ENGİN ESER, 2010

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK SAYILI DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

ENGİN ESER

Ocak 2010

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK SAYILI DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

ENGİN ESER

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr Murat Alper BAŞARAN

Ocak 2010

Yrd. Doç. Dr. Murat Alper Başaran danışmanlığında **Engin Eser** tarafından hazırlanan "**Aralık Sayılı Doğrusal Denklem Sistemleri**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Aşır Genç, Selçuk Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat Alper Başaran, Niğde Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık Atay, Niğde Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../2010

Doç. Dr. Nurettin ACIR

Enstitü Müdürü

ÖZET

ARALIK SAYILI DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

ESER, Engin
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Murat Alper Başaran

Ocak 2010, 26 sayfa

Çok sayıda uygulamalı bilimde kullanılan doğrusal denklem sistemleri matematiksel açıdan incelemiş ve taşıdığı şartlara göre çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu denklem sistemlerinde yer alan katsayı, değişken ya da sabitlerden en az birinin aralık sayı olması durumunda literatürde yer alan Gauss eliminasyon yönteminin yeni bir versiyonu çalışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Aralık sayıları, bulanık sayılar, aralık denklem sistemleri

SUMMARY

INTERVAL NUMBER LINEAR EQUATION SYSTEMS

ENGIN, Eser
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor Dr. Murat Alper BAŞARAN

January 2010, 25 pages

Linear equation systems are employed in many applied areas and it has been widely examined mathemtically. Based on characteristics of equation systems, various solution methods have been developed. Either parameters or variables or constatnts on the right side of the equation systems are interval numbers, so this systems is called interval equation systems. A new method proposed in the literature is studied which is a modified version of Gauss elemination procedure.

Keywords: Interval number, fuzzy number, inetrval equation systems

ÖNSÖZ

Bu çalışma, değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN'nın katkılarıyla gerçekleştirilmiştir. Aralık sayılı denklem sistemlerinin çözümünde karşılaşılabilecek "Sağ Yan Problemi" için uygulanan , "Sıfır Aralık Sayısının Genişletilmesi Prensibi" ile "Gauss Eliminasyon Yöntemi" bir arada kullanılarak denklem sisteminin çözümü için var olan algoritma modifiye edilmiştir. Bu algoritma 2x2 lik aralık sayılı denklem sistemine uygulanmıştır. Bu çalışmanın üniversitede bu konularda yapılan çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

TEŞEKKÜR

Bu tezde emeği geçen kıymetli hocam Yrd. Doç. Dr Murat Alper BAŞARAN'a en içten teşekkürlerimi sunar, tezin hazırlanması aşamasında benim yanımda bulunup bana destek veren hayat arkadaşım Aslıhan ESER ile nice mutlu, umutlu ve başarı dolu bir hayatı beraberce yaşamamızı temenni ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Doğrusal denklem sistemleri birden fazla doğrusal denklemden meydana gelen sistemlerdir. Bu tür sistemler uygulamalı bilim dallarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu denklem sistemini meydana getiren katsayılar, değişkenler ve sabitler çoğu zaman reel sayılardan meydana gelmektedir. Matematik bilimi bu tür denklem sistemlerinin çözümleri için denklem sisteminin taşıdığı şartlara göre çeşitli algoritma ve yöntemler önermiştir. Bunlardan bazıları Gauss eliminasyon yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve Gauss-Seidel yöntemidir.

Aralık sayılarının kullanılması bir parametrenin geçerli aralığı ifade etmesi yanında o parametre için bir belirsizliğin de olduğunu göstermektedir. Bu belirsizlik her değer için aynı olasılıkla ya da olabilirlikle gerçekleşir. Oysa, bu belirsizlik her değer için farklı olabilirlikle olması durumunda, aralık sayıları bu durumu matematiksel açıdan yetersiz kalmaktadır. Bu gibi durumlarda bulanık sayılar daha etkili bir araç olarak ortaya çıkmaktadır.

Reel sayılar yerine aralık sayıları ya da bulanık sayıların doğrusal denklem sistemlerinde katsayı, değişken ya da sabitler olması durumunda bu sistemlerin çözümü son yıllarda ilgilenilen bir konudur ve çalışmalar hızla artmaktadır. Bu çalışmada aralık sayılı doğrusal sistemler incelendi ve bulanık doğrusal sistemlerle yakın ilişki literatüre dayanılarak ortaya konuldu.

İkinci bölümde aralık sayıları ve bulanık sayılar hakkında temek kavramlar ve bilgiler sunulacaktır. Üçüncü bölümde aralık denklem sistemleri tanıtılacaktır. Dördüncü bölümde literatürde son yıllarda önerilen ve hem aralık denklem sistemleri hem de bulanık denklem sistemleri için çözüm bulmada iyi sonuçlar üreten yöntem tanıtılacak ve algoritması verilecektir. Son bölümde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

BÖLÜM II

KÜMELER OLARAK ARALIK SAYILARI VE BULANIK KÜMELER

Bu bölümde kümeler olarak aralık sayıları ve bulanık kümeler ile ilgili temel kavram tanımlar verilecektir. Ayrıca aralık sayıları ile bulanık küme arasındaki ilişki verilecektir.

2.1. Aralık Sayıları

Bir aralık ile ifade edilen matematiksel nesne kapalı ve sınırlı reel sayılar kümesidir. Bu küme $[a,b]=\{x : a \le x \le b\}$ biçiminde gösterilir [1-4]. Ayrıca bir aralığı (interval), başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olmak üzere bir sıralı çiftin temsil ettiği bir rakam olarak da düşünmek mümkündür. Bir aralık, bir sayı ya da bir küme olarak düşünüldüğünde, üzerinde aritmetik işlemler ve küme işlemleri kolaylıkla tanımlanabilmektedir. Büyük harfler ile aralıklar gösterilmektedir. Aralığı temsilen başlangıç ve bitiş noktaları kullanılmaktadır. Bir X aralığı $X=[\underline{X},\overline{X}]$ ile gösterilmektedir. Burada $\underline{X}$ aralığın alt değerini, $\overline{X}$ aralığın üst değerini göstermektedir. Herhangi bir n boyutlu aralık vektörü $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ ile gösterilir. Örneğin, iki boyutlu bir aralık vektörü $X=(X_1, X_2)$ ile gösterilir ve bu vektörü oluşturan her bileşen bir aralık olup $X_1=[\underline{X}_1, \overline{X}_1]$ ve $X_2=[\underline{X}_2, \overline{X}_2]$ biçiminde gösterilir. Eğer bir x reel sayısı bir X aralığının elemanı ise, $x \in X$ biçimde yazılır. Benzer şekilde, bir reel vektör $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ bir aralık vektörünün elemanı ise, $x \in X$ biçimde yazılır eğer her $x_i \in X_i, i=1,...,n$ için her durumun sağlanması koşulu gerçekleşiyorsa. Eğer $\underline{X}=\underline{Y}$ ve $\overline{X}=\overline{Y}$ şartları sağlanıyorsa, iki aralık X ve Y eşittir denilir. Eğer $X \cap Y = \varnothing$ sağlanırsa, iki aralığın kesişimi boştur denir [1-4]. Diğer durumda, kesişim yine bir aralıktır ve $X \cap Y = [\max(\underline{X},\underline{Y}), \min(\overline{X},\overline{Y})]$ biçimde tanımlanır. Eğer iki aralık vektörünün kesişimi ile ilgileniliyorsa, bu durumda kesişimler bileşen temelli olarak gerçekleştirilir [1-4] . Örneğin X aralık vektörü $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ biçimde verilsin ve Y aralık vektörü

$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ biçiminde verilsin, bu iki aralık vektörünün kesişimi $X \cap Y = (X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2, ..., X_n \cap Y_n)$ biçimde elde edilir.

Benzer şekilde birleşme işlemi de aralıklar üzerinde tanımlanabilir. X ve Y aralıkları için, birleşeme işlemi $X \cup Y = [\min(\underline{X}, \underline{Y}), \max(\overline{X}, \overline{Y})]$ biçimde tanımlanır ve sonuç yine bir aralıktır. Geçişenlik ve sıralılık özellikleri aralıklar üzerinde tanımlanmaktadır. $X < Y$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{X} < \underline{Y}$ olmasıdır [1-4]. Aralığı bir küme olarak düşündüğümüzde geçişenlik ve sıralılık özelliklerine sahip olduğu görülmektedir. Bu durumda, $X \subseteq Y$ olması için gerek ve yeter şart $\underline{Y} \leq \underline{X}$ ve $\overline{X} \leq \overline{Y}$ olmasıdır. İki aralık vektörü X ve Y için $X \subseteq Y$ olması için, bu içermenin her bileşen için sağlanması gereklidir. Bir başka deyişle, her $X_i \subseteq Y_i, i = 1,2,...,n$ olmalıdır. Bir aralığın genişliği $w(X) = \overline{X} - \underline{X}$ biçimde tanımlanır. Bir aralık vektörünün genişliği $w(X) = \max(w(X_1), w(X_2), ..., w(X_n))$ olarak tanımlanır. Bir aralığın mutlak değeri, $|X| = \max(|\underline{X}|, |\overline{X}|)$ biçimde tanımlanır. Bir aralık vektörünün normu $\|X\| = \max(|X_1|, ..., |X_2|)$ biçimde tanımlanır. Bir aralığın orta noktası, $m(X) = \dfrac{\underline{X} + \overline{X}}{2}$ biçimde tanımlanır. Bir vektör formu aralığın orta noktası ise, $m(X) =)(m(X_1), ..., m(X_n))$ biçimde tanımlanır. Aralık sayıları skaler ya da vektörel formda olduğu gibi bir matris formunda da olabilirler. Bütün elemanları aralık sayısı olan bir matrise aralık matrisi denir. Benzer şekilde bir aralık matrisinin genişliği ve orta noktaları da kolaylıkla hesaplanabilir [1-4]. Bir A aralık matrisinin genişliği, $w(A) = \max_{i,j} w(A_{ij})$ biçimde tanımlanır. Burada A_{ij} i inci satır j inci, sütunda yer alan aralık sayısını göstermektedir. Bir A aralık matrisinin orta noktası, $(m(A))_{ij} = m(A_{ij})$ biçimde tanımlanır. Burada $m(A)$, matrisin her gözesinde yer alan aralık sayılarının orta noktalarından oluşan matrisi göstermektedir. Aralıklar bir tür sayı olduğu için bunlar üzerinde aritmetik işlemler yapılabilmektedir. X, Y ve Z aralık sayıları olmak üzere, $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ ve $\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$ biçimde yazılabilirler. $X + Y = Z$ olduğu varsayımı altında, bu iki aralık sayısının toplamı, $\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}$ biçimde elde edilir. Bu yaklaşım altında diğer aritmetik işlemler aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$
\begin{aligned}
&[\underline{X},\overline{X}]+[\underline{Y},\overline{Y}]=[\underline{X}+\underline{Y},\overline{X}+\overline{Y}]\\
&[\underline{X},\overline{X}]-[\underline{Y},\overline{Y}]=[\underline{X}-\overline{Y},\overline{X}-\underline{Y}]\\
&-X=-[\underline{X},\overline{X}]=[-\overline{X},\underline{X}]\\
&\frac{1}{X}=[\frac{1}{\overline{X}},\frac{1}{\underline{X}}]\\
&\underline{X.Y}=\min(\underline{X}.\underline{Y},\underline{X}.\overline{Y},\overline{X}.\underline{Y},\overline{X}.\overline{Y})\\
&\overline{X.Y}=\max(\underline{X}.\underline{Y},\underline{X}.\overline{Y},\overline{X}.\underline{Y},\overline{X}.\overline{Y})\\
&\frac{X}{Y}=X.(\frac{1}{Y})
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Burada dikkat edilmesi gereken durum, eğer sıfır sayısı Y aralığının içinde yer almıyorsa yukarıda verilen bölme ile ilgili hesaplamalar yapılabilir. Kısaca $\frac{X}{Y}$ işlemini gerçekleştirmek için, $\underline{Y}>0$ ya da $\overline{Y}<0$ olmalıdır. Aralık sayıları reel eksende tanımlı oldukları için, başlangıç ve bitiş değerlerinin aldıkları işaret göre yani negatif ya da pozitif olmasına göre çarpım değerlerini özetleyen ifadeler aşağıda verilmiştir [1-4].

$\underline{X}\geq 0, \underline{Y}\geq 0$

Aralık sayıları üzerinde tanımlanan aritmetik işlemlerin bazı cebirsel özellikleri vardır. Bunlar üzerinde kısaca durulacaktır.

$$
\begin{aligned}
&X+(Y+Z)=(X+Y)+Z\\
&X(YZ)=(XY)Z\\
&X+Y=Y+X\\
&XY=YX\\
&0+X=X+0=X\\
&0X=X0=0\\
&1X=X1=X
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Aralık sayıları toplama ve çarpmaya göre yer değiştirme ve birleşme özelliklerine sahipken, dağılma özelliğini sağlamazlar. Bunu bir örnekle gösterebiliriz.

$[1,2].(1-1)=0$ olduğunda, $[1,2].1-[1,2].1=[-1,1]\neq 0$ olmaktadır. Bu durumda, $X(Y+Z)=XY+XZ$ her zaman gerçekleşmez. Oysa $X(Y+Z)\subseteq XY+XZ$ özelliğinin sağlandığı her zaman görülür. Bu özelliğe alt dağılma özelliği adı verilmektedir. Y ve Z aralıklar ve x reel sayı olmak üzere, $x(Y+z)=xY+xZ$ ve eğer $YZ>0$ olmak üzere, $X(Y+Z)=XY+XZ$ yazılabilir. $[a,a]=a$ biçimde verilen aralık sayılarına dejenere aralık sayıları denir ve reel sayıya eşittir [1-4].

X bir aralık sayısı olmak üzere, $X - X = 0$ ve $\dfrac{X}{X} = 1$ olarak yazılabilmesi için, X aralığının genişliğinin sıfır olması gereklidir. Aksi takdirde, $X - X = [\underline{X} - \overline{X}, \overline{X} - \underline{X}] = w(X).[-1,1]$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, $\dfrac{X}{X} = [\dfrac{\underline{X}}{\overline{X}}, \dfrac{\overline{X}}{\underline{X}}]$ elde edilir eğer $\overline{X} > 0$ şartı sağlanırsa. $\overline{X} < 0$ olması durumunda, $\dfrac{X}{X} = [\dfrac{\overline{X}}{\underline{X}}, \dfrac{\underline{X}}{\overline{X}}]$ elde edilir.

2.2. Bulanık Kümeler

Klasik küme kuramında bir U evrensel kümesinin A alt kümesi, $A = \{x : \mathrm{P(x)}\}$ ile belirtilir. Burada x, $P(x)$ önermesini sağlayan elemanları göstermektedir. U evrensel kümesinin herhangi bir A alt kümesinin gösterge fonksiyonu ya da karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir ve

$$\chi_A = \begin{cases} 1 \text{ eğer } x \in A \\ 0 \text{ eğer } x \notin A \end{cases} \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilir.

χ_A bir elemanın A kümesinde olup olmadığını göstermektedir. Gösterge fonksiyonunun alabileceği sadece iki değer vardır. Bu değerler 1 ya da 0 değerleridir. Kavram, elemanların aldıkları değerlerin [0,1] kapalı aralığına genişletilmesi ile genelleştirilebilmektedir. Bu fonksiyona ise üyelik fonksiyonu denilmektedir.

Tanım 2.1 Bulanık küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır [5].

Tanım 2.2 Bir U evrensel kümenin A bulanık alt kümesi bir fonksiyondur ve $A : U \to [0,1]$ ile gösterilir [5].

Literatürde bulanık küme $\mu_A : U \to [0,1]$ şeklinde gösterilmektedir.

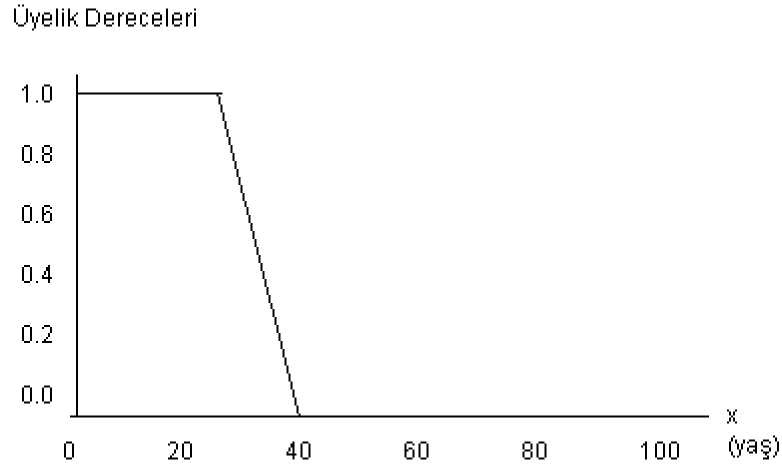
Tanım 2.3 μ_A bulanık kümesi aynı zamanda üyelik fonksiyonu olarak da adlandırılır ve $\mu_A(u)$ değeri, μ_A üyelik fonksiyonun u değerini aldığında karşılık olarak atadığı üyelik derecesini göstermektedir [5].

Nguyen ve Walker [5] bulanık bir kavram için farklı μ_A üyelik fonksiyonları olmasının düşünülebileceğini belirtmişlerdir. Önerilecek üyelik fonksiyonu nesneldir ve ele alınan konuya göre değişiklik gösterir. Uygulamalarda üyelik fonksiyonunun seçiminde esnekliğin olması yararlı bir özellik olarak belirtilir. Örneğin "genç" kavramı ele alınsın. Herkes bu kavram için farklı yaş aralıklarını karşılık olarak ifade edebilir. Bu öznel ifadeyi üyelik fonksiyonu biçiminde genç bir kişiden yazması istenildiğinde, "genç" kavramına ilişkin üyelik fonksiyonu

$$\mu_A^G(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \le 25 \\ \dfrac{40-x}{15} & \text{eğer } 25 < x \le 40 \\ 0 & \text{eğer } 40 < x \end{cases} \tag{2.4}$$

biçiminde verilir [6].

Üyelik fonksiyonun grafiği Şekil 2.1'de verilmiştir.

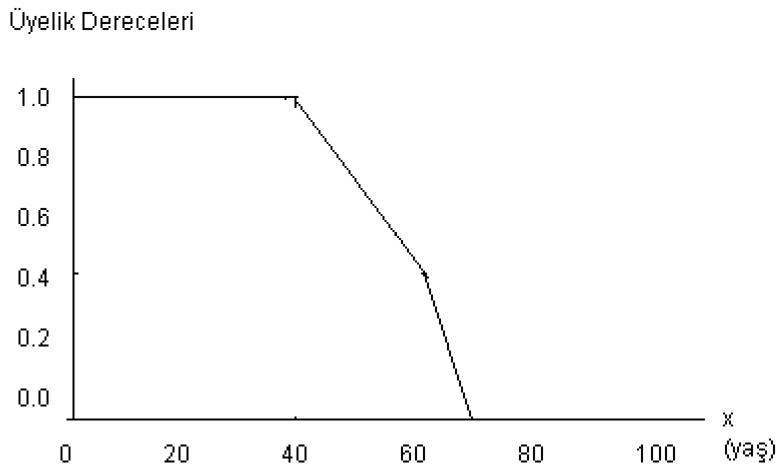


Şekil 2.1 Genç bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonu

Aynı kavram için yaşlı bir kişiden üyelik fonksiyonu yazması istenildiğinde ise üyelik fonksiyonu

$$\mu_A^Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x < 40 \\ \dfrac{80-x}{40} & \text{eğer } 25 \leq x < 60 \\ \dfrac{70-x}{20} & \text{eğer } 60 < x \leq 70 \\ 0 & \text{eğer } 70 < x \end{cases} \qquad (2.5)$$

şeklinde verilmektedir [6]. Üyelik fonksiyonun grafiği Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2 Yaşlı bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonu

Öznel bir konu olan üyelik fonksiyonun belirlenmesinin kişiden kişiye farklılık gösterdiği "genç" kavramına ilişkin örnek üzerinde görülmektedir. Oysa bir bulanık kavram için herkesin tartışmasız kabul edebileceği bir üyelik fonksiyonu belirlenebilir. Üyelik fonksiyonu, bulanık küme, "possibility" dağılımı, "possibility" kuramı gibi [7] tarafından tanımlanmış kavramlar birbirleri ile çok yakın ilişkilidir. İlişki hem sözel hem de matematiksel açıdan [7] tarafından açıklanmıştır. [7] "possibility" kuramının bulanık küme kuramı ile ilişikisini "possibility" dağılımı kavramını tanımlayarak açıklamıştır. "Possibility" dağılımı bir değişkene atanan değerlerin üzerinde esnek bir kısıt gibi davranan bulanık kısıt yardımıyla gerçekleşmektedir. Daha açık bir şekilde ifade edilirse, F 'nin $U = \{u\}$ evrensel kümesinin bulanık bir alt kümesi olduğu varsayılsın. Bu bulanık alt kümenin üyelik fonksiyonu μ_F ile gösterilsin.

Daha sonra, "X eşittir F" biçiminde belirtilen bir önerme Π_X "possibility" dağılımını oluşturmaktadır. Burada, X değişkeninin U evrensel kümesinden aldığı u değerinin "possibility" değeri Π_X "possibility" dağılımına eşitlenmektedir ve Π_X 'in aldığı değer $\mu_F(u)$ olmaktadır. Bu duruma u 'nun F ile uyuşması (compatibility) denilmektedir. [7]'nin bu açıklaması ile X değişkeni bulanık değişken olarak ifade edilmektedir ve kendi "possibility" dağılımı ile ilişkilidir.

Yukarıda ifade edilen kavramlar arası ilişki [7] tarafından matematiksel biçimde aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 2.4 F, bir U evrensel kümesinin bulanık bir alt kümesi olarak $\mu_F(u)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. $\mu_F(u)$ üyelik derecesi, u 'nun F bulanık kavramı ile uyumu biçiminde yorumlanabilir. X değişkeni U evrensel kümesinden değerler alsın. F 'nin, X ile ilintili bir şekilde bulanık bir kısıt $R(X)$ olarak davransın. "X eşittir F" biçiminde ifade edilen bir önerme $R(X) = F$ biçiminde yazılabilir. X 'in $R(X)$ 'e eşit olduğu varsayımı altında Π_X "possibility" dağılımı ile $R(X) = F$ eşitliği ilişkilendirilir. X ile ilişkili "possibility" dağılımı sayısal açıdan F 'nin üyelik fonksiyonuna eşitlenir. Sembolik olarak, $\Pi_x \approx \mu_F$ ile gösterilir [7].

“ X eşittir F ” biçiminde ifade edilen bir önermenin “ X küçük tam sayıdır” önermesi olduğu varsayılsın ve bu ifade için üyelik fonksiyonu ya da “posibility” dağılımı $\Pi_x = 1/1 + 1/2 + 0.8/3 + 0.6/4 + 0.4/5 + 0.2/6$ biçiminde tanımlansın. Bu ifadede örneğin, $0.8/3$ terimi ile X değişkeninin 3 değeri için üyelik değerinin 0.8 olduğu gösterilir [1].

Tanım 2.5 R gerçel sayılar kümesini göstersin. $F(R)$ kümesinin elemanları $\mathbb{R}$ kümesinin bulanık alt kümeleri olsun. Bu elemanlara bulanık miktarlar (fuzzy quantities) denilir. Bulanık miktarlar ile tüm aritmetik işlemler yapılabilir [5]. Bunun ile ilişkili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1 A, B, C bulanık miktarlar olsun. Bu bulanık miktarlarla ilgili ifadeler

1. $0 + A = A$
2. $0.A = 0$
3. $1.A = A$
4. $A + B = B + A$
5. $A + (B + C) = (A + B) + C$
6. $A.B = B.A$
7. $(A.B).C = A.(B.C)$
8. $r.(A + B) = r.A + r.B$
9. $A.(B + C) \le A.B + A.C$
10. $(-r)A = -(r.A)$
11. $-(-A) = A$
12. $(-A).B = -(A.B)$
13. $\dfrac{A}{1} = A$
14. $\dfrac{A}{r} = \dfrac{1}{r}A$
15. $\dfrac{A}{B} = A.\dfrac{1}{B}$
16. $A + (-B) = A - B$

biçiminde yazılır [5].

Bulanık miktarların özel bir sınıfı olan bulanık sayılar (fuzzy number) ile ilgili tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.6. Bulanık sayı

1. En az bir x değeri için, $A(x) = 1$ değerini almalıdır. Bu özellik, normallik özelliği olarak adlandırılır
2. A kümesinin desteği $\{x : A(x) > 0\}$ sınırlıdır

3. A'nın h kesitleri kapalı aralıklardır

koşullarını sağlayan bulanık bir miktardır [5].

Tanım (2.6)'dan

1. Gerçel sayılar bulanık sayılardır
2. Bir bulanık sayı içbükey (konveks) bulanık miktardır
3. Bir bulanık sayı yukardan yarı süreklidir
4. Eğer A, $A(x)=1$ ile bir bulanık sayı ise, A $\left[-\infty, x\right]$ aralığında azalmayan ve $\left[x,\infty\right]$ aralığında artmayan bir yapıya sahiptir

sonuçları kolaylıkla kanıtlanabilir [2].

Tanım 2.7. Bulanık aralık

1. $A(x)=1,\ x\in\left[a,b\right]$ ifadesi A'nın normal olduğunu ifade etmektedir
2. A kümesinin desteği $\left\{x : A(x) > 0\right\}$ sınırlıdır
3. A nın h kesitleri kapalı aralıklardır.

koşullarını sağlayan bulanık bir miktardır [7].

Tanım (2.6)'da sadece bir nokta üyelik değerini 1'e eşitlerken, Tanım (2.7)'de bu durum bir kapalı aralık tarafından sağlanmaktadır. Birinci durum üçgensel bulanık sayılara karşılık gelirken, ikinci durum yamuk bulanık sayısına karşılık gelmektedir.

Tanım 2.8. A bulanık kümesinin yüksekliği bire eşitse normal olarak adlandırılır ve

$$\operatorname*{Sup}_{x}\ \mu_A(x)=1 \tag{2.6}$$

eşitliği ile gösterilir [7].

Eğer Eşitlik (2.4) bulanık kümenin tanım kümesinde yer alan herhangi bir eleman tarafından sağlanamıyorsa, bu durumda A bulanık kümesi normal değildir denilir. Normal olmayan bulanık kümeler normalleştirilir.

Normalleştirme işlemi ilgili kümedeki en yüksek değerli elemandan başlayarak diğer bütün elemanlar bu elemana bölünerek gerçekleştirilir.

Tanım 2.9. A bulanık kümesinin desteği (support) o kümede yer alan ve üyelik değerleri $\mu_A(x) > 0$ kısıdını sağlayan elemanların bir kümesi biçiminde ifade edilir [5].

Tanım 2.10. Bulanık A kümesinin h kesiti kapalı bir aralık olup üyelik değerleri $A_h = \{x : \mu_A(x) \geq h\}$ kısıdını sağlayan bir küme olacak biçimde ifade edilir [5].

Tanım 2.11. Eğer $\{x : f(x) \geq h\}$ kümesi kapalı ise, fonksiyon $f : R \to [0,1]$ üstten yarı süreklidir denilir [5].

Tanım 2.12. A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul Γ_h kümesi ile tanımlanan kümelerin tüm h'ler için $(0,1]$ aralığında konveks olmasıdır [5].

Tanım 2.13 A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq Min\left[\mu_A(x_1)\ ,\ \mu_A(x_2)\right] \tag{2.7}$$

eşitsizliği ile verilir [7].

Zadeh [7] tarafından tanıtılan genişletme ilkesi (extension principle) bulanık küme kuramının temelidir. Bulanık olmayan matematiksel kavramları bulanık miktarlar ile ele alabilmek için genişletme ilkesi genel bir yöntem olarak önerilmiştir.

Tanım 2.14. (Genişletme ilkesi) r tane evrensel kümenin kartezyen çarpımı $X = X_1 \times \ldots \times X_r$ olsun ve r tane bulanık $A_1, \ldots, A_r$ kümeleri sırasıyla evrensel kümelerin elemanları olsun.

Buna göre, r sayıda bulanık kümenin kartezyen çarpımı;

$$A_1 \times \ldots \times A_r = \int_{X_1 \times \ldots \times_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r) / (x_1, \ldots, x_r)$$

biçiminde tanımlanır.

$X_1 \times \ldots \times X_r$ kartezyen çarpım kümesinden Y evrensel kümesine f fonksiyonu $y = f(x_1, \ldots, x_r)$ olsun. Genişletme ilkesi r tane bulanık A_i kümesinden Y üzerindeki B bulanık kümesine f ile ulaşmayı sağlamaktadır. B bulanık kümesi için üyelik fonksiyonu

$$\mu_B(y) = \sup_{y = f(x_1, \ldots, x_r)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)) \tag{2.8}$$

biçiminde verilir [4].

Zadeh [7] (2.6) ifadesini genel olarak

$$B = f(A_1, \ldots, A_r) = \int_{x_1 \times \ldots \times x_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r) / f(x_1, \ldots, x_r)$$

eşitliği ile belirtmiştir.

Kümeler üzerinde tanımlanmış olan birleşme, kesişme, tümleyen, ve diğer tüm işlemler bulanık kümelere kolayca genellenebilir.

Tanım 2.15. μ_A, μ_B bulanık kümeler olsun. Bu bulanık kümeler için birleşme, kesişme ve tümleyen işlemleri

$$\begin{aligned}
(\mu_A \vee \mu_B)_{(x)} &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\
(\mu_A \wedge \mu_B)_{(x)} &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\
\mu'_A(x) &= 1 - \mu_A(x)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

eşitlikleri ile ifade edilir [7].

Bulanık sayılar üzerinde dört işlem gerçekleştirilebilir.

Tanım 2.16. A ve B bulanık sayılar olsun. Bu sayılar ile toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemeleri

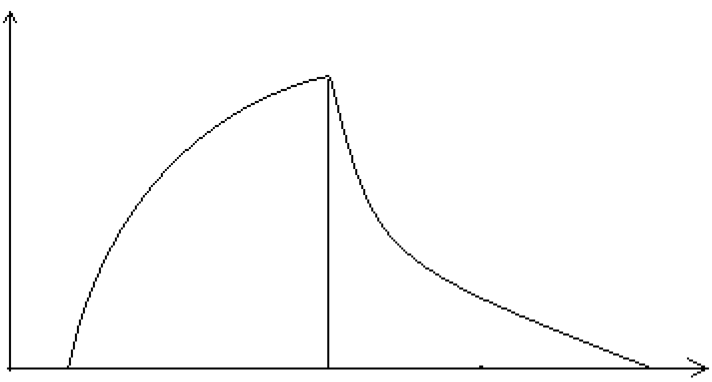
$$
\begin{aligned}
A+B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))/(x+y) \\
A-B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))/(x-y) \\
A\times B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)/(x\times y) \\
A\div B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))/(x\div y)
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

eşitlikleri ile ifade edilir [8].

Bir bulanık sayı için pozitif, negatif ya da sıfır bulanık sayı tanımı yapılabilir.

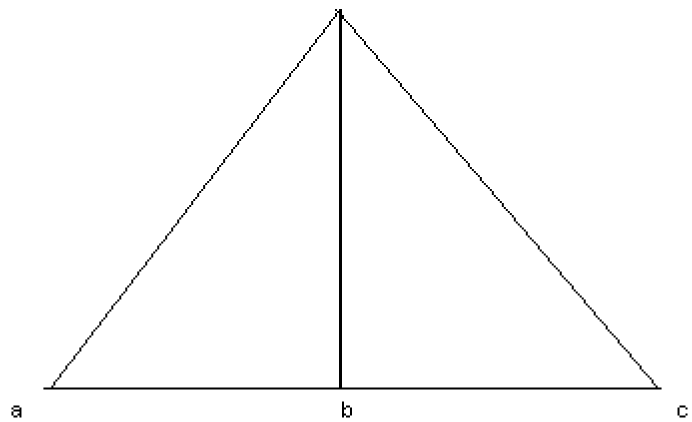
Tanım 2.17. Bir A bulanık sayının destek bölgesinde yer alan alt ve üst sınır değerleri sıfırdan büyükse pozitif, sıfırdan küçükse negatif ve alt sınır değeri sıfırdan küçük ve üst sınır değeri sıfırdan büyükse sıfır bulanık sayı olarak adlandırılır [8].

Dubois ve Prade [6] bulanık sayılar için uygulama açısından kolay ve uygulanabilir yeni bulanık sayılar önermişlerdir. Bir bulanık sayıyı genel olarak ifade eden gösterim Şekil 2.3' te gösterilmektedir.

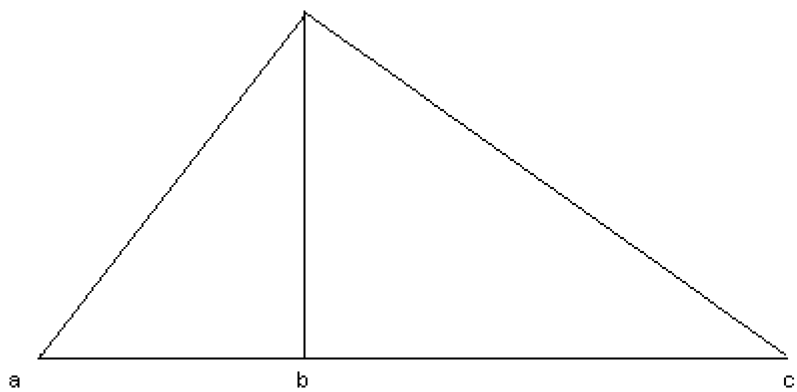


Şekil 2.3 Bulanık sayıyı temsil eden gösterim

[8]'de bu genel durumdan daha özel olan bulanık sayıları, bir başka ifadeyle, simetrik üçgensel bulanık sayı, simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı ve bulanık yamuk sayılarını önermişlerdir. Şekil 2.4, Şekil 2.5 ve Şekil 2.6 bu sayıların görsel biçimlerini vermektedir.



Şekil 2.4 Simetrik üçgensel bulanık sayı



Şekil 2.5 Simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı

Şekil 2.6 Yamuk bulanık sayı

Bulanık sayılar parametrik olarak iki farklı şekilde ifade edilebilir. A, B, C sırasıyla simetrik üçgensel bulanık sayı, simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı ve yamuk bulanık sayıları olsun. Birinci yöntemde, bulanık sayıları uç noktaları

$$\begin{aligned} A &= (a,b,c) \\ B &= (a,b,c) \\ C &= (a,b,c,d) \end{aligned} \tag{2.11}$$

ile gösterilir.

İkinci parametrik yazma biçimi ise bulanık sayıların merkez değerleri, sola yayılım değerleri ve sağa yayılım değerlerini içeren bir yazım türüne dayanmaktadır. Yine aynı bulanık sayılar,

$$\begin{aligned} A &= (b,m) \\ B &= (b,m,n) \\ C &= (k,b,c,l) \end{aligned} \tag{2.12}$$

gösterimleri ile ifade edilir.

İlk bulanık sayıda b merkez değerini, m ise sola ve sağa yayılım değerini gösterir. Bu sayı simetrik üçgensel bulanık sayı olduğu için sağa ve sola yayılım değerleri eşittir. İkinci bulanık sayıda b merkez değerini, m sola yayılım değerini, n sağa yayılım değerini gösterir. Üçüncü bulanık sayıda $[b,c]$ aralığı merkez değerini, k sola yayılım değeri, l ise sağa yayılım değerini gösterir.

Dubois ve Prade özel bir tür olan L-R tipli bulanık sayıyı önermişlerdir. Bu sayı

$$\mu_M = \begin{cases} L((m-x)/\alpha) & x \le m \ , \alpha \ge 0, \\ R((x-m/\beta) & x \ge m \ , \beta \ge 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

ile ifade edilir [8].

L sol taraf, R ise sağ tarafta yer alan ifade için kullanılır, M bulanık sayısının ortalama değeri m dir. α, β ise sırasıyla sol ve sağ yayılım değerlerini gösterir. Yayılımlar sıfır olduğunda M bulanık sayısı gerçel sayıya dönüşür. Yayılımlar artarsa M daha çok bulanık olmaktadır. Sembolik olarak M bulanık sayısı

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR} \tag{2.14}$$

ile ifade edilir. M bulanık sayı yaklaşık olarak m değerine sahip tam olarak bilinemeyen bir miktarı tanımlamada kullanılabilir.

Tanım 2.18. Bir L-R tipli bulanık sayı

1. $L(x) = L(-x)$
2. $L(0) = 1$
3. L $\left[0, +\infty\right)$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur

koşullarını sağlayan bulanık sayıdır [8].

L-R bulanık sayıları ile aritmetik işlemler yapılabilir. Toplama işleminin nasıl yapılacağı açık şekilde gösterilecektir. Diğer işlemler için parametrik aritmetik gösterimler verilecektir. M ve N gibi iki bulanık sayının artan fonksiyon gösteren kısımları ele alınsın. $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ ve $N = (n, \gamma, \delta)$ iki bulanık sayı olsun. x, y iki eşsiz gerçel sayı olarak $L(\frac{(m-x)}{\alpha}) = w = L(\frac{(n-y)}{\gamma})$ eşitliğini sağlasın. w, $\left[0,1\right]$ kapalı aralığında bir sabit olsun. Buna göre, x, y değerleri

$$x = m - \alpha L^{-1}(w)$$
$$y = n - \gamma L^{-1}(w) \qquad (2.15)$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (2.13)'deki x ve y değerleri toplandığında

$$z = x + y = m + n - (\alpha + \gamma)L^{-}(w) \qquad (2.16)$$

elde edilir.

$L(\dfrac{m+n-z)}{\alpha+\gamma} = w$ ifadesi iki bulanık sayının toplamının üyelik değeri olur.

Aynı yaklaşımla sağ taraf için de hesaplamalar yapılabilir ve sonuç

$$R(\frac{(z-(m+n))}{\beta+\delta}) = w \qquad (2.17)$$

biçiminde elde edilir.

Çarpma işlemi için benzer yol izlenerek

$$z = x.y = m.n - (m\gamma + n\alpha)L^{-1}(w) + \alpha\gamma L^{-1}(w) \qquad (2.18)$$

değeri elde edilir.

Eşitlik (2.16)'dan görüleceği gibi, elde edilen yeni bulanık sayı L-R tipli bulanık sayı değildir. İki bulanık sayının toplanması ve çıkarılması sonucu bulanık sayı kapalı biçimde elde edilmesine karşın, bu durum çarpma ve bölme işlemleri için geçerli değildir.

Bütün aritmetik işlemler için parametrik gösterimler,

$$(m,\alpha,\beta)_{LR}+(n,\gamma,\delta_{LR})=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta_{LR})$$
$$(m,\alpha,\beta)_{LR}-(n,\gamma,\delta_{LR})=(m-n,\alpha+\gamma,\beta+\delta_{LR})$$
$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\times(n,\gamma,\delta_{LR})\approx(mn,n\alpha+m\gamma,n\beta+m\delta)_{LR},M>0,N>O$$
$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\times(n,\gamma,\delta_{LR})\approx(mn,n\alpha-m\delta,n\beta-m\gamma)_{LR},M<0,N<O \qquad (2.19)$$
$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\times(n,\gamma,\delta_{LR})\approx(mn,-n\alpha-m\delta,-n\alpha-m\gamma)_{LR},M<0,N<O$$
$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\div(n,\gamma,\delta_{LR})\approx(m/n,\frac{m\delta+n\alpha}{n^2},\frac{m\gamma+\beta n}{n^2})_{LR},M>0,N>O$$

eşitlikleri ile verilir [6].

Bölme işleminde bulanık sayıların negatif olması durumunda yapılacak hesaplamalar çarpma işleminde yapılanlara benzemektedir. Son olarak bir bulanık sayı ile bir skalerin çarpımının sonucu ve bulanık sayının tersi

$$\forall\lambda>0,\lambda\in R,\lambda\times(m,\alpha,\beta)_{LR}=(\lambda m,\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR}$$
$$\forall\lambda<0,\lambda\in R,\lambda\times(m,\alpha,\beta)_{LR}=(\lambda m,-\lambda\beta,\lambda\alpha)_{LR} \qquad (2.20)$$
$$\mu_{M^{-1}}(x)=L(\frac{1-mx}{\alpha x}),x\geq\frac{1}{m}$$

eşitlikleri ile verilir.

BÖLÜM III

ARALIK SAYILI DOĞRUSAL DENKLEM SISTEMLERI

Aralık sayılı denklem sistemleri katsayıları, değişkenleri ve sabitlerinden en az biri aralık sayılarından meydana gelen denklem sistemleridir.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

(2.21)'de verilen denklem sistemi

$$Ax = b \tag{3.2}$$

matris biçimde yazılabilir. Burada A, nxn biçimde bir aralık matrisi ve b, n boyutlu bir aralık vektördür. Yukarıda ifade edildiği gibi katsayılar, değişkenler ve sabitlerden en az birinin aralık sayıları olabileceği gibi, hepsi de aralık sayıları olabilir. Burada sadece A matrisi ve b vektörünün aralık sayılar olması durumunda bu denklem sisteminin çözümü ile ilgilenilecektir.

Literatürde bu tip sistemlerin çözümü için iki yöntem önerilmiştir. Birincisi direkt metot olarak adlandırılır. Bu metot Gauss eliminasyon yöntemi olarak da bilinmektedir [9]. Bu metot çözüm kümesine ulaşmada etkilidir. Fakat, eğer eliminasyon adımlarında aralık sayılarının birbirine bölünmesi işleminde payda da yer alan aralıkta sıfır rakam olarak o aralık sayısının içinde ise eliminasyon işlemi sonuca ulaşamaz. Bu sebepten dolayı, bu yöntemin çeşitli modifiye özelliklere sahip olan değiştirilmiş türleri bazı problemlerin çözümünde etkili sonuç vermiştir. İkinci yöntem ise iteratif yöntemdir. Bu çalışmada literatürde yeni önerilmiş Gauss eliminasyon yöntemine dayalı yeni bir algoritma çalışılmıştır. Literatürde önerilen algoritmaya geçmeden önce kısaca aralık sayılardan oluşan bir denklemin nasıl çözüldüğünü ve ne gibi sorunların ortaya çıktığını kısaca belirtmek istiyoruz. Basit doğrusal denklemin aralık sayılara genelleştirilmiş halleri

$$ax = b \tag{3.3}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $a = [\underline{a}, \overline{a}], b = [\underline{b}, \overline{b}]$ aralık sayıları ve $0 \notin a$ dır. Aralık sayılarının çarpma işlemi pozitif ve negatif değerlere göre değişiklik gösterdiğinden dolayı, bu örnek için denklemde yer alan bütün aralık sayılarının pozitif olduğu varsayılmaktadır.

Bir başka ifade ile, $a,b>0$, $\underline{a},\overline{a}>0$ ve $\underline{b},\overline{b}>0$ olduğu varsayılmıştır. Bir skaler ile bir aralık sayısının çarpımı tanım gereği aralık sayısı olduğu için, (3.3)' de yer alan ifade,

$$[\underline{ax},\overline{ax}]=[\underline{b},\overline{b}] \tag{3.4}$$

olarak yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\underline{ax}&=\underline{b}\\ \overline{ax}&=\overline{b}\end{aligned} \tag{3.5}$$

biçiminde elde edilir. Denklemim alt ve üst sınır değerleri

$$\underline{x}=\frac{\underline{b}}{\overline{a}} \text{ ve } \overline{x}=\frac{\overline{b}}{\underline{a}} \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüme klasik aralık çözümü adı verilmektedir.

(3.3)'de verilen ifadede $b=0$ olması durumunda ya da (3.3)'de verilen ifade için çözüm aranırken, eşitlik $ax-b=0$ biçiminde yazılırsa, bu durum aralık sayıları için tanımlanan aritmetik işlemlerde uyumsuzluk durumunu ortaya çıkarmaktadır. Bu uyumsuzluk durumuna ve bu probleme aralık denklemlerde sağ yan problemi adı verilmektedir. Bu problemi çözmek için literatürde bir yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşıma sıfır aralığının genişletilmesi (zero interval extension) adı verilmiştir [9]. Bu yaklaşımın temeli $a-a=0$ olması göz önüne alındığında, benzer ilişkinin aralık sayıları için de yazılabileceği düşüncesi ile $[a]-[a]$ yazılmasıdır. Burada $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ olarak verildiğinde, $[a]-[a]=[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{a},\overline{a}]$ olur. Buradan, $[\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a}]=[-(\overline{a}-\underline{a}),\overline{a}-\underline{a}]$ elde edilir. Bunun sonucunda, iki aralık sayısı arasındaki fark sıfır etrafında simetrik bir aralık sayısı olarak ortaya çıkar. Sıfır reel sayısı için önerilen sıfır etrafında sıfır aralık sayısının yayılım değeri belirsizdir. Yine pozitif aralık sayıları için, $ax-b=0$ ifadesi açık olarak yazıldığında ortaya iki denklemeden meydana gelen bir sistem çıkar. Bu denklemler (3.7) verilmiştir.

$$[\underline{a},\overline{a}].[\underline{x},\overline{x}]-[\underline{b},\overline{b}]=[-\underline{y},\overline{y}]$$

$$\begin{cases}\underline{ax}-\overline{b}=-y\\ \overline{ax}-\underline{b}=y\end{cases} \tag{3.7}$$

(3.7)'de yer alan ifade taraf tarafa toplandığında

$$\underline{ax}+\overline{ax}-\underline{b}-\overline{b}=0 \tag{3.8}$$

elde edilir.

Literatürde [9] belirtildiği gibi (3.8) denkleminin reel sayı çözümünü elde etmek mümkün değildir. Bunun yerine bu sorun kısıt sağlama problemine (constraint satisfaction problem) dönüştürülerek çözüm kümesi elde edilmeye çalışılır. Kısıt sağlama probleminin genel biçimi

$$
\begin{aligned}
&C_i \,:\, f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., n, \\
&C_j \,:\, f_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, j = m+1, ..., p \\
&x_k \in [\underline{x}_k, \overline{x}_k], k = 1, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

verilmektedir. Burada $(x_1, ..., x_n)$ bilinmeyenleri, (C, x), $C = \{c_1, c_2, ..., c_p\}$ kısıtları tarafından tanımlanan kısıt sistemini, $x = x_1 \times ... \times x_n$ sınırlandırılmış tanım kümesini göstermektedir. Litaratürde [9] bu problem için kısıtlar şu şekilde ifade edilmektedir. $x = x_1 \times ... \times x_n$ kısıdı için $x = \underline{x} \times \overline{x}$ alınmıştır. Diğer kısıt $\underline{x} = \overline{x}$ olarak alınmıştır. Bu kısıtlar altında, $x_m = \dfrac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a} + \overline{a}}$ elde edilir ve x_m, $\underline{x}$ için alt sınır ve $\overline{x}$ için üst sınırdır. Bu bilgiler ile, $\underline{x} = \dfrac{\underline{b}}{\overline{a}}$ ve $\overline{x} = \dfrac{\overline{b}}{\underline{a}}$ olmak üzere, $[\underline{x}] = [\dfrac{\underline{b}}{\overline{a}}, x_m]$ ve $[\overline{x}] = [x_m, \dfrac{\overline{b}}{\underline{a}}]$ elde edilir [9].

Dejenere çözüm x_m değişmediği için, $\underline{x}$'in sol sınırı ve $\overline{x}$'in sağ sınır için aralıklar,

$$
\begin{aligned}
&\underline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \overline{a}\,\overline{x}}{\underline{a}}, \overline{x} \in [x_m, \frac{\overline{b}}{\underline{a}}] \\
&\overline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \underline{a}\,\underline{x}}{\overline{a}}, \underline{x} \in [\frac{\underline{b}}{\overline{a}}, x_m]
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Açıkça görülmektedir ki, $\overline{x}$ değeri $[x_m, \dfrac{\overline{b}}{\underline{a}}]$ aralığında en yüksek değeri aldığında, bir başka ifadeyle, $\overline{x} = \dfrac{\overline{b}}{\underline{a}}$ olduğunda, $\underline{x}$'in en küçük değeri $\underline{x}_{\min} = \dfrac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\underline{a}^2}$ olur. Benzer şekilde, $\overline{x}$'in maksimum değeri, $\overline{x}_{\max} = \dfrac{\underline{b} + \overline{b}}{\overline{a}} - \dfrac{\underline{a}\underline{b}}{\overline{a}^2}$ olur. Böylece, $\underline{x}_{\min} < \dfrac{\underline{b}}{\overline{a}}$ ve $\overline{x}_{\max} > \dfrac{\overline{b}}{\underline{a}}$ olur.

Sonuç olarak, $\underline{x}$ değerinin küçük sınırının en büyük değeri ve $\overline{x}$ değerinin büyük sınırının en büyük değeri

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}^{L}_{\max} = \max(\frac{\underline{b}}{\overline{a}}, \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a}.\overline{b}}{\underline{a}^2}) \\
&\overline{x}^{U}_{\min} = \min(\frac{\overline{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\overline{a}} - \frac{\underline{a}\underline{b}}{\overline{a}^2})
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
[\underline{x}] &= [\underline{x}_{\max}^{L}, \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}+\overline{a}}] \\
[\overline{x}] &= [\frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}+\overline{a}}, \overline{x}_{\min}^{U}]
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

elde edilir.

(3.12) ifadesi (3.8) ifadesinin bütün mümkün sonuçlarını temsil etmektedir. $\underline{x}_{\min}^{L}$ ve $\overline{x}_{\max}^{U}$ değerleri en geniş sıfır aralığının bütün değerleri için çözüm üretmektedir. (3.7) ifadesinde yerine konulduğunda, en geniş aralık elde edilmektedir. Bu değer $w_{\max} = \overline{x}_{\min}^{U} - \underline{x}_{\max}^{L}$ olarak bulunur ve bu değer sıfır aralık sayısının en büyük değeri olan $y_{\max} = \frac{\overline{a}.\overline{b}}{\underline{a}} - \underline{b}$ değerine karşı gelirken, alt sınır için değer $y_{\min} = \frac{\overline{a}.\overline{b} - \underline{a}.\underline{b}}{\underline{a}+\overline{a}}$ olarak elde edilir. y değerinin alacağı değere göre (3.7) ifadesinin sıfır sayısına ne kadar yakın olacağı belirlendiği için, y değerine bağlı olarak aralık çözümünün belirsizliği ölçen bir ölçüt liteartürde [9] geliştirilmiştir. Bu ölçüt

$$
h = 1 - \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \tag{3.13}
$$

biçiminde ifade edilir.

Burada h değeri 0 dan 1'e doğru artığında, aralığın yayılım değeri maksimum durumdan sıfıra doğru azalmaktadır. Sonuç olarak, h değeri bulanık kümede kullanılan h- kesiti gibi bir işlev görmektedir.

Sonuç olarak, bulanık bir denklem için çözüm aranırken kullanılan h- kesiti yardımıyla aralık sayıya dönüşen denklemden, çözüm sonucu elde edilen değer yardımıyla bulanık denkleminden kökleri bulunmaktadır.

Bir tek denklem için geliştirilen yaklaşım denklem sistemi için uygulandığında ortaya çıkan durum Gauss eliminasyon yönteminin değiştirilmiş bir halidir ve bir algoritma ile sunulmaktadır.

Bu algoritma iki aşamadan oluşmaktadır:

1. Aşama: İleri Eliminasyon Adımı

Bu aşamada sistem elemanter satır işlemleri ile üçgen yapıya dönüştürülmektedir.

$$[a_{ij}]^{(k+1)} = [a_{ij}]^{k} - \frac{[a_{ik}]^{(k)}[a_{kj}]^{(k)}}{[a_{kk}]^{(k)}}$$

$$[b_i]^{(k+1)} = [b_i]^{(k)} - \frac{[a_{ik}]^{(k)}[b_k]^{(k)}}{[a_{kk}]^{(k)}}$$

$$[a_{kk}]^{(k)} \neq 0, (k = 1,2,...,n-1; i, j = k+1, k+2,...,n)$$

k burada satır sayısını göstermektedir.

2. Aşama: Geri Eliminasyon Adımı

Bu aşamada aralık çözümü elde edilir.

$$[x_n] = \frac{[b_n]^{(n)}}{[a_{nn}]^{(n)}}$$

$$[x_i] = \frac{[b_i] - \sum_{j+1}^{n}[a_{ij}]^{(i)}[x_j]}{[a_{ii}]^{(i)}}, (i = n-1, n-2,...2,1)$$

$$[a_{nn}]^{(n)}[x_n] - [b_{nn}]^{(n)} = [-y_n, y_n]$$

$$[a_{ii}]^{(i)}[x_i] - [b_i]^{(i)} + \sum_{j-i+1}^{n}[a_{ij}]^{(i)}[x_j] = [-y_i, y_i], (i = n-1, n-2,...,2,1)$$

BÖLÜM IV

UYGULAMA

Bir ülkede iktisadi anlamda yer alan her sektör bir diğer sektöre girdi üretir ve kendi ürettiği de çıktı olarak adlandırılır. Bu yapı çok boyutlu matrisler yardımıyla izlenebilir. Bu yöntem ile dünyada çok sayıda ülke üretim optimizasyonunu sağlamaya, ekonomik şartlarını geliştirmeye ve kaynak tahsisini en iyi şekilde yapmaya çalışmaktadır. Genelde, bu veriler reel sayılar alınarak yapılmasına rağmen, bu büyüklükleri temsilen kullanılan sayıların aralık sayıları olması bu parametrelerin daha iyi temsil edildiği konusunda görüş vardır. Kısaca ölçümden gelen belirsizlik aralık sayıları ile ifade edilmektedir.

Reel sayılara dayalı geliştirilen Leontief girdi-çıktı analizi için matematiksel ifade,

$$x_{out} = (I - A)^{-1} \times f$$

biçiminde verilmiştir[ ]. Burada, $(I - A)^{-1}$ Leontief ters matrisi, I birim matris ve A'da elemanları aralık sayıları olan teknoloji matrisi, bir başka deyişle ekonomide yer alan sektörlerin girdi ve çıktılarını veren matristir. f en son çıktıyı gösteren aralık vektörüdür. x_{out} toplam üretim çıktı vektörüdür [9].

Literatürde yer alan örnek [9] altı sektörden meydana gelmektedir. Bunlar sırasıyla, tarım, endüstri, inşaat, ulaştırma, ticaret ve hizmetler sektörleridir. Bu sektörleri temsil eden teknoloji matrisi 6×6 boyutludur. Literatürde önerilen algoritmanın bir yazılım olmaksızın uygulanması çok zordur. Bu sebepten ötürü 2×2'lik basit bir aralık matrisi ile çözüm yapılmıştır. Bu matris aşağıda verilmektedir.

$$[A] = \begin{bmatrix} [1,1] & [2,2] \\ [1,1] & [10,12] \end{bmatrix}$$

Matristen görüleceği üzere bazı gözeler dejenere bulanık sayılardır. Fakat, aralık matrisi reel sayıları da içerebilir. Literatürde önerilen algoritma yardımıyla elde edilen çözüm vektörü $x_{çöz} = ([\frac{12}{10}, \frac{10}{8}], [\frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}])$ elde edilir.

BÖLÜM V

SONUÇ

Belirsizlik her bilim dalında sıklıkla karşılaşılan bir olgudur. Bu olgu ilk önce aralık sayıları ile 1965 yılından beri çalışılmaktadır. Çok sayıda uygulamalı bilim tarafından kullanılan doğrusal denklem ve sistemlerine uygulanması konun kendisi kadar çalışılmış bir konudur. Aynı tarihlerde ortaya atılmış bir konu olan bulanık küme teorisi de temelde bir belirsizliği temsilen kullanılan bir kavram olarak son yıllarda sıklıkla kullanılan ve doğrusal denklem ve denklem sistemleri için incelenen bir konudur. Her iki belirsizlik türüne göre d oluşturulan denklem sistemlerinin çözümünün elde edilmesi zor süreçlerdir ve algoritma geliştirmeyi gerekmektedir. Klasik çözümler için geliştirilen yaklaşım ve algoritmalar genelde başarısız olmaktadır. Bu çalışmada, literatürde son yıllarda yapılmış bir çalışma ele alınmış [9] ve bu çalışmanın ortaya koyduğu yeni kavramlar ve çözüm yöntemi çalışılmıştır. Hesaplamaların algoritmaya dayanması ve bunun için hazır bir bilgisayar programının olmayışı başka bir örnek üzerinde çalışmayı imkânsız kılmıştır. Bu yeni yaklaşımın getirdiği yeni kavramlar ve bulanık sayı ile ilişki bu konunun araştırma potansiyelinin yüksek olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Moore, R. E., Interval Analysis, 1966

[2] Moore, R. E., Methods and Applications of Interval Analysisi, 1979.

[3] Hansen, E, Interval Aritmetic in matrix computations, Part I, J. SIAm Numer. Anal. Ser. B Vol 2, No. 2, 1965.

[4] Hansen, E and Smith, R., Interval Arithmetic in matrix computation, Part II, SIAM J. Numer. Anal. Vol 4, No 1967.

[5] Nguyen, H. T., Walker, E. A., A first course in fuzzy logic, Second Edition, 1999.

[6] Yager, R. R., Ovchinnikov, Tong, R. M., Nguyen, H. T., Fuzzy sets and Applications, Selected Papers by L.A. Zadeh, 1987.

[7] Dubois, D., Prade, H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Mathematics in Science and Enginnering Volume 144, 1980.

[8] Buckley, J.J., Qu, Y., Solving systems of linear fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems 43, 33-43, 1991.

[9] Sevastjanov, P., Dymova, D., A new method for solving interval and fuzzy equations:Linear Case, Information Sciences, Volume 179, Issue 7, Pages 925-937, 2009