

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU BOYUTLU KONİNİN FACELERİNİN  
ÖRGÜLERİNİN MODÜLERLİĞİ

RIDVAN SARIOĞLU  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2010

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU BOYUTLU KONİNİN FACELERİNİN  
ÖRGÜLERİNİN MODÜLERLİĞİ

RIDVAN SARIOĞLU  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN  
Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

GEBZE  
2010



## YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/01/2010 tarih ve 2010/03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 11/02/2010 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Rıdvan SARIOĞLU'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU

### ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
...../...../20... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

### **TEZ BAŞLIĞI: SONLU BOYUTLU KONİNİN FACELERİNİN ÖRGÜLERİNİN MODÜLERLİĞİ YAZAR ADI: RIDVAN SARIOĞLU**

Bir  $V$  vektör uzayı içindeki  $K$  konisinin facelerinin oluşturduğu örgünün modüler olma şartları birçok araştırmada inceleme konusu olmuştur.

Bu tez çalışmasında; birinci bölümde koni ve face tanımlarıyla birlikte bunların özelliklerinden bahsettik. İkinci bölümde face örgülerinin modülerliğinden, üçüncü bölümde ise bu örgülerin yarı modülerliğine değindik.

## SUMMARY

### **THESIS NAME: MODULARITY OF THE LATTICE OF FACE OF A FINITE DIMENSIONAL CONE**

**AUTHOR NAME: RIDVAN SARIOĞLU**

Rules of to be modularity of lattice of face of  $K$  cone in  $V$  vector space, have been investigation topic in a lot of research.

In this thesis, at the first part we mentioned definitions cone, face and their features. At the second part; we investigated modularity of lattice of face, and at the third part; semimodularity of lattice of face.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlık aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle her türlü yardımını esirgemeyen ve kıymetli zamanını ayıran danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT' a ve öğrenim hayatım boyunca sürekli yanımda bulunan aileme sonsuz teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                       | <b>Sayfa</b> |
|-------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET                                                  | iv           |
| SUMMARY                                               | v            |
| TEŞEKKÜR                                              | vi           |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ                                    | vii          |
| 1. GİRİŞ                                              | 1            |
| 2. FACELERİN DAĞILMALI VE MODÜLER ÖRGÜ OLMA DURUMLARI | 6            |
| 3. FACE ÖRGÜLERİN YARIMODÜLERLİĞİ                     | 10           |
| KAYNAKLAR                                             | 15           |
| ÖZGEÇMİŞ                                              | 17           |

# 1 GİRİŞ

Negatif olmayan matrisler üzerindeki Perron ([16],[17]) ve Frobenius'un ([11],[12]) yaptığı çalışmalar farklı yollarla incelenmektedir. Bu çalışmalar Krein ve Rutman [15] tarafından A operatörü üzerinden Banach uzaylarına genişletilirken; Bonsall[7], Karlin[14], Jameson[13] ve onların kaynaklarında gösterilen araştırmacılar tarafından fonksiyonel analiz üzerinde yapılmıştır.

G.P.Barker ve Hans Schneider [1], Perron ve Frobenius'un çalışmalarının koniler üzerinden cebrik kısmıyla ilgilenmişlerdir. Bu çalışmalarda konilerin yapısal özellikleri üzerinde durulmuş ve konilerin facelerinden oluşmuş örgülerin cebrik özellikleri sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir.

Bugüne kadar yapılan çalışmalarda face konilerden oluşan örgülerin modülerite ve dağılmalı olma durumları arasındaki ilişkilere bakılmıştır. Bu incelemeler sayesinde herhangi bir koninin simplicial olduğu durumlarda face konilerden oluşan örgülerin dağılmalı, koninin kesin konveks olduğu durumda face konilerinin modüler olduğu elde edilmiştir. Face konilerin örgülerinin modülerliği ve dağılmalı olması arasındaki ilişki koninin boyutunun üç olması ve kesin konveks olma şartıyla bulunmuştur. Bir koninin polyhedral olması halinde ise yarımmodüler olan face konilerin dağılmalı olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Biz bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen durumların incelenmesini yaptık ve bazı ifadelerin daha açık hallerini gösterdik.

**Tanım 1** *Bir  $V$  vektör uzayında  $K$  alt uzayı aşağıdaki şartları sağlıyor ise **konidenir**.*

**K1)**  $\alpha, \beta \geq 0$  ve  $x, y \in K$  olmak üzere  $\alpha x + \beta y \in K$

**K2)**  $K \cap (-K) = \{0\}$

$K, V$  içinde kısmi bir sıralama meydana getireceğinden  $x, y \in K$  olmak üzere

$$x \geq y \iff x - y \in K$$

biçiminde yazılabilir.

$K$  konisi bazı şartları sağladığında değişik isimler alır.



- i)  $K$ 'nin içi  $K^0$  boştan farklı ise **tam (full) koni** olur.
- ii)  $K - K = V$  ise **reproducing koni** olur.
- iii)  $x \in K$  ve  $-x \in K$  olduğunda  $x = 0$  ise  $K$ 'ye **noktasal (pointed) koni** denir.

**Tanım 2**  $F$ , sonlu boyutlu reel  $V$  vektör uzayı içindeki  $K$  konisinin alt uzayı olsun.

$$x \in K, y - x \in K, y \in F \implies x \in F$$

oluyorsa  $F$ 'ye **face** denir.

$K$ 'nin bütün face'lerinin oluşturduğu küme  $\mathcal{F}(K)$  veya kısaca  $\mathcal{F}$  biçiminde gösterilir. Eğer  $F \in \mathcal{F}$  ise  $F \trianglelefteq K$  biçiminde gösterilir. Eğer  $F$ ,  $K$ 'den farklı ise  $F \triangleleft K$  biçiminde gösterilir.  $\{0\}$  ve  $K$ ;  $K$ 'nin aşikar faceleridir.

**Önerme 1**  $F \triangleleft K$ ,  $G \triangleleft K$  ve  $F \subset G$  ise  $F \triangleleft G$  dir.

**İspat.**  $F \triangleleft G$  olduğunu göstermemiz için

$$x \in G, y - x \in G, y \in F \implies x \in F \tag{1}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.  $F \triangleleft K$  olduğundan

$$x \in K, y - x \in K, y \in F \implies x \in F \tag{2}$$

yazılabilir.  $G \triangleleft K$  biçiminde verildiğinden  $G \subset K$  dir. Dolayısıyla 2. denklemde verilen elemanları kısıtlayarak  $G$  içinden seçebiliriz. Bu da 2. denklemin 1. denkleme benzemesi demektir. Böylece istediğimizi göstermiş oluruz. ■

**Lemma 2** İki face'nin kesişimi yine bir facedir.

**İspat.**  $F_1, F_2 \triangleleft K$  ise  $F_1 \cap F_2 \triangleleft K$  olması için

$$x \in K, y - x \in K, y \in F_1 \cap F_2 \implies x \in F_1 \cap F_2$$

şartını sağlamaya çalışacağız.  $y \in F_1 \cap F_2$  ise  $y \in F_1$  ve  $y \in F_2$  aynı zamanda  $F_1, F_2 \triangleleft K$  biçiminde verildiğinden face tanımına göre aşağıdaki iki denklem yazılabilir.

$$x \in K, y - x \in K, y \in F_1 \implies x \in F_1$$

$$x \in K, y - x \in K, y \in F_2 \implies x \in F_2$$

bu iki denklem yardımıyla

$$x \in K, y - x \in K, y \in F_1 \cap F_2 \implies x \in F_1 \cap F_2$$

yazılabilir. Bu da face tanımından  $F_1 \cap F_2 \triangleleft K$  olur. ■

**Sonuç 3** *Sonlu sayıda facelerin kesişiminde face'dir.*

**Tanım 3**  $S \subseteq K$  olmak üzere  $S$ 'i kapsayan en küçük face

$$\varphi(S) = \cap \{F : F \in \mathcal{F}(K), S \subseteq F\}$$

*biçiminde tanımlanır. Ayrıca  $\varphi(S)$ 'ye  $S$  tarafından üretilen face denir. Eğer  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  biçiminde sonlu bir küme ise  $\varphi(S)$ 'ye **sonlu üretilmiş face**;  $S = \{x\}$  biçiminde tek elemanlı seçilirse  $\varphi(S) = \varphi(x)$  biçiminde yazılabilir ve **devirli (cyclic) face** denir.*

$\varphi(S)$ 'nin tanımından aşıkarak  $S \subseteq \varphi(S)$  dir.  $S \subseteq T$  alındığında  $\varphi(S)$ 'yi oluşturan facelerin hepsi  $\varphi(T)$ 'de bulunacağından  $\varphi(S) \subseteq \varphi(T)$  olur. Ayrıca  $\varphi(\varphi(S)) = \cap \{F : F \in \mathcal{F}(K), \varphi(S) \subseteq F\} = \cap \{F : F \in \mathcal{F}(K), S \subseteq F\} = \varphi(S)$  olacağından  $\varphi$  bir kapalı operatördür.

**Önerme 4**  $S = \varphi(S)$  olması için gerek ve yeter koşul  $S$ 'nin face olmasıdır.

**İspat.** Öncelikle  $S = \varphi(S)$  verildiğinde  $S$ 'nin face olduğunu gösterelim.  $\varphi(S)$  tanımını kullanırsak sonlu sayıdaki facelerin kesişimi face olduğundan ve  $S = \varphi(S)$  alındığından  $S$  face bulunur. Şimdi tersine  $S$  face olduğunda  $S = \varphi(S)$  olduğunu gösterelim.  $\varphi(S) = \cap \{F : F \in \mathcal{F}(K), S \subseteq F\} = \cap A$  alınırsa  $S$  face olduğundan  $A$  kümesinin en küçük elemanı olur. Kesişim işleminin özelliğinden  $\cap A = S = \varphi(S)$  şeklinde bulunmuş olur. ■

**Tanım 4**  $F \triangleleft K$  olmak üzere  $\dim F = 1$  ise  $F$ 'ye  $K$ 'nin extreme ray'ı denir. Eğer  $\dim \varphi(x) = 1$  olursa  $x$ 'e kısaca extremal denir.

**Tanım 5**  $\{x_1, \dots, x_n\}$  extremallerin sonlu kümesi olmak üzere

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

biçiminde yazılabilen  $K$  konisine polyhedral koni denir.

**Tanım 6** Eğer  $K$ ,  $n$  boyutlu  $V$  vektör uzayında  $n$  tane extremale sahip ise  $K$ 'ye *simplicial koni* denir.

**Lemma 5**  $S$ ,  $K$  konisinin herhangi bir alt kümesi olsun. Bir  $y \in \varphi(S)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$0 \leq y \leq \sum_{i=1}^n \beta_i x^i$$

şartını sağlayan  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^i \in S$ ,  $\beta_i \in \mathbb{F}(\text{cisim})$ ,  $\beta_i \geq 0$  var olmasıdır.

**İspat.**

$$T = \left\{ y : \exists n \in \mathbb{N} \text{ ve } x^i \in S; S \subset K; \beta_i \in \mathbb{F}; \beta_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n; 0 \leq y \leq \sum_{i=1}^n \beta_i x^i \right\}$$

biçiminde tanımladığımız  $T$  kümesinin  $\varphi(S)$ 'ye eşit olduğunu göstereceğiz. Önce-likle  $T \subseteq K$  olduğu gösterilmesi gerekir.  $T$ 'nin koni olduğuna bakalım.

$K1)$   $a, b \in T; 0 \leq a \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i$ ;  $0 \leq b \leq \sum_{i=1}^n \beta_i x^i$  ise  $0 \leq a + b \leq \sum_{i=1}^n \theta_i x^i$  olduğundan  $a + b \in T$  ( $\theta_i = \alpha_i + \beta_i \geq 0$ )  $a \in T$   $\omega \geq 0$  ise  $0 \leq \omega a \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i = \sum_{i=1}^n c_i x^i$  olur dolayısıyla  $\omega a \in T$  ( $c_i = \omega \alpha_i \geq 0$ )

$K2)$

$$-T = \left\{ y : \exists n \in \mathbb{N} \text{ ve } x^i \in S; S \subset K; \beta_i \in \mathbb{F}; \beta_i \geq 0; i = 1, \dots, n; 0 \geq y \geq -\sum_{i=1}^n \beta_i x^i \right\}$$

$T$  ve  $-T$  kümeleri kıyaslandığında  $T \cap \{-T\} = \{0\}$  olacaktır. Böylelikle  $T$ 'nin koni olduğuna baktık. Şimdi  $T$ 'nin face olduğuna bakalım.  $x \in T$   $y \in K$   $x - y \in K$  ise  $y \in T$  şartının sağlandığını gösterelim.  $x \in T$  ise  $0 \leq x \leq \sum_{i=1}^n \beta_i x^i$   $y \in K$ ,  $x - y \in K$  alındığından  $x - y \geq 0$  olacaktır. Dolayısıyla  $0 \leq x - y \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i x^i$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{F}$ ,  $x - y \in T$  olur ve  $y \in T$  sonucuna ulaşırız.

Böylelikle  $T \trianglelefteq K$  olduğunu gösterdik.

Her  $i = 1, \dots, n$  için  $x^i \leq x^i + \dots + x^n$  ifadesinden dolayı  $S \subseteq T$  dir. ( $x^i \in S \subset K \implies x^i \geq 0$ ) Böylece  $\varphi(S) \subset T$  elde edilir.

Diğer taraftan  $T \subset \varphi(S)$  olduğunu gösterelim.

$y \in T$  ise  $0 \leq y \leq \sum_{i=1}^n \beta_i x^i = z$ ,  $S \subseteq \varphi(S)$  'den dolayı  $z \in \varphi(S) \subset K$  ve  $\varphi(S)$  face olduğundan dolayı  $y \in \varphi(S)$  ve  $T \subset \varphi(S)$  olur. Böylece  $T = \varphi(S)$  elde edilir. ■

**Sonuç 6**  $x \in K$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \{y \in V : \exists \beta \geq 0 \ 0 \leq y \leq \beta x\} \\ &= \{y \in V : \exists \beta > 0 \ 0 \leq y \leq \beta x\} \\ &= \{y \in V : \exists \alpha > 0 \ 0 \leq \alpha y \leq x\} \end{aligned}$$

dir.

**İspat.** Lemma 5'deki  $S = \{x\}$  biçiminde alınırsa birinci ve ikinci eşitlik kendiliğinden çıkar. Üçüncü eşitlik için; ikincideki eşitsizlik  $\frac{1}{\beta} > 0$  ile genişletilip  $\alpha = \frac{1}{\beta}$  değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} 0 &\leq \frac{1}{\beta} y \leq \frac{1}{\beta} \beta x \\ 0 &\leq \alpha y \leq x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur. ■

**Tanım 7**  $K, V$  içinde bir koni olmak olmak üzere

$$K^\Delta = \{x \in K : \forall y \in \text{span} K \ \exists \varepsilon_y > 0, x + \varepsilon_y y \in K\} \quad (4)$$

kümesi  $K$ 'nin **cebirsel ilişkili (relative algebraic) içi** olarak tanımlanır.

**Lemma 7**  $x \geq 0$  olmak üzere  $x \in \varphi(x)^\Delta$  dır.

**İspat.** Tanım 7'den yararlanırsak

$$\varphi(x)^\Delta = \{y \in \varphi(x) : \forall z \in \varphi(x) \ \exists \varepsilon > 0, y + \varepsilon z \in \varphi(x)\}$$

biçiminde yazılabilir.  $z \in \varphi(x)$  olduğundan dolayı Sonuç 6'daki üçüncü eşitlikten dolayı  $0 \leq \varepsilon z \leq x$  yazılabilir. Bu eşitsizlikte uygun işlemler ile  $0 \leq x + \varepsilon z \leq 2x$  olur. Sonuç 6'daki ikinci eşitlikten dolayı  $x + \varepsilon z \in \varphi(x)$  bulunur. Dolayısıyla  $x \in \varphi(x)^\Delta$  elde edilir. ■

## 2 FACELERİN DAĞILMALI VE MODÜLER ÖRGÜ OLMA DURUMLARI

**Tanım 8**  $L \neq \emptyset$  kısmi sıralı bir küme olmak üzere  $a, b \in L$  için  $L$  üzerinde  $a \vee b = \sup \{a, b\}$  (eküs) ve  $a \wedge b = \inf \{a, b\}$  (ebas) varsa  $L$ 'ye **örgü** denir. Ayrıca  $a, b, c \in L$  için  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  eşitliğini sağlayan örgüye **dağılmalı örgü** ve  $a \geq c$  iken  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$  şartını sağlayan örgüye **modüler örgü** denir.

Tanım 8 yararlanarak koniler üzerinde de örgü tanımlanabilir.

**Tanım 9**  $K$  koni ve  $F, G \in \mathcal{F}(K)$  olmak üzere  $F \vee G = \varphi(F \cup G)$  ve  $F \wedge G = F \cap G$  biçiminde tanımlanırsa  $K$  konisi üzerinde örgü tanımlanır.

**Tanım 10**  $L$  sıralı kümesinin herhangi iki elamanı için  $x \leq y$  veya  $x \geq y$  biçiminde sıralama varsa  $L$ 'ye **zincir** denir. Sonlu  $L$  zincirinin elemanlarının sayısının bir eksiğine **zincirin uzunluğu** denir ve  $l(L)$  biçiminde gösterilir.

**Önerme 8**  $F, G \in \mathcal{F}$  ve  $x$  extremal olmak üzere;

i)  $\varphi(F + G) = F \vee G$

ii)  $\varphi(F + x) = F \vee \varphi(x)$

**İspat. i)**  $\varphi(F + G) = \varphi(F \cup G)$  olduğunu göstermeliyiz.  $F + G \supset F \cup G$  ifadesinin her iki tarafına  $\varphi$  operatörünü uygularsak  $\varphi(F + G) \supset \varphi(F \cup G)$  bulunur. Tersine;  $f \in F$  ve  $g \in G$  alırsa  $\varphi$  operatörünün tanımından  $f + g \in \varphi(F \cup G)$  olacağından  $F + G \subset \varphi(F \cup G)$  elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafına  $\varphi$  operatörünü uygularsak Önerme 4'ün yardımıyla  $\varphi(F + G) \subset \varphi(F \cup G)$  sonucuna ulaşılır. Böylece eşitlik gösterilmiş olur.

**ii)**  $\varphi(F + x) = \varphi(F + \varphi(x))$  eşitliğini sağlarsak birinci maddeden istenilen sonuca ulaşılır.  $x \in \varphi(x)$  olduğundan  $F + x \subset F + \varphi(x)$ . Buradan  $\varphi(F + x) \subset \varphi(F + \varphi(x))$  olur. Tersine; Sonuç 6 gereği  $\varphi(x)$ 'in elemanları  $\lambda x$  biçimindedir. Dolayısıyla  $F + \lambda x \in F + \varphi(x)$  dir.

$$F + \lambda x = \lambda(F + x) \in \varphi(F + x)$$

Buradan;  $\varphi(F + \varphi(x)) \subset \varphi(F + x)$  olur. Böylece istenilen eşitlik gösterilmiş olur. ■

**Sonuç 9**  $x_1, \dots, x_n$  farklı extremaller olmak üzere

$$\varphi(x_1 + \dots + x_n) = \varphi(x_1) \vee \dots \vee \varphi(x_n)$$

dir.

$K$  simplicial olduğunda  $K$ 'nin tam olmasından dolayı extremalleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu extremaller  $V$ 'nin bazı olarak alınrsa  $K$  negatif olmayan orthant belirtir. Yani  $K$ 'nin bütün vektörleri negatif olmayan koordinatlar üzerindedir. Koniler için bunu ifade etmek istersek  $x \leq y$  olduğunda  $i = 1, \dots, n$  için  $x_i \leq y_i$  olmasıdır. Bu durumda  $K$  negatif olmayan orhant üzerinde ise  $\mathcal{F}(K)$  dağılmalı örgü olur.

**Sonuç 10**  $K$  simplicial ise  $\mathcal{F}(K)$  dağılmalı örgüdür.

Sonuç 10 un tersini düşünersek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 11**  $\mathcal{F}(K)$  dağılmalı örgü ise  $K$  simplicialdir.

**İspat.**  $K$ 'nin boyutuna göre inceleme yaparsak  $\dim K = n$  ise  $n = 1, 2$  olduğunda her  $K$  konisi simplicial olduğunda  $\mathcal{F}(K)$  da dağılmalı olacaktır.  $n \geq 3$  durumunu inceleyelim.  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  kümesi  $K$ 'nin  $n + 1$  farklı extremalini gösterebilir.  $K$ ,  $n$  boyutlu olduğundan bu küme lineer bağımlı olacaktır. Bundan dolayı

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad (5)$$

denklemindeki  $\lambda_i$ 'lerin hepsi birden sıfır değildir. Dolayısıyla bu ifadeyi sıfıra eşit olan elemanlar yok kabul edilip aşağıdaki gibi yeniden isimlendirilirse

$$z_i = \begin{cases} \lambda_i x_i & \lambda_i > 0 \\ -\lambda_i x_i & \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (6)$$

olur. Bu isimlendirme yardımıyla

$$z_1 + \dots + z_q = z_{q+1} + \dots + z_r \quad (7)$$

eşitliğini elde ederiz.  $z_i$ 'lerde farklı extremaller, yani  $i \neq j$  olmak üzere  $\varphi(z_i) \wedge \varphi(z_j) = \{0\}$  biçiminde alınırsa,  $\mathcal{F}(K)$ 'nin dağılmalı olduğunu ve denklem 7 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varphi(z_1) &= [\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_1)] \vee \dots \vee [\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_q)] \\ &= \varphi(z_1) \wedge [\varphi(z_1) \vee \dots \vee \varphi(z_q)] = \varphi(z_1) \wedge [\varphi(z_{q+1}) \vee \dots \vee \varphi(z_r)] \\ &= [\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_{q+1})] \vee \dots \vee [\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_r)] = \{0\}\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat denklem 6'dan dolayı  $\varphi(z_1) \neq \{0\}$  olmalıydı. Böylelikle  $K$ 'nin en fazla  $n$  tane extremali olmalıdır.  $K$  tam koni olduğundan en az  $n$  tane extremali olmalı. Bu da  $K$ 'nin simplicial olduğunu gösterir. ■

**Tanım 11**  $K, V$  içinde bir koni olsun.  $K$  içinde sıfırdan farklı aynı doğru üzerinde olmayan iki elemanı  $\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) = K$  şartını sağlıyor ise  $K$ 'ye **kesin konveks (strictly convex) koni** denir.

**Teorem 12 a)**  $K$  kesin konveks koni olduğunda  $\mathcal{F}(K)$  modülerdir.

**b)**  $\mathcal{F}(K)$  dağılmalı değil iken  $\dim K = 3$  olsun.  $K$ 'nin kesin konveks olması için  $\mathcal{F}(K)$  modüler olmalıdır.

**İspat.** a)  $K$  kesin konveks koni olduğunda sınırından alınan her  $x$  elemanı  $K$ 'nin extremali ve  $\varphi(x)$   $K$ 'nin maksimal facesi olacaktır. Modülerliği göstermek için  $x, y, z \in \partial K$  ve  $\varphi(x) \leq \varphi(z)$  olmak üzere

$$\varphi(x) \vee (\varphi(y) \wedge \varphi(z)) = (\varphi(x) \vee \varphi(y)) \wedge \varphi(z)$$

eşitliğini göstermemiz gerekir.  $\varphi(x) \leq \varphi(z)$  ifadesinden ve maksimallikten dolayı ya  $\varphi(x) = \varphi(z)$  ya da  $\varphi(z) = K$  olmalıdır. Eğer  $\varphi(x) = \varphi(z)$  ise örgülerin özelliklerinde eşitlik sağlanmış olur.  $\varphi(z) = K$  olduğu duruma bakalım. Modülerlik eşitliğinde her iki taraftaki işlemleri yapalım.

$$\varphi(x) \vee (\varphi(y) \wedge \varphi(z)) = \varphi(x) \vee (\varphi(y) \wedge K) = \varphi(x) \vee \varphi(y) = K$$

$$(\varphi(x) \vee \varphi(y)) \wedge \varphi(z) = K \wedge (\varphi(z)) = K \wedge K = K$$

Her iki taraf birbirine eşit olduğundan  $\mathcal{F}(K)$  modülerdir.

b)  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  biçiminde seçilen farklı extremallerin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim. O zaman  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$  eşitliğinde  $\alpha_i$ 'lerin ( $i = 1, 2, 3$ ) hepsi birden sıfır olmamalı. Farklı durumları inceleyelim.  $\alpha_3 = 0$   $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$  olduğu duruma bakalım.  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$  ise buradan  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  ters işaretli olduğu çıkar.  $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2$  ( $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$ ) elde edilir ki bu da  $x_1$  ve  $x_2$ 'nin farklı olmasıyla çelişir. Diğer bir durum  $\alpha_1, \alpha_2 > 0 > \alpha_3$  olmasıdır.  $z_1 = \alpha_1 x_1, z_2 = \alpha_2 x_2$  ve  $z_3 = -\alpha_3 x_3$  şeklinde yeniden isimlendirme yaparak  $z_1 + z_2 = z_3$  elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için  $z_1 = \gamma z_3$  ve  $z_2 = \delta z_3$  ( $\gamma, \delta > 0$ ) ifadeleri vardır. Bu da yine  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  farklı olmasıyla çelişir. Böylece  $x_1, x_2$  ve  $x_3$ 'ün lineer bağımsız olduğunu gösterdik.

Şimdi  $x_1$  ve  $x_2$  gibi en az iki farklı extremalin  $x_1 + x_2 \gg 0$  olduğunu gösterelim. ( $x \gg 0$  olması için gerek yeter koşul  $x$ 'in  $K$ 'nin içinde olması gerekir.  $x$  kesin pozitif olarak adlandırılır.)  $K$ 'nin simplicial olmadığını ve  $y_1, y_2, y_3, y_4$ 'ü  $K$ 'nin farklı extremalleri olarak alalım.  $\dim K = 3$  olduğundan  $y_i$ 'ler ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) lineer bağımlı olacaktır. Yani  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$  ifadesindeki  $\lambda_i$ 'lerin ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) hepsi birden sıfır değildir. Farklı durumları incelemek için

$$z_i = \begin{cases} \lambda_i y_i & \lambda_i > 0 \\ -\lambda_i y_i & \lambda_i < 0 \end{cases}$$

ifadesini kullanırsak: i)  $z_1 = z_2 + z_3 + z_4$  ve ii)  $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$  eşitlikleri elde edilir. i'deki eşitliğin var olması  $z_1$ 'in farklı extremal olmasıyla çelişir. ii'deki eşitliğe bakalım.  $x = z_1 + z_2$  alınırsa  $x$  hem  $\varphi(z_1 + z_2)$  hem de  $\varphi(z_3 + z_4)$ 'ün elemanı olacaktır. İki face'in bağıntılı içinin kesişmesi için biri diğerini içermesi gerekir. Böylece kapsayan face dört extremali de içermesi gerekir ki bu face'in  $K$ 'ye eşit olması demektir. Böylece  $x$   $K$ 'nin içinde çıkar. Yani  $x_1 + x_2 \gg 0$  şartını sağlayan  $x_1$  ve  $x_2$  extremalleri olmak zorundadır.

Son olarak iki farklı extremalin toplamının kesin pozitif olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim:  $x_3, x_4 \in K$  iken  $x_3 + x_4 \in \partial K$  olsun ve  $x_1$  ile  $x_3$  farklı extremaller olsun. İki durum söz konusudur.

1)  $x_1 + x_3 \in \partial K$ : Modülerlikten dolayı

$$\varphi(x_1) \vee [\varphi(x_2) \wedge \varphi(x_1 + x_3)] = [\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2)] \wedge \varphi(x_1 + x_3) \quad (8)$$

eşitliği mevcuttur.  $x_1 + x_2 \gg 0$  iken  $x_2 \in \varphi(x_1 + x_3)$  olması  $\varphi(x_1 + x_3) = K$



demektir. Böylece  $x_1 + x_3 \gg 0$  olur. Bu da durumumuzun şartıyla çelişir. O zaman  $\varphi(x_2) \wedge \varphi(x_1 + x_3) = \{0\}$  olmalıdır. Şimdi denklem 8'i inceleyelim

$$\varphi(x_1) \vee [\varphi(x_2) \wedge \varphi(x_1 + x_3)] = \varphi(x_1) \vee \{0\} = \varphi(x_1)$$

$$[\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2)] \wedge \varphi(x_1 + x_3) = K \wedge \varphi(x_1 + x_3) = \varphi(x_1 + x_3)$$

Yani denklem 8 bize  $\varphi(x_1) = \varphi(x_1 + x_3)$  eşitliğini verdi. Bu da  $x_1$  ve  $x_3$ 'ün farklı olmasıyla çelişir.

2)  $x_1 + x_3 \gg 0$ : Yine modülerlikten dolayı

$$\varphi(x_3) \vee [\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_3 + x_4)] = [\varphi(x_3) \vee \varphi(x_1)] \wedge \varphi(x_3 + x_4) \quad (9)$$

eşitliğini elde ederiz. Bir önceki durumdaki nedenlerden dolayı

$$\varphi(x_3) = \varphi(x_3 + x_4)$$

elde edilecektir. Bu yine  $x_3$  ve  $x_4$ 'ün farklı olmasından dolayı doğru değildir. Bu çelişkiler  $n = 3$  olmasını gerektirir. ■

**Sonuç 13**  $K$  face koni,  $\dim K = 3$ ,  $\mathcal{F}(K)$  dağılmalı olsun. Bu durumda  $K$ 'nin kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul  $\mathcal{F}(K)$ 'nin modüler olmasıdır.

### 3 FACE ÖRGÜLERİN YARIMODÜLERLİĞİ

Konumuz üzerindeki asıl problem face örgülerin daha başka hangi şartlar altında modüler olduğudur. Bunun için face örgülerin değişik cebrik durumları incelenmiştir. Bunlardan birini incelemek için yarımmodülerliği tanımlayalım.

**Tanım 12**  $L$  sonlu boyutlu örgü ve her  $a, b \in L$  için  $a \wedge b$ 'yi örtüğünde  $a \vee b$ 'de  $b$ 'yi örter ise  $L$ 'e **yarımmodüler örgü** denir.

**Uyarı 14** Hatırlanacağı gibi  $L$  örgü ve  $a, b \in L$  için  $a < b$  ve  $\{c : a < c < b, c \in L\}$  kümesi boş ise  $b$   $a$ 'yı örter denir.

**Teorem 15**  $K$  polyhedral koni olduğunda  $\mathcal{F}(K)$  yarımmodüler ise dağılmalıdır.

**İspat.** Sonuç 10'dan dolayı  $K$  konisinin simplicial olduğunu göstermek yeterlidir.  $H \triangleleft K$  ise  $\mathcal{F}(H) = \{F \in \mathcal{F}(K) : F \triangleleft H\}$  dır.  $\mathcal{F}(H)$  tanımlanmasından ötürü  $\mathcal{F}(K)$ 'nin alt örgüsüdür.  $\mathcal{F}(K)$  yarımmodüler olduğundan  $\mathcal{F}(H)$ 'de yarımmodüler olur.  $K$ 'nin boyutu üzerinden tümevarım yapalım.  $\dim K = 2$  için  $K$  simplicialdır.  $\dim K < n$  için  $K$  konisinin ifadeyi sağladığını kabul edelim. Şimdi  $\dim K = n$  için inceleyelim.  $x_1, \dots, x_{n-1}$   $K$ 'nin farklı extremalleri olsun. Bu taktirde  $\varphi(x_1) \vee \dots \vee \varphi(x_{n-1}) \neq K$  olur. Eğer eşitlik sağlanmış olsaydı  $m \leq n-1$  olacak biçimde  $\mathcal{F}(K)$  içinde  $\varphi(x_m)$ 'in bir tamamlayıcısı olarak  $H = \varphi(x_1) \vee \dots \vee \varphi(x_{m-1})$  bulunurdu.  $\dim H < n$  ve  $\mathcal{F}(H)$  yarımmodüler olduğundan ve hipotezden dolayı  $\mathcal{F}(H)$  dağılmalıdır. Bu da  $H$ 'nin  $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{m-1})$  extremallerini örten en küçük küme (konveks hull) ve  $\dim H = m-1$  olması demektir. Fakat  $\varphi(x_m), \varphi(x_m) \wedge H (= \{0\})$  yı örter dolayısıyla  $\varphi(x_m) \vee H, H$ 'ı örter ve  $K$  polyhedral koni olduğundan  $\dim K = n$  iken  $\dim(\varphi(x_m) \vee H) = 1 + \dim H = m \leq n-1$  olur ki bu da  $K = \varphi(x_m) \vee H$  olmasıyla çelişir. Yani  $F = \varphi(x_1) \vee \dots \vee \varphi(x_{n-1}) \neq K$  olmalıdır. Dolayısıyla  $F$  simplicialdır.  $K, n-1$  komşuluğa sahip olduğundan  $K$  simplicialdır. ■

**Tanım 13**  $V, ' sonlu boyutlu reel vektör uzayı  $V$ 'nin duali olmak üzere  $K' = \{f \in V' : fx \geq 0 \forall x \in K\}$  kümesine  $K$  kapalı tam konisinin duali denir.$

**Tanım 14**  $F \triangleleft K$  ise  $F^D = \{f \in K' : fx = 0 \forall x \in K\}$  kümesi  $F$ 'nin dualidir.  $G \in \mathcal{F}(K)$  ise  $G$ 'nin  $\mathcal{F}(K)$  içindeki duali için  $G^\delta$  notasyonunu kullanacağız.

**Tanım 15**  $K$  koni olmak üzere  $F \triangleleft K$  facesi için  $F^{D\delta} = F$  ise  $F$  **exposed** olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımda  $K$  polyhedral koni olduğunda eşitlik her zaman doğru olur.

**Lemma 16**  $F_1, F_2 \triangleleft K$  olmak üzere

$$\text{a) } (F_1 \vee F_2)^D = F_1^D \wedge F_2^D$$

$$\text{b) } (F_1 \wedge F_2)^D \triangleleft F_1^D \vee F_2^D$$

**İspat.** a)

$$\begin{aligned}
(F_1 \vee F_2)^D &= (\varphi(F_1 \cup F_2))^D \\
&= \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in \varphi(F_1 \cup F_2) \right\} \\
&= \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_1 \cap F_2 \right\} \\
&= \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_1 \right\} \cap \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_2 \right\} \\
&= F_1^D \cap F_2^D = F_1^D \wedge F_2^D
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(F_1 \wedge F_2)^D &= \{f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_1 \cap F_2\} \\
&\subset \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in \varphi(F_1 \cup F_2) \right\} \\
&= \varphi \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in \varphi(F_1 \cup F_2) \right\} \\
&\subset \varphi \left( \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_1 \right\} \cup \left\{ f \in K' : fx = 0 \forall x \in F_2 \right\} \right) \\
&= \varphi(F_1^D \cup F_2^D) = F_1^D \vee F_2^D
\end{aligned}$$

■

Yukarıdaki b maddesinde  $F'$ lerin exposed olması durumunda eşitlik sağlanır.

$\mathbb{R}^n$ 'de polyhedral konilerde olduğu gibi, Lorentz konisinin her facesi exposed dir. Eğer dual uzayı aynı  $\mathbb{R}^n$  ile gösterirsek lineer fonksiyonlar standart iç çarpım gibi gösterilebilir ve  $K$  ile  $K'$  karşılaştırılabilir. Daha doğrusu  $K = K'$  dir. Daha genel olarak  $V$  iç çarpım uzayının duali  $V'$  ile gösterilir. ve notasyon olarak  $f(x) = (f, x)$  dir.

**Tanım 16**  $V$  iç çarpım uzayında  $K = K'$  eşitliğini sağlayan  $K \subset V$  konisine **self-dual koni** denir.

**Önerme 17**  $K$  self-dual koni olsun.  $\mathcal{F}(K)$ 'nin modüler olması için gerek ve yeter koşul  $\mathcal{F}(K)$ 'nin yarımmodüler ve  $K$ 'nin her facenin exposed olmasıdır.

$F \triangleleft K$  için  $F^v = \{y \in \text{span} F : (y, x) \geq 0 \forall x \in F\}$  kümesine  $F$ 'nin duali denir.

**Tanım 17**  $K$  self-dual koni olsun.  $\forall F \in \mathcal{F}(K)$  için  $F^v = F$  eşitliği sağlanıyorsa  $K$ 'ye **mükemmel koni** denir.

**Teorem 18**  *$K$  self-dual konisinin mükemmel olması için gerek ve yeter koşul  $\mathcal{F}(K)$ ’nin  $F \rightarrow F^D$  operatörü altında ortomodüler olmasıdır.*

**İspat.**  $K$  self-dual konisi mükemmel koni olsun. Açıktır ki  $\mathcal{F}(K)$  ortoörgüdür. (Birkhoff [6] sayfa 52 L8, L9, L10 özellikleri sağlar.)  $F \leq K$  ve  $G = F^{DD}$  ise  $F \leq G \leq K$  dir.

$$H = \{z \in G : (z, x) = 0, \forall x \in F\}$$

biçiminde alınırsa  $K$  noktasal olduğundan  $H = G \wedge F^D = \{0\}$  olur.  $G$  self-dual olduğundan  $\forall f \in F$  için  $(g, f) = 0$  olacak şekilde  $g \in G$  vardır. Buradan  $g \in H$  çıkar. Bu da  $G = F$  olması demektir. Şimdi ortomodüler şartını sağlatalım.  $F \leq H$  ise  $F \vee (F^D \wedge H) = H$ .  $H$  mükemmel olduğundan dual işleminin kısıtlanması  $\mathcal{F}(H)$  yı ortoörgü yapar. Dualin kısıtlanmasından  $F^H = F^D \wedge H$  ve  $F^H = \{x \in H : \forall f \in F, (x, f) = 0\}$  gibi iki türlü tanımlanabilir.  $\mathcal{F}(H)$  ortoörgü olduğundan  $H = F \vee F^H = F \vee (F^D \wedge H)$  elde edilir.

Tersini kabul edelim; yani  $K$  self-dual koni,  $\mathcal{F}(K)$  ortomodüler alalım. Bazı  $x \geq 0$  için  $F = \varphi(x)$  olacak biçimde  $F \in \mathcal{F}(K)$  olsun.  $F \subseteq F^v$  olduğu açıktır. Şimdi  $y \neq 0$   $y \in F^v \setminus F$  var olduğunu farz edelim. Bu durumda  $F$ ’nin  $z = \beta x + (1 - \beta)y$  olacak şekilde  $F$ ’nin sınırında  $\beta \in (0, 1)$  vardır.  $z \neq 0$  olacağından  $\varphi(z) \leq F$  dir. Kabulumüzden dolayı

$$\varphi(z) \vee [\varphi(z)^D \wedge F] = F$$

dir. Dolayısıyla  $u \neq 0$ ,  $u \in \varphi(z)^D \wedge F$  vardır ve  $(u, z) = 0$  olur. Böylece

$$0 = (z, u) = \beta(x, u) + (1 - \beta)(y, u) > 0$$

elde edilir ki bu da çelişkidir. Yani böyle bir  $y$  elemanı yoktur. Dolayısıyla  $F = F^v$  olur bu da  $K$ ’nin mükemmel olması demektir. ■

**Lemma 19**  *$K$  self-dual polyhedral koninin simplicial olması için gerek ve yeter koşul  $\mathcal{F}(K)$ ’nin ortomodüler olmasıdır.*

**Lemma 20**  *$K$  self-dual koni  $\mathcal{F}(K)$  modüler ise  $K$  mükemmeldir.*

Sonuç olarak bu tezde face konilerden oluşan örgülerin modülerite ve dağılmalı olma durumları arasındaki ilişkiler incelenerek, herhangi bir koninin simplicial olduğu durumlarda face konilerden oluşan örgülerin dağılmalı, koninin kesin konveks olduğu durumda face konilerinin modüler olduğu elde edilmiştir. Face konilerin örgülerinin modülerliği ve dağılmalı olması arasındaki ilişki koninin boyutunun üç olması ve kesin konveks olma şartıyla bulunmuştur. Bir koninin polyhedral olması halinde ise yarımmodüler olan face koniklerin dağılmalı olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca yukarıda bahsedilen durumların incelenmesini bazı ifadelerin daha açık hallerinden bahsettik. Daha önce yapılan çalışmalarda teoremlerin ispatları daha açık bir şekilde verilmiştir.

Yaptığımız bu çalışma  $K$  konisinin ayrıştırılabilirliği ile genişletilebilir. Bu durum aşağıdaki direkt toplam tanımı yardımıyla bazı araştırmacılar ([3],[4]) tarafından incelenmiştir.

**Tanım 18**  $K, V$  vektör uzayında koni  $K_1, K_2$  onun aşağıdaki şartları sağlayan iki alt cümlesi olsun

1.  $\text{span}K_1 \cap \text{span}K_2 = \{0\}$
2.  $K = K_1 + K_2$

Bu durumda  $K$ ,  $K_1$  ve  $K_2$ 'nin direkt toplamı olarak yazılabilir ve  $K = K_1 \oplus K_2$  biçiminde gösterilir.

# KAYNAKLAR

1. G. P. Barker, H. Schneider, *Algebraic Perron Frobenius Theory*, Linear Algebra Appl.11 (1975), 219-233
2. G. P. Barker, *The Lattice of a Finite Dimensional Cone*, Linear Algebra Appl.7 (1973), 71-82
3. G. P. Barker, *Theory of Cones*, Linear Algebra Appl. 39 (1981), 263-291.
4. G. P. Barker,*Perfect Cones*,Linear Algebra Appl. 22 (1978), 211-221.
5. G. P. Barker,*Faces and duality in convex cones*, Linear and Multilinear Algebra, 6, (1978/1979), no 3
6. G. Birkhoff,*Lattice Theory*,3rd ed.,Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, Providence,R.I.,(967)
7. F. F. Bonsall, *Sublinear functionals and ideals in partially ordered vector spaces*,Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1954) 402-418.
8. B.A.Davey,H.A.Priestley, *Introduction to Lattices and Order* ,Cambridge University Press (2002),
9. Douglas R. Farenick,*Algebras of Linear Transformations*,Springer, (2000)
10. John B. Fraleigh,*A First Course in Abstract Algebra-6th ed.*,Addision-Eesley Publ. (2000)
11. G. Frobenius, *Über Matrizen aus positiven Elementen*,S.-B. Preuss Akad. Wiss., Berlin (1908), 471-476, and Ges. Abh., Vol. 3, 404-409, Springer-Verlag, Berlin 1968.
12. G. Frobenius, *Über Matrizen aus positiven Elementen II*,S.-B. Preuss Akad. Wiss., Berlin (1909), 514-518, and Ges. Abh., Vol. 3, 410-414, Springer-Verlag, Berlin 1968.

13. G. Jameson, *Ordered Linear Spaces*, Springer, Berlin, 1970.
14. S. Karlin, *Positive Operators*, J. Math. Mech. 8 (1959), 907-937.
15. M. K. Krein and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Am. Math Soc. Transl. Ser. I, 10 (1962), 199-325[originally Uspekhi Mat. Nauk. (N.S.) 3 (1948), 3-95]
16. O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. 63 (1907), 1-76.
17. O. Perron, *Zur Theorie der Matrices*, Math. Ann. 63 (1907), 248-263.

## ÖZGEÇMİŞ

Rıdvan SARIOĞLU, 29.04.1980 tarihinde Bursa’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İznik’te lise öğrenimini Bursa’da tamamladıktan sonra Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. Halen Matematik Öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.