

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla BUGAY

**YARIGRUPLARIN BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİNİN SONLU
TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIGRUPLARIN BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİNİN SONLU
TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ**

Leyla BUGAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez/..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma TÜBİTAK-BİDEB Tarafından Desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere
tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARIGRUPLARIN BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİNİN SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ

Leyla BUGAY

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Hayrullah AYIK

Yıl : 2010, Sayfa:

Jüri : Doç. Dr. Hayrullah AYIK

: Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada, bazı yarıgrup yapılarının sonlu takdim edilebilirliği ile ilgili olarak yakın zamanda elde edilen bazı sonuçlar incelenmiştir. Özellikle sonlu takdimli bir monoidin herhangi bir altgrubunun ve bir M monoidinin (grubunun) M nin bir q endomorfizmi ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ nin sonlu takdim edilebilirliği hakkındaki problemler çalışılmıştır. Sonlu takdimli bir monoidin sonlu indekse sahip herhangi bir altgrubunun da monoid olarak sonlu takdimli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca M sonlu doğuraylı / takdimli bir monoid iken $BR(M, q)$ nin da sonlu doğuraylı / takdimli olduğu gösterilmiştir. Son olarak, G bir grup iken $BR(G, q)$ nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşulun $A_0 \subseteq G$ sonlu bir küme olmak üzere G nin $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ formundaki küme tarafından doğurulabilir olması olduğu ve $BR(G, q)$ nin sonlu takdim edilebilir olması için de gerek ve yeter koşulun R_0 ilişkilerin sonlu bir kümesi olmak üzere G grubunun, ilişkileri $R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i$ formunda olan takdim tarafından tanımlanabiliyor olması olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup, Monoid, Grup, Takdim, Bruck-Reilly Genişlemesi

ABSTRACT

MSc. THESIS

FINITE PRESENTABILITY OF BRUCK-REILLY EXTENSIONS OF SEMIGROUPS

Leyla BUGAY

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hayrullah AYIK

Year : 2010, Pages:

Jury : Assoc. Prof. Dr. Hayrullah AYIK

: Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this study, we survey some recent result concerning finite presentability of several semigroup constructions. Namely we study problems regarding finite presentability of an arbitrary subgroup of a monoid defined by a finite presentation; and of Bruck-Reilly extensions $BR(M, q)$ of a monoid (group) M with respect to an endomorphism q of M . It is proved that any subgroup of a finitely presented monoid with finite index is also finitely presented as a monoid. Also it is proved that if M is a finitely generated / presented monoid than $BR(M, q)$ is finitely generated / presented. Finally, it is proved that when M is a group, $BR(M, q)$ is finitely generated if and only if G can be generated by a set of the form $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$, where $A \subseteq G$ is finite; and $BR(M, q)$ is finitely presented if and only if G can be defined by a presentation with relations of the form $R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i$ for some finite set of relations R_0 .

Key Words: Semigroup, Monoid, Group, Presentation, Bruck-Reilly Extension

TEŞEKKÜR

Ç. Ü. Matematik bölümünde (lisans öğrencisi olarak) öğrenime başladığım ilk günden bu yana ve özellikle bu tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Hayrullah Ayık'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca, sonsuz sevgisi ve güveniyle beni bu günlere getiren sevgili babam Esat Tangüler ve annem Sabiha Tangüler'e, sevgili aileme, eşim Mehmet Can Bugay'a, Ç. Ü. Matematik bölümünün saygıdeğer öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma yardım, destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Son olarak da yüksek lisans yaptığım süre içerisinde aldığım burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
2.1. Yarıgruplar	3
2.2. Bağntı ve Denklik	10
2.3. Homomorfizmler	16
2.4. Kongrüanslar	17
2.5. Green Denklik Bağntıları	21
2.6. Regüler (Düzgün) Yarıgruplar	27
2.7. Basit Yarıgruplar	31
2.8. Doğuray Kümeleri	31
2.9. Yarıgrup ve Monoid Takdimleri	36
2.10. Grup Takdimleri	46
2.11. Takdim Bulmak İçin Kullanılan Bazı Yöntemler	47
2.11.1. Direkt Yöntem	47
2.11.2. Tietze Dönüşümleri	49
3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME	57
4. BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİ ve SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ	67
4.1. Bruck-Reilly Genişlemeleri	67
4.2. Bruck-Reilly Genişlemelerinin Takdimi	73
4.3. Grupların Bruck-Reilly Genişlemeleri	91
KAYNAKLAR	107
ÖZGEÇMİŞ	109

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. 1. İzomorfizm Teoremi'nin Diyagramı.....	20
Şekil 2.2. Green Denklik Bağlılıklarının Hasse Diyagramı.....	24
Şekil 2.3. Bir D -Green Denklik Sınıfı Örneği.....	26

1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi cebirin en temel dallarından biridir. “Yarıgrup” terimi ilk olarak 1904’te Monsieur l’Abbé J. A. Séguier’in “Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits” adlı kitabında yer almış, 1926 ve 1928 yıllarında A. K. Sushkevich’in bir sonlu yarıgrupun minimal idealinin yapısını belirlemesiyle gelişim sürecine başlamıştır. Bu dönemden itibaren çalışmalar hızla artmış ve nihayet 1950’li yılların sonunda yarıgrup teorisinin kendisi modern cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir. Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ile olan bağlantısı yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Bu yöntemlerden biri takdim bulma yöntemidir.

Bir yarıgrupun takdimini bulma problemi yarıgrup teorisinde çok uzun zamandır çalışılan bir konudur. Matematikçiler tarafından bu amaçla geliştirilen GAP ve MAGMA gibi bilgisayar programlarını kullanabilmek için de cebirsel yapıların (varsa) sonlu takdimlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenlerden dolayı cebirin bir alt dalı olan yarıgrupların sonlu takdim edilebilirliği başlı başına bir araştırma konusu olmuştur. 1990 yılında E. F. Robertson ile Y. Ünlü’nün geliştirdikleri bir bilgisayar programı ve bu programın geliştirilmesi sayesinde bu konuda yayınlanan çalışmalar hızla artmıştır.

Biz de bu çalışmada bazı özel yarıgrup yapılarının Bruck-Reilly genişlemelerinin sonlu takdim edilebilirliğini inceleyeceğiz.

M , birim elemanı 1_M olan bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. q^0 dönüşümünü M üzerindeki birim dönüşüm olarak alalım ve negatif olmayan tamsayılar kümesini $\mathbb{N}^0$ ile gösterelim. $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde bir ikili işlem (çarpma işlemi), her $(m, a, n), (p, b, q) \in \mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ için $r = \max\{n, p\}$ olmak üzere

$$(m, a, n) (p, b, q) = (m - n + r, (aq^{r-n})(bq^{r-p}), q - p + r)$$

şeklinde tanımlansın. $\square^0 \times M \times \square^0$ kümesi bu işlem ile birim elemanı $(0, 1_M, 0)$ olan bir monoiddir. Bu monoide M monoidinin q ile olan **Bruck-Reilly genişlemesi** denir ve $BR(M, q)$ ile gösterilir.

Bu yapı Bruck, Reilly ve Munn tarafından oluşturulan yapıların genelleştirilmiş halidir ve tersinir yarıgrup teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.

Bruck-Reilly genişlemelerinin inşa edilme süreci, Bruck'un 1958'de her S yarıgrupunun bir basit monoid içerisine gömülebileceğini göstermesiyle başlamıştır. Bruck, $\square^0 \times S^1 \times \square^0$ kümesi üzerinde S^1 in her elemanını S^1 in birim elemanına eşleyen q homomorfizmi ile yukarıdaki çarpma işlemini tanımladı ve bu yapının S ye izomorfik olan bir altarıgrubu içeren (bu altarıgrup $\{(0, s, 0) : s \in S\}$ dir) bir basit monoid olduğunu gösterdi. Elde edilen bu yapıya **Bruck genişlemesi** denir.

1966 yılında Reilly aynı yapıyı bir G grubu üzerinde ve q homomorfizminin G üzerinde herhangi bir endomorfizm olmasına izin vererek tekrar inşa etti. Bu yapıya ise **Reilly genişlemesi** denir. Reilly bu yapıyı kullanarak, elde edilen monoidin bir katlı-basit w-yarıgrup olduğunu ve tersine bir katlı-basit w-yarıgrupun da birimlerinin oluşturduğu altgrupunun (şimdiki adlandırılışıyla) Bruck-Reilly genişlemesi olduğunu gösterdi.

1970'de Munn bu genişlemeleri genelleştirerek Bruck-Reilly genişlemesi terimini ortaya koydu ve bunu, herhangi bir M monoidinin M den M nin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlanan q homomorfizmi ile olan genişlemesi olarak tanımladı.

Biz "Bruck-Reilly genişlemesi" terimini, q homomorfizminin monoid üzerindeki herhangi bir endomorfizm olduğunu vurgulamak istediğimizde kullanacağız. Ayrıca, "Munn-Bruck-Reilly genişlemesi" terimini de q homomorfizminin, monoidden monoidin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlı olan homomorfizm olduğunu vurgulamak istediğimizde kullanacağız.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, yarıgrup teorisinde yer alan ve ileride kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Yarıgruplar

S boş olmayan bir küme olmak üzere $S \times S$ den S ye tanımlı bir “ m ” fonksiyonuna S üzerinde bir (kapalı) **ikili işlem** denir. Her $x, y \in S$ için x ve y elemanlarına uygulanan bu ikili işlem xmy şeklinde gösterilir. Eğer “ m ”, S üzerinde bir ikili işlem ise (S, m) ikilisine bir **grupoid** denir.

(S, m) bir grupoid olsun. Eğer “ m ” ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$xm(ymz) = (xmy)mz$$

oluyorsa (S, m) grupoidine bir **yarıgrup** denir.

Biz bu çalışmamızda genellikle “ikili işlem” yerine “çarpma işlemi” diyeceğiz ve bu işlemi “ $\cdot$ ” ile göstereceğiz. Eğer çarpma işleminin ne olduğu içerikten belli ise $(S, \cdot)$ yerine S ve $x \cdot y$ yerine de xy yazacağız.

Tanım 2.1.1: Bir S yarıgrubu değişme özelliğine sahip ise yani $\forall x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa S yarıgrubuna **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.2: S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = e$ oluyor ise e ye S nin bir **sol sıfır elemanı** ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = e$ oluyor ise e ye S

nin bir **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise e ye S nin bir **sıfır elemanı** denir. Aşağıdaki önermeden dolayı sıfır eleman “0” ile gösterilir.

Önerme 2.1.3: Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= 00' && (0, \text{ sıfır eleman olduğundan}) \\ &= 0' && (0', \text{ sıfır eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

dır. ■

Tanım 2.1.4: S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir **sol birim elemanı** ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir **sağ birim elemanı** denir. Eğer $e \in S$ hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin bir **birim elemanı** denir ve genellikle 1_s veya kısaca 1 ile gösterilir.

Önerme 2.1.5: Bir S yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir.

İspat: 1 ve $1'$, S nin iki birim elemanı olsun. O halde

$$\begin{aligned} 1 &= 11' && (1', \text{ birim eleman olduğundan}) \\ &= 1' && (1, \text{ birim eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

dir. ■

Tanım 2.1.6: S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir.

S bir yarıgrup olsun. O zaman

$$S^1 = \begin{cases} S & ; S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\} & ; S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin, üzerinde

$$\forall x, y \in S^1 \text{ için } xy = \begin{cases} xy & ; x \neq 1, y \neq 1 \\ x & ; y = 1 \\ y & ; x = 1 \\ 1 & ; x = y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir monoid olduğu açıktır ve bu monoide S **ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

Tanım 2.1.7: S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = ee = e$$

oluyor ise e ye S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Eğer S yarıgrupunun tüm elemanları birer idempotent eleman yani $E(S) = S$ ise S ye bir **band** denir. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise S ye bir **yarılatis** denir.

Örnek 2.1.8: Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$, üzerlerinde tanımlanan bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birer monoiddir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bilinen toplama işlemi ile bir yarıgrup ve bilinen çarpma işlemi ile birim elemanı 1 olan bir monoiddir.

$\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z} \cup \{0\}$ kümesi tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bilinen toplama işlemi ile birim elemanı 0 olan bir monoiddir.

Örnek 2.1.9: $\mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}^0\}$ kümesi $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ ve $r = \max\{n, p\}$ olmak üzere

$$(m, n)(p, q) = (m - n + r, q - p + r)$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile birim elemanı $(0, 0)$ olan bir monoiddir. Bu monoide **iki-devirli (bicyclic) monoid** denir.

Tanım 2.1.10: S bir yarıgrup olsun. Eğer

$$\forall x \in S \text{ için } Sx = S \text{ ve } xS = S$$

oluyorsa S ye bir **grup** denir. Bu tanım çok kullanılan bir tanım değildir ve genellikle bu tanıma denk olan aşağıdaki tanım kullanılır.

S bir yarıgrup olsun.

$$\left. \begin{array}{l} (\exists e \in S), (\forall s \in S) \quad es = s \\ (\forall s \in S), (\exists s^{-1} \in S) \quad s^{-1}s = e \end{array} \right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir. Bu tanım da aslında grup teorisinde kullanılan aşağıdaki tanıma denktir.

S bir yarıgrup olsun.

$$\left. \begin{array}{l} (\exists e \in S), (\forall s \in S) \quad es = se = s \\ (\forall s \in S), (\exists s^{-1} \in S) \quad s^{-1}s = ss^{-1} = e \end{array} \right\}$$

koşulları sağlanıyorsa S ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı** ve $s^{-1} \in S$ ye s elemanının **tersi** denir.

Sadece birim elemandan oluşan $\{1\}$ kümesi bir grup olup bu gruba **aşikâr grup** denir.

Tanım 2.1.11: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T , S deki çarpma işlemine göre kapalı yani $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$ ($T^2 \subseteq T$) oluyor ise T ye S nin bir **altyarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Örneğin; $SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ dir. S de bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ ve S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ dir. Bu altyarıgruplara **aşikâr altyarıgruplar** ve bunların dışındaki altyarıgruplara **öz altyarıgruplar** denir.

S bir yarıgrup ve T de S nin bir altyarıgrubu olsun. Eğer T , S deki çarpma işlemiyle bir monoid oluyorsa T ye S nin bir **altmonoidi**, eğer bir grup oluyorsa T ye S nin bir **altgrubu** denir. Benzer şekilde bir monoidin altmonoidi, bir monoidin altgrubu ve bir grubun altgrubu kavramları tanımlanabilir.

Tanım 2.1.12: S bir yarıgrup ve $G \neq S$ de S nin bir altgrubu olsun. Eğer S nin $G \subseteq H \subseteq S$ olacak şekilde bir H altgrubu mevcut iken $H = G$ veya $H = S$ olmak zorunda kalıyor ise G ye S nin **maksimal altgrubu** denir.

Tanım 2.1.13: S , birim elemanı 1 olan bir monoid ve $x \in S$ olsun. Eğer $yx = 1$ olacak şekilde bir $y \in S$ varsa x elemanına S nin bir **sol birimi** ve $xz = 1$ olacak şekilde bir $z \in S$ varsa x elemanına S nin bir **sağ birimi** denir.

$x \in S$ hem sol hem de sağ birim ise $yx = 1$ ve $xz = 1$ olacak şekilde $y, z \in S$ vardır. Bu durumda

$$y = y1 = y(xz) = (yx)z = 1z = z$$

olur.

Eğer $x \in S$ hem sol hem de sağ birim ise x elemanına S nin bir **birimi** denir ve S monoidinin tüm birimlerinin kümesi $U(S)$ ile gösterilir. $U(S)$ nin S nin bir altgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. Bu gruba S nin **birimleri grubu** denir.

$$U(S) = \{x \in S : \exists y \in S \text{ için } xy = yx = 1\}$$

Tanım 2.1.14: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $sa \in I$ yani $SI \subseteq I$ ise I ya S nin bir **sol ideali** ve eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$ yani $IS \subseteq I$ ise I ya S nin bir **sağ ideali** denir. Eğer I , S nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya S nin bir **ideali** denir ve $I \leq S$ ile gösterilir.

Örneğin; $SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ dir. S de bir sıfır eleman varsa $\{0\}S = \{0\} \subseteq \{0\}$ ve $S\{0\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ olup $\{0\} \leq S$ dir. Bu ideallere **aşikâr idealler** denir.

S yarıgrupunun $I \neq S$ ve $I \neq \{0\}$ olacak şekilde bir ideali varsa bu ideale **öz ideal** denir.

Dikkat edilirse, her ideal bir altarıgruptur.

Tanım 2.1.15: S ve T iki yarıgrup olsun. $S \times T = \{(s, t) : s \in S, t \in T\}$ kümesine S ile T nin **kartezyen çarpımı** denir. $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpım kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(s, t)(s', t') = (ss', tt')$$

çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S ile T nin **direkt çarpımı** denir.

Tanım 2.1.16: G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. Herhangi bir $x \in G$ için tanımlanan $xH = \{xh : h \in H\}$ ve $Hx = \{hx : h \in H\}$ kümelerine sırasıyla

H nin G deki **sol koseti** ve **sağ koseti** denir. Ayrıca, H nin G deki tüm sol kosetlerinin kümesi $sol(H)$ ve sağ kosetlerinin kümesi $sağ(H)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.17: G bir grup, $H \leq G$ ve $x, y \in G$ olsun. O halde

- (i) $x \in xH$.
- (ii) $xH = H \Leftrightarrow x \in H$.
- (iii) $xH = yH \Leftrightarrow x \in yH$.
- (iv) $xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$.
- (v) ya $xH = yH$ ya da $xH \cap yH = \emptyset$ dir.

İspat: Karakaş (2008), Ders 7, Önerme 2'ye bakınız. ■

Tanım 2.1.18: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G nin ikili işleminin $sol(H)$ kümesine taşınabiliyor olması demek $\forall xH, yH \in sol(H)$ için

$$(xH)(yH) = (xy)H$$

şeklinde tanımlanan işlemin iyi tanımlı yani

$$xH = aH, yH = bH \Rightarrow (xy)H = (ab)H$$

koşulunu sağlıyor olup bir ikili işlem olması demektir.

Teorem 2.1.19: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (i) G nin ikili işlemi $sol(H)$ kümesine taşınabildirir.
- (ii) $\forall x \in G$ için $xH = Hx$ dir.
- (iii) $\forall x \in G$ için $xHx^{-1} = H$ dir.

$$(iv) \quad \forall x \in G \text{ için } xHx^{-1} \subseteq H \text{ dir.}$$

İspat: Karakaş (2008), Ders 8, Teorem 1’e bakınız. ■

Tanım 2.1.20: G bir grup ve $N \leq G$ olmak üzere Teorem 2.1.19’un denk olan önermelerinden biri sağlanıyorsa N ye G nin bir **normal altgrubu** denir ve $N \leq G$ ile gösterilir.

G değişmeli bir grup iken her altgrubu bir normal altgruptur.

$N \leq G$ iken N nin her sol koseti aynı zamanda bir sağ koset olduğundan “sağ koset” ve “sol koset” yerine kısaca “koset” denir. Bu durumda N nin G deki tüm kosetlerinin ailesi

$$G/N = \{xN : x \in G\}$$

ile gösterilir. Bu küme $\forall xN, yN \in G/N$ için

$$(xN)(yN) = (xy)N$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birim elemanı N olan bir grup olup bu işleme **koset çarpımı** ve bu gruba da G nin N ile olan **bölüm grubu** denir.

Tanım 2.1.21: G bir grup ve $R \subseteq G$ olsun. G nin R yi içeren en küçük normal altgrubuna R **nin normal kapanışı** denir ve $N(R)$ ile gösterilir.

2.2. Bağntı ve Denklik

X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere $X \times Y$ in her bir r altkümesine X **ten** Y **ye bir bağntı** ve $X \times X$ in her bir r altkümesine X **üzerinde bir bağntı** denir. X üzerindeki tüm bağntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir. Yani

$$B(X) = \{r : r \subseteq X \times X\}$$

olur. r , X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x, y) \in r$ yerine xry de yazabiliriz.

$\emptyset$, $\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi, X üzerinde birer bağıntıdır. Bu bağıntılara sırasıyla **boş bağıntı**, **birim bağıntı** ve **evrensel bağıntı** denir. Ayrıca, $\forall r \in B(X)$ olmak üzere

$$r^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in r\} \subseteq X \times X$$

bağıntısına r nun **ters bağıntısı (tersi)** ve

$$\text{dom } r = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in r\};$$

$$xr = \{y \in X : (x, y) \in r\}; \text{ ve}$$

$$\text{im } r = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in r\}$$

kümelerine de sırasıyla r bağıntısının **tanım kümesi**, $x \in X$ in r **altındaki görüntü kümesi** ve r bağıntısının **görüntü kümesi** denir.

Tanımlar dikkatle incelenirse $a, b \in B(X)$ için

- $a \subseteq b \Rightarrow \text{dom } a \subseteq \text{dom } b$ ve $\text{im } a \subseteq \text{im } b$;
- $(a^{-1})^{-1} = a$;
- $a \subseteq b \Rightarrow a^{-1} \subseteq b^{-1}$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.2.1: X boş olmayan bir küme olsun ve $r, s \in B(X)$ olmak üzere $B(X)$ üzerinde bir çarpma işlemi

$$r \circ s = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in r \text{ ve } (z, y) \in s\}$$

şeklinde tanımlansın. $B(X)$ bu işlemle bir yarıgruptur ve bu yarıgruba **(tüm) bağıntılar yarıgrubu** denir. Ayrıca $B(X)$ in, birim elemanı Δ_X olan bir monoid olduğu da kolayca gösterilebilir.

$a, b, g, a_1, \mathbf{K}, a_n \in B(X)$ olsun. O halde

- $a \subseteq b \Rightarrow a \circ g \subseteq b \circ g$ ve $g \circ a \subseteq g \circ b$ ve
- $(a_1 \circ a_2 \circ \mathbf{L} \circ a_n)^{-1} = a_n^{-1} \circ \mathbf{K} \circ a_2^{-1} \circ a_1^{-1}$

dır.

Tanım 2.2.2: $r \in B(X)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|xr| \leq 1$ ise r ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** ve $\forall x \in X$ için $|xr| = 1$ ise r ya X üzerinde bir **dönüşüm (fonksiyon)** denir.

$r \in B(X)$ bir (kısmi) dönüşüm ve $(x, y) \in r$ ise genel olarak $(x)r = y$ veya $xr = y$ şeklinde gösterilir.

$r \in B(X)$ olsun. $A \subseteq X$ olmak üzere $\forall a \in A$ için

$$(a)r' = (a)r$$

şeklinde tanımlanan $r': A \rightarrow X$ dönüşümüne r nun A kümesine **kısıtlanması** denir ve $r|_A$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde, $X \subseteq A$ olmak üzere $\forall a \in A$ için

$$(a)r'' = \begin{cases} (a)r & ; a \in X \text{ ise} \\ (a)r' & ; a \notin X \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $r'': A \rightarrow A$ dönüşümüne de r nun A kümesine **genişlemesi** veya r dönüşümünü A kümesine **geren dönüşüm** denir.

Tanım 2.2.3: X boş olmayan bir küme ve r , X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $\Delta_X \subseteq r$ ise r ya **yansımali bağıntı**;
- $r^{-1} = r$ ise r ya **simetrik bağıntı**;
- $r \cap r^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise r ya **ters-simetrik bağıntı**; ve
- $r \circ r \subseteq r$ ise r ya **geçişmeli bağıntı**

denir.

Eğer r bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise r ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

Eğer $\{r_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise kolayca gösterilebilir ki, $\bigcap_{i \in I} r_i$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

r , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$xr = \{y \in X : (x, y) \in r\}$$

kümesine bir **denklik sınıfı** ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/r = \{xr : x \in X\}$$

kümesine de X in r ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

Önerme 2.2.4: r , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $xr, yr \in X/r$ için ya $xr \cap yr = \emptyset$ ya da $xr = yr$ dur.

İspat: Karakaş (2008), Ders 1, Teorem1'e bakınız. ■

Tanım 2.2.5: r , X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } (x)r^* = xr$$

olarak tanımlanan $r^* : X \rightarrow X/r$ dönüşümü örten bir dönüşüm olup bu dönüşüme X üzerindeki **doğal dönüşüm** denir.

Tanım 2.2.6: X, Y boş olmayan iki küme olsun. f , X ten Y ye bir dönüşüm olmak üzere

$$f \circ f^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : xf = yf\}$$

şeklinde tanımlanan küme X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya f **nin çekirdeği** denir ve $\ker f = f \circ f^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7: X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $R \subseteq X \times X$ olup X üzerinde R yi içeren en az bir denklik bağıntısı vardır. X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının arakesiti de R yi içeren bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına R **tarafından doğurulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir.

$$R^e = \mathbf{I} \{ r : R \subseteq r \text{ ve } r, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı} \}$$

$$= \mathbf{I}_{\substack{R \subseteq r, \\ r, X \text{ üzerinde} \\ \text{bir denklik bağıntısı}}} r$$

Dikkat edilirse R^e , R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Ayrıca

- $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$;
- R bir denklik bağıntısı $\Rightarrow R^e = R$;
- $R^e = (R^{-1})^e$

olur.

Tanım 2.2.8: X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde yansılmalı bir bağıntı yani $\Delta_X \subseteq R$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R = \Delta_X \circ R &\subseteq R \circ R \Rightarrow R \subseteq R^2; \\ R^2 = \Delta_X \circ R^2 &\subseteq R \circ R^2 \Rightarrow R^2 \subseteq R^3; \end{aligned}$$

olup bu şekilde devam edilir ise

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \mathbf{L} \subseteq R^n \subseteq \mathbf{L}$$

olur. Bu durumda X üzerinde R^∞ bağıntısı

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.2.9: X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki herhangi bir R yansılmalı bağıntısı için tanımlanan R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4.8'e bakınız. ■

Tanım 2.2.10: X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde yansılmalı bir bağıntı olsun. O zaman $R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$ olarak tanımlanan R^∞ bağıntısına R nin **geçişmeli kapanışı** denir.

Önerme 2.2.11: X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$$

olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.9'a bakınız. ■

2.3. Homomorfizmler

S ve T iki yarıgrup ve f de S den T ye bir dönüşüm ($f : S \rightarrow T$) olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için

$$(xy)f = (x)f(y)f$$

oluyor ise f ye S den T ye bir **homomorfizm** denir.

$f : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere eğer f bire-bir ise f ye bir **monomorfizm**, eğer f örten ise f ye bir **epimorfizm** ve eğer f hem bire-bir hem de örten ise f ye bir **izomorfizm** denir. Başka bir ifade ile; $1_{S \rightarrow S} : S \rightarrow S$ ve $1_{T \rightarrow T} : T \rightarrow T$ birim dönüşümler olmak üzere eğer $ff^{-1} = 1_{T \rightarrow T}$ ve $f^{-1}f = 1_{S \rightarrow S}$ olacak şekilde bir $f^{-1} : T \rightarrow S$ homomorfizmi varsa f ye bir **izomorfizm** ve f^{-1} e de f nin **tersi** denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm varsa S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir. Ayrıca eğer f , S den S ye bir homomorfizm ise f ye bir **endomorfizm** ve eğer f , S den S ye bir izomorfizm ise f ye bir **otomorfizm** denir.

S ve T iki monoid ve $f : S \rightarrow T$ bir (yarıgrup) homomorfizm olsun. Eğer 1_S , S nin birim elemanını ve 1_T , T nin birim elemanını olmak üzere

$$(1_S)f = 1_T$$

oluyor ise f ye bir **monoid homomorfizmi** denir.

Yukarıdaki diğer tanımlar monoidler için benzer şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 2.3.1: S ve T iki yarıgrup, ve $f : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. O zaman

$$\ker f = \{(x, y) \in S \times S : xf = yf\}$$

$$\text{im} f = Sf = \{xf : x \in S\}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla f nin **çekirdek kümesi** ve **görüntü kümesi** denir.

$\text{im} f \subseteq T$ olduğu açıktır. Ayrıca $x, y \in S$ olmak üzere $xf, yf \in \text{im} f$ için

$$(xf)(yf) = (xy)f \in \text{im} f$$

olup $\text{im} f \leq T$ dir.

Tanım 2.3.2: S ve T iki yarıgrup ve $a : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. Eğer $\forall j \in \mathbb{N}$ için $a^{k+j} = a^k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ varsa a homomorfizmine **sonlu dereceli homomorfizm** denir.

2.4. Kongrüanslar

S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\forall a \in S$ ve $\forall (s, t), (s', t') \in R$ için

- $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına **sol uyumlu**;
- $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına **sağ uyumlu**;

- $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına **uyumlu**

bağıntı denir. Ayrıca, sol uyumlu bir denklik bağıntısına **sol kongrüans**, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına **sağ kongrüans** ve uyumlu bir denklik bağıntısına **kongrüans** denir.

S bir yarıgrup ve $\{r_i : i \in I\}$ S üzerindeki kongrüansların bir ailesi ise kolayca gösterilebilir ki $\prod_{i \in I} r_i$ de S üzerinde bir kongrüanstır.

Önerme 2.4.1: S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.1'e bakınız. ■

Tanım 2.4.2: S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan kolayca görülüyor ki R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin $S \times S$ nin bir altyarı grubu olmasıdır. O halde $S \times S$ nin alt yarı grubu olan Δ_S ve $S \times S$, S üzerinde birer kongrüanstır. Bu kongrüanslara sırasıyla S nin **aşikâr kongrüansı** ve **evrensel kongrüansı** denir.

Tanım 2.4.3: S bir yarıgrup ve r , S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin r ile elde edilen bölüm kümesi S/r üzerinde bir çarpma işlemi $\forall xr, yr \in S/r$ için

$$(xr)(yr) = (xy)r$$

şeklinde tanımlansın. S/r , bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin r ile elde edilen **bölüm yarı grubu** denir.

Kolayca görülüyor ki, eğer S birim elemanı 1 olan bir monoid ise S/r da birim elemanı $1r$ olan bir monoiddir.

Tanım 2.4.4: S bir yarıgrup ve r , S üzerinde bir kongrüans olsun.

$$r^* : S \rightarrow S/r$$

$$a \mathbf{a} ar$$

şeklinde tanımlanan r^* , örten bir homomorfizm olup bu homomorfizme **doğal homomorfizm** denir.

Önerme 2.4.5: S, T iki yarıgrup ve $f : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

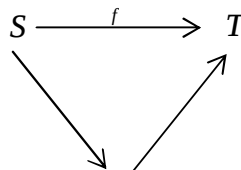
$$\ker f = f \circ f^{-1} = \{(x, y) \in S \times S : xf = yf\},$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: Howie (1995) , Theorem 1.5.2'ye bakınız. ■

Teorem 2.4.6: (1. İzomorfizm Teoremi) S, T iki yarıgrup ve $f : S \rightarrow T$ örten bir homomorfizm ise $S/\ker f \cong T$ dir.

İspat: $a : S/\ker f \rightarrow T$ dönüşümü $(s \ker f) \mathbf{a} sf$ olarak tanımlansın.



$$(\ker f)^* \quad a$$

$$S/\ker f$$

Şekil 2.1. 1. İzomorfizm Teoreminin Diyagramı

Bu dönüşümün $ima = imf$ olacak şekilde bir homomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca f örten olduğundan $ima = imf = T$ olup a da örten bir homomorfizmdir.

Her $x, y \in S$ için $(x \ker f)a = (y \ker f)a$ olsun. Bu durumda $xf = yf$ olup $(x, y) \in \ker f$ ve buradan $y \in x \ker f$ dir. Ayrıca $y \in y \ker f$ olup Önerme 2.2.4'ten $x \ker f = y \ker f$ dir. O halde a bire-birdir. ■

Tanım 2.4.7: S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq S \times S$ olup S üzerinde R yi içeren en az bir kongrüans vardır. S üzerinde R yi içeren tüm kongrüansların arakesiti de R yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa R tarafından doğurulan kongrüans denir ve $R^\#$ ile gösterilir.

$$R^\# = \mathbf{I} \{ r : R \subseteq r \text{ ve } r, S \text{ üzerinde bir kongrüans} \}$$

$$= \mathbf{I}_{\substack{R \subseteq r, \\ r, S \text{ üzerinde bir kongrüans}}} r$$

Tanımdan kolayca görülüyor ki $R^\#$, R yi içeren en küçük kongrüanstır.

Tanım 2.4.8: S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere R^c kümesi

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda kolayca görülüyor ki R^c , R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır. Ayrıca Q da S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- $R \subseteq Q \Rightarrow R^c \subseteq Q^c$;
- $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$;
- $(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$;
- R bir kongrüans ise $R^c = R$

dir.

Teorem 2.4.9: S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere $R^\# = (R^c)^e$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.8'e bakınız. ■

2.5. Green Denklik Bağıntıları

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. S nin a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri sırasıyla

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\}, \text{ ve} \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

olur. Bunun yardımı ile S üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} L &= \{(a, b) \in S \times S : S^1a = S^1b\}, \\ R &= \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}, \text{ ve} \end{aligned}$$

$$J = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

bağıntılarına sırasıyla **sol-Green bağıntısı** (L -Green), **sağ-Green bağıntısı** (R – Green) ve **Green bağıntısı** (J –Green) denir. Bu bağıntıların birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.5.1: S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

- (i) $a L b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- (ii) $a R b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- (iii) $a J b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: (i) $(\Rightarrow)$ $a L b \Rightarrow S^1 a = S^1 b \Rightarrow a \in S^1 b$ olup $a = xb$ olacak şekilde $\exists x \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $b = ya$ olacak şekilde $y \in S^1$ olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ var olsun. $S^1 a = S^1 xb \subseteq S^1 b$ ve $S^1 b = S^1 ya \subseteq S^1 a$ olup $S^1 a = S^1 b$ ve buradan $(a, b) \in L$ dir.

Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 2.5.2: S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki sol-Green bağıntısı L ve sağ-Green bağıntısı R değişmeli yani $L \circ R = R \circ L$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

Tanım 2.5.3: S bir yarıgrup olsun. L, R sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki L -Green ve R -Green bağıntıları olmak üzere

$$H = L \cap R$$

olarak tanımlanan denklik bağıntısına **H -Green bağıntısı** ve S yarıgrubu üzerinde L ve R bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına da **D -Green bağıntısı** denir. O halde

$$D = L \vee R = (L \cup R)^e$$

olur. Dikkat edilirse L ile R simetrik ve yansılalı iki bağıntı olduğundan $(L \cup R) = (L \cup R)^{-1}$ ve $\Delta_S \subseteq L \cup R$ olup $(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup \Delta_S = L \cup R$ dir. Ayrıca $L \subseteq L \circ R$, $R \subseteq L \circ R$ ve $L \circ R = R \circ L$ olduğundan

$$\begin{aligned} (L \cup R) \circ (L \cup R) &= (L \circ L) \cup (L \circ R) \cup (R \circ L) \cup (R \circ R) \\ &= L \cup (L \circ R) \cup (L \circ R) \cup R \\ &= L \circ R \end{aligned}$$

ve

$$(L \cup R) \cup (L \circ R) = L \cup [R \cup (L \circ R)] = L \circ R$$

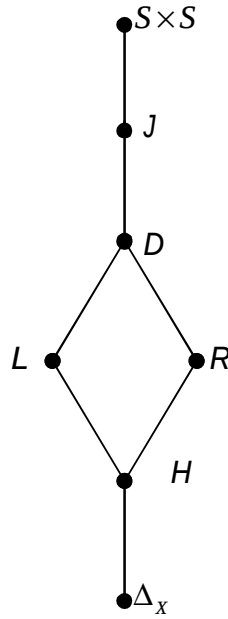
olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\forall n \geq 2$ için $(L \cup R)^n = L \circ R$ olur. O halde

$$\begin{aligned} D &= (L \cup R)^e \\ &= [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^\infty \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [(L \cup R) \cup (L \cup R)^{-1} \cup 1_S]^n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cup R)^n \\ &= (L \cup R) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (L \cup R)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (L \cup R) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} L \circ R \right) \\
&= (L \cup R) \cup L \circ R \\
&= L \circ R
\end{aligned}$$

dir.

Bir S yarıgrubu üzerindeki L, R, J, H ve D Green denklik bağıntıları için $\Delta_x \subseteq H \subseteq L, R \subseteq D \subseteq J \subseteq S \times S$ olup aralarındaki bu ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir. Bu diyagrama Hasse Diyagramı denir.



Şekil 2.2. Green Denklik Bağlıntılarının Hasse Diyagramı

Önerme 2.5.4: G bir grup ise $L=R=J=H=D=G \times G$ olur.

İspat: $\forall a, b \in G$ için

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$

$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

olup $x = ab^{-1} \in G$ ve $y = ba^{-1} \in G$ alınırsa $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in G$ bulunmuş olur. O halde $\forall a, b \in G$ için $a L b$ olup $L = G \times G$ dir. Benzer şekilde $R = G \times G$ olup $L = R = J = H = D = G \times G$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.5.5: S değişmeli bir yarıgrup ise $L = R = H = D$ olur.

İspat: $a L b$ olsun. O halde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli olduğundan aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ay$ olup $a R b$ olur. Böylece $L \subseteq R$ olduğu görülür. Benzer şekilde $R \subseteq L$ olup $L = R = H = D$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.6: S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki J, D, L, R, H Green denklik bağıntılarına göre elde edilen denklik sınıflarının kümeleri sırasıyla $S/J, S/D, S/L, S/R, S/H$ ve $a \in S$ için a yı içeren J, D, L, R, H Green denklik sınıfları sırasıyla J_a, D_a, L_a, R_a, H_a ile gösterilir.

Eğer J, D, L, R, H Green denklik bağıntılarının S yarıgrubu üzerinde tanımlı olduğu içerikten belli olmuyor ise bu denklik bağıntıları sırasıyla J_s, D_s, L_s, R_s, H_s ile gösterilir.

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$H_a \subseteq L_a \subseteq D_a,$$

$$H_a \subseteq R_a \subseteq D_a$$

$$H_a = L_a \cap R_a$$

olduğu ve D -Green denklik bağıntısının tanımından dolayı da

$$a D b \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. O halde bir D -Green denklik sınıfı D , ayrık L -Green denklik ve R -Green denklik sınıflarının birleşimidir. Bu yüzden Clifford ve Preston bir D sınıfını, her satırı bir R -sınıfını, her sütunu bir L -sınıfını ve her hücresi de bir H -sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu olarak düşünmüşlerdir.

Da		La			
Ra		Ha			

Şekil 2.3. Bir D -Green Denklik Sınıfı Örneği

Teorem 2.5.7: (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

(i) Eğer $(a, b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$r_s : L_a \rightarrow L_b, \quad x \mathbf{a} xs,$$

$$r_t : L_b \rightarrow L_a, \quad y \mathbf{a} yt$$

şeklinde tanımlanan r_s ve r_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca r_s , L_a daki her bir H -sınıfını L_b de bu H -sınıfının bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıfına eşler. Benzer şekilde r_t de L_b deki her bir H -sınıfını L_a da bu H -sınıfının bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıfına eşler.

(ii) Eğer $(a, b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ var olup

$$l_s : R_a \rightarrow R_b, \quad x \mathbf{a} sx,$$

$$l_t : R_b \rightarrow R_a, \quad y \mathbf{a} ty$$

şeklinde tanımlanan l_s ve l_t dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümdür. Ayrıca l_s , R_a daki her bir H -sınıfını R_b de bu H -sınıfının bulunduğu

L -sınıfındaki H -sınıfına eşler. Benzer şekilde l_i de R_b deki her bir H -sınıfını R_a da bu H -sınıfının bulunduğu L -sınıfındaki H -sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'ye bakınız. ■

Sonuç 2.5.8: H_a, H_b aynı D -sınıfında iki H -sınıfı ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

Sonuç 2.5.9: S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir H -sınıfı ise $H^2 \cap H = \emptyset$ veya $H^2 = H$ olur. Ayrıca $H^2 = H$ olduğunda H, S nin bir altgrubudur.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.2.5'e bakınız. ■

Sonuç 2.5.10: S bir yarıgrup ve H, S de bir H -sınıfı olsun. Eğer H bir idempotent eleman içeriyor ise S nin bir altgrubudur. ■

Sonuç 2.5.11: S de bir H -sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerir. ■

2.6. Regüler (Düzgün) Yarıgruplar

S bir yarıgrup olsun. Eğer bir $a \in S$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa a elemanına S nin bir **regüler elemanı** denir. Eğer S nin her elemanı regüler ise S ye bir **regüler yarıgrup** denir.

Örneğin; S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman ise e bir regüler elemandır. Ayrıca, her grup bir regüler yarıgruptur.

Önerme 2.6.1: S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise L_a ve R_a sınıflarının her elemanı regülerdir.

İspat: S bir yarıgrup, $a \in S$ bir regüler eleman olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Herhangi bir $b \in L_a$ yani $(a, b) \in L$ alalım. O zaman $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ mevcut olup

$$b(xt)b = bx(tb) = bxa = saxa = s(axa) = sa = b$$

olduğundan $b \in L_a$ regülerdir.

Benzer şekilde $\forall c \in Ra$ elemanının da regüler olduğu gösterilebilir. ■

Sonuç 2.6.2: S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer a bir regüler eleman ise D_a nın her elemanı da regülerdir. ■

Sonuç 2.6.2'den kolayca görülüyor ki bir D -Green denklik sınıfı D nin ya hiç regüler elemanı yoktur ya da tüm elemanları regülerdir. D nin tüm elemanları regüler ise D ye **regüler D -sınıfı** denir.

Önerme 2.6.3: Regüler bir D -sınıfında her L -sınıfı ve her R -sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir.

İspat: D bir regüler D -sınıfı ve $a \in D$ olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Bu durumda

$$(xa)(xa) = x(axa) = xa$$

$$(ax)(ax) = (axa)x = ax$$

olup xa ve ax birer idempotent elemandır. Ayrıca

$$a(xa) = a \text{ ve } x(a) = xa;$$

$$(ax)a = a \text{ ve } (a)x = ax$$

olup bu eşitliklerden sırasıyla $xa \in L_a$ ve $ax \in R_a$ yani $xa \in L_a$ ve $ax \in R_a$ olduğu görülür. ■

Sonuç 2.6.4: Regüler bir D -sınıfı en az bir tane idempotent eleman içerir. ■

Önerme 2.6.5: S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman olsun. O halde e , R_e nin bir sol birim elemanı ve L_e nin bir sağ birim elemanıdır.

İspat: e bir idempotent eleman ve $a \in R_e$ olsun. O halde $a = ex$ olacak şekilde $x \in S^1$ mevcut olup

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

olur. Benzer şekilde, $b \in L_e$ için $be = b$ olduğu da gösterilebilir. ■

Tanım 2.6.6: S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere eğer $axa = a$ ve $xax = x$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa x elemanına a nın bir **tersi** denir ve a nın tüm terslerinin kümesi $V(a)$ ile gösterilir.

$$V(a) = \{x \in S : axa = a, xax = x\}$$

Eğer $e \in S$ bir idempotent eleman ise $eee = e$ olup $e \in V(e)$ dir.

Önerme 2.6.7: S bir yarıgrup olmak üzere $a \in S$ nin bir tersinin var olması için gerek ve yeter koşul $a \in S$ nin regüler olmasıdır.

İspat: $a \in S$ nin bir tersi varsa aynı zamanda regüler olduğu tanımdan kolayca görülüyor. Tersine; $a \in S$ regüler iken a nın bir tersinin var olduğunu gösterelim. $a \in S$ regüler iken $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ var olup $y = xax$ olarak alırsak

$$aya = a(xax)a = (axa)xa = axa = a,$$

$$yay = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = y$$

olduğundan y, a nın bir tersi olur. ■

Teorem 2.6.8: S bir yarıgrup, D bir D -sınıfı ve $a \in D$ olsun.

- (i) $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ dir. Ayrıca $R_a \cap L_{a'}$ ve $R_{a'} \cap L_a$ H -sınıfları sırasıyla aa' ve $a'a$ idempotent elemanlarını içerir.
- (ii) $b \in D$ için $R_a \cap L_b$ ve $R_b \cap L_a$ H -sınıfları sırasıyla e ve f idempotent elemanlarını içeriyor olsunlar. O halde $aa' = e$ ve $a'a = f$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ vardır. Ayrıca $a' \in H_b$ dir.
- (iii) a nın birden fazla tersini içeren H -sınıfı yoktur.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.3.4'e bakınız. ■

Önerme 2.6.9: S bir regüler yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- (i) $a L b \Leftrightarrow a'a = b'b$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.
- (ii) $a R b \Leftrightarrow aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.
- (iii) $a H b \Leftrightarrow a'a = b'b$ ve $aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.4.1'e bakınız. ■

2.7. Basit Yarıgruplar

S , sıfır elemansız bir yarıgrup ve S nin kendisi dışında başka ideali yok ise S ye bir **basit yarıgrup** denir.

S , sıfır elemanlı (ve sıfırın dışında en az bir başka elemanı olan) bir yarıgrup olsun. Eğer S nin $\{0\}$ ile kendisi dışında başka ideali yok ve $S^2 \neq \{0\}$ ise S ye bir **0-basit yarıgrup** denir.

Önerme 2.7.1: S , sıfır elemanlı bir yarıgrup iken S nin 0-basit yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in S \setminus \{0\}$ için $SaS = S$ olması ve bunun içinde gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in S \setminus \{0\}$ için $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ elemanlarının var olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 3.1.1'e bakınız. ■

Sonuç 2.7.2: S , sıfır elemansız bir yarıgrup iken S nin bir basit yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in S$ için $SaS = S$ olması ve bunun içinde gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in S$ için $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ elemanlarının var olmasıdır. ■

Örnek 2.7.3: Her grup bir basit yarıgruptur. Ayrıca, sol sıfır yarıgruplar, sağ sıfır yarıgruplar ve dikdörtgensel bandlar basit yarıgruptur.

2.8. Doğuray Kümeleri

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren tüm altarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir altarıgrup olup bu altarıgruba S nin X **tarafından doğurulan altarıgrubu** denir ve ${}_S\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$${}_s\langle X \rangle = \mathbf{I} \{T : X \subseteq T, T \leq S\}$$

Dikkat edilirse ${}_s\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük altyarıgruptur ve X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

$${}_s\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \mathbf{K} x_n : n \in \mathbb{N}^+; x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n \in X\}$$

Benzer şekilde X tarafından doğurulan altmonoid ve X tarafından doğurulan altgrup da tanımlanabilir. Bunlar da sırasıyla

$${}_M\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \mathbf{K} x_n : n \in \mathbb{N}^+; x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n \in X\} \cup \{1\} \text{ ve}$$

$${}_G\langle X \rangle = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \mathbf{K} x_n^{e_n} : n \in \mathbb{N}^+; x_i \in X, e_i \in \{-1, +1\} i=1, 2, \mathbf{K}, n\}$$

olur. Tanımdan kolayca görülüyor ki $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ olarak tanımlanırsa

$${}_G\langle X \rangle = {}_s\langle X \cup X^{-1} \rangle$$

olur.

Eğer X kümesinin bir yarıgrup, monoid veya grup doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa X tarafından doğurulan altyarıgrup, altmonoid veya altgrup kısaca $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

S bir yarıgrup, $\emptyset \neq X \subseteq S$ ve $\emptyset \neq Y \subseteq S$ olmak üzere $X \subseteq Y$ ise $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olduğu açıktır.

Tanım 2.8.1: S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi var ise bu X kümesine S nin bir **yarıgrup doğuray kümesi**, X in her bir elemanına S nin bir **doğurayı** ve S ye de X tarafından doğurulan **yarıgrup** denir.

Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir X altkümesi varsa S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır.

S bir yarıgrup ve $S = \langle X \rangle$ olsun. Eğer $X = \{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise S ye **monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup** denir ve $S = \langle x \rangle$ şeklinde de yazılabilir.

Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

Örnek 2.8.2: $\square$ bilinen toplama işlemi ile bir yarıgrup ve aynı zamanda bir gruptur. Eğer $\square$ yi bir yarıgrup olarak düşünürsek $\square =_s \langle \{-1, +1\} \rangle$ ve bir grup olarak düşünürsek $\square =_g \langle \{+1\} \rangle = \langle 1 \rangle$ olur.

Tanım 2.8.3: S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min \{ |X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu} \}$$

tam sayısına S nin **yarıgrup rankı** denir ve $rank_s(S)$ ile gösterilir. Benzer şekilde **monoid rankı** ve **grup rankı** da tanımlanabilir.

Önerme 2.8.4: S, T birim elemanları sırasıyla $1_s, 1_t$ olan iki monoid ve X, Y sırasıyla S ile T nin birer doğuray kümesi olsun. O halde

$$Z = \{(x, 1_t) : x \in X\} \cup \{(1_s, y) : y \in Y\}$$

kümesi $S \times T$ monoidinin bir doğuraydır.

İspat: $(s, t) \in S \times T$ olsun. O halde $s \in S$ ve $t \in T$ olup $s = x_1 x_2 \mathbf{L} x_m$ ve $t = y_1 y_2 \mathbf{L} y_n$ olacak şekilde $x_i \in X, i \in \{1, 2, \mathbf{K}, m\}$ ve $y_j \in Y, j \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ vardır. Bu durumda

$$(s, t) = (x_1 x_2 \mathbf{L} x_m, y_1 y_2 \mathbf{L} y_n) = (x_1, 1_T) \mathbf{K} (x_m, 1_T) (1_S, y_1) \mathbf{K} (1_S, y_n)$$

olup $S \times T = \langle Z \rangle$ olur. ■

Sonuç 2.8.5: S ve T sonlu doğuraylı iki monoid ise $S \times T$ de sonlu doğuraylıdır. ■

Örnek 2.8.6: İki-devirli (bicyclic) monoid $\square^0 \times \square^0$, $X = \{(0, 1), (1, 0)\}$ kümesi tarafından doğurulur.

İspat: $\forall m \neq 0$ ve $\forall n \neq 0$ için $(m, 0) = (1, 0)^m$ ve $(0, n) = (0, 1)^n$ olup $\forall (m, n) \in \square^0 \times \square^0 - \{(0, 0)\}$ için $(m, n) = (m, 0)(0, n) = (1, 0)^m (0, 1)^n$ ve ayrıca $(0, 0) = (0, 1)(1, 0)$ olduğundan $\square^0 \times \square^0 = \langle X \rangle$ olur. ■

Örnek 2.8.7: İki-devirli monoid $\square^0 \times \square^0$, $\square^0$ üzerindeki dönüşümler monoidinin bir altmonoidine izomorftur.

İspat: $\square^0$ üzerinde $na = n + 1$ ($\forall n \in \square^0$) ve $0b = 0$, $nb = n - 1$ ($\forall n \in \square$) şeklinde tanımlanan dönüşümler tarafından doğurulan $B = \langle \{a, b\} \rangle$ altyarıgrubunu alalım. Burada $ab = 1_B$ olup B bir altmonoiddir. Şimdi $j : \square^0 \times \square^0 \rightarrow B$ dönüşümünü $(m, n) \mathbf{a} b^m a^n$ olarak tanımlayalım ve bu dönüşümün bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

$(m, n), (p, q) \in \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ için $(m, n) = (p, q)$ iken $m = p$ ve $n = q$ olup $b^m a^n = b^p a^q$ olduğundan $(m, n)j = (p, q)j$ olur. Dolayısıyla j iyi tanımlıdır.

Ayrıca, $r = \max\{n, p\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ((m, n)(p, q))j &= (m - n + r, q - p + r)j \\ &= b^{m-n+r} a^{q-p+r} \\ &= \begin{cases} b^m a^{q-p+n} & ; r = n (n \geq p) \text{ ise} \\ b^{m-n+p} a^q & ; r = p (p > n) \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (m, n)j (p, q)j &= (b^m a^n)(b^p a^q) \\ &= b^m (a^n b^p) a^q \\ &= \begin{cases} b^m a^{n-p+q} & ; n \geq p \text{ ise} \\ b^{m+p-n} a^q & ; p > n \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olup $((m, n)(p, q))j = (m, n)j (p, q)j$ olur. O halde j bir homomorfizmdir.

$(m, n)j = (p, q)j$ olsun. O halde $b^m a^n = b^p a^q$, yani $\forall x \in \mathbb{N}^0$ için $(x)b^m a^n = (x)b^p a^q$ olup, özel olarak $0 \in \mathbb{N}^0$ için

$$(0)b^m a^n = (0)b^p a^q \Rightarrow (0b^m)a^n = (0b^p)a^q \Rightarrow 0a^n = 0a^q \Rightarrow n = q$$

olur ve bu sonuç kullanılarak, $k > \max\{m, p\}$ için

$$\begin{aligned} (k)b^m a^n &= (k)b^p a^q \Rightarrow (kb^m)a^n = (kb^p)a^q \Rightarrow (k-m)a^n = (k-p)a^q \\ &\Rightarrow k-m+n = k-p+q \Rightarrow m = p \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(m, n)j = (p, q)j \Leftrightarrow (m, n) = (p, q)$ olup j bire-birdir. Ayrıca

$ab = 1_B$ olduğundan $\forall u \in B = \langle \{a, b\} \rangle$ elemanı $u = b^m a^n$ ($m, n \in \mathbb{N}^0$)

formundadır. Burada $(m,n) \in \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ olup $(m,n)j = b^m a^n = u$ olduğundan j örtendir. ■

Önerme 2.8.8: S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A , S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. O halde S nin bir doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq A$ altkümesi vardır.

İspat: S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve A , S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. $B = \{b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n\}$, S nin bir sonlu doğuray kümesi olmak üzere $\forall b_i \in B$ ($i = 1, 2, \mathbf{K}, n$) için

$$b_i = a_{i_1} a_{i_2} \mathbf{L} a_{i_r}$$

olacak şekilde $a_{i_1}, a_{i_2}, \mathbf{K}, a_{i_r} \in A$ ve $r_i \in \mathbb{N}$ vardır. $A_0 = \bigcup_{i=1}^n \{a_{i_1}, a_{i_2}, \mathbf{K}, a_{i_r}\}$ olarak tanımlanır ise $A_0 \subseteq A$, sonlu bir kümedir ve $S = \langle B \rangle \subseteq \langle A_0 \rangle \subseteq \langle A \rangle = S$ olup A_0 , S nin bir doğuray kümesidir. ■

2.9. Yarıgrup ve Monoid Takdimleri

A boş olmayan bir küme olsun. Bu kümenin elemanlarını bir alfabe sisteminin tüm harfleri olarak düşünürsek $\forall a_1, \dots, a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ için

$$w \equiv a_1 \mathbf{L} a_n$$

ifadesine **uzunluğu n olan bir kelime** denir ve w kelimesinin uzunluğu (boyu) $l(w)$ veya $|w|$ ile gösterilir. Eğer $l(w)$ sonlu bir tamsayı ise w kelimesine bir **sonlu**

kelime denir. Özel olarak $l(w) = 0$ ise w kelimesine **boş kelime** denir ve e veya 1 ile gösterilir.

A boş olmayan bir küme (alfabe) olmak üzere, A üzerindeki tüm boş olmayan sonlu kelimelerin kümesi A^+ ile ve $A^+ \cup \{e\} = A^+ \cup \{1\}$ kümesi de A^* ile gösterilir.

$$A^+ = \{a_1 \mathbf{L} a_n : n \in \mathbb{N}^+ \text{ ve } a_1, \mathbf{K}, a_n \in A\}$$

$$A^* = \{a_1 \mathbf{L} a_n : n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \text{ ve } a_1, \mathbf{K}, a_n \in A\} = A^+ \cup \{e\} = A^+ \cup \{1\}$$

Tanım 2.9.1: A bir alfabe ve $w \in A^+$ olsun.

- (i) Eğer $w \equiv u_1 v u_2$ ($v \in A^+$; $u_1, u_2 \in A^*$) ise v ye w nun bir **alt kelimesi** denir.
- (ii) Eğer $w \equiv v u_2$ ($v, u_2 \in A^+$) ise v ye w nun bir **ön kelimesi** denir.
- (iii) Eğer $w \equiv u_1 v$ ($u_1, v \in A^+$) ise v ye w nun bir **son kelimesi** denir.

Tanım 2.9.2: A^+ kümesi, $\forall u \equiv a_1 \mathbf{L} a_n, v \equiv b_1 \mathbf{L} b_m \in A^+$ ($n, m \in \mathbb{N}^+$) için

$$uv \equiv (a_1 \mathbf{L} a_n)(b_1 \mathbf{L} b_m) = a_1 \mathbf{L} a_n b_1 \mathbf{L} b_m$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba A üzerindeki **serbest yarıgrup** denir.

Dikkat edilirse, A^* kümesi yukarıda tanımlanan işlemle birim elemanı 1 olan bir monoiddir ve bu monoide **serbest monoid** denir.

Tanım 2.9.3: F bir yarıgrup, $A \subseteq F$ ve $i : A \rightarrow F$, $\forall a \in A$ için $(a)i = a$ olarak tanımlanan gömme dönüşümü olsun. Eğer her S yarıgrubu ve her $f : A \rightarrow S$ fonksiyonu için

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & S \\ i \downarrow & \square & y \\ F & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $i \circ y = iy = f$ olacak şekilde bir tek $y : F \rightarrow S$ homomorfizmi varsa F , A üzerinde bir **serbest yarıgruptur** denir. Bu durumda $y|_A = f$ olur.

A^+ , A üzerinde bir serbest yarıgruptur.

Teorem 2.9.4: Bir A kümesi üzerinde izomorfizme göre bir tek serbest yarıgrup vardır.

İspat: F ve F' , A kümesi üzerinde iki serbest yarıgrup olsun. O halde

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F' \\ i \downarrow & \square & y \\ F & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $y : F \rightarrow F'$ homomorfizmi ve benzer şekilde

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F \\ i \downarrow & \square & y' \\ F' & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $y' : F' \rightarrow F$ homomorfizmi vardır. Yani $y|_A = i$ ve $y'|_A = i$ dir. O halde $\forall a \in A$ için $(a)y y' = a$ olup $y y' : F \rightarrow F$, $y y'|_A = i$ olacak şekilde bir homomorfizmdir. Ayrıca F bir serbest yarıgrup olduğundan

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & F \\
 i \downarrow & \square & a \\
 F & &
 \end{array}$$

diyagramı da değişmeli yani $a|_A = i$ olacak şekilde bir tek $a : F \rightarrow F$ homomorfizmi var olup teklikten dolayı $a = y y'$ olur. $1_F : F \rightarrow F$ birim homomorfizmini düşünelim. Dikkat edilirse $i 1_F = i$ olup $1_F|_A = i$ dir ve yine teklikten dolayı $a = 1_F = y y'$ olur. Benzer şekilde $y' y = 1_F$ olup $F \cong F'$ olur. ■

A üzerindeki bu tek serbest yarıgrubu A^+ olarak alacağız.

Tanım 2.9.5: S ve T iki yarıgrup olsun. Eğer S kümesinden T kümesine bir f örten homomorfizmi varsa T ye S nin bir **homomorfik görüntüsü** denir.

Önerme 2.9.6: Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür.

İspat: S bir yarıgrup ve $A \subseteq S$ de S nin bir doğuray kümesi olsun. A^+ , A üzerinde serbest olduğundan $f = i$ olarak alındığında

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & S \\
 i \downarrow & \square & y \\
 A^+ & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $i y = i$ olacak şekilde bir tek $y : A^+ \rightarrow S$ homomorfizmi vardır. $S = \langle A \rangle$ olduğundan $\forall s \in S$ için $s = a_1 \mathbf{L} a_n$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}^+$ vardır ve aynı zamanda $a_1 \mathbf{L} a_n \in A^+$ olup

$$(a_1 \mathbf{L} a_n)y = (a_1)y \mathbf{L} (a_n)y = (a_1)i \mathbf{L} (a_n)i = a_1 \mathbf{L} a_n = s$$

olduğundan y örtendir. O halde S , A^+ nın bir homomorfik görüntüsüdür. ■

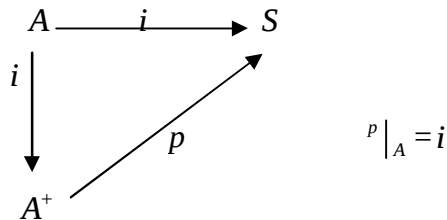
Buradaki $y : A^+ \rightarrow S$ epimorfizmine **doğal homomorfizm** denir ve genellikle p ile gösterilir.

Tanım 2.9.7: A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir **yarıgrup takdimi** denir. $R^\#$, A^+ üzerinde R tarafından doğurulmuş kongrüans olmak üzere $\langle A | R \rangle$ tarafından takdim edilen yarıgrup $A^+/R^\#$ bölüm yarıgrubu olarak tanımlanır.

Eğer $R \subseteq A^* \times A^*$ ise $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir **monoid takdimi** denir. $R^\#$, A^* üzerinde R tarafından doğurulmuş kongrüans olmak üzere $\langle A | R \rangle$ tarafından takdim edilen monoid ise $A^*/R^\#$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.9.8: Her yarıgrubun bir takdimi vardır.

İspat: S bir yarıgrup ve A , S nin bir doğuray kümesi olsun. A^+ , A üzerindeki serbest yarıgrup ve i bir gömme dönüşüm olmak üzere



diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $p : A^+ \rightarrow S$ homomorfizmi vardır ve bu homomorfizmin örten olduğu açıktır. O halde 1. izomorfizm teoreminden

$$A^+ / \ker p \cong S$$

olur. $\ker p$ bir kongrüans olup $R \subseteq \ker p$, $\ker p$ nin bir kongrüans doğurayı (böyle bir doğuray mevcuttur, en azından $R = \ker p$ alınabilir) olmak üzere $S \cong \langle A | R \rangle$ olur. ■

Tanım 2.9.9: S bir yarıgrup olsun. $S \cong A^+ / R^\#$ olacak şekildeki bir $\langle A | R \rangle$ yarıgrup takdimine S nin bir **yarıgrup takdimi** denir. Bu durumda S nin elemanları A^+ üzerindeki kongrüans sınıfları ile bire-bir eşlenmiştir. Başka bir ifadeyle de A^+ daki her kelime S nin bir elemanını temsil eder.

S bir monoid iken $S \cong A^* / R^\#$ olacak şekildeki $\langle A | R \rangle$ monoid takdimine S nin bir **monoid takdimi** denir.

Bir monoid aynı zamanda bir yarıgrup olduğundan hem yarıgrup hem de monoid takdiminden bahsedilebilir. Bu durumda yarıgrup takdimi ${}_S \langle A | R \rangle$ ve monoid takdimi ${}_M \langle A | R \rangle$ ile gösterilir.

Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A | R \rangle$ ye bir **sonlu takdim** ve eğer bir S yarıgrupunun/monoidinin sonlu bir takdimi varsa S ye **sonlu takdimli yarıgrup/monoid** denir.

Tanım 2.9.10: $\langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer $(r, s) \in R$ ise bu elemana **tanımlayıcı ilişki (bağıntı)** denir ve genellikle $(r = s) \in R$ veya sadece $r = s$ şeklinde yazılır.

Eğer $A = \{a_1, \mathbf{K}, a_m\}$ ve $R = \{r_1 = s_1, \mathbf{K}, r_n = s_n\}$ ($m, n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$) şeklinde ise $\langle A | R \rangle$ yerine $\langle a_1, \mathbf{K}, a_m | r_1 = s_1, \mathbf{K}, r_n = s_n \rangle$ yazılabilir.

$w_1, w_2 \in A^+$ olmak üzere eğer w_1 ile w_2 tamamen aynı kelime ise $w_1 \equiv w_2$ şeklinde ve eğer w_1 ile w_2 $S = \langle A | R \rangle$ nin aynı elemanını temsil ediyor yani

$(w_1, w_2) \in R^\#$ ise $w_1 = w_2$ şekline yazılır. Bu durumda $w_1 = w_2$, S 'de sağlanıyor denir.

Örneğin; $A = \{a, b\}$ ve $R = \{ab = ba\}$ iken $aba = a^2b$ fakat $aba \neq a^2b$.

Tanım 2.9.11: $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $w_1 \equiv urv$ ve $w_2 \equiv usv$ olacak şekilde $u, v \in A^*$ ve $(r, s) \in R$ (veya $(s, r) \in R$) var ise w_2, w_1 **den R deki bir ilişki kullanılarak elde edilmiştir** denir.

Eğer $w_1 \equiv w_2$ veya her $i = 1, 2, \mathbf{K}, n-1$ için a_{i+1}, a_i den R deki bir ilişki kullanılarak elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow a_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2, w_1 **den R deki ilişkiler kullanılarak elde edilmiştir** veya sadece $w_1 = w_2$ **R nin bir sonucudur** denir.

Önerme 2.9.12: $P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S, P tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. $w_1, w_2 \in A^+$ olmak üzere $w_1 = w_2$ nin S de sağlanıyor olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ nin R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: Howie(1995), Proposition 1.5.9'a bakınız. ■

Önerme 2.9.13: $P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S, P tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. Ayrıca T , bir B kümesi tarafından doğurulan yarıgrup olsun. Eğer $f : A \rightarrow B$ örten bir fonksiyon var ve $p : A^+ \rightarrow T$, f nin tek genişlemesi olarak tanımlanan doğal homomorfizm olmak üzere $\forall (r, s) \in R$ için $rp = sp$ ise T, S nin bir homomorfik görüntüsüdür.

İspat: Ruškuc (1995), Proposition 2.1'e bakınız. ■

Sonuç 2.9.14: $S, \langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan yarıgrup ve T, A kümesi tarafından doğurulan yarıgrup olmak üzere eğer R deki her ilişki T de sağlanıyor ise T, S nin bir homomorfik görüntüsüdür. ■

Sonuç 2.9.15: $S = \langle A|R \rangle$ ve $T = \langle A|Q \rangle$ olsun. Eğer $R \subseteq Q$ ise T, S nin bir homomorfik görüntüsüdür. ■

Sonuç 2.9.16: $S, \langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan yarıgrup ve $T = \langle A| \rangle = A^+$ serbest yarıgrup olsun. $\emptyset \subseteq R$ olup S, T nin bir homomorfik görüntüsüdür. Dolayısıyla her yarıgrup bir serbest yarıgrupun homomorfik görüntüsüdür. ■

Önerme 2.9.17: S, A kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O halde, $\langle A|R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

- (i) R deki tüm ilişkilerin S de sağlanıyor yani $\forall (r,s) \in R$ için S de $r = s$ olması ve
- (ii) $\forall u,v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor iken $u = v$ ilişkisinin R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: Ruškuc (1995), Proposition 2.3'e bakınız. ■

Sonuç 2.9.18: $S, X \subseteq S$ kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup, A herhangi bir küme, $f : A \rightarrow X$ bir örten fonksiyon ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O halde $\langle A|R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olması için gerek ve yeter koşul p, f nin tek genişlemesi olarak tanımlanan homomorfizm olmak üzere

- (i) $\forall (r,s) \in R$ için $(r)p = (s)p$ olması ve

- (ii) $\forall u, v \in A^+$ için $(u)p = (v)p$ iken $u = v$ ilişkisinin R nin bir sonucu olmasıdır. ■

Sonuç 2.9.19: S bir yarıgrup, A herhangi bir küme ve $f : A \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. O halde $\langle A | R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olması için gerek ve yeter koşul p , f nin tek genişlemesi olarak tanımlanan homomorfizm olmak üzere

- (i) $(A)f$ nin S için bir doğuray kümesi olması,
(ii) $\forall (r, s) \in R$ için $(r)p = (s)p$ olması ve
(iii) $\forall u, v \in A^+$ için $(u)p = (v)p$ iken $u = v$ ilişkisinin R nin bir sonucu olmasıdır. ■

Örnek 2.9.20: A boş olmayan bir küme olmak üzere A^+ kümesi üzerinde boş kümeyi içeren en küçük kongrüans $\{(w, w) : w \in A^+\}$ olup $\langle A | \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan yarıgrup A^+ serbest yarıgrubudur.

Örnek 2.9.21: $\langle a | a^2 = a \rangle$ takdimi $\{a\}$ aşikâr yarıgrubunu tanımlar. Burada $\{(a^2, a)\}$ kümesi tarafından doğurulan kongrüansın $\{a\}^+$ kümesi üzerindeki evrensel kongrüans olduğu açıktır.

Örnek 2.9.22: $\langle a | a^{n+1} = a \rangle$ takdimi n elemanlı (derecesi n olan) devirli grubu tanımlar. Gerçekten de, $\forall a^k \in \{a\}^+$ kelimesinin $a^{n+1} = a$ ilişkisi kullanılarak $\{a, a^2, \mathbf{K}, a^n\}$ kümesinin bir elemanına dönüştürülebildiği açıktır. O halde $\langle a | a^{n+1} = a \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan yarıgruba S dersek S en fazla n tane eleman içerir. Ayrıca $\text{mod } n$ ye göre düşünüldüğünde $a, a^2, \mathbf{K}, a^n$ kelimelerinin S nin farklı elemanlarını temsil ettikleri de kolayca görülüyor. O halde

$S = \{a, a^2, \mathbf{K}, a^n\}$ olup birim elemanı a^n ve derecesi n olan devirli gruptur. Daha da genel olarak $\langle a | a^{n+r} = a^r \rangle$ takdimi derecesi $n+r-1$ olan monojenik (tek doğuraylı) yarıgrubu tanımlar. ■

Örnek 2.9.23: T herhangi bir yarıgrup, $A = \{a_t : t \in T\}$ bir alfabe, $R = \{a_x a_y = a_{xy} : x, y \in T\}$ ve S , $\langle A | R \rangle$ takdiminin tanımladığı yarıgrup olsun. $f : S \rightarrow T$, $a_x \rightarrow x$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir. Ayrıca $w_1, w_2 \in A^+$ için $(w_1)f = (w_2)f$ olduğunu kabul edelim. $w_1 = a_x$ ve $w_2 = a_y$ S de sağlanıyor olacak şekilde $x, y \in T$ var olup $(a_x)f = (a_y)f$ yani $x = y$ olur. O halde $a_x = a_y$ olup f bir izomorfizmdir. Ayrıca ilişkilerin seçiminden dolayı R deki ilişkiler T de sağlanıyor olup T de $\langle A | R \rangle$ takdimi ile tanımlanır. ■

Bu örnek bize her yarıgrubun bir takdiminin var olduğunu ve özel olarak her sonlu yarıgrubun da sonlu bir takdiminin var olduğunu gösterir.

Önerme 2.9.24: M bir monoid olsun. Eğer $\langle A | R \rangle$, M nin bir yarıgrup takdimi ise $w \in A^+$, birim elemanı temsil eden bir kelime olmak üzere $\langle A | R, w = e \rangle$ M nin bir monoid takdimidir. Diğer taraftan da eğer $\langle B | Q \rangle$, M nin bir monoid takdimi ise $e \notin B$ ve $\bar{Q}$, Q daki ilişkilerde e yerine e yazılması ile elde edilen ilişkiler kümesi olmak üzere $\langle B, e | \bar{Q}, be = b, eb = b (\forall b \in B), e^2 = e \rangle$ M nin bir yarıgrup takdimidir. ■

Sonuç 2.9.25: M bir monoid olsun. M nin sonlu monoid takdimli olması için gerek ve yeter koşul sonlu yarıgrup takdimli olmasıdır. ■

2.10. Grup Takdimleri

A bir alfabe ve $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ olmak üzere $F = (A \cup A^{-1})^*$ olarak tanımlansın. $w \in F$ elemanını ele alalım. Eğer $\exists a \in A$ için aa^{-1} veya $a^{-1}a$ kelimesi w nun bir alt kelimesi ise bu alt kelime yerine e yazılır ve bu işleme w nun bu şekilde hiç alt kelimesi kalmayana kadar devam edilir. Bu şekilde elde edilen yeni kelimeye **indirgenmiş kelime** ya da w nun **indirgenmiş hali** denir.

Tanım 2.10.1: A bir alfabe olmak üzere $(A \cup A^{-1})^*$ nin tüm indirgenmiş kelimelerinin kümesini $F(A)$ ile gösterelim. $u, v \in F(A)$ için $uv \in (A \cup A^{-1})^*$ olup uv nin indirgenmiş hali $\overline{uv}$ olsun. O halde $\forall u, v \in F(A)$ için $uv = \overline{uv}$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $F(A)$ bir grup olup bu gruba A üzerindeki **serbest grup** denir.

Tanım 2.10.2: A bir alfabe ve $R \subseteq F(A) \times F(A)$ olmak üzere $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir **grup takdimi** denir. $N(R)$, $\{rs^{-1} : (r, s) \in R\}$ yi içeren en küçük normal altgrup olmak üzere $F(A)/N(R)$ bölüm grubuna $\langle A | R \rangle$ **tarafından takdim edilen grup** denir.

G grup iken $G \cong F(A)/N(R)$ olacak şekildeki $\langle A | R \rangle$ grup takdimine G nin bir **grup takdimi** denir.

Bir grup aynı zamanda bir yarıgrup ve bir monoid olduğundan hem yarıgrup hem monoid hem de grup takdiminden bahsedilebilir. Bu durumda grup takdimi ${}_G \langle A | R \rangle$ ile gösterilir.

Örnek 2.10.3: C_n , n elemanlı devirli grup olmak üzere $C_n \cong {}_G \langle a | a^n = e \rangle$, $C_n \cong {}_M \langle a | a^n = e \rangle$ ve $C_n \cong {}_S \langle a | a^{n+1} = a \rangle$ olur.

Önerme 2.10.4: G bir grup olsun. $\langle A|R \rangle$, G nin bir grup takdimi, $A' = \{a' : a \in A\}$ ve R' , R deki ilişkilerde geçen a^{-1} ler yerine a' yazılarak elde edilen ilişkiler kümesi olmak üzere

$$\langle A \cup A' | R', aa' = e, a'a = e (a \in A) \rangle$$

G nin bir monoid takdimidir.

Ayrıca G nin bir monoid takdiminin aynı zamanda bir grup takdimi olduğu da kolayca görülüyor. ■

Sonuç 2.10.5: G bir grup olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir.

- (i) G nin sonlu bir grup takdimi vardır.
- (ii) G nin sonlu bir monoid takdimi vardır.
- (iii) G nin sonlu bir yarıgrup takdimi vardır. ■

2.11. Takdim Bulmak İçin Kullanılan Bazı Yöntemler

Herhangi bir yarıgrupun bir takdimini bulmak için takdimi önceden tahmin edip doğruluğunu ispatlama yöntemi olan **direkt yöntem** veya bilinen bir takdimden başka bir takdim elde etmeye yarayan **Tietze dönüşümleri** kullanılabilir. Şimdi bu yöntemleri ayrıntılı olarak inceleyelim.

2.11.1. Direkt Yöntem

Herhangi bir S yarıgrubu verildiğinde bu yarıgrup için bir takdim olabilecek $\langle A|R \rangle$ ikilisini öngörüp daha sonra bu öngörünün doğruluğunu göstererek takdim bulma yöntemine **direkt yöntem** denir. Bu yöntemde adımlar sırasıyla şöyledir:

- (i) S için bir doğuray kümesi A bulunur.
- (ii) S de sağlanacak şekilde ilişkiler kümesi $R \subseteq A^+ \times A^+$ bulunur.

(iii) $S \cong A^+/R^\#$ olduğu gösterilir.

S sonlu bir yarıgrup iken $S \cong A^+/R^\#$ olduğunu göstermek yerine

(i) $\forall u, v \in W$ için $u = v$ S de sağlanıyor iken $u \equiv v$ ve

(ii) $|W| = |S|$

olacak şekilde $W \subseteq A^+$ kümesi bulmak daha uygundur. Bu şekildeki W kelimesine S nin **kanonik formu** veya **normal formu** denir. Böylece S nin her bir elemanını temsil eden bir tek elemana sahip olan bir küme elde edilir.

Önerme 2.11.1.1: S bir yarıgrup olsun. $A \subseteq S$, S nin bir doğuray kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere

(i) R deki her ilişki S de sağlanıyor,

(ii) $\forall w \in A^+$ için $w = \bar{w}$ R nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ var ve

(iii) $\forall u, v \in W$ için $u \not\equiv v$ için S de $u \neq v$

olacak şekilde bir $W \subseteq A^+$ kümesi bulunabiliyorsa $S \cong \langle A | R \rangle$ dir.

İspat: Ruškuc (1995), Proposition 2.1'e bakınız. ■

Önerme 2.11.1.2: S , $A \subseteq S$ kümesi tarafından doğurulan sonlu bir yarıgrup, $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olmak üzere

(i) R deki her ilişki S de sağlanıyor

(ii) $\forall w \in A^+$ için $w = \bar{w}$ R nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ var ve

(iii) $|W| \leq |S|$

ise $S \cong \langle A | R \rangle$ olur.

İspat: Ruškuc (1995), Proposition 2.2'ye bakınız. ■

Sonuç 2.11.1.3: S sonlu bir yarıgrup, A herhangi bir küme ve $f : A \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. O halde $\langle A | R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olması için gerek ve yeter koşul p , f nin tek genişlemesi olarak tanımlanan doğal homomorfizm olmak üzere

- (i) $(A)f$ nin S için bir doğuray kümesi olması,
- (ii) $\forall (r,s) \in R$ için $(r)p = (s)p$ olması,
- (iii) $\forall w \in A^+$ için $w = \bar{w}$ R nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ var ve
- (iv) $|W| \leq |S|$ olmasıdır.

$|W| \leq |S|$ olduğunu göstermek yerine W nun farklı elemanlarının S nin farklı elemanlarını temsil ettiklerini göstererek de ispat tamamlanabilir. ■

2.11.2. Tietze Dönüşümleri

Herhangi bir S yarıgrubu için bir takdim bulmanın bir diğer yolu da Tietze dönüşümlerini kullanmaktır. Neuman “Some Remarks on Semigroup Presentations” adlı çalışmasında (Neumann,1967) sol sıfır yarıgruplar için bir takdim bulmak amacıyla bu yöntemi kullanmıştır. Dört temel Tietze dönüşümü vardır.

$P = \langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S , bu takdimin tanımladığı yarıgrup olmak üzere bu dönüşümler:

T1: (Doğuray Ekleme) $b \notin A$ ve $w \in A^+$ olmak üzere takdimi $\langle A \cup \{b\} | R \cup \{w = b\} \rangle$ takdimine dönüştürür.

T2: (Doğuray Çıkarma) Eğer bir $b \in A$ ve bir $w \in (A \setminus \{b\})^+$ için $w = b$ ilişkisi S de sağlanıyor ise R' , R deki ilişkilerde b yerine w yazılarak elde edilen ilişkiler kümesi olmak üzere takdimi $\langle A \setminus \{b\} | R' \rangle$ takdimine dönüştürür.

T3: (İlişki Ekleme) Eğer $r, s \in A^+$ için $r = s$ ilişkisi S de sağlanıyor ise takdimi $\langle A | R \cup \{r = s\} \rangle$ takdimine dönüştürür.

T4: (İlişki Çıkarma) Eğer $r, s \in A^+$ ve $\{r = s\} \in R$ için $r = s$ ilişkisi $R \setminus \{r = s\}$ nin bir sonucu ise $r = s$ ilişkisine **gereksiz ilişki** denir ve bu durumda uygulanan T4 Tietze dönüşümü takdimi $\langle A | R \setminus \{r = s\} \rangle$ takdimine dönüştürür.

Dikkat edilirse $r, s, t \in A^+$ ve $u, v \in A^*$ olmak üzere

- (i) $r = r$,
- (ii) $(r = s) \in R$ iken $s = r$,
- (iii) $(r = s), (s = t) \in R$ iken $r = t$ ve
- (iv) $(r = s) \in R$ iken $urv = usv$

ilişkileri de birer gereksiz ilişki olup bu ilişkiler için de T4 uygulanabilir.

Teorem 2.11.2.1: İki sonlu yarıgrup/monoid/grup takdiminin aynı yarıgrubu/monoid/grubu tanımlıyor olması için gerek ve yeter koşul takdimlerden birinin diğerinden sonlu sayıda Tietze dönüşümü uygulanarak elde edilebiliyor olmasıdır.

İspat: Yarıgruplar/monoidler için ispatını Ruškuc (1995), Proposition 2.5'de ve gruplar için ispatını Johnson (1990), Proposition 4.5 ve Proposition 4.6'da bulabilirsiniz. ■

Önerme 2.11.2.2: S sonlu takdim edilebilir bir yarıgrup ve B, S nin herhangi bir sonlu doğuray kümesi olsun. O halde $S = \langle B | Q \rangle$ olacak şekilde sonlu bir $Q \subseteq B^+ \times B^+$ ilişkiler kümesi vardır.

İspat: $\langle A|R \rangle$, S nin bir sonlu takdimi ve B de S nin bir sonlu doğuray kümesi olsun. Genelliği bozmaksızın $A \subseteq S$ olduğunu kabul edelim. $S = \langle B \rangle$ olduğundan $\forall a \in A$ için $w_a = a$ olacak şekilde bir $w_a \in B^+$ vardır. $\forall a \in A$ için bu şekilde bir tane $w_a \in B^+$ seçelim. Ayrıca $S = \langle A \rangle$ olup benzer şekilde $\forall b \in B$ için de $w_b = b$ olacak şekilde bir tane $w_b \in A^+$ seçelim. Seçilen bu elemanlar yardımıyla $\forall u \in A^+ \left(\forall u \in B^+ \right)$ kelimesinde a lar yerine w_a (b ler yerine w_b) yazılarak elde edilen kelimeyi $\bar{u}$ ($\hat{u}$) ile gösterelim. Bu notasyonlar ile

$$B_A = \{w_b = b : b \in B\},$$

$$A_B = \{w_a = a : a \in A\},$$

$$\bar{B}_A = \{\bar{w}_b = b : b \in B\} \text{ ve}$$

$$\bar{R} = \{(\bar{r}, \bar{s}) \in B^+ \times B^+ : (r, s) \in R\}$$

olarak tanımlansın. Uygun Tietze dönüşümleri uygulanarak

$$\begin{aligned} S &= \langle A|R \rangle \\ &\xrightarrow{T_1} \langle A, B|R, B_A \rangle \\ &\xrightarrow{T_3} \langle A, B|R, B_A, A_B \rangle \\ &\xrightarrow{T_2, T_4} \langle B|\bar{R}, \bar{B}_A \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $Q = \bar{R} \cup \bar{B}_A$ alınırsa ispat biter. ■

Önerme 2.11.2.3: S sonlu takdim edilebilir bir yarıgrup ve B , S nin sonlu bir doğuray kümesi olmak üzere S nin her $\langle B|Q \rangle$ (Q sonlu olmayabilir) takdimi için $\langle B|Q_0 \rangle$ takdimi de S yi tanımlıyor olacak şekilde sonlu bir $Q_0 \subseteq Q$ ilişkiler kümesi vardır.

İspat: $\langle A|R \rangle$, S nin bir sonlu takdimi ve B de S nin bir sonlu doğuray kümesi olsun. Önerme 2.11.2.2'deki notasyonları kullanalım.

$\langle B|Q \rangle$ S nin başka bir takdimi olsun. $\forall (r,s) \in R$ için $r = s$ S de sağlanıyor olup $\bar{r} = \bar{s}$ Q nun bir sonucudur. O halde $\bar{r} \equiv \bar{s}$ veya $i=1,2,\mathbf{K},n-1$ için a_{i+1}, a_i den Q daki bir ilişki kullanılarak elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$\bar{r} \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow a_n \equiv \bar{s}$$

dizisi vardır. Bu diziyi elde ederken kullanılan ilişkilerin kümesini $Q_{r,s}$ ile gösterelim ve

$$Q' = \bigcup_{(r,s) \in R} Q_{r,s} \subseteq Q$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca $\forall \bar{w}_b = b \in \bar{B}_A$ ilişkisi de S de sağlanıyor olup Q nun bir sonucudur. O halde $\bar{w}_b \equiv b$ veya $i=1,2,\mathbf{K},n-1$ için a_{i+1}, a_i den Q daki bir ilişki kullanılarak elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$\bar{w}_b \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow a_n \equiv b$$

dizisi vardır. Bu diziyi elde ederken kullanılan ilişkilerin kümesini de $Q_{\bar{w}_b,b}$ ile gösterelim ve

$$Q'' = \bigcup_{(\bar{w}_b,b) \in \bar{B}_A} Q_{\bar{w}_b,b} \subseteq Q$$

olarak tanımlayalım. Bu notasyonlar yardımıyla $\langle A|R \rangle$ takdimine uygun Tietze dönüşümleri uygulanarak

$$\begin{array}{rcl}
S & = & \langle A|R \rangle \\
\longrightarrow_{T_1} & & \langle A,B|R,B_A \rangle \\
\longrightarrow_{T_2} & & \langle A,B|R,B_A,A_B \rangle \\
\longrightarrow_{T_2,T_4} & & \langle B|\bar{R},\bar{B}_A \rangle \\
\longrightarrow_{T_3} & & \langle B|\bar{R},\bar{B}_A,Q',Q'' \rangle \\
\longrightarrow_{T_4} & & \langle B|Q',Q'' \rangle
\end{array}$$

elde edilir. Burada Q' ve Q'' sonlu olup $Q_0 = Q' \cup Q'' \subseteq Q$ alınırsa ispat biter. ■

Örnek 2.11.2.4: Bicyclic monoid $\square^0 \times \square^0$, $\langle a,b | ab=1 \rangle$ monoid takdimi ve $\langle a,b | aba = a^2b = a, bab = ab^2 = b \rangle$ yarıgrup takdimi ile tanımlanır.

İspat: $\langle a,b | ab=1 \rangle$ takdimindeki ilişkiler kümesini R ile gösterelim. $f : \{a,b\} \rightarrow \square^0 \times \square^0$ fonksiyonu $a \mapsto (0,1)$, $b \mapsto (1,0)$ şeklinde tanımlansın ve p , f yi $(\{a,b\})^*$ kümesine geren doğal homomorfizm olsun.

$(\{a,b\})f = \{(0,1), (1,0)\}$ olup $(\{a,b\})f$, $\square^0 \times \square^0$ bicyclic monoidinin bir doğurayıdır.

$(ab)p = (ap)(bp) = (0,1)(1,0) = (0,0) = 1p$ olup R deki ilişki $\square^0 \times \square^0$ da sağlanır.

İddia: $W = \{b^m a^n : m, n \in \square^0\}$ kümesi $\square^0 \times \square^0$ bicyclic monoidinin kanonik formudur.

Bu iddianın doğruluğunu göstermek için öncelikle $\forall w \in \{a,b\}^*$ için $w = \bar{w}$ R nin bir sonucu olacak şekilde $\bar{w} \in W$ elemanının var olduğunu göstermeliyiz. Bunu w kelimesinin boyu $|w|$ üzerinden tümevarım ile gösterelim.

$|w| = 0$ veya $|w| = 1$ ise sonuç açıktır.

$|w| \geq 2$ ve iddia $|w|$ den küçük uzunluklu kelimeler için doğru olsun. $|w| \geq 2$ olup bir $w' \in (\{a, b\})^+$ için $w \equiv w'a$ veya $w \equiv w'b$ dir. Ayrıca $|w'| < |w|$ olup tümevarım hipotezinden dolayı $w' = b^m a^n$ R nin bir sonucu olacak şekilde $b^m a^n \in W$ ($m, n \in \mathbb{N}^0$) vardır.

1. durum: $w \equiv w'a$ ise $w \equiv w'a = b^m a^n a \equiv b^m a^{n+1} \in W$ dir.

2. durum: $w \equiv w'b$ ise $w \equiv w'b = b^m a^n b$ olur. Ayrıca, eğer $n = 0$ ise

$$w = b^m b \equiv b^{m+1} \in W$$

ve eğer $n \neq 0$ ise $ab = 1$ olduğu kullanılarak,

$$w = b^m a^n b \equiv b^m a^{n-1} (ab) = b^m a^{n-1} \in W$$

elde edilir.

Son olarak, W nun farklı elemanlarının $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ in farklı elemanlarını temsil ettiklerini gösterelim.

$b^m a^n, b^p a^q \in W$ için $b^m a^n = b^p a^q$ $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ da sağlansın. O halde

$$\begin{aligned} (b^m a^n)_p &= (b^p a^q)_p \Rightarrow (bp)^m (ap)^n = (bp)^p (ap)^q \\ &\Rightarrow (1, 0)^m (0, 1)^n = (1, 0)^p (0, 1)^q \\ &\Rightarrow (m, n) = (p, q) \\ &\Rightarrow m = p, n = q \end{aligned}$$

olup W nun farklı elemanları $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ in farklı elemanlarını temsil eder. O halde W , $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ in kanonik formu olup iki-devirli monoid $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$, $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ monoid takdimi ile tanımlanır.

Elde edilen bu monoid takdimini düşünürsek Önerme 2.9.24'ten dolayı $P = \langle a, b, e \mid ab = e, ae = a, be = b, ea = a, eb = b, e^2 = e \rangle$ takdimi iki-devirli monoid $\square^0 \times \square^0$ in bir yarıgrup takdimi olup uygun Tietze dönüşümleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} P &\xrightarrow{T_2} \langle a, b \mid ab = ab, aab = a, bab = b, aba = a, abb = b, abab = ab \rangle \\ &\xrightarrow{T_4} \langle a, b \mid a^2b = a, bab = b, aba = a, ab^2 = b \rangle \\ &= \langle a, b \mid aba = a^2b = a, bab = ab^2 = b \rangle \end{aligned}$$

olup $\langle a, b \mid aba = a^2b = a, bab = ab^2 = b \rangle$ takdimi iki-devirli monoid $\square^0 \times \square^0$ in bir yarıgrup takdimi olur. ■

3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME

Bir grubun herhangi bir altgrubu için bir takdim veren Reidemeister-Schreier teoremi, Ruškuc tarafından “Presentations for Subgroups of Monoids” adlı çalışmasında (Ruškuc, 1999) monoidlerin altgrupları için genelleştirilmiştir. Biz de bu bölümde monoidlerin altgrupları için elde edilen bu sonuçları inceleyerek M bir monoid ve G , M nin bir altgrubu olmak üzere G nin bir takdiminin M nin bir takdimi aracılığıyla nasıl bulunacağını göstereceğiz.

Tanım 3.1: M bir monoid ve X , M nin boş olmayan bir altkümesi olsun. M nin $\{Xm : m \in M\}$ kümesi üzerindeki hareketi, sağdan çarpma işlemi olarak tanımlansın. Eğer $Xmt = X$ olacak şekilde $t \in M$ varsa Xm kümesine X in M deki bir **(sağ) koseti** denir ve X in M deki tüm (sağ) kosetlerinin ailesi $C = \{C_i \mid i \in I\}$ ile gösterilir. Ayrıca, C nin eleman sayısına X in M deki **(sağ) indeksi** denir ve bu sayı $[M : X]$ ile gösterilir.

Not 3.2: “İndeks” teriminin yukarıdaki kullanımı standart değildir. Aslında Ruškuc ve Thomas tarafından çeşitli indeks tanımlarının ortaya konduğu “Syntactic and Rees Indices of Subsemigroups” adlı çalışmadan dolayı (Ruškuc and Thomas, 1998) bu kavramı **sağ dönüşümsel indeks** olarak adlandırmak daha uygun olabilir. Ancak biz bu kavramı, konumuzun grup teorisinin ilişkili kısmı ile paralelliğini vurgulamak için “indeks” olarak adlandıracamız. Dualiteden dolayı X in S deki sol indeksinin de tanımlanabilir olduğu ve sağ indeks ile sol indeksin eşit olmasının gerekmediği açıktır. Biz bu çalışmamızda sadece yukarıda tanımlanan “sağ indeks” kavramını kullanacağız ve kısalık olsun diye sadece “indeks” diyeceğiz.

Önerme 3.3: M bir monoid, $m \in M$ ve X , M nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $Xm \notin C$ ise $\forall t \in M$ için $Xmt \notin C$ dir.

3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME Leyla BUGAY

İspat: $m \in M$, $\emptyset \neq X \subseteq M$ ve $Xm \notin C$ olsun. Kabul edelim ki $Xmt \in C$ olacak şekilde $t \in M$ var olsun. O halde $Xmtv = X$ olacak şekilde $v \in M$ var olup $Xm(tv) = X$ elde edilir. Bu da $Xm \notin C$ olması ile çelişir. O halde $\forall t \in M$ için $Xmt \notin C$ dir. ■

Sonuç 3.4: M nin $\{Xm : m \in M\}$ kümesi üzerindeki hareketi, M nin $C \cup \{C_0\}$ ($0 \notin I$) kümesi üzerinde

$$C_i m = C_0 \Leftrightarrow C_i m \notin C \text{ ve } C_0 m = C_0 \quad (C_i \in C, m \in M)$$

şeklinde tanımlanan hareketine neden olur ve bu da M nin $I \cup \{0\}$ üzerinde

$$C_i m = C_{im}$$

şeklindeki hareketine denktir. ■

Şimdi X in M nin bir altgrubu olması durumunu inceleyeceğiz. M monoidinin birim elemanını 1 ve M nin altgrubu $X = G$ nin birim elemanını e ile gösterelim. Dikkat edilirse e , M nin bir idempotent elemanıdır ve 1 e eşit olması gerekmez.

Önerme 3.5: M bir monoid ve G , M nin bir altgrubu olsun. Eğer $C = \{C_i : i \in I\}$, G nin M deki kosetlerinin ailesi ise $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $C_i \cap C_j = \emptyset$ dir.

İspat: C nin tanımından dolayı $C_i = Gs$ ve $C_j = Gt$ olacak şekilde $s, t \in M$ vardır ve $i \neq j$ iken $C_i \neq C_j$ dir. Kabul edelim ki $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ olsun. O halde $\exists x \in C_i \cap C_j$ var olup $x = g_1 s$ ve $x = g_2 t$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in G$ vardır.

Herhangi bir $y \in C_i = Gs$ olsun. O halde $y = g_3s$ olacak şekilde $g_3 \in G$ var olup

$$\begin{aligned} y = g_3s &= (g_3e)s = (g_3(g_1^{-1}g_1))s = (g_3g_1^{-1})(g_1s) = (g_3g_1^{-1})x \\ &= (g_3g_1^{-1})g_2t \end{aligned}$$

olduğundan $y \in C_j = Gt$ ve buradan da $C_i \subseteq C_j$ dir. Benzer şekilde $C_j \subseteq C_i$ olup $C_i = C_j$ olur. Bu da $i \neq j$ olması ile çelişir. O halde $C_i \cap C_j = \emptyset$ dir. ■

Önerme 3.6: Her $i \in I$ için $Gr_i = C_i$ ve $gr_i r'_i = g$ ($\forall g \in G$) olacak şekilde $r_i, r'_i \in M$ vardır.

İspat: Her $i \in I$ için C_i nin tanımından dolayı $Gr_i = C_i$ olacak şekilde $r_i \in M$ vardır. C_i bir koset olduğundan $C_i q_i = Gr_i q_i = G$ olacak şekilde $\exists q_i \in M$ vardır ve bu durumda sabit bir $h \in G$ için $h' = hr_i q_i$ olacak şekilde $h' \in G$ vardır. Şimdi $r'_i = q_i (h')^{-1} h \in M$ olarak tanımlayalım. $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned} gr_i r'_i &= gr_i (q_i (h')^{-1} h) = ger_i q_i (h')^{-1} h = g(h^{-1}h)r_i q_i (h')^{-1} h \\ &= gh^{-1}(hr_i q_i)(h')^{-1} h = gh^{-1}h'(h')^{-1} h = gh^{-1}(h'(h')^{-1})h \\ &= gh^{-1}eh = gh^{-1}h = ge = g \end{aligned}$$

olup $Gr_i = C_i$ ve $gr_i r'_i = g$ ($\forall g \in G$) olacak şekilde $r_i, r'_i \in M$ vardır. ■

Tanım 3.7: $\forall i \in I, \forall g \in G$ için $Gr_i = C_i, gr_i r'_i = g$ ve $r_1 = r'_1 = 1$ olacak şekildeki r_i, r'_i elemanlarının topluluğu **koset temsilcileri sistemi** olarak adlandırılır.

Dikkat edilirse $r_i \in C_i$ olması gerekmez.

3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME Leyla BUGAY

Önerme 3.8: G grubunun M deki herhangi bir kosetinin elemanları, G nin elemanları ile R -bağlantılıdır.

İspat: $C_i = Gr_i$, G grubunun M deki bir koseti ve $x \in C_i$ olsun. O halde $x = gr_i$ olacak şekilde $g \in G$ var olup herhangi bir $y \in G$ için

$$x = gr_i = (eg)r_i = ((yy^{-1})g)r_i = y(y^{-1}gr_i)$$

ve

$$y = ey = (gg^{-1})y = g(g^{-1}y) = gr_i r'_i (g^{-1}y) = (gr_i)(r'_i g^{-1}y) = x(r'_i g^{-1}y)$$

olduğundan $x R y$ dir. ■

Önerme 3.9: $C_i = Gr_i$ olmak üzere $f_{r_i} : G \rightarrow C_i$ $g \mapsto gr_i$ dönüşümü, ters dönüşümü $f_{r'_i} : C_i \rightarrow G$, $x \mapsto xr'_i$ şeklinde tanımlanan bire-bir ve örten bir dönüşümdür.

İspat: f_{r_i} dönüşümünün iyi tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca 1_{C_i} ve 1_G sırasıyla C_i ve G üzerindeki birim dönüşümleri temsil ediyor olmak üzere

$$f_{r_i} f_{r'_i} = 1_G \text{ ve } f_{r'_i} f_{r_i} = 1_{C_i}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. O halde $f_{r'_i}$ ve f_{r_i} dönüşümleri birbirinin tersi olan bire-bir ve örten dönüşümlerdir. ■

Sonuç 3.10: $i \in I$ ve $x \in C_i$ için $xr'_i r_i = x$ dir. ■

Önerme 3.11: Eğer G, M nin maksimal altgrubu ise G grubunun M deki indeksi G nin bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıflarının sayısına eşittir.

İspat: $C_i = Gr_i$, G grubunun herhangi bir koseti olsun. $e \in G$, G nin birim elemanı olmak üzere Önerme 3.8'den $e R e r_i$ olup Green teoreminden dolayı

$$f_{r_i} : H_e \rightarrow H_{er_i}$$

$$x \mapsto x r_i$$

dönüşümü, tersi f_{r_i}' olan bire-bir ve örten bir dönüşümdür.

$g \in G$ olmak üzere

$$gg^{-1} = e, \quad eg = g \quad \text{ve} \quad g^{-1}g = e, \quad ge = g$$

olup bu eşitliklerden sırasıyla $g R e$ ve $g L e$ olduğu sonucuna varılır. O halde $g \in H_e$ olup $G \subseteq H_e$ dir. Burada e bir idempotent eleman olup Sonuç 2.5.10'dan dolayı e elemanını içeren H -sınıfı H_e bir gruptur ve G, M nin maksimal altgrubu olduğundan $H_e = G$ dir. Ayrıca Önerme 3.9'dan biliyoruz ki $f_{r_i} : G \rightarrow Gr_i$ de bire-bir ve örten bir fonksiyondur. O halde $H_{er_i} = Gr_i = C_i$ olup G grubunun kosetleri G nin bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıflarıdır.

Tersine; H, G nin bulunduğu R -sınıfındaki bir H -sınıfı ve $a \in H$ olsun. $a R e$ olduğundan $as = e$ ve $et = a$ olacak şekilde $s, t \in M$ vardır. Green teoreminden dolayı

$$f_t : H_e \rightarrow H_a$$

$$x \mapsto xt$$

3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME Leyla BUGAY

fonksiyonu, tersi f_s olan bire-bir ve örten bir fonksiyondur. $G = H_e$ ve $H_a = H$ olup bu fonksiyon

$$f_t : G \rightarrow H$$

$$g \mapsto gt$$

şeklinde, tersi

$$f_s : H \rightarrow G$$

$$y \mapsto ys$$

olan bire-bir ve örten bir fonksiyondur. $f_t f_s = 1$ olup $G f_t f_s = G t s = G$ dir. O halde $G t$, G grubunun bir koseti olup $G f_t = G t = H$ olduğundan H , G nin bir kosetidir.

Sonuç olarak, G grubunun M deki kosetleri G grubunun bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıfları olup $[M : G]$, G grubunun bulunduğu R -sınıfındaki H -sınıflarının sayısıdır. ■

Şimdi r_i, r'_i ($i \in I$) koset temsilcileri sistemini ve M monoidinin bir doğuray kümesini kullanarak G altgrubu için bir monoid doğuray kümesinin nasıl bulunabileceğini gösterelim.

Önerme 3.12: M , A kümesi tarafından doğurulan bir monoid ise $Y = \{e r_i a r'_{ia} : i \in I, a \in A, ia \neq 0\}$ kümesi G altgrubunu monoid olarak doğurur.

İspat: M , A kümesi tarafından doğurulan bir monoid olsun. $K = \{e r_i m r'_{im} : i \in I, m \in M, im \neq 0\}$ kümesini ele alalım. $m \in M$ için

$$e r_i m r'_{im} \in G r_i m r'_{im} \text{ ve}$$

3. MONOİDLERİN ALTGRUPLARI İÇİN TAKDİM ELDE ETME Leyla BUGAY

$$Gr_i mr'_{im} = C_i mr'_{im} = C_{im} r'_{im} = G$$

olup $K \subseteq G$ dir. Şimdi $L = \{er_i gr'_{1g} : g \in G\} \subseteq K$ kümesini düşünelim. $g \in G$ için

$$C_{1g} = C_1 g = Gg = G = G1 = Gr_1 = C_1$$

olup $r_{1g} = r_1 = 1$ ve $r'_{1g} = r'_1 = 1$ olarak alınır. Bu durumda

$$g = eg = e1g1 = er_1 gr'_{1g}$$

olup $G \subseteq L \subseteq K$ dir. Böylece $G = K = \{er_i mr'_{im} : i \in I, m \in M, im \neq 0\}$ olduğu elde edilir.

Herhangi bir $m \in M$ için $m = a_1 a_2 \mathbf{L} a_n$ olacak şekilde $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \in A$ ve $n \in N$ var olup n üzerinden tümevarım ile $er_i mr'_{im}$ elemanının Y tarafından doğurulan monoide ait olduğunu gösterelim.

Eğer $n=1$ ise $m = a_1$ şeklindedir ve $er_i mr'_{im} \in Y$ olur. O halde $er_i mr'_{im}$, Y tarafından doğurulan monoide aittir. Kabul edelim ki $n > 1$ ve $\forall k < n$ ($k \geq 1$) için $m' = a_1 a_2 \mathbf{L} a_k$ iken $er_i m' r'_{im}$ elemanı Y tarafından doğurulan monoide ait olsun. M nin $m = a_1 a_2 \mathbf{L} a_n$ şeklindeki elemanını alalım. Eğer $t = a_2 \mathbf{L} a_n$ olarak alırsak $m = a_1 t$ şeklindedir.

$er_i a_1 \in Gr_i a_1 = C_i a_1 = C_{ia_1}$ ve koset temsilcileri sisteminin tanımından $C_{ia_1} r'_{ia_1} = G$ olup $er_i a_1 r'_{ia_1} \in C_{ia_1} r'_{ia_1} = G$ dir. O halde

$$(er_i a_1 r'_{ia_1})e = er_i a_1 r'_{ia_1}$$

olur. Ayrıca Sonuç 3.10'dan

$$(er_ia_1r'_{ia_1}e)r_{ia_1} = (er_ia_1r'_{ia_1})r_{ia_1} = (er_ia_1)r'_{ia_1}r_{ia_1} = er_ia_1$$

olup

$$er_imr'_{im} = er_ia_1tr'_{ia_1t} = (er_ia_1r'_{ia_1}er_{ia_1})tr'_{ia_1t} = (er_ia_1r'_{ia_1})(er_{ia_1}tr'_{ia_1t})$$

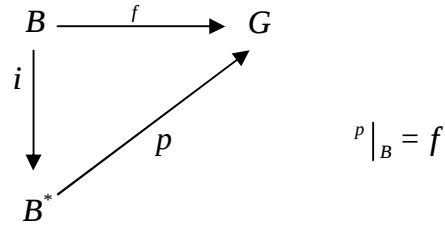
şeklindedir. Ayrıca $er_ia_1r'_{ia_1}$ elemanının Y tarafından doğurulan monoide ait olduğu açıktır. Kabulümüzden dolayı da $er_{ia_1}tr'_{ia_1t}$ elemanı Y tarafından doğurulan monoide ait olup $er_imr'_{im}$ de Y tarafından doğurulan monoide aittir. O halde $\forall m \in M$ için $er_imr'_{im}$, Y tarafından doğurulan monoide ait olup $G \subseteq_M \langle Y \rangle$ dir. Ayrıca $Y \subseteq G$ olup ${}_M \langle Y \rangle \subseteq G$ olduğundan $G = {}_M \langle Y \rangle$ olur. ■

Sonuç 3.13: Sonlu doğuraylı bir monoidde, sonlu indekse sahip bir altgrubun kendisi de sonlu doğuraylıdır. ■

Not 3.14: M , $\langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan bir monoid ve G , M nin bir altgrubu olsun. G için yukarıda verilen Y doğuray kümesinin elemanlarını temsil eden

$$B = \{[i, a] : i \in I, a \in A, ia \neq 0\}$$

alfabesi oluşturulsun. B^* , B üzerindeki serbest monoid olup $p : B^* \rightarrow G$ dönüşümü $f : B \rightarrow G$, $[i, a]$ a $er_ia_1r'_{ia_1}$ dönüşümünün tek genişlemesi olan homomorfizm olsun.



Ayrıca $j : \{(i, w) : i \in I, w \in A^*, iw \neq 0\} \rightarrow B^*$ dönüşümü de

$$(i, e)j = 1,$$

$$(i, aw)j = [i, a](ia, w)j \quad (i \in I, a \in A, w \in A^*, iaw \neq 0)$$

eşitliklerinden tümevarımsal olarak elde edilen dönüşüm olarak tanımlansın. Kolayca gösterilebilir ki $i \in I$; $w_1, w_2 \in A^*$ ve $iw_1w_2 \neq 0$ olmak üzere

$$(i, w_1w_2)j \equiv (i, w_1)j (iw_1, w_2)j$$

dir. Şimdi bu notasyonları kullanarak G için bir monoid takdimi verelim.

Teorem 3.15: M , $\langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan bir monoid ve G , M nin bir altgrubu olmak üzere yukarıdaki notasyonlar ile

$$\begin{aligned} \langle B | & (i, u)j = (i, v)j \quad (i \in I, (u = v) \in R, iu \neq 0), \\ & (1, er_i ar'_{ia})j = [i, a] \quad (i \in I, a \in A, ia \neq 0), \\ & (1, e)j = 1 \rangle \end{aligned}$$

takdimi G yi monoid olarak tanımlar.

İspat: Ruškuc (1999), Theorem 2.9'a bakınız. ■

Sonuç 3.16: Sonlu takdimli bir monoidde sonlu indekse sahip bir altgrubun kendisi de sonlu takdimlidir. ■

Not 3.17: Sonuç 3.13 ve Sonuç 3.16 altmonoidlere genişletilemez. Örneğin; A^* serbest monoidinin her altmonoidinin indeksi 1 dir. Fakat her altmonoidi sonlu doğuraylı ve her altmonoidi (sonlu doğuraylı olsa bile) sonlu takdimli olmayabilir. Ayrıntılı bilgi için Campbell, Robertson, Ruškuc ve Thomas'ın "On Subsemigroups of Finitely Presented Semigroups" adlı çalışmasına (Campbell, Robertson, Ruškuc and Thomas, 1996) bakınız.

Tanım 3.18: $r_i, r_i' (i \in I)$ koset temsilcileri sisteminde her bir r_i nin her bir ön kelimesi de bir temsilci ise yani $a, b \in A^*$ için $r_i \equiv ab$ iken $a = r_j$ olacak şekilde $j \in I$ varsa bu koset temsilcileri sistemine **Schreier sistemi** denir ve bir altgrup için her zaman bir Schreier sistemi vardır.

Sonuç 3.19: Teorem 3.15'deki notasyonları kullanalım ve bunlara ek olarak $r_i, r_i' (i \in I)$ koset temsilcileri sistemini Schreier sistemi olarak kabul edelim. Bu durumda

$$\langle B | (i, u)j = (i, v)j \quad (i \in I, (u = v) \in R, iu \neq 0), \\ [i, a] = 1 \quad (i \in I, a \in A, r_i a \equiv r_j \quad (j \in I)) \rangle$$

takdimi G yi grup olarak tanımlar.

İspat: Ruškuc (1999), Corollary 2.15'e bakınız. ■

4. BRUCK-REILLY GENİŞLEMELERİ ve SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ

4.1. Bruck-Reilly Genişlemeleri

Bu bölümde, monoidlerin Bruck-Reilly genişlemelerinin tanımını, inşa edilme sürecini ve bazı özelliklerini vereceğiz.

Tanım 4.1.1: M , birim elemanı 1_M olan bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. $\mathbb{N}^0$ dönüşümünü M üzerindeki birim dönüşüm olarak alalım ve negatif olmayan tamsayılar kümesini $\mathbb{N}^0$ ile gösterelim. $\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde bir ikili işlem (çarpma işlemi) $(m, a, n), (p, b, q) \in \mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ ve $r = \max\{n, p\}$ olmak üzere

$$(m, a, n) (p, b, q) = (m - n + r, (aq^{r-n})(bq^{r-p}), q - p + r)$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesinin bu işlem ile birim elemanı $(0, 1_M, 0)$ olan bir monoid olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu monoide M monoidinin q ile olan **Bruck-Reilly genişlemesi** denir ve $BR(M, q)$ ile gösterilir.

Bu yapı Bruck, Reilly ve Munn tarafından oluşturulan yapıların genelleştirilmiş halidir ve tersinir yarıgrup teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.

Bruck-Reilly genişlemelerinin inşa edilme süreci, Bruck'un 1958'de her S yarıgrupunun bir basit monoid içerisine gömülebileceğini göstermesiyle başlamıştır. Bruck, $\mathbb{N}^0 \times S^1 \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde S^1 in her elemanını S^1 in birim elemanına eşleyen q homomorfizmi ile yukarıdaki çarpma işlemini tanımladı ve bu yapının S ye izomorfik olan bir altarıgrubu içeren (bu altarıgrup $\{(0, s, 0) : s \in S\}$ dir) bir basit monoid olduğunu gösterdi. Elde edilen bu yapıya **Bruck genişlemesi** diyoruz.

1966 yılında Reilly aynı yapıyı bir G grubu üzerinde ve q homomorfizminin G üzerinde herhangi bir endomorfizm olmasına izin vererek tekrar inşa etti. Bu

yapıya ise **Reilly genişlemesi** diyoruz. Reilly bu yapıyı kullanarak, elde edilen monoidin bir katlı-basit w -yarıgrup olduğunu ve tersine bir katlı-basit w -yarıgrupun da birimlerinin oluşturduğu altgrupunun (şimdiki adlandırılışıyla) Bruck-Reilly genişlemesi olduğunu gösterdi.

1970’de Munn bu genişlemeleri genelleştirerek Bruck-Reilly genişlemesi terimini ortaya koydu ve bunu, herhangi bir M monoidinin M den M nin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlanan q homomorfizmi ile olan genişlemesi olarak tanımladı.

Biz “Bruck-Reilly genişlemesi” terimini, q homomorfizminin monoid üzerindeki herhangi bir endomorfizm olduğunu vurgulamak istediğimizde ve “Munn-Bruck-Reilly” genişlemesi terimini de q homomorfizminin, monoidden monoidin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlı olan homomorfizm olduğunu vurgulamak istediğimizde kullanacağız.

Örnek 4.1.2: $\square^0 \times \square^0$ iki-devirli monoid, $G = \{e\}$ aşıkâr grubunun Bruck-Reilly genişlemesine izomorftur.

Önerme 4.1.3: M , birim elemanı 1_M olan bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun.

- (i) $(m, a, n)R_{BR(M, q)}(p, b, q) \Leftrightarrow m = p \text{ ve } aR_M b$
- (ii) $(m, a, n)L_{BR(M, q)}(p, b, q) \Leftrightarrow n = q \text{ ve } aL_M b$
- (iii) $(m, a, n)H_{BR(M, q)}(p, b, q) \Leftrightarrow m = p, n = q \text{ ve } aH_M b$
- (iv) $(m, a, n)D_{BR(M, q)}(p, b, q) \Leftrightarrow aD_M b$
- (v) $(m, a, n) \in BR(M, q)$ nin bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul $m = n$ ve $a \in M$ nin bir idempotent eleman olmasıdır. Başka bir ifadeyle; $E(BR(M, q)) = \{(m, a, m) : a \in E(M)\}$ olur.

- (vi) $BR(M, q)$ monoidinin regüler olması için gerek ve yeter koşul M monoidinin regüler olmasıdır. Özel olarak; a^{-1} , a nın M deki bir tersi ise (n, a^{-1}, m) , (m, a, n) nin $BR(M, q)$ daki bir tersidir.
- (vii) $BR(M, q)$ bir Munn-Bruck-Reilly genişlemesi ise $BR(M, q)$ bir basit monoiddir.

İspat: (i) $(\Rightarrow)$ $(m, a, n)R_{BR(M, q)}(p, b, q)$ olsun. Bu durumda $(m, a, n)(k_1, c_1, l_1) = (p, b, q)$ ve $(p, b, q)(k_2, c_2, l_2) = (m, a, n)$ olacak şekilde $(k_1, c_1, l_1), (k_2, c_2, l_2) \in BR(M, q)$ vardır. O halde $r_1 = \max\{n, k_1\}$ ve $r_2 = \max\{q, k_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (m - n + r_1, (aq^{r_1-n})(c_1q^{r_1-k_1}), l_1 - k_1 + r_1) &= (p, b, q) \text{ ve} \\ (p - q + r_2, (bq^{r_2-q})(c_2q^{r_2-k_2}), l_2 - k_2 + r_2) &= (m, a, n) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} m - n + r_1 &= p, \\ p - q + r_2 &= m, \\ (aq^{r_1-n})(c_1q^{r_1-k_1}) &= b \text{ ve} \\ (bq^{r_2-q})(c_2q^{r_2-k_2}) &= a \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İlk iki eşitlikten sırasıyla $p \geq m$ ve $m \geq p$ olduğu görülür. O halde $m = p$ dir ve bunu eşitliklerde tekrar yazarsak $m - n + r_1 = m$, $p - q + r_2 = p$ olup $n = r_1 \geq k_1$, $q = r_2 \geq k_2$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} b &= (aq^0)(c_1q^{n-k_1}) = a(c_1q^{n-k_1}) \\ a &= (bq^0)(c_2q^{q-k_2}) = b(c_2q^{q-k_2}) \end{aligned}$$

olup $aR_M b$ dir.

($\Leftarrow$) $aR_M b$ olsun. O halde $ax = b$ ve $by = a$ olacak şekilde $x, y \in M = M^1$ vardır. $(m, a, n), (m, b, q) \in BR(M, q)$ elemanlarını sırasıyla $(n, x, q), (q, y, n) \in BR(M, q)$ elemanları ile çarparsak

$$(m, a, n)(n, x, q) = (m, b, q)$$

$$(m, b, q)(q, y, n) = (m, a, n)$$

olup $(m, a, n)R_{BR(M, q)}(p, b, q)$ olduğu elde edilir.

(ii) Benzer şekilde yapılır.

(iii) $(m, a, n)H_{BR(M, q)}(p, b, q) \Leftrightarrow (m, a, n)R_{BR(M, q)}(p, b, q)$ ve

$$(m, a, n)L_{BR(M, q)}(p, b, q)$$

$$\Leftrightarrow m = p, aR_M b \text{ ve } n = q, aL_M b$$

$$\Leftrightarrow m = p, n = q \text{ ve } aH_M b.$$

(iv) ($\Rightarrow$) $(m, a, n)D_{BR(M, q)}(p, b, q)$ olsun. Bu durumda

$(m, a, n)R_{BR(M, q)}(r, c, s)$ ve $(r, c, s)L_{BR(M, q)}(p, b, q)$ olacak şekilde

$(r, c, s) \in BR(M, q)$ vardır. (i)'den dolayı $r = m$, $aR_M c$ ve (ii)'den dolayı $s = q$, $cL_M b$ olup $(r, c, s) = (m, c, q)$ ve $aD_M b$ dir.

($\Leftarrow$) $aD_M b$ olsun. Bu durumda $aR_M c$ ve $cL_M b$ olacak şekilde $c \in M$ var olup $(m, c, q) \in BR(M, q)$ için (i)'den dolayı $(m, a, n)R_{BR(M, q)}(m, c, q)$ ve (ii) den dolayı $(m, c, q)L_{BR(M, q)}(p, b, q)$ dur. O halde $(m, a, n)D_{BR(M, q)}(p, b, q)$ olur.

(v) ($\Rightarrow$) $(m, a, n) \in BR(M, q)$ bir idempotent eleman olsun. O halde $r = \max\{n, m\}$ olmak üzere

$$(m, a, n)(m, a, n) = (m - n + r, (aq^{r-n})(aq^{r-m}), n - m + r) = (m, a, n)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} m - n + r &= m \\ n - m + r &= n \\ a &= (aq^{r-n})(aq^{r-m}) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. İlk iki eşitlikten $n = r = m$ olduğu ve bunu son eşitlikte yerine yazarsak

$$a = (aq^0)(aq^0) = aa = a^2$$

olup $a \in M$ nin bir idempotent eleman olduğu görülür.

($\Leftarrow$) $a \in M$ bir idempotent eleman olsun. O halde $a^2 = a$ dir. $m \in \mathbb{N}^0$ ve $(m, a, m) \in BR(M, q)$ için $r = \max\{m, m\} = m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (m, a, m)(m, a, m) &= (m - m + m, (aq^{m-m})(aq^{m-m}), m - m + m) \\ &= (m, aa, m) = (m, a^2, m) = (m, a, m) \end{aligned}$$

olup $(m, a, m) \in BR(M, q)$ bir idempotent elemandır.

(vi) ($\Rightarrow$) $BR(M, q)$ monoidi regüler ve $a \in M$ olsun. O halde $m, n \in \mathbb{N}^0$ için $(m, a, n) \in BR(M, q)$ olup $(m, a, n)(p, b, q)(m, a, n) = (m, a, n)$ olacak şekilde $(p, b, q) \in BR(M, q)$ vardır. $r_1 = \max\{n, p\}$ ve $r_2 = \max\{q - p + r_1, m\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (m, a, n)(p, b, q)(m, a, n) &= (m, a, n) \\ \Leftrightarrow (m - n + r_1, (aq^{r_1-n})(bq^{r_1-p}), q - p + r_1)(m, a, n) &= (m, a, n) \\ \Leftrightarrow (m - n + r_1 - q + p - r_1 + r_2, (((aq^{r_1-n})(bq^{r_1-p}))q^{r_2-q+p-r_1})(aq^{r_2-m}), n - m + r_2) &= (m, a, n) \end{aligned}$$

olup buradan

$$m - n - q + p + r_2 = m$$

$$n - m + r_2 = n$$

$$\left(\left((aq^{r_1-n}) (bq^{r_1-p}) \right) q^{r_2-q+p-r_1} \right) (aq^{r_2-m}) = a$$

eşitlikleri elde edilir. İlk eşitlikten $r_2 = n + q - p$ olup $n + q - p \geq q - p + r_1$ ve buradan $n \geq r_1$ olduğu görülür. Ayrıca $r_1 \geq n$ olduğundan $r_1 = n$ elde edilir. İkinci eşitlikten ise $m = r_2$ olduğu görülür. Bunlar son eşitlikte kullanılırsa

$$\left(\left((aq^0) (bq^{n-p}) \right) q^{n+q-p-q+p-r_1} \right) (aq^{m-m}) = a (bq^{n-p}) a = a$$

olup M regülerdir.

($\Leftarrow$) M monoidi regüler ve $(m, a, n) \in BR(M, q)$ olsun. Burada $a \in M$ olup $aba = a$ olacak şekilde $b \in M$ vardır. $n, m \in \square^0$ olup $(n, b, m) \in BR(M, q)$ için

$$\begin{aligned} (m, a, n) (n, b, m) (m, a, n) &= (m - n + n, (aq^0)(bq^0), m - n + n) (m, a, n) \\ &= (m, ab, m) (m, a, n) \\ &= (m - m + m, ((ab)q^0)(aq^0), n - m + m) \\ &= (m, aba, n) \\ &= (m, a, n) \end{aligned}$$

olduğundan $BR(M, q)$ regülerdir.

Özel olarak; a^{-1} , a nın M deki bir tersi iken

$$\begin{aligned} (m, a, n) (n, a^{-1}, m) (m, a, n) &= (m, aa^{-1}, m) (m, a, n) = (m, aa^{-1}a, n) = (m, a, n), \\ (n, a^{-1}, m) (m, a, n) (n, a^{-1}, m) &= (n, a^{-1}a, n) (n, a^{-1}, m) = (n, a^{-1}aa^{-1}, m) = (n, a^{-1}, m) \end{aligned}$$

olup (n, a^{-1}, m) , (m, a, n) nin $BR(M, q)$ daki bir tersidir.

(vii) $BR(M, q)$ bir Munn-Bruck-Reilly genişlemesi olsun. Burada q , M den M nin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlı endomorfizmdir.

$(p, (aq)^{-1}, m+1), (n+1, b, q) \in BR(M, q)$ elemanlarını alalım.
 $r_1 = \max\{m+1, m\} = m+1$ ve $r_2 = \max\{n+1, n+1\} = n+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 & (p, (aq)^{-1}, m+1)(m, a, n)(n+1, b, q) \\
 &= \left(p - (m+1) + (m+1), \left(((aq)^{-1})q^{(m+1)-(m+1)} \right) (aq^{m+1-m}), n - m + (m+1) \right) (n+1, b, q) \\
 &= (p, (aq)^{-1}(aq), n+1)(n+1, b, q) \\
 &= (p, 1_M, n+1)(n+1, b, q) \\
 &= (p - (n+1) - (n+1), (1_M q^{(n+1)-(n+1)})(bq^{(n+1)-(n+1)}), q - (n+1) + (n+1)) \\
 &= (p, b, q)
 \end{aligned}$$

olup Sonuç 2.7.2'den $BR(M, q)$ bir basit monoiddir. ■

4.2. Bruck-Reilly Genişlemelerinin Takdimi

M bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin q ile tanımlanan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ nın bir doğuray kümesinin ve takdiminin, M nin bir doğuray kümesi ve takdimi aracılığıyla nasıl bulunabileceğini gösterelim.

Teorem 4.2.1: M bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. M monoidinin bir doğuray kümesi A ise

$$X = \{(0, a, 0) : a \in A\} \cup \{(0, 1_M, 1), (1, 1_M, 0)\}$$

kümesi $BR(M, q)$ nın bir doğuray kümesidir.

İspat: $(m, s, n) \in BR(M, q)$ için $s \in M = \langle A \rangle$ olup $s = a_1 a_2 \mathbf{L} a_k$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda,

$$(m, s, n) = (m, 1_M, 0) (0, s, 0) (0, 1_M, n)$$

ve her bir çarpan tek tek incelenirse

$$\begin{aligned} (m, 1_M, 0) &= (1_M, 0)^m \\ (0, s, 0) &= (0, a_1 a_2 \mathbf{L} a_k, 0) = (0, a_1, 0) (0, a_2, 0) \mathbf{L} (0, a_k, 0) \\ (0, 1_M, n) &= (0, 1_M, 1)^n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiği kolayca gösterilebilir. O halde

$$(m, s, n) = (1_M, 0)^m (0, a_1, 0) (0, a_2, 0) \mathbf{L} (0, a_k, 0) (0, 1_M, 1)^n \in \langle X \rangle$$

olup $BR(M, q) \subseteq \langle X \rangle$ olur. Ayrıca $X \subseteq BR(M, q)$ olup $\langle X \rangle \subseteq BR(M, q)$ olduğundan X , $BR(M, q)$ nın bir doğuray kümesidir. ■

Elde edilen bu doğuray kümesi $BR(M, q)$ için mümkün olan “en iyi” doğuray kümesidir.

Örneğin; q , M üzerindeki birim dönüşüm iken $BR(M, q)$, M ile iki-devirli monoid $\mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ in direk çarpımına izomorftur ve genel olarak $|A| + 2$ den daha az eleman tarafından doğurulamaz.

Sonuç 4.2.2: $BR(M, q)$ için Teorem 4.2.1’de verilen doğuray kümesinde $|A| + 2$ tane eleman olup kolayca görülüyor ki, M monoidi sonlu doğuraylı ise M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ da sonlu doğuraylıdır. ■

Genel olarak bu ifadenin tersi doğru değildir. Şimdi Bruck-Reilly genişlemesi sonlu doğuraylı olduğu halde kendisi sonlu doğuraylı olmayan bir monoid örneği verelim.

Örnek 4.2.3: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde bir ikili işlemi her $m, n \in \mathbb{N}$ için $mn = \min\{m, n\}$ olarak tanımlayalım. $\mathbb{N}$ nin bu işlemle bir yarıgrup ve hatta yarılatis olduğu fakat monoid olmadığı açıktır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1_{\mathbb{N}} n = n = n 1_{\mathbb{N}}$ olacak şekilde bir $1_{\mathbb{N}}$ birim elemanını tanımlayarak $\mathbb{N}^1$ kümesini oluşturalım. O halde $\mathbb{N}^1$ bir monoid olur.

$\mathbb{N}^1$ monoidi bir A kümesi tarafından doğuruluyor olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}^1$ için $n = a_1 a_2 \dots a_k$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n = \min\{a_1, \dots, a_k\}$ dır ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi iyi sıralı olup $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ için $\min\{a_1, \dots, a_k\} = a_i$ olduğundan $n = a_i \in A$ dır. Dolayısıyla $\mathbb{N}^1 \subseteq A$ olup $\mathbb{N}^1$ doğal sayılar monoidi sonlu doğuraylı değildir.

$\mathbb{N}^1$ monoidinin Bruck-Reilly genişlemesini, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $nq = n+1$ ve $1_{\mathbb{N}} q = 1_{\mathbb{N}}$ şeklinde tanımlanan q endomorfizmi ile oluşturalım. Her $(p, n, q) \in BR(\mathbb{N}^1, q)$ için

$$(p, n, q) = (p, 1_{\mathbb{N}}, 0) (0, n, 0) (0, 1_{\mathbb{N}}, q)$$

ve

$$(p, 1_{\mathbb{N}}, 0) = (1, 1_{\mathbb{N}}, 0)^p,$$

$$(0, 1_{\mathbb{N}}, q) = (0, 1_{\mathbb{N}}, 1)^q$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca

$$(0, n, 0) = (0, 1_{\square}, 1) (0, n-1, 0) (1, 1_{\square}, 0)$$

$$(0, n-1, 0) = (0, 1_{\square}, 1) (0, n-2, 0) (1, 1_{\square}, 0)$$

olup bu eşitlikler birleştirilirse

$$(0, n, 0) = (0, 1_{\square}, 1)^2 (0, n-2, 0) (1, 1_{\square}, 0)^2$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$(0, n, 0) = (0, 1_{\square}, 1)^{n-1} (0, 1, 0) (1, 1_{\square}, 0)^{n-1}$$

olur. O halde

$$(p, n, q) = (1, 1_{\square}, 0)^p (0, 1_{\square}, 1)^{n-1} (0, 1, 0) (1, 1_{\square}, 0)^{n-1} (0, 1_{\square}, 1)^q$$

$$(p, 1_{\square}, q) = (1, 1_{\square}, 0)^p (0, 1_{\square}, 1)^q$$

ve

$$(0, 1_{\square}, 0) = (0, 1_{\square}, 1) (1, 1_{\square}, 0)$$

olup $BR(\square^1, q)$ genişlemesi $\{(0, 1, 0), (1, 1_{\square}, 0), (0, 1_{\square}, 1)\}$ kümesi tarafından doğurulur. Dolayısıyla $BR(\square^1, q)$ sonlu doğuraylıdır. ■

Önerme 4.2.4: M bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ sonlu doğuraylı ve A , M nin bir doğuray kümesi olsun. O halde $A_0 \cup \{b, c\}$ kümesi $BR(M, q)$ nın bir doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq \{(0, a, 0) : a \in A\}$ altkümesi vardır.

İspat: Önerme 2.8.8 ve Teorem 4.2.1'in bir sonucudur. ■

Teorem 4.2.5: M bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. Eğer $\langle A|R \rangle$, M nin bir monoid takdimi ise

$$\langle A, b, c | R, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (\forall a \in A) \rangle$$

$BR(M, q)$ nın bir monoid takdimidir.

$BR(M, q)$ için verilen takdimdeki ilişkiler kümesini R' ile gösterelim. Teoremin ispatını vermeden önce R' deki ilişkiler kullanılarak elde edilen ve teoremin ispatında kullanılacak olan bazı sonuçları aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 4.2.6: Aşağıdaki ilişkiler R' nün bir sonucudur.

- (i) $bw = (wq)b \quad (w \in A^*)$
- (ii) $wc = c(wq) \quad (w \in A^*)$
- (iii) $b^n a = (aq^n)b^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \in A)$
- (iv) $ac^n = c^n(aq^n) \quad (n \in \mathbb{N}, a \in A)$
- (v) $b^n w = (wq^n)b^n \quad (n \in \mathbb{N}, w \in A^*)$
- (vi) $wc^n = c^n(wq^n) \quad (n \in \mathbb{N}, w \in A^*)$

İspat: $w \in A^*$ için w boş kelime ise sonuç açık, aksi halde $w \equiv a_1 a_2 \mathbf{L} a_k$ olacak şekilde $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_k \in A$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca q dönüşümünü A^* kelimeler kümesi üzerinde bir endomorfizm olarak da düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad bw &\equiv b(a_1 \mathbf{L} a_k) \equiv (ba_1)a_2 \mathbf{L} a_k = ((a_1q)b)a_2 \mathbf{L} a_k \equiv (a_1q)(ba_2)a_3 \mathbf{L} a_k \\ &= (a_1q)((a_2q)b)a_3 \mathbf{L} a_k \equiv \mathbf{L} = (a_1q)(a_2q) \mathbf{L} (a_kq)b = ((a_1 \mathbf{L} a_k)q)b \\ &\equiv (wq)b \end{aligned}$$

olup $bw = (wq)b$ R' nün bir sonucudur.

(ii) Benzer şekilde gösterilir.

(iii) $b^n a \equiv b^{n-1}(ba) = b^{n-1}(aq)b \equiv b^{n-2}(b(aq))b$ dir. Burada $aq \in M = \langle A \rangle$

olup $aq = a'_1 \mathbf{L} a'_t$ olacak şekilde $a'_1, \mathbf{K}, a'_t \in A$ var olduğundan $aq \in A^*$ olarak

düşünülebilir. Bu durumda (i)'den dolayı $b(aq) = ((aq)q)b = (aq^2)b$ olur. O halde

$$\begin{aligned} b^n a &\equiv b^{n-1}(ba) = b^{n-1}(aq)b \equiv b^{n-2}(b(aq))b = b^{n-2}((aq^2)b)b \equiv b^{n-2}(aq^2)b^2 \\ &\equiv \mathbf{L} \equiv (aq^n)b^n \end{aligned}$$

olup $b^n a = (aq^n)b^n$ R' nin bir sonucudur.

(iv) Benzer şekilde gösterilir.

(v) $n \in \mathbb{N}$, $w \in A^*$ iken

$$\begin{aligned} b^n w &\equiv b^n (a_1 \mathbf{L} a_k) \equiv (b^n a_1) a_2 \mathbf{L} a_k = ((a_1 q^n) b^n) a_2 \mathbf{L} a_k \\ &\equiv (a_1 q^n) (b^n a_2) a_3 \mathbf{L} a_k = (a_1 q^n) ((a_2 q^n) b^n) a_3 \mathbf{L} a_k \\ &\equiv \mathbf{L} \equiv (a_1 q^n) (a_2 q^n) \mathbf{L} (a_k q^n) b^n \end{aligned}$$

elde edilir. q , M üzerinde bir endomorfizm olup q^n de M üzerinde bir endomorfizmdir. Bu durumda

$$b^n w = (a_1 q^n) (a_2 q^n) \mathbf{L} (a_k q^n) b^n = ((a_1 \mathbf{L} a_k) q^n) b^n \equiv (wq^n) b^n$$

olup $b^n w = (wq^n)b^n$ R' nin bir sonucudur.

(vi) Benzer şekilde gösterilir. ■

Teorem 4.2.5'in ispatı: $f : A \cup \{b, c\} \rightarrow BR(M, q)$ fonksiyonu $a \mapsto (0, a, 0)$ ($\forall a \in A$), $b \mapsto (0, 1_M, 1)$ ve $c \mapsto (1, 1_M, 0)$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca p , f yi $(A \cup \{b, c\})^*$ kümesine geren doğal homomorfizm olsun. $\forall w \in A^*$ için $wp = (0, w, 0)$ olduğu açıktır.

i) $(A \cup \{b, c\})f = \{(0, a, 0) : a \in A\} \cup \{(0, 1_M, 1), (1, 1_M, 0)\}$ olup $(A \cup \{b, c\})f$, $BR(M, q)$ nin bir doğuray kümesidir.

ii) $R \subseteq A^* \times A^*$ olup $(r, s) \in R$ için $r \equiv a_1 \mathbf{L} a_k$ ve $s \equiv b_1 \mathbf{L} b_t$ olacak şekilde $a_1, \mathbf{K}, a_k, b_1, \mathbf{K}, b_t \in A$ ($k, t \in \mathbb{N}$) vardır. O halde $a_1 \mathbf{L} a_k = b_1 \mathbf{L} b_t$ R nin bir sonucu olup

$$\begin{aligned} rp &\equiv (a_1 \mathbf{L} a_k)p = (a_1 p) \mathbf{L} (a_k p) = (0, a_1, 0) \mathbf{L} (0, a_k, 0) = (0, a_1 \mathbf{L} a_k, 0) \\ &= (0, b_1 \mathbf{L} b_t, 0) = (0, b_1, 0) \mathbf{L} (0, b_t, 0) = (b_1 p) \mathbf{L} (b_t p) = (b_1 \mathbf{L} b_t)p \equiv sp \end{aligned}$$

olduğundan R deki her ilişki $BR(M, q)$ da sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (bc)p &= (bp)(cp) = (0, 1_M, 1)(1, 1_M, 0) = (0, 1_M, 0) = 1p, \\ (ba)p &= (bp)(ap) = (0, 1_M, 1)(0, a, 0) = (0, (1_M q^0)(aq^1), 1) = (0, aq, 1) = (0, aq, 0)(0, 1_M, 1) \\ &= ((aq)p)(bp) = ((aq)b)p, \\ (ac)p &= (ap)(cp) = (0, a, 0)(1, 1_M, 0) = (1, (aq^1)(1_M q^0), 0) = (1, aq, 0) = (1, 1_M, 0)(0, aq, 0) \\ &= (cp)((aq)p) = (c(aq))p \end{aligned}$$

olup R' deki tüm ilişkiler $BR(M, q)$ da sağlanır.

iii) İddia: M nin $\langle A | R \rangle$ takdimine göre olan kanonik formu W_0 olmak üzere $BR(M, q)$ nin kanonik formu $W = \{c^m w_0 b^n : m, n \in \mathbb{N}^0, w_0 \in W_0\}$ olur.

Bu iddianın doğruluğunu göstermek için öncelikle $\forall w \in (A \cup \{b, c\})^*$ için $w = \bar{w}$ R' nin bir sonucu olacak şekilde $\bar{w} \in W$ elemanının var olduğunu göstermeliyiz. Bunu $|w|$ üzerinden tümevarım ile gösterelim.

$|w| = 0$ veya $|w| = 1$ ise sonuç açıktır.

$|w| \geq 2$ ve iddia $|w|$ den küçük uzunluklu kelimeler için doğru olsun. $|w| \geq 2$ ise bir $w' \in (A \cup \{b, c\})^*$ için $a \in A$ olmak üzere ya $w \equiv w'a$ ya $w \equiv w'b$ ya da $w \equiv w'c$ şeklindedir. Ayrıca $|w'| < |w|$ olup tümevarım hipotezinden dolayı $w' = c^m w'_0 b^n$ R' nin bir sonucu olacak şekilde $m, n \in N^0$ ve $w'_0 \in W_0$ vardır.

1. durum: $w \equiv w'a$ ise Önerme 4.2.6 (iii) kullanılarak

$$w = (c^m w'_0 b^n) a \equiv c^m w'_0 (b^n a) = c^m w'_0 (a q^n) b^n \equiv c^m (w'_0 (a q^n)) b^n = c^m w'_0 b^n \in W$$

elde edilir. Burada $w_0, w'_0(aq^n) \in A^*$ in W_0 daki kanonik formudur.

2. durum: $w \equiv w'b$ ise

$$w = (c^m w'_0 b^n) b \equiv c^m w'_0 (b^n b) = c^m w'_0 b^{n+1} \in W$$

olur.

3. durum: $w \equiv w'c$ ise $w = (c^m w'_0 b^n) c$ dir. Eğer $n = 0$ ise Önerme 4.2.6 (ii) kullanılarak

$$w = (c^m w'_0 b^n) c \equiv c^m w'_0 c \equiv c^m (w'_0 c) = c^m c (w'_0 q) \equiv c^{m+1} w'_0 = c^m w'_0 b^0 \in W$$

elde edilir. Burada $w_0, w'_0 q \in A^*$ in W_0 daki kanonik formudur. Eğer $n \geq 1$ ise

$$w = (c^m w'_0 b^n) c \equiv c^m w'_0 b^{n-1} (bc) = c^m w'_0 b^{n-1} 1 \equiv c^m w'_0 b^{n-1} \in W$$

elde edilir.

Son olarak, W nun farklı elemanlarının $BR(M, q)$ nin farklı elemanlarını temsil ettiğini gösterelim.

$w_1, w_2 \in W_0 \subseteq A^*$ olmak üzere $c^m w_1 b^n, c^p w_2 b^q \in W$ için $c^m w_1 b^n = c^p w_2 b^q$ $BR(M, q)$ da sağlansın. O halde

$$\begin{aligned} (c^m w_1 b^n)_p &= (c^p w_2 b^q)_p \Rightarrow (cp)^m (w_1 p) (bp)^n = (cp)^p (w_2 p) (bp)^q \\ &\Rightarrow (1, 1_M, 0)^m (0, w_1, 0) (0, 1_M, 1)^n = (1, 1_M, 0)^p (0, w_2, 0) (0, 1_M, 1)^q \\ &\Rightarrow (m, w_1, n) = (p, w_2, q) \Rightarrow m = p, n = q \text{ ve } M \text{ de } w_1 = w_2 \end{aligned}$$

olup W nun farklı elemanları $BR(M, q)$ nin farklı elemanlarını temsil eder. O halde W , $BR(M, q)$ nin kanonik formudur. ■

Sonuç 4.2.7: Yukarıda verilen takdimde $|A| + 2$ doğuray ve $|R| + 2|A| + 1$ tane ilişki olup kolayca görülüyor ki M sonlu takdim edilebilir bir monoid iken M nin Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ da sonlu takdim edilebilirdir. ■

Genel olarak bu ifadenin tersi doğru değildir. Bruck-Reilly genişlemesi $BR(M, q)$ sonlu takdim edilebilir olduğu halde kendisi sonlu takdim edilebilir olmayan bir grup örneğini tüm detaylarıyla Ruškuc (1999)'da bulabilirsiniz.

Önerme 4.2.8: M bir monoid ve q , M üzerinde bir endomorfizm olsun. $\forall i, j, k, l \in \mathbb{N}^0$ ve $a, b \in A^*$ için $c^i a b^j = c^k b b^l$ ilişkisinin $BR(M, q)$ da sağlanıyor olması için gerek ve yeter koşul $i = k, j = l$ olması ve $a = b$ nin M de sağlanıyor olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 4.2.5'te tanımlanan p homomorfizmini alalım. Dikkat edilirse $p : (A \cup \{b, c\})^* \rightarrow BR(M, q)$ bir epimorfizmdir.

$c^i a b^j = c^k b b^l$ ilişkisi $BR(M, q)$ da sağlanıyor olsun. O halde $(c^i a b^j)p = (c^k b b^l)p$ dır. Ayrıca $a, b \in A^*$ olup $a = a_1 \mathbf{L} a_k$, $b = a'_1 \mathbf{L} a'_t$ olacak şekilde $a_1, \mathbf{K}, a_k, a'_1, \mathbf{K}, a'_t \in A$ ve $k, t \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$c^i a b^j \equiv c^i a_1 \mathbf{L} a_k b^j$$

$$c^k b b^l \equiv c^k a'_1 \mathbf{L} a'_t b^l$$

olup

$$(c^i a_1 \mathbf{L} a_k b^j)p = (c^k a'_1 \mathbf{L} a'_t b^l)p$$

$$\Rightarrow (cp)^i (a_1 p) \mathbf{L} (a_k p) (bp)^j = (cp)^k (a'_1 p) \mathbf{L} (a'_t p) (bp)^l$$

$$\Rightarrow (1, 1_M, 0)^i (0, a_1, 0) \mathbf{L} (0, a_k, 0) (0, 1_M, 1)^j = (1, 1_M, 0)^k (0, a'_1, 0) \mathbf{L} (0, a'_t, 0) (0, 1_M, 1)^l$$

$$\Rightarrow (i, a_1 \mathbf{L} a_k, j) = (k, a'_1 \mathbf{L} a'_t, l)$$

$$\Rightarrow (i, a, j) = (k, b, l)$$

$$\Rightarrow i = k, j = l \text{ dir ve } a = b \text{ } M \text{ de sağlanır.}$$

$(\Leftarrow)$ Aşikâr. ■

Not 4.2.9: $a, b \in A^*$ için a ile b nin sırasıyla L, R, H, D bağlantılı olması demek a ile b nin M de temsil ettikleri elemanların sırasıyla L, R, H, D bağlantılı olması demektir. Benzer şekilde, $a, b \in (A \cup \{b, c\})^*$ için a ile b nin sırasıyla L, R, H, D bağlantılı olması demek a ile b nin $BR(M, q)$ da temsil ettikleri elemanların sırasıyla L, R, H, D bağlantılı olması demektir.

Sonuç 4.2.10: Teorem 4.2.5'te verilen takdimi Bruck-Reilly genişlemesinin bir tanımı olarak düşünürsek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- (i) $\forall w \in (A \cup \{b, c\})^*$ kelimesi $BR(M, q)$ da $a \in A^*$ ve $m, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere $c^m a b^n$ formundaki bir kelimeye eşittir.
- (ii) Herhangi $c^m a b^n, c^p b b^q \in BR(M, q)$ için
- $c^m a b^n R c^p b b^q \Leftrightarrow m = p$ ve $a R b$;
 - $c^m a b^n L c^p b b^q \Leftrightarrow n = q$ ve $a L b$;
 - $c^m a b^n H c^p b b^q \Leftrightarrow m = p, n = q$ ve $a H b$; ve
 - $c^m a b^n D c^p b b^q \Leftrightarrow a D b$

olur.

İspat: (i) $w \in (A \cup \{b, c\})^*$ olsun. Eğer $w = b^m c^n$ ($m, n \in \mathbb{N}^0$) ise $bc = 1$ ilişkisi kullanılarak

$$w = b^m c^n = \begin{cases} b^{m-n} & m \geq n \\ c^{n-m} & n > m \end{cases}$$

elde edilir.

Eğer $w = a c^m$ ($m \in \mathbb{N}^0$ ve $a \in A^*$) ise Önerme 4.2.6 (iv) den

$$w = a c^m = c^m (a q^m)$$

şeklindedir ve $q : M \rightarrow M$ endomorfizm olduğundan $a q^m \in A^*$ dir.

Eğer $w = b^m a$ ($m \in \mathbb{N}^0$ ve $a \in A^*$) ise Önerme 4.2.6 (iii) den

$$w = b^m a = (a q^m) b^m$$

şeklindedir ve $q : M \rightarrow M$ endomorfizm olduğundan $aq^m \in A^*$ dir.

Eğer $w = ab^m$, $w = c^m a$ veya $w = c^m a b^m$ şeklinde ise zaten verilen formdadır. O halde $\forall w \in (A \cup \{b, c\})^*$ kelimesi $BR(M, q)$ da $w_0 \in A^*$ ve $m, n \in \mathbb{N}^0$ olmak üzere $c^m w_0 b^n$ formundaki bir kelimeye eşittir.

(ii) $c^m a b^n R c^p b b^q \Leftrightarrow m = p$ ve $a R b$ olduğunu gösterelim. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

($\Rightarrow$) $c^m a b^n$ ve $c^p b b^q$ $BR(M, q)$ da R -bağlantılı iki eleman olsunlar. O halde

$$\begin{aligned} (c^m a b^n)(c^i l b^j) &= c^p b b^q \text{ ve} \\ (c^p b b^q)(c^k g b^l) &= c^m a b^n \end{aligned}$$

olacak şekilde $c^i l b^j, c^k g b^l \in BR(M, q)$ vardır.

Eğer $n \geq i$ ise

$$\begin{aligned} (c^m a b^n)(c^i l b^j) &= c^p b b^q \Leftrightarrow c^m a b^{n-i} l b^j = c^p b b^q \\ &\Leftrightarrow c^m a (l q^{n-i}) b^{n-i+j} = c^p b b^q \\ &\Leftrightarrow m = p, n - i + j = q \text{ dur ve} \\ &\quad a (l q^{n-i}) = b \text{ } M \text{ de sağlanır} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Eğer $n < i$ ise

$$\begin{aligned} (c^m a b^n)(c^i l b^j) &= c^p b b^q \Leftrightarrow c^m a c^{i-n} l b^j = c^p b b^q \\ &\Leftrightarrow c^{m+i-n} (a q^{i-n}) l b^j = c^p b b^q \\ &\Rightarrow m + i - n = p \end{aligned}$$

olup $p > m$ dir. Bunu $(c^p b b^q)(c^k g b^l) = c^m a b^n$ eşitliğinde kullanalım. Eğer $q \geq k$ ise

$$\begin{aligned}(c^p b b^q)(c^k g b^l) &= c^m a b^n \Leftrightarrow c^p b b^{q-k} g b^l = c^m a b^n \\ &\Leftrightarrow c^p b (g b^{q-k}) b^{q-k+l} = c^m a b^n \\ &\Rightarrow m = p\end{aligned}$$

olur. Bu durum $p > m$ olması ile çelişiyor olup $q < k$ dır. O halde

$$\begin{aligned}(c^p b b^q)(c^k g b^l) &= c^m a b^n \Leftrightarrow c^p b c^{k-q} g b^l = c^m a b^n \\ &\Leftrightarrow c^{p+k-q} (b q^{k-q}) g b^l = c^m a b^n \\ &\Leftrightarrow p+k-q = m, l = n \text{ dir ve} \\ &\quad (b q^{k-q}) g = a \text{ } M \text{ de sağlanır}\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Ancak $q < k$ olduğundan $p < m$ dir ve bu da $p > m$ olması ile çelişir. O halde çelişki olmayan durumlara bakıldığında $n \geq i$ ve $m = p$ olur. Benzer şekilde $q \geq k$ olduğu elde edilebilir. Bu durumda $l q^{n-i}, g q^{q-k} \in A^*$ için $a(l q^{n-i}) = b$ ve $b(g q^{q-k}) = a$ olup $a R b$ olur.

($\Leftarrow$) $a, b \in A^*$ için $a R b$ olmak üzere $c^m a b^n, c^m b b^q \in BR(M, q)$ olsun. $a R b$ olduğundan $a l = b$ ve $b g = a$ olacak şekilde $l, g \in A^*$ vardır. $c^n l b^q, c^q g b^n \in BR(M, q)$ için

$$\begin{aligned}(c^m a b^n)(c^n l b^q) &= c^m a l b^q = c^m b b^q \\ (c^m b b^q)(c^q g b^n) &= c^m b g b^n = c^m a b^n\end{aligned}$$

olup $c^m a b^n R c^m b b^q$ olur. ■

Önerme 4.2.11: M bir monoid ve q, M üzerinde bir endomorfizm olsun. O halde $BR(M, q)$ nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i, M$ nin bir monoid doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq M$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i, M$ nin bir monoid doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq M$ kümesi var olsun. O halde $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \cup \{b, c\}, BR(M, q)$ nin bir doğuray kümesidir.

$a \in A_0$ herhangi bir eleman olsun. $a = aq^0$ olduğundan $a \in \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ olup $A_0 \subseteq \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ olur. Ayrıca, herhangi bir $i \in \mathbb{N}^0$ için Önerme 4.2.6 (iii)'den

$$\begin{aligned} (aq^i)b^i &= b^i a \Rightarrow (aq^i)b^i c^i = b^i a c^i \quad (bc=1) \\ &\Leftrightarrow aq^i = b^i a c^i \end{aligned}$$

olup $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \subseteq (A_0 \cup \{b, c\})^*$ olur. O halde $A_0 \cup \{b, c\}$ kümesi $BR(M, q)$ yı doğuruyor olup $BR(M, q)$ sonlu doğuraylıdır.

$(\Rightarrow)$ $BR(M, q)$ sonlu doğuraylı ve bir sonlu doğurayı da $X = \{(m_1, a_1, n_1), \mathbf{K}, (m_t, a_t, n_t)\} \quad (t \in \mathbb{N})$ olsun. Şimdi

$$A_0 = \{a_i \in M : \exists i \in \{1, 2, \mathbf{K}, t\} \text{ için } (m_i, a_i, n_i) \in X\}$$

kümesini ele alalım. A_0 kümesinin sonlu bir küme olduğu açıktır. $A_0 \subseteq M$ ve $q : M \rightarrow M$ bir endomorfizm olduğundan $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \subseteq M$ olup $\left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle \subseteq M$ olur.

Herhangi bir $g \in M$ olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}^0$ için $(m, g, n) \in BR(M, q)$ olup

$$(m, g, n) = (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \mathbf{L} (m_{i_k}, a_{i_k}, n_{i_k})$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi k üzerinden tümevarım ile

$$(m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \mathbf{L} (m_{i_k}, a_{i_k}, n_{i_k}) = (a, \prod_{j=1}^k a_{i_j} q^{l_{ij}}, g) (a, l_{i_j} (j=1, \mathbf{K}, k), g \in \mathbb{N}^0)$$

ve her $g \in M$ için

$$g \in_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$$

olduğunu gösterelim.

Eğer $k=1$ ise $(m, g, n) = (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1})$ şeklinde olup $g = a_{i_1} = a_{i_1} q^0 \in \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$

olur.

Eğer $k=2$ ise $(m, g, n) = (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2})$ şeklinde olup iki durum söz konusudur.

(i) $n_{i_1} \geq m_{i_2}$ ise $r = \max\{n_{i_1}, m_{i_2}\} = n_{i_1}$ olup

$$\begin{aligned} (m, g, n) &= (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \\ &= (m_{i_1} - n_{i_1} + n_{i_1}, (a_{i_1} q^{n_{i_1} - n_{i_1}}) (a_{i_2} q^{n_{i_1} - m_{i_2}}), n_{i_2} - m_{i_2} + n_{i_1}) \\ &= (m_{i_1}, (a_{i_1} q^0) (a_{i_2} q^{n_{i_1} - m_{i_2}}), n_{i_2} - m_{i_2} + n_{i_1}) \\ &= (m_{i_1}, a_{i_1} (a_{i_2} q^{n_{i_1} - m_{i_2}}), n_{i_2} - m_{i_2} + n_{i_1}) \end{aligned}$$

ve buradan $g = a_{i_1} (a_{i_2} q^{n_{i_1} - m_{i_2}}) \in_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$ olur.

(ii) $m_{i_2} > n_{i_1}$ ise $r = \max\{n_{i_1}, m_{i_2}\} = m_{i_2}$ olup

$$\begin{aligned}
 (m, g, n) &= (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \\
 &= (m_{i_1} - n_{i_1} + m_{i_2}, (a_{i_1} q^{m_{i_2} - n_{i_1}}) (a_{i_2} q^{m_{i_2} - m_{i_2}}), n_{i_2} - m_{i_2} + m_{i_2}) \\
 &= (m_{i_1} - n_{i_1} + m_{i_2}, (a_{i_1} q^{m_{i_2} - n_{i_1}}) (a_{i_2} q^0), n_{i_2}) \\
 &= (m_{i_1} - n_{i_1} + m_{i_2}, (a_{i_1} q^{m_{i_2} - n_{i_1}}) a_{i_2}, n_{i_2})
 \end{aligned}$$

ve buradan $g = (a_{i_1} q^{m_{i_2} - n_{i_1}}) a_{i_2} \in \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ olur.

Kabul edelim ki iddia X deki $k-1$ ($k \geq 2$) tane elemanın çarpımı şeklindeki elemanlar için doğru olsun. Şimdi X deki k tane elemanın çarpımı şeklinde olan

$$(m, g, n) = (m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \mathbf{L} (m_{i_k}, a_{i_k}, n_{i_k})$$

elemanını düşünelim. Kabulümüzden dolayı

$$(m_{i_1}, a_{i_1}, n_{i_1}) (m_{i_2}, a_{i_2}, n_{i_2}) \mathbf{L} (m_{i_{k-1}}, a_{i_{k-1}}, n_{i_{k-1}}) = (p, \prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}}, q)$$

olacak şekilde p, l_{i_j} ($j=1, \mathbf{K}, k$), $q \in \mathbb{N}^0$ vardır. O halde

$$(m, g, n) = (p, \prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}}, q) (m_{i_k}, a_{i_k}, n_{i_k})$$

olup yine iki durum söz konusudur.

(i) $q \geq m_{i_k}$ ise $r = \max\{q, m_{i_k}\} = q$ olup

$$(m, g, n) = (p - q + q, \left(\left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) q^{q-q} \right) (a_{i_k} q^{q-m_{i_k}}), n_{i_k} - m_{i_k} + q)$$

$$\begin{aligned}
&= (p, \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) q^0) (a_{i_k} q^{q-m_{i_k}}, n_{i_k} - m_{i_k} + q) \\
&= (p, \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) (a_{i_k} q^{q-m_{i_k}}, n_{i_k} - m_{i_k} + q)
\end{aligned}$$

ve buradan $g = \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) (a_{i_k} q^{q-m_{i_k}}) = \prod_{j=1}^k a_{i_j} q^{l_{i_j}} \in {}_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$ dir. ($l_{i_k} = q - m_{i_k}$ olarak alınmıştır.)

(ii) $m_{i_k} > q$ ise $r = \max\{q, m_{i_k}\} = m_{i_k}$ olup

$$\begin{aligned}
(m, g, n) &= (p - q + m_{i_k}, \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) q^{m_{i_k}-q}) (a_{i_k} q^{m_{i_k}-m_{i_k}}, n_{i_k} - m_{i_k} + m_{i_k}) \\
&= (p - q + m_{i_k}, \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j}} \right) q^{m_{i_k}-q}) (a_{i_k} q^0, n_{i_k}) \\
&= (p - q + m_{i_k}, \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j} m_{i_k} - q} \right) a_{i_k}, n_{i_k})
\end{aligned}$$

ve buradan $g = \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{i_j} q^{l_{i_j} + m_{i_k} - q} \right) a_{i_k} = \prod_{j=1}^k a_{i_j} q^{l'_{i_j}} \in {}_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$ dir. ($l'_{i_j} = l_{i_j} + m_{i_k} - q$ ($j=1, \mathbf{K}, k-1$) ve $l'_{i_k} = 0$ olarak alınmıştır.)

O halde $\forall g \in M$ için $g \in {}_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$ olup $M \subseteq {}_M \left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \right\rangle$ olduğundan

$\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ kümesi M yi monoid olarak doğurur. ■

Önerme 4.2.12: M bir monoid ve $q : M \rightarrow M$ bir endomorfizm olsun. $BR(M, q)$ sonlu takdimli ve M, A kümesi tarafından doğuruluyor ise

$R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i = \{uq^i = vq^i : i \geq 0, (u = v) \in R_0\}$ olarak alındığında $\langle A|R \rangle$ takdimi M monoidini tanımlıyor olacak şekilde sonlu bir $R_0 \subseteq A^* \times A^*$ ilişkiler kümesi vardır.

İspat: Araújo (2000), Theorem 5.21'e bakınız. ■

Önerme 4.2.13: M bir monoid ve $q : M \rightarrow M$ bir endomorfizm olsun. A sonlu bir küme ve sonlu bir $R_0 \subseteq A^* \times A^*$ ilişkiler kümesi için $R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i$ olmak üzere eğer M , $\langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlanan sonlu doğuraylı bir monoid ise $BR(M, q)$ sonlu takdim edilebilirdir.

İspat: İspatı için Araújo (2000), Theorem 5.22'ye bakınız. ■

Sonuç 4.2.14: M bir monoid ve $q : M \rightarrow M$ sonlu dereceli bir endomorfizm olsun. $BR(M, q)$ nın sonlu doğuraylı / takdim edilebilir olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu doğuraylı / takdim edilebilir olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ M sonlu doğuraylı / takdim edilebilir iken $BR(M, q)$ nın da sonlu doğuraylı / takdim edilebilir olduğunu biliyoruz.

$(\Rightarrow)$ $BR(M, q)$ sonlu takdim edilebilir olsun. Önerme 4.2.11 ve Önerme 4.2.12'den biliyoruz ki A_0 ve R_0 sonlu kümeler olmak üzere M , $\left\langle \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \mid \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i \right\rangle$ takdimi ile tanımlanır. Burada q endomorfizmi sonlu dereceli olup $\forall j \in \mathbb{N}$ için $q^{k+j} = q^k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ var olduğundan

$$\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i = \bigcup_{i=0}^k A_0 q^i \text{ ve } \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i = \bigcup_{i=0}^k R_0 q^i$$

olur. O halde M sonlu takdimlidir.

M nin sonlu doğuraylı olduğu benzer şekilde gösterilebilir. ■

4.3. Grupların Bruck-Reilly Genişlemeleri

G bir grup ve q , G üzerinde bir endomorfizm olsun. Grup özelliklerini kullanarak Bruck-Reilly genişlemeleri için daha önce verdiğimiz bazı sonuçları G grubunun Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G, q)$ için daha da basitleştirebiliriz.

Bu bölümde, $BR(G, q)$ nın birim elemanını 1 ve G nin birim elemanını 1_G ile göstereceğiz. Ayrıca G grubunu monoid olarak tanımlayan takdim olarak $\langle A|R \rangle$ takdimini alacağız.

Önerme 4.3.1: G bir grup ve q , G üzerinde bir endomorfizm olsun. $\forall m, n, p, q \in \mathbb{N}^0$ ve $w_1, w_2 \in A^*$ için $BR(G, q)$ da

- (i) $c^m w_1 b^n R c^p w_2 b^q \Leftrightarrow m = p$;
- (ii) $c^m w_1 b^n L c^p w_2 b^q \Leftrightarrow n = q$;
- (iii) $c^m w_1 b^n H c^p w_2 b^q \Leftrightarrow m = p$ ve $n = q$.

İspat: G bir grup olduğunda $H=L=R=G \times G$ olup Sonuç 4.2.10'dan kolayca elde edilir. ■

Önerme 4.3.2: G bir grup; q , G üzerinde bir endomorfizm ve B , birim elemanı 1_B olan iki-devirli monoid olsun. İki-devirli monoid için Örnek 2.11.2.4'te verilen takdimi $\langle b, c \mid bc=1 \rangle$ olarak alalım. O halde G grubunun q ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G, q)$ dan B ye

$$\begin{aligned} bp &= b, \\ cp &= c, \\ ap &= 1_B \quad (\forall a \in A) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek $p : BR(G, q) \rightarrow B$ epimorfizmi vardır.

İspat: $p : A \cup \{b, c\} \rightarrow B$ dönüşümü

$$\begin{aligned} bp &= b, \\ cp &= c, \\ ap &= 1_B \quad (\forall a \in A) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. p nin iyi tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall w = x_1 x_2 \dots x_k \in \langle A \cup \{b, c\} \rangle = BR(G, q)$ için

$$wp = (x_1 \dots x_k)p = (x_1 p) \dots (x_k p)$$

şeklinde tanımlanırsa p dönüşümünü $BR(G, q)$ dan B ye tanımlı bir homomorfizme genişletebiliriz.

Şimdi $w \in B$ alalım. Örnek 2.11.2.4'ten dolayı $w = c^p b^q$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{N}^0$ nin var olduğunu biliyoruz. O halde

$$w = c^p b^q = (cp)^p (bp)^q = (c^p b^q)p$$

olup p örtendir.

Son olarak p nin bu şekildeki tek epimorfizm olduğunu gösterelim.

$$l : BR(G, q) \rightarrow B;$$

$$\begin{aligned} bl &= b, \\ cl &= c, \\ al &= 1_B \quad (\forall a \in A) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir epimorfizm olsun. $w = c^m a b^n \in BR(G, q)$ ($a \equiv a_1 \mathbf{L} a_k \in A^*$) alalım.

$$\begin{aligned} wp &= (c^m a b^n)p \equiv (c^m a_1 \mathbf{L} a_k b^n)p = (cp)^m (a_1 p) \mathbf{L} (a_k p)(bp)^n = c^m 1_B \mathbf{L} 1_B b^n \\ &= (cl)^m (a_1 l) \mathbf{L} (a_k l)(bl)^n = (c^m a_1 \mathbf{L} a_k b^n)l \equiv (c^m a b^n)l = wl \end{aligned}$$

olup $p = l$ olur. ■

Önerme 4.3.3: p , Önerme 4.3.2’de verilen epimorfizm olmak üzere $w \in (A \cup \{b, c\})^*$ kelimesinin $BR(G, q)$ ’nın birimleri grubunun bir elemanını temsil etmesi için gerek ve yeter koşul w kelimesinin A^* ’dan bir kelimeye denk yani $wp = 1_B$ olmasıdır.

Ayrıca, G grubu $BR(G, q)$ ’nın birimlerinin oluşturduğu gruba izomorftur.

İspat: $w = c^m a b^n$ ($a \in A^*$), $BR(G, q)$ ’nın bir birimi olsun. O halde

$$(c^m a b^n)(c^p b b^q) = 1 \quad \text{ve} \quad (c^p b b^q)(c^m a b^n) = 1$$

olacak şekilde $c^p b b^q \in BR(G, q)$ vardır. Birinci eşitlikte eğer $n \geq p$ ise

$$\begin{aligned} (c^m a b^n)(c^p b b^q) = 1 &\Leftrightarrow c^m a b^{n-p} b b^q = 1 \\ &\Leftrightarrow c^m a (b q^{n-p}) b^{n-p} b^q = 1 \\ &\Leftrightarrow c^m a (b q^{n-p}) b^{n-p+q} = 1 \\ &\Rightarrow m = 0, a (b q^{n-p}) = 1_G, n - p + q = 0 \end{aligned}$$

olur. Eğer $p > n$ ise

$$\begin{aligned}
(c^m a b^n)(c^p b b^q) &= 1 \Leftrightarrow c^m a c^{p-n} b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow c^m c^{p-n} (a q^{p-n}) b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow c^{m+p-n} (a q^{p-n}) b b^q = 1 \\
&\Rightarrow m + p - n = 0, (a q^{p-n}) b = 1, q = 0
\end{aligned}$$

olur. $m \geq 0$ olduğundan $n \geq p$ olur ve bu durum $p > n$ olması ile çelişir. O halde $n \geq p$ dir. Bu durumda $m = 0, a (b q^{n-p}) = 1_G, n - p + q = 0$ olup

$$\begin{aligned}
(c^m a b^n)(c^p b b^q) &= 1 \Leftrightarrow a b^n c^{n+q} b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow a b^n c^n c^q b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow a 1 c^q b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow a c^q b b^q = 1 \\
&\Leftrightarrow c^q (a q^q) b b^q = 1 \\
&\Rightarrow q = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, ikinci eşitlikten de $p = n = 0$ olduğu elde edilir. O halde $w, c^0 a b^0$ ($a \in A^*$) formunda yani $w \in A^*$ olur.

Tersine $w \in A^*$ ise $w, a \equiv a_1 \mathbf{L} a_k \in A^*$ olmak üzere $BR(G, q)$ nın $c^0 a b^0$ formundaki elemanını temsil eder. O halde $a^{-1} = a_k^{-1} \mathbf{L} a_1^{-1}$ olmak üzere

$$(c^0 a b^0)(c^0 a^{-1} b^0) = c^0 (a a^{-1}) b^0 \equiv c^0 (a_1 \mathbf{L} a_k a_k^{-1} \mathbf{L} a_1^{-1}) b^0 = c^0 1_G b^0 = 1$$

ve benzer şekilde

$$(c^0 a^{-1} b^0)(c^0 a b^0) = 1$$

olup $w, BR(G, q)$ nın bir birimini temsil eder.

Ayrıca A kümesi G grubunu doğurduğundan $f: U(BR(G, q)) \rightarrow G$, $w \equiv c^0 a b^0$ a a dönüşümü bir izomorfizmdir. ■

Yukarıda verdiğimiz son iki teorem Teorem 4.3.5'in ispatında kullanılacaktır.

Not 4.3.4: G grubunun elemanlarını temsil eden $(A \cup \{b, c\})^*$ daki kelimelere **grup kelimeleri** diyeceğiz.

Teorem 4.3.5: G bir grup ve q , G üzerinde bir endomorfizm olsun. G nin q ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G, q)$ nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$, G nin bir monoid doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq G$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ Sonlu bir $A_0 \subseteq G$ altkümesi için $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ kümesi G yi monoid olarak doğuruyor olsun. O halde $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \cup \{b, c\}$, $BR(G, q)$ nin bir doğuray kümesidir.

$a \in A_0$ herhangi bir eleman olsun. $a = aq^0$ olduğundan $a \in \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ olup $A_0 \subseteq \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$ olur. Ayrıca herhangi bir $i \in \mathbb{N}^0$ için Önerme 4.2.6 (iii)'den

$$\begin{aligned} (aq^i)b^i &= b^i a \Rightarrow (aq^i)b^i c^i = b^i a c^i \quad (bc = 1) \\ &\Leftrightarrow aq^i = b^i a c^i \end{aligned}$$

olup $\bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i \subseteq (A_0 \cup \{b, c\})^*$ olur. O halde $A_0 \cup \{b, c\}$ kümesi $BR(G, q)$ yi doğuruyor olup $BR(G, q)$ sonlu doğuraylıdır.

$(\Rightarrow)$ G nin bir doğuray kümesi A iken $A \cup \{b, c\}$ kümesinin de $BR(G, q)$ nin bir doğuray kümesi olduğunu biliyoruz. O halde $BR(G, q)$ sonlu doğuraylı iken $A_0 \cup \{b, c\}$ kümesi $BR(G, q)$ nin bir doğuray kümesi olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq A$ kümesi vardır.

U , $BR(G, q)$ nin birimlerinin grubu olsun. U nun birim elemanının $BR(G, q)$ nin birim elemanı olduğu açıktır. Kabul edelim ki T , $BR(G, q)$ nin U altgrubunu içeren bir başka altgrubu olsun ($U \subseteq T$). $1 \in T$ ve $\forall t \in T$ için $1t = t = t1$ olduğundan 1 , T nin de birim elemanıdır. O halde $\forall t \in T$ için $tt^{-1} = t^{-1}t = 1$ olacak şekilde $t^{-1} \in T$ var olup T nin her elemanı $BR(G, q)$ nin bir birimi olduğundan $T \subseteq U$ olur. Dolayısıyla $U = T$ olup U maksimal altgruptur.

Önerme 4.3.3'ten $U \cong G$ olup $BR(G, q)$ nin tanımı $A \cup \{b, c\}$ kümesi tarafından doğurulan monoid olarak alınırsa G grubu $BR(G, q)$ nin maksimal altgrubu olarak düşünülebilir. Önerme 3.11'den dolayı da G grubunun $BR(G, q)$ daki kosetleri G nin R -sınıfındaki H -sınıfları olur. Ayrıca Önerme 4.3.1'den G nin bulunduğu R -sınıfının

$$Gb^* = \{ab^i : i \geq 0, a \in G\}$$

kümesi ve bu R -sınıfındaki H -sınıflarının da

$$H_i = Gb^{i-1} \quad (i \geq 1)$$

kümeleri olduğu açıktır. O halde

$$H_i c^{i-1} = Gb^{i-1} c^{i-1} = G \quad (i \geq 1)$$

olup r_i, r'_i ($i \geq 1$) koset temsilcileri sistemi olarak $r_i = b^{i-1}$ ve $r'_i = c^{i-1}$ ($i \geq 1$) alınabilir. Önerme 3.12'den dolayı da

$$Y = \{1_G r_i a r'_{ia} : i \in I, a \in A_0 \cup \{b, c\}, ia \in I\}$$

kümesi G nin bir monoid doğuray kümesidir. Burada

$$Gb^i a = G(aq^i)b^i = Gb^i$$

olup $r_{ia} = r_i$;

$$Gb^i b = Gb^{i+1} \Rightarrow C_i b = C_{i+1} \Rightarrow C_{ib} = C_{i+1} \Rightarrow r_{ib} = r_{i+1} = b^{i+1}$$

olup $r'_{ib} = c^{i+1}$; ve

$$Gb^i c = Gb^{i-1} \Rightarrow C_i c = C_{i-1} \Rightarrow C_{ic} = C_{i-1} \Rightarrow r_{ic} = r_{i-1}$$

olup $r'_{ic} = r'_{i-1} = c^{i-1}$

alınabilir. Bu ifadeler Y kümesinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$\begin{aligned} Y &= \{1_G b^i a c^i, 1_G b^i b c^{i+1}, 1_G b^{i+1} c c^i : i \geq 0, a \in A_0\} \\ &= \{1_G (aq^i) b^i c^i, 1_G 1 : i \geq 0, a \in A_0\} \\ &= \{aq^i : i \geq 0, a \in A_0\} \cup \{1_G\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\{aq^i : i \geq 0, a \in A_0\} = \bigcup_{i \geq 0} A_0 q^i$$

G nin bir monoid doğuray kümesidir. ■

Teorem 4.3.6: G bir grup ve q , G üzerinde bir endomorfizm olsun. G nin q ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilir ise G sonlu doğuraylıdır.

İspat: $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilir ise sonlu doğuraylı olup bir önceki teoremden $\bigcup_{j \geq 0} A_0 q^j$ kümesi G yi monoid olarak doğuruyor olacak şekilde sonlu bir $A_0 \subseteq G$ altkümesi vardır. $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ olsun. O halde

$$A = \bigcup_{j \geq 0} A_0 q^j = \{aq^j : 1 \leq i \leq t, j \geq 0\}$$

dır. Buradaki aq^j elemanlarını kısaca $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq t, j \geq 0$) ile temsil edelim. Bu durumda

$$A = \{a_{i,j} : 1 \leq i \leq t, j \geq 0\}$$

olur. Özel olarak $a_{i,0} = a_i q^0 = a_i$ olup $a_{i,0}$ yerine daha da kısa olarak a_i yazabiliriz.

G nin bu A doğuray kümesi ile elde edilen $\langle A | R \rangle$ takdimini alalım. Bu durumda

$$P = \langle A, b, c \mid R, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (a \in A) \rangle$$

$BR(G, q)$ nın bir takdimi olup bu takdimde gerekli notasyon değişiklikleri yapılır ise

$$P = \left\langle A, b, c \mid R, bc = 1, ba_{i,j} = (a_{i,j+1})b, a_{i,j}c = c(a_{i,j+1}) \ (1 \leq i \leq t, j \geq 0) \right\rangle \quad (1)$$

takdimi elde edilir. $\forall 1 \leq i \leq t, j \geq 0$ için

$$a_{i,j} = a_i q^j = b^j a_i c^j = b^j a_{i,0} c^j$$

olup takdimde gereksiz olan $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq t, j \geq 1$) doğuraylarını T_2 Tietze dönüşümü ile çıkaralım ve geriye kalan $a_{i,0}$ ($1 \leq i \leq t$) doğurayları yerine a_i ($1 \leq i \leq t$) yazıp gerekli düzenlemeleri yapalım. Böylece R' , R de $a_{i,j}$ yerine $b^j a_i c^j$ ($1 \leq i \leq t, j \geq 1$) yazılarak elde edilen ilişkiler kümesi olmak üzere

$$P \longrightarrow \left\langle a_1, \mathbf{K}, a_t, b, c \mid R', bc = 1, b^{j+1} a_i c^j = (b^{j+1} a_i c^{j+1})b, b^j a_i c^{j+1} = c(b^{j+1} a_i c^{j+1}) \right. \\ \left. (1 \leq i \leq t, j \geq 0) \right\rangle \quad (2)$$

olur. $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilir olup

$$P'' = \left\langle a_1, \mathbf{K}, a_t, b, c \mid R'', bc = 1, b^{j+1} a_i c^j = (b^{j+1} a_i c^{j+1})b, b^j a_i c^{j+1} = c(b^{j+1} a_i c^{j+1}) \right. \\ \left. (1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s-1) \right\rangle$$

$BR(G, q)$ nın bir takdimi olacak şekilde sonlu bir $R'' \subseteq R'$ altkümesi ve $s \geq 1$ tamsayısı vardır. Şimdi gereksiz ilişkilerden oluşan $R' - R''$ kümesini ve gereksiz doğuraylardan oluşan $a_{i,k}$ ($1 \leq i \leq t, k \geq 1$) kümesini (dolayısıyla da $a_{i,k} = b^k a_{i,0} c^k$ ($1 \leq i \leq t, k \geq 1$) ilişkilerini) T_1 ve T_3 Tietze dönüşümleri ile takdime tekrar ekleyelim. Böylece

$$P'' \longrightarrow \langle A, b, c \mid R', bc=1, b^{j+1}a_i c^j = (b^{j+1}a_i c^{j+1})b, b^j a_i c^{j+1} = c(b^{j+1}a_i c^{j+1}), \\ a_{i,k} = b^k a_{i,0} c^k \ (1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s-1, k \geq 1) \rangle$$

olur. İlk satırdaki ilişkilerde her $b^k a_i c^k \ (1 \leq i \leq t, k \geq 1)$ ifadesini $a_{i,k}$ ile yer değiştirelim. Ayrıca $k < s$ için $a_{i,k} = b^k a_i c^k$ ilişkilerinin $ba_{i,j} = a_{i,j+1}b \ (j < s)$ ile $bc=1$ ilişkilerinin bir sonucu olduğuna dikkat edelim. O halde $a_{i,k} = b^k a_i c^k \ (k < s)$ ilişkileri gereksiz olup T_4 Tietze dönüşümü ile takdimden çıkarılırsa $BR(G, q)$ için

$$\langle A, b, c \mid R, bc=1, ba_{i,j} = (a_{i,j+1})b, a_{i,j}c = c(a_{i,j+1}), a_{i,s+n} = b^{s+n} a_i c^{s+n} \\ (1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s-1, n \geq 0) \rangle \quad (3)$$

takdimi elde edilir.

H, G grubunun $\{a_{i,j} : 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq s-1\}$ kümesi tarafından doğurulan bir altgrubu ve $H \neq G$ olsun. O halde G nin H altgrubunda olmayan $\exists a_{i,s+n} \ (n \geq 0)$ doğurayı vardır. (1)'den dolayı $ba_{i,s+n} = (a_{i,s+n+1})b$ ilişkisi $BR(G, q)$ da sağlanıyor olup bu ilişki $BR(G, q)$ nın herhangi bir takdimindeki ilişkilerin bir sonucudur. Fakat aşağıdaki iddia ile bu ilişkilerin $BR(G, q)$ için (3)'te verilen takdimdeki ilişkilerin bir sonucu olmadığını göstereceğiz. Bu çelişki $H \neq G$ kabul etmemizden kaynaklanıyor olup $H = G$ olmak zorundadır. O halde G sonlu doğuraylıdır.

İddia: $ba_{i,s+n} = (a_{i,s+n+1})b$ ilişkisi (3)'te verilen takdimdeki ilişkilerin bir sonucu değildir.

İspat: Öncelikle hem u hem de v birer grup kelimesi (u boş kelime olabilir) ve v, H nin bir elemanını temsil etmiyor olacak şekildeki $w \equiv ubv$ kelimesine (3)'te

verilen takdimdeki ilişkiler uygulandığında yine aynı formdaki $w' \equiv u'bv'$ kelimesinin elde edildiğini gösterelim.

$w \equiv ubv$ istenen formda bir kelime olsun. (3)'te verilen takdimdeki ilişkiler incelendiğinde kolayca görülüyor ki uygulanan ilişki u, b ve v yi aynı anda etkileyemez. Çünkü bunu sağlayacak ilişkiler, u altkelimesinin b ile bitiyor olması durumunda uygulanabilecek $a_{i,s+n} = b^{s+n}a_i c^{s+n}$ ilişkileridir ve bu durum u nun bir grup kelimesi olmasıyla çelişir. Şimdi diğer durumları inceleyelim.

1. durum: w' 'nin u alt kelimesine (3)'te verilen takdimdeki bir ilişki uygulanarak elde edilen u' kelimesi için $u' = u$ (G de) ve $v' \equiv v$ olup w_2 istenen formdadır.

2. durum: w' 'nin v alt kelimesi için de benzer durum söz konusudur.

3. durum: w' , w 'den ub alt kelimesine bir ilişki uygulanarak elde ediliyor olsun. ub alt kelimesine uygulayabileceğimiz tek ilişki, u_0 bir grup kelimesi olmak üzere $u \equiv u_0 a_{i,j+1}$ iken $ba_{i,j} = (a_{i,j+1})b$ ilişkisidir. Bu durumda

$$w \equiv ubv \equiv u_0 a_{i,j+1} bv = u_0 ba_{i,j} v$$

olup $u' \equiv u_0$ ve $v' \equiv a_{i,j}v$ dir. Görüldüğü gibi u' ile v' birer grup kelimesidir ve v alt kelimesi H 'nin bir elemanını temsil etmediğinden $a_{i,j}v$ de H nin bir elemanını temsil etmez. O halde w' istenen formdadır.

4. durum: w' , w 'den bv alt kelimesine bir ilişki uygulanarak elde ediliyor olsun. Bu ilişki $bc=1$ olamaz. Çünkü v bir grup kelimesi olup c ile başlayamaz. Ayrıca bu ilişki $a_{i,s+n} = b^{s+n}a_i c^{s+n}$ de olamaz. Çünkü bu durumda $b^{s+n-1}a_i c^{s+n}$, v nin ön kelimesi olmak zorunda olup bu durum v nin bir grup kelimesi olmasıyla çelişir. O halde bv alt kelimesine uygulayabileceğimiz tek ilişki, v_0 H nin bir elemanını temsil etmeyen bir grup kelimesi olmak üzere $v \equiv a_{i,j}v_0$ iken $ba_{i,j} = (a_{i,j+1})b$ ilişkisidir. Bu durumda

$$w \equiv ubv \equiv uba_{i,j}v_0 = ua_{i,j+1}bv_0$$

olup $u' \equiv ua_{i,j+1}$ ve $v' \equiv v_0$ dır. Görüldüğü gibi u' ile v' birer grup kelimesidir ve v' altkelimesi H nin bir elemanını temsil etmiyor olup w istenen formdadır.

Sonuç olarak, istenen formdaki bir $w \equiv ubv$ kelimesine (3)'te verilen takdimdeki ilişkiler uygulandığında yine aynı formdaki $w \equiv u'bv'$ kelimesi elde edilir.

$ba_{i,s+n}$ kelimesinin istenen formda olduğu açıktır. Fakat boş kelime H nin bir elemanını temsil ediyor olup $(a_{i,s+n+1})b$ kelimesi istenen formda değildir. O halde $ba_{i,s+n}$ kelimesine (3)'te verilen takdimdeki ilişkiler uygulanarak $(a_{i,s+n+1})b$ elde edilemez olup $ba_{i,s+n} = (a_{i,s+n+1})b$ ilişkisi (3)'te verilen takdimdeki ilişkilerin bir sonucu değildir. ■

Teorem 4.3.7: G bir grup ve q , G üzerinde bir endomorfizm olsun. G nin q ile olan Bruck-Reilly genişlemesi $BR(G, q)$ nin sonlu takdim edilebilir olması için gerek ve yeter koşul $R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i = \{uq^i = vq^i : i \geq 0, (u = v) \in R_0\}$ olarak alındığında $\langle A | R \rangle$ takdimi G grubunu tanımlıyor olacak şekilde sonlu bir A kümesi ve sonlu bir $R_0 \subseteq A^* \times A^*$ ilişkiler kümesinin var olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $R = \bigcup_{i \geq 0} R_0 q^i$ olarak alındığında $\langle A | R \rangle$ takdimi G grubunu tanımlıyor olacak şekilde sonlu bir A kümesi ve sonlu bir $R_0 \subseteq A^* \times A^*$ ilişkiler kümesi var olsun. O halde

$$\langle A, b, c | R, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (\forall a \in A) \rangle$$

takdimi $BR(G, q)$ nın bir takdimidir. $R - R_0 = \{uq^i = vq^i : i \geq 1, (u = v) \in R_0\}$ kümesini ele alalım. Herhangi bir w kelimesi için $ba = (aq)b$ ve $bc = 1$ ilişkileri kullanıldığında $wq = bwc$ olduğu kolayca görülüyor. O halde her $(u = v) \in R_0, i \geq 1$ için

$$uq^i = b^i u c^i = b^i v c^i = vq^i$$

olup $uq^i = vq^i$ ($i \geq 1$) ilişkileri $ba = (aq)b$, $bc = 1$ ve $(u = v) \in R_0$ ilişkilerinin birer sonucudur. Dolayısıyla $uq^i = vq^i$ ($i \geq 1$) ilişkileri gereksiz ilişkiler olup bu ilişkiler T_4 Tietze dönüşümü ile takdimden çıkarılırsa $BR(G, q)$ için

$$\langle A, b, c \mid R_0, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (\forall a \in A) \rangle$$

takdimi elde edilir. A ile R_0 sonlu olduğundan $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilirdir.

($\Rightarrow$) $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilir olsun. Bir önceki teoremden dolayı G sonlu doğuraylıdır. G nin bir sonlu doğurayı A ve bir takdimi $\langle A \mid Q \rangle$ olsun. O halde

$$\langle A, b, c \mid Q, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (\forall a \in A) \rangle$$

$BR(G, q)$ nın bir takdimidir. $BR(G, q)$ sonlu takdim edilebilir olup Önerme 2.11.2.3'ten

$$\langle A, b, c \mid R_0, bc = 1, ba = (aq)b, ac = c(aq) \ (\forall a \in A) \rangle$$

$BR(G, q)$ nın bir takdimi olacak şekilde sonlu bir $R_0 \subseteq Q$ altkümesi vardır. Bu takdimi $BR(G, q)$ nın tanımı olarak aldığımızda G grubunu $BR(G, q)$ nın bir altgrubu olarak düşünebileceğimizi biliyoruz. Bu durumda Teorem 3.15'te tanımladığımız, bir monoidin herhangi bir altgrubu için bir takdim bulma yöntemini kullanabiliriz. Önerme 4.3.5'in ispatındaki gibi

$$H_i = Gb^{i-1}, \quad r_i \equiv b^{i-1} \quad \text{ve} \quad r_i' \equiv c^{i-1} \quad (i \geq 1)$$

alalım ve aynı teoremin ispatında G için elde edilen

$$b^k a c^k, \quad b^k b c^{k+1} (=1) \quad \text{ve} \quad b^{k+1} c c^k (=1)$$

doğuraylarını temsil eden yeni bir

$$B = \{[k, a], [k, b], [k+1, c] : k \geq 1, a \in A\}$$

alfabesini oluşturalım. $R_{0(k)}$, R_0 ın R_0 da a ile $[k, a]$ nın yer değiştirmesi ile elde edilen bir kopyası olsun. Ayrıca $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \in A$ olmak üzere

$$[k, a_1][k, a_2] \mathbf{L} [k, a_n] \quad (n \in \mathbb{N})$$

yerine kısaca $[k, a_1 a_2 \mathbf{L} a_n]$ yazalım. O halde

$$R_{0(k)} = \{[k, u] = [k, v] : (u = v) \in R_0\}$$

olur. Sonuç 3.19'dan

$$\begin{aligned} \langle B \mid R_{0(k)}, [k, b][k+1, c] = 1, [k, b][k+1, a] = [k, aq][k, b], \\ [k+1, a][k+1, c] = [k+1, c][k, aq], \\ [k, b] = 1 \quad (k \geq 1, a \in A) \rangle \end{aligned}$$

takdimi G grubunun bir takdimidir. $[k, b] = 1$ ve bu eşitlikten $[k+1, c] = 1$ olup $[k, b]$ ile $[k+1, c]$ doğurayları gereksiz doğuraylardır. Bu doğurayları T_2 Tietze dönüşümü ile takdimden çıkarıp ilişkilerde gereken $[k, b] = 1$ ve $[k+1, c] = 1$ değişikliklerini yaparsak G için

$$\langle [k, a] \mid R_{0(k)}, 1 = 1, [k+1, a] = [k, aq], [k+1, a] = [k, aq], 1 = 1 \quad (k \geq 1, a \in A) \rangle$$

takdimini elde ederiz. Dikkat edilirse

$$[k+1, a] = [k, aq] = \mathbf{L} = [1, aq^k]$$

olup bu eşitlikleri $R_{0(k)}$ da yazıp düzenlersek

$$R_{0(k)} = \{ [1, uq^{k-1}] = [1, vq^{k-1}] : (u = v) \in R_0 \}$$

olur. Ayrıca $1 = 1$ ve $[k+1, a] = [k, aq]$ ilişkileri gereksiz ilişkiler olup T_4 Tietze dönüşümü ile bu ilişkileri takdimden çıkarırsak G için

$$\langle [k, a] \mid R_{0(k)} \quad (k \geq 1, a \in A) \rangle$$

takdimini elde ederiz. Tekrar her $[1, a]$ doğurayını a ya çevirirsek G için

$$\langle A \mid uq^k = vq^k \ (k \geq 0, (u = v) \in R_0) \rangle$$

takdimini elde ederiz. ■

Not 4.3.8: Grupların Bruck-Reilly genişlemeleri ile ilgili çalışmalar incelenirken grupların Bruck-Reilly genişlemelerinin takdimleri ile HNN genişlemelerinin takdimleri arasındaki benzerlik dikkat çekmiştir. Gerçekten de G , $\langle A \mid R \rangle$ monoid takdimi ile tanımlanan bir grup, $H = \langle X \rangle$ ile K , G nin iki altgrubu ve $q : H \rightarrow K$ bir izomorfizm olmak üzere G nin H , K ve q ya bağlı HNN genişlemesi

$$\langle A, b, c \mid R, bc = 1, cb = 1, bx = (xq)b \ (x \in X) \rangle$$

takdimi ile tanımlanır. Ayrıca biliniyor ki, G sonlu takdimli bir grup olmak üzere G nin H , K ve q ya bağlı HNN genişlemesinin sonlu takdim edilebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin sonlu doğuraylı olmasıdır. Bu sonucun Teorem 4.3.6 ile benzerliği dikkat çekmektedir.

Grupların HNN genişlemeleri ve takdimleri ile ilgili ayrıntılı bilgi için Lyndon and Schupp (1976) ve Baumslag (1993)'ü inceleyebilirsiniz.

KAYNAKLAR

- ARAUJO, I. M., 2000. Presentations for Semigroup Constructions and Related Computational Methods. (Ph. D. Thesis), University of St. Andrews.
- ARAUJO, I. M., and RUŠKUC, N., 2001. Finite Presentability of Bruck-Reilly Extensions of Groups. *Journal of Algebra* 242: 20-30.
- ARAUJO, I. M., 2002. Finite Presentability of Semigroup Constructions. *International Journal of Algebra and Computation*, Vol. 12, Nos 1 & 2: 19-31.
- AYIK, H., 1998. Presentations And Efficiency of Semigroups. (Ph. D. Thesis), University of St Andrews.
- BAUMSLAG, G., 1993. Topics in Combinatorial Group Theory. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser-Verlag, Basel.
- CAMPBELL, C. M., ROBERTSON, E. F., RUŠKUC, N., and THOMAS R. M., 1996. On Subsemigroups of Finitely Presented Semigroups. *J. Algebra* 180: 1-21.
- CARVALHO, C. A. S., 2002. Presentations of Semigroups and Inverse Semigroups. (M. Sc. Dissertation), University of St Andrews.
- 2005. Generation and Presentations of Semigroup Constructions: Bruck-Reilly Extensions and P-semigroups. (Ph. D. Thesis), University of St Andrews.
- HOWIE, J. M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford, 351s.
- HOWIE, J. M., and RUŠKUC, N., 1994. Constructions and Presentations for Monoids. *Comm. Algebra* 22, No:1, 6209-6224.
- JOHNSON, D. L., 1990. Presentations of Groups. London Math. Soc, Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge.
- KARAKAŞ, H. İ., 2008. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402s.
- KNAUER, U., 1980. The Development of the Algebraic Theory of Semigroups. *Simon Stevin* 54 (1980), 165-177.
- LYNDON R. C., and SCHUPP, E., 1976. Combinatorial Group Theory. Springer, New York.

- NEUMANN, B. H., 1967. Some Remarks on Semigroup Presentations. *Canad. J. Math*, 19: 1018-1026.
- RUŠKUC, N., April 10 (1995). Semigroup Presentations. (Ph.D. Thesis), University of St Andrews.
- RUŠKUC, N., and THOMAS, R. M., 1998. Syntactic and Rees Indices of Subsemigroups. *J. Algebra* 205: 435-450.
- RUŠKUC, N., 1999. Presentations for Subgroups of Monoids. *Journal of Algebra* 220: 365-380.

ÖZGEÇMİŞ

12.06.1984 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra 2002 yılında Ç. Ü. Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ç. Ü. Matematik bölümünde yüksek lisansa kabul edildi. YADEM’de İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra 2007 yılında yüksek lisansa başladı. Aynı yıl Ç. Ü. Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen Ç. Ü. Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.