) \oplus b = a$ denklemine uygulanmasıyla

$$\ominus x = \ominus b \oplus ((b \oplus a) \oplus (\ominus b))$$

bulunur ve bu eşitlik ise (9) e denktir. Bunun yerine a ve b nin keyfi olması nedeniyle $x \oplus y = p$ (yada $\ominus x \oplus p = y$) olacak biçimde p, y elemanları için yukarıdaki eşitlikte $b = p$ ve $a = y$ alınırsa

$$\ominus x = (\ominus p) \oplus ((p \oplus y) \oplus (\ominus p))$$

bulunur. (8) de $q = \ominus x$ alınırsa ve $w = x \oplus y$ den tekrar (7) eşitliği elde edilir. Böylece sol ilmik özelliği sol Bol özdeşliğine denktir (Sabinin vd, 1998).

Sol Bol ilmikler için Bruck özdeşliği

$$\ominus(x \oplus y) = \ominus x \oplus (\ominus y)$$

otomorfik ters özdeşliğine denktir (Sabinin, 1990). Son olarak sağ gyrobirleşme özelliği ele alınacak olursa

$$\begin{aligned}
L_{x\oplus y}z &= (x \oplus y) \oplus z \\
&= x \oplus (y \oplus gyr[y, x](z)) \\
&= (L_x \circ L_y \circ gyr[y, x])(z) \\
&= (L_x \circ L_y \circ L_{y\oplus x}^{-1} \circ L_y \circ L_x)(z)
\end{aligned}$$

olup böylece

$$L_{x\oplus y} = L_x \circ L_y \circ L_{y\oplus x}^{-1} \circ L_y \circ L_x$$

yada buna denk olan

$$L_{x\oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y \circ L_{y\oplus x}^{-1} \circ L_y \circ L_x = Id$$

özdeşliği elde edilir. Bir sol Bol ilmikte Bruck özdeşliğiyle $l(x, y) = gyr[x, y]$ bir otomorfizmdir. Şimdi $l(x, y)$ nin bir otomorfizm olduğunu gösterelim. $L_a \circ L_b$ fonksiyonu kısaca $L_a L_b$ biçiminde gösterilsin.

$$\begin{aligned}
l(a, b)L_x(l(a, b))^{-1} &= L_{a\oplus b}^{-1}L_aL_bL_xL_b^{-1}L_a^{-1}L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}L_a(L_bL_b)(L_{\ominus b}L_xL_{\ominus b})L_a^{-1}L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}L_aL_{b\oplus b}L_cL_a^{-1}L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}(L_aL_{b\oplus b}L_a)(L_{\ominus a}L_cL_{\ominus a})L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}(L_aL_{b\oplus b}L_a)L_{\ominus a\oplus(c\ominus a)}L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}(L_{\ominus a}L_{\ominus(b\oplus b)}L_{\ominus a})^{-1}L_{\ominus a\oplus(c\ominus a)}L_{a\oplus b} \\
&= L_{a\oplus b}^{-1}L_m^{-1}L_{\ominus a\oplus(c\ominus a)}L_{a\oplus b} \\
&= (L_{a\oplus b}^{-1}L_m^{-1}L_{a\oplus b}^{-1})L_{a\oplus b}L_{\ominus a\oplus(c\ominus a)}L_{a\oplus b} \\
&= (L_{a\oplus b}L_mL_{a\oplus b})^{-1}L_{a\oplus b}L_nL_{a\oplus b} \\
&= L_{(a\oplus b)\oplus(m\oplus(a\oplus b))}^{-1}L_{(a\oplus b)\oplus(n\oplus(a\oplus b))}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $c = \ominus b \oplus (x \oplus (\ominus b))$, $m = \ominus a \oplus (\ominus (b \oplus b) \ominus a)$ ve $n = \ominus a \oplus (c \ominus a)$ dir. Son eşitlikten

$$L_{(a\oplus b)\oplus(m\oplus(a\oplus b))}l(x, y)L_x(l(x, y))^{-1} = L_{(a\oplus b)\oplus(n\oplus(a\oplus b))} \quad (10)$$

elde edilir. Burada $(a \oplus b) \oplus (m \oplus (a \oplus b)) = \alpha$ ve $(a \oplus b) \oplus (n \oplus (a \oplus b)) = \beta$ diyelim. O halde (10) daki eşitlik

$$L_\alpha l(a, b) L_x (l(x, y))^{-1} = L_\beta \quad (11)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} L_\beta &= L_\alpha l(a, b) L_x (l(a, b))^{-1} \\ &= L_\alpha L_{a \oplus b}^{-1} L_a L_b L_x L_b^{-1} L_a^{-1} L_{a \oplus b} \\ &= L_\alpha L_{a \oplus b}^{-1} L_a L_b L_x \\ &= L_\alpha l(a, b) L_x \\ &= L_{\alpha \oplus l(a, b)x} \end{aligned}$$

olup buradan $\beta = \alpha \oplus l(a, b)x$ bulunur. O halde (11) eşitliği

$$L_\alpha l(a, b) L_x (l(a, b))^{-1} = L_{\alpha \oplus l(a, b)x} \quad (12)$$

biçiminde yazılabilir (*sol pseudoözel özdeşlik*). Sol Bol özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha &= (a \oplus b) \oplus (m \oplus (a \oplus b)) \\ &= (a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus (b \oplus b) \ominus a)) \oplus (a \oplus b) \\ &= (a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus \ominus (b \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (a \oplus b))) \\ &= (a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus (b \oplus b) \oplus b)) \\ &= (a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus b)) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (12) den

$$L_{(a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus b))} l(a, b) L_x (l(a, b))^{-1} = L_{((a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus b))) \oplus l(a, b)x} \quad (13)$$

sonucu bulunur.

Bruck özdeşliği veya otomorfik ters özdeşliği (bunlar sol Bol ilmiklerde denktir) sağlanıyorsa ϵ gyrogrubun birim elemanı olmak üzere

$$(a \oplus b) \oplus (\ominus a \oplus (\ominus b)) = \epsilon$$

elde edilir. Son olarak (13) eşitliği

$$L_\epsilon l(a, b) L_x (l(a, b))^{-1} = L_{\epsilon \oplus l(a, b)x}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $\forall z \in G$ için

$$(L_\epsilon l(a, b) L_x (l(a, b))^{-1}) (z) = L_{\epsilon \oplus l(a, b)x} (z)$$

olacağından

$$\epsilon \oplus (gyr [a, b] ((x \oplus gyr[a, b])^{-1} (z))) = (\epsilon \oplus gyr [a, b] x) \oplus z$$

bulunur. Buradan

$$gyr [a, b] ((x \oplus gyr[a, b])^{-1} (z)) = gyr [a, b] x \oplus z$$

elde edilir. Bu özdeşlik literatürde sol \mathcal{A} -özellik olarak adlandırılır. Böylece yukarıda elde edilen

$$L_{x \oplus y} = L_x \circ L_y \circ L_{y \oplus x}^{-1} \circ L_y \circ L_x$$

özdeşliği

$$L_{gyr[x, y](y \oplus x)}^{-1} \circ gyr[x, y] \circ L_y \circ L_x = Id$$

biçiminde yazılabilir. Bruck özdeşliğiyle (yada aynı anlama gelen gyrodeğişme özelliğiyle)

$$L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_{x \oplus y}^{-1} \circ L_x \circ L_y \circ L_y \circ L_x = Id$$

veya buna denk olan

$$\begin{aligned} L_x \circ L_y \circ L_y \circ L_x &= (L_{x \oplus y})^2 \\ &= L_{(x \oplus y) \oplus (x \oplus y)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(L_q)^2 = L_{q \oplus q}$ dir. Üstelik Bruck özdeşliği ve sol alternelikten sol Bol özdeşliğinden

$$\begin{aligned} L_x \circ L_{y \oplus y} \circ L_x &= L_{x \oplus (y \oplus (y \oplus x))} \\ &= L_{x \oplus ((y \oplus y) \oplus x)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Sağ gyrobirleşme özelliği diğer aksiyomlardan kolayca elde edilir. Sonuç olarak gyrogrup Bruck özdeşliğini sağlayan sol Bol ilmiktir (Sabinin vd, 1998).

(G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere $\forall a, b, c, x \in G$ için aşağıdakiler sağlanır (Ungar, 2005) :

Formüller

$$\ominus(a \oplus b) = \ominus a \ominus b$$

$$a \boxplus b = b \boxplus a$$

$$a \boxplus b = a \oplus ((\ominus a \oplus b) \oplus a)$$

$$a \boxplus (a \oplus b) = a \oplus (b \oplus a)$$

$$gyr [a, b] (b \oplus (a \oplus c)) = (a \oplus b) \oplus c$$

$$gyr [a, b] (b) = (a \oplus b) \ominus a$$

$$\ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus c) = gyr [a, b] (\ominus b \oplus c)$$

$$(a \oplus b) \ominus (a \oplus c) = gyr [a, b] (b \ominus c)$$

$$gyr [a, b] gyr [b \oplus a, c] = gyr [a, b \oplus c] gyr [b, c]$$

$$gyr [a, \ominus b] gyr [b, \ominus c] gyr [c, \ominus a] = gyr [\ominus a \oplus b, a \ominus c]$$

$$gyr [a, \ominus b] gyr [b, \ominus c] gyr [c, \ominus ((b \boxplus c) \ominus a)] = gyr [a, \ominus ((b \boxplus c) \ominus a)]$$

$$gyr [a, \ominus b] = gyr [\ominus a \oplus b, a \oplus b] gyr [a, b]$$

$$a \ominus gyr [a, b] gyr [b, c] (c) = a \boxminus gyr [a \boxminus b, b \boxminus c] (c)$$

$$(a \boxminus b) \oplus (b \boxminus c) = a \boxminus gyr [a \boxminus b, b \boxminus c] (c)$$

$$(x \oplus a) \boxplus (x \oplus b) = x \oplus ((a \boxplus b) \oplus x)$$

$$(x \oplus a) \boxplus (x \ominus a) = 2 \otimes x$$

$$a \oplus ((b \boxminus a) \oplus (c \boxminus b)) = gyr [a, b] gyr [b, c] (c)$$

$$x \oplus ((a \boxplus b) \ominus c) = ((x \oplus a) \boxplus (x \oplus b)) \ominus (x \oplus c)$$

2.3 Möbius Kompleks Disk Gyrogrubu

Gyrogrup yapısı tarihte ilk olarak Einstein'ın hız toplamında görülmektedir (Ungar^{1,2} 1988, Ungar 1991, Ungar 1997, Ungar 1998). Kompleks açık birim disk üzerinde tanımlı Möbius dönüşümler grubu, gyrogrup kavramını açıklayan en iyi örnektir (Kinyon&Ungar 2000).

Tanım 2.3.1 : B, \mathbb{C} de bir bölge olmak üzere $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1

ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntüleri de $f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise, f dönüşümü B bölgesinde konformdur denir.

Tanım 2.3.2 : $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçiminde tanımlanmış fonksiyona Möbius dönüşümü (kesirli doğrusal dönüşüm) denir.

Teorem 2.3.1 : \mathbb{C}_∞ , genişletilmiş kompleks düzlemi göstermek üzere $T(-d/c) = \infty$ ve $T(\infty) = a/c$ olacak biçimdeki $T(z) = (az + b) / (cz + d)$ Möbius dönüşümü \mathbb{C}_∞ dan \mathbb{C}_∞ a birebir, örten konform bir dönüşümdür (Başkan, 1996).

Önerme 2.3.1 : Her Möbius dönüşümünün tersi de bir Möbius dönüşümdür (Başkan, 1996).

Teorem 2.3.2 : Möbius dönüşümler kümesi fonksiyon bileşke işlemine göre bir gruptur (Başkan, 1996). Bu grup $PSL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.3 : Kompleks \mathbb{C} düzlemindeki

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

diskini kendi üzerine resmeden herhangi bir konform dönüşüm, $z_0 \in \mathbb{D}$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ olmak üzere

$$T(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right)$$

biçiminde bir Möbius dönüşümdür. Bu biçimde tanımlı her Möbius dönüşümü \mathbb{D} yi kendi üzerine konform olarak resmeder (Başkan, 1996).

İspat : Öncelikle eğer $|z| = 1$ olsaydı, $z^{-1} = \bar{z}$ ve $|z - z_0| = |\bar{z} - \bar{z}_0|$ olacağından

$$\begin{aligned}
 |T(z)| &= \left| e^{i\theta} \left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) \right| \\
 &= \left| \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \\
 &= \frac{|z_0 - z|}{|z| |z^{-1} - \bar{z}_0|} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa T nin aykırılığı sadece $z = \frac{1}{\bar{z}_0}$ noktasındadır. Fakat bu nokta \mathbb{D} nin dışındadır. Böylece maksimum modül teoremi gereğince T , \mathbb{D} yi \mathbb{D} ye resmeder. Diğer yandan

$$T^{-1}(w) = e^{i\theta} \left(\frac{w - (-e^{i\theta} z_0)}{1 - (-e^{i\theta} \bar{z}_0) w} \right)$$

olduğundan ve T ile aynı biçimde olduğundan T^{-1} de \mathbb{D} yi \mathbb{D} ye resmeder. O halde T konformdur.

Şimdi $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ herhangi bir konform dönüşüm olsun ve $z_0 = f^{-1}(0)$, $\theta = \arg f'(z_0)$ olsun. Bu durumda

$$T(z) = e^{i\theta} \left(\frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} \right)$$

ve

$$T'(z) = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

olduğundan $T(z_0) = 0$ ve $\theta = \arg T'(z_0)$ dir. Böylece Riemann dönüşüm teoremine göre bu dönüşüm birtek olduğundan $f = T$ bulunarak ispat tamamlanır.

Kompleks \mathbb{C} düzlemindeki $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ diski üzerindeki en genel Möbius dönüşümü

$$z \rightarrow z_0 \oplus_M z = \frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z}$$

Möbius sol gyroöteleme fonksiyonuyla bir dönme fonksiyonunun bileşkesiyle

$$z \rightarrow e^{i\theta} \left(\frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z} \right) = e^{i\theta} (z_0 \oplus_M z) \quad \theta \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlıdır. ” \ominus_M ” Möbius çıkarma işlemi ise $a \ominus_M z = a \oplus (\ominus_M z)$ biçiminde olup $z \ominus_M z = 0$ ve $\ominus_M z = -z$ dir. Möbius toplama, \mathbb{D} üzerinde değişme ve birleşme özelliklerinin sağlanmadığı bir ikili işlemdir. Böylece Möbius toplama yardımıyla (\mathbb{D}, \oplus) grupoidi elde edilir ve bu grupoid Ungar tarafından detaylı bir biçimde incelenmiştir (Ungar, 2005). Möbius toplama Öklidyen düzlem geometrisindeki ” + ” vektör toplama işlemiyle benzer birçok özellik taşır. Möbius toplama birleşme özelliğini sağlamadığı açıktır. Bundan dolayı (\mathbb{D}, \oplus_M) cebirsel yapısı grup değildir fakat grupsu bir yapıdır. $Oto(\mathbb{D}, \oplus_M)$, (\mathbb{D}, \oplus_M) grupoidinin otomorfizmler grubu olmak üzere, Möbius toplama değişmeli olmaması

$$gyr [a, b] = \frac{a \oplus_M b}{b \oplus_M a} = \frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b} \in Oto(\mathbb{D}, \oplus_M)$$

biçiminde verilen

$$gyr : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow Oto(\mathbb{D}, \oplus_M)$$

dönüşümü yardımıyla düzeltilebilir. Böylece Möbius toplama gyrodeğişme özelliği

$$a \oplus_M b = gyr [a, b] (b \oplus_M a)$$

biçiminde sağlanmış olur. Ayrıca $gyr[a, b]$ değeri yardımıyla Möbius toplama $\forall a, b, c \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} a \oplus_M (b \oplus_M c) &= (a \oplus_M b) \oplus_M gyr [a, b] (c) \\ (a \oplus_M b) \oplus_M c &= a \oplus_M (b \oplus_M gyr [b, a] (c)) \end{aligned}$$

biçiminde sol ve sağ gyrobirleşme özellikleri de sağlanmış olur. (\mathbb{D}, \oplus_M) üzerinde diğer gyrogrup aksiyomlarının ve gyrodeğişme aksiyomunun sağlandığı açıktır (Ungar, 2005).

2.4 Möbius Gyrogrupları

\mathbb{R}^2 Öklidyen düzleminin vektörleriyle kompleks sayılar

$$\mathbb{C} \ni u = u_1 + iu_2 = (u_1, u_2) = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$$

biçimde eşlensin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \operatorname{Re}(\bar{u}v) = \frac{1}{2}(\bar{u}v + u\bar{v}) \\ \|\mathbf{u}\| &= |u|\end{aligned}$$

eşitlikleri \mathbb{R}^2 üzerinde iç çarpımı ve normu verir. Böylece \mathbb{C} nin \mathbb{D} diski üzerindeki Möbius dönüşümü \mathbb{R}^2 nin $\mathbb{R}_{s=1}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{v}\| < 1\}$ diski üzerindeki Möbius dönüşümüne dönüştür. Böylece $\forall u, v \in \mathbb{D}$ ve $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^2$ için

$$\begin{aligned}u \oplus_M v &= \frac{u + v}{1 + \bar{u}v} \\ &= \frac{(1 + u\bar{v})(u + v)}{(1 + \bar{u}v)(1 + u\bar{v})} \\ &= \frac{(1 + \bar{u}v + u\bar{v} + |v|^2)u + (1 - |u|^2)v}{1 + \bar{u}v + u\bar{v} + |u|^2|v|^2} \\ &= \frac{(1 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{u} + (1 - \|\mathbf{u}\|^2)\mathbf{v}}{1 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2} \\ &= \mathbf{u} \oplus_{\mathbf{M}} \mathbf{v}\end{aligned}$$

biçimine dönüştür (Ungar, 2005).

2.4.1 Yuvar Üzerinde Möbius Toplamı

\mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve

$$\mathbb{V}_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{v}\| < s\}$$

ise \mathbb{V} nin $s > 0$ yarıçaplı açık yuvarı olsun. \mathbb{V}_s üzerindeki Möbius toplama

$$\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v} = \frac{(1 + (2/s^2)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (1/s^2)\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{u} + (1 - (1/s^2)\|\mathbf{u}\|^2)\mathbf{v}}{1 + (2/s^2)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (1/s^4)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2} \quad (14)$$

biçimindedir. Burada \cdot and $\|\cdot\|$ sırasıyla \mathbb{V} den \mathbb{V}_s ye indirgenen iç çarpım ve normu göstermektedir. Burada $+$ işlemi hem reel sayılar üzerinde toplama işlemini hemde \mathbb{V} üzerindeki vektör toplamını göstermektedir.

Yukarıdaki toplamda $s \rightarrow \infty$ durumunda \mathbb{V}_s açık yuvarı \mathbb{V} reel iç çarpım uzayına genişler ve \oplus_M Möbius toplamı ise \mathbb{V} üzerindeki $+$ vektör toplamına indirgenir. Daha açık olarak

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

ve

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{V}_s = \mathbb{V}$$

dir. (14) eşitliğinin sağ tarafı literatürde Möbius ötelemesi olarak adlandırılır.

Herhangi bir reel iççarpım uzayının \mathbb{V}_1 açık yuvarında tanımlı \oplus_M Möbius toplamı, açık kompleks birim diski üzerinde tanımlı Möbius toplamının doğal bir genişlemesidir.

Üstelik $s > 0$ olacak biçimdeki $\forall s \in \mathbb{R}$ için (\mathbb{V}_s, \oplus_M) gyrodeğişmeli bir gyrogruptur.

$\mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$ olmak üzere

$$\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}} \quad (15)$$

sayısına Gamma faktörü denir. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$ için \mathbb{V}_s üzerinde Möbius toplamı

$$\gamma_{\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \sqrt{1 + \frac{2}{s^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{s^4} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}$$

gamma özdeşliğini sağlar. Gamma faktörü Einstein toplamında da geçmekte olup, özel rölativite teoreminde Lorentz faktörü olarak bilinir.

Möbius gyrogrup co-işlemi , Möbius co-toplamı yardımıyla

$$\mathbf{u} \boxplus_M \mathbf{v} = \frac{\gamma_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{u} + \gamma_{\mathbf{v}}^2 \mathbf{v}}{\gamma_{\mathbf{u}}^2 + \gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}$$

biçiminde tanımlı olup

$$\gamma_{\mathbf{u} \boxplus_M \mathbf{v}} = \frac{\gamma_{\mathbf{u}}^2 + \gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}{\sqrt{1 + 2\gamma_{\mathbf{u}}^2 \gamma_{\mathbf{v}}^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2}\right) - (\gamma_{\mathbf{u}}^2 + \gamma_{\mathbf{v}}^2)}}$$

gamma özdeşliğini sağlar. Möbius co-toplamının değişme özelliğini sağladığı açıktır. \mathbb{V}_s de alınan keyfi \mathbf{u}, \mathbf{v} vektörleri eğer \mathbb{V} de paralel ise yani $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ olacak biçimde bir λ

varsa bu durumda Möbius toplamı

$$\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

biçimine indirgenir. Burada tanımlanan işlem ise hem değişmeli hem de birleşmelidir.

Ayrıca

$$\|\mathbf{u}\| \oplus_M \|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

eşitliği de sağlar. Üstelik (\mathbb{V}_s, \oplus_M) nin $gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ otomorfizması $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_s$ için \mathbb{V} den \mathbb{V}_s üzerine indirgenen iç çarpımı korur. Yani

$$gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\mathbf{a}) \cdot gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

sağlanır (Ungar, 2005).

2.5 Einstein Gyrogrupları

1900 lü yıllara kadar yeryüzünün mutlak hızına dair yapılan tüm varsayımlar başarısızlıkla sonuçlanmıştı. Bu yönde yapılan çalışmaların en meşhurlarından birisi 1887 yılında Michelson ve Morley tarafından yapıldı. Fakat 18 yıl sonra, Einstein daha sonra kendi adıyla anılacak olan yeni hız toplamını tanımlayarak rölativitenin (göreceliğin) özel teorisini bulmuş oldu. Öklidyen \mathbb{R}^3 uzayının vektörleri olan Newton hızlarının aksine Einstein hızları görecelidir, yani büyüklüğü boşluktaki ışık hızını ($3 \times 10^5 km/sn^{-1}$) geçemez.

c boşluktaki ışık hızını göstermek üzere

$$\mathbb{R}_c^3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| < c\}$$

tanımlansın. \mathbb{R}_c^3 üzerinde Einstein toplamı $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_c^3$ için

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \right)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada "." ve "×" işlemleri sırasıyla \mathbb{R}^3 den \mathbb{R}_c^3 üzerine indirgenen iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermekte olup, $\gamma_{\mathbf{u}}$ ise (15) de belirtilen biçimdedir.

Einstein toplamı

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \right)$$

biçiminde de yazılabilir. Üstelik bu yeni toplam sadece 3–boyutlu uzay için değil, yüksek boyutlu uzaylarda da geçerlidir. Newton limiti altında yukarıdaki toplamda $c \rightarrow \infty$ durumunda \mathbb{R}_c^3 açık yuvarı \mathbb{R}^3 reel iç çarpım uzayına genişler ve \oplus_E Einstein toplamı ise \mathbb{R}^3 üzerindeki + vektör toplamına indirgenir.

2.5.1 Yuvar Üzerinde Einstein Toplamı

\mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve \mathbb{V}_s ise \mathbb{V} nin

$$\mathbb{V}_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{v}\| < s\}$$

biçiminde tanımlı s –yuvarı olsun. \mathbb{V}_s üzerinde Einstein toplamı

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \right)$$

biçiminde tanımlıdır. \mathbb{V}_s yuvarı Einstein toplamına göre gyrodeğişmeli bir gyrogruptur.

Einstein toplamı, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$ için birbirine denk olan

$$\gamma_{\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} \right) \quad (16)$$

ve

$$\gamma_{\mathbf{u} \ominus_E \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} \right) \quad (17)$$

gamma özdeşliklerini sağlar.

Buradaki (17) özdeşliği özel rölativitede hiperbolik geometrinin ortaya çıkacağına işaret gösterir ve ilk olarak Varičak (Varičak, 1908) ve Sommerfeld (Sommerfeld, 1909) tarafından çalışılmıştır.

\mathbf{v} nin $\phi_{\mathbf{v}}$ hızlılığı

$$\phi_{\mathbf{v}} = \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}$$

olmak üzere $\cosh \phi_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{v}}$ ve $\sinh \phi_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{v}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}$ olduğu açıktır. 1910-1914 yılları arasında Zagreb Üniversite rektörü fizikçi Vladimir Varičak rölativitenin özel teorisinin aslında Bolyai ve Lobachevsky nin hiperbolik geometrisinin doğal bir açıklaması olduğunu gösterdi. Gerçekten de hızlıklara göre (17) özdeşliği

$$\cosh \phi_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} = \cosh \phi_{\mathbf{u}} \cosh \phi_{\mathbf{v}} - \sinh \phi_{\mathbf{u}} \sinh \phi_{\mathbf{v}} \cos A$$

biçimini alır. Burada A ise hiperbolik geometrinin Beltrami yuvar modelinde rölativistik "hızlar üçgeninin" hiperbolik açısıdır.

\mathbb{V}_s de alınan keyfi \mathbf{u}, \mathbf{v} vektörleri eğer \mathbb{V} de paralel ise yani $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ olacak biçimde bir λ varsa bu durumda Einstein toplamı

$$\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

biçimine indirgenir. Burada tanımlanan işlem hem değişmeli hem de birleşmelidir. Ayrıca

$$\|\mathbf{u}\| \oplus_E \|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

eşitliği de sağlanır. Üstelik (\mathbb{V}_s, \oplus_M) nin $gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ otomorfizması $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_s$ için \mathbb{V} den \mathbb{V}_s üzerine indirgenen iç çarpımı korur. Yani

$$gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\mathbf{a}) \cdot gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

sağlanır (Ungar, 2005).

\mathbb{V} boyutu en az iki olan (sonlu yada sonsuz) boyutlu bir Hilbert uzayı ve $\langle t, t \rangle := t \cdot t = 1$ olacak biçimde sabit bir $t \in \mathbb{V}$ verilsin. Bu durumda $\mathbb{V} = t^\perp \oplus \mathbb{R}t$ olup $\forall x \in \mathbb{V}$ için

$$x = \bar{x} + x_0 t \quad \bar{x} \in t^\perp \text{ ve } x_0 \in \mathbb{R}$$

olacak biçimde tek türlü yazılır. $x, y \in \mathbb{V}$ için x ile y arasındaki Lorentz-Minkowski uzaklığı

$$l(x, y) = (\bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y}) - (x_0 - y_0)^2$$

biçiminde tanımlanır. $\lambda : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ fonksiyonu tanımlansın. $\forall x, y \in \mathbb{V}$ için

$$l(\lambda(x), \lambda(y)) = l(x, y)$$

oluyorsa λ dönüşümüne \mathbb{V} den \mathbb{V} ye bir Lorentz dönüşümü denir.

$p^2 = p \cdot p < 1$ olacak biçimde $p \in t^\perp$ ve $k^2(1 - p^2) = 1$ olacak biçimde $k \neq -1$ reel sayısı verilsin. $\forall x \in \mathbb{V}$ için

$$A_p(x) := x_0 p + (\bar{x} \cdot p) t$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu durumda A_p dönüşümü yardımıyla

$$B_{p,k} = Id + k A_p + \frac{k^2}{k+1} A_p^2$$

dönüşümü tanımlansın. $B_{p,k}$ dönüşümü de lineer olup aynı zamanda bir Lorentz dönüşümüdür. $k > 0$ için $B_{p,k}$ dönüşümüne Lorentz artışı (boost) denir. Boyutu en az iki olan (sonlu yada sonsuz) bir \mathbb{V} Hilbert uzayında tanımlı Lorentz dönüşümlerinin karakterizasyonu Benz tarafından verilmiştir (Benz, 2000). Benz'e göre bir λ Lorentz dönüşümü

$$\lambda(x) = B_{p,k} w(x) + d$$

biçiminde tek türlü yazılır. Burada w dönüşümü $w(t) = t$ olacak biçimde bir Lorentz dönüşümü ve d ise \mathbb{V} nin bir elemanıdır.

Teorem 2.5.1.1 : \mathbb{V} nin bütün Lorentz boostları sınırlıdır (Demirel¹&Seyrantepel¹, 2010).

İspat : $B_{p,k}$, \mathbb{V} nin bir Lorentz boost'u olsun. $\|Id\| = 1$ olduğu açıktır. $p^2 < 1$ olacak biçimde $p \in t^\perp$ seçilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|A_p(x)\|^2 &= (x_0 p + (\bar{x} \cdot p) t) \cdot (x_0 p + (\bar{x} \cdot p) t) \\ &= x_0^2 p^2 + (\bar{x} \cdot p)^2 \\ &= x_0^2 p^2 + |\bar{x} \cdot p|^2 \\ &\leq x_0^2 p^2 + \bar{x}^2 p^2 \\ &= (x_0^2 + \bar{x}^2) \|p\|^2 \end{aligned}$$

olup buradan

$$\|A_p(x)\| \leq \|p\| \|x\|$$

yani

$$\|A_p\| \leq \|p\|$$

elde edilir. Tersine

$$\begin{aligned}
\|p\|^2 &= p^2 \\
&= \|p^2 t\| \\
&= \sqrt{(A_p(p))^2} \\
&= \|A_p(p)\| \\
&\leq \|A_p\| \|p\|
\end{aligned}$$

olup $\|p\| \leq \|A_p\|$ elde edilir. Böylece $\|A_p\| = \|p\|$ olup A_p sınırlıdır. Ayrıca

$$\|A_p^2(x)\| \leq \|p\|^2 \|x\|$$

olduğundan A_p^2 dönüşümü de sınırlıdır. Tersine

$$\begin{aligned}
p^2 \|p\| &= \|A_p^2(p)\| \\
&\leq \|A_p^2\| \|p\|
\end{aligned}$$

olduğundan $\|A_p^2\| = \|p\|^2$ elde edilir. Son olarak ise $k \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|B_{p,k}\| &= \sup \left\{ \frac{\|B_{p,k}(x)\|}{\|x\|} : 0 < \|x\| \leq 1 \right\} \\
&\leq 1 + k \|p\| + \frac{k^2}{k+1} \|p\|^2 \\
&= k(\|p\| + 1)
\end{aligned}$$

bulunur. $k \leq -1$ için $\|B_{p,k}\| = 2 + |k|(\|p\| + 1)$ olduğu açıktır.

Sonuç 2.5.1.1 : Linear Lorentz dönüşümleri süreklidir (Demirel¹&Seyrantepe¹, 2010).

$k > 0$ ve $K > 0$ için $B_{p,k}$ ve $B_{q,K}$ dönüşümleri sırasıyla B_p ve B_q ile gösterilsin. Bu durumda

$$B_p B_q = B_{r,m} w$$

olup

$$m = \frac{1 + p \cdot q}{\sqrt{1 - p^2} \sqrt{1 - q^2}}$$

ve

$$p * q := r = \frac{p + q}{1 + p \cdot q} + \frac{k}{k + 1} \frac{(p \cdot q)p - p^2q}{1 + p \cdot q}$$

dir. Buradaki $*$ işlemi rölativistik toplam (relativistic addition) olup, bu toplamın bazı özellikleri $boyV = 4$ için Ungar tarafından incelenmiştir (Ungar^{1,2}, 1990). $BoyV \geq 2$ için, aşağıdaki özellikler W. Benz tarafından incelenmiştir (Benz, 2000).

(i) $\forall p \in S = \{x \in t^\perp : x^2 < 1\}$ için

$$(-p) * p = 0 = p * (-p)$$

dir.

(ii) $\forall p \in S$ için

$$0 * p = p = p * 0$$

dir.

(iii) $\forall a, b \in S$ için $a * x = b$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $x \in S$ vardır ve $x = (-a) * b$

dir. Üstelik $\forall a, b \in S$ için $y * a = b$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $y \in S$ vardır.

(iv) $\forall a, b \in S$ için

$$w(a * b) = w(a) * w(b)$$

dir.

(v) $\forall p \in S$ için

$$w \cdot B_p = B_{w(p)} \cdot w$$

dir.

(vi) $\forall a, b, c \in S$ için

$$a * (b * c) = (a * b) * (w(a, b)(c))$$

dir.

(vii) $\forall a, b \in S$ için

$$b * a = w(a * b)$$

dir.

Ayrıca

$$B_{-p,k}B_{p,k} = Id$$

dir.

S kümesi "*" işlemine göre bir Einstein gyrogrupudur. Lorentz-Minkowski uzaklıkları pozitif, negatif ve sıfır olabilir. Sıralı kümeler yardımıyla Lorentz-Minkowski uzaklığının sıfır olması için gerek ve yeter koşul Benz tarafından verilmiştir (Benz, 2003). Lorentz-Minkowski uzaklığının sıralı kümeler yardımıyla pozitif, negatif ve sıfır olma durumları ise Demirel ve Seyrantepe tarafından verilmiştir (Demirel¹&Seyrantepe¹, 2010).

3 GYROVEKTÖR UZAYLARI

3.1 Gyrovektörler ve Cogyrovektörler

Öklidyen uzayda bir $[PQ]$ doğru parçası alınsın. $[PQ]$ doğru parçası P den Q ya doğru yönlendirilmişse \overrightarrow{PQ} ile gösterilir. Uzayda bütün yönlü doğru parçalarının kümesi \mathcal{A} ile gösterilsin ve $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{A}$ ve $\overrightarrow{P'Q'} \in \mathcal{A}$ olmak üzere \mathcal{A} kümesinde

$$\overrightarrow{P'Q'} \equiv \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow |PQ| = |P'Q'| \text{ ve } \overrightarrow{P'Q'} \text{ nin yönü } \overrightarrow{PQ} \text{ nin yönüne eşittir}$$

önermesiyle " \equiv " bağıntısı tanımlansın.

Tanım 3.1.1 : Uzaydaki yönlü doğru parçalarının kümesinde yukarıda tanımlanan " \equiv " bağıntısına göre elde edilen her bir denklik sınıfına uzayda bir vektör denir.

Bu tanıma göre uzayda bir vektör, bir yönlü doğru parçasına denk olan bütün yönlü doğru parçalarının kümesidir.

(G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere $[PQ]$ gyrodoğru parçası P den Q ya doğru yönlendirilmişse

$$PQ = \ominus P \oplus Q$$

ile gösterilir. Bütün yönlü doğru parçalarının kümesi \mathcal{B} olsun. $PQ \in \mathcal{B}$ ve $P'Q' \in \mathcal{B}$ için \mathcal{B} kümesinde

$$P'Q' \sim PQ \Leftrightarrow \ominus P \oplus Q = \ominus P' \oplus Q'$$

önermesiyle " \sim " bağıntısı tanımlansın.

Tanım 3.1.2 : (G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere, G deki tüm yönlü gyrodoğru parçalarının kümesinde tanımlanan " \sim " bağıntısına göre elde edilen her bir denklik sınıfına bir gyrovektör denir.

Gyrodeğişmeli gyrogrupların noktaları ve gyrovektörleri arasında yakın bir ilişki vardır.

1. (G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere, G nin herhangi farklı iki A ve B noktaları için

$$\mathbf{v} = \ominus A \oplus B$$

olacak biçimde G nin bir ve yalnız bir \mathbf{v} gyrovektörü vardır. Böylece G nin herhangi bir B noktasına $B = \ominus 0 \oplus B$ biçiminde bir gyrovektör karşılık gelir.

2. G nin her A noktası ve her \mathbf{v} gyrovektörü için $B = A \oplus \mathbf{v}$ olacak biçimde bir $B \in G$ noktası vardır. Böylece G nin \mathbf{v} vektörü A noktasının B noktasına gyroötelemesi olarak düşünülebilir. Ayrıca $C = (A \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{u}$ ise, sağ gyrobirleşme özelliğinden

$$C = A \oplus (\mathbf{v} \oplus \text{gyr}[\mathbf{v}, A] \mathbf{u})$$

elde edilir.

3. G nin her B noktası ve her \mathbf{v} gyrovektörü için $A = \ominus \mathbf{v} \boxplus B$ olacak biçimde bir $A \in G$ noktası vardır.

4. $\forall A, B, C \in G$ için

$$(\ominus A \oplus B) \oplus \text{gyr}[\ominus A, B] (\ominus B \oplus C) = \ominus A \oplus C$$

dir.

(G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere $[PQ]$ cogyrodoğru parçası P den Q ya doğru yönlendirilmişse

$$PQ = \boxminus P \boxplus Q = Q \boxminus P$$

ile gösterilir. Bütün yönlü doğru parçalarının kümesi \mathcal{C} ile gösterilirse, $PQ \in \mathcal{C}$ ve $P^i Q^i \in \mathcal{C}$ için \mathcal{C} kümesinde

$$P^i Q^i \sim PQ \Leftrightarrow Q \boxminus P = Q^i \boxminus P^i$$

önermesiyle " \sim " bağıntısı tanımlansın.

Tanım 3.1.3 : (G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere, G deki tüm yönlü cogyrodoğru parçalarının kümesinde tanımlanan " \sim " bağıntısına göre elde edilen her bir denklik sınıfına bir cogyrovektör denir.

Gyrodeğişmeli gyrogrupların noktaları ve cogyrovektörleri arasında yakın bir ilişki vardır.

1. (G, \oplus) bir gyrodeğişmeli gyrogrup olmak üzere, G nin herhangi farklı iki A ve B noktaları için

$$\mathbf{v} = \boxminus A \boxplus B$$

olacak biçimde G nin bir ve yalnız \mathbf{v} cogyrovektörü vardır. Böylece G nin herhangi bir B noktasma $B = \boxminus 0 \boxplus B$ biçiminde bir cogyrovektör karşılık gelir.

2. G nin her A noktası ve her \mathbf{v} cogyrovektörü için $B = \mathbf{v} \oplus A$ olacak biçimde bir $B \in G$ noktası vardır.

3. G nin her B noktası ve her \mathbf{v} cogyrovektörü için $A = \ominus \mathbf{v} \oplus B$ olacak biçimde bir $A \in G$ noktası vardır.

4. $\forall A, B, C \in G$ için

$$(\boxminus A \boxplus B) \oplus (\boxminus B \boxplus C) = \boxminus A \boxplus_{gyr} [\boxminus A \boxplus B, \boxminus B \boxplus C] C$$

dir.

3.2 Gyrovektör Uzayları

Tanım 3.2.1 : \mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve $G \subset \mathbb{V}$ olmak üzere (G, \oplus) gyrodeğişmeli gyrogrubu tanımlansın. $r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v} \in G$ olmak üzere G üstünde

$$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \quad (r, \mathbf{v}) \mapsto r \otimes \mathbf{v}$$

biçiminde " \otimes " işlemi tanımlansın. Eğer $\forall \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (G, \oplus, \otimes) cebirsel yapısına bir reel iç çarpım gyrovektör uzayı (kısaca gyrovektör uzayı) denir:

$$(V1) 1 \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(V2) (r_1 + r_2) \otimes \mathbf{u} = (r_1 \otimes \mathbf{u}) \oplus (r_2 \otimes \mathbf{u})$$

$$(V3) (r_1 r_2) \otimes \mathbf{u} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{u})$$

$$(V4) \frac{|r| \otimes \mathbf{u}}{\|r \otimes \mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$(V5) gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}](r \otimes \mathbf{a}) = r \otimes gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{a}$$

$$(V6) \text{ gyr } [r_1 \otimes \mathbf{u}, r_2 \otimes \mathbf{u}] = I$$

$$(V7) \|r_1 \otimes \mathbf{u}\| = |r_1| \otimes \|\mathbf{u}\|$$

$$(V8) \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \oplus \|\mathbf{v}\|.$$

Ayrıca $(-1) \otimes \mathbf{a} = \ominus \mathbf{a}$, $\|\ominus \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ve $\mathbf{a} \otimes (-t) = \ominus \mathbf{a} \otimes t$ olduğu açık olup (V1) aksiyomundan

$$n \otimes a = \mathbf{a} \oplus \mathbf{a} \oplus \cdots \oplus \mathbf{a}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $\forall r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve için $\forall \mathbf{a} \in G$ için

$$r \otimes (r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a}) = r \otimes (r_1 \otimes \mathbf{a}) \oplus r \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a})$$

dir.

Tanım 3.2.2 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere G üstünde tanımlanan birebir, örten $\varphi : G \rightarrow G$ fonksiyonu için

$$\varphi(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) \oplus \varphi(\mathbf{b})$$

$$\varphi(r \otimes \mathbf{a}) = r \otimes \varphi(\mathbf{a})$$

$$\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) \cdot \varphi(\mathbf{b})$$

özellikleri sağlanıyorsa φ fonksiyonuna (G, \oplus, \otimes) gyrovektör uzayının bir otomorfizması denir.

Tanım 3.2.3 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere (G, \oplus, \otimes) nin hareketleri, kendi otomorfizmaları ve $\mathbf{x} \in G$ olmak üzere bir önceki bölümde tanımlandığı biçimdeki sol gyroöteleme fonksiyonları olan L_x fonksiyonlarıdır.

Tanım 3.2.4 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere (G, \oplus, \otimes) üstünde gyrouzaklık fonksiyonu $\forall a, b \in G$ için

$$d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

biçiminde tanımlı olup

$$\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| = \|\ominus \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}\|$$

dir (Ungar¹, 2001).

Teorem 3.2.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere

$$\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\| \leq \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \oplus \|\ominus \mathbf{b} \oplus \mathbf{c}\| \quad (18)$$

gyroüçgen eşitsizliği sağlanır (Ungar, 2005).

İspat : (V8) aksiyomundan

$$\begin{aligned} \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\| &= \|(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \text{gyr}[\ominus \mathbf{a}, \mathbf{b}](\ominus \mathbf{b} \oplus \mathbf{c})\| \\ &\leq \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \oplus \|\text{gyr}[\ominus \mathbf{a}, \mathbf{b}](\ominus \mathbf{b} \oplus \mathbf{c})\| \\ &= \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \oplus \|\ominus \mathbf{b} \oplus \mathbf{c}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.5 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere (G, \oplus, \otimes) üstünde cogyrouzaklık fonksiyonu $\forall a, b \in G$ için

$$d_{\boxplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

biçiminde tanımlı olup

$$\|\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} \boxminus \mathbf{b}\|$$

dir (Ungar¹, 2001).

Teorem 3.2.2 : Gyrouzaklıklar, sol gyroötelemeler ve otomorfizmler altında değişmez kalırlar (Ungar, 2005).

İspat : Otomorfizmler altında iç çarpım korunduğuna göre normda korunur. Böylece $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G, \forall \varphi \in \text{Oto}(G, \oplus, \otimes)$ için

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{b}) \ominus \varphi(\mathbf{a})\| &= \|\varphi(\mathbf{b} \ominus \mathbf{a})\| \\ &= \|\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in G$ olmak üzere \mathbf{a} ve \mathbf{b} nin \mathbf{x} e göre sol gyroötelenmiş görüntüleri sırasıyla \mathbf{a}' ve \mathbf{b}' ise

$$\mathbf{a}' = \mathbf{x} \oplus \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' \ominus \mathbf{a}' &= (\mathbf{x} \oplus \mathbf{b}) \ominus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \\ &= \text{gyr}[\mathbf{x}, \mathbf{b}] (\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}) \end{aligned}$$

olup, böylece

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}' \ominus \mathbf{a}'\| &= \|\text{gyr}[\mathbf{x}, \mathbf{b}] (\mathbf{b} \ominus \mathbf{a})\| \\ &= \|\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 : Cogyrözaklıklar otomorfizmler altında değişmez kalırlar (Ungar, 2005).

İspat : $\varphi \in \text{Oto}(G, \boxplus)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a} \boxplus \mathbf{b}) &= \varphi(\mathbf{a} \boxplus (\ominus \mathbf{b})) \\ &= \varphi(\mathbf{a}) \boxplus \varphi(\ominus \mathbf{b}) \\ &= \varphi(\mathbf{a}) \boxminus \varphi(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

olup, böylece

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{a}) \boxminus \varphi(\mathbf{b})\| &= \|\varphi(\mathbf{a} \boxplus \mathbf{b})\| \\ &= \|\mathbf{a} \boxplus \mathbf{b}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Cogyrözaklıklar, sol gyroötelemeler altında ve sağ gyroötelemeler altında değişir.

Teorem 3.2.4 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere (G, \oplus, \otimes) üstünde cogyrözaklıklar $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in G$ için

$$\mathbf{a} \boxplus \mathbf{b} = (\mathbf{a} \oplus \text{gyr}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{x}) \boxplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{x})$$

biçiminde tanımlı uygun sağ gyroötelemeler altında değişmez kalırlar (Ungar, 2005).

Teorem 3.2.5. : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere (G, \oplus, \otimes) üstünde cogyrouzaklıklar $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in G$ için

$$\mathbf{a} \boxminus \mathbf{b} = (\mathbf{a} \oplus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{k}_{\mathbf{ab}}]\mathbf{x}) \boxminus (\mathbf{b} \oplus \text{gyr}[\mathbf{b}, \mathbf{k}_{\mathbf{ab}}]\mathbf{x})$$

uygun sağ gyroötelemeler altında değişmez kalırlar (Ungar, 2005). Burada $\mathbf{k}_{\mathbf{ab}}$ noktası, \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen cogyrodoğru üzerinde keyfi bir noktadır.

3.3 Gyrodoğrular ve Cogyrodoğrular

Öklidyen geometride, verilen bir P noktasının, A noktasından geçen ve sıfırdan farklı bir u vektörüne paralel olan doğrunun üstünde bulunması için gerek ve yeter koşul

$$\exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AP} = tu$$

açık önermesinin sağlanmasıdır. $\overrightarrow{AP} = tu$ önermesinin $P = A + tu$ biçiminde yazılabileceği açıktır. Uzayda (y_1, y_2, \dots, y_n) dik koordinat sistemi kısaca Y ile gösterilsin. Bu durumda uzayın her P noktası için

$$Y(P) = (y_1(P), y_2(P), \dots, y_n(P)) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

olup $P = A + tu$ eşitliğinde P noktası yerine $Y(P)$ yazılırsa $Y(P) = A + tu$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, A noktasından geçen ve sıfırdan farklı u vektörüne paralel olan doğru $\exists t \in \mathbb{R}$ için $Y(P) = A + tu$ eşitliğini sağlayan P noktalarının kümesidir. Böylece

$$Y = A + tu \tag{19}$$

denklemini uzayda A noktasından geçen ve u vektörüne paralel olan doğrunun denklemidir. Üstelik (19) denklemi yüksek boyutlu uzaylarda da geçerlidir. Farklı iki A, B noktasından geçen bir ve yalnız bir doğru vardır ve bu doğrunun denklemi

$$Y = A + t\overrightarrow{AB}$$

biçimindedir (Sabuncuoğlu, 2005).

(G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen gyrodoğrunun denklemi

$$Y = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t$$

biçimindedir. $t = 0$ için gyrodoğrunun \mathbf{a} noktası, $t = 1$ için ise gyrodoğrunun \mathbf{b} noktası elde edilir.

(G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen cogyrodoğrunun denklemi

$$Y = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t \oplus \mathbf{a}$$

biçimindedir. $t = 0$ için cogyrodoğrunun \mathbf{a} noktası, $t = 1$ için ise cogyrodoğrunun \mathbf{b} noktası elde edilir.

Tanım 3.3.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in G$ olsun. Bu noktalar aynı gyrodoğru üstünde ise, yani $k = 1, 2, 3$ ve $t_k \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_k$$

olacak biçimde birbirinden farklı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ varsa $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ noktalarına gyrodoğrudaştır denir (Ungar, 2005).

Tanım 3.3.2 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in G$ olsun. Bu noktalar aynı cogyrodoğru üstünde ise, yani $k = 1, 2, 3$ ve $t_k \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{a}_k = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t_k \oplus \mathbf{a}$$

olacak biçimde birbirinden farklı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ varsa $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ noktalarına cogyrodoğrudaştır denir (Ungar, 2005).

Tanım 3.3.3 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ noktaları G de gyrodoğrudaş üç nokta olsun. $t_1 < t_2 < t_3$ yada $t_3 < t_2 < t_1$ olacak biçimdeki $t_k \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, 2, 3$ için

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_k$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ varsa \mathbf{a}_2 noktası \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_3 noktalarının arasındadır denir (Ungar, 2005).

Tanım 3.3.4 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ noktaları G de cogyrodoğrudaş üç nokta olsun. $t_1 < t_2 < t_3$ yada $t_3 < t_2 < t_1$ olacak biçimdeki $t_k \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, 2, 3$ için

$$\mathbf{a}_k = (\mathbf{b} \boxplus \mathbf{a}) \otimes t_k \oplus \mathbf{a}$$

sağlayan birbirinden farklı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ varsa \mathbf{a}_2 noktası \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_3 noktalarının arasındadır denir (Ungar, 2005).

Teorem 3.3.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere G nin farklı iki noktasından geçen bir ve yalnız bir gyrodoğru vardır (Ungar, 2005).

İspat : \mathcal{L} , G nin farklı \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen bir gyrodoğru olsun ve

$$\mathcal{L} = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t$$

biçiminde tanımlansın. \mathbf{p}_1 ve \mathbf{p}_2 , \mathcal{L} üzerinde farklı iki nokta olsun. Bu durumda

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_1$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_2$$

olacak biçimde birbirinden farklı $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ vardır. \mathbf{p}_1 ve \mathbf{p}_2 noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\mathcal{L} = \mathbf{p}_1 \oplus (\ominus \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_2) \otimes t$$

biçimindedir. Bu denklemde $\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_1$ ve $\mathbf{p}_2 = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t_2$ yazılırsa, $\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \otimes t_1 = \mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c} \otimes t_2 = \mathbf{c}_2$ olmak üzere gyroskaler çarpımın gyrotoplama işlemi üzerinde dağılma özelliği, gyroöteleme teoremi ve sol gyrobirleşme özelliklerinin

uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \oplus (\ominus \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_2) \otimes t &= (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_1) \oplus (\ominus (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_1) \oplus (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_2)) \otimes t \\
&= (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_1) \oplus \text{gyr} [\mathbf{a}, \mathbf{c}_1] ((\ominus \mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2) \otimes t) \\
&= (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_1) \oplus \text{gyr} [\mathbf{a}, \mathbf{c}_1] ((\mathbf{c} \otimes (-t_1 + t_2)) \otimes t) \\
&= (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}_1) \oplus \text{gyr} [\mathbf{a}, \mathbf{c}_1] (\mathbf{c} \otimes (-t_1 + t_2) t) \\
&= \mathbf{a} \oplus (\mathbf{c} \otimes t_1 \oplus \mathbf{c} \otimes (-t_1 + t_2) t) \\
&= \mathbf{a} \oplus (\mathbf{c} \otimes (t_1 + (-t_1 + t_2) t)) \\
&= \mathbf{a} \oplus ((\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes (t_1 + (-t_1 + t_2) t)) \\
&= \mathbf{a} \oplus ((\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece G nin farklı iki noktasından geçen bir ve yalnız bir gyrodoğru vardır.

Teorem 3.3.2 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere G nin farklı iki noktasından geçen bir ve yalnız bir cogyrodoğru vardır (Ungar, 2005).

İspat : \mathcal{L} , G nin farklı a ve b noktalarından geçen bir gyrodoğru olsun ve

$$\mathcal{L} = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t \oplus \mathbf{a}$$

biçiminde tanımlansın. p_1 ve p_2 , \mathcal{L} üzerinde farklı iki nokta olsun. Bu durumda

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t_1 \oplus \mathbf{a}$$

$$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t_2 \oplus \mathbf{a}$$

olacak biçimde birbirinden farklı $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ vardır. \mathbf{p}_1 ve \mathbf{p}_2 noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\mathcal{L} = (\mathbf{p}_2 \boxminus \mathbf{p}_1) \otimes t \oplus \mathbf{p}_1$$

biçimindedir. Bu denklemde $\mathbf{p}_1 = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t_1 \oplus \mathbf{a}$ ve $\mathbf{p}_2 = (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t_2 \oplus \mathbf{a}$ yazılırsa,

$\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \otimes t_1 = \mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c} \otimes t_2 = \mathbf{c}_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p}_2 \boxminus \mathbf{p}_1) \otimes t \oplus \mathbf{p}_1 &= ((\mathbf{c}_2 \oplus \mathbf{a}) \boxminus (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{a})) \otimes t \oplus (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{c}_2 \ominus \mathbf{c}_1) \otimes t \oplus (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{c} \otimes (t_2 - t_1)) \otimes t \oplus (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{c} \otimes (t_2 - t_1) t) \oplus (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{a}) \\
&= ((\mathbf{c} \otimes (t_2 - t_1) t) \oplus \mathbf{c}_1) \oplus \mathbf{a} \\
&= \mathbf{c} \otimes ((t_2 - t_1) t + t_1) \oplus \mathbf{a}
\end{aligned}$$

olup, böylece G nin farklı iki noktasından geçen bir ve yalnız bir gyrodoğru vardır.

Teorem 3.3.3 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, (G, \oplus, \otimes) uzayının tüm gyrodoğrularının sol gyroötelemeler altındaki görüntüleri yine G nin gyrodoğrularındır (Ungar, 2005).

İspat : \mathcal{L} , G nin

$$\mathcal{L} = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t$$

denklemleri bir gyrodoğrusu olsun. \mathcal{L} nin x sol gyroötelemesi

$$\mathbf{x} \oplus \mathcal{L} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t)$$

biçiminde olup, buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \oplus \mathcal{L} &= \mathbf{x} \oplus (\mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t) \\ &= (\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t \\ &= (\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})) \otimes t \\ &= (\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus ((\ominus \mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{b})) \otimes t \end{aligned}$$

olup böylece \mathcal{L} nin \mathbf{x} sol gyroötelemesi yine G nin bir gyrodoğrusudur.

Tanım 3.3.5: (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a}) \otimes t \oplus \mathbf{a} \\ \mathcal{K} &= (\mathbf{b}' \boxminus \mathbf{a}') \otimes t \oplus \mathbf{a}' \end{aligned}$$

iki cogyrodoğrusu verilsin. \mathcal{L} ve \mathcal{K} cogyrodoğrularının paralel olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{b}' \boxminus \mathbf{a}' = \lambda \otimes (\mathbf{b} \boxminus \mathbf{a})$$

olacak biçimde reel bir λ sayısının bulunmasıdır (Ungar, 2005).

Teorem 3.3.4 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin

$$\mathcal{L} = \mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}$$

cogyrodoğrusu verilsin. \mathbf{d} , \mathcal{L} üstünde bir nokta olmak üzere \mathcal{L} nin $\ominus \mathbf{d}$ cogyroötelemesi olan

$$\mathcal{L}' = (\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}) \boxminus \mathbf{d}$$

G nin yine bir cogyrodoğrusu olup, G nin orjininden geçer. Üstelik \mathcal{L} ve \mathcal{L}' cogyrodoğruları birbirine paraleldir (Ungar, 2005).

İspat : \mathbf{d} , \mathcal{L} üstünde bir nokta olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \boxminus \mathbf{d} &= (\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}) \boxminus \mathbf{d} \\ &= \mathbf{b} \otimes t \oplus (\mathbf{a} \ominus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{b} \otimes t] \text{gyr}[\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}, \mathbf{d}] (\mathbf{d})) \\ &= \mathbf{b} \otimes t \oplus (\mathbf{a} \ominus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}] \text{gyr}[\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}, \mathbf{d}] (\mathbf{d})) \\ &= \mathbf{b} \otimes t \oplus (\mathbf{a} \ominus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{d}] (\mathbf{d})) \\ &= \mathbf{b} \otimes t \oplus (\mathbf{a} \boxminus \mathbf{d}) \end{aligned}$$

dir. Burada \mathbf{d} noktası \mathcal{L} cogyrodoğrusu üstünde bulunduğundan

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a}$$

olacak biçimde $t_0 \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \boxminus \mathbf{d} &= \mathbf{a} \boxminus (\mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \ominus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a}] (\mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \ominus \text{gyr}[\mathbf{a}, \mathbf{b} \otimes t_0] (\mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \ominus (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \otimes t_0) \\ &= \ominus \mathbf{b} \otimes t_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}) \boxminus \mathbf{d} &= (\mathbf{b} \otimes t) \oplus (\mathbf{a} \boxminus \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{b} \otimes t) \oplus (\ominus \mathbf{b} \otimes t_0) \\ &= \mathbf{b} \otimes (t - t_0) \end{aligned}$$

olup, böylece $\mathcal{L}' = (\mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}) \boxminus \mathbf{d}$ cogyrodoğrusu G nin orjininden geçer. \mathcal{L} ve \mathcal{L}' cogyrodoğrularının paralel oldukları açıktır.

Teorem 3.3.5 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere G nin orjininden geçen gyrodoğrular (cogyrodoğrular) birer cogyrodoğrudur (gyrodoğrudur) (Ungar, 2005).

İspat : $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{L} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \otimes t$$

orjinden geçen bir gyrodoğru olsun. Bu durumda

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \otimes t_0 = 0$$

olacak biçimde $t_0 \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\mathbf{a} = \ominus \mathbf{b} \otimes t_0$$

olup $-t_0 + t = s$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \otimes t \\ &= (\ominus \mathbf{b} \otimes t_0) \oplus (\mathbf{b} \otimes t) \\ &= \mathbf{b} \otimes (-t_0 + t) \\ &= \mathbf{b} \otimes s \\ &= \mathbf{b} \otimes s + 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece orjinden geçen her gyrodoğru bir cogyrodoğrudur.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere orjinden geçen

$$\mathcal{L}^c = \mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a}$$

cogyrodoğrusu seçilsin. Bu durumda

$$\mathbf{b} \otimes t_0 \oplus \mathbf{a} = 0$$

olacak biçimde $t_0 \in \mathbb{R}$ vardır ve buradan

$$\mathbf{a} = \ominus \mathbf{b} \otimes t_0$$

bulunur. Böylece $t - t_0 = r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^c &= \mathbf{b} \otimes t \oplus \mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} \otimes t \oplus (\ominus \mathbf{b} \otimes t_0) \\ &= \mathbf{b} \otimes (t - t_0) \\ &= \mathbf{b} \otimes r \\ &= 0 + \mathbf{b} \otimes r \end{aligned}$$

olup böylece orjinden geçen her cogyrodoğru bir gyrodoğrudur.

3.4 Möbius Gyrovektör Uzayları

\mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve

$$\mathbb{V}_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{v}\| < s\}$$

olmak üzere (\mathbb{V}_s, \oplus_M) Möbius gyrogrubu üzerinde " \otimes_M " Möbius skalar çarpımı $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$, $\mathbf{v} \neq 0$ için

$$\begin{aligned} r \otimes_M \mathbf{v} &= s \frac{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r - (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r}{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r + (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= s \tanh(r \tanh^{-1} \|\mathbf{v}\|/s) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve $r \otimes_M 0 = 0$ dir. Möbius skalar çarpımının birçok özelliği vardır. Bunlardan bazıları aşağıdaki biçimdedir.

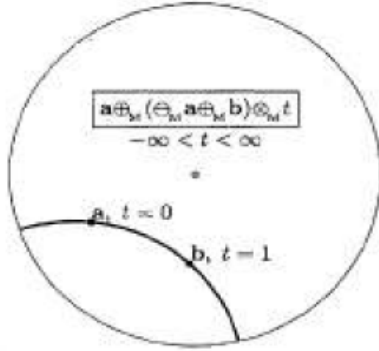
$$\begin{aligned} n \otimes_M \mathbf{v} &= \mathbf{v} \oplus_M \mathbf{v} \oplus_M \cdots \oplus_M \mathbf{v} \\ (r_1 + r_2) \otimes_M \mathbf{v} &= r_1 \otimes_M \mathbf{v} \oplus r_2 \otimes_M \mathbf{v} \\ (r_1 r_2) \otimes_M \mathbf{v} &= r_1 \otimes_M (r_2 \otimes_M \mathbf{v}) \\ r \otimes_M (r_1 \otimes_M \mathbf{v} \oplus_M r_2 \otimes_M \mathbf{v}) &= r \otimes_M (r_1 \otimes_M \mathbf{v}) \oplus_M r \otimes_M (r_2 \otimes_M \mathbf{v}) \\ \|r \otimes_M \mathbf{v}\| &= |r| \otimes_M \|\mathbf{v}\| \\ \frac{|r| \otimes_M \|\mathbf{v}\|}{\|r \otimes_M \mathbf{v}\|} &= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ gyr[\mathbf{a}, \mathbf{b}](r \otimes_M \mathbf{v}) &= r \otimes_M gyr[\mathbf{a}, \mathbf{b}](\mathbf{v}) \\ 1 \otimes_M \mathbf{v} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Tanım 3.4.1 : (\mathbb{V}_s, \oplus_M) Möbius gyrogrubunun " \otimes_M " skalar çarpımıyla donatılmış $(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ üçlüsüne bir Möbius gyrovektör uzayı denir.

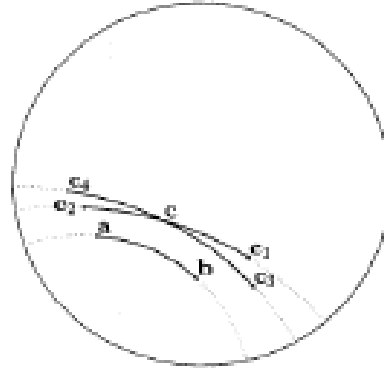
$(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ bir Möbius gyrovektör uzayı olmak üzere \mathbb{V}_s de alınan farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen bir ve yalnız bir $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodoğrusu ve $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}^c$ cogyrodoğrusu vardır ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{ab}} &= \mathbf{a} \oplus_M (\ominus \mathbf{a} \oplus_M \mathbf{b}) \otimes_M t \\ \mathcal{L}_{\mathbf{ab}}^c &= (\mathbf{b} \boxminus_M \mathbf{a}) \otimes_M t \oplus_M \mathbf{a} \end{aligned}$$

biçimindedir.

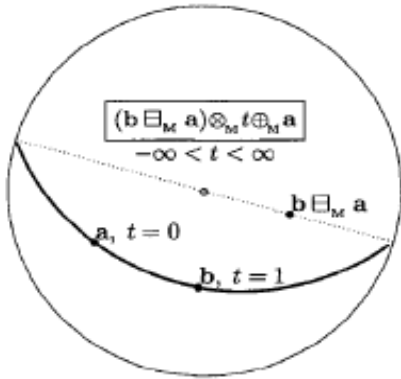


Şekil 3.4.1.1 : $\mathbb{V}_s = \mathbb{R}_{s=1}^2$ olmak üzere $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında verilen farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen gyrodöğru.

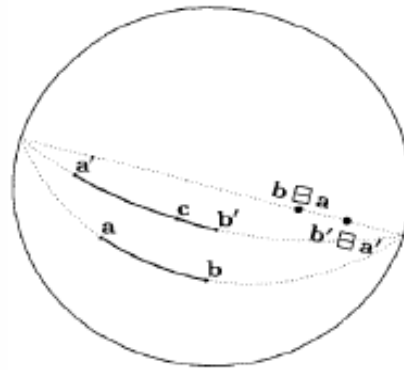


Şekil 3.4.1.2 : $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında verilen \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen gyrodöğruya dışındaki bir \mathbf{c} noktasından çizilen paralel gyrodöğrular.

Möbius gyrovektör uzaylarındaki gyrodöğrular, yuvarı ortogonal kesen çember yayları olup hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modelinin geodezikleriyle örtüşür. \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodöğrusu dışında alınan bir \mathbf{c} noktasından geçen $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodöğrusuna paralel olan sonsuz çoklukta paralel gyrodöğru vardır.



Şekil 3.4.1.3 : $\mathbb{V}_s = \mathbb{R}_{s=1}^2$ olmak üzere $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında verilen farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen cogyrodöğru.



Şekil 3.4.1.4 : $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayında verilen \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen cogyrodöğruya dışındaki bir \mathbf{c} noktasından çizilen paralel cogyrodöğru.

Möbius gyrovektör uzaylarındaki cogyrodokurular ise yine çember yaylarından oluşur, fakat çemberi kestiği noktaları birleştiren Öklidyen geodezik segmenti yuvarın merkezinden geçen kırıdır.

3.4.1 Möbius Gyrometriğinin Poincaré Gyrometriğine Dönüşümü

$(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ bir Möbius gyrovektör uzayı olmak üzere

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}\| \quad (20)$$

Möbius gyrouzaklık fonksiyonu $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_s$ için (18) den

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &\leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \oplus_M d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &= \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{1 + \frac{1}{s^2} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d(\mathbf{b}, \mathbf{c})} \\ &= s \frac{\tanh \phi_{\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}} + \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{b}}}{1 + \tanh \phi_{\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}} \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{b}}} \\ &= s \tanh (\phi_{\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{b}}) \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir.

\mathbb{V}_s uzayı yerine kompleks \mathbb{D} diski alındığında Möbius gyrouzaklık fonksiyonu $a, b \in \mathbb{D}$ için

$$d(a, b) = \|b \ominus_M a\| = \left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| \quad (22)$$

biçiminde indirgenir. (22) deki Möbius gyrometriği yuvar üzerinde Poincaré metriği olarak bilindir.

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{a}\| = s \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{a}}$$

olmak üzere (22) den

$$\tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{a}} \leq \tanh (\phi_{\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \ominus_M \mathbf{b}})$$

yada buna denk olarak

$$\phi_{\mathbf{b} \oplus_M \mathbf{a}} = \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{b} \ominus_M \mathbf{a}\|}{s}$$

olmak üzere

$$\phi_{\mathbf{c} \oplus_M \mathbf{a}} \leq \phi_{\mathbf{b} \oplus_M \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \oplus_M \mathbf{b}} \quad (23)$$

elde edilir. Buradaki (23) eşitsizliği,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \tanh^{-1} \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{s} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{s+d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{s-d(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \end{aligned}$$

Möbius uzaklık fonksiyonunu hatırlatır. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{D}$ için

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

olduğu bilinmektedir (Ungar, 1999, Krantz 1990).

Teorem 3.4.1.1 : \mathbb{D} , kompleks birim diski göstermek üzere $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için

$$|a \oplus_M b| \leq |a| \oplus_M |b|$$

dir (Ungar, 1999).

İspat : $a \in \mathbb{D}$ için

$$\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - |a|^2}}$$

olmak üzere $\gamma_a = \gamma_{|a|}$ olduğu açıktır. Ayrıca γ_a fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olup $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için

$$\gamma_{a \oplus_M b} = \gamma_a \gamma_b |1 + \bar{a}b|$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_{|a \oplus_M b|} &= \gamma_{|a \oplus_M b|} \\ &= \gamma_{|a|} \gamma_{|b|} |1 + |a| |b|| \\ &\geq \gamma_a \gamma_b |1 + \bar{a}b| \\ &= \gamma_{a \oplus_M b} \\ &= \gamma_{|a \oplus_M b|} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $||a| \oplus_M |b|| = |a| \oplus_M |b|$ olduğundan ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $\gamma_z = \gamma_{|z|}$ fonksiyonu monoton artan olup $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için

$$|a| \oplus_M |b| \geq |a \oplus_M b|$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1.2 : \mathbb{D} , kompleks birim diski göstermek üzere $\forall a, b, x \in \mathbb{D}$ için

$$d(a, b) \leq d(a, x) \oplus_M d(x, b)$$

dir (Ungar, 1999).

İspat : $\forall a, b, x \in \mathbb{D}$ için

$$(x \oplus_M a) \ominus_M (x \oplus_M b) = gyr[x, a](a \ominus_M b)$$

dir. Burada x yerine $\ominus_M x$ yazılırsa ve $\ominus_M(\ominus_M x \oplus_M b) = x \ominus_M b$ eşitliğinden

$$(\ominus_M x \oplus_M a) \oplus_M (x \ominus_M b) = gyr[\ominus_M x, a](a \ominus_M b)$$

bulunur. Böylece $\forall a, b, x \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} d(a, b) &= |a \ominus_M b| \\ &= |gyr[\ominus_M x, a](a \ominus_M b)| \\ &= |(\ominus_M x \oplus_M a) \oplus_M (x \ominus_M b)| \\ &\leq |(\ominus_M x \oplus_M a)| \oplus_M |x \ominus_M b| \\ &= d(a, x) \oplus_M d(x, b) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1.3 : \mathbb{D} , kompleks birim diski göstermek üzere $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için

$$||a| \ominus_M |b|| \leq |a \ominus_M b|$$

dir (Demirel&Soytürk, 2008).

İspat : $a \in \mathbb{D}$ için $\gamma_a = (1 - |a|^2)^{-1/2}$ olmak üzere $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için

$$\gamma_{a \ominus_M b} = \gamma_a \gamma_b |1 - \bar{a}b|$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_{|a \ominus_M b|} &= \gamma_{|a| \ominus_M |b|} \\ &= \gamma_{|a|} \gamma_{|b|} |1 - |a| |b|| \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \gamma_{|a \ominus_M b|} &= \gamma_{a \ominus_M b} \\ &= \gamma_{|a|} \gamma_{|b|} |1 - \bar{a}b| \\ &\geq \gamma_{|a|} \gamma_{|b|} |1 - |a||b|| \\ &= \gamma_{|a \ominus_M b|} \\ &= \gamma_{|a| \ominus_M |b|} \end{aligned}$$

olup, böylece

$$|a \ominus_M b| \geq ||a| \ominus_M |b||$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1.4 : \mathbb{D} , kompleks birim diski göstermek üzere $\forall x, y, z \in \mathbb{D}$ için

$$|\ominus_M d(x, y) \oplus_M d(x, z)| \leq d(y, z)$$

dir (Demirel&Soytürk, 2008).

İspat : $\forall x, y, z \in \mathbb{D}$ için

$$d(x, y) \leq d(x, z) \oplus_M d(y, z)$$

eşitsizliğinden

$$d(x, y) \ominus_M d(y, z) \leq d(x, z)$$

yada buna denk olarak

$$d(x, y) \ominus_M d(y, z) \leq d(x, z)$$

elde edilir. Buradan

$$\ominus_M d(y, z) \leq \ominus_M d(x, y) \oplus_M d(x, z)$$

bulunur. Ayrıca

$$d(x, z) \leq d(x, y) \oplus_M d(y, z)$$

eşitsizliğinden

$$\ominus_M d(x, y) \oplus_M d(x, z) \leq d(y, z)$$

olup, böylece

$$|\ominus_M d(x, y) \oplus_M d(x, z)| \leq d(y, z)$$

elde edilir.

3.4.2 Metrik ve Periyodik Doğrular

$\mathcal{S} \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde

$$d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $\Delta = (\mathcal{S}, d)$ yapısına reel uzaklık uzayı denir. \mathcal{S} nin elemanlarına nokta, $d(x, y)$ sayısına ise x ve y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 3.4.2.1 : $K \subset \mathcal{S}$ olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

olacak biçimde birebir, örten bir $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa K ya Δ nın bir metrik doğrusu denir (Blumenthal&Menger, 1970, Benz, 2004).

Öklidyen geometrinin ve hiperbolik geometrinin Weierstrass modeli için metrik doğrular W. Benz tarafından (Benz, 2004), Lorentz-Minkowski geometrisinin metrik doğruları

ise Höfer tarafından tanımlanmıştır (Höfer¹, 2006). Benz, aynı çalışmasında küresel geometride ve eliptik geometride hiç bir metrik doğrunun bulunmadığını belirtmiştir.

Tanım 3.4.2.2 : ρ pozitif bir reel sayı olsun. $K \subset \mathcal{S}$ olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} |f(x) - f(y)| & , \quad |f(x) - f(y)| \leq \rho/2 \text{ için} \\ \rho - |f(x) - f(y)| & , \quad |f(x) - f(y)| > \rho/2 \text{ için} \end{cases}$$

olacak biçimde birebir, örten bir $f : K \rightarrow [0, \rho)$ fonksiyonu varsa K ya Δ nın bir ρ -periyodik doğrusu denir (Blumenthal&Menger, 1970, Benz, 2004).

Küresel geometride 2π -periyotlu periyodik doğrular ve eliptik geometride π -periyotlu periyodik doğrular Benz tarafından tanımlanmıştır (Benz, 2004). Benz aynı çalışmasında Öklidyen geometride hiç bir periyodik doğrunun bulunmadığını da göstermiştir. Höfer ise Lorentz-Minkowski geometrisinde periyodik doğruların bulunmadığını kanıtlamıştır (Höfer², 2006).

Eğer K , bir metrik doğru yada ρ -periyodik doğru ise $\forall x, y \in K$ için $d(x, y) = d(y, x)$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğu açıktır. Aşağıdaki iki problem W. Benz tarafından verilmiştir.

Problem 3.4.2.1 : $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$$d(x(s), x(t)) = |s - t|$$

olacak biçimdeki tüm birebir $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonlarını tanımlayınız (Benz, 2004).

Problem 3.4.2.2 : $\forall s, t \in [0, \rho)$ için

$$d(x(s), x(t)) = \begin{cases} |s - t| & , \quad |s - t| \leq \rho/2 \text{ için} \\ \rho - |s - t| & , \quad |s - t| > \rho/2 \text{ için} \end{cases}$$

olacak biçimdeki tüm birebir $x : [0, \rho) \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonlarını tanımlayınız (Benz, 2004).

Bir geometride metrik doğruların varlığı araştırılırken öncelikle iki nokta arasındaki uzaklığın sınırlı olmaması gerekir. Dolayısıyla hiperbolik geometrinin Poincaré yuvar modeli için $d(a, b) = \|a \ominus b\|$ alınırsa problem 3.4.2.1 in sol tarafı sınırlı olduğundan

bu uzayda metrik doğru yoktur. O halde Poincaré yuvar modeli için yeni bir uzaklık tanımlamaya ihtiyaç duyulur.

$\Delta = (\mathcal{S}, d)$ reel uzaklık uzayı

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}_{s=1}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

ve

$$\tanh d(x, y) = \|x \ominus y\|$$

biçiminde tanımlansın. Δ uzayının klasik doğruları $\|q\| = \tanh 1$ olacak biçimdeki keyfi $p, q \in \mathcal{S}$ için

$$\{p \oplus q \otimes s : s \in \mathbb{R}\}$$

biçimindedir.

Teorem 3.4.2.1 : Δ reel uzaklık uzayının metrik doğruları Δ nın klasik doğrularıdır.

İspat : $p, q \in \mathcal{S}$ ve $\|q\| = \tanh 1$ olsun. Bu durumda

$$x(\xi) = p \oplus q \otimes s$$

fonksiyonu birebirdir ve $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$$d(x(s), x(t)) = |s - t|$$

olduğu açıktır. Böylece $x(s) = p \oplus q \otimes s$ bir metrik doğrudur.

Tersine, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için problem 3.4.2.1 in bir çözümü ve $p := x(0)$ olsun. $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|(\ominus p \oplus x(s)) \ominus (\ominus p \oplus x(t))\| &= \|\text{gyr}[\ominus p, x(s)](x(s) \ominus x(t))\| \\ &= \|x(s) \ominus x(t)\| \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$x'(s) := \ominus p \oplus x(s)$$

fonksiyonu da problem 3.4.2.1 in bir çözümüdür. $q := x'(1)$ olsun. $x'(0) = 0$ olduğu açıktır. x' problem 3.4.2.1 in bir çözümü olduğundan

$$\tanh |1 - 0| = \tanh 1 = \|x'(1) \ominus x'(0)\| = \|q\|.$$

Ayrıca $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$\tanh |s - 0| = \tanh |s| = \|x'(s) \ominus x'(0)\| = \|x'(s)\|$$

elde edilir. $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$$\tanh |s - t| = \|x'(s) \ominus x'(t)\|$$

olduğundan son eşitlikte her iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{\tanh^2 s + \tanh^2 t - 2 \tanh s \tanh t}{1 + \tanh^2 s \tanh^2 t - 2 \tanh s \tanh t} = \frac{\|x'(s)\|^2 + \|x'(t)\|^2 - 2 \langle x'(s), x'(t) \rangle}{1 + \|x'(s)\|^2 \|x'(t)\|^2 - 2 \langle x'(s), x'(t) \rangle}$$

bulunur. Buradan

$$\tanh s \tanh t = \langle x'(s), x'(t) \rangle$$

yani

$$\tanh^2 s \tanh^2 t = \langle x'(s), x'(t) \rangle^2$$

bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(s) = s$$

olmak üzere

$$x'(s) = \varphi(s) \otimes q$$

yazılabilir. Böylece $x(s) = p \oplus q \otimes s$ bir klasik doğrudur.

Teorem 3.4.2.2 : $\forall \rho > 0$ için Δ nın ρ -periyodik doğrusu yoktur.

İspat: $x : [0, \rho) \rightarrow S$ fonksiyonu $\forall s, t \in [0, \rho)$ için problem 3.4.2.2 nin bir çözümü ve $a := x(0)$ olsun. $\forall s, t \in [0, \rho)$ için

$$\begin{aligned} \|(\ominus a \oplus x(s)) \ominus (\ominus a \oplus x(t))\| &= \|gyr[\ominus a, x(s)](x(s) \ominus x(t))\| \\ &= \|x(s) \ominus x(t)\| \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$x'(s) := \ominus a \oplus x(s)$$

fonksiyonu da problem 3.4.2.2 nin bir çözümlüdür. $p := x'(\frac{\rho}{2})$ olsun. $x'(0) = 0$ olduğu açıktır. x' problem 3.4.2.2 nin bir çözümlü olduğundan

$$\tanh \left| \frac{\rho}{2} - 0 \right| = \tanh \frac{\rho}{2} = \left\| x' \left(\frac{\rho}{2} \right) \ominus x'(0) \right\| = \|p\|$$

dir. Ayrıca $\forall s \in [0, \frac{\rho}{2})$ için

$$\tanh |s - 0| = \tanh s = \left\| x'(s) \ominus x'(0) \right\| = \|x'(s)\|$$

elde edilir. $\forall s, t \in [0, \frac{\rho}{2})$ için

$$\tanh |s - \eta| = \left\| x'(s) \ominus x'(t) \right\|$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{\tanh^2 s + \tanh^2 t - 2 \tanh s \tanh t}{1 + \tanh^2 s \tanh^2 t - 2 \tanh s \tanh t} = \frac{\|x'(s)\|^2 + \|x'(t)\|^2 - 2 \langle x'(s), x'(t) \rangle}{1 + \|x'(s)\|^2 \|x'(t)\|^2 - 2 \langle x'(s), x'(t) \rangle}$$

elde edilir. Buradan

$$\tanh s \tanh t = \langle x'(s), x'(t) \rangle$$

yani

$$\tanh^2 s \tanh^2 t = \langle x'(s), x'(t) \rangle^2$$

bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\forall s \in [0, \frac{\rho}{2})$ için

$$\varphi(s) = \frac{2s}{\rho}$$

olmak üzere

$$x'(s) = \varphi(s) \otimes q$$

yazılabilir. $\forall m \in (\frac{\rho}{2}, \rho)$ için

$$\tanh(\rho - |m - 0|) = \left\| x'(m) \ominus x'(0) \right\|$$

ve

$$\tanh \left| m - \frac{\rho}{2} \right| = \left\| x'(m) \ominus x' \left(\frac{\rho}{2} \right) \right\|$$

olduğu x' fonksiyonunun problem 3.4.2.2 nin bir çözümü olduğundan dolayı açıktır. Son eşitlikte her iki tarafın karesi alındığında

$$\tanh \frac{\rho}{2} \tanh (\rho - \zeta) = \langle x' (m), p \rangle$$

yani

$$\langle x' (\zeta), p \rangle^2 = \langle x' (m), x' (m) \rangle \langle p, p \rangle$$

bulunup, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\forall m \in (\frac{\rho}{2}, \rho)$ için

$$\delta (m) = \frac{2}{\rho} (\rho - m)$$

olmak üzere

$$x' (m) = \delta (m) \otimes q$$

yazılabilir. Buradan $x' (\frac{\rho}{4}) = x' (\frac{3\rho}{4})$ bulunur. Bu durum ise

$$\left| \frac{3\rho}{4} - \frac{\rho}{4} \right| = d \left(x' \left(\frac{3\rho}{4} \right), x' \left(\frac{\rho}{4} \right) \right)$$

eşitliğiyle çelişir. Böylece Δ nın ρ -periyodik doğrusu yoktur.

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{V} : \|x\| < 1\}$$

ve $d(a, b) = \|a \boxminus b\|$ alındığında $d(a, b)$ sınırlı olacağından metrik doğru yoktur. $\Delta = (\mathcal{S}, d)$ reel uzaklık uzayı

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

ve

$$d(x, y) = \tanh^{-1} \|x \boxminus y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{S}$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 3.4.2.3 : Δ nın cogyrodolları birer metrik doğrudur.

İspat : $q \in \mathcal{S}$ ve $\|p\| = \tanh 1$ olacak biçimde \mathcal{S} nin bir p noktası seçilsin. Bu durumda

$$x(t) = (p \otimes t) \oplus q$$

fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
x(t) = x(s) &\Rightarrow (p \otimes t) \oplus q = (p \otimes s) \oplus q \\
&\Rightarrow p \otimes t = ((p \otimes s) \oplus q) \boxminus q \\
&\Rightarrow p \otimes t = ((p \otimes s) \ominus (\ominus q)) \boxplus (\ominus q) \\
&\Rightarrow p \otimes t = p \otimes s \\
&\Rightarrow t = s
\end{aligned}$$

olduğundan, böylece x birebirdir. Ayrıca her $t, s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\tanh d(x(t), x(s)) &= \|x(t) \boxminus x(s)\| \\
&= \|x(t) \oplus \text{gyr}[x(t), k](y) \boxminus (x(s) \oplus \text{gyr}[x(s), k](y))\| \\
&= \|x(t) \oplus \text{gyr}[x(t), q](y) \boxminus (x(s) \oplus \text{gyr}[x(s), q](y))\| \\
&= \|x(t) \oplus \text{gyr}[p \otimes t, q](y) \boxminus (x(s) \oplus \text{gyr}[p \otimes s, q](y))\| \\
&= \|((p \otimes t) \oplus (q \oplus y)) \boxminus ((p \otimes s) \oplus (q \oplus y))\| \\
&= \|((p \otimes t) \oplus (q \oplus (\ominus q))) \boxminus ((p \otimes s) \oplus (q \oplus (\ominus q)))\| \\
&= \|(p \otimes t) \boxminus (p \otimes s)\| \\
&= \|(p \otimes t) \ominus ((p \otimes t) \oplus (p \otimes s)) \ominus (p \otimes t)\| \\
&= \|p \otimes (t - s)\| \\
&= \tanh |t - s|
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$d(x(t), x(s)) = |t - s|$$

dir. Böylece her cogyrodoğru Δ nın bir metrik doğrusudur.

Teorem 3.4.2.4 : Δ nın metrik doğruları Δ nın cogyrodoğrularıdır.

İspat : $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ fonksiyonunu problem 3.4.2.1 in bir çözümü olsun. $x(0) = 0$ olsun. Eğer $x(0) \neq 0$ olsaydı $gx(0) = 0$ olacak biçimde bir g gyrovektör uzay otomorfizmi seçilirdi. $p := x(1)$ olmak üzere

$$\tanh |1 - 0| = \tanh 1 = \|x(1) \boxminus x(0)\| = \|p\|$$

elde edilir. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\tanh |t - 0| = \tanh |t| = \|x(t) \boxminus x(0)\| = \|x(t)\|$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\tanh |t - 1| &= \|x(t) \boxminus x(1)\| \\ &= \|x(t) \ominus gyr[x(t), x(1)](x(1))\|\end{aligned}$$

olup burada her iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{\tanh^2 t + \tanh^2 1 - 2 \tanh t \tanh 1}{1 + \tanh^2 t \tanh^2 1 - 2 \tanh t \tanh 1} = \frac{\|x(t)\|^2 + \|x(1)\|^2 - 2\langle x(t), gyr[x(t), x(1)](x(1)) \rangle}{1 + \|x(t)\|^2 \|x(1)\|^2 - 2\langle x(t), gyr[x(t), x(1)](x(1)) \rangle},$$

bulunur. Son eşitlikten

$$\tanh t \tanh 1 = \langle x(t), gyr[x(t), x(1)](x(1)) \rangle$$

olup her iki tarafın karesi alınırsa

$$\begin{aligned}\langle x(t), gyr[x(t), x(1)](x(1)) \rangle^2 &= \tanh^2 t \tanh^2 1 \\ &= \|x(t)\|^2 \|x(1)\|^2 \\ &= \|x(t)\|^2 \|gyr[x(t), x(1)](x(1))\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\varphi(t) = t$ kuralıyla verilen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$x(t) = \varphi(t) \otimes gyr[x(t), x(1)](x(1)) \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$x(t) = t \otimes ((x(t) \oplus x(1)) \ominus x(t))$$

bulunup buradan $x(1)$ çekilirse

$$\begin{aligned}
x(1) &= \ominus x(t) \oplus \left(\left(\frac{1}{t} \otimes x(t) \right) \boxplus x(t) \right) \\
&= \ominus x(t) \oplus \left(\left(\frac{1}{t} \otimes x(t) \right) + \text{gyr} \left[\frac{1}{t} \otimes x(t), \ominus x(t) \right] (x(t)) \right) \\
&= \left(\ominus x(t) \oplus \left(\frac{1}{t} \otimes x(t) \right) \right) \oplus \text{gyr} \left[\ominus x(t), \frac{1}{t} \otimes x(t) \right] \text{gyr} \left[\frac{1}{t} \otimes x(t), \ominus x(t) \right] (x(t)) \\
&= \left(\ominus x(t) \oplus \left(\frac{1}{t} \otimes x(t) \right) \right) \oplus x(t) \\
&= \left(-1 + \frac{1}{t} + 1 \right) \otimes x(t) \\
&= \frac{1}{t} \otimes x(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$x(t) = x(1) \otimes t = p \otimes t$$

bulunur. Böylece Δ nın metrik doğruları Δ nın klasik doğrularıdır.

Teorem 3.4.2.5 : $\forall \rho > 0$ için Δ da ρ -periyotlu doğru yoktur.

İspat : $\rho > 0$ için $x : [0, \rho[\rightarrow \mathbb{S}$ problem 3.4.2.2 nin bir çözümü olsun. $x(0) = 0$ olsun. Eğer $x(0) \neq 0$ olsaydı $gx(0) = 0$ olacak biçimde bir g gyrovektör uzay otomorfizmi seçilirdi. $p := x\left(\frac{\rho}{2}\right)$ olsun. $0 \leq t \leq \frac{\rho}{2}$ olacak biçimdeki her t için

$$\tanh |t - 0| = \tanh t = \|x(t) \boxminus x(0)\| = \|x(t)\|$$

bulunur. Yine $0 \leq t \leq \frac{\rho}{2}$ olacak biçimdeki her t için

$$\tanh \left| t - \frac{\rho}{2} \right| = \left\| x(t) \boxminus x\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\|$$

olup burada her iki tarafın karesi alınırsa

$$\frac{\tanh^2 t + \tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh t \tanh \frac{\rho}{2}}{1 + \tanh^2 t \tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh t \tanh \frac{\rho}{2}} = \frac{\|x(t)\|^2 + \left\| x\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\|^2 - 2 \langle x(t), \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] x\left(\frac{\rho}{2}\right) \rangle}{1 + \|x(t)\|^2 \left\| x\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\|^2 - 2 \langle x(t), \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] x\left(\frac{\rho}{2}\right) \rangle}$$

bulunur. Bu eşitlikten ise

$$\tanh t \tanh \frac{\rho}{2} = \left\langle x(t), \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \right\rangle$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left\langle x(t), \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \right\rangle^2 &= \tanh^2 t \tanh^2 \frac{\rho}{2} \\ &= \|x(t)\|^2 \left\| x\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\|^2 \end{aligned}$$

olup, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\varphi(t) = \frac{2t}{\rho}$ kuralıyla verilen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$x(t) = \varphi(t) \otimes \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \quad \forall t \in [0, \frac{\rho}{2}],$$

elde edilir.

$$x(t) = \varphi(t) \otimes \text{gyr}[x(t), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)$$

eşitliği ise

$$x(t) = \frac{2t}{\rho} \otimes \left(\left(x(t) \oplus x\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) \ominus x(t) \right)$$

olmasını gerektirir. Buradan ise

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\rho}{2}\right) &= \ominus x(t) \oplus \left(\left(\frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \right) \boxplus x(t) \right) \\ &= \ominus x(t) \oplus \left(\left(\frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \right) \oplus \text{gyr} \left[\frac{\rho}{2t} \otimes x(t), \ominus x(t) \right] (x(t)) \right) \\ &= \left(\ominus x(t) \oplus \left(\frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \right) \right) \oplus \text{gyr} \left[\ominus x(t), \frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \right] \text{gyr} \left[\frac{\rho}{2t} \otimes x(t), \ominus x(t) \right] (x(t)) \\ &= \left(\ominus x(t) \oplus \left(\frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \right) \right) \oplus x(t) \\ &= \left(-1 + \frac{\rho}{2t} + 1 \right) \otimes x(t) \\ &= \frac{\rho}{2t} \otimes x(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$x(t) = \frac{2t}{\rho} \otimes x\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad \forall t \in [0, \frac{\rho}{2}]$$

bulunur.

$\frac{\rho}{2} < s < \rho$ olmak üzere problem 3.4.2.2 den

$$\tanh(\rho - |s - 0|) = \|x(s) \boxminus x(0)\|$$

bulunur. Ayrıca

$$\tanh\left(s - \frac{\rho}{2}\right) = \left\|x(s) \boxminus x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\|$$

dir. Burada her iki tarafın karesi alınarak

$$\frac{\tanh^2 s + \tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh s \tanh \frac{\rho}{2}}{1 + \tanh^2 s \tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh s \tanh \frac{\rho}{2}} = \frac{\|x(s)\|^2 + \left\|x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\|^2 - 2 \langle x(s), \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \rangle}{1 + \|x(s)\|^2 \left\|x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\|^2 - 2 \langle x(s), \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \rangle}$$

elde edilip, böylece

$$\begin{aligned} \left\langle x(s), \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \right\rangle &= \frac{(\tanh^2 \frac{\rho}{2} - 1)(\tanh^2 s - \|x(s)\|^2) - 2 \tanh \frac{\rho}{2} \tanh s (1 - \|x(s)\|^2)}{2(\tanh^2 s - 1)} \\ &= -\frac{\tanh s \tanh^3 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh^2 \frac{\rho}{2} + \tanh s \tanh \frac{\rho}{2}}{\tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh \frac{\rho}{2} \tanh s + 1} \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın karesi alındığında

$$\begin{aligned} \left\langle x(s), \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) \right\rangle^2 &= \left(-\frac{\tanh s \tanh^3 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh^2 \frac{\rho}{2} + \tanh s \tanh \frac{\rho}{2}}{\tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh \frac{\rho}{2} \tanh s + 1} \right)^2 \\ &= \tanh^2 \frac{\rho}{2} \left(\frac{2 \tanh^2 \frac{\rho}{2} - \tanh s - \tanh^2 s \tanh^2 \frac{\rho}{2}}{1 + \tanh^2 \frac{\rho}{2} - 2 \tanh s \tanh \frac{\rho}{2}} \right)^2 \\ &= \left\|x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\|^2 \|x(s)\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\delta(s) = \frac{2}{\rho}(\rho - s)$ kuralıyla verilen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$x(s) = \delta(s) \otimes \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] x\left(\frac{\rho}{2}\right), \quad \forall s \in]\frac{\rho}{2}, \rho[$$

olup

$$x(s) = \delta(s) \otimes \text{gyr}[x(s), x\left(\frac{\rho}{2}\right)] \left(x\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)$$

eşitliğinden

$$x(s) = \frac{2}{\rho} (\rho - s) \otimes x\left(\frac{\rho}{2}\right), \forall s \in]\frac{\rho}{2}, \rho[$$

elde edilir. Son olarak $x\left(\frac{\rho}{4}\right) = x\left(\frac{3\rho}{4}\right)$ olup bu ise

$$\left|\frac{3\rho}{4} - \frac{\rho}{4}\right| = d\left(x\left(\frac{3\rho}{4}\right), x\left(\frac{\rho}{4}\right)\right)$$

eşitliğinin sağlanmasına çelişki teşkil eder.

3.5 Einstein Gyrovektör Uzayları

\mathbb{V} bir reel iç çarpım uzayı ve

$$\mathbb{V}_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \|\mathbf{v}\| < s\}$$

olmak üzere (\mathbb{V}_s, \oplus_E) Einstein gyrogrubu üzerinde " \otimes_E " Einstein skalar çarpımı $r \in \mathbb{R}$,

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$, $\mathbf{v} \neq 0$ için

$$\begin{aligned} r \otimes_E \mathbf{v} &= s \frac{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r - (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r}{(1 + \|\mathbf{v}\|/s)^r + (1 - \|\mathbf{v}\|/s)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= s \tanh(r \tanh^{-1} \|\mathbf{v}\|/s) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{1 - (\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1})^{2r}}{1 + (\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1})^{2r}} \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}} \mathbf{v} \end{aligned}$$

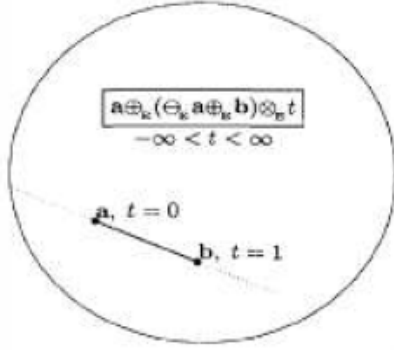
biçiminde tanımlanır ve $r \otimes_E 0 = 0$ dir.

Tanım 3.5.1 : (\mathbb{V}_s, \oplus_E) Einstein gyrogrubunun " \otimes_E " skalar çarpımıyla donatılmış $(\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E)$ üçlüsüne bir Einstein gyrovektör uzayı denir.

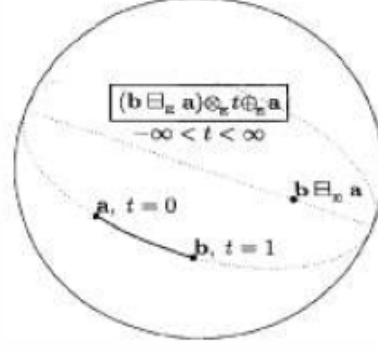
$(\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E)$ bir Einstein gyrovektör uzayı olmak üzere \mathbb{V}_s de alınan farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen bir ve yalnız bir $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodoğrusu ve $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}^c$ cogyrodoğrusu vardır ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{ab}} &= \mathbf{a} \oplus_E (\ominus \mathbf{a} \oplus_E \mathbf{b}) \otimes_E t \\ \mathcal{L}_{\mathbf{ab}}^c &= (\mathbf{b} \boxminus_E \mathbf{a}) \otimes_E t \oplus_E \mathbf{a} \end{aligned}$$

biçimindedir.



Şekil 3.5.1 : $\mathbb{V}_s = \mathbb{R}_{s=1}^2$ olmak üzere $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_E, \otimes_E)$ Einstein gyrovektör uzayında verilen farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen gyrodoğru.



Şekil 3.5.2 : $(\mathbb{R}_{s=1}^2, \oplus_M, \otimes_M)$ Einstein gyrovektör uzayında verilen farklı iki \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen cogyrodoğru.

Einstein gyrovektör uzaylarındaki gyrodoğrular Öklidyen doğru parçaları olup, hiperbolik geometrinin Beltrami-Klein yuvar modelinin geodezikleriyle örtüşür. \mathbf{a} ve \mathbf{b} noktalarından geçen $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodoğrusu dışında alınan bir \mathbf{c} noktasından geçen $\mathcal{L}_{\mathbf{ab}}$ gyrodoğrusuna paralel olan sonsuz çoklukta paralel gyrodoğru vardır. Einstein gyrovektör uzaylarındaki cogyrodoğrular ise Öklidyen eliptik yaylarından oluşur fakat çemberi kestiği noktaları birleştiren Öklidyen geodezik segmenti yuvarın merkezinden geçen kirişlerdir.

3.5.1 Einstein Gyrometriğinin Metriğe Dönüşümü

$(\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E)$ bir Möbius gyrovektör uzayı olmak üzere

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}\|$$

Möbius gyrouzaklık fonksiyonu $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_s$ için (18) den

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &\leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \oplus_E d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\
&= \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{1 + \frac{1}{s^2} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d(\mathbf{b}, \mathbf{c})} \\
&= s \frac{\tanh \phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} + \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{b}}}{1 + \tanh \phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{b}}} \\
&= s \tanh (\phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{b}})
\end{aligned} \tag{24}$$

elde edilir.

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{a}\| = s \tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{a}}$$

olmak üzere (24) den

$$\tanh \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{a}} \leq \tanh (\phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{b}})$$

yada buna denk olarak

$$\phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} = \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}\|}{s}$$

olmak üzere

$$\phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{a}} \leq \phi_{\mathbf{b} \ominus_E \mathbf{a}} + \phi_{\mathbf{c} \ominus_E \mathbf{b}}$$

elde edilir.

3.6 Gyrovektör Uzay İzomorfizmleri

$(G_1, \oplus_1, \otimes_1)$ ve $(G_2, \oplus_2, \otimes_2)$ iki gyrovektör uzayı olsun.

$$\phi : G_1 \rightarrow G_2 \quad , \quad \mathbf{u}_1 \rightarrow \phi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_1 \rightarrow \phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$$

olacak biçimde tanımlı ϕ fonksiyonu $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in G_1$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u}_1 \oplus_1 \mathbf{v}_1) &= \phi(\mathbf{u}_1) \oplus_2 \phi(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{u}_2 \oplus_2 \mathbf{v}_2 \\
\phi(r \otimes_1 \mathbf{u}_1) &= r \otimes_2 \phi(\mathbf{u}_1) &= r \otimes_2 \mathbf{u}_2 \\
\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} &= \frac{\phi(\mathbf{u}_1)}{\|\phi(\mathbf{u}_1)\|} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v}_1)}{\|\phi(\mathbf{v}_1)\|} &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \cdot \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}
\end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna gyrovektör uzay izomorfizmi denir. $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \in G_1$ için

$$\begin{aligned}
\phi(\text{gyr}_1[\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1](\mathbf{w}_1)) &= \phi(\ominus_1(\mathbf{u}_1 \oplus_1 \mathbf{v}_1) \oplus_1(\mathbf{u}_1 \oplus_1(\mathbf{v}_1 \oplus_1 \mathbf{w}_1))) \\
&= (\ominus_2(\phi(\mathbf{u}_1) \oplus_2 \phi(\mathbf{v}_1)) \oplus_2(\phi(\mathbf{u}_1) \oplus_2(\phi(\mathbf{v}_1) \oplus_2 \phi(\mathbf{w}_1)))) \\
&= \ominus_2(\mathbf{u}_2 \oplus_2 \mathbf{v}_2) \oplus_2(\mathbf{u}_2 \oplus_2(\mathbf{v}_2 \oplus_2 \mathbf{w}_2)) \\
&= \text{gyr}_2[\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2](\mathbf{w}_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u}_1 \boxplus_1 \mathbf{v}_1) &= \phi(\mathbf{u}_1 \oplus_1 \text{gyr}_1[\mathbf{u}_1, \ominus_1 \mathbf{u}_1](\mathbf{v}_1)) \\
&= \phi(\mathbf{u}_1) \oplus_2 \phi(\text{gyr}_1[\mathbf{u}_1, \ominus_1 \mathbf{u}_1](\mathbf{v}_1)) \\
&= \mathbf{u}_2 \oplus_2 \text{gyr}_2[\mathbf{u}_2, \ominus_2 \mathbf{u}_2](\mathbf{v}_2) \\
&= \mathbf{u}_2 \boxplus_2 \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 3.6.1 : $(\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M)$ Möbius gyrovektör uzayı ile $(\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E)$ Einstein gyrovektör uzayı arasında tanımlanan

$$\begin{aligned}
\phi : (\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M) &\rightarrow (\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E) \quad , \quad \mathbf{v} \mapsto 2 \otimes_M \mathbf{v} \\
\varphi : (\mathbb{V}_s, \oplus_E, \otimes_E) &\rightarrow (\mathbb{V}_s, \oplus_M, \otimes_M) \quad , \quad \mathbf{v} \mapsto \frac{1}{2} \otimes_E \mathbf{v}
\end{aligned}$$

fonksiyonları birer gyrovektör uzay izomorfizmidirler (Ungar¹, 2001).

İspat : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_s$ için

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \otimes ((2 \otimes \mathbf{u}) \oplus_E (2 \otimes \mathbf{v})) \\
\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} &= 2 \otimes ((\frac{1}{2} \otimes \mathbf{u}) \oplus_M (\frac{1}{2} \otimes \mathbf{v}))
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v}) &= 2 \otimes_M (\mathbf{u} \oplus_M \mathbf{v}) \\
&= 2 \otimes_M (\frac{1}{2} \otimes_M ((2 \otimes_M \mathbf{u}) \oplus_E (2 \otimes_M \mathbf{v}))) \\
&= ((2 \otimes_M \mathbf{u}) \oplus_E (2 \otimes_M \mathbf{v})) \\
&= \phi(\mathbf{u}) \oplus_E \phi(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\phi(r \otimes_M \mathbf{u}) &= 2 \otimes_M (r \otimes_M \mathbf{u}) \\ &= (2r) \otimes_M \mathbf{u} \\ &= r \otimes_M (2 \otimes_M \mathbf{u}) \\ &= r \otimes_M \phi(\mathbf{u}) \\ &= r \otimes_E \phi(\mathbf{u})\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{\phi(\mathbf{u})}{\|\phi(\mathbf{u})\|} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v})}{\|\phi(\mathbf{v})\|} &= \frac{2 \otimes_M \mathbf{u}}{\|2 \otimes_M \mathbf{u}\|} \cdot \frac{2 \otimes_M \mathbf{v}}{\|2 \otimes_M \mathbf{v}\|} \\ &= \frac{2 \otimes_M \mathbf{u}}{2 \otimes_M \|\mathbf{u}\|} \cdot \frac{2 \otimes_M \mathbf{v}}{2 \otimes_M \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\end{aligned}$$

olduğundan ϕ fonksiyonu bir gyrovektör uzay izomorfizmidir. φ fonksiyonunun da bir gyrovektör uzay izomorfizmi olduğu da benzer biçimde gösterilir.

4 GYROTRİGONOMETRİ

4.1 Gyroaçılar

(G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı ve $\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ ise G de bir gyrovektör olsun.

$$\frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|}$$

gyrovektörüne birim gyrovektör denir.

Tanım 4.1.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin $\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ ve $\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}$ gyrovektörleri arasındaki gyroaçı α olsun. Bu durumda α gyroaçısının gyrokosintüsü

$$\cos \alpha = \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\|}$$

dir (Ungar, 2005).

Teorem 4.1.1 : Gyrovektör uzay hareketleri altında gyroaçılar invaryant kalır (Ungar, 2005).

İspat : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in G$ noktaları için $\alpha = \angle \mathbf{bac}$ olsun. $\forall \tau \in Oto(G)$ için

$$\begin{aligned} \angle_{\tau}(\mathbf{b}) \tau(\mathbf{a}) \tau(\mathbf{c}) &= \frac{\ominus \tau(\mathbf{a}) \oplus \tau(\mathbf{b})}{\|\ominus \tau(\mathbf{a}) \oplus \tau(\mathbf{b})\|} \cdot \frac{\ominus \tau(\mathbf{a}) \oplus \tau(\mathbf{c})}{\|\ominus \tau(\mathbf{a}) \oplus \tau(\mathbf{c})\|} \\ &= \frac{\tau(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})}{\|\tau(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})\|} \cdot \frac{\tau(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c})}{\|\tau(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c})\|} \\ &= \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\|} \\ &= \angle \mathbf{bac} \end{aligned}$$

olduğundan ve $\forall \mathbf{x} \in G$ için

$$\begin{aligned}
\angle(\mathbf{x} \oplus \mathbf{b})(\mathbf{x} \oplus \mathbf{a})(\mathbf{x} \oplus \mathbf{c}) &= \frac{\ominus(\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{b})}{\|\ominus(\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{b})\|} \cdot \frac{\ominus(\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{c})}{\|\ominus(\mathbf{x} \oplus \mathbf{a}) \oplus (\mathbf{x} \oplus \mathbf{c})\|} \\
&= \frac{gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})}{\|gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})\|} \cdot \frac{gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c})}{\|gyr[\mathbf{x}, \mathbf{a}](\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c})\|} \\
&= \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\|} \\
&= \angle \mathbf{bac}
\end{aligned}$$

olduğundan gyroaçılar gyrovektör uzay hareketleri altında invaryant kalırlar.

Tanım 4.1.2 : İki gyrovektör arasındaki gyroaçının gyrokosinüsü 1 e eşitse gyrovektörler paralel, 0 a eşitse gyrovektörler diktir denir.

Teorem 4.1.2 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin $\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$, $\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1$ ve $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2$ üç gyrovektörü verilsin. $\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1$ ve $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2$ gyrovektörlerinin paralel olması için gerek ve yeter koşul

$$\angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1) = \angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2)$$

olmasıdır (Ungar, 2005).

İspat : $\angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1) = \angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} = \frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2}{\|\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2\|}$$

olup, buradan

$$\frac{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}{\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|} \cdot \left(\frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} - \frac{\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2}{\|\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2\|} \right) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikten ise $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2 = \lambda(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1)$ olacak biçimde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır.

Buradan

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2}{\|\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2\|} \\
&= \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} \cdot \frac{\lambda(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1)}{\|\lambda(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1)\|} \\
&= \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup, böylece $\alpha = 0$ bulunur. Bu ise $\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1$ ve $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2$ gyrovektörlerinin paralel olması anlamına gelir.

Tersine, $\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1$ ve $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2$ gyrovektörleri paralel ise

$$\cos \alpha = \frac{\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1}{\|\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1\|} \cdot \frac{\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2}{\|\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2\|}$$

olup, buradan $\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2 = \lambda(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1)$ olacak biçimde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece yukarıdaki işlemler ters yönde takip edildiğinde $\angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1) = \angle(\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b})(\ominus \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2)$ elde edilir.

4.2 Möbius Gyrovektör Uzaylarında Gyrotrigonometri

4.2.1 Gyroüçgenler

Tanım 4.2.1.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, G nin aynı gyrodoğru üzerinde bulunmayan farklı üç A, B, C noktası için, bu noktaları birleştiren üç gyrodoğru parçasının birleşimine bir gyroüçgen denir. A, B, C noktalarına gyroüçgenin köşe noktaları denir. $\ominus A \oplus B, \ominus B \oplus C, \ominus C \oplus A$ gyrovektörlerine ise gyroüçgenin kenarları denir.

Teorem 4.2.1.1 : $ABC, (\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki

gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyrotüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere

$$\frac{c^2}{s} = \frac{a^2}{s} \oplus \frac{b^2}{s} \ominus \frac{1}{s} \frac{2\beta_a^2 a \beta_b^2 b \cos \gamma}{1 - \frac{2}{s^2} \beta_a^2 a \beta_b^2 b \cos \gamma}$$

yada buna denk olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_s^2 &= \left(\frac{c}{s}\right)^2 = \frac{a_s^2 + b_s^2 - 2a_s b_s \cos \gamma}{1 + a_s b_s - 2a_s b_s \cos \gamma} \\ \cos \gamma &= \frac{a_s^2 + b_s^2 - c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2a_s b_s (1 - c_s^2)} \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\beta_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{s^2}}}$$

olup β_a sayısına beta faktörü denir (Ungar¹, 2001, Ungar², 2001).

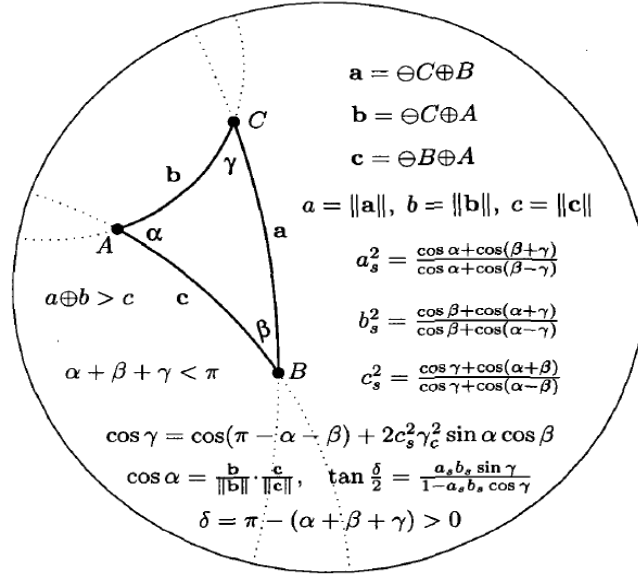
İspat :

$$\begin{aligned} \ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} &= \ominus (\ominus C \oplus B) \oplus (\ominus C \oplus A) \\ &= \text{gyr} [\ominus C, B] (\ominus B \oplus A) \\ &= \text{gyr} [\ominus C, B] (\mathbf{c}) \end{aligned}$$

olduğundan $\|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\|$ olup, böylece $\gamma_{\mathbf{c}} = \gamma_{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}$ elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{c}}^2 &= \gamma_{\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}}^2 \\ &= \gamma_{\mathbf{a}}^2 \gamma_{\mathbf{b}}^2 \left(1 - \frac{2}{s^2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{s^4} \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2\right) \\ &= \gamma_{\mathbf{a}}^2 \gamma_{\mathbf{b}}^2 \left(1 - \frac{2}{s^2} ab \cos \gamma + \frac{1}{s^4} a^2 b^2\right) \end{aligned}$$

olup bu son özdeşlik elde edilmesi gereken özdeşliklere denktir.



Şekil 4.2.1.1 : $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında bir ABC gyrotüçgeni.

Teorem 4.2.1.2 (Hiperbolik Pisagor teoremi) : ABC , $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyrotüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere $\gamma = \pi/2$ ise

$$\frac{c^2}{s} = \frac{a^2}{s} \oplus \frac{b^2}{s}$$

dir (Ungar¹, 2001, Ungar 2005, Ungar², 2001).

İspat : Teorem 4.1.2.1 de $\gamma = \pi/2$ alınır ise ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.3 : ABC , \mathbb{D} kompleks birim diskinde kenarları $a = \ominus B \oplus C$, $b = \ominus C \oplus A$ ve $c = \ominus A \oplus B$ olan bir gyrotüçgen olsun. Eğer a ve b kenarları ortogonal ise

$$|a|^2 \oplus |b|^2 = |c|^2$$

dir (Ungar, 1999).

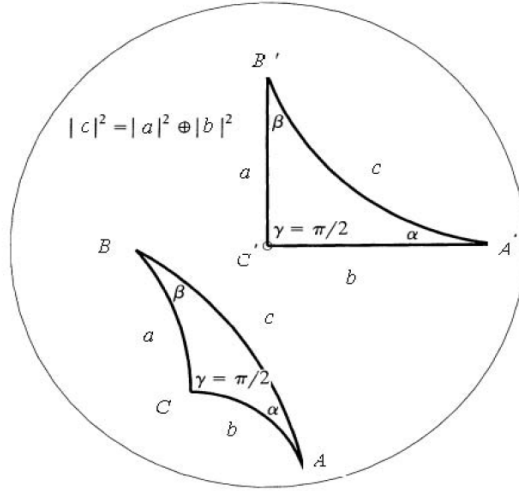
İspat : a ve b kenarları ortogonal olsun. Bu durumda $\ominus B \oplus C$ ve $\ominus C \oplus A$ gyrokenarları arasındaki gyroaçı $\pi/2$ olup ABC gyrotüçgeni diktir. A noktasını reel eksen üzerine, B noktasını ise sanal eksen üzerine gönderecek biçimde uygun bir f Möbius dönüşümü seçilsin. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ ve $f(C) = C'$ olsun. Möbius dönüşümleri altında gyroaçılar ve gyrouzunluklar korunacağından $A'B'C'$ gyrotüçgeni de diktir. Bu durumda elde edilen yeni gyrotüçgen için $x, y \in (-1, 1)$ olmak üzere $A' = x$, $B' = iy$ ve $C' = 0$ dır. Bu durumda

$$|a|^2 = |B' \ominus C'|^2 = y^2$$

$$|b|^2 = |A' \ominus C'|^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} |c|^2 &= |A' \ominus B'|^2 = |x \ominus iy|^2 \\ &= x^2 \oplus y^2 \end{aligned}$$

olup, böylece $|a|^2 \oplus |b|^2 = |c|^2$ elde edilir.



Şekil 4.2.1.2 : ABC gyrotüçgeninin f Möbius dönüşümü altındaki görüntüsü

Teorem 4.2.1.4 (Hiperbolik Carnot teoremi) : ABC , \mathbb{D} kompleks birim diskinde kenarları $a = \ominus B \oplus C$, $b = \ominus C \oplus A$ ve $c = \ominus A \oplus B$ olan bir gyrotüçgen olsun. A', B', C' sırasıyla a, b, c kenarları üzerinde köşe noktalarından farklı birer nokta olmak üzere bu

noktalardan çizilen hiperbolik dikmeler bir noktada kesişiyorsa

$$|\ominus A \oplus C'|^2 \oplus |\ominus B \oplus C'|^2 \oplus |\ominus B \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus B'|^2 \oplus |\ominus A \oplus B'|^2 = 0$$

dir (Demirel&Soytürk, 2008).

İspat : A', B', C' noktalarından çizilen hiperbolik dikmeler bir P noktasında kesişsin. Bu durumda $\ominus A \oplus P, \ominus B \oplus P, \ominus C \oplus P, \ominus A' \oplus P, \ominus B' \oplus P, \ominus C' \oplus P$ hiperbolik geodezik parçaları ABC gyrotüçgenini altı dik gyrotüçgene ayırır. Bu dik gyrotüçgenlere hiperbolik Pisagor teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\ominus P \oplus A|^2 &= |\ominus A \oplus C'|^2 \oplus |\ominus C' \oplus P|^2 \\ |\ominus B \oplus P|^2 &= |\ominus P \oplus C'|^2 \oplus |\ominus C' \oplus B|^2 \\ |\ominus P \oplus B|^2 &= |\ominus B \oplus A'|^2 \oplus |\ominus A' \oplus P|^2 \\ |\ominus C \oplus P|^2 &= |\ominus P \oplus A'|^2 \oplus |\ominus A' \oplus C|^2 \\ |\ominus P \oplus C|^2 &= |\ominus C \oplus B'|^2 \oplus |\ominus B' \oplus P|^2 \\ |\ominus A \oplus P|^2 &= |\ominus P \oplus B'|^2 \oplus |\ominus B' \oplus A|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\ominus P \oplus A|^2 &= |\ominus A \oplus P|^2 \\ |\ominus B \oplus P|^2 &= |\ominus P \oplus B|^2 \\ |\ominus C \oplus P|^2 &= |\ominus P \oplus C|^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha &= |\ominus A \oplus C'|^2 \oplus |\ominus C' \oplus P|^2 = |\ominus P \oplus B'|^2 \oplus |\ominus B' \oplus A|^2 = \alpha' \\ \beta &= |\ominus B \oplus A'|^2 \oplus |\ominus A' \oplus P|^2 = |\ominus P \oplus C'|^2 \oplus |\ominus C' \oplus B|^2 = \beta' \\ \gamma &= |\ominus C \oplus B'|^2 \oplus |\ominus B' \oplus P|^2 = |\ominus P \oplus A'|^2 \oplus |\ominus A' \oplus C|^2 = \gamma' \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha' \oplus \beta') \oplus \gamma'$$

olup, $((-1, 1), \oplus)$ bir değişmeli grup olduğundan

$$|\ominus A \oplus C'|^2 \oplus |\ominus B \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus B'|^2 = |\ominus B' \oplus A|^2 \oplus |\ominus C' \oplus B|^2 \oplus |\ominus A' \oplus C|^2$$

elde edilir. Buradan

$$|\ominus A \oplus C'|^2 \ominus |\ominus B \oplus C'|^2 \oplus |\ominus B \oplus A'|^2 \ominus |\ominus C \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus B'|^2 \ominus |\ominus A \oplus B'|^2 = 0$$

bulunur.

Teorem 4.2.1.5 : ABC , \mathbb{D} kompleks birim diskinde kenarları $a = \ominus B \oplus C$, $b = \ominus C \oplus A$ ve $c = \ominus A \oplus B$ olan bir gyrotüçgen olsun. A', B', C' sırasıyla a, b, c kenarları üzerinde köşe noktalarından farklı birer nokta olmak üzere

$$|\ominus A \oplus C'|^2 \ominus |\ominus B \oplus C'|^2 \oplus |\ominus B \oplus A'|^2 \ominus |\ominus C \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus B'|^2 \ominus |\ominus A \oplus B'|^2 = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa ve A', B', C' noktalarından herhangi ikisinden çizilen hiperbolik dikmeler noktadaş ise bu durumda A', B', C' noktalarının üçünden de çizilen dikmeler noktadaştır (Demirel&Soytürk, 2008).

İspat : a ve b kenarlarından çizilen iki hiperbolik dikme bir P noktasında kesişsin. O halde $\ominus A' \oplus P$ ve $\ominus B' \oplus P$ gyrodoğru parçaları P noktasında kesişir. P noktasından c kenarına $\ominus K \oplus P$ gyrodoğru parçası çizilirse

$$|\ominus A \oplus K|^2 \ominus |\ominus B \oplus K|^2 \oplus |\ominus B \oplus A'|^2 \ominus |\ominus C \oplus A'|^2 \oplus |\ominus C \oplus B'|^2 \ominus |\ominus A \oplus B'|^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda, hipotezden

$$|\ominus A \oplus K|^2 \ominus |\ominus B \oplus K|^2 = |\ominus A \oplus C'|^2 \ominus |\ominus B \oplus C'|^2$$

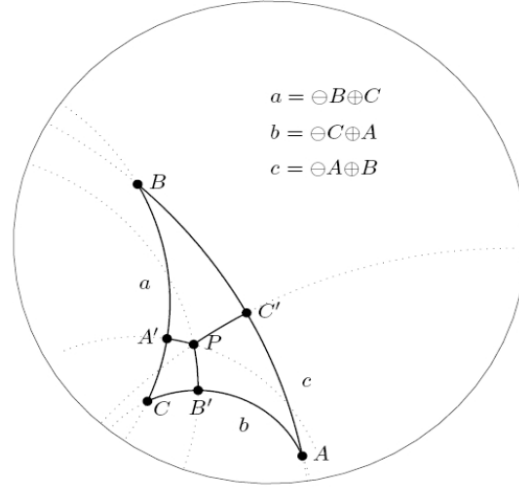
bulunur. Bu eşitlik ancak $K = C'$ durumunda sağlanır. $x := d(B, K)$ ve $h := |\ominus A \oplus B|$ ise, buradan $d(A, K) = h \ominus x$ elde edilir. $x, y \in (-1, 1)$ için

$$f(x) = (h \ominus x)^2 \ominus x^2$$

fonksiyonu tanımlanırsa

$$f(x) - f(y) = \frac{-2h(1 - h^2)(1 - xy)}{(1 - 2hx + x^2)(1 - 2hy + y^2)}(x - y)$$

olup, böylece f fonksiyonu birebirdir. f birebir olduğundan $K = C'$ dir.



Sekil 4.2.1.3 : \mathbb{D} de hiperbolik Carnot teoremi.

Şekil 4.2.1.3 den görüleceği üzere A', B', C' noktalarının üçünden çizilen hiperbolik dikmeler doğruduş olmayabilir. Eğer B' noktası A köşe noktasına ve A' noktası da B köşe noktasına yeterince yaklaştırılırsa, elde edilen hiperbolik dikmeler kesişmeyeceğinden P noktası bulunamaz. Böylece Öklid geometrisinin aksine hiperbolik geometride Carnot teoreminin tersi sağlanmaz.

Teorem 4.2.1.6 : ABC , $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyrotüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere

$$\frac{\gamma_{\mathbf{a}}^2 \mathbf{a}}{\sin \alpha} = \frac{\gamma_{\mathbf{b}}^2 \mathbf{b}}{\sin \beta} = \frac{\gamma_{\mathbf{c}}^2 \mathbf{c}}{\sin \gamma}$$

dir (Ungar, 2005, Ungar², 2001).

İspat : C köşesinden $\ominus A \oplus B$ kenarına şekil 4.2.1.4 deki biçimde bir gyrodikme çizilsin ve $\ominus A \oplus B$ kenarını C_0 noktasında kessin. Bu durumda $\mathbf{h} = \ominus C_0 \oplus C$ ve $\|\mathbf{h}\| = h$

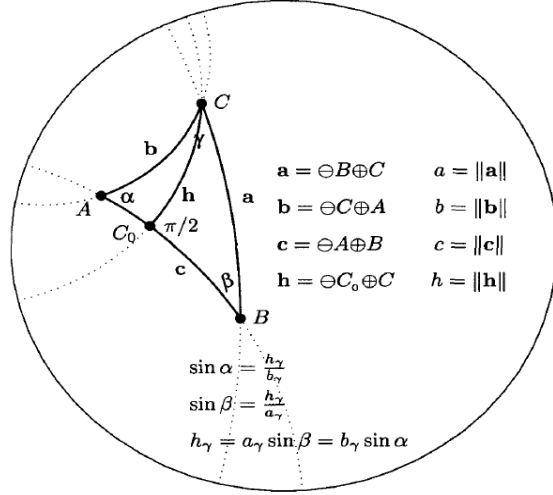
olmak üzere

$$\sin \alpha = \frac{\gamma_{\mathbf{h}}^2 \mathbf{h}}{\gamma_{\mathbf{b}}^2 \mathbf{b}}$$

$$\sin \beta = \frac{\gamma_{\mathbf{h}}^2 \mathbf{h}}{\gamma_{\mathbf{a}}^2 \mathbf{a}}$$

$$\gamma_{\mathbf{h}}^2 \mathbf{h} = \gamma_{\mathbf{a}}^2 \mathbf{a} \sin \beta = \gamma_{\mathbf{b}}^2 \mathbf{b} \sin \alpha$$

bulunur.



Şekil 4.2.1.4 : $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında gyrosinüs kuralı.

Tanım 4.2.1.2 : ABC , $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyroüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

sayısına gyroüçgenin kusuru denir.

Teorem 4.2.1.7 : ABC , $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyroüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{a}{s} \frac{b}{s} \sin \gamma}{1 - \frac{a}{s} \frac{b}{s} \cos \gamma} = \frac{\frac{a}{s} \frac{c}{s} \sin \beta}{1 - \frac{a}{s} \frac{c}{s} \cos \beta} = \frac{\frac{b}{s} \frac{c}{s} \sin \alpha}{1 - \frac{b}{s} \frac{c}{s} \cos \alpha}$$

dir (Ungar, 2005).

Tanım 4.2.1.3 : $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında bir ABC gyroüçgeni verilsin. A, B, C noktalarındaki gyroaçılar ise sırasıyla α, β, γ olsun. ABC gyroüçgeninin $|ABC|$ gyroalanı

$$|ABC| = -\frac{2}{K} \tan \frac{\delta}{2}$$

dir. Burada $K = -4/s^2$ olup, K sayısına Möbius gyrovektör uzayın Gauss eğriliği denir.

Teorem 4.2.1.8 : $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında bir ABC gyroüçgeni verilsin. A, B, C noktalarındaki gyroaçılar ise sırasıyla α, β, γ olsun. Bu durumda

$$a_s^2 = \frac{\cos \alpha + \cos(\beta + \gamma)}{\cos \alpha + \cos(\beta - \gamma)}$$

$$b_s^2 = \frac{\cos \beta + \cos(\alpha + \gamma)}{\cos \beta + \cos(\alpha - \gamma)}$$

$$c_s^2 = \frac{\cos \gamma + \cos(\alpha + \beta)}{\cos \gamma + \cos(\alpha - \beta)}$$

dir (Ungar, 2005).

İspat : Teorem 4.2.1.7 den

$$\frac{a_s b_s \sin \gamma}{1 - a_s b_s \cos \gamma} = \tan \frac{\delta}{2}$$

$$\frac{a_s c_s \sin \beta}{1 - a_s c_s \cos \beta} = \tan \frac{\delta}{2}$$

$$\frac{b_s c_s \sin \alpha}{1 - b_s c_s \cos \alpha} = \tan \frac{\delta}{2}$$

olup, buradan

$$a_s^2 = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \frac{\delta}{2}}{\left(\sin \beta + \cos \beta \tan \frac{\delta}{2} \right) \left(\sin \gamma + \cos \gamma \tan \frac{\delta}{2} \right)} \tan \frac{\delta}{2}$$

$$b_s^2 = \frac{\sin \beta + \cos \beta \tan \frac{\delta}{2}}{\left(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \frac{\delta}{2} \right) \left(\sin \gamma + \cos \gamma \tan \frac{\delta}{2} \right)} \tan \frac{\delta}{2}$$

$$c_s^2 = \frac{\sin \gamma + \cos \gamma \tan \frac{\delta}{2}}{\left(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \frac{\delta}{2} \right) \left(\sin \beta + \cos \beta \tan \frac{\delta}{2} \right)} \tan \frac{\delta}{2}$$

elde edilir. Bu eşitliklerde

$$\tan \frac{\delta}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) = \cot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

yazılırsa istenen özdeşlikler elde edilir.

Teorem 4.2.1.9 : $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında bir ABC gyrotüçgeni verilsin.

A, B, C noktalarındaki gyroaçılar ise sırasıyla α, β, γ olsun. Bu durumda

$$\cos \alpha = \frac{-a_s^2 + b_s^2 + c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2b_s c_s} \gamma_a^2$$

$$\cos \beta = \frac{a_s^2 - b_s^2 + c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2a_s c_s} \gamma_b^2$$

$$\cos \gamma = \frac{a_s^2 + b_s^2 - c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2a_s b_s} \gamma_c^2$$

dir (Ungar, 2005).

Örnek 4.2.1.1 : ABC , $(\mathbb{V}_{s=1}, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{V}_{s=1}$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla $\alpha, \alpha/2, \alpha/2$ olan bir gyrotüçgen olsun. Bu durumda $a = \|\mathbf{a}\|$, $b =$

$\|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ olmak üzere

$$a^2 = \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$b^2 = c^2 = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha$$

dir.

Örnek 4.2.1.2 : ABC , $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A, B, C \in \mathbb{R}_s^n$ ve kenarları ise $\mathbf{a} = \ominus B \oplus C$, $\mathbf{b} = \ominus C \oplus A$, $\mathbf{c} = \ominus A \oplus B$ olan, A, B, C köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla α, β, γ olan bir gyroüçgen olsun. Bu durumda $a_s = \|\mathbf{a}\|/s$, $b_s = \|\mathbf{b}\|/s$, $c_s = \|\mathbf{c}\|/s$ olmak üzere

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{c_s} \frac{\gamma_a^2 a_s + \gamma_b^2 b_s}{\gamma_a^2 \gamma_b^2 (1 - a_s^2 b_s^2)}$$

dir.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ özdeşliğiyle birlikte

$$\frac{b_s c_s}{\gamma_a^2} \sin \alpha = \frac{a_s c_s}{\gamma_b^2} \sin \beta = \frac{a_s b_s}{\gamma_c^2} \sin \gamma$$

ve teorem 4.2.1.9 daki özdeşliklerin kullanılmasıyla

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{c_s} \frac{\gamma_a^2 a_s + \gamma_b^2 b_s}{\gamma_a^2 \gamma_b^2 (1 - a_s^2 b_s^2)}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1.1 (Hiperbolik Breusch lemması) : $k = 1, 2$ olmak üzere ABC_k , $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında $\ominus A \oplus B$ ortak kenarına sahip bir gyroüçgen olsun. Bu durumda

$$\frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s} + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^2 b_{1_s}^2)} = \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s} + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^2 b_{2_s}^2)} \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}$$

dir.

İspat : Herhangi bir trigonometrik özdeşlik hiperbolik geometride de geçerli olduğundan

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = -1 + \frac{2}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}}$$

özdeşliği $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ için hiperbolik geometride de geçerlidir (Hajja, 2006, Ungar, 2008). Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s} + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^2 b_{1_s}^2)} &= \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s} + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^2 b_{2_s}^2)} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha_1 + \sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} = \frac{\sin \alpha_2 + \sin \beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\beta_2}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.10 (Hiperbolik Urquhart teoremi) : AD_1BD_2 , $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında $\ominus A \oplus B$ ortak kenarına sahip bir konkav gyrodörtgen olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s} + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^2 b_{1_s}^2)} &= \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s} + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^2 b_{2_s}^2)} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s}^i + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}^i}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^i b_{1_s}^i)} &= \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s}^i + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}^i}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^i b_{2_s}^i)} \end{aligned}$$

dir.

İspat : $k = 1, 2$, Breusch lemmasının ABC_k ve ABD_k üçgenlerine uygulanmasıyla sırasıyla

$$\frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s} + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^2 b_{1_s}^2)} = \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s} + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^2 b_{2_s}^2)} \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{a_1}^2 a_{1_s}^i + \gamma_{b_1}^2 b_{1_s}^i}{\gamma_{a_1}^2 \gamma_{b_1}^2 (1 - a_{1_s}^i b_{1_s}^i)} &= \frac{\gamma_{a_2}^2 a_{2_s}^i + \gamma_{b_2}^2 b_{2_s}^i}{\gamma_{a_2}^2 \gamma_{b_2}^2 (1 - a_{2_s}^i b_{2_s}^i)} \\ &\Leftrightarrow \\ \tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta_2}{2} \right) &= \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta_1}{2} \right) \end{aligned}$$

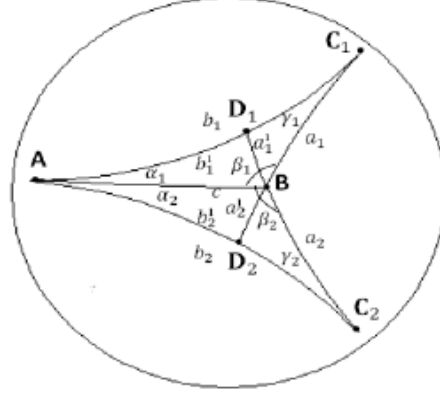
elde edilir.

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta_2}{2} \right) = \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta_1}{2} \right)$$

eşitliği

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_1}{2} = \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}$$

eşitliğine denk olduğundan dolayı ispat tamamlanır.



Şekil 4.2.1.5 : $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ de hiperbolik Urquhart teoremi.

Teorem 4.2.1.11 (Hiperbolik Steiner-Lehmus teoremi) : ABC , $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında bir gyroüçgen olsun. B ve C noktalarındaki iç-açıortaylar eşit gyrouzunluğa sahipse ABC ikizkenar gyroüçgendir.

İspat : ABC üçgeninde B noktasından çizilen açıortay $\ominus C \oplus A$ kenarını E noktasında, C noktasından çizilen açıortay $\ominus B \oplus A$ kenarını D noktasında kessin. $\ominus B \oplus E$ ve $\ominus C \oplus D$ iç açıortayları için $\|\ominus B \oplus E\| = \|\ominus C \oplus D\|$ olsun. $\angle ABC := 4\alpha$ ve $\angle ACB := 4\beta$ olsun. $\|\ominus B \oplus D\| = \|\ominus E \oplus C\|$ eşitliği $\|\ominus A \oplus B\| = \|\ominus A \oplus C\|$ eşitliğini gerektirdiğinden $\|\ominus B \oplus D\| = \|\ominus E \oplus C\|$ eşitliğini ispatlamak yeterlidir. $\|\ominus B \oplus D\| \geq \|\ominus E \oplus C\|$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $\|\ominus B \oplus D\| > \|\ominus E \oplus C\|$ durumunun sağlanmadığı gösterilmelidir.

$$\|\ominus B \oplus D\| > \|\ominus E \oplus C\| \Rightarrow \|\ominus B \oplus D\|^2 > \|\ominus E \oplus C\|^2$$

olduğundan $\angle DBC$ ve $\angle ECB$ gyroüçgenlerine hiperbolik kosinüs teoremi uygulanırsa

$$\cos 2\alpha > \cos 2\beta$$

elde edilir. $2\alpha, 2\beta \in I := (0, \pi/2)$ olduğundan ve kosinüs fonksiyonu I üzerinde kesin azalan olduğundan

$$\beta > \alpha$$

elde edilir. Tanjant fonksiyonu ise I üzerinde kesin artan olduğundan

$$\tan \beta > \tan \alpha$$

olup bu eşitsizlik ise

$$\frac{2}{1 - \tan \alpha \tan 2\beta} > \frac{2}{1 - \tan 2\alpha \tan \beta}$$

olmasını gerektirir. $\angle EBC$ ve $\angle DBC$ üçgenlerine hiperbolik Breusch lemması uygulanırsa

$$\frac{\gamma_{\ominus E \oplus C}^2 \|\ominus E \oplus C\|_s + \gamma_{\ominus B \oplus E}^2 \|\ominus B \oplus E\|_s}{\gamma_{\ominus E \oplus C}^2 \gamma_{\ominus B \oplus E}^2 (1 - \|\ominus E \oplus C\|_s^2 \|\ominus B \oplus E\|_s^2)} > \frac{\gamma_{\ominus B \oplus D}^2 \|\ominus B \oplus D\|_s + \gamma_{\ominus D \oplus C}^2 \|\ominus D \oplus C\|_s}{\gamma_{\ominus B \oplus D}^2 \gamma_{\ominus D \oplus C}^2 (1 - \|\ominus B \oplus D\|_s^2 \|\ominus D \oplus C\|_s^2)}$$

elde edilir. $k \in [0, s) \subset \mathbb{R}$, (k, s sabit) olmak üzere

$$f(x) = \frac{\frac{xs^2}{s^2 - x^2} + \frac{ks^2}{s^2 - k^2}}{\frac{s^2}{s^2 - x^2} \frac{s^2}{s^2 - k^2} \left(1 - \frac{x^2 k^2}{s^2 s^2}\right)}$$

biçiminde bir $f : [0, s) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın.

$$f'(x) = \frac{s^2 (s^2 - k^2)}{(s^2 + kx)^2} > 0$$

olduğundan f fonksiyonu kesin artan ve dolayısıyla

$$\|\ominus E \oplus C\| > \|\ominus B \oplus D\|$$

olup bu ise $\|\ominus B \oplus D\| > \|\ominus E \oplus C\|$ olmasıyla çelişir. Böylece $\|\ominus B \oplus D\| = \|\ominus E \oplus C\|$ olup, son olarak DBC ve EBC gyrotüçgenlerine hiperbolik kosinüs teoreminin uygulanmasıyla $2\alpha = 2\beta$ elde edilir.

5 HİPERBOLİK İZOMETRİ

Tanım 5.1 : (X, d) ve (Y, p) iki metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = p(f(x), f(y))$$

olacak biçimdeki $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna bir izometri denir. Özel olarak Öklidyen düzlemden kendisi üzerine tanımlı olan izometriye Öklidyen düzlem izometrisi denir.

Düzlem izometrilere altında açılar, paralellik ve ortogonalite korunur. Öklidyen düzlem izometrilere bileşke işlemi altında değişmeli olmayan bir grup oluştururlar. Öteleme, dönme ve yansıma olmak üzere üç temel tip Öklidyen düzlem izometrisi vardır. Öteleme izometrisi altında sabit kalan nokta yoktur. Öteleme vektörü sıfır olduğunda ise birim dönüşüm elde edilir. Dönme izometrisi altında ise tek nokta (dönme merkezi) sabit kalırken, dönme açısı $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olduğunda birim dönüşüm elde edilir. Yansıma izometrisi altında ise bir doğru üzerindeki tüm noktalar sabit kalır.

Cartan–Dieudonné teoremine göre bir düzlem izometrisi en çok üç yansıma izometrisinin bileşkesiyle elde edilebilir. Örneğin bir öteleme izometrisi paralel iki doğruya göre uygulanan iki yansıma izometrisinin bileşkesiyle elde edilirken, düzlemde bir P noktaya göre θ açılıklı bir dönme izometrisi de P noktasında kesişen, aralarındaki açı $\theta/2$ olan iki yansıma izometrisinin bileşkesiyle elde edilebilir. Öteleme ve dönme izometrilere altında yönlendirme korunurken, yansıma izometrisi altında yönlendirme değişir.

Hiperbolik izometri, hiperbolik uzaylar arasında tanımlı hiperbolik uzaklıkların bulunduğu dönüşümlerdir. Hiperbolik izometri altında r –boyutlu hiperdüzlemler r –boyutlu hiperdüzlemlere dönüşürler. Hiperbolik düzlemde; hiperbolik yansıma (Öklidyen olmayan yansıma), hiperbolik dönme (Öklidyen olmayan dönme), hiperbolik öteleme (Öklidyen olmayan öteleme) ve parabolik izometri olmak üzere dört temel tipte izometri vardır. Öklidyen düzlem izometrisine benzer biçimde, hiperbolik geometrinin Poincaré disk modeli üzerinde tanımlı bir hiperbolik izometri en çok üç hiperbolik yansıma izometrisinin bileşkesi yardımıyla elde edilebilir. Fakat bu hiperbolik izometri yukarıda

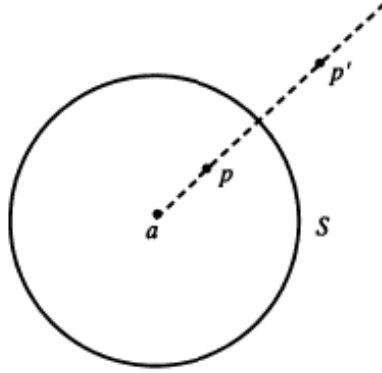
verilen dört temel tip hiperbolik izometriden birisi ise bu durumda bu hiperbolik izometri en çok iki hiperbolik yansıma izometrisi tarafından elde edilir.

5.1 Çember İncersiyonu

Tanım 5.1.1 : $\mathbb{R}_\infty^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ve S ise düzlemde a -merkezli r -yarıçaplı bir çemberi göstcrsin. $p \in S$ olmak üzere p noktasını

$$\|p - a\| \|p' - a\| = r^2$$

olacak biçimdeki bir p' noktasına ve a noktasını ise ∞ ideal noktasına eşleyen birebir örten $i_S : \mathbb{R}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{R}_\infty^2$ dönüştürümüne bir çember incersiyonu denir. (p, p') ikilisine incersive çift, S çemberine incersiyon çemberi ve a noktasına ise incersiyon merkezi denir.

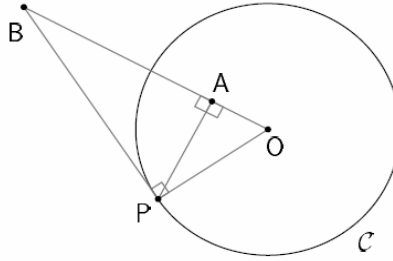


Şekil 5.1.1 : S de incersiyon.

Çember incersiyonu altında çemberin içindeki noktalar çemberin dışındaki noktalara, çemberin dışındaki noktalar ise çemberin içindeki noktalara dönüştürken çember üzerindeki noktalar sabit kalırlar.

O merkezli r -yarıçaplı bir \mathcal{C} çemberinin içinde seçilen bir A noktasının, \mathcal{C} çemberine göre incersiyon altındaki görüntüsünü geometrik olarak bulmak için öncelikle OA doğrusu ve OA doğrusuna A noktasında dik bir l doğrusu çizilir. Bu l doğrusunun

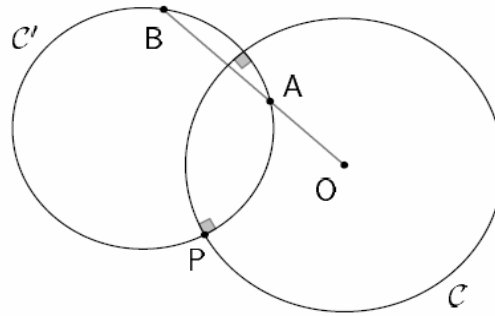
çemberi kestiği nokta P ise, P noktasından geçen çembere P de teğet olan doğrunun OA doğrusunu kestiği nokta A noktasının inversiyon altındaki görüntüsüdür. Çemberin dışındaki bir B noktasının \mathcal{C} çemberine göre inversiyon altındaki görüntüsü yukarıdaki adımların ters yönde izlenmesiyle elde edilir.



Şekil 5.1.2 : İncersiyon altında görüntü bulma.

Çember inversiyonları konform dönüşümler olup, çember inversiyonları altında çemberler çemberlere dönüşür.

\mathcal{C} ve \mathcal{C}' merkezleri sırasıyla O ve O' olan iki ortogonal çember ve A ise \mathcal{C}' çemberi üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda A noktasının \mathcal{C} çemberine göre uygulanan inversiyon altındaki görüntüsü yine \mathcal{C}' çemberi üzerindedir.



Şekil 5.1.3 : \mathcal{C} çemberine ortogonal olan \mathcal{C}' çemberi üstündeki bir noktanın inversiyon altındaki görüntüsü.

Lemma 5.1.1 : \mathcal{C} , merkezi O olan bir çember ve A ise düzlem üstünde O dan farklı bir nokta olsun. A noktasının \mathcal{C} çemberine göre uygulanan inversiyon altındaki görüntüsü

B olmak üzere eğer A ve B noktaları bir \mathcal{C}' çemberi üstünde ise \mathcal{C} ve \mathcal{C}' çemberleri ortogondur (Goodmann-Strauss, 2001).

Lemma 5.1.2 : \mathcal{C} , merkezi O olan bir çember ve A ise O noktasından farklı bir nokta olsun. Bu durumda A noktasından geçen ve \mathcal{C} çemberine ortogonal olan tüm çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir doğrudur. Eğer A noktası \mathcal{C} çemberinin içinde veya dışında ise bu doğru \mathcal{C} nin dışında, eğer \mathcal{C} çemberinin üstünde ise bu doğru \mathcal{C} çemberine teğettir (Goodmann-Strauss, 2001).

O merkezli bir \mathcal{C} çemberi ve bu çemberin dışında bir A noktası verilsin. Merkezi A olan ve \mathcal{C} çemberine ortogonal olan \mathcal{C}' çemberi geometrik olarak bulmak için, OA doğru parçası çizilip, bu doğru parçasının orta noktası belirlenir. Bu orta noktayı merkez alan, O ve A noktalarından geçen \mathcal{C}'' çemberi çizilir. \mathcal{C} ve \mathcal{C}' çemberlerinin kesişim noktalarından geçen merkezi A olan çember \mathcal{C} çemberine ortogonal olan çemberdir. Böylece \mathcal{C} sabit bir çember olmak üzere \mathcal{C} çemberinin dışındaki her bir nokta \mathcal{C} çemberine ortogonal bir \mathcal{C}' çemberiyle birebir eşlenebilir.

Poincaré diskinde (ve üst yarı düzlemde) bir noktanın verilen bir hiperbolik izometri altındaki görüntüsü çember inversiyonları yardımıyla elde edilir. Poincaré disk modelinde bir izometri çember inversiyonlarının sonlu bileşkesi biçimindedir (Potter&Ribando, 2005). Möbius dönüşümleri hiperbolik izometrilere olduğundan Möbius dönüşümleri de çember inversiyonlarının sonlu bir bileşkesidir. Bundan dolayı Möbius dönüşümleri çemberleri çemberlere götürür. Geometrik olarak "çember koruma" Möbius dönüşümlerinin oldukça iyi bilinen bir karakterizasyonudur ve genişletilmiş kompleks düzlemde kendisi üzerine tanımlı çemberleri koruyan sürekli bir f dönüşümünün Möbius dönüşümü olduğuna dair birçok ispat yapılmıştır. Bir g dönüşümün Möbius olması için gerek ve yeter koşul, g nin

$$[z_1 z_2 : z_3 z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$$

çifte oranını korumasıdır (Başkan, 1996).

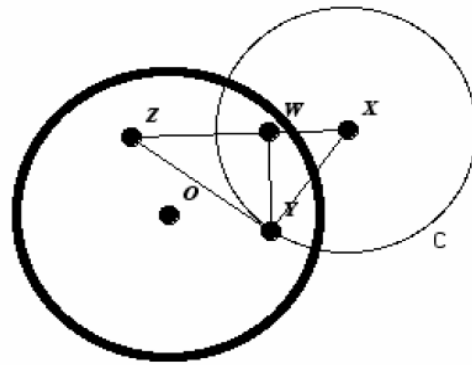
D , \mathbb{C} de bir bölge ve f ise \mathbb{C} den D ye tanımlı birebir bir fonksiyon olmak üzere D deki

bir çemberin (içiyile beraber) görüntüsü yine bir çember ise bu durumda f fonksiyonu bir Möbius dönüşümünün kısıtlamasıdır. Bu sonuç daha sonra Höfer tarafından geliştirilmiştir (Höfer, 2000).

5.1.1 Hiperbolik Yansıma İzometrisi

\mathcal{C} ve \mathcal{C}' merkezleri sırasıyla O ve O' olan iki ortogonal çember ve A ise \mathcal{C} çemberi içinde bir nokta olsun. Bu durumda A noktasının \mathcal{C}' çemberine göre uygulanan inversiyon altındaki görüntüsü yine \mathcal{C} çemberinin içindedir.

Öklidyen düzlemde bir doğrunun düzlemi iki bölgeye ayırdığı gibi hiperbolik geometrinin Poincaré disk modelinde de bir hiperbolik doğru diski iki bölgeye ayırır. Poincaré disk modeli kısaca \mathbb{H}^2 ile gösterilsin. l , \mathbb{H}^2 düzleminde bir hiperbolik doğru olsun. \mathcal{C} çemberinin merkezi X ve yarıçapı r olsun. \mathbb{H}^2 düzleminde l hiperbolik doğrusu üstünde olmayan bir W noktası seçilsin. W ve X noktalarından geçen Öklidyen doğru α olsun. Bu doğruya W noktasında dik olan Öklidyen doğru β olsun ve β doğrusu \mathcal{C} çemberini Y noktasında kessin. Y noktasında \mathcal{C} çemberine teğet olan doğrunun α yı kestiği nokta Z olsun. Bulunan bu Z noktası l ye göre uygulanan hiperbolik yansıma göre W noktasının görüntüsüdür.



Şekil 5.1.1.1 : \mathbb{H}^2 üzerinde hiperbolik yansıma.

ΔXWY , ΔXYZ , ΔYWZ benzer diküçgenler olduğundan

$$\frac{|XW|}{|XY|} = \frac{|XY|}{|XZ|}$$

olup, buradan $|XY|^2 = r^2 = |XW||XZ|$ elde edilir. Eğer W noktası l hiperbolik doğrusu üstünde ise $W = Z$ dir. Hiperbolik yansıma altında yönlendirme değişir ve l üstündeki tüm noktalar değişmez kalır (Potter&Ribando, 2005).

5.1.2 Hiperbolik Öteleme İzometrisi

Hiperbolik öteleme izometrisi paralel (kesişmeyen) iki hiperbolik doğruya uygulanan iki hiperbolik yansıma izometrisinin bileşkesinden elde edilir. α ve β , şekil 5.1.2.1 de gösterildiği biçimde kesişmeyen iki hiperbolik doğru olsun. α ve β hiperbolik doğrularını

$$z^* = \frac{z\bar{\alpha} - \alpha}{z - 1}$$

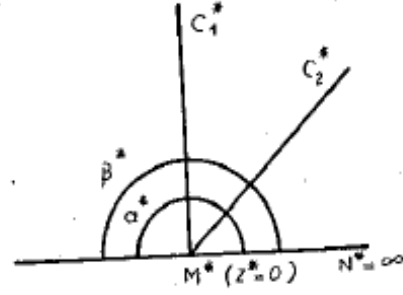
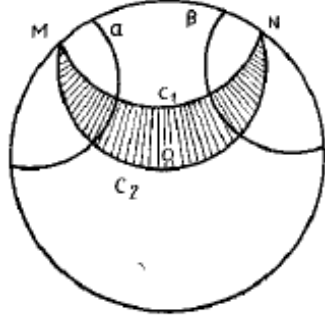
kuralıyla verilen T dönüşümüyle, merkezleri ortak olacak biçimde \mathbb{U}^2 üst yarı düzleminin α^* ve β^* hiperbolik doğrularına dönüştürmek mümkündür. α^* ve β^* a göre arka arkaya alınan hiperbolik yansımadan

$$w^* = hz^* \quad h > 0, (h \neq 1)$$

kuralıyla verilen S dönüşümü elde edilir. Şekil 5.1.2.2 de görüldüğü üzere α^* ve β^* hiperbolik doğrularına dik olan çemberler M^* merkezinden geçen doğrulardır. S nin sabit bıraktığı noktalar $z^* = 0$ ve $z^* = \infty$ dir. Bu dönüşüm altında sabit kalan noktalardan geçen tüm \mathcal{C}^* doğruları sabit kalır. Tekrar Poincaré disk modeline dönülecek olursa, $T^{-1}ST(z) = w$ olup

$$\frac{w\bar{\alpha} - \alpha}{w - 1} = h \frac{z\bar{\alpha} - \alpha}{z - 1}$$

dir. Dikkat edilecek olursa üst yarı düzlemde \mathcal{C}^* doğrularından yalnız \mathcal{C}_1^* doğrusu hem α^* ve β^* hiperbolik doğrularına, hem de reel eksene diktir. Dolayısıyla α ve β verildiğinde göre bunlara dik olan birtek \mathcal{C}_1 hiperbolik doğrusu vardır ve bu hiperbolik doğru hem M hem de N noktasından geçer. \mathcal{C}_1 sabit bırakılacak olursa α ve β değiştiğinde $T^{-1}ST$ dönüşümü yalnızca h parametresine tabi bir grup teşkil eder. Hiperbolik öteleme izometrisi altında yönlendirme değişmez kalır (Uluçay, 1955, Potter&Ribando, 2005).



Şekil 5.1.2.1 : \mathbb{H}^2 de hiperbolik öteleme. Şekil 5.1.2.2 : \mathbb{U}^2 de hiperbolik öteleme

5.1.3 Hiperbolik Dönme İzometrisi

Hiperbolik dönme izometrisi kesişen iki hiperbolik doğruya uygulanan iki hiperbolik yansıma izometrisinin bileşkesinden oluşur. α ve β , \mathbb{H}^2 üzerinde bir P noktasında kesişen, aralarındaki hiperbolik açı θ olan iki hiperbolik doğru olsun. Kompleks düzlemde P noktasının koordinatı a olsun. Bu durumda

$$z^* := T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

kuralıyla verilen $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ Möbius dönüşümü P noktasını orjine resmeder. Bu durumda α ve β , $z = 0$ dan geçen α^* ve β^* hiperbolik doğrularına dönüştür. α^* ve β^* hiperbolik doğruları arasındaki hiperbolik açı da θ dır. α^* ve β^* hiperbolik doğrularına göre arka arkaya hiperbolik yansıma alınarak elde edilen dönüşüm

$$w^* := e^{2i\theta} z^*$$

kuralıyla verilen hiperbolik açısı 2θ olan bir $S : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönme fonksiyonundan ibarettir. S nin sabit bıraktığı noktalar $z^* = 0$ ve $z^* = \infty$ dir. Bu dönme altında merkezi $z^* = 0$ olan bütün daireler sabit kalır. Bu daireler C^* ile gösterilirse C_1^* ve C_2^* gibi iki dairenin arasında kalan bölge de sabit kalır.

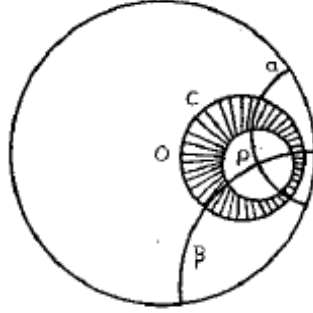
$z \in \mathbb{H}^2$ olmak üzere T altında z noktası z^* noktasına, S altında z^* noktası da w^* noktasına dönüşür. Son olarak T^{-1} altında w^* noktası da w noktasına dönüşür. Böylece

$$T^{-1}ST(z) = w$$

yani

$$e^{2i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$$

bulunur. $T^{-1}ST$ dönüşümü altında a ve $\frac{1}{\bar{a}}$ noktaları sabit kalırken yönlendirme korunur. P sabit ve θ değiştiğinde $T^{-1}ST$ dönüşümleri tek bir parametreye tabi bir grup oluştururlar. Bu gruba ait dönüşümler α ve β ları aralarında değiştirdiğinden, iki \mathcal{C} arasındaki hiperbolik uzaklık aynıdır. Hiperbolik dönme izometrisi eliptik öteleme olarak da bilinir (Uluçay, 1955, Potter&Ribando, 2005).



Şekil 5.1.3.1 : \mathbb{H}^2 üzerinde hiperbolik dönme.

5.1.4 Parabolik İzometri

Parabolik izometri, Poincare düzleminin sonsuzdaki çemberinde bulunan bir ideal noktada kesişen iki hiperbolik doğruya göre uygulanan iki hiperbolik yansıma izometrisinin bileşkesinden oluşur. α ve β , \mathbb{H}^2 nin sonsuzdaki çemberinde bulunan bir P noktasında kesişen iki hiperbolik doğru olsun. Hiperbolik öteleme izometrisinde olduğu gibi α ve β hiperbolik doğruları

$$z^* = \frac{z\bar{\alpha} - \alpha}{z - 1}$$

kuralıyla verilen T dönüşümüyle üst yarı düzlemin paralel α^* ve β^* hiperbolik doğrularına dönüştür. α^* ve β^* a göre arka arkaya alınan hiperbolik yansımadan

$$w^* = z^* + h \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$$

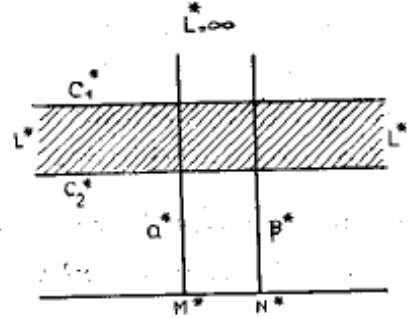
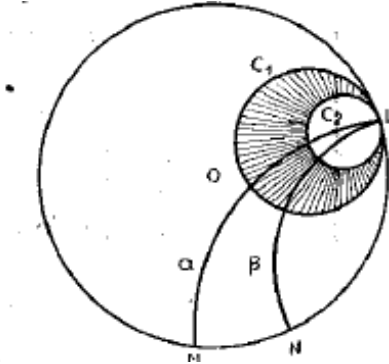
kuralıyla verilen S dönüşümü elde edilir. S nin sabit bıraktığı tek nokta vardır ve sonsuzdadır. α^* ve β^* doğrularına dik doğruların hepsi sonsuzdan geçer. Tekrar Poincaré disk modeline dönecek olursak

$$w = T^{-1}ST(z)$$

olup

$$\frac{w\bar{\alpha} - \alpha}{w - 1} = \frac{z\bar{\alpha} - \alpha}{z - 1} + h$$

dir. L noktası sabit kalan tek nokta olup, parabolik izometride yönlendirme korunur (Uluçay, 1955, Potter&Ribando, 2005).



Şekil 5.1.4.1 : \mathbb{H}^2 de parabolik izometri. Şekil 5.1.4.2 : \mathbb{U}^2 de parabolik izometri.

5.2 Möbius Dönüşümlerinin Bazı Karakterizasyonları

5.2.1 Möbius Dönüşümlerinin Hiperbolik Çokgenlerle Karakterizasyonu

Tanım 5.2.1.1 : (G, \oplus, \otimes) bir gyrovektör uzayı olmak üzere, herhangi üçü aynı gyrodoğru üzerinde bulunmayan birbirinden farklı n -tane noktayı ikişer ikişer birleştiren n -tane gyrodoğru parçasının birleşimine bir gyroçokgen denir. Burada $n > 2$ dir.

Bir gyroçokgenin bazı kenar gyrodoğruları gyroçokgeni kesiyorsa gyroçokgene konkav gyroçokgen, kesmiyorsa konveks gyroçokgen denir.

Tanım 5.2.1.2 : $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında köşeleri $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{V}_s$ ve kenarları ise $\mathbf{a}_1 = \ominus A_1 \oplus A_2$, $\mathbf{a}_2 = \ominus A_2 \oplus A_3$, ..., $\mathbf{a}_n = \ominus A_n \oplus A_1$ olan, A_1, A_2, \dots, A_n köşelerindeki gyroaçıları sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olan $A_1 A_2 \cdots A_n$ gyroçokgeni tanımlansın.

$$\delta = (n - 2) \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

sayısına gyroçokgenin kusuru denir.

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde gyroçokgen terimini kullanmak yerine zaman zaman hiperbolik çokgen terimi kullanılacaktır.

Tanım 5.2.1.3 : $ABCD$ bir hiperbolik dörtgen olmak üzere

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$$

oluyorsa bu dörtgene Apollonius dörtgeni denir. Burada $|AB|$ ile A ve B noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık gösterilmektedir.

Möbius dönüşümlerinin bir karakterizasyonunu da Haruki ve Rassias tarafından Apollonious dörtgenleri kullanılarak verildi (Haruki&Rassias, 1998). Haruki ve Rassias bir f fonksiyonun meromorfik olduğunda ve Apollonious dörtgenlerini Apollonious dörtgenlerine götürdüğünde f nin bir Möbius dönüşümü olduğunu gösterdiler.

Tanım 5.2.1.4 : Hiperbolik açıları $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \theta$ ($0 \leq \theta < \pi/2$) olan hiperbolik dörtgene Lambert dörtgeni denir.

Tanım 5.2.1.5 : Hiperbolik açıları $\pi/2, \pi/2, \theta, \theta$ ($0 \leq \theta < \pi/2$) olan hiperbolik dörtgene Saccheri dörtgeni denir.

Möbius dönüşümlerinin diğer bir karakterizasyonu ise Yang ve Fang tarafından Lambert dörtgenleri ve Saccheri dörtgenleri kullanılarak verilmiştir (Yang&Fang, 2010).

Lemma 5.2.1.1 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak biçimde Lambert dörtgenlerini koruyan birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $OABC$, $\angle AOC < \pi/2$ olacak biçimde bir Lambert dörtgeni olmak üzere $d(O, A)$, $d(O, B)$ ve $\angle AOC$ den herhangi ikisi diğerini tek türlü tanımlar (Yang&Fang, 2006).

İspat : $X \in \mathbb{H}^2$ noktasından geçen, birim diske ortogonal olan X_1 -merkezli çember I_X ile gösterilsin. $|OA| = a$ ve $|OC| = c$ olsun. Bu durumda I_A ve I_C çemberlerinin yarıçapları sırasıyla $\frac{1-a^2}{2a}$ ve $\frac{1-c^2}{2c}$ dir. Buradan $|OA_1| = \frac{1+a^2}{2a}$ ve $|OC_1| = \frac{1+c^2}{2c}$ elde edilir. Hipotezden $\angle ABC = \pi/2$ olup I_A ve I_C çemberlerinin ortogonal olduğu açıktır. Böylece $|A_1C_1|^2 = \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1-c^2}{2c}\right)^2$ olup Öklidyen kosinüs teoreminden ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.1.2 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak biçimde Lambert dörtgenlerini koruyan birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $OABC$, $\angle AOC = \angle OAB = \angle OCB = \pi/2$ olacak biçimde bir Lambert dörtgeni olmak üzere $\angle f(A) f(O) f(C) = \pi/2$ dir (Yang&Fang, 2006).

İspat : $\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin. $\angle A'O'C' < \pi/2$ olsun. O ve C noktalarından geçen hiperbolik doğru parçası $[O, C]$ olmak üzere $[O, C]$ üzerinde keyfi bir D noktası seçilsin. Hipotezden $OAED$ bir Lambert dörtgeni olacak biçimde bir $E \in [A, B]$ noktası seçilebilir. f birebir olduğundan D' noktası $[O', C']$ üzerindedir. Böylece $O'A'B'C'$ ve $O'A'E'D'$, O' noktasında aynı dar açıya sahip Lambert dörtgenleridir. $D'E'B'C'$ dörtgeninin hiperbolik açıları toplamı 2π olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $\angle A'O'C' = \pi/2$ dir.

Teorem 5.2.1.1 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak biçimde birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. f nin Möbius olması için gerek ve yeter koşul f nin \mathbb{H}^2 de Lambert dörtgenlerini korumasıdır (Yang&Fang, 2010).

İspat : $\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin. Teoremin ispatında dört adım izlenecektir.

1. Adım : İddia ediyoruz ki f hiperbolik dik açıları korur. $\angle OAB = \pi/2$ olacak biçimde OAB hiperbolik dik üçgenini ve $\angle AOC < \pi/2$ olacak biçimde $OABC$ Lambert

dörtgenini oluşturulsun. Lemma 5.2.1.2 den $\angle O^1 A^1 B^1 = \pi/2$ bulunur.

2. Adım : İddia ediyoruz ki f hiperbolik açıları da korur. $\angle AOC < \pi/2$ olacak biçimde $OABC$ Lambert dörtgenini oluşturalım. OC hiperbolik geodeziğine göre hiperbolik yansıma alınırsa $\angle COF < \pi/2$ olacak biçimde diğer bir $OCEF$ Lambert dörtgeni elde edilir. OC hiperbolik geodeziğinin birim diski kestiği nokta P ve AB hiperbolik geodeziğinin birim diski kestiği nokta ise Q olsun. Bu durumda ya $[C, P]$ hiperbolik doğru parçası üzerinde yada PQ yayı üzerinde bir D noktası $\angle OBD = \pi/2$ olacak biçimde bulunabilir. Burada iki durum söz konusudur.

1. Durum : $D \in [C, P]$ olsun. Bu durumda $\angle OED = \pi/2$ dir. 1. Adımdan biliyoruz ki tüm hiperbolik dik açılar f altında korunur. Bu durumda $OA^1 B^1 C^1$ dörtgeni $\angle A^1 O C^1 < \pi/2$ olacak biçimde bir Lambert dörtgenidir. f birebir, örten ve hiperbolik dik açıları koruyan bir dönüşüm olduğundan D^1 noktası $\angle O B^1 D^1 = \pi/2$ olacak biçimde $[C^1, P^1]$ hiperbolik doğru parçası üstünde tek türlü tanımlanır. $B^1 C^1$ hiperbolik doğrusunun birim diski kestiği nokta R^1 olsun. $\angle O R^1 P^1 = 0$ ve $\angle O C^1 P^1 = \pi$ olduğundan E^1 noktası $[C^1, R^1]$ üstünde $\angle O E^1 D^1 = \pi/2$ olacak biçimde tek türlü belirlidir. Bir hiperbolik geodezik ve dışında bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen geodeziğe ortogonal olan bir ve yalnız bir hiperbolik geodezik vardır. Son olarak F^1 noktası da $F^1 E^1$ hiperbolik geodeziği $C^1 E^1$ hiperbolik geodeziğine ortogonal olacak biçimde ve $O F^1$ hiperbolik geodeziği $E^1 F^1$ hiperbolik geodeziğine ortogonal olacak biçimde tek türlü tanımlıdır. Diğer yandan $OA^1 B^1 C^1$ ve D sabitlendikten sonra OP^1 yansıması alınırsa $\angle O E^1 D^1 = \pi/2$ olacak biçimde bir $OCEF$ Lambert dörtgeni elde edilir. Böylece elde edilen iki inşa üst üste düşer ve $\angle C^1 O F^1 = \angle C^1 O A^1$ elde edilir.

2. Durum : D , birim diskin PQ yayı üzerinde olsun. Bu durumda D noktasından geçen OC ye ortogonal olan birtek DG hiperbolik geodeziği vardır ve burada G noktası birim diski kestiği noktadır. Bu durumda $\angle OEG = \pi/2$ dir. f altındaki görüntüler incelendiğinde 1. Durumdaki gibi $\angle C^1 O F^1 = \angle C^1 O A^1$ elde edilir.

İkinci olarak $1 \leq i \leq p$ olacak biçimde p tamsayısı için $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{2\pi}{p}$ ve $d(O, A_i) = d(O, A_{i+1})$ olacak biçimde Lambert dörtgenlerinin $OA_i B_i A_{i+1}$ dizisi oluşturulsun. Bu durumda her $OA_i^1 B_i^1 A_{i+1}^1$ dörtgeni bir Lambert dörtgenidir ve $1 \leq i \leq p$ için $\angle A_i^1 O A_{i+1}^1$

hiperbolik açıları eşittir. f birebir olduğundan ve $A_1 = A_{p+1}$ olduğundan $A_1' = A_{p+1}'$ bulunur. bu ise her $\angle A_i'OA_{i+1}'$ hiperbolik açısının $\frac{2\pi}{p}$ olduğunu gösterir. Böylece f fonksiyonu O daki $\frac{q(2\pi)}{p}$ -değerli hiperbolik açıları korur, $(p, q \in \mathbb{Z})$. f sürekli ve \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi \mathbb{R} de yoğun olduğundan f hiperbolik açıları korur.

3. Adım : İddia ediyoruz ki f hiperbolik uzaklıkları da korur. d , hiperbolik uzaklık fonksiyonunu göstermek üzere $d(O, A) = d(O, C)$ olacak biçimde $OABC$ Lambert dörtgeni verilsin. Hiperbolik sinüs kuralından $\angle ABO = \angle CBO$ bulunur. f hiperbolik açıları koruduğundan $\angle A'B'O = \angle C'B'O$ ve $\angle OA'B' = \angle OC'B' = \pi/2$ bulunur. Hiperbolik sinüs kuralından $d(O, A') = d(O, C')$ elde edilir. $OA'B'C'$ hiperbolik dörtgeni de bir Lambert dörtgenidir ve $\angle A'OC' = \angle AOC$ dir. Lemma 5.2.1 den $d(O, A') = d(O, A)$ elde edilir.

4. Adım : $x, y \in \mathbb{H}^2$ keyfi noktalar olsunlar. $d(O, x) = d(O, x')$ ve $d(O, y) = d(O, y')$ olduğundan $|x| = |x'|$ ve $|y| = |y'|$ bulunur. Burada $|\cdot|$ ile Öklidyen norm gösterilmektedir. 2. Adımdan f nin açısal büyüklükleri koruduğu bilindiğine göre $|x - y| = |x' - y'|$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 2 \langle x, y \rangle &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 \\ &= |x'|^2 + |y'|^2 - |x' - y'|^2 \\ &= 2 \langle x', y' \rangle \end{aligned}$$

olup böylece f iç çarpımı korur ve \mathbb{H}^2 deki kısıtlanmış ortogonal olduğundan f Möbius dönüşümüdür.

Sonuç 5.2.1.1 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak biçimde birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir (Yang&Fang, 2006):

- (a) f bir Möbius dönüşümüdür;
- (b) f , iki komşu köşesinde hiperbolik dik açığa sahip hiperbolik dörtgenleri korur;
- (c) f Saccheri dörtgenlerini korur.

Tanım 5.2.1.6 : n -kenarlı bir hiperbolik çokgenin tam olarak iki açısı $\pi/2$ den farklı ise bu çokgene \mathcal{A} -tipinde, yalnız bir açısı $\pi/2$ den farklı ise \mathcal{B} -tipinde ve her açısı $\pi/2$ ise \mathcal{C} -tipindedir denir (Liu, 2006).

Tanım 5.2.1.7 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ -tipindeki hiperbolik çokgenleri koruyorsa f ye sırasıyla $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ -tipindedir denir (Liu, 2006).

Lemma 5.2.1.3 : $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n ; j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $0 \leq \theta_j \leq (n-2)\pi$ olacak biçimde bir sıralı n -li olsun. Bu durumda iç açıları $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ olan bir α hiperbolik çokgeninin var olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi$ olmasıdır (Beardon, 1983).

Lemma 5.2.1.3 ün bir uygulaması olarak bir hiperbolik n -çokgenin \mathcal{C} -tipinde olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 5$ olmasıdır.

Lemma 5.2.1.4 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $n = 3$ için f nin Möbius olması için gerek ve yeter koşul f nin \mathcal{A} -özellğinde olmasıdır (Liu, 2006).

İspat : $\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin. Kabul edelim ki f dönüşümü \mathcal{A} -özellğinde olsun. ABC ise $\angle BAC = \pi/2$ olacak biçimde bir hiperbolik üçgen olsun. Eğer $\angle A'B'C' = \pi/2$ ise $[A, C]$ üzerinde alınan keyfi bir D noktası için $A'B'D'$ hiperbolik üçgeni daima dik olmayabilir. Bu ise ABD hiperbolik üçgeninin dik olmasıyla çelişir. Benzer olarak $\angle A'C'B' \neq \pi/2$ dir. Böylece f dönüşümü hiperbolik açısı $\pi/2$ olan köşe noktasını korur. Böylece $\angle BAC = \pi/2 = \angle B'A'C'$ olup, f dönüşümü Lambert dörtgenlerini koruduğundan bir Möbius dönüşümüdür.

Lemma 5.2.1.5 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall n > 3$ için f dönüşümü \mathcal{A} -özellğinde ise f iç açısı $\pi/2$ olmayan köşe noktasını korur (Liu, 2006).

İspat : $\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin. A_1A_2, \dots, A_n hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olsun. Bu durumda bu hiperbolik çokgenin komşu iki köşe noktası birisindeki hiperbolik açı $\pi/2$, diğerindeki hiperbolik açı ise $\pi/2$ den farklı olacak biçimde bulunabilir. Örneğin $\angle A_1A_2A_3 = \pi/2$ ve $\angle A_2A_1A_n \neq \pi/2$ olsun. İddia ediyoruz ki $\angle A_2A_1A'_n \neq \pi/2$ dir. Aksi halde A_1A_n üzerinde bir B noktası $A_2B \perp A_1A_n$ olacak biçimde var olsaydı, bu durumda $\angle A_2B'A'_n \neq \pi/2$ bulunurdu. Böylece $BA_2 \dots A_n$

hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olup $B^1A_2^1 \cdots A_n^1$ hiperbolik çokgeni de \mathcal{A} -tipindedir. Dikkat edilecek olursa $A_1^1A_2^1 \cdots A_n^1$ hiperbolik çokgeni de \mathcal{A} -tipindedir. O halde $\angle B^1A_2^1A_3^1 = \pi/2$ ve $\angle A_1^1A_2^1A_3^1 \neq \pi/2$ elde edilir. Burada 2 durum söz konusudur.

1. Durum : $\angle A_1A_nA_{n-1} = \pi/2$ ise yukarıdaki duruma benzer biçimde $\angle A_1^1A_n^1A_{n-1}^1 \neq \pi/2$ elde edilir. $A_1^1A_2^1 \cdots A_n^1$ hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olduğundan A_2^1 ve A_n^1 köşe noktaları dışındaki diğer tüm köşe noktalarındaki hiperbolik açılar $\pi/2$ dir. Böylece $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \neq \pi/2$ ve $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \pi/2$ olacak biçimdeki diğer A_i köşeleri için $\angle A_i^1A_{i+1}^1A_{i+2}^1 \neq \pi/2$ elde edilir. Bu ise çelişki oluşturur.

2. Durum : $\angle A_1A_nA_{n-1} \neq \pi/2$ ise $[A_n, A_{n-1}]$ de bir C noktası $A_1, A_2 \cdots, A_{n-1}C$ hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olacak biçimde vardır. Bu durumda ise $A_1^1, A_2^1 \cdots, A_{n-1}^1C^1$ hiperbolik çokgeninde A_1^1, A_2^1 ve C^1 deki hiperbolik açılar $\pi/2$ değildir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 5.2.1.6 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall n > 3$ için f dönüşümü \mathcal{A} -özelliginde ise aynı zamanda hem \mathcal{B} hem \mathcal{C} -özelliginde (Liu, 2006).

İspat : $\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X^1$ ile gösterilsin. $A_1A_2 \cdots A_n$ hiperbolik çokgeni yalnızca A_1 köşesindeki açısı $\pi/2$ olmayan bir hiperbolik çokgen olsun. $A_1BA_3 \cdots A_n$ hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olacak biçimde $B \in [A_2, A_3]$ seçelim. Bu durumda Lemma 5.2.1.5 den dolayı $A_3^1, A_4^1, \dots, A_n^1$ deki hiperbolik açılar $\pi/2$ dir. Benzer biçimde $C \in [A_n, A_{n-1}]$ olmak üzere \mathcal{A} -tipinde bir $A_1A_2 \cdots A_{n-1}C$ hiperbolik çokgeni oluşturularak $\angle A_1^1A_2^1A_3^1 = \pi/2$ elde edilir. $\angle A_2A_1A_n \neq \pi/2$ olduğundan $\angle A_2DA_n = \pi/2$ olacak biçimde bir $D \in A_1A_n$ noktası vardır. Böylece $DA_2 \cdots A_n$ de aynı zamanda \mathcal{B} -tipindedir. Lemma 5.2.1.5 den $\angle A_2^1D^1A_n^1 \neq \pi/2$ ve $\angle A_2^1A_1^1A_n^1 \neq \pi/2$ elde edilir. Böylece f dönüşümü \mathcal{B} -özelliginde olup benzer biçimde \mathcal{C} -tipinde olduğu da benzer biçimde ispatlanır.

Lemma 5.2.1.7 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall n > 3$ için f dönüşümü \mathcal{B} -özelligine sahipse f dönüşümü açısı $\pi/2$ olmayan tek köşesini korur (Liu, 2006).

İspat : Lemma 5.2.1.5 deki ispata benzer biçimde elde edilir.

Teorem 5.2.1.2 : $\mathbb{H}^2 = \{x : |x| < 1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. f nin Möbius olması için gerek ve yeter koşul f nin $n \geq 3$ için \mathcal{A} -özelliğinde olmasıdır (Liu, 2006).

İspat : f nin Möbius olması durumunda f nin bir hiperbolik izometri olacağından, $n \geq 3$ için f nin \mathcal{A} -özelliğinde olduğu açıktır.

$\forall X \in \mathbb{H}^2$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin.

$n = 3$ için Lemma 5.2.1.4 den ispat kolayca yapılır.

$n = 4$ için ABD , $\angle BAD = \pi/2$ olacak biçimde bir hiperbolik dik üçgen olsun. Bu durumda $ABCD$ hiperbolik çokgeni \mathcal{A} -tipinde olacak biçimde bir C noktası bulunabilir.

Lemma 5.2.1.5 den $\angle B'A'D' = \pi/2$ olup Lemma 5.2.1.4 den f Möbius dönüşümüdür.

$n = 5$ için $ABFE$ bir Lambert dörtgeni (yani \mathcal{B} -tipinde) ve $\angle ABF \neq \pi/2$ olsun. BF ye göre hiperbolik yansıma altında ya \mathcal{B} yada \mathcal{C} -tipinde bir hiperbolik çokgen elde edilir. Bu hiperbolik çokgen $ABCDE$ ile gösterilsin. Lemma 5.2.1.6 dan $A'B'C'D'E'$ hiperbolik çokgeni de ya \mathcal{B} yada \mathcal{C} -tipindedir. Lemma 5.2.1.7 den $\angle B'A'E' = \pi/2 = \angle A'E'F'$ dir. Benzer biçimde AB ye göre hiperbolik yansıma alınırsa $\angle B'F'E' = \pi/2$ bulunur. Lemma 5.2.1.3 den $A'B'F'E'$ de bir Lambert dörtgenidir. Böylece f Möbius dönüşümüdür.

$n \geq 6$ için $A_1A_2A_n$ bir hiperbolik dik üçgen olsun. $\angle A_2A_1A_n = \pi/2$ ve $\angle A_1A_2A_n = \theta$ olsun. Lemma 5.2.1.3 den hiperbolik açıları $\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \theta$ olan bir $A_2A_3 \cdots A_{n-2}B$ hiperbolik çokgeni vardır, ($B \in A_2A_n$). Hiperbolik çokgen konveks olduğundan A_2A_n geodeziğine göre hiperbolik yansıma altında $A_2A_3 \cdots A_{n-1}B$ hiperbolik çokgeniyle ya \mathcal{A} yada \mathcal{B} tipinde $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ hiperbolik çokgeni elde edilir ve bu hiperbolik çokgenin görüntüsü de Lemma 5.2.1.6 dan ya \mathcal{A} yada \mathcal{B} tipindedir. Böylece $\angle A_2'A_1'A_n' = \frac{\pi}{2}$ eşitliği Lemma 5.2.1.5 den ve Lemma 5.2.1.7 den bulunur. Böylece Lemma 5.2.1.4 den f bir Möbius dönüşümüdür.

Tanım 5.2.1.8 : $\mathbb{D} = \{x : |x| < 1\}$ ve $A_1 \cdots A_n$, \mathbb{D} de bir hiperbolik çokgen olmak üzere

$$|A_1 \ominus A_2| = |A_2 \ominus A_3| = \cdots = |A_{n-1} \ominus A_n| = |A_n \ominus A_1| := a$$

ve

$$\angle A_1 A_2 A_3 = \angle A_2 A_3 A_4 = \dots = \angle A_{n-1} A_n A_1 = \angle A_n A_1 A_2 := \theta > 0$$

oluyorsa $A_1 \cdots A_n$ hiperbolik çokgenine regülerlerdir denir.

Lemma 5.2.1.8 : $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ sürekli birebir, örten ve ikizkenar hiperbolik üçgenleri koruyan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu ikizkenar hiperbolik üçgenlerin hiperbolik açılarını da korur (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

İspat : $\forall X \in \mathbb{D}$ için $f(X) = X'$ ile gösterilsin. ABC , \mathbb{D} de $|A \ominus B| = |A \ominus C|$, $\angle CAB = \alpha$ ve $\angle ABC = \beta = \angle BCA$ olacak biçimde bir ikizkenar hiperbolik üçgen olsun. Öncelikle $\angle A'B'C' = \angle B'C'A'$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $\angle A'B'C' \neq \angle B'C'A'$ olsun. $\angle A'B'C' := \gamma$ olsun. $\angle B'C'A' = \angle C'A'B'$ almak genelliği bozmaz.

1. durum : $2\beta > \alpha > \beta$ ise $[B, C]$ üzerinde $\angle CAE = \beta = \angle DAB$ olacak biçimde D ve E noktaları vardır. f birebir olduğundan D', E' noktaları da $[B', C']$ üzerindedir. ABD hiperbolik üçgeni ikizkenar olduğundan $A'B'D'$ hiperbolik üçgeni de ikizkenardır. Böylece $\angle B'D'A' = \angle D'A'B'$ yada $\angle B'D'A' = \angle A'B'D'$ dir. $\angle B'D'A' = \angle A'B'D'$ olduğu açıktır. Aksi takdirde $A'D'C'$ hiperbolik üçgeninin hiperbolik açıları toplamı π den büyük olurdu. Benzer biçimde AEC hiperbolik üçgeni ikizkenar olduğundan $A'E'C'$ hiperbolik üçgeni de ikizkenardır. Bu durumda $\angle A'E'C' = \theta$ yada $\angle A'E'C' = \angle C'A'E'$ elde edilir. $\angle C'A'D'$, $\angle D'A'E'$, $\angle E'A'B'$ hiperbolik açıları sırasıyla θ_1 , θ_2 , ve θ_3 ile gösterilsin. Öncelikle $\angle A'E'C' = \theta$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $A'B'E'$ hiperbolik üçgeninin hiperbolik açıları toplamı $\theta_3 + \gamma + (\pi - \theta)$ olup, bir hiperbolik üçgenin hiperbolik açıları toplamı π den küçük olacağından $\gamma < \theta_1 + \theta_2$ bulunur. $A'D'C'$ hiperbolik üçgeninin hiperbolik açıları toplamı $\theta_1 + \theta + \pi - \gamma$ olup, bir hiperbolik üçgenin hiperbolik açıları toplamı π den küçük olacağından $\theta_1 + \theta < \gamma$ bulunur. Böylece $\gamma < \theta_1 + \theta_2$ ve $\theta_1 + \theta < \gamma$ eşitsizliklerinden $\theta < \theta_2$ bulunur ve sonuç $\theta > \theta_2$ olmasıyla çelişir. $\angle A'E'C' = \theta_1 + \theta_2$ durumu incelenirse $A'B'E'$ hiperbolik üçgeninin hiperbolik açıları toplamı $\pi - (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 + \gamma$ olup, böylece $\gamma < (\theta_1 + \theta_2) - \theta_3$ bulunur. $\theta_1 + \theta < \gamma$ olduğundan $\theta < \theta_2 - \theta_3$ olup, bu ise $\theta > \theta_2 + \theta_3$ sonucuyla çelişir.

2. durum : $\alpha \geq 2\beta$ ise, yukarıdaki yol izlenerek benzer biçimde çelişki elde edilir.

3. durum : $\beta > \alpha$ ise, $[A, B]$ üzerinde $\angle FCA = \alpha$ olacak biçimde bir F noktası vardır. FCB hiperbolik üçgeninin hiperbolik açıları toplamı $\pi - \angle AFC + (\beta - \alpha) + \beta$ olup, yukarıdaki duruma benzer biçimde $(\beta - \alpha) + \beta < \angle AFC$ elde edilir. Hipotezden $\alpha < \beta = (\beta - \alpha) + \alpha < (\beta - \alpha) + \beta < \angle AFC$ olup birinci adımdan $\angle C'A'F' = \angle F'C'A'$ bulunur. Fakat bu ise $\angle B'C'A' = \angle C'A'B'$ olmasıyla çelişir. Böylece $\angle A'B'C' = \angle B'C'A'$ dir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $|A \ominus B_i| = |A \ominus B_{i+1}|$ ve $\angle B_i A B_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ olacak biçimde ikizkenar hiperbolik üçgenlerin bir $AB_i B_{i+1}$ dizisini alalım. $n > 2$ olduğu açıktır ve hipotezden $1 \leq i \leq n - 1$ olacak biçimdeki her i için $A'B'_i B'_{i+1}$ hiperbolik üçgenleri de ikizkenardır. f birebir olduğundan $B_1 = B_{n+1}$ olması $B'_1 = B'_{n+1}$ olmasını gerektirir. Böylece $1 \leq i \leq n - 1$ olacak biçimdeki her i için $\angle B'_i A' B'_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ bulunur. Aynı zamanda $m \in \mathbb{Z}^+$ için f fonksiyonu A noktasında $\frac{m(2\pi)}{n}$ -değerli hiperbolik açıları da korur. f sürekli olduğundan ve rasyonel sayılar kümesi \mathbb{R} de yoğun olduğundan f fonksiyonu A noktasındaki tüm hiperbolik açıları korur ve böylece $\angle CAB = \angle C'A'B'$ elde edilir.

1. durum : $|A \ominus B| > |C \ominus B|$ olsun. Bu durumda $[A, B]$ üzerinde $|C \ominus B| = |D \ominus B|$ olacak biçimde bir D noktası bulunabilir. BCD hiperbolik üçgeni ikizkenar olduğundan ve yukarıda elde edilen sonuçtan dolayı $\angle ABC = \angle DBC = \angle D'B'C' = \angle A'B'C'$ elde edilir. Dikkat edilecek olursa f birebir olduğundan dolayı D' noktası $[A', B']$ üzerindedir.

2. durum : $|A \ominus B| < |C \ominus B|$ olsun. $|A \ominus B| = |B \ominus E|$ olacak biçimde $[B, C]$ üzerinde bir E noktası alalım. Böylece ABE hiperbolik üçgeninin ikizkenar olduğu açıktır ve $\angle ABC = \angle ABE = \angle A'B'E' = \angle A'B'C'$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.1.2 : $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ sürekli birebir, örten ve ikizkenar gyrotüçgenleri koruyan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu regüler gyroçokgenleri de korur (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

İspat : Regüler hiperbolik çokgenin köşelerinden gyroçokgenin merkezine çizilen gyrodöğru parçaları yardımıyla kolayca ispatlanabilir.

Sonuç 5.2.1.3 : $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ sürekli birebir, örten ve ikizkenar gyrotüçgenleri koruyan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f bütün regüler gyropoligonların köşelerindeki açıları da korur (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

İspat : Lemma 5.2.1.8 den kolayca ispatlanabilir.

Teorem 5.2.1.3 : $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ sürekli birebir, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin Möbius olması için gerek ve yeter koşul f nin ikizkenar hiperbolik üçgenleri korumasıdır (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

İspat : f nin Möbius olması durumunda ikizkenar hiperbolik üçgenleri koruduğu açıktır. f nin ikizkenar hiperbolik üçgenleri koruduğunu kabul edelim. Üstelik $f(0) = 0$ olsun. Eğer $f(0) \neq 0$ ise bir g hiperbolik izometri seçilebilir. x, y keyfi iki nokta olsun. $|x| < |y|$ almak genelliği bozmaz.

1. durum : x, y ve 0 doğruduş olmasın. Bu durumda $0y$ hiperbolik doğrusu üstünde 0 ve y noktaları arasında $|K| = |x|$ olacak biçimde bir K noktası bulunabilir. Benzer biçimde $0x$ hiperbolik doğrusu üstünde $|Q| = |y|$ olacak biçimde, x noktası ile 0 noktası arasında kalan bir Q noktası bulunabilir. $Q0y$ ve $x0K$ hiperbolik üçgenlerinin ikizkenar olduğu açıktır. Aynı zamanda hipotezden dolayı $Q0y'$ ve $x'0K'$ hiperbolik üçgenleri de ikizkenardır ve $\angle Q'0y' = \angle x'0K'$ sağlanır. Lemma 5.2.1.8 den $|x| = |x'|$, $|y| = |y'|$ ve $|x \ominus y| = |x' \ominus y'|$ elde edilir. $|x \ominus y| = |x' \ominus y'|$ olması ise

$$\bar{x}y + x\bar{y} = \bar{x}'y' + x'\bar{y}'$$

eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Böylece f iç çarpımı koruduğundan ve \mathbb{D} deki kısıtlaması üniter olduğundan f fonksiyonu bir Möbius dönüşümüdür.

2. durum : x, y ve 0 doğruduş olsun ve l ise başlangıç noktasından geçen bir hiperbolik doğru olsun. $|x| = |P|$, $|y| = |Q|$ ve $\angle x0P = \angle y0Q$ olacak biçimde l üstünde P, Q noktaları alalım. Bu durumda da f nin iç çarpımı koruduğu açıktır ve f Möbius dönüşümüdür.

$|x| = |y|$ olma durumu açık olduğundan bu durum göz önüne alınmamıştır.

Teorem 5.2.1.4 : $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ sürekli birebir, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin Möbius olması için gerek ve yeter koşul f nin regüler hiperbolik çokgenleri korumasıdır (Demirel²&Seyrantepe², 2010).

İspat : f nin Möbius olması durumunda regüler hiperbolik çokgenleri koruduğu açıktır. Şimdi f nin regüler hiperbolik çokgenleri koruduğunu kabul edelim. f nin ikizkenar hiperbolik üçgenleri koruduğunu göstermek yeterlidir. ABC , \mathbb{D} de $|A \ominus B| = |A \ominus C|$ olacak biçimde bir gyroüçgen olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|A \ominus B_i| = |A \ominus B_{i+1}|$ ve $\angle B_i A B_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ olacak biçimde ikizkenar hiperbolik üçgenlerin $AB_i B_{i+1}$ dizisini oluşturalım. f birebir olduğundan $B_1 = B_{n+1}$ olması $B_1^! = B_{n+1}^!$ olmasını gerektirir. $B_1 B_2 \cdots B_n$ hiperbolik çokgeninin A merkezli bir regüler hiperbolik çokgen olduğu açıktır ve hipotezden dolayı $B_1^! B_2^! \cdots B_n^!$ gyroçokgeni de $A^!$ merkezli bir regüler hiperbolik poligondur. Buradan $1 \leq i \leq n - 1$ olacak biçimdeki her i için $\angle B_i^! A^! B_{i+1}^! = \frac{2\pi}{n}$ elde edilir. Böylece $m \in \mathbb{Z}^+$ için f A noktasındaki $\frac{m(2\pi)}{n}$ —değerli hiperbolik açıları korur. f sürekli olduğundan ve rasyonel sayılar kümesi \mathbb{R} de yoğun olduğundan f fonksiyonu A noktasındaki tüm hiperbolik açıları korur. Benzer biçimde yukarıdaki lemmada kullanılan method yardımıyla ABC hiperbolik üçgeninin diğer köşelerindeki hiperbolik açıların korunduğu da gösterilebilir. Böylece f nin ikizkenar hiperbolik üçgenleri koruduğunu göstermiş olup, bu ise f nin bir Möbius dönüşümü olması için yeterlidir.

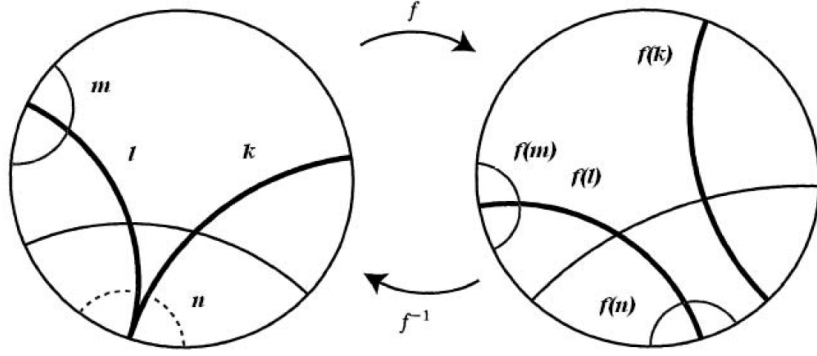
Hiperbolik üçgenler yardımıyla Möbius dönüşümlerinin diğer bir karakterizasyonu da Li ve Wang tarafından verilmiştir (Li&Wang, 2009).

5.2.2 Möbius Dönüşümlerinin Hiperbolik Doğrularla Karakterizasyonu

Lemma 5.2.2.1 : l ve k , \mathbb{H}^2 uzayının sınırı üzerinde kesişen iki hiperbolik doğru olsun. $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm ise $f(l)$ ve $f(k)$ doğruları da \mathbb{H}^2 uzayının sınırı üzerinde kesişirler (Jeffers, 2000).

İspat : f , birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm olduğundan f^{-1} dönüşümü de hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşümdür. l ve k hiperbolik doğru-

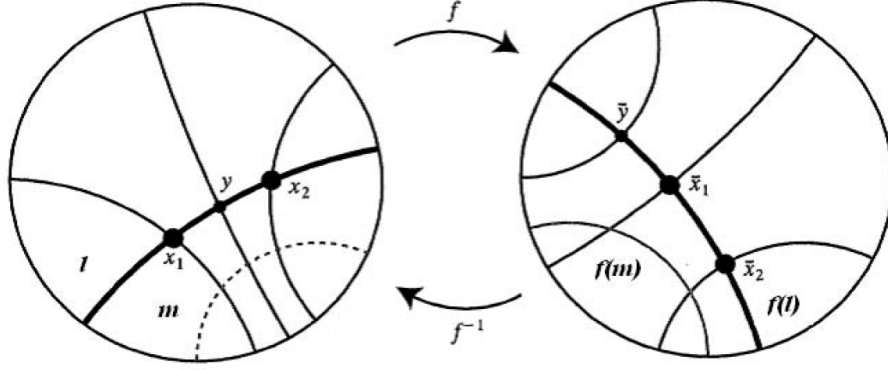
larının \mathbb{H}^2 nin $\partial\mathbb{H}^2$ sınırında kesiştiğini fakat $f(l)$ ve $f(k)$ hiperbolik doğrularının diskin sınırda kesişmediği kabul edilsin. $f(l)$ ile diskin içinde kesişecek fakat $f(k)$ ile diskin içinde kesişmeyecek biçimde bir $n' := f(n)$ doğrusu seçilsin. $f(k)$ ile $f(n)$ hiperbolik doğruları kesişirken l ile n hiperbolik doğruları kesişmezler. Bu ise f nin birebir örten olmasıyla çelişir.



Şekil 5.2.2.1 : Diskin sınırında kesişen hiperbolik doğruların görüntüleride diskin sınırında kesişir.

Lemma 5.2.2.2 : $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm ise f dönüşümü doğrular üzerindeki sıralamayı korur (Jeffers, 2000).

İspat : l , \mathbb{H}^2 uzayında bir hiperbolik doğru olsun. x_1, x_2 ve y noktaları ise l doğrusu üstünde ve y noktası x_1 ve x_2 noktalarının arasında olsun. $f(x_1) = \bar{x}_1$, $f(x_2) = \bar{x}_2$, ve $f(y) = \bar{y}$ olmak üzere f dönüşümünün doğrular üzerindeki sıralamayı korumadığı kabul edilsin. x_1 noktasından geçen l den farklı bir l_1 doğrusu, x_2 noktasından geçen l den farklı bir l_2 doğrusu ve y noktasından geçen l den farklı bir k doğrusu seçilsin. Üstelik l_1, l_2 ve k doğruları kesişmesin. Bu durumda $f(l_1) = \bar{l}_1$, $f(l_2) = \bar{l}_2$ ve $f(k) = \bar{k}$ doğrularıda kesişmez. \bar{l}_1 ve \bar{l}_2 doğrularının ikisini de kesecek biçimde fakat \bar{k} doğrusunu kesmeyecek biçimde bir $\bar{m} := f(m)$ doğrusu seçilsin. Bu durumda m doğrusu hem l_1 doğrusunu hem de l_2 doğrusunu keserken aynı zamanda k doğrusuyla da kesişir. Bu ise f nin birebir ve örten bir fonksiyon olmasıyla çelişir.



Şekil 5.2.2.2 : f dönüşümü altında sıralama korunur.

Önerme 5.2.2.1 : $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm ise $f, \partial\mathbb{H}^2$ üstünde süreklidir (Jeffers, 2000).

Aşağıdaki lemma bu önermeye denktir.

Lemma 5.2.2.3 : $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \partial\mathbb{H}^2$ olmak üzere y_1 ve y_2 noktaları x_1 ve x_2 noktalarını ayırıştırın. Bu durumda $f(y_1)$ ve $f(y_2)$ noktaları da $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını ayırıştırır (Jeffers, 2000).

İspat : l_x, l_y hiperbolik doğruları diski sırasıyla $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ noktalarında kesişen hiperbolik doğrular olsun. Hipotez gereğince l_x, l_y doğruları kesişir. Bu durumda $f(l_x), f(l_y)$ doğruları da kesişir. Dolayısıyla $f(y_1)$ ve $f(y_2)$ noktaları da $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını ayırıştırır.

Lemma 5.2.2.4 : $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. f fonksiyonu l hiperbolik doğrusunun bitiş noktalarını sabit bırakсын. $\alpha_l : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü l ye göre hiperbolik yansıma dönüşümünü göstereyin. Bu durumda

$$f\alpha_l = \alpha_l f$$

dır (Jeffers, 2000).

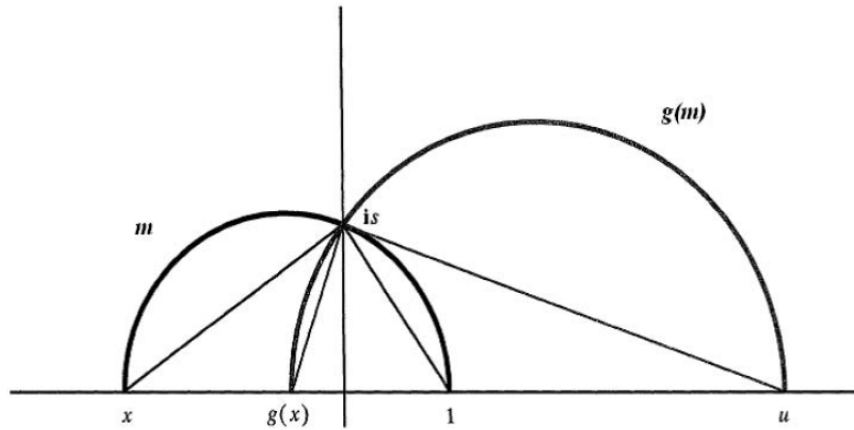
İspat: Bu lemmanın ispatı \mathbb{U}^2 üst yarı düzlem modelinde gösterilecektir. $g := f\alpha_l f^{-1}\alpha_l$ olsun. $f(l) = l$ olduğundan $\forall x \in L$ için

$$g(x) = f\alpha_l f^{-1}(x) = f f^{-1}(x) = x$$

bulunur. Özel olarak l doğrusu 0 ve ∞ noktasından geçecek biçimde seçilsin. Reel eksen üzerinde 1 ve $x < 0$ olacak biçimde iki nokta seçilsin. Bu iki noktadan geçen doğru m olmak üzere $g(1) := u \in \mathbb{R}$ olsun. m hiperbolik doğrusu l yi i_s noktasında kessin. Bu durumda $g(i_s) = i_s$ olur. i_s ve u dan geçen doğru $g(m)$ doğrusudur. i_s noktasının $\partial\mathbb{U}^2$ sınırına olan uzaklığı s olmak üzere, benzerlik teoreminden

$$-\frac{x}{s} = s \quad \text{ve} \quad -\frac{g(x)}{s} = \frac{s}{u}$$

yani $g(x) = \frac{x}{u}$ elde edilir. Bu dönüşüm \mathbb{U}^2 üst yarı düzlem modelinin sol tarafından yine sol tarafına tanımlıdır. \mathbb{U}^2 nin sol tarafında bulunan bir nokta \mathbb{U}^2 nin sol tarafında bulunan iki hiperbolik doğrunun arakesiti biçiminde düşünülürse, g nin tanımına göre kesişen bu iki hiperbolik doğru sıfıra doğru yaklaşır. Dolayısıyla arakesit noktası da sıfıra yaklaşır. g dönüşümü l nin her noktasını sabit bıraktığından ve \mathbb{U}^2 nin sol tarafını sıfıra yaklaştırdığından dolayı $u = 1$ olmak zorundadır. Böylece g dönüşümü \mathbb{U}^2 nin sol tarafından kendisine tanımlı birim dönüşümdür. Benzer biçimde bu dönüşüm \mathbb{U}^2 nin sağ tarafında da tanımlanırsa, g nin birim dönüşüm olduğu görülür.



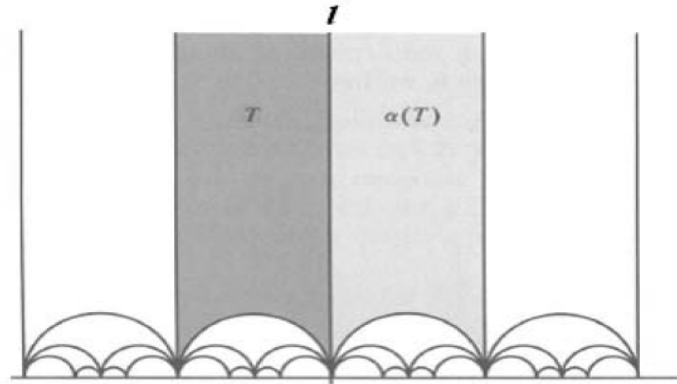
Şekil 5.2.2.3 : $g(x)$ noktası u tarafından tanımlanır.

Teorem 5.2.2.1 : $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dönüşümü birebir, örten ve hiperbolik doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. Bu durumda f dönüşümü \mathbb{H}^2 uzayının bir izometrisidir (Jeffers, 2000).

İspat : İzometriler, genel Möbius dönüşümleri gibi $\partial\mathbb{U}^2$ (aynı zamanda $\partial\mathbb{H}^2$) nin ayrık üç noktasını $\partial\mathbb{U}^2$ nin ($\partial\mathbb{H}^2$ nin) ayrık üç noktasına dönüştür. f nin $\partial\mathbb{U}^2$ nin $0, 1$ ve ∞ noktalarını sabit bıraktığı kabul edilsin. Eğer f bu noktaları sabit bırakmıyorsa bir izometriyle bileşke alınarak bu noktalar sabit bırakılabilir. Bu üç ayrık nokta bir T ideal üçgeninin köşelerini oluşturular. l bu üçgenin bir kenarı ve $x \in \partial\mathbb{U}^2$ ise f altında sabit kalan bir nokta olsun. Lemma 5.2.2.4 gereğince

$$f(\alpha_l(x)) = \alpha_l(f(x)) = \alpha_l(x)$$

elde edilir. Böylece $\alpha_l(x)$, f altında sabit kalır. Yani f dönüşümü $\alpha_l(T)$ nin köşelerini sabit bırakmış olur. Bu işlem arka arkaya uygulandığında f dönüşümü daima üçgenlerin köşe noktalarını sabit bırakır. Şekil 5.2.2.4 de görüleceği üzere f , $\partial\mathbb{U}^2$ nin yoğun bir altkümesini sabit bırakır. Ayrıca f , $\partial\mathbb{U}^2$ üzerinde sürekli olduğundan f , $\partial\mathbb{U}^2$ nin tüm noktalarını sabit bırakır. O halde \mathbb{U}^2 nin de tüm noktalarını sabit bırakır. Böylece f bir hiperbolik izometridir.



Şekil 5.2.2.4 : \mathbb{U}^2 de verilen bir l hiperbolik doğrusuna göre hiperbolik yansıma.

Teorem 5.2.2.2 : $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ ($n > 1$) birebir, örten ve hiperbolik doğruların korunduğu bir dönüşüm olsun. Bu durumda f dönüşümü \mathbb{H}^n uzayının bir izometrisidir (Jeffers, 2000).

İspat: $x, y \in \mathbb{H}^n$ olsun. α , x ve y noktalarından geçen iki boyutlu bir hiperdüzlem olsun. l_1 ve l_2 ise α nın kesişen iki hiperbolik doğrusu olsun. α nin f altındaki görüntüsü ise yine iki boyutlu bir hiperdüzlemdir. $f(\alpha) = \alpha$ olduğu kabul edilebilir. Eğer $f(\alpha) \neq \alpha$ ise bir g hiperbolik izometrisiyle bileşke alınarak $gf(\alpha) = \alpha$ elde edilir. Teorem 5.2.2.1 gereğince

$$f|_{\alpha} : \alpha \rightarrow \alpha$$

dönüşümü bir hiperbolik izometridir.

Sonuç 5.2.2.1 : $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ ($n > 1$) birebir, örten ve r -boyutlu hiperdüzlemlerin korunduğu bir dönüşüm olsun. Bu durumda f dönüşümü \mathbb{H}^n uzayının bir izometrisidir (Jeffers, 2000).

KAYNAKLAR

- Başkan, T. 1996. Kompleks fonksiyonlar teorisi, Uludağ Üniversitesi.
- Benz, W. 2000. Lorentz-Minkowski distances in Hilbert spaces, *Geom. Dedicata* 81 no. 1-3, 219–230.
- Benz, W. 2003. On Lorentz-Minkowski geometry in real inner product spaces, Special issue dedicated to Adriano Barlotti. *Adv. Geom.* , suppl., S1–S12.
- Benz, W. 2004. Metric and periodic lines in real inner product space geometries, *Monatsh. Math.* 141, no. 1, 1–10.
- Blumenthal, LM. 1970. Menger, K., *Studies in geometry*, San Francisco: Freeman.
- Demirel, O., Soytürk, E. 2008. The hyperbolic Carnot theorem in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry, *Novi Sad J. Math.* 38 , no. 2, 33–39.
- Demirel¹, O., Seyrantepe¹, E.S. 2010. On the relation between ordered sets and Lorentz-Minkowski distances in real inner product spaces, *Acta Universitatis Apulensis*, no.21, 151-159.
- Demirel², O., Seyrantepe², E.S. 2010. A characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic regular polygons, (yayına kabul edildi).
- Goodman-Strauss, C. 2001. Compass and straightedge in the Poincaré disk, *Amer. Math. Monthly* 108 , no. 1, 38–49.
- M. Hajja, 2006. A very short and simple proof of "the most elementary theorem" of Euclidean geometry. *Forum Geom.* 6, 167-169.
- Haruki, H., Rassias, T.M. 1998. A new characteristic of Mobius transformations by use of Apollonious quadrilaterals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2857-2861.
- Höfer, R. 2000. A characterization of Möbius transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, no. 4, 1197–1201.
- Höfer¹, R. 2006. Metric lines in Lorentz-Minkowski geometry, *Aequationes Math.* 71, no. 1-2, 162–173.
- Höfer², R. 2006. Periodic lines in Lorentz-Minkowski geometry, *Results Math.* 49, no. 1-2, 141–147.

- Jeffers, J. 2000. Lost theorems of geometry. *Amer. Math. Monthly* 107, no. 9, 800–812.
- Kaya, R. 1992. *Projektif Geometri*, Anadolu Üniversitesi yayımları, no. 551.
- Kinyon, M.K., Ungar, A.A. 2000. The gyro-structure of the complex unit disk, *Math. Mag.* 73, no. 4, 273–284.
- Krantz, S.G. 1990. *Complex analysis: the geometric viewpoint*. Carus Mathematical Monographs, 23. Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Li, B., Wang, Y. 2009. A new characterization for isometries by triangles, *New York Journal of Mathematics*, no. 15, 423–429.
- Liu, J. 2006. A new characteristic of Möbius transformations by use of polygons having type A, *J. Math. Anal. Appl.* 324, no. 1, 281–284.
- Potter, M., Ribando, J.M. 2005. Isometries, Tessellations and Escher, Oh My!, *American Journal of Undergraduate Research*, vol. 3, no. 4, 21–28.
- Sabinin, L.V. 1990. Quasigroups and differential geometry. *Quasigroups and loops: theory and applications*, 357–430, *Sigma Ser. Pure Math.*, 8, Heldermann, Berlin.
- Sabinin, L.V., Sabinina, L.V., Sbitneva, L.V. 1998. On the notion of gyrogroup, *Aequationes Math.* 56, 11–17.
- Sabuncuoğlu, A. 2005. *Analitik Geometri*, Nobel yayıncılık, no. 341.
- Uluçay, C. 1955. *Konform Tasvir*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Ungar¹, A.A. 1988. The Thomas rotation formalism underlying a nonassociative group structure for relativistic velocities, *Appl. Math. Lett.* 1, no. 4, 403–405.
- Ungar², A.A. 1988. Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, *Found. Phys. Lett.* 1, no. 1, 57–89.
- Ungar¹, A.A. 1990. The expanding Minkowski space, *Results Math.* 17, no. 3–4, 342–354.
- Ungar², A.A. 1990. Weakly associative groups, *Results Math.* 17, no. 1–2, 149–168.
- Ungar, A.A. 1991. Thomas precession and its associated grouplike structure, *Amer. J. Phys.* 59, no. 9, 824–834.
- Ungar, A.A. 1997. Thomas precession: its underlying gyrogroup axioms and their use

- in hyperbolic geometry and relativistic physics, *Found. Phys.* 27 (1997), no. 6, 881–951.
- Ungar, A.A. 1998. From Pythagoras to Einstein: the hyperbolic Pythagorean theorem, *Found. Phys.* 28, no. 8, 1283–1321.
- Ungar, A.A. 1999. The hyperbolic Pythagorean theorem in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry, *Amer. Math. Monthly* 106, no. 8, 759–763.
- Ungar¹, A.A. 2001. Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas precession, *The theory of gyrogroups and gyrovector spaces. Fundamental Theories of Physics*, 117. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
- Ungar², A.A. 2001. Hyperbolic trigonometry and its application in the Poincaré ball model of hyperbolic geometry, *Comput. Math. Appl.* 41, no. 1-2, 135–147.
- Ungar, A.A. 2005. *Analytic hyperbolic geometry, Mathematical foundations and applications.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.
- Ungar, A.A. 2008. *Analytic hyperbolic geometry and Albert Einstein’s special theory of relativity,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.
- Yang, S., Fang, A. 2006. A new characteristic of Möbius transformations in hyperbolic geometry, *J. Math. Anal. Appl.* 319, no. 2, 660–664.
- Yang, S., Fang, A., Erratum: A new characteristic of Möbius transformations in hyperbolic geometry, *J. Math. Anal. Appl.* (yayına kabul edildi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Oğuzhan DEMİREL
Doğum Yeri : Afyonkarahisar
Doğum Tarihi : 24.04.1981
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 1999.
Lisans : Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2003.
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2005.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2003-

Yayımları

1. A characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic regular gyropolygons başlıklı çalışma yayına Journal of Mathematical Analysis and Applications isimli dergide yayına kabul edilmiştir.
2. The hyperbolic Carnot theorem in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry, Novi Sad Journal of Mathematics, 38 (2008), no.2, 33-39.
3. On the relation between ordered sets and Lorentz-Minkowski distances in real inner product spaces, Acta Universitatis Apulensis (2010), 21, 151-159.