

**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI
ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI
TAHMİNLERİ**

Neslihan UYANIK

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
2011**

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN
KATSAYI TAHMİNLERİ**

Neslihan UYANIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ERZURUM
2011**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

Analitik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfların İçin Katsayı Tahminleri

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Neslihan UYANIK tarafından hazırlanan bu çalışma 25/08/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Shigeyoshi OWA

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

İmza :

Üye : Prof. Dr. Muhammet KAMALI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Halit ORHAN

İmza :

(imza)

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

Neslihan UYANIK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu tez çalışmasında ilk olarak negatif katsayılı p -valent fonksiyonlar için $E_{m,p}^n(q, \gamma)$, $N_{m,p}^n(q, \gamma)$ ve $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfları tanımlanarak bu sınıfların arasındaki bağıntılar belli koşullar altında incelendi. Ayrıca $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfına ait fonksiyonlar için distortion ve growth teoremleri ispatlandı. Son olarak bu sınıfa ait fonksiyonların extremal noktaları verildi.

2011, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyonlar, Negatif katsayılı analitik fonksiyonlar, p -valent fonksiyonlar

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

COEFFICIENTS ESTIMATES FOR SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC
FUNCTIONS

Neslihan UYANIK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In this thesis, the classes $E_{m,p}^n(q, \gamma)$, $N_{m,p}^n(q, \gamma)$ and $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ of p -valent functions with negative coefficients were defined, and the relations among these classes were obtained under certain conditions. In addition, the theorems of distortion and growth belonging to the class $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ were proved. Finally, extremal points of the functions as to this class were given.

2011, 50 pages

Keywords: Analytic functions, Analytic functions with negative coefficients, p -valent functions

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumda çalışmamı sağlayan, önümde yeni ufuklar açan, geniş tecrübesiyle çalışmalarımnda etkin katkısı bulunan, beni yönlendiren ve rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na;

kendisiyle çalışma şansını yakaladığım için kendimi ayrıcalıklı bulduğum, değerli bilgilerini benimle paylaşan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Mr. Prof. Dr. Shigeyoshi OWA'ya;

tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e;

değerli bilgileriyle bana ışık tutan, her konuda yardımcı ve yol gösterici olan, her takıldığım noktada benimle içtenlikle ilgilenen

Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a;

her konuda desteğini ve ilgisini hep yanımda hissettiğim, tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen ebedi dostum ve arkadaşım

Sayın Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bugünüme getiren sevgili

Anneme ve Babama

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Neslihan UYANIK

Ağustos 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Genel Kavramlar	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Katsayı Tahminleri	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1. Distortion ve Growth Teoremleri	30
4.2. Extremal Noktalar	37
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	44
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

$A_m(p)$	Birim Diskte Analitik Olan $f(z) = z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k$ Fonksiyonların Sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$E_{m,p}^n$	$A_m(p)$ nin Bir Alt Sınıfı
$E_{m,p}^n(q, \gamma)$	$E_{m,p}^n$ nin Bir Alt Sınıfı
$f^{(q)}$	f Fonksiyonunun q. Mertebeden Türevi
K	Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_{m,p}^n(q, \gamma)$	$E_{m,p}^n$ nin Bir Alt Sınıfı
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$N_{m,p}^n(q, \gamma)$	$E_{m,p}^n$ nin Bir Alt Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
S	Birim Diskte Ünivalent Olan Normalleştirilmiş Fonksiyonların Kümesi
S^*	Starlike Fonksiyonların Sınıfı

1.GİRİŞ

Ünivalent Fonksiyonlar Teorisi, 20. yüzyılın başlarında incelenmeye başlanmış ve günümüzde de yoğun olarak çalışılmaya devam edilmektedir. Bu alanın başlıca ve en önemli problemlerinden bir tanesi ünivalent fonksiyonların Maclaurin serilerindeki katsayıların tahmin edilmesidir. Bu tahminlerden en önemlisi 1916 yılında Bieberbach tarafından yapılan ve Bieberbach tahmini olarak bilinen “Ünivalent fonksiyonların S sınıfındaki her bir fonksiyonun Maclaurin serisindeki katsayılar için $|a_n| \leq n$ dir.” tahminidir. Bu problem matematikçileri yaklaşık yetmiş yıl uğraştırmış ve bu uğraşmalar sırasında Kompleks Analiz için önemli yeni kavramlar ve yöntemler geliştirilmiştir. 1985 yılında De-Branges tarafından bu tahminin doğruluğu ispatlanmıştır. Bu problemi çözerken karşılaşılan yeni problemler, bu alanla ilgili çalışmaların yoğunlaşarak sürmesine neden olmuştur.

Silverman (1975), negatif katsayılı ünivalent fonksiyonların katsayıları ile ilgili çalışmasında katsayıları ile ilgili bazı eşitsizlikler, konveks ve starlike fonksiyonların distortionları kavramlarını incelemiştir. Bu makale, pek çok çalışmada temel alınmıştır.

Salagean (1983), Salagean Operatörü denen yeni bir operatör tanımlayarak, bu operatör yardımı ile elde edilen sınıflara ait fonksiyonların katsayılarını incelemiştir.

Owa (1985), negatif katsayılı p -valent fonksiyonların belli bir sınıfı için katsayı tahminlerini, distortion ve growth teoremlerini ispatlamıştır.

Owa (1988) tarafından p -valent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için closure, distortion ve growth teoremleri, katsayı eşitsizliği, extremal fonksiyonu ve Hadamard çarpımı incelenmiştir.

Yamakawa (1992) tarafından negatif katsayılı p -valent starlike fonksiyonların belli alt sınıfı için konvekslik ve starlikelik yarıçapları, katsayı tahminleri, distortion ve growth teoremleri ve Quasi- Hadamard çarpımı ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Chen *et al.* (1995), bir diferansiyel operatör kullanarak tanımlanan negatif katsayılarla ilgili bazı multivalent fonksiyonları çalışmıştır.

Jin and Owa (2002), p -valent meromorf fonksiyonların belli bir sınıfı için bazı eşitsizlikler elde etmiş ve bu sınıfta subordinasyon konusunu incelemiştir.

Orhan ve Kamali (2003), kompleks mertebeli starlike ve konveks fonksiyonlar üzerine bir çalışma yapmıştır.

Kamali ve Akbulut (2003), negatif katsayılı belli konveks fonksiyonların bir alt sınıfını incelemiştir.

Kamali ve Orhan (2004), negatif katsayılı belli starlike fonksiyonların bir alt sınıfı üzerine çalışma yapmıştır.

Murugusundaramoorthy and Magesh (2007), Dziok-Srivastava operatörünü içeren kompleks mertebeli starlike ve konveks fonksiyonlar üzerine bir çalışma yapmıştır.

Attiya (2007), kompleks mertebeli sınırlı starlike fonksiyonların genel bir sınıfını incelemiştir.

Altıntaş *et al.* (2007), kompleks mertebeli starlike ve konveks fonksiyonların bazı aileleri için katsayı sınırlarını inlemiştir.

Aouf (2008), bir diferansiyel operatör kullanarak p -valent starlike fonksiyonlar için katsayıları incelemiştir.

Aouf (2009), negatif katsayılı p-valent fonksiyonların bazı sınıflarını incelemiştir.

Güney and Breaz (2009), kompleks mertebeli multivalent fonksiyonların bazı sınıflarının integral özelliklerini inceleyen bir çalışma yapmıştır.

Bu tez çalışmasında, Kadioğlu (2004) tarafından tanımlanan, $z \in U$, $p \in \mathbb{N}$, $n, q \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyon sınıfı için katsayı sınırları, distortion ve growth teoremleri incelendi. Ayrıca bu sınıfa ait fonksiyonların extremal noktaları araştırıldı.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2: $D \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in D$ olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu tamamen D kümesine ait ise z_0 noktasına bir iç nokta denir.

Tanım 2.1.3: Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme denir. Tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme adı verilir.

Tanım 2.1.4: Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir. Eğer bir bölgedeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen bu bölgede kalıyorsa bu bölgeye basit bağlantılı bölge adı verilir.

Tanım 2.1.5: $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. $f(z)$, z_0 noktasının uygun bir komşuluğunda diferansiyellenebilirse, $f(z)$ ye z_0 noktasında analitik fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.6: D , bir bölge olsun. $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde bire-bir ise bu fonksiyona D bölgesinde ünivalent fonksiyon denir.

Tanım 2.1.7: Bir $f(z)$ fonksiyonu için $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ şartlarına bu fonksiyonun normalleştirme şartları denir. Bu şartları sağlayan fonksiyona da normalleştirilmiş fonksiyon denir.

Örneğin,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Maclaurin serisi ile verilen $f(z)$ fonksiyonu normalleştirilmiş bir fonksiyondur.

Riemann Dönüşüm Teoremi bize $\mathbb{C}$ den farklı olan her hangi iki basit bağlantılı bölgenin konform olarak denk olduğunu söyler. Bundan dolayı biz, keyfi bir $D \neq \mathbb{C}$ bölgesi yerine birim diskte çalışacağız ve birim diski U ile göstereceğiz. Yani $U = \{z : |z| < 1\}$ diyeceğiz. U birim diskinde analitik olan normalleştirilmiş fonksiyonların kümesini A ile, A kümesinde ünivalent olan fonksiyonların kümesini de S ile göstereceğiz.

$$A = \left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, f(z), U \text{ 'da analitik} \right\}$$

$$S = \left\{ f \in A : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } f(z), U \text{ 'da ünivalent} \right\}$$

olarak yazılır. Örneğin, $f(z) = z$, $f(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonları S kümesinin elemanlarıdır.

Tanım 2.1.8: D_1 , $\mathbb{C}$ nin bir alt kümesi olsun. $z_0 \in D_1$ alalım. Eğer her $z \in D_1$ için z_0 ile z yi birleştiren doğru parçası D_1 kümesinde kalıyorsa D_1 e z_0 noktasına göre konveks küme veya z_0 noktasına göre starlike küme denir.

Tanım 2.1.9: $f(z) \in S$ olsun. $f(U)$ kümesi orijine göre konveks ise bu $f(z)$ fonksiyonuna orijine göre starlike veya kısaca starlike fonksiyon denir ve S sınıfına ait starlike fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Örneğin, $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu altında U birim diski, $f(U)$ görüntüsü $f(U) = \mathbb{C} - \left\{ u + iv : u \leq -\frac{1}{4}, v = 0 \right\}$ olur. $f(U)$, orijine göre konveks bir küme olduğundan $f(z)$, starlike bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.10: $f(z) \in S$ olsun. $f(U)$ konveks bir küme ise $f(z)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir ve S sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

Örneğin, $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu birim diski, $G = \left\{ z = u + iv : u > -\frac{1}{2} \right\}$ kümesine dönüştürür. G , konveks bir küme olduğundan $f(z)$, konveks bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.11: A , bir $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olan bütün fonksiyonların kompleks lineer uzayı ve F , A nın bir alt uzayı olsun. $f \in F$ fonksiyonu için

$$f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \quad 0 < \lambda < 1$$

olacak şekilde F de f_1, f_2 farklı fonksiyonları yoksa f ye F nin bir extremal noktası denir.

Teorem 2.1.1: $f(z) \in S$ fonksiyonunun starlike olması için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır.

Örneğin, $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n \in S^*$ ve $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi$) dır.

Gerçekten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \geq \frac{1+r}{1-r} > 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.2: $f(z) \in S$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır.

Örneğin, $f(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} z^{2n-1} \in K$ ve $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) dır.

Gerçekten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+r^2 e^{i2\theta}}{1-r^2 e^{i2\theta}} \right) \\ &= \frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2 \cos 2\theta} \geq \frac{1-r^2}{1+r^2} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3: f, U birim diskinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ biçimindeki normalleştirme koşullarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S^*$ olmasıdır (Duren 1983).

Tanım 2.1.12: $f(z) \in S$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Eğer

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} > 0$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna γ kompleks mertebeli starlike fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı S_γ^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: $f(z) \in S$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Eğer

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna γ kompleks mertebeli konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı K_γ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere A sınıfında tanımlanan ve

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z))$$

şartları sağlayan $D^n : A \rightarrow A$ operatörüne Salagean operatörü denir (Salagean 1983).

Dolayısıyla, Tanım 2.1.14 e göre A sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j$$

olduğu görülür.

Al-Oboudi, 2004 yılında bu operatörü $\delta \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$D_{\delta}^0 f(z) = f(z)$$

$$D_{\delta}^1 f(z) = (1-\delta) f(z) + \delta zf'(z) = D_{\delta} f(z)$$

$$D_{\delta}^n f(z) = D_{\delta}(D^{n-1} f(z))$$

şeklinde genelleştirmiştir. Bu operatör A sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonuna uygulandığında

$$D_{\delta}^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1 + (j-1)\delta]^n a_j z^j$$

olduğu kolayca görülür.

Daha sonra Raducanu ve Orhan 2010 yılında hem Salagean hem de Al-Oboudi operatörünü ihtiva eden genel bir operatörü $\delta \geq \mu \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$D_{\delta,\mu}^0 f(z) = f(z)$$

$$D_{\delta,\mu}^1 f(z) = \delta \mu z^2 f''(z) + (\delta - \mu) z f'(z) + (1 - \delta + \mu) f(z)$$

$\vdots$

$$D_{\delta,\mu}^n f(z) = D_{\delta,\mu}(D_{\delta,\mu}^{n-1} f(z))$$

şeklinde tanımlamıştır (Raducanu ve Orhan 2010). Bu da Raducanu-Orhan operatörü olarak adlandırılır. A sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D_{\delta,\mu}^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1 + (\delta \mu j + \delta - \mu)(j-1)]^n a_j z^j$$

olduğu kolayca görülebilir.

Raducanu ve Orhan'a ait olan bu genelleştirilmiş türev operatöründe eğer $\mu = 0$ alınırsa Al-Oboudi operatörü, $\delta = 1$ ve $\mu = 0$ alınırsa da Salagean operatörü elde edilir.

Tanım 2.1.15: D bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonu verilsin. Her $w_0 \in \mathbb{C}$ için $f(z) = w_0$ denklemi D de en fazla p ; herhangi bir $w_1 \in \mathbb{C}$ için $f(z) = w_1$ denklemi

de D de kesin p tane köke sahipse f fonksiyonuna D de p -valent (p -mertebeden multivalent) fonksiyon denir (Goodman, 1983, Cilt1, sf.89).

$p \in \mathbb{N}$ olmak üzere birim diskte analitik olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k$$

şeklindeki p -valent fonksiyonların sınıfını $A_n^*(p)$ ile göstereceğiz. Özel olarak $A_1^*(p) = A^*(p)$ olarak alınacaktır.

$z \in U$ olmak üzere $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ şartını sağlayan $A^*(p)$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonuna p -valent starlike fonksiyon; $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$ şartını sağlayan da p -valent konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.16: U birim diskinde $\varphi(0) = 1$ şartını sağlayan ve pozitif gerçel kısma sahip olan analitik φ fonksiyonlarının sınıfı P ile gösterilir ve bu sınıfa Caratheodory sınıfı, bu sınıftaki fonksiyonlara da Caratheodory fonksiyonları denir (Duren 1983).

Teorem 2.1.4: f, U birim diskinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ biçimindeki normalleştirme şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$ olmasıdır (Duren 1983).

Teorem 2.1.5: f, U birim diskinde $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ biçimindeki normalleştirme şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$ olmasıdır (Duren 1983).

Teorem 2.1.6 (Growth Teoremi): $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir $f \in S$ fonksiyonu için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği yazılır (Duren 1983).

Teorem 2.1.7 (Distortion Teoremi): $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir $f \in S$ fonksiyonu için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği yazılır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

$U = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan

$$f(z) = z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0; m, p \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\})$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $A_m(p)$ ile gösterelim. $z \in U, p \in \mathbb{N}, n, q \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonunun öncelikle katsayıları daha sonra distortion, growth teoremleri ve extramal noktaları incelenecektir. Bu sınıfı $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ile göstereceğiz. Burada $n=0, p=1, q=0, \gamma=1$ alındığında

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$$

olduğunu; $n=1, p=1, q=0, \gamma=1$ alındığında da

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

olduğunu görmekteyiz. Yani bu sınıf, özel durumda starlike ve konveks fonksiyonları da kapsamaktadır. Dolayısıyla elde edilecek sonuçlar da daha önce elde edilmiş bazı sonuçları genelleştirecektir.

$A_m(p)$ sınıfındaki bir fonksiyonun q . mertebeden türevi,

$$f'(z) = p.z^{p-1} - \sum_{k=p+m}^{\infty} k.a_k z^{k-1}$$

$$f''(z) = p.(p-1).z^{p-2} - \sum_{k=p+m}^{\infty} k.(k-1).a_k z^{k-2}$$

$\vdots$

$$f^{(q)}(z) = p.(p-1)\dots(p-q+1)z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q}$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q}$$

olarak bulunmaktadır. Buna Salagean operatörünü uygularsak,

$$D^0 f^{(q)}(z) = f^{(q)}(z)$$

$$D^1 f^{(q)}(z) = \frac{1}{p-q} z.(f^{(q)}(z))'$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \frac{(k-q)}{(p-q)} a_k z^{k-q}$$

$\vdots$

$$D^n(f^{(q)}(z)) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left[\frac{k-q}{p-q} \right]^n a_k z^{k-q} \quad (1)$$

elde edilir.

$E_{m,p}^n(q)$ sınıfını , $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k > n, m \in \mathbb{N}$; $\frac{k-q}{p-q} \geq p-q-n-1 \geq 0$; $z \in U$ olmak

üzere

$$E_{m,p}^n(q) = \left\{ f \in A_m(p) : \frac{D^n f^{(q)}}{z^{p-q}} \neq 0, (z \in C - \{0\}), f(z) = z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k, a_k \geq 0 \right\}$$

şeklinde $A_m(p)$ nin bir alt sınıfı olarak tanımlayalım.

$E_{m,p}^n(q)$ nin $E_{m,p}^n(q, \gamma)$, $N_{m,p}^n(q, \gamma)$ ve $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ alt sınıflarını, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ için $\frac{k-q}{p-q} \geq p-q-n-1 \geq 0$, $z \in U$ olmak üzere

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) = \left\{ f \in E_{m,p}^n(q) : \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0, (z \in U) \right\},$$

$$\begin{aligned} N_{m,p}^n(q, \gamma) &= \left\{ f \in E_{m,p}^n(q) : \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p + q + n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right] a_k \right. \\ &\quad \left. \leq \frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p + q + n + 1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right) \right\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_{m,p}^n(q, \gamma) &= \left\{ f \in E_{m,p}^n(q) : \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\frac{k-q}{p-q} - p + q + n + |\gamma| \right] a_k \right. \\ &\quad \left. \leq \frac{p!}{(p-q)!} (|\gamma| - p + q + n + 1) \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Uyarı :

1. $E_{m,1}^0(0, \gamma) = S^*(b)$ Nasr and Aouf (1985) tarafından çalışıldı.
2. $E_{m,1}^0(0, 1-\alpha) = T_\alpha(m)$ ve $E_{m,1}^1(0, 1-\alpha) = C_\alpha(m)$, $\alpha \in [1, 0)$ Srivastava, Owa and Chatterjea (1987) tarafından incelenmiştir.
3. $E_{1,1}^0(0, 1-\alpha) = T^*(\alpha)$ ve $E_{1,1}^1(0, 1-\alpha) = C(\alpha)$, $\alpha \in [1, 0)$ Silverman (1975) tarafından çalışıldı.
4. $K_{m,1}^0(0, \gamma) = O_m^0(\gamma)$ ve $K_{m,1}^1(0, \gamma) = O_m^1(\gamma)$ Parvathan and Ponnusanny (1991) tarafından çalışıldı.
5. $p=1$ ve $q=0$ için $E_{m,p}^n(q, \gamma)$, $N_{m,p}^n(q, \gamma)$, $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfları Owa and Salagean (1998) tarafından tanımlanan $T_{n,m}(\gamma)$, $O_{n,m}(\gamma)$ ve $P_{n,m}(\gamma)$ sınıflarının da genelleştirilmişleridir.

Biz de $E_{m,p}^n(q, \gamma)$, $N_{m,p}^n(q, \gamma)$, $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. $m \in \mathbb{N}$, $n=0$, $p=1$ ve $q=0$ alındığında Owa and Salagean (1998) da ki sonuçlar aynen elde edilmektedir.

3.1. Katsayı Tahminleri

Teorem 3.1.1: $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$K_{m,p}^n(q, \gamma) \subseteq E_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

İspat: $f \in K_{m,p}^n(q, \gamma)$ olsun. Biz

$$\left| \frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right| < |\gamma|, \quad (z \in U) \quad (2)$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğer f fonksiyonunun seri açılımı

$$f(z) = z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \geq 0 \quad (3)$$

ise bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right| - |\gamma| \\ &= \left| \frac{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^{n+1} a_k z^{k-q}}{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k z^{k-q}} - p + q + n \right| - |\gamma| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} (1-p+q+n) - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) z^{k-q}}{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k z^{k-q}} \right| - |\gamma|$$

olur. Bu elde edilen ifadedeki $|\gamma|$ nın dışındaki mutlak değeri ifadenin içinin pay ve paydasını z^{p-q} ile bölersek

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\frac{p!}{(p-q)!} (1-p+q+n) - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) z^{k-p}}{\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k z^{k-p}} \right| - |\gamma| \\ & \leq \frac{-\frac{p!}{(p-q)!} (1-p+q+n) + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) |z|^{k-p}}{\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k |z|^{k-p}} - |\gamma| \quad (4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Biz $z \in U - \{0\}$ için $\frac{D^n f^{(q)}}{z^{p-q}} \neq 0$ ve

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{D^n f^{(q)}}{z^{p-q}} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k |z|^{k-p} \right) \\ &= \frac{p!}{(p-q)!} \end{aligned}$$

olduğunu kullanırsak her $z \in U$ için

$$\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k |z|^{k-p} > 0 \quad (5)$$

yazılır. (4) ve (5) den

$$\begin{aligned} & \left| \frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right| - |\gamma| \\ & < \frac{-\frac{p!}{(p-q)!} (1 - p + q + n + |\gamma|) + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p + q + n \right) + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $f \in K_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu kullanılarak

$$\left| \frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right| - |\gamma| < 0$$

veya

$$\left| \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right| < 1$$

bulunur. Buradan

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > -1, \quad (z \in U) \quad (6)$$

olduğu görülür. Bu da $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ demektir.

Teorem 3.1.2: $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) \subseteq N_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

İspat: $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olsun.

$$D^n(f^{(q)}(z)) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left[\frac{k-q}{p-q} \right]^n a_k z^{k-q}$$

ifadesi

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0$$

eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^{n+1} a_k z^{k-q}}{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k z^{k-q}} - p + q + n \right] \right\} > 0, \quad (7)$$

olur. Burada z reel seçilip $z \rightarrow 1^-$ olduğu düşünülürse (7) den

$$\left[\frac{-\frac{p!}{(p-q)!} + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^{n+1} a_k}{\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k} \right] \leq \frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} & -\frac{p!}{(p-q)!} + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^{n+1} a_k \\ & \leq \left(\frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n \right) \left[\frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \right] \end{aligned}$$

veya

$$\sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left(\frac{k-q}{p-q} + \frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n \right) a_k \leq \frac{p!}{(p-q)!} \left(\frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n + 1 \right)$$

olup

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^{n+1} a_k + \left(\frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n \right) \left[\sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n a_k \right] \\ & \leq \frac{p!}{(p-q)!} \left(\frac{|\gamma|^2}{\operatorname{Re} \gamma} - p + q + n + 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki yanını $\operatorname{Re} \gamma > 0$ olmak üzere $\frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|}$ ile çarparsak

$f \in N_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğunu görürüz.

Teorem 3.1.3: $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (-\infty, 0)$ ise

$$N_{m,p}^n(q, \gamma) \not\subset E_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dır.

İspat: İspatımızı iki durum için yapacağız.

I. Durum: $\gamma \in [p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q}, 0)$ olsun.

$f_{m,\alpha}(p, q, n; z)$ fonksiyonunu $\alpha > 0$ olmak üzere

$$f_{m,\alpha}(p, q, n; z) = z^p - \alpha \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \frac{p!}{(p+m)!} \frac{(p+m-q)!}{(p-q)!} z^{p+m} \quad (8)$$

olarak tanımlayalım. $f_{m,\alpha}(p, q, n; z)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p + q + n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right] a_k \\ &= \frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left\{ \left(\frac{p+m-q}{p-q} - p + q + n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right\} \\ & \quad \times \alpha \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \frac{p!}{(p+m)!} \frac{(p+m-q)!}{(p-q)!} \\ &= \alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left\{ \left(\frac{p+m-q}{p-q} - p + q + n \right) \frac{\gamma}{-\gamma} - \gamma \right\} \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p + q + n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right] a_k \\
&= -\alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left(-p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q} + \gamma \right) \\
&< \frac{p!}{(p-q)!} \left((-p + q + n + 1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right) \tag{9}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $N_{m,p}^n(q, \gamma)$ nin tanımından $f_{m,\alpha}(p, q, n; z) \in N_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu görülür.

Şimdi

$$F(z) = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f_{m,\alpha}^{(q)}(p, q, n; z)}{D^n f_{m,\alpha}^{(q)}(p, q, n; z)} - p + q + n \right) \quad (z \in U)$$

alalım. İşlemlerin kolaylığı bakımından $f_{m,\alpha}^{(q)}(p, q, n; z)$ yi $f_{m,\alpha}^{(q)}(z)$ ile yani

$$f_{m,\alpha}^{(q)}(p, q, n; z) = f_{m,\alpha}^{(q)}(z)$$

olarak gösterelim. $f_{m,\alpha}^{(q)}(z)$ nin q . mertebeden türevi

$$f_{m,\alpha}^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \alpha \frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \frac{p!}{(p+m)!} \frac{(p+m-q)!}{(p-q)!} z^{p+m-q}$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} z^{p+m-q}$$

olur. Salagean türev operatörü kullanılarak

$$\begin{aligned} D^n f_{m,\alpha}^{(q)}(z) &= \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n z^{p+m-q} \\ &= \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} (1 - \alpha z^m) \end{aligned}$$

ve

$$D^{n+1} f_{m,\alpha}^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} \left(1 - \alpha \frac{p+m-q}{p-q} z^m \right) \text{ yazılır.}$$

$$\zeta = z^m, a = -p+q+n+1, b = -p+q+n+1 + \frac{m}{p-q} \text{ ve}$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{a - \alpha b \zeta}{\gamma(1 - \alpha \zeta)} \quad (10)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f_{m,\alpha}^{(q)}(z)}{D^n f_{m,\alpha}^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} \left(1 - \alpha \frac{p+m-q}{p-q} z^m \right)}{\frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} (1 - \alpha z^m)} - p + q + n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1 - \alpha \frac{p+m-q}{p-q} z^m - p+q+n - \alpha z^m (-p+q+n)}{1 - \alpha z^m} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{-p+q+n+1 - \alpha z^m \left(-p+q+n + \frac{p+m-q}{p-q} \right)}{1 - \alpha z^m} \right) \\
&= 1 + \frac{-p+q+n+1 - \alpha z^m \left(-p+q+n + \frac{p+m-q}{p-q} \right)}{\gamma(1 - \alpha z^m)} \\
&= 1 + \frac{a - \alpha b \zeta}{\gamma(1 - \alpha \zeta)} \\
&= 1 + \varphi(\zeta)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha > 1$ için

$$r = \frac{\alpha(b-a)}{\gamma(1-\alpha^2)} \quad (11)$$

yarıçaplı ve

$$z_0 = \frac{\alpha^2 b - a}{\gamma(\alpha^2 - 1)} \quad (12)$$

merkezli bir D diski için $\varphi(U) = C_\infty - D(z_0, r)$ elde ederiz. Burada $D(z_0, r) = \{w : |w - z_0| < r\}$ dir. Son olarak $F(U) = C_\infty - D(z_0 + 1, r)$ bulunur. Bu da bütün $z \in U$ için $\operatorname{Re} F(z) > 0$ eşitsizliğinin doğru olmadığını gösterir.

Yukarıdaki ifadelerden $\alpha > 1$ için $f_{m,\alpha}(p, q, n; z) \in N_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu görülmesine karşın $f_{m,\alpha}(p, q, n; z) \notin E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu görülür. Bu durumda $N_{m,p}^n(q, \gamma) \not\subset E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olur.

II. Durum: $\gamma \in \left(-\infty, p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q}\right)$ olsun. (9) eşitsizliğinde

$$-\alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left(-p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q} + \gamma\right) < \frac{p!}{(p-q)!} \left((-p + q + n + 1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma|\right)$$

olduğu görülmüştü. Buradan

$$\alpha \left(p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q} - \gamma\right) < p - q - n - 1 - \gamma$$

veya

$$\alpha < \frac{p - q - n - 1 - \gamma}{p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q} - \gamma} = \frac{-p + q + n + 1 + \gamma}{-p + q + n + 1 + \gamma + \frac{m}{p - q}}$$

yazılır. Dolayısıyla $\alpha \in \left(1, \frac{-p + q + n + 1 + \gamma}{-p + q + n + 1 + \frac{m}{p - q}}\right)$ olarak bulunur.

α nın bu değeri için (8) de tanımlanan $f_{m,\alpha}$ fonksiyonunu (9) eşitsizliğini sağlar. Böylece $f_{m,\alpha} \in N_{m,p}^n(q, \gamma)$ dır. Aynı zamanda I. Durumdakine benzer olarak $f_{m,\alpha} \notin E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu da gösterilebilir.

Teorem 3.1.4: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (-\infty, 0)$ ise

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) \not\subset K_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

İspat: (8) de verilen

$$f = f_{m,\alpha}(p, q, n; z) = z^p - \alpha \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \frac{p!}{(p+m)!} \frac{(p+m-q)!}{(p-q)!} z^{p+m}$$

fonksiyonu için $\alpha > \frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{|\gamma| - p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q}}$ ve $|\gamma| - p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q} > 0$ olmak

üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p + q + n \right) + |\gamma| \right] a_k \\ &= \frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left\{ \frac{p+m-q}{p-q} - p + q + n + |\gamma| \right\} \\ & \times \alpha \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^{-n} \frac{p!}{(p+m)!} \frac{(p+m-q)!}{(p-q)!} \\ &= \alpha \frac{p!}{(p-q)!} \left[\frac{p+m-q}{p-q} - p + q + n + |\gamma| \right] \\ &> \frac{p!}{(p-q)!} [|\gamma| - p + q + n + 1] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (-\infty, 0)$ için $f_{m,\alpha} \notin K_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğu görülür.

(10) da verilen $\varphi(\zeta)$ fonksiyonu göz önüne alınarak

$$F(z) = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f_{m,\alpha}^{(q)}(z)}{D^n f_{m,\alpha}^{(q)}(z)} - p + q + n \right) = 1 + \frac{a - \alpha b \zeta}{\gamma(1 - \alpha \zeta)} = 1 + \varphi(\zeta);$$

(11) ve (12) de verilen $\varphi(U) = D(c, d)$ göz önüne alınarak

$$\operatorname{Re} F(z) \geq 1 + \frac{\alpha b + a}{\gamma(\alpha + 1)} \quad (13)$$

elde edilir. Eğer $\gamma \in \left(-\infty, p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q} \right)$ ve $\alpha \in \left(\frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{|\gamma| - p + q + n + 1 + \frac{m}{p - q}}, 1 \right)$

ise

$$\frac{\alpha(\gamma + b) + \gamma + a}{\gamma(\alpha + 1)} > 0 \quad (14)$$

ve eğer $\gamma \in \left(p - q - n - 1 - \frac{m}{p - q}, 0 \right)$ ve

$$\alpha \in \left(\frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{|\gamma| - p + q + n + 1 + \frac{m}{p - q}}, \frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{\left| -p + q + n + 1 + \frac{m}{p - q} - |\gamma| \right|} \right) \cap (0, 1)$$

ise bu durumda da (14) sağlanır. $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ nın tanımı ve (13) ile (14) birleştirildiğinde

$$\alpha \in \left(\frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{|\gamma| - p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q}}, \frac{|\gamma| - p + q + n + 1}{-p + q + n + 1 + \frac{m}{p-q} - |\gamma|} \right) \cap (0,1) \text{ ve } \gamma \in (-\infty, 0) \text{ için}$$

$f_{m,\alpha} \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ elde edilir.

Teorem 3.1.5: $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (0, \infty)$ ise

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) = N_{m,p}^n(q, \gamma) = K_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dır.

İspat: Eğer γ pozitif bir reel sayı ise $N_{m,p}^n(q, \gamma)$ ve $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ verilişinden $N_{m,p}^n(q, \gamma) = K_{m,p}^n(q, \gamma)$ dir. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 kullanarak Teorem 3.1.5'i elde ederiz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Distortion ve Growth Teoremleri

Teorem 4.1.1: Eğer $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ise

$$r^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m}$$

$$\leq |f(z)| \leq r^p + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

ise yukarıdaki eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

İspat: $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğundan Teorem 3 deki (2) durumu göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=p+m}^{\infty} a_k \leq \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}$$

yazılır. Buradan üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k \right| \quad (|z|=r) \\ &\leq |z|^p + \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k |z|^k < r^p + r^{p+m} \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k \\ &\leq r^p + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m} \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. Benzer şekilde $|z-w| > ||z|-|w||$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |z|^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k |z|^k \geq r^p - r^{p+m} \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k \\ &\geq r^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m} \end{aligned} \quad (16)$$

bulunur. Sonuç olarak (15) ve (16) dan

$$\begin{aligned}
& r^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m} \\
& \leq |f(z)| \leq r^p + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremdeki eşitlik durumu için

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $z = r(r > 0)$ ise $|f(z)|$ nin sol tarafındaki eşitliği elde ederiz.

Eğer $z = r e^{i\frac{\pi}{p}}$ ve $m = p$ olarak aldığımızda

$$z^p = r^p e^{i\pi} = -r^p$$

ve

$$z^{p+m} = r^{p+m} e^{i\frac{2p}{p}\pi} = r^{p+m} e^{i2\pi} = r^{p+m}$$

elde ederiz. Böylece biz $|f(z)|$ nin sağ tarafındaki eşitlik olan

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &= \left| -r^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m} \right| \\
 &= r^p + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m}
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 4.1.2: Eğer $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ise

$$\begin{aligned}
 & pr^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1} \\
 & \leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

ise yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik durumu gerçekleşir.

İspat: $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ olduğundan Teorem 3 deki (2) durumu göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=p+m}^{\infty} k a_k \leq \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}$$

olur.

$$f(z) = z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k \Rightarrow f'(z) = pz^{p-1} - \sum_{k=p+m}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

yazılır. Buradan üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq p|z|^{p-1} + \sum_{k=p+m}^{\infty} k a_k |z|^{k-1} = pr^{p-1} + \sum_{k=p+m}^{\infty} k a_k r^{k-1} \\ &\leq pr^{p-1} + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1} \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir. Benzer şekilde $|z - w| > ||z| - |w||$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 |f'(z)| &\geq p|z|^{p-1} - \sum_{k=p+m}^{\infty} ka_k |z|^{k-1} = pr^{p-1} - \sum_{k=p+m}^{\infty} ka_k r^{k-1} \\
 &\geq pr^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1} \quad (18)
 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak (17) ve (18) den

$$\begin{aligned}
 &pr^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1} \\
 &\leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremdaki eşitlik durumu için

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon için

$$f'(z) = pz^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m-1}$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer $z = r(r > 0)$ ise $|f'(z)|$ nin sol tarafındaki eşitliği elde ederiz.

Eğer $z = re^{i\frac{\pi}{p-1}}$ ve $m = p-1$ olarak aldığımızda

$$z^{p-1} = r^{p-1} e^{i\pi} = -r^{p-1}$$

ve

$$z^{p+m-1} = r^{p+m-1} e^{i\frac{2p-2}{p-1}\pi} = r^{p+m-1} e^{i2\pi} = r^{p+m-1}$$

elde ederiz. Böylece biz $|f'(z)|$ nin sağ tarafındaki eşitlik olan

$$|f'(z)| = \left| -pr^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1} \right|$$

$$= pr^{p-1} + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1}$$

elde ederiz.

4.2. Extremal Noktalar

Teorem 4.2.1: $f_{p+m-1}(z) = z^p$ ve

$$f_k(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^k$$

olsun. Bir $f(z)$ fonksiyonunun $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \quad (z \in U) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k = 1 \quad (\mu_k \geq 0; k = p+m-1, p+m, \dots)$$

şeklinde olmasıdır.

İspat: $\mu_k = \frac{\sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k$

ve

$$\mu_{p+m-1} = 1 - \sum_{k=p+m}^{\infty} \mu_k \quad (\mu_k \geq 0; k = p+m-1, p+m, p+m+1 \dots)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k f_k(z) &= \left(1 - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k \right) z^p \\ &\quad + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k \\ &\quad \times \left(z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^k \right) \\ &= z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k z^p \\ &\quad + \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k \\ &= z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} a_k z^k \\ &= f(z) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer bir taraftan

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k f_k(z) = \mu_{p+m-1} f_{p+m-1}(z) + \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \\
 &= \left(1 - \sum_{k=p+m}^{\infty} \mu_k \right) z^p + \sum_{k=p+m}^{\infty} \mu_k \left(z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^k \right) \\
 &= z^p - \sum_{k=p+m}^{\infty} \left(z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^k \right) \\
 &\quad \times \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k
 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} \\
 &\quad \times \frac{\sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k. \quad (k = p+m, p+m+1, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right) a_k = \\
& \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right] \\
& \times \frac{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]}{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)} a_k
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right] (1 - \mu_{p+m-1}) \\
& \leq \sum_{k=p+m}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece extremal noktalar $f_{p+m-1}(z)$ ve $f_k(z)$ fonksiyonlarıdır.

Uyarı 4.2.1: Biz negatif katsayılı analitik fonksiyonların $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfını çalıştık. U

da analitik olan $f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böyle bir $f(z)$

fonksiyonu eğer bazı γ kompleks sayıları için $0 < \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) < \frac{1}{p-q-n-1}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p+q+n \right) \right) > 0 \quad (z \in U)$$

eşitsizliğini $f(z) \in G_{1,p}^n(q, \gamma)$ olduğunu söyleyebiliriz. Eğer $f(z) \in G_{1,p}^n(q, \gamma)$ için $F(z)$ fonksiyonunu

$$F(z) = \frac{1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) - i(1 - p + q + n) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\gamma} \right)}{1 + (1 - p + q + n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right)}$$

olarak tanımlarsak o zaman $F(z)$ nin U da analitik olduğunu biliriz. $F(0)=1$ ve $\operatorname{Re} F(z) > 0$ ($z \in U$) dır. Böylece $F(z)$ Caratheodory fonksiyonudur. $F(z)$ Caratheodory fonksiyonu için extremal fonksiyon

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olarak verildiğinden biz

$$\frac{1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) - i(1 - p + q + n) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\gamma} \right)}{1 + (1 - p + q + n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

yazabiliriz. Bu bize

$$\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n + \gamma - i\gamma(1 - p + q + n) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\gamma} \right) = \gamma \left(1 + (1 - p + q + n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \frac{1+z}{1-z}$$

olduğunu gösterir. Burada

$$D^{n+1} f^{(q)}(z) = \frac{1}{p-q} z \left(D^n f^{(q)}(z) \right)'$$

olduđuna dikkat etmeliyiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-q} \frac{\left(D^n f^{(q)}(z) \right)'}{D^n f^{(q)}(z)} - \frac{1}{z} \left(p-q-n-\gamma + i\gamma(1-p+q+n) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \\ = \gamma \left(1 + (1-p+q+n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \left(\frac{2}{1-z} + \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

olduğunu g r r z. Yani

$$\frac{1}{p-q} \frac{\left(D^n f^{(q)}(z) \right)'}{D^n f^{(q)}(z)} - \frac{1}{z} = 2\gamma \left(1 + (1-p+q+n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \frac{1}{1-z}$$

dir.

$$\int_0^z \left(\frac{1}{p-q} \frac{\left(D^n f^{(q)}(z) \right)'}{D^n f^{(q)}(z)} - \frac{1}{t} \right) dt = 2\gamma \left(1 + (1-p+q+n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \int_0^z \frac{1}{1-t} dt$$

bulunur. İntegral hesabı yaptığımızda

$$\frac{1}{p-q} \log D^n f^{(q)}(z) - \log z = -2\gamma \left(1 + (1-p+q+n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right) \log(1-z)$$

elde ederiz. Böylece

$$\left(D^n f^{(q)}(z)\right)^{\frac{1}{p-q}} = \frac{z}{(1-z)^{2\gamma\left(1+(1-p+q+n)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)}}$$

olarak bulunur. Yani

$$D^n f^{(q)}(z) = \left(\frac{z}{(1-z)^{2\gamma\left(1+(1-p+q+n)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)}} \right)^{p-q}.$$

Sonuç olarak yukarıda tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $G_{1,p}^n(q,\gamma)$ sınıfı için extremal fonksiyondur. Fakat bizim kullandığımız negatif katsayılı analitik fonksiyonların $E_{m,p}^n(q,\gamma)$ sınıfı için extremal fonksiyonların neler olacağı hakkında bir fikir yürütemiyoruz.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde tezde elde ettiğimiz temel sonuçlar verilmiştir.

İlk olarak $z \in U, p \in \mathbb{N}, n, q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0$$

şartını sağlayan f fonksiyonunun katsayılarını inceledik ve bu sınıfı $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ile gösterdik. Daha sonra $E_{m,p}^n(q)$ nın alt sınıflarını $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ için $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}; \frac{k-q}{p-q} \geq p-q-n-1 \geq 0; z \in U$ olmak üzere $E_{m,p}^n(q, \gamma), N_{m,p}^n(q, \gamma)$ ve $K_{m,p}^n(q, \gamma)$ olarak tanımladık.

Elde ettiğimiz sonuçlar şunlardır:

Sonuç 5.1: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$K_{m,p}^n(q, \gamma) \subseteq E_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

Sonuç 5.2: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) \subseteq N_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

Sonuç 5.3: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (-\infty, 0)$ ise

$$N_{m,p}^n(q, \gamma) \not\subset E_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

Sonuç 5.4: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (-\infty, 0)$ ise

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) \not\subset K_{m,p}^n(q, \gamma)$$

dir.

Sonuç 5.5: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ ve $\gamma \in (0, \infty)$ ise

$$E_{m,p}^n(q, \gamma) = N_{m,p}^n(q, \gamma) = K_{m,p}^n(q, \gamma)$$

Sonuç 5.6: $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ise

$$r^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m}$$

$$\leq |f(z)| \leq r^p + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m}$$

($|z| = r < 1$)

eşitsizliği sağlanır. Eğer

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

ise yukarıdaki eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

Sonuç 5.7: $f \in E_{m,p}^n(q, \gamma)$ ise

$$pr^{p-1} - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1}$$

$$\leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m-1)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} r^{p+m-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer

$$f(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{(p+m)!}{(p+m-q)!} \left(\frac{p+m-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{p+m-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^{p+m}$$

ise yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik durumu gerçekleşir.

Sonuç 5.8: $f_{p+m-1}(z) = z^p$ ve

$$f_k(z) = z^p - \frac{\frac{p!}{(p-q)!} \left(|\gamma| + (-p+q+n+1) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} \right)}{\frac{k!}{(k-q)!} \left(\frac{k-q}{p-q} \right)^n \left[\left(\frac{k-q}{p-q} - p+q+n \right) \frac{\operatorname{Re} \gamma}{|\gamma|} + |\gamma| \right]} z^k$$

olsun. Bir $f(z)$ fonksiyonunun $E_{m,p}^n(q, \gamma)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \quad (z \in U) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=p+m-1}^{\infty} \mu_k = 1 \quad (\mu_k \geq 0; k = p+m-1, p+m, \dots)$$

şeklinde olmasıdır.

Sonuç 5.9: $F(z)$ fonksiyonunu

$$F(z) = \frac{1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p+q+n \right) - i(1-p+q+n) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\gamma} \right)}{1 + (1-p+q+n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \right)}$$

olarak tanımlarsak $F(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} F(z) > 0$ ($z \in U$) dır. Böylece $F(z)$ Caratheodory fonksiyonudur. $f(z)$ fonksiyonu $G_{1,p}^n(q, \gamma)$ sınıfı için extremal fonksiyondur. Fakat

bizim kullandığımız negatif katsayılı analitik fonksiyonların $E_{m,p}^n(q,\gamma)$ sınıfı için extremal fonksiyonların neler olacağı hakkında bir fikir yürütemiyoruz.

KAYNAKLAR

- Altıntaş, O., Irmak, H., Owa, S., Srivastava, H.M., 2007, Coefficient bounds for some families of starlike and convex functions of complex order. *Appl. Math. Lett.* 20, no.12, 1218-1222.
- Aouf, M. K., 2008, Certain subclasses of p-valent starlike functions defined by using a differential operator, *App. Math. Comp.* 206, 867-875.
- Aouf, M. K., 2009, Some families of p- valent functions with negative coefficients, *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol.78,no 1, pp.121-135.
- Attiya,A.A., 2007, On a generalization class of bounded starlike functions of complex order, *App. Math. Comp.*187, 62-67.
- Bulboaca,T., Nasr,M.A., Salagean, G. S., 1991, Functions with negative coefficients n-starlike of complex order, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Math.* 36, 7-12.
- Chen,M.P., Irmak,H., Srivastava,H.,M., 1995, Some multivalent functions with negative coefficients defined by using a differential operator, *DMS-714-IR*.
- Duren, P.L., 1983, *Univalent Functions*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
- Goodman, A.W., 1983, *Univalent Function*, Vols. I and II, Mariner Publ.Comp., Tamp, Florida.
- Graham, I., Kohr, G., 2003, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc. New York.
- Güney, H.Ö., Breaz, D., 2009, Integral properties of some families of multivalent functions with complex order. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 54, no.1, 101-106.
- Jin,L.,L., Shigeyoshi,O., 2002, On a class of meromorphic p- valent starlike functions involving certain linear operators, *Int. J. Math.Sci.*, 32:5, 271-280.
- Kadioğlu, E., 2004, On majorization problems associated with p-valently functions of complex order, *App. Math.Comp.* 153, 261-265.
- Kamali, M., Akbulut, S., 2003, On a subclass of certain convex functions with negative coefficients. *Appl. Math. Comp.* 145, 341-350.
- Kamali, M.,Orhan, H., 2004, On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients. *Bull. Korean Math. Soc.* 41, no.1, 53-71.
- Murugusundaramoorthy,G.,Magesh,N., 2007, Starlike and convex functions of complex order involving the Dziok-Srivastava operator, *Integral Transforms And Special Functions*, 18, no.6, 419-425.
- Nasr,M.A., Aouf, M., K., 1985, Starlike functions of complex order, *J. Natural Sci. Math.* 25,1-12.
- Orhan, H., Kamali, M., 2003, Starlike, convex and close-to-convex functions of complex order. *Appl. Math. Comp.* 135, 251-262.
- Owa,S., 1985, On certain classes of p-valent functions with negative coefficients, *Simon Stevin* ,59, 385-402.
- Owa,S., 1988, On certain classes of p-valent functions, *Casopis Pro Pestovani Matematiky*, 113,issue 4,pp.342-350.
- Owa,S., Salagean, G. S., 1998, On an open problem of Owa,S., *J. Math. Anal. Appl.* 218, 453-457.

- Owa,S., Salagean, G. S., 1998, Starlike or convex functions of complex order functions with negative coefficients, *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku* 1062, 77-83.
- Parvathan,R., Ponnusanny, S., Eds., 1991, Open problems in: *Proc. Of Conference on New Trends in Geometric Function Theory and Applications*, Madras 1990, World Sci. Publ.
- Salagean, G. S., 1983, Subclass of Univalent Functions, *Lecture Notes in Mathematics* 1013, Springer-Verlag, Berlin, 362-372.
- Silverman, H., 1975, Univalent functions with negative coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* 51, 109-116.
- Srivastava, H.M., Owa,S., Chatterjea,S.K., 1987, A note on certain classes of starlike functions, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 77, 115-124.
- Yamakawa,R., 1992, Certain subclasses of p -valent functions with negative coefficients, in *Current Topics in Analytic Function Theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, and Hong Kong, pp.393-402.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Gaziantep'in İslahiye ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Gaziantep'te, orta ve lise öğrenimini İslahiye'de tamamladı. 1991 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1995 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Doktora öğrenimine başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.