

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Belgin ÖZER

**GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP TAKDİMLERİ VE
ADİAN GRAFİKLERİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ADIAN GRAFİKLERİ VE GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD
TAKDİMLERİ**

Belgin ÖZER

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 14/07/2010 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç.Dr. Gonca AYIK
DANIŞMAN

.....
Doç.Dr.Hayrullah AYIK
ÜYE

.....
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL
ÜYE

.....
Doç.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
ÜYE

.....
Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP TAKDİMLERİ VE
ADIAN GRAFİKLERİ

Belgin ÖZER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman :Doç.Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2010, Sayfa: 87
Jüri :Doç.Dr. Gonca AYIK
:Doç. Dr. Hayrullah AYIK
:Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL
:Doç.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
:Prof.Dr. Bilal VATANSEVER

Bu tezde, GP takdimleri, GP takdimlerinin Adian grafikleri, grup tanımlayan yarıgrup ve monoid takdimleri incelenmiştir. Bölüm 3 te

$$P = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle$$

formundaki yarıgrup takdimlerinin Adian grafikleri ile ilgili ulaşılan sonuçlar verilmiştir. Özel olarak P takdimi monoid tanımlıyor ise sağ ve sol Adian grafiğinin bağlantılı olduğu gösterilmiştir. Bölüm 4 te ise bazı yarıgrup ve monoid takdimlerinin grup tanımladığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adian grafikleri, yarıgrup takdimleri, monoid takdimleri.

ABSTRACT

PhD THESIS

SEMIGROUP PRESENTATIONS THAT DEFINE GROUPS AND ADIAN GRAPHS

Belgin ÖZER

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2010, Pages: 87
Jury : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
: Assoc. Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Assist. Prof. Dr. Ersin KIRAL
: Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
: Prof. Dr. Bilal VATANSEVER

In this thesis, we have investigated the GP presentations, Adian graphs of GP presentations, semigroup and monoid presentations which define groups.

In section 3, we have given the results implied by the form of the Adian graphs of semigroup presentation of the form,

$$P = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle.$$

In particular, we have shown that if P defines a monoid then both the left and right Adian graphs of P are connected. In section 4, it has been shown that some semigroup and monoid presentations define groups.

Key Words: Adian graphs, semigroup presentations, monoid presentations.

TEŞEKKÜR

Bu tezin başarıya ulaşmasında emeği geçen danışmanım Doç.Dr. Gonca Ayık'ın ve hocam Doç. Dr. Hayrullah Ayık'ın fikirleri, rehberlikleri ve destekleri her aşamada etkili olmuştur. Doç. Dr. Gonca Ayık'a, beni matematiksel problemleri çözme konusunda cesaretlendirmesi ve sabrı için teşekkür ederim.

Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarımdan Prof. Dr. Yusuf Ünlü'ye, Prof.Dr. Doğan Dönmez'e ve Prof Dr. Bilal Vatansever'e ve Prof. Dr. Naime Ekici'ye ve Matematik Bölümü personeline katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. İhsan Ünver'e çalışmalarındaki rehberliği için teşekkür ederim.

Annem Servet Emirhan'a, babam Mustafa Emirhan'a, kardeşlerim Pervin, Mehmet ve Zafer Emirhan'a bana verdikleri maddi ve manevi destekler için teşekkür ederim.

En büyük motivasyon kaynağım, oğlum Fatih Özer'e ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
SİMGELER VE KISALTMALAR	VI
1. GİRİŞ	1
2. YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
2.1. Bağıntılar ve Denklikler	9
2.2. Kongrüanslar ve Bölüm Yarigrubu	13
2.3. Yarigrup Takdimleri	20
2.4. Monoid Takdimleri.....	35
2.5. Grup Takdimleri.....	37
2.6. Yarigrup Takdimi Bulmak için Genel Metodlar	38
2.7. Adian Grafikleri	44
3. GP TAKDİMLERİ VE ADİAN GRAFİKLERİ	47
3.1. GP Takdimleri ve Adian Grafikleri Üzerine Bulunan Sonuçlar	50
4. GRUP TANIMLAYAN MONOİD VE YARIGRUP TAKDİMLERİ	59
4.1 Grup Tanımlayan Yarigrup Takdimleri.....	59
4.2. Grup Tanımlayan Monoid Takdimleri	66
4.3. Grup Tanımladığı Gösterilen Monoid ve Yarigrup Takdimleri	68
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR.....	83
ÖZGEÇMİŞ	87

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Sol Adian Grafiği $L(\wp)$	45
Şekil 2.2. Sağ Adian Grafiği $R(\wp)$	45
Şekil 3.1. Sol Adian Grafiği $L(\overline{P})$	55

SİMGELER VE KISALTMALAR

S	: S yarıgrubu
S^1	: $S \cup \{1\}$ monoidi
L_m	: Sol Sıfır Yarıgrubu
R_n	: Sağ Sıfır Yarıgrubu
e	: Birim Eleman
SL_A	: A Kümesi Üzerindeki Serbest Yarıgrup
Z_n	: n Elemanlı Sıfır Yarıgrubu
$R_{m,n}$	: Dikdörtgen Band
$\langle X \rangle$	: X tarafından doğurulan altyarıgrup
$rank(S)$	: S nin rankı
e	: Boş kelime
A^+	: A üzerindeki serbest yarıgrup
A^*	: $A^+ \cup \{e\}$
R	: Bağıntılar kümesi
$\langle A R \rangle$	: Takdim
A^+ / r	: Bölüm yarıgrubu
$def(P)$	: P nin tanımlılığı
$def_S(S)$	: S yarıgrubunun yarıgrup noksanlığı
$def_M(M)$	: M monoidinin monoid noksanlığı
$def_G(G)$	: G grubunun grup noksanlığı
Q_n	: Genelleştirilmiş Kuaternion grup
C_n	: Zincir

1. GİRİŞ

Son altmış yılda yarıgrup teorisi büyük bir gelişme göstermiştir. Özellikle son yıllarda bilgisayar biliminin hızla ilerlemesine paralel olarak hesaplanabilir yarıgrup teorisi daha da popüler olmaya başlamıştır. Howie tarafından 1976 yılında yayınlanan monografi ile yarıgrup teoride kavramsal olarak standart oluşturulmuştur.

Yarıgrupların en basit örnekleri, değişik sayı kümelerinin toplama ve çarpma işlemleri ile oluşturduğu cebirsel yapılardır. Grup teorisi ve yarıgrup teorisi arasında kuvvetli bir bağlantı vardır. İlk zamanlarda yapılan çalışmalarda gruplar için bulunan sonuçları yarıgrup yapısı için de yapmak yaygındı. Grup ve yarıgruplar kavramları bakımından paralellik gösterse bile yapısal olarak farklılıklarından dolayı aynı sonuçlara ulaşmak beklenemez. Yarıgrup teorisi metodları, grup teorisinin metodları ile bazı yönleriyle benzerlik gösterir. Bu benzerliklerin örnekleri (Baumslag S.M., Gerstein M., Shapiro M. ve Short H. 1991; Epstein D.B.A., 1992; Sims C.C., 1994) de bulunabilir.

Her grup bir yarıgrup olmasına rağmen bunun tersi doğru değildir. Bu durumda aynı grubu tanımlayan grup ve yarıgrup takdimlerinden söz edebiliriz. Yarıgrupların sonlu takdim edilebilirliği ile ilgili ilk çalışmalar, B.H. Neumann, tarafından 1967 yılında gruplar için Todd-Coxeter koset sayma tekniğine benzeyen sonlu takdimli yarıgruplar için bir sayma metodunun tanımlanması ile başladı. Daha sonra A. Jura, tarafından 1978 yılında bu sayma metodunun ispatı yapıldı. Robertson E.F. ve Ünlü Y., tarafından 1993 yılında yarıgruplarda bir sayma metodu için bir bilgisayar programı geliştirildi. Walker T.G., tarafından 1992 de , bu program geliştirilerek programın uygulanabilirliği artırıldı.

Howie J.M., Ruskuc N., tarafından 1994 yılında , Wreath çarpımı, direkt çarpımlar, Schützenberger çarpımı ve Ruskuc N., Araujo I.M., tarafından 2001 yılında , Bruck-Reilly genişlemesi v.b. yarıgrup ve monoid yapıları göz önünde bulundurularak bunların sonlu takdim edilebilmesi için gerek ve yeter koşullar bulunmuştur. Higgins P.M. , Howie J.M., Ruskuc, N., tarafından 1998 yılında dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri, Ayık H., Ruskuc N., tarafından 1999

yılında Rees matris yarıgrubunun sonlu takdimi için de gerek ve yeter koşullar bulunmuştur.

Bu tezde verilen orjinal sonuçlar yukarıdaki buluşlar üzerine kurulan yarıgrup takdimlerinin ve monoid takdimlerinin grup tanımlayıp tanımlamadığı durumlar incelenerek monoid tanımlayan yarıgrup takdimlerinin Adian grafikleri incelenmiştir. Öncelikle (Ayık H., Kuyucu F., Vatansever B., 2002; Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., 2008; Johnson D.L., 1976 ve Smith G.C.) de yapılan çalışmalar incelenerek araştırma konusu üzerinde bu güne kadar bulunan sonuçlar derlendi. Bu tezde yarıgrup teorideki kullanacağımız tüm tanım ve teoremlere kaynak olarak Howie J.M., tarafından 1995 yılında yazılan “Foundations of semigroup theory” kitabını verebiliriz. Bu tezin 2. bölümünde, tezin tamamında kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bu temel kavramlar daha detaylı olarak (Howie J.M., 1995a; Higgins, P.M, 1992) de bulunabilir. Bu temel kavramlardan, yarıgruplar, doğuraylar, serbest yarıgruplar, monoid ve grup takdimleri, takdim bulmanın metotları ve Adian grafikleri anlatılmıştır. Üçüncü bölümde GP takdimleri ve Adian grafikleri üzerine bulunan sonuçlar aşağıdadır.

$P = \langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi olsun. $a \in A$ için, $(w = a) \in R$ olacak şekilde, bir $w \in (A/a)^+$ kelimesi varsa, a ya P nin **gereksiz bir doğurayı** denir.

$P = \langle A | R \rangle$ gereksiz ilişki içermeyen sonlu bir yarıgrup takdimi ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. Eğer S monoid ya da regüler bir yarıgrup ise, $w_a \in A^+$ olacak şekilde $w_a = a$ formunda R de bir ilişki vardır.

Bu bölümde ayrıca

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

formundaki yarıgrup takdimlerinin Adian grafikleri ile ilgili ulaşılan sonuçlar yer almaktadır. Bu çeşit bir takdime **doğuray üreten takdim (generator producing)** ya da kısaca **GP takdimi** deriz. Bu bölümde GP takdimlerinin gereksiz doğurayları

olmadığını ve her bir $w = a$ ilişkisi için, $|w| \geq 2$ ve w nin a yı içerdiğini kabul edeceğiz.

$$P = \langle A|R \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle$$

gereksiz ilişki içermeyen bir GP takdimi olsun. P bir monoid tanımlıyorsa, sol ve sağ Adian grafiklerinin bağlantılı olduğu yine üçüncü bölümde gösterildi. Eğer $P = \langle A|R \rangle$ bağlantılı bir GP takdimi ise, P ile aynı yarıgrubu tanımlayan,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

bir GP takdimi, $\bar{P}$ nin bulunabileceğini gösterdik. Ayrıca P bir GP takdimi ve S , P ile tanımlı bir yarıgrup olmak üzere $A_L \cap A_R \neq \emptyset$, örneğin, $a_1 \in A_L \cap A_R$ ise, S yarıgrubunun,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | a_1 u_1 a_1 = a_1, a_1 u_2 a_1 = a_2, \dots, a_1 u_n a_1 = a_n \rangle$$

takdimi ile tanımlı olduğu yine üçüncü bölümde ispatlandı. P bağlantılı bir GP takdimi olsun. Eğer, $A_L \cap A_R \neq \emptyset$ ise, P bir monoid tanımladığı Adian grafiği kullanılmadan ispatlandı.

Bu takdimden yola çıkarak, bölüm 4 te, $u, v \in A^+$ olacak şekilde iki doğuraylı,

$$P = \langle a, b \mid aua = a, ava = b \rangle$$

yarıgrup takdiminin bir grup tanımladığı gösterilmiştir. Yani Adian Grafiği devir olmayan bir takdimin grup tanımladığına bir örnek olduğundan önem taşır. Yine

bölüm 4 te $u \in \{a, b\}^*$ olacak şekilde, $M_1 = \langle a, b \mid aua = 1 \rangle$ bir monoid takdimi olmak üzere

- i) Eğer u , hiç b içermezse, M_1 bir grup tanımlamadığı
- ii) Eğer u en az bir b içerirse, M_1 bir grup tanımladığı

ispatlanmıştır. $A = \{a, b\}$, $w \in A^*$ ve $v \in aA^*b$ olmak üzere

$$M_2 = \langle a, b \mid vwa v = 1 \rangle$$

$$M_3 = \langle a, b \mid vbwv = 1 \rangle$$

$$M_4 = \langle a, b \mid vb'wvb = 1 \rangle$$

monoid takdimlerinin grup tanımladığı gösterilmiştir. Yukarıdaki takdimlerin özel bir durumu olarak Smith, G.C. de yer alan Teorem 4 ün alternatif ispatı yapılmıştır.

2. YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Boştan farklı S kümesi üzerinde bir m ikili işlemi (yani $m : S \times S \rightarrow S$) tanımlı ise (S, m) ikilisine bir **grupoid** denir. Eğer m ikili işlemi birleşme özelliğine sahipse yani

$$((x, y)m, z)m = (x, (y, z)m)m$$

ise (S, m) ikilisine bir **yarıgrup** denir. (Burada dönüşüm sembollerin sağına yazılmıştır.) İkili işlemi cebirsel olarak alışık olduğumuz çarpma olarak alırsak notasyon bakımından daha kolay bir gösterime sahip oluruz. Bu durumda $(x, y)m$ yerine $x.y$ veya xy olarak yazarsak yukarıdaki eşitlik

$$(xy)z = x(yz)$$

elementer cebirdeki birleşme özelliği formuna dönüşmüş olur. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere x^n ile n tane x elemanının çarpımını ifade edeceğiz. $|S|$ kardinal sayısına S nin derecesi diyeceğiz.

Yarıgrubu çarpımsal notasyonda ifade ederken çarpmanın ne olduğu içerikten belli ise $(S, .)$ yerine sadece S yazacağız.

Eğer bir S yarı grubunda her $x, y \in S$ için $xy = yx$ oluyorsa S ye **değişmeli yarıgrup** denir. (Grup teorideki abelian ifadesi de kullanılır.) Bir S yarı grubu, eğer her $x \in S$ için

$$x1 = 1x = x$$

koşulunu sağlayan bir 1 elemanına sahip ise 1 elemanına birim eleman, S ye de birim elemanlı yarıgrup veya daha genel ifade ile bir **monoid** denir. Bir S

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

yarıgrupunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer $1'$, her $x \in S$ için $x1' = 1'x = x$ koşulunu sağlıyorsa o zaman

$$\begin{aligned} 1' &= 11' && (\text{çünkü } 1 \text{ birimdir}) \\ &= 1 && (\text{çünkü } 1' \text{ birimdir}). \end{aligned}$$

Eğer S birim elemana sahip değil ise monoid formuna getirmek için ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \quad \text{ve} \quad 1.1 = 1$$

olarak tanımlayalım. Rutin kontroller sonucu $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. Şimdi S^1 kümesini

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^1 kümesini eğer gerekli ise bir birim eklenerek S **den elde edilen monoid** olarak adlandıracağız. En az iki elemanlı bir yarıgrup S , her $x \in S$ için

$$x0 = 0x = 0$$

koşulunu sağlayan bir 0 elemanına sahip ise 0 elemanına sıfır eleman, S kümesine de **sıfırlı yarıgrup** denir. Bir S yarıgrupunun en fazla bir tane sıfır elemanı vardır. En az iki elemanlı bir yarıgrup S olmasından kastımız bir tek elemandan oluşan $\{e\}$ trivial yarıgrupunun sıfır olarak alınmamasıdır ($e^2 = e$). Benzer şekilde, eğer S sıfır elemana sahip değil ise ekstra bir sıfır eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s0 = 0s = 0$$

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

olarak tanımlarsak birleşme hala geçerli olup $S \cup \{0\}$ olarak genişletebiliriz. O halde

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ sıfır elemana sahip ise} \\ S \cup \{0\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^0 kümesini eğer gerekli ise bir sıfır eklenerek S **den elde edilen yarıgrup** olarak adlandıracağız.

Bu ekstra birim ve sıfır eleman ekleyebilme çok kolay olmasına karşın, yarıgrupların çalışılmasını, sıfırlı monoidlerle çalışılması için ikisini birden kısaltamayız. Bu ekleme işini yaparken yarı grubun hayati özelliklerini kurban etmemeliyiz. Eğer grup olan bir yarı gruba sıfır elemanını eklersek grup olmayan bir yarı grup elde ederiz. Sıfırlı yarı gruplar içinde, herhangi iki elemanın çarpımı sıfır olan oldukça trivial null yarı gruplar ile karşılaşırız. Boştan farklı herhangi bir S yarı grubunda çarpmayı $a, b \in S$ için

$$ab = a$$

olarak tanımlarsak **sol sıfır yarı grup** olarak adlandırılan yarı grubu elde ederiz. Sağ sıfır yarı grup benzer şekilde tanımlanır.

Eğer bir S yarı grubu $e^2 = e$ olacak şekilde bir e elemanı içerirse, e ye **idempotent** denir. Eğer S sadece idempotentlerden oluşuyorsa, S ye **band** denir. Eğer S hem band hem de değişmeli ise S ye **yarılatis** (idempotentlerin değişmeli yarı grubu) denir.

A bir küme , SL_A , A nın boştan farklı altkümelerin kümesi olsun. $\cup$ işlemini bir ikili işlem olarak alalım. $\cup$ işlemine göre SL_A bir yarılatisdir Çünkü: $X \cup X = X$ ve $X \cup Y = Y \cup X$ dir. SL_A ya A üzerinden **serbest yarılatis** denir.

$$R_{m,n} = \{(i, j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

olsun. $\forall (i, j), (k, l) \in R_{m,n}$ için

$$(i, j)(k, l) = (i, l)$$

olacak şekilde bir ikili işlemi tanımlayalım. Bu işleme göre $R_{m,n}$ bir yarıgruptur.

Bandtır ama değişmeli değildir. $R_{m,n}$ ye bir **dikdörtgen band** denir.

Eğer $xyx = x$ olacak şekilde, $y \in S$ varsa, S nin bir x elemanına regülerdir denir. Eğer S nin her elemanı regüler ise, S ye **regüler yarıgrup** denir.

S bir yarıgrup, S nin boştan farklı bir I altkümesine eğer her $s \in S$, $i \in I$ için $si \in I$ (sırasıyla $is \in I$) ise, I ya bir **sol** (sırasıyla **sağ**) **ideal** denir, eğer I hem sol hem de sağ ideal ise, I ya **iki yanlı ideal** denir

$(S, .)$ ve $(T, .)$ iki yarıgrup ve $j : S \rightarrow T$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$(xy)j = (x)j (y)j$$

oluyorsa j ye bir **homomorfizma** denir. $(S, ., 1_S)$ ve $(T, ., 1_T)$ sırasıyla birimleri 1_S ve 1_T olan monoidler ise yukarıdaki koşula ek olarak

$$(1_S)j = 1_T$$

oluyorsa j ye bir **monoid homomorfizması** denir. Bu homomorfizmaların aralarındaki farkı belirtmek için yarıgrup homomorfizması ve monoid homomorfizması ifadeleri kullanılır. Burada S ye j nin **tanım kümesi** (domain), T ye de **değer kümesi** (codomain) denir. ϕ nin görüntü veya imaj kümesi $\{sj : s \in S\}$ olarak tanımlanır. Eğer j birebir ise ϕ ye bir **monomorfizm** denir. Eğer j örten ise ϕ ye bir **epimorfizm** denir. Bir $j : S \rightarrow T$ homomorfizması, tersinir yani $j j^{-1}$, S

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

üzerinde birim dönüşüm $j^{-1}j$ de T üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde $j^{-1}:T \rightarrow S$ bir j^{-1} homomorfizması varsa $j:S \rightarrow T$ homomorfizmasına bir **izomorfizma** denir. Eğer bir $j:S \rightarrow T$ izomorfizması varsa S ve T ye izomorfik denir ve $S \cong T$ yazılır. Yani $(S,.)$ ve $(T,*)$ iki yarıgrup olsun. $j:S \rightarrow T$ ye birebir, örten ve her $a,b \in S$ için

$$j(a.b) = j(a)*j(b)$$

olacak şekilde bir j dönüşümü varsa S ve T izomorfiktir.

$j:S \rightarrow T$ ye bir homomorfizm ise j ye S nin bir **endomorfizmi** denir. Birebir, örten bir endomorfizme **otomorfizm** denir.

2.1. Bağıntılar ve Denklikler

Eğer $X \neq \emptyset$ bir küme ise $X \times X$ in herhangi bir r altkümesine X üzerinde bir **bağıntı** denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini $B(X)$ ile gösterelim. $\emptyset$, $X \times X$ ve $1_X = \{(x,x): x \in X\}$ kümelerini X üzerindeki bağıntılara örnek olarak verebiliriz. r , X üzerinde bir bağıntı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$r[A] = \{y \in X : (a,y) \in r, (a \in A)\}$$

olarak tanımlayalım. $x \in X$ için, $r[\{x\}]$ yerine $r[x]$ yazacağız.

$r, s \in B(X)$ olmak üzere $r \circ s$ kümesi

$$r \circ s = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X, (x,z) \in r, (z,y) \in s\}$$

olarak tanımlanır. Her $r, s, t \in B(X)$ için $r \subseteq s$ ise, $r \circ t \subseteq s \circ t$ ve $t \circ r \subseteq t \circ s$ olduğu açıktır. Ayrıca, $B(X)$, $\circ$ işlemi ile bir yarıgruptur. $r \in B(X)$ olmak üzere

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

$$\text{dom}(r) = \{x \in X : \exists y \in X, (x, y) \in r\}$$

kümesine r nun **tanım kümesi**

$$\text{ran}(r) = \{y \in X : \exists x \in X, (x, y) \in r\}$$

kümesine r nun **değer kümesi** denir.

$r, s \in B(X)$ için $r \subseteq s$ ise $\text{dom}(r) \subseteq \text{dom}(s)$, $\text{ran}(r) \subseteq \text{ran}(s)$ ve $r[x] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \text{dom}(r)$ dur. $A \subseteq X$ ise, $r[A] = \cup \{r[a] : a \in A\}$ şeklindedir. Her $r \in B(X)$ için r nun tersi

$$r^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in r\}$$

olarak tanımlanır. r^{-1} de $B(X)$ in bir elemanıdır. Ayrıca $r, b, a_1, a_2, \dots, a_n \in B(X)$ olmak üzere

$$(r^{-1})^{-1} = r$$

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n)^{-1} = a_n^{-1} \circ a_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ a_1^{-1}$$

$$r \subseteq b \Rightarrow r^{-1} \subseteq b^{-1}$$

dir. Buradan $\text{dom}(r) = \text{ran}(r^{-1})$, $\text{ran}(r) = \text{dom}(r^{-1})$ ve $r^{-1}[x] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \text{ran}(r)$ dir.

r , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer $1_X \subseteq r$ ise r ya **yansımali**, $r^{-1} = r$ ise, r ya **simetrik**, $r \circ r \subseteq r$ ise r ya **geçişmeli** denir. r , yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise r ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. r bir denklik bağıntısı ise, o zaman

$$\text{dom}(r) \supseteq \text{dom}(1_X) \supseteq X$$

$$\text{ran}(r) \supseteq \text{ran}(1_X) \supseteq X$$

olup $\text{dom}(r) = \text{ran}(r) = X$ dir.

Eğer r , X üzerinde bir denklik bağıntısı ise o zaman $(x, y) \in r$ yerine xry veya $x \equiv y \pmod{r}$ yazacağız. $r[x]$ kümesine r – sınıfı veya denklik sınıfı denir. X / r notastonu ile tüm denklik sınıflarının kümesini göstereceğiz.

$r^* : X \rightarrow X / r$ dönüşümü, her $x \in X$ için, $r^*(x) = r[x]$ olarak tanımlanır ve bu dönüşüme **doğal dönüşüm** denir.

Eğer $q : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ise, $q^{-1} \circ q$ kümesine q nın **çekirdeği** denir ve $\text{Ker} q$ ile gösterilir. r bir denklik bağıntısı ise, $\text{Ker} r^* = r$ dur. Eğer $\{r_i : i \in I\}$, X üzerindeki denklik bağıntılarının boş olmayan bir ailesi ise, $\cap \{r_i : i \in I\}$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. R , X üzerinde herhangi bir denklik bağıntısı ise, R yi içeren denklik bağıntılarının bir ailesi boş değildir en azından $X \times X$ denklik bağıntısı vardır. Böylece X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X üzerinde R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. R , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimini R^e ile gösterelim.

$$R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

kümesine R nin **geçişmeli kapanışı** denir.

Teorem 2.1.1. Eğer R bir X kümesi üzerinde bir bağıntı ise R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: $(x, y), (y, z) \in R^\infty$ olsun. O halde $(x, y) \in R^m$ ve $(y, z) \in R^n$ olacak şekilde m, n pozitif sayıları vardır.

$$(x, z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n} \subseteq R^\infty$$

olup R^∞ geçişmelidir. Dikkat edilirse $R^1 = R \subseteq R^\infty$ dur. T, X üzerinde R yi içeren başka bir geçişmeli bağıntı olsun. $R^2 = R \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T$ dir. Tümevarım ile kolayca görüleceği gibi $n = 1, 2, \dots$ için $R^n \subseteq T$ dir. Böylece $R^\infty \subseteq T$ olup R^∞, X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. <

Önerme 2.1.2. R, X üzerinde bir bağıntı ise X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi $R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ dur.

İspat: $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ ve $E = S^\infty$ olsun. Teorem 2.1.1 den, E geçişmeli ve $R \subseteq E$ dir. $1_X \subseteq S \subseteq E$ olduğundan E yansımalıdır. S tanımından dolayı simetriktir. Yani $S^{-1} = S$ dir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$ olur. Böylece

$$E^{-1} = (S^\infty)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = E$$

olup E simetriktir. O halde E, R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. T, X üzerinde R yi içeren bir başka denklik bağıntısı olsun. O zaman $1_X \subseteq T$ ve $R^{-1} \subseteq T^{-1} = T$ olup $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq T$ dir. $E = S^\infty, X$ üzerinde S yi içeren en küçük geçişmeli bağıntı ve T geçişmeli olduğundan $E \subseteq T$ dir. Böylece $S \circ S \subseteq T \circ T = T$ olup her $n \geq 1$ için $E = S^\infty \subseteq T$ elde edilir. $E = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$ nin X üzerindeki R yi içeren en küçük kongrüans olduğunu gösterdik. O halde $E = R^e$ dir. <

Önerme 2.1.3. R , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $(x, y) \in R^e$ olması için gerek ve yeter koşul ya $x = y$ veya $n \in \mathbb{N}$, her $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $(z_i, z_{i+1}) \in R$ veya $(z_{i+1}, z_i) \in R$ olmak üzere sonlu bir

$$x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n = y$$

dizisinin olmasıdır.

İspat: $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ ve W de ya $x = y$ veya $n \in \mathbb{N}$, her $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $(z_i, z_{i+1}) \in R$ veya $(z_{i+1}, z_i) \in R$ olmak üzere sonlu bir

$$x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n = y$$

dizisi mevcut olacak şekilde tüm $(x, y) \in X \times X$ ikililerinin kümesi olsun. W açıkça $n \geq 2$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için $(z_i, z_{i+1}) \in S$ olmak üzere

$$x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n = y$$

dizisi mevcut olacak şekildeki tüm $(x, y) \in X \times X$ ikililerinin kümesidir. Özel olarak $S \subseteq W$ dur. $n \geq 2$ ve $(x, y) \in S^{n-1}$ olsun. O zaman yukarıda belirtildiği üzere bir dizi vardır. O halde $(x, y) \in W$ dur. Böylece $R^e \subseteq W$ olduğu gösterilmiş olur. Tersini göstermek için $(x, y) \in W$ alalım. O halde yine yukarıdaki gibi bir dizi vardır. Bu bize $(x, y) \in S^{n-1} \subseteq R^e$ olduğunu gösterir. Böylece $W = R^e$ dir.

2.2. Kongrüanslar ve Bölüm Yarıgrubu

Yarıgrup homomorfizmlerinin çekirdeği kongrüans olduğundan, kongrüans kavramı yarıgrup teoride önemli yer tutmaktadır.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

Tanım 2.2.1. S bir yarıgrup ve r , S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y, s \in S$ için ,

$$(x, y) \in r \Rightarrow (sx, sy) \in r$$

ise, r ya bir **sol kongrüans** denir. Benzer yolla, her $x, y, s \in S$ için ,

$$(x, y) \in r \Rightarrow (xs, ys) \in r$$

ise, r ya bir **sağ kongrüans** denir. Eğer S hem sol hem de sağ kongrüans ise, S , ye (iki yanlı) **kongrüans** denir.

Örnek 2.2.2. S bir yarıgrup olsun.

i) $\Delta_S = \{(x, x) : x \in S\}$

ii) $\Phi_S = S \times S$

iii) G bir grup ve N , G nin normal altgrubu olsun. $\sqsubset$ bağıntısı

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$$

olarak tanımlansın. $\sqsubset$ bir kongrüanstır.

iv) Eğer I , S yarı grubunun bir ideali ise, r_I yı $(I \times I) \cup \Delta_S$ olarak tanımlayalım. O halde r_I bir kongrüanstır. S / r_I yı $(S / I) \cup \{0\}$ olarak düşünebiliriz.

İspat: i) ve ii) nin kongrüans olduğu açıktır. Çünkü Δ_S ve Φ_S birer denklik bağıntısı, $(x, x) \in \Delta_S$ ve $\forall s, t \in S$ için, $(sxt, sxt) \in \Delta_S$ ve $(x, y) \in \Phi_S$ için, $(sxt, syt) \in \Phi_S$ dir.

iii)

$$r_N = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in N\}$$

alalım. r_N bir denklik bağıntısıdır. $(x, y) \in r_N$ ve $g \in G$ olsun.

$$\begin{aligned} xy^{-1} \in N &\Rightarrow xy^{-1} = xgg^{-1}y^{-1} = (xg)(g^{-1}y^{-1}) = (xg)(yg)^{-1} \\ &\Rightarrow (xg, yg) \in N \end{aligned}$$

Yani; r_N bir sağ kongrüanstır ve ayrıca,

$$xy^{-1} \in N \text{ ve } N \text{ normal} \Rightarrow g(xy^{-1})g^{-1} \in N$$

olup,

$$\begin{aligned} g(xy^{-1})g^{-1} &= (gx)(gy)^{-1} \in N \\ &\Rightarrow (gx, gy) \in N \end{aligned}$$

olduğundan r_N bir sol kongrüanstır. Dolayısıyla r_N bir kongrüanstır.

iv) $r_I = (I \times I) \cup \Delta_S = \{(x, y) : x, y \in I \text{ veya } x = y\}$ dir. $(x, y) \in r_I$ ve $s \in S$ olsun.

Eğer $x = y$ ise, $sx = sy$ ve dolayısıyla $(sx, sy) \in r_I$ dir. Diğer durumda $x, y \in I$ olur. Fakat $sx, sy \in I$ ve dolayısıyla gene $(sx, sy) \in r_I$ olur. Benzer şekilde, r_I bir sağ kongrüanstır. Dolayısıyla, r_I bir kongrüanstır. <

Teorem 2.2.3. r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. S / r kümesi,

$$(x / r)(y / r) = (xy) / r$$

çarpması ile bir yarıgruptur.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

İspat: Öncelikle yukarıdaki çarpmanın iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz. Bu nedenle, $x_1 \in x/r$ ve $y_1 \in y/r$ olsun. Yani, $(x, x_1) \in r$ ve $(y, y_1) \in r$ olsun. r bir sağ kongrüans olduğundan, $(x, x_1) \in r$ dan, $(xy, x_1y) \in r$ elde ederiz. Benzer yolla r bir sol kongrüans olduğundan, $(x_1y, x_1y_1) \in r$ olur. Son olarak geçişme ile, $(x/r)(y/r) = (xy)/r = (x_1y_1)/r = (x_1/r)(y_1/r)$ olacak şekilde, $(xy, x_1y_1) \in r$ olur. Dolayısıyla çarpma iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} ((x/r)(y/r))(z/r) &= ((xy)/r)(z/r) \\ &= ((xy)z)/r \\ &= (x(yz))/r \\ &= (x/r)((y/r)(z/r)) \end{aligned}$$

olup çarpma işlemi birleşmelidir. Böylece S/r kümesi bir yarıgruptur. <

S/r yarıgrubuna S nin r ile **bölümü** denir. X ve Y boştan farklı iki küme olsun.

$f : X \rightarrow Y$ dönüşümünün **çekirdeği**,

$$Kerf = \{(x, y) \in X : xf = yf\}$$

ve görüntü kümesi

$$imf = \{xf : x \in X\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.4. S bir yarıgrup olsun.

D) r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. $xf = x/r$ ile tanımlı $f : S \rightarrow S/r$ dönüşümü bir epimorfizmdir.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

II) $f : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. f nin çekirdeği, $Ker f$, S üzerinde bir kongrüanstır ve

$$S / Ker f \cong Im f$$

dir.

İspat: I) $x, y \in S$ için

$$(xy) f = (xy) r = (x r)(y r) = (x f)(y f)$$

olup f bir homomorfizmdir. Her $x \in S$ için $x f = x / r$ ve f örten olup f bir epimorfizmdir.

II) $(x, y) \in Ker f$ alalım. Yani $x f = y f$ dir. $s \in S$ için

$$(sx) f = (s f)(x f) = (s f)(y f) = (s y) f$$

ve dolayısıyla $(sx, sy) \in Ker f$ olup $Ker f$ bir sol kongrüanstır. Benzer yolla, $Ker f$ nin bir sağ kongrüans olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned} f : S / Ker f &\rightarrow Im f \\ x / Ker f &\rightarrow x f \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlayalım.

$$\begin{aligned} x / Ker f = y / Ker f &\Leftrightarrow (x, y) \in Ker f \Leftrightarrow x f = y f \\ &\Leftrightarrow (x / Ker f) f = (y / Ker f) f \end{aligned}$$

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

yukarıdaki denkliğin dizisini soldan sağa okursak, f nin iyi tanımlılığı çıkar ve sağdan sola okursak 1-1 olduğunu görürüz. f nin örten olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} ((x / \text{Ker} f)(y / \text{Ker} f))f &= ((xy) / \text{Ker} f)f \\ &= (xy)f = (xf)(yf) \\ &= ((x / \text{Ker} f)f)((y / \text{Ker} f)f) \end{aligned}$$

olup f bir homomorfizmdir. Dolayısıyla, f bir izomorfizmdir. <

Tanım 2.2.5. S bir yarıgrup ve $p \subseteq S \times S$ herhangi bir ilişki olsun. $s, t \in S$ elemanları için, eğer

$$s = pq_1r, t = pq_2r \text{ ve } (q_1, q_2) \in p \text{ veya } (q_2, q_1) \in p$$

olacak şekilde, $p, q_1, q_2, r \in S^1$ elemanları varsa, s den t ye bir **elementer geçiş** vardır deriz. Eğer her bir i ($1 \leq i \leq n-1$) için, z_i den z_{i+1} e bir elementer geçiş varsa,

$$s = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n = t$$

elemanlarının dizisine bir **elementer dizi** deriz.

Teorem 2.2.6. S bir yarıgrup ve $p \subseteq S \times S$ herhangi bir alt kümesi olsun. S üzerinde r yeni ilişkisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$(x, y) \in r \Leftrightarrow x \text{ den } y \text{ ye bir elementer dizi vardır.}$$

O halde, r , S üzerinde bir kongrüanstır. $p \subseteq r$ dur. Ayrıca, r , bu özellikle en küçük kongrüanstır ve p yi içeren diğer herhangi s kongrüansları için, $r \subseteq s$ dır.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

İspat: Uzunluğu 1 olan diziler elementer olduğu için r yansımalıdır. Aynı zamanda

$$s = z_1, z_2, \dots, z_n = t$$

bir elementer dizi ise,

$$t = z_n, z_{n-1}, \dots, z_1 = s$$

dizisi de elementerdir. Dolayısıyla r simetriktir. Benzer yolla,

$$s = z_1, z_2, \dots, z_n = t \text{ ve } t = u_1, u_2, \dots, u_m = v$$

elementer diziler ise,

$$s = z_1, z_2, \dots, z_n, u_1, \dots, u_m = v$$

dizisi de elementerdir. Bunun için, r geçişkendir. Son olarak,

$$s = z_1, z_2, \dots, z_n = t$$

bir elementer dizi ve herhangi $u \in S$ için,

$$us = uz_1, uz_2, \dots, uz_n = ut$$

dizisi de elementerdir. Bunun için, r bir sol kongrüanstır ve aynı zamanda sağ kongrüanstır. Dolayısıyla bir kongrüanstır. $p \subseteq r$ olduğu açıktır. (Uzunluğu 2 olan elementer diziler).

s , S üzerinde $p \subseteq s$ olacak şekilde herhangi bir kongrüans olsun. $(s, t) \in r$ keyfi olsun. Eğer $s = t$ ise, $(s, t) \in s$ dir. $s \neq t$ ise,

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

$$s = z_1, z_2, \dots, z_n = t$$

elementer dizisi vardır. Keyfi z_i, z_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) çiftini ele alalım. Tanım 2.2.6 da olduğu gibi, $(q_1, q_2) \in p$ ya da $(q_2, q_1) \in p$ olacak şekilde $z_i = pq_1r$ ve $z_{i+1} = pq_2r$ yazarız. $p \subseteq s$ olduğu için, $(q_1, q_2) \in s$ ve s bir kongrüans olduğundan,

$$(z_i, z_{i+1}) = (pq_1r, pq_2r) \in s$$

ve bu her i ($1 \leq i \leq n-1$) için sağlanır. Son olarak, $(s, t) \in s$ elde ederiz. <

2.3. Yarıgrup Takdimleri

S bir yarıgrup, A da S nin bir alt kümesi olsun. A yı içeren S nin en küçük yarıgrubuna A **nın doğurduğu yarıgrup** denir. A ya bu yarıgrubun **doğuray kümesi** denir. A nın doğurduğu alt yarıgrubu $\langle A \rangle$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.3.1. S bir yarıgrup, A da S nin boş olmayan altkümesi olsun. O zaman

$$\langle A \rangle = \cap \{U_i : U_i, A \text{ yı içeren } S \text{ nin altyarıgrubu}\}$$

dır.

İspat: $\mathfrak{R} = \cap \{U_i : U_i, A \text{ yı içeren } S \text{ nin altyarıgrubu}\}$ olsun. $\mathfrak{R}$, A yı içeren bir alt yarıgrup olup $\langle A \rangle \subseteq \mathfrak{R}$ dir. Ayrıca $\langle A \rangle$, A yı içeren bir altyarıgrup olduğundan

$$\langle A \rangle \in \{U_i : U_i, A \text{ yı içeren } S \text{ nin altyarıgrubu}\}$$

dır. O halde

$$\mathfrak{R} = \cap \{U_i : U_i, A \text{ yı içeren } S \text{ nin altyarıgrubu}\} \subseteq \langle A \rangle$$

olup $\langle A \rangle = \mathfrak{R}$ dir. <

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. O zaman

$$\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklindedir.

Eğer $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir A kümesi var ise S ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir.

$$\text{rank}(S) = \min \{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanan $\text{rank}(S)$ doğal sayısına S nin **rankı** denir.

S bir yarıgrup olsun. S nin tek elemanlı bir $A = \{a\}$ doğurayı varsa S ye **monojenik yarıgrup** denir. $S = \langle a \rangle$ yazılır. $S = \langle a \rangle$ monojenik bir yarıgrup olsun. Eğer her $i \neq j \in \mathbb{N}$ için $a^i \neq a^j$ ise S sonsuz olup S ye **serbest monojenik yarıgrup** denir. Serbest monojenik yarıgrup $(\mathbb{N}, +)$ yarıgrubuna izomorfiktir.

Şimdi (Ayık, H., 1998) de bulunan bazı kümelerin rankını inceleyelim.

m elemanlı L_m kümesi üzerindeki çarpmayı $\forall x, y \in L_m$ için $xy = x$ olarak tanımlayalım. L_m , m dereceli bir sol sıfır yarıgrubudur. $\forall x, y \in L_m$ için $xy = x$ olduğundan, L_m nin en küçük doğuray kümesi kendisidir. Dolayısıyla $\text{rank}(L_m) = |L_m| = m$ dir.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

Sıfır yarıgrup $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $n \geq 2$ i göz önüne alalım. $\forall x_i, x_j \in Z_n$ için $x_i x_j = x_0$ olduğundan, Z_n nin en küçük doğuray kümesi $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ dir ve $rank(Z_n) = n-1$ dir.

Şimdi A kümesi üzerinden SL_A serbest yarılatisini ele alalım. Her bir $a \in A$ için $\bigcup_{i \in I} X_i = \{a\} \Rightarrow X_i = \{a\}$, $\forall i \in I$ olduğundan, SL_A nın her elemanı bazı $\{a\}$ ($a \in A$) ların birleşimidir. Dolayısıyla, $\{\{a\} : a \in A\}$, SL_A nın en küçük doğuray kümesidir ve $rank(SL_A) = |A|$ dir.

$A \neq \emptyset$ bir küme (alfabe) olsun. e boş kelimeyi göstermek üzere, A daki tüm kelimelerin kümesini A^* , boş kelimeden farklı tüm sonlu $a_1 a_2 \dots a_n$ kelimelerinin kümesini A^+ ile göstereceğiz. Dikkat edilecek olursa $A^* = A^+ \cup \{e\}$ dir. A^+ daki ikili işlemi

$$(a_1 a_2 \mathbf{L} a_n)(b_1 b_2 \mathbf{L} b_m) = a_1 a_2 \mathbf{L} a_n b_1 b_2 \mathbf{L} b_m$$

olarak tanımlayalım. Böylece yukarıda tanımlanan bu ikili işlem ile A^+ bir yarıgruptur. A^+ ya A üzerinde bir **serbest yarıgrup**, A kümesine de A^+ nın **doğuray kümesi** denir.

$$A = A^+ \setminus (A^+)^2$$

olduğundan doğuray kümesi tek türlü bellidir. Eğer $A = \{a\}$ ise $A^+ = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ bir sonsuz monojenik yarıgruptur. $|A| \geq 2$ ise, o zaman A^+ değişmeli olmak zorunda değildir.

Teorem 2.3.2. S bir yarıgrup, A bir alfabe ve $f : A \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. O zaman $f|_A = f$ olacak şekilde bir tek $f : A^+ \rightarrow S$ homomorfizmi vardır.

İspat: $f : A^+ \rightarrow S$ dönüşümünü $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^+$ için

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n)$$

olarak tanımlayalım. f homomorfizmadır çünkü

$$\begin{aligned} ((a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_m))f &= (a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m)f \\ &= (a_1 f)(a_2 f) \dots (a_n f)(b_1 f)(b_2 f) \dots (b_m f) \\ &= (a_1 a_2 \dots a_n)f(b_1 b_2 \dots b_m)f \end{aligned}$$

ve $f|_A = f$ dir. Yani her $a \in A$ için, $af = af$ dir. $y : A^+ \rightarrow S$, $y|_A = f$ olacak şekilde başka bir homomorfizma olsun. O zaman her $w = a_1 a_2 \dots a_n \in A^+$ için

$$\begin{aligned} y(a_1 a_2 \dots a_n) &= y(a_1)y(a_2) \dots y(a_n) \\ &= f(a_1)f(a_2) \dots f(a_n) = f(a_1 a_2 \dots a_n) \end{aligned}$$

olup $y = f$ dir. O halde f tektir.

S bir yarıgrup ve a da S yarıgrubunun doğurayı ise $y(a) = a$ olacak şekilde bir $y : A^+ \rightarrow S$ homomorfizması vardır. <

Sonuç 2.3.3. Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür.

İspat: S bir yarıgrup ve A da S nin bir doğuray kümesi olsun. O zaman $y : A^+ \rightarrow S$ $\forall a \in A$ için $ay = a$ olacak şekilde tek homomorfizm olarak tanımlayalım. $S = \langle A \rangle$ olduğundan $\forall s \in S$ için $s = a_1 a_2 \dots a_n$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ vardır. $(a_1 a_2 \dots a_n)y = s$ olduğundan y örtendir. <

Detay için (Lallement, G., 1979) a bakınız.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere bir **yarıgrup takdimi** $\langle A|R \rangle$ ikilisidir. $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup , r , R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olmak üzere A^+ / r yarıgrubudur.

A nın elemanlarına **doğuraylar**, R nin elemanlarına **tanımlı ilişkiler** denir. Tipik tanımlı ilişki $(u,v) \in R$ genellikle $u = v$ olarak yazılır. Genellikle A ve R yi elemanlarını yazarak belirtiriz. Örneğin,

$$\langle \{a,b\} | \{(a^5, a), (b^6, b), (ab, ba)\} \rangle$$

yerine

$$\langle a, b | a^5 = a, b^6 = b, ab = ba \rangle$$

yazarız.

S , $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı bir yarıgrup olsun. O halde, $w_1, w_2 \in A^+$ iki kelimesi için, eğer benzer kelimeler ise $w_1 \equiv w_2$ ve eğer S yarıgrubunun aynı elemanını gösterirlerse $w_1 = w_2$ yazarız. Yani $(w_1, w_2) \in r$ ve $w_1 = w_2$ ilişkisi S de sağlanır deriz. Örneğin $A = \{a, b\}$ ve $R = \{ab = ba\}$ ise, $aba = a^2b$ dir. Fakat $aba \not\equiv a^2b$ dir.

Eğer bir S yarıgrubu hem A hem de R sonlu olacak şekilde $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı ise, takdime **sonlu takdim** ve S ye ise **sonlu takdimlidir** denir.

Teorem 2.3.4. $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi , r , R nin doğurduğu kongrüans, $S = A^+ / r$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman $w_1 r = w_2 r$ olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ nin $\langle A|R \rangle$ nin bir sonucu olmasıdır.

İspat:

$$s = \{(a, b) \in A^+ \times A^+ : a = b, \langle A|R \rangle \text{ nin bir sonucudur}\}$$

olarak tanımlayalım. $(w_1, w_2) \in s$ ve $w_1 \not\equiv w_2$ ise o zaman, a_{i+1}, a_i den R deki bir ilişki bir kez kullanılarak elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv a_1, a_2, \dots, a_n \equiv w_2$$

dizisi vardır. Eğer $a_i \equiv g u d$ ve $a_{i+1} \equiv g v d$ ($g, d \in A^*$ ve $(u, v) \in R \cup R^{-1}$) ise

$$a_i / r = (g / r)(u / r)(d / r) = (g / r)(v / r)(d / r) = a_{i+1} / r$$

dur. Böylece $w_1 / r = w_2 / r$ ve $s \subseteq r$ olur. $R \subseteq s$ olduğu, s nin tanımından açıktır. Ayrıca s kongrüans olup, $r \subseteq s$ dur. O halde $r = s$ dir. <

Önerme 2.3.5. $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, S bu takdim tarafından tanımlanan yarıgrup ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman S de $w_1 = w_2$ olması için gerek ve yeter koşul w_2 nin R deki ilişkiler kullanılarak w_1 den elde ediliyor olmasıdır. <

Önerme 2.3.6. S, A kümesi tarafından doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. $\langle A|R \rangle$ nin S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) S, R deki tüm ilişkileri sağlar ve

ii) $u = v$ ilişkisi S de sağlanıyor olacak şekilde $u, v \in A^+$ herhangi iki kelime ise o zaman $u = v, R$ nin bir sonucudur.

İspat: $\langle A|R \rangle$, S için bir takdim olsun. O zaman S , R deki tüm ilişkileri sağlar. ii) nin sağlandığı açıktır. Tersini göstermek için i) ve ii) nin sağlandığını kabul edelim. $f: A^+ \rightarrow S$ birim dönüşüm, $I: A \rightarrow A$ nın bir genişlemesi olan bir epimorfizm ve r da R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olsun. S , R deki tüm ilişkileri sağladığından $R \subseteq \text{Ker} f$ dir. Böylece $r \subseteq \text{Ker} f$ dir. Diğer yandan eğer $(u,v) \in \text{Ker} f$ ise o zaman S , $u=v$ ilişkisini sağlar. O halde $u=v$, R nin bir sonucudur. Önerme 2.3.5 ile, $(u,v) \in r$ dir. Böylece $r = \text{Ker} f$ dir. Dolayısıyla $S \cong A^+ / \text{Ker} f = A^+ / r$ yarıgrubu, $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgruptur. <

Örnek 2.3.7 $\langle a|a^{n+r} = a^r \rangle$ takdimi $(n+r-1)$. dereceden ve n periyotlu monojenik yarıgrubu tanımlar.

İspat: $M = \{a, a^2, \dots, a^n, \dots, a^{n+r-1}\}$, a ile doğurulan $(n+r-1)$ dereceli ve n periyotlu monojenik yarıgrup olsun. a^k nın tekrarlandığı ve $(n+r)$, a^r nin ilk tekrar ettiği kuvvet olacak şekilde, r nin en küçük pozitif k tamsayısı olduğunu biliyoruz. Bu nedenle M , $a^r = a^{n+r}$ ilişkisini sağlar. M , $a^{p_1} = a^{p_2}$ ilişkisini sağlasın. a^{p_2} , a^{p_1} in ilk tekrarı olsun. Bu ilişkinin $a^r = a^{n+r}$ ilişkisinin bir sonucu olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer $p_1 = p_2$ ise, $a^{p_1} \equiv a^{p_2}$ ve sonuç çıkar. Bu nedenle genelliği bozmaksızın $p_2 > p_1$ olsun.

İddia: Eğer $p_1, p_2 \geq r$ ve $p_1 \equiv p_2 \pmod{n}$ ise, $a^{p_1} = a^{p_2}$ ilişkisi $a^r = a^{n+r}$ den elde edilebilir.

Bu durumda bazı $k \in \mathbb{Z}$ için, $p_1 - p_2 = kn$ yazabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned} a^{p_1} &\equiv a^{kn+p_2} \equiv a^{kn+r} a^{p_2-r} \equiv a^{(k-1)n} a^{n+r} a^{p_2-r} = a^{(k-1)n} a^r a^{p_2-r} \\ &\equiv a^{(k-2)n} a^{n+r} a^{p_2-r} = a^{(k-2)n} a^r a^{p_2-r} = \dots = a^r a^{p_2-r} \equiv a^{p_2} \end{aligned}$$

dolayısıyla, $a^{p_1} = a^{p_2}$ ilişkisi $a^r = a^{n+r}$ den elde edilebilir. <

r , M de tekrar eden a nın en küçük kuvveti olduğundan, $p_1 \geq r$ olmalı, dolayısıyla $p_1, p_2 \geq r$ dir. n , $p_2 - p_1$ i bölmese. O halde, bazı $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 < q < n$ için, $p_2 - p_1 = kn + q$ ve

$$a^{p_1} \equiv a^{p_1-r} a^r = a^{p_1-r} a^{n+r} = \dots = a^{p_1-r} a^{kn+r} \equiv a^{p_1+kn} \equiv a^{p_2-q}$$

olur. O halde, $a^{p_1} = a^{p_2-q}$ ve $p_2 - q < p_2$ dir. Bu, a^{p_2} nin a^{p_1} in ilk tekrarı olması ile çelişir. Bu nedenle $p_2 \equiv p_1 \pmod{n}$ olmalıdır ve $a^{p_1} = a^{p_2}$, $a^r = a^{n+r}$ nin bir sonucudur. O halde $\langle a | a^{n+r} = a^r \rangle$ takdimi M yi tanımlar. <

Önerme 2.3.8. S , A kümesi ile doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun.

i) S , R nin bütün ilişkilerini sağlar.

ii) Her bir $w \in A^+$ kelimesi için, $w = \overline{w}$, R nin bir sonucu olacak şekilde, $\overline{w} \in W$ vardır.

iii) $u \not\equiv v$ olacak şekilde $u, v \in W$ ise, S de $u \neq v$ dir.

Yukarıdaki üç koşul sağlanıyor ise $\langle A | R \rangle$, S nin bir yarıgrup takdimidir.

İspat: A , S yarıgrubunu doğurur ve R , S de sağlanır. Bu nedenle sadece S deki herhangi bir ilişkinin R nin bir sonucu olduğunu göstermeliyiz. $w_1 = w_2$, S de sağlanacak şekilde w_1, w_2 S nin keyfi elemanları olsun. O halde, (ii) ile, $w_1 = \overline{w_1}$, $w_2 = \overline{w_2}$ ilişkileri R nin bir sonucu olacak şekilde $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in W$ vardır. (iii) ile, $\overline{w_1} \equiv \overline{w_2}$ olur. Bu nedenle,

$$w_1 = \overline{w_1} \equiv \overline{w_2} = w_2$$

R nin bir sonucudur. Bunun için S , $\langle A|R \rangle$ takdimi ile tanımlıdır.

Örnek 2.3.9. $S = \{1\}$ aşık ar grubun yarıgrup takdimi $\langle a|a^2 = a \rangle$ dır.

i) $A = \{a\}$ ve $f : A \rightarrow S$ ye $f(a) = 1$ şeklinde tanımlanırsa Af , S nin bir doğurayıdır.

ii) R nin ilişkisinin S de sağlandığını gösterelim. $p : A^+ \rightarrow S$, f yi geren doğal homomorfizma ve $i : A \rightarrow A^+$ olsun.

$$\begin{aligned} a^2 p &= (ap)(ap) \\ &= af.af \\ &= 1.1 \\ &= 1 = af = ap \end{aligned}$$

O halde, $a^2 = a$ ilişkisi S de sağlanır.

iii) $W = \{a\}$ olsun. Herhangi bir $a^n \in A^+$ için $a^n = a$ ise (yani $n = 1$ ise) $a \in W$ olur.

$n \geq 2$ ise, $a^n \equiv a^{n-2}.a^2.1$ ($a^2 = a$ ilişkisini uygulayalım). $a^{n-2}.a.1 \equiv a^{n-1}$ olur. Benzer yolla devam edersek, a elde edilir. Bir ilişki uygulayarak $a^n \rightarrow a^{n-1}$ olup, $a^n = a$, R nin bir sonucudur. Ayrıca, $|W| = 1$ olduğundan, W , S nin bir kanonik formudur. Böylece, $S = \langle a|a^2 = a \rangle$ olur.

Örnek 2.3.10. $S = (\square_n, t)$ yarıgrubu yani n elemanlı devirli grup olsun.

$P = \langle a|a^{n+1} = a \rangle$ ve $W = \{a, a^2, ..., a^n\}$ alalım. $y : A^+ \rightarrow \square_n$, $a \rightarrow 1$ olacak şekilde (tek) homomorfizm olsun.

$S = \langle 1 \rangle$ olduğundan, $\{ay\}$ bir doğuray kümesidir. y nin tanımından $\forall m \in \square_n^+$ için $y(a^m) = m$ olup, özel olarak, $y(a^{n+1}) = n+1 = 1 = y(a)$ olduğundan , R deki ilişki S de sağlanır.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

$w \equiv a^m \in A^+$ olsun. Bölme algoritmasından, $m = r + qn$, $1 \leq r \leq n$ olacak şekilde $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$a^m \equiv a^{qn+r} \equiv a^{(q-1)n+(r-1)+n+1} \equiv a^{(q-1)n+(r-1)} a^{n+1} = a^{(q-1)n+(r-1)} a \equiv a^{(q-1)n+r} = \mathbf{L} = a^r \in W$$

Yani; $a^m \in A^+$ için, $a^m = a^r$, R nin bir sonucu olacak şekilde bir $a^r \in W$ vardır. $a^r, a^s \in W$ için, $a^r = a^s$ ilişkisi S de sağlansın. O zaman, $y(a^r) = y(a^s)$ yani $r = s \pmod{n}$, $1 \leq r, s \leq n$ olduğundan $r = s$ olmalı yani $a^r = a^s$ olmalıdır.

Önerme 2.3.11. S , A kümesi ile doğurulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun.

I) S , R nin bütün ilişkilerini sağlar.

II) Her bir $w \in A^+$ kelimesi için, $w = \overline{w}$, R nin bir sonucu olacak şekilde, $\overline{w} \in W$ vardır.

III) $|W| \leq |S|$

koşulları sağlanıyor ise, $\langle A|R \rangle$, S nin bir yarıgrup takdimidir. (Ruskuc, N., 1995).

İspat: I), II) ve III) koşullarının Önerme 2.3.8 in i), ii) ve iii) koşullarını verdiğini göstermeliyiz. I) ve II) sırasıyla i) ve ii) ye benzer olduğu için, geriye iii) nin I), II) ve III) den geldiğini ispatlamak kalır. A doğurayları R ilişkilerini sağladığı için, II) ile, S nin her bir elemanı, W den bir kelime ile temsil edilir. Bunun için $|W| \geq |S|$ dir. Öyle ki III) ile $|W| = |S|$ olur Yani S sonlu olduğundan, W nin farklı elemanları, S nin farklı elemanlarını temsil eder. <

Örnek 2.3.12. $C_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ ve C_n üzerindeki çarpma da $i.j = \max\{i, j\}$ olsun. O zaman C_n bir yarıgrup olup zincir deriz.

$A = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n\}$, $y : A^+ \rightarrow C_n$, $a_i \rightarrow i$ ye götüren bir homomorfizm olsun. Ay , S nin bir doğurayıdır.

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \mid a_1^2 = a_1, a_i a_{i+1}^2 a_i = a_{i+1}, 1 \leq i \leq n \rangle$$

alalım.

$$y(a_1^2) = 1.1 = y(a_1)$$

$$y(a_i a_{i+1}^2 a_i) = i(i+1)^2 i = (i(i+1))i = (i+1)i = i+1 = y(a_{i+1})$$

$$a_1 a_2 = a_1(a_1 a_2^2 a_1) = (a_1^2)(a_2^2) a_1 = a_1 a_2^2 a_1 = a_2$$

Benzer şekilde $a_2 a_1 = a_2$ olup, $a_2^2 = (a_1 a_2)(a_2 a_1) = a_1 a_2^2 a_1 = a_2$ dir. Özetle, $a_1 a_2 = a_2$, $a_2 a_1 = a_2$ ve $a_2^2 = a_2$ dir. Tümevarımla, $\forall i=1,2,\mathbf{K},n$ için, $a_i^2 = a_i$, $a_i a_{i+1} = a_{i+1}$ ve $a_{i+1} a_i = a_{i+1}$ ve $a_n^2 = a_n$ dir. $1 \leq i < j \leq n$ ise,

$$a_i a_j = a_i(a_{j-1} a_j) = \mathbf{L} = (a_i a_{i+1}) \mathbf{K} a_{j-1} a_j$$

$$\mathbf{L} = a_{i+1} \mathbf{K} a_{j-1} a_j = \mathbf{L} = a_{j-1} a_j = a_j$$

Benzer şekilde, $a_j a_i = a_j$ gösterilir. Sonuçta, $1 \leq i < j \leq n$ için, $a_j a_i = a_j$ ve $a_i a_j = a_j$ dir.

$W = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n\}$ ve $w \equiv a_{i_1} a_{i_2} \mathbf{K} a_{i_m} \in A^+$ olsun.

$$w \equiv (a_{i_1}, a_{i_2}) \mathbf{K} a_{i_m} = a_{\max\{i_1, i_2\}} \mathbf{K} a_{i_m} = a_{\max\{i_1, i_2, \mathbf{K}, i_m\}} \in W$$

ve $|W| = n$ olduğundan $P \cong C_n$ dir.

Örnek 2.3.13. $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $S = (P(X)/\emptyset, \cup)$ yani SL_3 olsun.

$A = \{a, b, c\}$ seçelim. $f : A \rightarrow S$ ye, $a \rightarrow \{x\}$, $b \rightarrow \{y\}$, $c \rightarrow \{z\}$ şeklinde tanımlayalım. $Af = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ olup, S nin bir doğurayıdır. $p : A^+ \rightarrow S$, f yi

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

geren doğal homomorfizma olmak üzere, $R: a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = ba, ac = ca, bc = cb$ şeklinde tanımlanan ilişkiler S de sağlanır. Gerçekten, $a^2 = a, ab = ba$ olduğunu görelim.

$$a^2p = (ap)^2 = (af)^2 = \{x\} \cup \{x\} = \{x\} = af = ap$$

olup, $a^2 = a$ ilişkisi S de sağlanır.

$$\begin{aligned}(ab)(p) &= (ap)(bp) = \{x\} \cup \{y\} = \{y\} \cup \{x\} \\ &= (bp)(ap) \\ &= (ba)(p)\end{aligned}$$

olup, $ab = ba, S$ de sağlanır. O halde, benzer şekilde diğer tüm ilişkilerde S de sağlanır.

$$P(X) / \emptyset = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$$

dir. W nin elemanları S nin elemanlarına eşit olacak şekilde seçelim.

$$W = \{a^i b^j c^k : i, j, k \in \{0, 1\} \text{ ve en az biri sıfırdan farklı olsun.}\} \subset A^+$$

$W = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$ ve $w \in A^+$ olsun. $ab = ba, ac = ca$ ve $bc = cb$ ilişkilerinden gerektiği kadar yararlanarak $m, n, r \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ fakat en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $w \xrightarrow{*} a^m b^n c^r$ olur. Örneğin,

$$acba \rightarrow acab \rightarrow a^2 cb \rightarrow a^2 bc$$

olur. Eğer kelimenin içinde hiç c olmasaydı,

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

$$aba \rightarrow a^2ab \rightarrow a^3b \rightarrow ab$$

elde edilir. $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$ ilişkilerinden gerektiği kadar faydalanarak, $a^m b^n c^r \xrightarrow{*} a^i b^j c^k$ ve en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $i, j, k \in \{0, 1\}$ vardır.

Yani $a^3 b \xrightarrow{a^2=a} ab$ yapabiliriz. Sonuç olarak,

$$w \xrightarrow{*} a^m b^n c^r \xrightarrow{*} a^i b^j c^k \in W$$

R nin bir sonucudur. $|W| = 7 = |SL_3|$ olduğundan,

$$SL_3 = \langle a, b, c \mid a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle$$

olur. Şimdi bazı yarıgrup takdimleri ve onlarla tanımlı yarıgrupların örneklerini verelim.

Örnek 2.3.14.

$$P = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_i^2 = a_i (1 \leq i \leq n), a_j a_i = a_i a_j (1 \leq i < j \leq n) \rangle$$

takdimi, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ üzerinden SL_A serbest yarılatisini tanımlar.

Çözüm: A , SL_A için bir doğuray kümesidir. Ayrıca, SL_A idempotentlerin değişmeli bir yarıgrupudur. ve SL_A , P deki ilişkileri sağlar.

$$W = \{a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n} \in A^+ \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$$

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

olsun. w , A^+ da herhangi bir kelime olsun. İlk olarak $a_j a_i = a_i a_j$ formundaki uygun ilişkileri uygulayarak $l_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) olacak şekilde $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n}$ formunda bir w' kelimesi elde edilir. Daha sonra $a_i^2 = a_i$ formundaki ilişkileri mümkün olduğu kadar çok uygulayarak, W den bir $\bar{w}$ kelimesi elde edilir. $|W| = 2^n - 1$ olduğundan, bir önceki önermeden P , SL_A serbest yarılatisini tanımlar.

Teorem 2.3.15. $\langle A|R \rangle$ bir takdim olsun ve S , $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı bir yarıgrup olsun. B kümesi tarafından doğurulan herhangi T yarıgrubu ve $f: A \rightarrow B$ örten dönüşümü için, f nin tek homomorfizm genişlemesi olacak şekilde $\Phi: A^+ \rightarrow T$ tanımlayalım. Her $(u, v) \in R$ için, $u\Phi = v\Phi$ ise, $(s/r)y \rightarrow s\Phi$ ile tanımlı $\Psi: S \rightarrow T$ bir epimorfizmdir.

İspat: y nin iyi tanımlı olduğunu göstermek yeterlidir.. $s_1 r = s_2 r$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in A^+$ alalım. $(u_i, v_i) \in R$ veya $(v_i, u_i) \in R$ ve $b_i, g_i \in A^*$ için, $a_i = b_i u_i g_i$ ve $a_{i+1} = b_i v_i g_i$ olacak şekilde

$$s_1 \equiv a_1, a_2, \dots, a_n \equiv s_2$$

dizisi vardır. O halde,

$$a_i \Phi \equiv (b_i \Phi)(u_i \Phi)(g_i)$$

$$a_{i+1} \Phi \equiv (b_i \Phi)(v_i \Phi)(g_i)$$

dir.

Fakat hipotez ile, T de $u_i \Phi = v_i \Phi$ dir ve dolayısıyla $a_i \Phi = a_{i+1} \Phi$ dir. Her i için tekrarlayarak, $s_1 \Phi = s_2 \Phi$ elde ederiz. Bir başka deyişle, A ile doğurulan ve R yi sağlayan her yarıgrup S nin homomorfik görüntüsüdür. <

Önerme 2.3.16. Herhangi bir yarıgrup bir takdimle tanımlanabilir.

İspat: T herhangi bir yarıgrup olsun. $A = \{a_t \mid t \in T\}$ bir alfabe ve $R, a_x a_y = a_{xy}$ formunda bütün ilişkilerin kümesi olsun. $x, y \in T$ ve $S, \langle A \mid R \rangle$ ile tanımlı yarıgrubu göstereyim. T yarıgrubu ilişkilerimizin seçimi ile R deki ilişkileri sağlar ve bu nedenle Önerme 2.3.15 ile, $f: S \rightarrow T, a_t \rightarrow t$ olacak şekilde doğal bir epimorfizm vardır. Yani T, S nin homomorfik görüntüsüdür.

$w_1, w_2 \in A^+$ ve $w_1 f = w_2 f$ olsun. $w_1 = a_x$ ve $w_2 = a_y$ ilişkileri S de sağlanacak şekilde $x, y \in T$ vardır. Bunun için $a_x f = a_y f$ dir. Yani; $a_x = a_y$ olacak şekilde, $x = y$ dir. Bunun için f bir izomorfizmdir ve $T, \langle A \mid R \rangle$ takdimi ile tanımlıdır. <

Sonlu bir yarıgrup takdimi $\wp = \langle A \mid R \rangle$ için **noksamlık** [deficiency) $|R| - |A|$ olarak tanımlanır ve $def(\wp)$ ile gösterilir. Sonlu takdimli bir S yarıgrubu için yarıgrup noksamlığı,

$$def_S(S) = \min\{def(\wp) : \wp, S \text{ için sonlu bir yarıgrup takdimi}\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde grup ve monoid noksamlığı tanımlanır.

Teorem 2.3.17. $P = \langle A \mid R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, S, P ile tanımlı bir yarıgrup olsun. P yi grup takdimi olarak ele alırsak, G, P ile tanımlı bir grup olsun. Eğer S bir grup ise, G, S ye izomorfiktir.

İspat: S deki her ilişki G de bir ilişki olup $q: S \rightarrow G$ homomorfizmini her $a \in S$ yi $a \in G$ ye götürecektir şekilde tanımlayabiliriz. S bir grup olduğundan, q aslında bir epimorfizmdir. q , 1-1 dir. Çünkü; bu takdimdeki S için herhangi bir ilişki G için de bir ilişkidir. Ayrıca bunun tersi de doğru olup, q birebir ve örtendir.

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

S ve G arasındaki ilişkilerde daha genel sonuçlar için (Campbell C.M., Robertson E.F., Ruskuc N., Thomas R.M., 1995; Robertson E.F., Ünlü Y., 1993) e bakınız.

Önerme 2.3.18. Eğer G , $\langle A|R \rangle$ grup takdimi ile tanımlı bir grup ve H , $R \subseteq Q$ olacak şekilde $\langle A|Q \rangle$ grup takdimi ile tanımlı bir grup ise, H , G nin homomorfik görüntüsüdür.

Önermenin ispatı (Johnson, D.L., 1976; Önerme 4.2) de verilmiştir.

Önerme 2.3.19. G bir grup ve $\langle A|R \rangle$ de G nin bir monoid takdimi ise, $\langle A|R \rangle$ aynı zamanda G nin bir grup takdimidir.

Örnek 2.3.20. $P = \langle a \rangle$ grup takdimi serbest devirli grubu yani $(\mathbb{Z}, +)$ grubunu tanımlar. P yi monoid takdimi olarak ele aldığımızda serbest monojenik monoidi yani $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$ monoidini tanımlar.

Örnek 2.3.21. $Q = \langle a, b | ab = 1, ba = 1 \rangle$ monoid takdimi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunu tanımlar.

2.4. Monoid Takdimleri

A^* kümesi, $e^2 = e$ ve her $w \in A^+$ için $we = ew = w$ çarpması ile $A^+ \cup \{e\}$ olarak tanımlanır. A bir alfabe, R de $A^* \times A^*$ ın bir alt kümesi olmak üzere bir **monoid takdimi** $\langle A|R \rangle$ ikilisidir. $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan monoid, $\bar{R}$, R deki boş kelime yerine e yazılmış olmak üzere

$$\langle A, e | R, e^2 = e, ae = ea = a(a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan yarıgruptur.

Dikkat edilecek olursa her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. Eğer S , $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup ve M de aynı takdim tarafından tanımlanan monoid ise, M basitçe yeni bir birim eklenmiş S dir. Eğer S birim elemana sahip ise, bu eleman yeni eklenen birim eleman üzerinde birim gibi davranamayacaktır. Böylece $|M| = |S| + 1$ dir.

Önerme 2.4.1. M bir monoid ve P de M nin bir yarıgrup takdimi olsun. O zaman P aynı zamanda M nin bir monoid takdimidir.

Örnek 2.4.2. $M = \{0,1\}$ olsun. $P_1 = \langle a | a^2 = a \rangle$ monoid takdimi M yi tanımlar.

$$P_2 = \langle a, b | a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

yarıgrup takdimi de M yi tanımlar.

Örnek 2.4.3. $M = \{1, a\}$ ve $a^2 = 1$ olarak tanımlı monoidi alalım. $P_1 = \langle a | a^2 = 1 \rangle$ monoid takdimi M yi tanımlar.

$$P_2 = \langle a, b | a^2 = b, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

yarıgrup takdimi de M yi tanımlar. Monoid takdim örnekleri için, (Carvalho, C., 2003) e bakınız.

2.5. Grup Takdimleri

A bir alfabe, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$, A ile birebir eşlenen bir alfabe ve $R \subseteq (A \cup A^{-1})^* \times (A \cup A^{-1})^*$ olmak üzere $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir **grup takdimi** denir. $\langle A | R \rangle$ ile tanımlı grup

$$\langle A, A^{-1} | R, aa^{-1} = a^{-1}a = \varepsilon, (a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan monoiddir. R deki ilişkileri sağlayan ve A tarafından doğurulan her grup, $\langle A | R \rangle$ tarafından tanımlanan grubun bir homomorfik görüntüsüdür. $\langle A | \rangle$ tarafından tanımlanan gruba A üzerinde **serbest grup** denir. A üzerindeki serbest grubu F ile gösterelim. s , $\{(aa^{-1}, \varepsilon), (a^{-1}a, \varepsilon) : a \in A\}$ kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. O zaman F ile $(A \cup A^{-1})^* / r$ izomorfiktirler.

Örnek 2.5.1. $\langle A | \rangle$ ile tanımlı grup, A üzerindeki serbest gruptur. h , $\{(aa^{-1}, e), (a^{-1}a, e) : a \in A\}$ kümesini içeren en küçük kongrüans olacak şekilde, F , $(A \cup A^{-1})^* / h$ ye izomorfiktir. Eğer $w \in (A \cup A^{-1})^*$ kelimesi, herhangi bir $a \in A$ için, aa^{-1} yada $a^{-1}a$ formunda alt kelime içermezse, $w \in (A \cup A^{-1})^*$ kelimesi indirgenmiştir deriz. $R(A)$ bütün indirgenmiş kelimelerin kümesi olsun. Her $a \in A$ için,

$$r(e) = e, \quad r(a) = a, \quad r(a^{-1}) = a^{-1}$$

olacak şekilde $r : (A \cup A^{-1})^* \rightarrow R(A)$ tanımlayalım. Eğer

$$r(w) = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_m^{a_m} \text{ ve } a_i \in A, \quad a_i \in \{-1, 1\}, \quad 1 \leq i \leq m$$

olacak şekilde, $w \in (A \cup A^{-1})^*$ ise,

$$r(wa^a) = \begin{cases} a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_{n-1}^{a_{n-1}} & \text{eğer } a_n = a \text{ ve } a_n \neq a \\ a_1^{a_1} \dots a_m^{a_m} a^a & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olur. r aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) Her $w \in R(A)$ için, $r(w) \equiv w$
- ii) F de, $r(w) = w$
- iii) Her $w_1, w_2 \in R(A)$ için, $r(w_1 w_2) \equiv r(r(w_1) w_2)$
- iv) Her $w \in R(A)$, $a \in A$ için, $r(wa^a a^{-a}) \equiv r(w)$
- v) Her $w_1, w_2 \in R(A)$ ve $a \in A$ için,

$$r(w_1 a^a a^{-a} w_2) \equiv r(r(w_1 a^a a^{-a}) w_2) \equiv r(r(w_1) w_2) \equiv r(w_1 w_2)$$

Şimdi F de $w_1 = w_2$ olacak şekilde $w_1, w_2 \in (A \cup A^{-1})^*$ alalım. Dolayısıyla $w_1 \equiv a_1, a_2, \dots, a_n \equiv w_2$ dir. Burada, a_{i+1}, a_i den $aa^{-1} = 1$ ya da $a^{-1}a = 1$ ilişkilerinden biri uygulanarak elde edilmiştir. Dolayısıyla, özellik (v) ile, $r(a_i) \equiv r(a_{i+1})$ dir. Buradan, $r(w_1) \equiv r(w_2)$ olur. Bunun için, aynı h sınıfında iki indirgenmiş kelimeye sahip olmak imkansızdır.

F yi $w_1.w_2 = r(w_1 w_2)$ çarpması ile $R(A)$ olarak göz önüne alabiliriz.

2.6. Yarıgrup Takdimi Bulmak için Genel Metotlar

Bir S yarıgrubu için takdim bulurken üç genel metot vardır.

- 1) Direkt Metot (Tahmin ve İspat)
- 2) Tietze Dönüşümleri

3) Yarigrubun yapısını kullanmak

Direkt metot genellikle en çok kullanılan metottur. Bazı varyasyonları olmasına rağmen genellikle aşağıdaki adımları içerir.

- 1) S için bir A doğuray kümesi bulmak.
- 2) S yi tanımlamak için yeterli ve A daki doğuraylar tarafından sağlanıyor olacak şekilde bir R ilişkiler kümesi bulmak.
- 3) R deki ilişkiler uygulanarak A^+ daki her kelime W deki bir kelimeye dönüştürülebilmek üzere bir $W \subseteq A^+$ kümesi bulmak.
- 4) W deki farklı kelimelerin S deki farklı kelimeleri temsil ettiğini ispatlamak.

Yukarıdaki son iki koşulu sağlayan W kümesine genellikle S için **kanonik(normal) formların kümesi** denir.

Bir yarigrup için takdim bulmanın üçüncü metodu yarigrubun yapısı yardımı ile takdim bulmaktır. Bu metotta bir S yarigrubunu daha basit $i \in I$, T_i yarigrupları vasıtasıyla ifade etmeye çalışırız. Sonra $i \in I$, T_i yarigrupları için takdim bulup, S için bir takdim bulmak üzere bu takdimleri belli şekillerde bir araya getiririz.

Bir S yarigrubu için takdim bulmanın diğer bir metodu Tietze dönüşümlerini uygulamaktır. (Neumann, B.H., 1967) de bu metodu sol sıfır yarigruplar için takdim bulmada kullandı.

Tietze dönüşümlerini eğer S için bir $\langle A|R \rangle$ takdimini zaten biliyorsak, uygulamak mümkündür ve o halde S için alternatif bir takdim verir. Fikir bazı elementer hareketler uygulayarak ama takdimle tanımlı yarigrubu değiştirmeksizin $\langle A|R \rangle$ takdimini dönüştürmektir. Bu elementer hareketler genellikle **Tietze dönüşümleri** olarak adlandırılır.

Elementer Tietze dönüşümleri diye bilinen 4 temel dönüşüm vardır.

(T1) (Doğuray Ekleme) Eğer $w = b$ olacak şekilde bir $w \in A^+$ var ise $b \notin A$ doğurayını ekleyerek aynı yarigrubu tanımlamak üzere $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A \cup \{b\} | R \cup \{w = b\} \rangle$ takdimi elde edilir.

(T2) (Doğuray Çıkarma) Eğer $w = b \in R$ olacak şekilde, $w \in (A/\{b\})^+$ ve $b \in A$ varsa aynı yarıgrubu tanımlamak üzere $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A/\{b\}|\overline{R} \rangle$ takdimi elde edilir. Burada $\overline{R}$, $R/\{w=b\}$ den, b nin her bulunduğu yeri w ile değiştirerek elde edilen kümedir.

(T3) (Bağıntı Ekleme) Eğer $r = s$ bağıntısı, $\langle A|R \rangle$ ile tanımlanan yarıgrupta sağlanıyorsa, $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A|R \cup \{r = s\} \rangle$ takdimi elde edilir.

(T4) (Bağıntı Çıkarma) Eğer R deki $r = s$ bağıntısı, $\langle A|R \rangle$ takdiminde $R - \{r = s\}$ deki bağıntıların bir sonucu ise, $\langle A|R \rangle$ takdiminden $\langle A|R - \{r = s\} \rangle$ takdimi elde edilir.

Grup teoride de Tietze dönüşümleri benzerdir. (Bkz. Johnson, D.L., 1976).

Örnek 2.6.1. $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ dikdörtgen band olsun. O zaman,

$$a \rightarrow (1,1), b \rightarrow (1,2), c \rightarrow (2,1), d \rightarrow (2,2)$$

olmak üzere, S nin Cayley Tablosu;

$$\left\langle a, b, c, d \left| \begin{array}{l} a^2 = a, ab = b, ac = a, ad = b, ba = a, b^2 = b, bc = a, bd = b, \\ ca = c, cb = d, c^2 = c, cd = b, da = c, db = d, dc = c, d^2 = d \end{array} \right. \right\rangle$$

dir. $b = ad$, $c = da$ olduğundan, **(T2)** uygulanır ise,

$$\left\langle a, d \left| \begin{array}{l} a^2 = a, a^2 d = ad, ada = a, ad = ad, ada = a, (ad)^2 = ad, ad^2 a = a, ad^2 = ad, \\ da^2 = da, da^2 d = d, (da)^2 = da, dad = ad, da = da, dad = d, d^2 a = da, d^2 = d \end{array} \right. \right\rangle$$

$ad = ad$ ve $da = da$ yansımali olduğundan gereksizdir. $a^2 = a$ olduğundan, $a^2 d = ad$ ve $da^2 = da$ ilişkileri de gereksizdir. Ayrıca, $d^2 = d$ olduğundan,

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

$ad^2 = ad$ ve $d^2a = da$ da gereksizdir. Bu altı tane gereksiz ilişki için, (T4) uygulanırsa,

$$\langle a, d \mid a^2 = a, ada = a, (ad)^2 = ad, ad^2a = a, da^2d = d, (da)^2 = da, dad = d, d^2 = d \rangle$$

elde edilir. $da^2d = dad = d$ olup, $da^2d = d$, $a^2 = a$ ve $dad = d$ nin bir sonucudur. Benzer şekilde, $ad^2a = a$ gereksiz olup, (T4) uygulanır ise,

$$\langle a, d \mid a^2 = a, ada = a, (ad)^2 = ad, d^2 = d, dad = d, (da)^2 = da \rangle$$

olur. $(ad)^2 = adad = ad$ olup, $(ad)^2 = ad$, $ada = a$ nın bir sonucudur. Benzer şekilde, $(da)^2 = da$ da gereksiz olup, (T4) uygulanırsa,

$$\langle a, d \mid a^2 = a, ada = a, dad = d, d^2 = d \rangle$$

elde edilir.

Teorem 2.6.2. A , B , R , Q sonlu olacak şekilde $\langle A|R \rangle$ ve $\langle B|Q \rangle$ takdimlerinin izomorfik yarıgrupları tanımlaması için gerek ve yeter koşul $\langle B|Q \rangle$ nun, $\langle A|R \rangle$ den Tietze dönüşümlerinin uygulamasının sonlu bir dizisinden elde edilmesidir. (Arthur, R., Araujo, I.M., Thomson, R., 1999).

İspat: İspatın ilk yarısı için, $\langle B|Q \rangle$ nun, $\langle A|R \rangle$ den Tietze dönüşümlerinin birinin tek uygulaması ile elde edilirse, $\langle A|R \rangle$ ve $\langle B|Q \rangle$ nun izomorfik yarıgrupları tanımladığını göstermeliyiz. Her bir dönüşümü sırasıyla kontrol edelim. r , R ile doğurulan A^+ üzerinde bir kongrüans olsun. r' , Q ile doğurulan B^+ üzerinde bir kongrüans olsun.

$$(T1) \quad \Psi : A^+ / r \rightarrow B^+ / r'$$

$$a / r \rightarrow a / r'$$

olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu iyi tanımlıdır. Çünkü eğer $w_1 / r = w_2 / r$ ise, w_2, w_1 den R deki ilişkilerin bir uygulamasıyla elde edilebilir. Bu nedenle w_2, w_1 den $Q = R'$ deki ilişkilerin uygulamasıyla elde edilebilir. Ψ örtendir. Çünkü $a / r' = (a / r)y$ ve $b / r' = (w / r)y$ dir. y 1-1 dir. Çünkü

$$(w_1 / r)y = (w_2 / r)y$$

$$\Rightarrow w_1 / r' = w_2 / r'$$

dür. Bu nedenle w_2, w_1 den R' den ilişkilerin uygulamasıyla elde edilebilir. R' den ilişkilerin uygulamasının bu dizisinde b nin olduğu her yeri w ile yer değiştirebiliriz. Bunun için , w_2, w_1 den R deki ilişkilerin bir uygulamasıyla elde edilebilir ve bu nedenle $w_1 / r = w_2 / r$ dur. y açıkça bir homomorfizmdir. Ve bu nedenle A^+ / r ve B^+ / r' izomorfiktir.

$$(T2) \quad y : B^+ / r' \rightarrow A^+ / r$$

$$a / r' \rightarrow a / r \quad (a \neq b)$$

$$b / r' \rightarrow w / r$$

olacak şekilde dönüşüm tanımlayalım. Eğer $w_1 / r = w_2 / r$ ise, w_2, w_1 den R den ilişkilerin bir uygulamasıyla elde edilebilir. Bu dizide b nin olduğu her yeri , w ile yer değiştirebiliriz. O halde,

$$(w_1)f / r' = (w_2)f / r'$$

olur. Bunun için $(w_1 / r)y = (w_2 / r)y$ ve y iyi tanımlıdır. y açıkça bir epimorfizmdir bu nedenle sadece geriye 1-1 liği kontrol etmek kalır. $w_1 / r' = w_2 / r' \Rightarrow w_2$, w_1 den $R' \subseteq R$ den ilişkilerin uygulamasıyla elde edilebilir. Bunun için $w_2 / r = w_1 / r$ dur.

(T3) Burada $A = B$ ve $r = r'$ dir. Bu nedenle sonuç çıkar.

(T4) Gene $A = B$ ve $r = r'$ dür.

İspatın diğer yarısı için $\langle A|R \rangle$ ve $\langle B|Q \rangle$ takdimleri izomorfik yarıgrupları tanımlasın. S diyelim.

$R = R(A)$ demek , R ilişkileri A doğurayları cinsinden yazılır ve $Q = Q(B)$ demek Q ilişkileri B doğurayları cinsinden yazılır.

$\langle A|R(A) \rangle$ takdimi ile başlayalım. **(T1)** ile $b = b(A)$, S için $\langle A|R \rangle$ takdimi cinsinden, $b \in S$ kelimesi için bir ifade olacak şekilde, $B = B(A)$ ilişkileri ile, gereksiz B doğuraylarını ekleyebiliriz. Bu,

$$\langle A, B|R(A), B = B(A) \rangle$$

ifadesini verir.

Şimdi, her $a \in A$ doğurayı, $\langle B|Q \rangle$ takdimi ile tanımlı izomorfik yarı grubun bir elemanı olarak algılanabilir, bu nedenle **(T3)** ile,

$$\langle AUB|R(A), B = B(A), A = A(B) \rangle$$

yi elde etmek için, $A = A(B)$ ilişkilerini ekleyebiliriz.

Şimdi, gereksiz A doğuraylarını çıkarmak için **(T2)** yi kullanabiliriz ve

$$\langle B|R(A(B)), B = B(A(B)) \rangle$$

elde edilir.

Bu, S için hala bir takdim olduğundan, $Q(B)$ ilişkileri bu yarıgrupta sağlanmalıdır. Bu nedenle, **(T3)** uygulayarak,

$$\langle B | R(A(B)), B = B(A(B)), Q(B) \rangle$$

elde edilir.

Bu takdimle tanımlı yarıgrup, varsayımla, $\langle B | Q(B) \rangle$ ile tanımlı S yarıgrubuna izomorfiktir ve bu nedenle $R(A(B))$ ve $B = B(A(B))$ ilişkileri, $Q(B)$ nin sonuçları olmalıdır.. Bunun için, $\langle B | Q(B) \rangle$ yi elde etmek için **(T4)** ile onları atabiliriz.

Teoremin gruplar için olan versiyonu için (Johnson, D.L., 1976; Önerme 4.5 ve 4.6) ya bakınız.

2.7. Adian Grafikleri

Bu kısımda, sadece sonlu grafikler yani sonlu köşelerinin ve kenarlarının kümesi ile ilgileniriz. Bir Γ grafiği için, $V(\Gamma)$, Γ nin köşelerinin kümesi ve $E(\Gamma)$, Γ nin kenarlarının kümesini gösterebiliriz. Γ grafiğinde, u yu v ye birleştiren bir kenar varsa u , v köşeleri komşudur deriz.

Basit bir grafik, devir ya da katlı kenar içermeyen bir grafiktir. K_n , ile, n köşeli ve $n(n-1)/2$ kenarlı tam ve basit grafiği gösterelim.

Tanım 2.7.1. Γ grafiğinde bir **yol**, v_i köşelerinin ve e_j kenarlarının

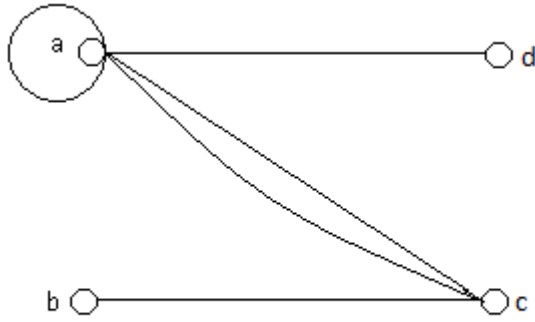
$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

değişen bir dizidir. Burada her kenar farklıdır.

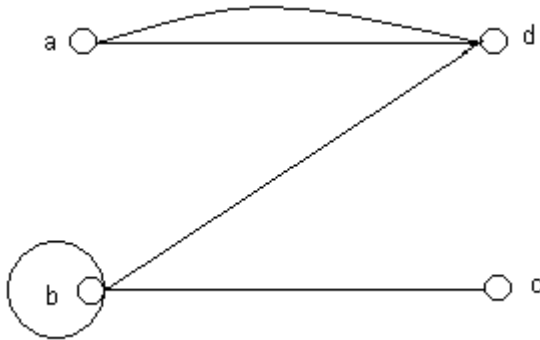
Tanım 2.7.2. Γ grafiğinde eğer $v_n = v_0$ ise, bir $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ yoluna bir **devir** deriz .

$\wp = \langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi olsun. $L(\wp)$ ile göstereceğimiz **sol Adian grafiğinin** köşelerinin kümesi X ve her $(r, s) \in R$ için r ve s kelimelerinin ilk harflerini birleştiren kenarlardan oluşur. $R(\wp)$ ile göstereceğimiz **sağ Adian grafiğinin** köşelerinin kümesi X ve her $(r, s) \in R$ için r ve s kelimelerinin son harflerini birleştiren kenarlardan oluşur. Şimdi Adian grafiklerini bir yarıgrup takdimi üzerinde inceleyelim.

$$\wp = \langle a, b, c, d \mid abd = dba, adb = cad, aba = ad^2, bab = c, cab = acb \rangle$$



Şekil 2.1. Sol Adian Grafiği $L(\wp)$ (Ayık,G., 2003)



Şekil 2.2. Sağ Adian Grafiği $R(\wp)$ (Ayık,G., 2003)

2.YARIGRUP TEORİSİNDEKİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER Belgin ÖZER

e_i ler a_{i-1} ile $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ arasındaki yolu göstermek üzere bu yönsüz grafikte bir yürüyüşün boyu $m \geq 0$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ köşelerinin ve $e_1, e_2, \dots, e_m$ kenarlarının bir dizisi tarafından belirlenir. Herhangi iki köşe arasında bir yürüyüş yapılabiliriyorsa o Adian grafiğine **bağlantılı Adian grafiği** denir.

Yarıgrup grafikleri ve Adian grafikleri için (Higgins P.M., 1992) ve teorik grafik terminolojisi için (Wilson J.J., Watkins, 1990) na bakınız.

3.GP TAKDİMLERİ VE ADİAN GRAFİKLERİ

Yarıgrup takdimleri ve Adian grafikleri (Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., 2008) de çalışılmıştır. Ayrıca, grup ya da monoid tanımlayan yarıgrup takdimleri (Ayık H., Campbell C.M., O'Connor J.J., Ruskuc N., 2000; 2000a; 2000b; 2000c; Campbell C.M., Mitchell J.D., Ruskuc N., 2002) de, incelenmiştir.

Eğer bir yarıgrup takdimi $P = \langle A|R \rangle$ bir grup tanımlıyorsa o zaman her $a \in A$ için $w_a \in A^+$ olmak üzere $w_a = a$ formunda R de bir ilişki olduğu (Ayık H., Campbell C.M., O'Connor J.J., Ruskuc N., 2000b; Teorem 2.3) de ele alınmıştır. Bundan hareket ederek, aşağıdaki sonuçları ispatlarız.

$\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, ve S , $\langle A|R \rangle$ ile tanımlı bir yarıgrup olsun. Eğer S bir monoid ise, her bir $a \in A$ için, $w_a \in A^+$ olacak şekilde $w_a = a$ formunda R de bir ilişki vardır. Aynı zamanda, Eğer S regüler bir yarıgrup ise, her bir $a \in A$ için, $w_a \in A^+$ olacak şekilde $w_a = a$ formunda R de bir ilişki vardır.

Bu bölümde

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

formundaki yarıgrup takdimlerinin Adian grafikleri ile ilgili ulaşılan sonuçları vereceğiz.

Bu çeşit bir takdime **doğuray üreten takdim (generator producing)** ya da kısaca **GP takdimi** deriz.

$P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi olsun. $a \in A$ için, $(w = a) \in R$ olacak şekilde, bir $w \in (A/a)^+$ kelimesi varsa, a ya P nin **gereksiz bir doğurayı** denir. Bu bölümde GP takdimlerinin gereksiz doğurayları olmadığını ve her bir $w = a$ ilişkisi için, $|w| \geq 2$ ve w nin a yı içerdiğini kabul edeceğiz.

Lemma 3.1.Eğer bir GP takdimi

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

grup tanımlıyorsa o zaman her bir Adian grafiği bir ve yalnız bir devir içerir.

İspat: İspatı yalnız $L(P)$ için yapacağız. Devirsiz bir bağlantılı grafiğe bir **ağaç** denir. Ayrıca n köşeli bir ağaçta $n-1$ tane kenar vardır. Dahası, bir bağlantılı grafik, grafiğin tüm köşelerini içeren ‘**spanning tree**’ denilen bir alt ağaca sahiptir. Şimdi $L(P)$ bağlantılı ve n tane köşe içerdiğinden, $L(P)$ için bir spanning treesi $n-1$ kenar içerir. $L(P)$, n tane kenar içerdiğinden bir devir içerir. Eğer $L(P)$ de iki ayrık C_1 ve C_2 devirleri varsa o zaman C_1 , C_2 ye ait olmayan bir e kenarı içerir. $L(P) - \{e\}$ yine bağlantılı ve $n-1$ kenar içerir. Yukarıdaki sebeplerden $L(P) - \{e\}$, $L(P)$ için bir spanning ağaç olmalı fakat bu durumda C_2 devrini içeriyor. Bu çelişki bize $L(P)$ nin yalnızca bir devir içereceğini gösterir ve böylece istenilen ispatlanmış olur. <

P , sol ve sağ Adian grafikleri $L(P)$ ve $R(P)$ bağlantılı olan bir GP takdimi ise, P ye **bağlantılı bir GP takdimi** denir. n köşeli ve n kenarlı bağlantılı bir grafik sadece bir devir içerir. $L(P)$ ($R(P)$) nin devirinin köşeleri olan bütün doğuraylar kümesini, $A_L(A_R)$ ile gösterelim.

Lemma 3.2.

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

gereksiz doğuraylar olmaksızın G grubunu tanımlayan bir yarıgrup takdimi ve A_R de $R(P)$ devirindeki tüm köşelerinin kümesi olsun.

(i) Eğer $A_R = A$ ise o zaman $v_1 v_2 \mathbf{L} v_n$ kelimesi her $1 \leq i \leq n$ için a_i yi içerir.

(ii) Eğer $A_R = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \mathbf{K}, a_{i_k}\} \neq A$ ise o zaman $v_{i_1} v_{i_2} \mathbf{L} v_{i_k}$ kelimesi A_R deki her a_i doğurayını ve $A \setminus A_R$ den en az bir doğuray içerir. Dahası her $a_i \in A \setminus A_R$ için ya $v_{i_1} v_{i_2} \mathbf{L} v_{i_k}$ kelimesi, a_i doğurayını içerir veya $v_{i_1} v_{i_2} \mathbf{L} v_{i_k}$ kelimesi, a_j yi içerecek şekilde en az bir $a_j \in A \setminus A_R$ vardır ve her $1 \leq t \leq m-1$ için $v_{j_t}, a_{j_{t+1}}$ yi içerecek şekilde bir

$$a_j \equiv a_{j_1}, a_{j_2}, \mathbf{K}, a_{j_m} \equiv a_i$$

dizisi vardır. Ayrıca P de $a_i^m = a_i$ formunda bir ilişki yoktur.

İspat: (Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., 2008) e bakınız.

P bağlantılı bir GP takdimi ve $A_R \cap A_L \neq \emptyset$ ise, P nin bir monoid tanımladığı (Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., 2008) de gösterilmiştir. Burada ayrıca, P nin sol Adian grafiği bir devir ise, P nin bir grup olduğu ispatlanmıştır. Hiçbir Adian grafikleri bir devir değilse, yukarıdaki formdaki bir takdimin niçin bir grup tanımladığını hangi test ile söyleyebileceğimiz bir teoremin ifadesi ve ispatı (Ayık G., 2003) de verilmiştir.

Biz P takdiminin Adian grafiği bir devir değil ise, P nin grup tanımlayıp tanımlamadığını araştırdık.

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

bir GP takdimi olsun. Eğer P bir grup tanımlarsa, sol ve sağ Adian grafikleri bağlantılı olduğu (Ayık H., Kuyucu F., Vatansever B., 2002) de ispatlanmıştır.

Biz eğer P bir monoid tanımlarsa, sol ve sağ Adian grafiklerinin bağlantılı olduğunu gösteririz. Aynı zamanda, P bağlantılı bir GP takdimi ve $A_R \cap A_L \neq \emptyset$, örneğin, $a_1 \in A_L \cap A_R$ ise, P ile tanımlı yarıgrubu tanımlayacak şekilde,

$$\mathbb{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_1 a_1 = a_1, a_1 u_2 a_1 = a_2, \dots, a_1 u_n a_1 = a_n \rangle$$

formunda yeni bir GP takdimi bulabildiğimizi ispatlarız. Ayrıca, bu takdimin bir monoid tanımladığını gösteririz.

3.1. GP Takdimi ve Adian Grafikleri Üzerine Bulunan Sonuçlar

Teorem 3.1.1. $P = \langle A \mid R \rangle$ gereksiz ilişki içermeyen sonlu bir yarıgrup takdimi ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. Eğer S monoid ya da regüler bir yarıgrup ise, $w_a \in A^+$ olacak şekilde $w_a = a$ formunda R de bir ilişki vardır.

İspat: Eğer S bir monoid ise, e , S nin birimi olacak şekilde bir $e \in A^+$ kelimesi vardır. Dolayısıyla, her bir $a \in A$ için, $ae = a$ ilişkisi S de sağlanır ve $1 \leq i \leq k-1$, $u_i, v_i \in A^*$ ve $(r_i, s_i) \in R \cup R^{-1}$ için, $a_i \equiv u_i r_i v_i$ ve $a_{i+1} \equiv u_i s_i v_i$ olmak üzere

$$ae \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow a_k \equiv a$$

A^+ da kelimelerin sonlu bir dizisi vardır. $a_k \equiv a$ olduğundan, $u_{k-1} \equiv v_{k-1} \equiv e$ ve $s_{k-1} \equiv a$ ve dolayısıyla, $(r_{k-1}, a) \in R \cup R^{-1}$ olur. Takdimlerimizde gereksiz ilişki olmayacağından, $r_{k-1} \not\equiv a$ olmalıdır.

S regüler bir yarıgrup olsun. $a \in A$ için, S regüler olduğundan, $aza = a$ ilişkisi S de sağlanacak şekilde bir $z \in A^+$ kelimesi vardır. Bunun için, $1 \leq i \leq k-1$, $u_i, v_i \in A^*$ ve $(r_i, s_i) \in R \cup R^{-1}$ için, $a_i \equiv u_i r_i v_i$ ve $a_{i+1} \equiv u_i s_i v_i$ olacak şekilde

$$aza \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow a_k \equiv a$$

A^+ da kelimelerin sonlu bir dizisi vardır. $a_k \equiv a$ olduğundan, $u_{k-1} \equiv v_{k-1} \equiv e$ ve $s_{k-1} \equiv a$ ve dolayısıyla, $(r_{k-1}, a) \in R \cup R^{-1}$ olur. Takdimlerimizde gereksiz ilişki olmayacağından, $r_{k-1} \not\equiv a$ olmalıdır. <

Teorem 3.1.2.

$$P = \langle A | R \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle$$

gereksiz ilişki içermeyen bir GP takdimi olsun. P bir monoid tanımlıyorsa, sol ve sağ Adian grafikleri bağlantılıdır.

İspat: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olsun. M , P ile tanımlı bir monoid olsun. M nin birim elemanını temsil eden $e \in A^+$ kelimesi vardır. Kabul edelim ki, $a \in A$ ve $u \in A^*$ olmak üzere

$$e \equiv au$$

olsun. Herhangi bir $b \in A - \{a\}$ için, e bir sol birim olduğundan,

$$b = eb \equiv aub$$

ilişkisi M de sağlanır. Buradan, $1 \leq i \leq k-1$, $u_i, v_i \in A^*$ ve $(r_i, s_i) \in R \cup R^{-1}$ için, $a_i \equiv u_i r_i v_i$ ve $a_{i+1} \equiv u_i s_i v_i$ olacak şekilde

$$eb \equiv aub \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow a_k \equiv b$$

A^+ da kelimelerin sonlu bir dizisi vardır. Dolayısıyla, a ve b arasında sol Adian grafiği $L(P)$ de bir kenar vardır. a köşesi, $A - \{a\}$ da herhangi bir köşeye bağlı olduğundan, sol Adian grafiği $L(P)$ bağlantılıdır.

Kabul edelim ki, $c \in A$ ve $v \in A^*$ olmak üzere

$$e \equiv vc$$

olsun. Herhangi $b \in A - \{c\}$ için, e bir sağ birim olduğundan,

$$b = be \equiv bvc$$

ilişkisi M de sağlanır. Buradan, $1 \leq i \leq k-1$, $u_i, v_i \in A^*$ ve $(r_i, s_i) \in R \cup R^{-1}$ için, $a_i \equiv u_i r_i v_i$ ve $a_{i+1} \equiv u_i s_i v_i$ olacak şekilde

$$be \equiv bvc \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{k-1} \rightarrow a_k \equiv b$$

A^+ da kelimelerin sonlu bir dizisi vardır. Dolayısıyla, b ve c , arasında sağ Adian grafiği $R(P)$ de bir kenar vardır. c köşesi, $A - \{c\}$ de herhangi bir köşeye bağlı olduğundan, sağ Adian grafiği $R(P)$ bağlantılıdır.

Teorem 3.1.3.

$$P = \langle A | R \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle$$

gereksiz ilişki içermeyen bir GP takdimi ve S , P ile tanımlı bir yarıgrup olsun. Eğer S sol (sağ) birime sahipse, karşılık gelen sol (sağ) Adian grafiği bağlantılıdır. <

P bağlantılı bir GP takdimi olsun. $L(P)$ bir devir olmasın. n köşeli ve n kenarlı bağlantılı bir grafik, yalnız bir devir içerdiğinden, a_i ler ikişer ayrık ve $1 \leq k \leq n$ olacak şekilde, P nin

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_2 u_1 = a_1, a_3 u_2 = a_2, \dots, a_k u_{k-1} = a_{k-1}, a_1 u_k = a_k, w_i = a_i, k < i \leq n \rangle$$

formunda olduğunu kabul edebiliriz. Burada $A_L = \{a_1, \dots, a_k\}$, $L(P)$ nin devirinin bütün köşelerinin kümesidir.

Aşağıdaki önerme (Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., 2008) de ispatlanmıştır.

Önerme 3.1.4. P sol (sağ) Adian grafiği $L(P)$ ($R(P)$) bağlantılı olan bir GP takdimi olsun. Eğer $a \in A_L$ ($a \in A_R$) ve $b \in A$ ise $au = b$ ($ua = b$) ilişkisi takdimli yarıgrupta sağlanacak şekilde bir $u \in A^+$ kelimesi vardır. <

Teorem 3.1.5. Eğer $P = \langle A \mid R \rangle$ bağlantılı bir GP takdimi ise, P ile aynı yarıgrubu tanımlayan,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

bir GP takdimi, $\bar{P}$ vardır.

İspat: $P = \langle A \mid R \rangle$ bağlantılı bir GP takdimi ve $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olsun. Genelliği bozmaksızın, $L(P)$ nin devirinin bütün köşelerinin kümesi $A_L = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ise, P yi aşağıdaki şekilde

$$P = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_2 u_1 = a_1, a_3 u_2 = a_2, \dots, a_k u_{k-1} = a_{k-1}, a_1 u_k = a_k, w_i = a_i, k < i \leq n \rangle$$

alabiliriz. Bu nedenle, $a_k u_{k-1} = a_{k-1}$ ilişkisinde $a_1 u_k = a_k$ ilişkisi yazılarak $a_1 u_k u_{k-1} = a_{k-1}$ ilişkisi elde edilir.

Benzer şekilde, $a_{k-1} u_{k-2} = a_{k-2}$ ilişkisinde $a_{k-1} = a_1 u_k u_{k-1}$ ilişkisi yazarak

$$a_1 u_k u_{k-1} u_{k-2} = a_{k-2}$$

ilişkisi elde edilir. Böyle devam edersek, $k < i \leq n$ olmak üzere

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_k u_{k-1} \dots u_2 u_1 = a_1, \dots, a_1 u_k u_{k-1} = a_{k-1}, a_1 u_k = a_k, w_i = a_i \rangle$$

takdimini elde ederiz. Şimdi $w_i = a_i$ ($k < i \leq n$) ilişkilerini gözönüne alalım. $k < i \leq n$ için,

$$w_i \equiv a_j \overline{w_i}$$

olacak şekilde, $\overline{w_i} \in A^+$ ve $a_j \in A$ vardır. $L(P)$ bağlantılı olduğundan, Önerme 3.1.4 den,

$$a_j = a_1 \overline{u_i}$$

olacak şekilde $\overline{u_i}$ kelimesi vardır. Bunun için, $k < i \leq n$ olmak üzere

$$a_i = w_i \equiv a_j \overline{w_i} = (a_1 \overline{u_i}) \overline{w_i}$$

elde ederiz. $k < i \leq n$ için, $w_i = a_i$ ilişkisinin yerine $a_i = a_1 \overline{u_i} \overline{w_i}$ ilişkisini yazarız. Böylece $k < i \leq n$ olmak üzere,

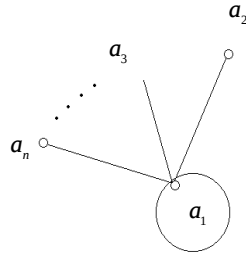
$$\overline{P}_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_k u_{k-1} \dots u_2 u_1 = a_1, \dots, a_1 u_k u_{k-1} = a_{k-1}, a_1 u_k = a_k, a_i = a_1 \overline{u_i} \overline{w_i} \rangle$$

takdimi P ile tanımlı yarıgrubu tanımlar. Sonuç olarak, $1 \leq i \leq n$ için, $v_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^+$ olacak şekilde, P takdimi ile aynı yarıgrubu tanımlayan

$$\overline{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

takdimi elde edilerek istenilen ispatlanmış olur. <

Dikkat edilecek olursa $\overline{P}$ takdiminin sol Adian grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1. Sol Adian Grafiği $L(\overline{P})$

Bir önceki Teorem ve Teorem 3.1.3 ten, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.6. P bir GP takdimi ve S , P ile tanımlı bir yarıgrup olsun. Eğer S nin sol birimi varsa, P yi,

$$\overline{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

formunda yazabiliriz. <

A_L ve A_R sırasıyla, $L(P)$ ve $R(P)$ nin devirinin bütün köşelerinin kümesi olsun. Aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1.7. P bağlantılı bir GP takdimi ve S , P ile tanımlı bir yarıgrup olsun. Eğer $A_L \cap A_R \neq \emptyset$, örneğin, $a_1 \in A_L \cap A_R$ ise, S yarıgrubu,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_1 a_1 = a_1, a_1 u_2 a_1 = a_2, \dots, a_1 u_n a_1 = a_n \rangle$$

takdimi ile tanımlıdır.

İspat: P bağlantılı bir GP takdimi ve $a_1 \in A_L \cap A_R$ olsun. Teorem 3.1.5 ile, P yi

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

formunda yazabiliriz.

Her bir $1 \leq i \leq n$ için, $a_j \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ve $\bar{v}_i \in A^*$ olacak şekilde, $v_i \equiv \bar{v}_i a_j$ olsun. P bağlantılı bir GP takdimi olduğundan Önerme 3.1.4 den, $a_j = \bar{u}_j a_1$ ilişkisi sağlanacak şekilde, $\bar{u}_j \in A^+$ kelimesi vardır. Bunun dolayısı, $1 \leq i \leq n$ için,

$$a_i = a_1 v_i \equiv a_1 \bar{v}_i a_j = a_1 \bar{v}_i (\bar{u}_j a_1)$$

elde ederiz. Her bir $1 \leq i \leq n$ için, $u_i \equiv \bar{v}_i \bar{u}_j$ alalım. Tietze Dönüşümlerinden, her bir $a_1 v_i = a_i$ ilişkisini, $a_1 u_i a_1 = a_i$ ($1 \leq i \leq n$) ilişkisi ile yer değiştirebiliriz. <

Teorem 3.1.8. P bağlantılı bir GP takdimi olsun. Eğer, $A_L \cap A_R \neq \emptyset$ ise, P bir monoid tanımlar.

İspat: Genelliği bozmaksızın, $a_1 \in A_L \cap A_R$ olsun. Teorem 3.1.7 den dolayı P takdimini,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_1 a_1 = a_1, a_1 u_2 a_1 = a_2, \dots, a_1 u_n a_1 = a_n \rangle$$

şeklinde yazabiliriz. S , P ile tanımlı bir yarıgrup olsun. S nin birimi temsil eden $e \in A^+$ kelimesi vardır. P takdiminden, $a_1 u_1 a_1 = a_1$ ilişkisine sahibiz. $2 \leq i \leq n$ için,

$$a_1 u_1 a_i = a_1 u_1 (a_1 u_i a_1) = (a_1 u_1 a_1) u_i a_1 = a_1 u_i a_1 = a_i$$

ilişkisi elde edilir. $e \equiv a_1 u_1$ S nin bir sol birimidir. Benzer yolla, $f = u_1 a_1$ S nin sağ birimidir. Bu nedenle, P bir monoid tanımlar. $<$

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ

4.1. Grup Tanımlayan Yarıgrup Takdimleri

Yarıgrup takdimleri üzerine yapılan çalışmalara örnek olarak (Ruskuc N., 1995a; Neumann B.H., 1967; Jura A., 1978; Robertson E.F., Ünlü Y., 1993; Walker T.G., 1992; Howie J.M., Ruskuc N., 1994; Ruskuc N., Araujo I.M., 2001; Ayık H., Ruskuc N., 1999; Campbell C.M., Robertson E.F., Ruskuc N., Thomas R.M., 1994; 1995; 1996; Ayık H., Campbell C.M., O'Connor J.J., Ruskuc N., 2000b; Campbell C.M., Mitchell J.D., Ruskuc N., 2002b; Adjan S.I., 1966; Conway J.H., 1965) de yapılan çalışmaları verebiliriz. Yarıgrup takdimleri ile ilgili çalışmalardan bir kısmı, bir yarıgrup takdiminin grup tanımlayıp tanımlamadığını araştırmak olmuştur. 1966 da, Conway aşağıdaki problemi ileri sürmüştür.

$$ab = c, bc = d, cd = e, de = a, ea = b$$

ilişkileriyle verilen a, b, c, d, e doğuraylı bir grubun 11. dereceden devirli bir grup olduğunu gösteriniz. M.J.Wicks ve C.M.Campbell tarafından çözüm ileri sürülmüştür. Yukarıdaki beş doğuray için olan durum n doğuray için genellenerek Fibonacci gruplar ve yarıgruplar olarak adlandırılan daha detaylı bir çalışmaya yol açmıştır.

Grup tanımlayan çeşitli yarıgrup takdimleri (Ayık H., Campbell C.M., O'Connor J.J., Ruskuc N., 2000b; Ayık H., 1998; Campbell C.M., Mitchell J.D., Ruskuc N., 2002; Mitchell J.D., 2002; Ahmadidelir K., Campbell C.M., Doostie H., 2009; Campbell C.M., Robertson E.F., Ruskuc N., Thomas R.M., 1998) de ele alınmıştır. Bir yarıgrup takdiminin grup tanımladığını göstermek için, yarıgrubun bir sol birim (sağ birim) ve takdimdeki her doğurayın bir sol terse (sağ ters) sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bir yarıgrup takdiminin grup tanımladığını göstermek için bir başka yol ise yarıgrubun tek bir minimal sağ ideal ve minimal sol ideale sahip olduğunu göstermektir.

Bir yarıgrup takdiminin grup tanımladığını göstermek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.1.1. $P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $e \in A^+$ bir kelime olsun.

(i) Her $a \in A$ için, $ea = a$ (sol birim) ve $u_a a = e$ (sol ters) olacak şekilde $u_a \in A^+$ varsa, P, e birimli bir grup tanımlar.

(ii) Her $a \in A$ için, $ae = a$ (sağ birim) ve $au_a = e$ (sağ ters) olacak şekilde $u_a \in A^+$ varsa, P, e birimli bir grup tanımlar.

İspat: i) Her $a \in A$ için, $ea = a$ (sol birim) ve $u_a a = e$ (sol ters) olacak şekilde $u_a \in A^+$ kelimesi olsun. e nin aynı zamanda sağ birim ve u_a kelimesinin a nın sağ tersi olduğunu, yani $au_a = e$ ve $ae = a$ olduğunu göstermek yeterlidir. (i) den her bir $a \in A$ için, $u_a \equiv a'u_a'$ ve $a' \in A, u_a' \in A^*$ olmak üzere

$$(au_a)^2 = a(u_a a)u_a = ae u_a = a(ea')u_a' = aa'u_a' \equiv au_a$$

olur. Burada $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere $u_a \equiv a_1 \mathbf{L} a_n$ olsun. O halde kabulümüzden her $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) için

$$u_1 a_1 = \mathbf{L} = u_n a_n = e$$

olacak şekilde $u_i \in A^+$ kelimeleri vardır. O halde

$$\begin{aligned} u_n \mathbf{L} u_1(u_a a)a_1 \mathbf{L} a_n &= u_n \mathbf{L} u_1(ea_1)a_2 \mathbf{L} a_n = u_n \mathbf{L} u_2(u_1 a_1)a_2 \mathbf{L} a_n \\ &= u_n \mathbf{L} u_2(ea_2) \mathbf{L} a_n = \mathbf{L} = u_n a_n = e \end{aligned}$$

dir. (i) den,

$$\begin{aligned} au_a &= eau_a = (u_n \mathbf{L} u_1 u_a a a_1 \mathbf{L} a_n) au_a \equiv u_n \mathbf{L} u_1 u_a (au_a)^2 \\ &= u_n \mathbf{L} u_1 u_a au_a \equiv u_n \mathbf{L} u_1 u_a a a_1 \mathbf{L} a_n = e \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$ae = a(u_a a) = (au_a)a = ea = a$$

olup istenilen ispatlanmış olur.

ii) Benzer yolla ispatlanır. <

Monoid takdimleri için de benzer sonuç sağlanır. Detay için (Hungerford, T.W., 1974) e bakınız.

Teorem 4.1.2.

$$P_1 = \langle a, b \mid aba = b, ba^{n-1}b = a \rangle$$

yarıgrup takdimi $4n$ dereceli genelleştirilmiş kuaternion grubu Q_n i tanımlar.

İspat: Takdimdeki birinci ilişkiden,

$$a^{n-1}ba^{n-1} \equiv a^{n-2}(aba)a^{n-2} = a^{n-2}ba^{n-2} = \mathbf{L} = aba = b \quad (4.1)$$

elde edilir. İkinci ilişkiden ve (4.1) den,

$$a^n = (ba^{n-1}b)a^{n-1} \equiv b(a^{n-1}ba^{n-1}) = b^2 \quad (4.2)$$

bulunur. (4.2) ve takdimdeki ilişkilerden,

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

$$a^{2n}b \equiv aa^n a^{n-1}b = ab^2 a^{n-1}b \equiv ab(ba^{n-1}b) = aba = b$$

ve aynı zamanda

$$a^{2n}a = b^4a \equiv b(b^2)ba = ba^nba \equiv ba^{n-1}(aba) = ba^{n-1}b = a$$

olur. Bunun için a^{2n} bir sol birimdir. (4.2) den b^3 , b nin sol tersi ve a^{2n-1} , a nın sol tersi olduğundan Lemma 4.1.1 den, P_1 , birimi a^{2n} olan bir grup tanımlar. a^{2n} , grup için birim elemanı temsil ettiğinden ve $a^n = b^2$ ilişkisi grupta sağlandığından, bu grup aşağıdaki grup takdimi ile verilebilir.

$$\begin{aligned} & \langle a, b \mid aba = b, ba^{n-1}b = a, a^n = b^2, a^{2n} = 1 \rangle \\ & \equiv \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^{-1}, ba^{n-1}b = a, a^n = b^2, a^{2n} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$ba^{n-1}b = ba^n(b^{-1}ab)b = bb^2b^{-1}ab^2 = b^2ab^2 = a^{2n+1} = a$$

ilişkisi Q_n de sağlandığı için, bu grup, genelleştirilmiş kuaternion Q_n grubudur. <

Şimdi (Ayık H., Kuyucu F., Vatansever B., 2002) de ispatı yapılan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.3. $A = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n\}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $u_i \in A^+$ olmak üzere

$$P = \langle A \mid a_2u_1a_2 = a_1, a_3u_2a_3 = a_2, \dots, a_nu_{n-1}a_n = a_{n-1}, a_1u_na_1 = a_n \rangle$$

yarıgrup takdimi bir grup tanımlar.

İspat: Lemma 4.1.1 i kullanarak P nin bir grup tanımladığı gösterilir. İlk olarak, her $(a_i, a_j) \in A \times A$ çifti için,

$$a_i = a_j u_{i,j} \text{ ve } a_i = v_{i,j} a_j \quad (4.3)$$

olacak şekilde $u_{i,j}, v_{i,j} \in A^*$ vardır. Çünkü modülo n ile,

$$a_i = a_{i+1} u_i a_{i+1} = (a_{i+2} u_{i+1} a_{i+2}) u_i a_{i+1} = \mathbf{L} = (a_j u_{j-1} a_j) u_{j-2} a_{j-1} \mathbf{L} a_{i+3} u_{i+1} a_{i+2} u_i a_{i+1}$$

Burada,

$$u_{i,j} \equiv u_{j-1} a_j u_{j-2} a_{j-1} \mathbf{L} a_{i+3} u_{i+1} a_{i+2} u_i a_{i+1}$$

olarak alalım. Benzer yolla,

$$v_{i,j} \equiv a_{i+1} u_i a_{i+2} u_{i+1} a_{i+3} \mathbf{L} a_{j-1} u_{j-2} a_j u_{j-1}$$

alalım. $e = a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n$ olsun. Her $a_i \in A$ için, (4.3) de $j=1$ alırsak,

$$\begin{aligned} e a_i &= (a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n) (a_1 u_{i,1}) \equiv a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} (a_1 u_n a_1) u_{i,1} \\ &= a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} (a_n u_{n-1} a_n) u_{i,1} = \mathbf{L} = a_2 u_1 a_2 u_{i,1} = a_1 u_{i,1} = a_i \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e bir sol birimdir.

$u_n \equiv u_n' a_k (u_n' \in A^*)$ ve $v_i \equiv a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n' v_{k,i}$ olsun. Her $a_i \in A$ için, (4.3) de $i=k$ ve $j=i$ alınır,

$$v_i a_i \equiv (a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n' v_{k,i}) a_i \equiv a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n' (v_{k,i} a_i)$$

$$= a_2 u_1 a_3 u_2 \mathbf{L} a_n u_{n-1} a_1 u_n' a_k \equiv e$$

elde edilip v_i , a_i nin sol tersidir. O halde P bir grup tanımlar. <

Teorem 4.1.4.

$$P = \left\langle A \mid a_2 u_1 a_2 = a_1, a_3 u_2 a_3 = a_2, \dots, a_n u_{n-1} a_n = a_{n-1}, a_1 u_n a_1 = a_n \right\rangle (u_i \in A^+)$$

takdimi bir grup tanımlar.

İspat: (Ayık, H., Kuyucu, F., Vatansever, B., 2002; Teorem 2.6.) ya bakınız. <

Teorem 4.1.5. Her $n \geq 2$ için,

$$p_2 = \left\langle a, b \mid a^n = b^n, a^2 b a^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]} = a \right\rangle$$

yarıgrup takdimi bir grup tanımlar.

İspat: $n \geq 2$ ve $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olsun. $S = Sg(p_2)$ olsun. $S^1 a^{n-1}$ ve $a^{n-1} S^1$ in sırasıyla S

nin tek minimal sol ve sağ ideali olduğunu gösterelim. Bunu w nin uzunluğu üzerinden tümevarımla ispatlayalım. Yani;

$$\forall w \in \{a, b\}^+, \exists w_1 \in \{a, b\}^+; w_1 w = a^{n-1}$$

olduğunu görelim. Eğer $|w| = 1$ ise, $w \equiv a$ ya da $w \equiv b$ dir. Eğer $w \equiv a$ ise,

$w_1 \equiv b a^m b^m a^{n-1}$ alınırsa,

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

$$w_1 w = ba^m b^m a^{n-1} . a = ba^m b^m a^n = a^n ba^m b^m = a^{n-2} a^2 bab^m b^m = a^{n-2} . a = a^{n-1}$$

olur. Eğer $w \equiv b$ ise, $n \geq 2$ için, $w_1 \equiv a^n ba^m b^{m-1}$ olursa,

$$w_1 w = a^n ba^m b^{m-1} . b = a^n ba^m b^m = a^{n-2} . a^2 ba^m b^m = a^{n-2} . a = a^{n-1}$$

elde edilir. Şimdi iddia $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, uzunluğu $k+1$ den küçük bütün kelimeler için doğru olsun. $|w| = k+1$ olsun. Eğer $w \equiv w' a$ ise, tümevarım hipotezinden,

$$\exists w'_1 \in \{a, b\}^+ ; w'_1 w' = a^{n-1}$$

olur. $w_1 \equiv ba^m b^m w'_1$ alınarak,

$$w_1 w = ba^m b^m w'_1 w' a = ba^m b^m a^{n-1} a = a^n ba^m b^m = a^{n-1}$$

elde edilir. Eğer $w \equiv w'' b$ ise,

$$\exists w''_1 \in \{a, b\}^+ ; w''_1 w'' = a^{n-1}$$

olur. $w_1 \equiv ba^m b^{m-1} a w''_1$ alınırsa,

$$w_1 w = ba^m b^{m-1} a w''_1 . w'' b = ba^m b^{m-1} a . a^{n-1} . b = a^n ba^m b^m = a^{n-1}$$

elde edilir. Bunun için, $S^1 a^{n-1} = S a^{n-1} \cup \{a^{n-1}\}$, S nin tek minimal sol idealidir.

$a^{n-1} S^1$ in S nin tek minimal sağ ideali olduğunu göstermek için,

$$\forall w \in \{a, b\}^+, \exists w_1 \in \{a, b\}^+; a^{n-1} = ww_1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İspat yukarıdakine benzer yolla yapılır.

S nin (iki yanlı) minimal idealini I ile gösterirsek, $a^{n-1}S^1 = I = S^1a^{n-1}$ dir. Sonuç olarak, (Campbell, C.M., Mitchell, J.D., Ruskuc, N., 2002b; Teorem 4) den, $a^{n-1}S^1 \cap S^1a^{n-1} = I$ bir gruptur ve $I \cong Gp(p_2)$ dir. <

Teorem 4.1.6. Her $n \geq 2$ için ,

$$p_3 = \left\langle a, b \left| a^n = b^n, a^2ba^{\left[\frac{n}{2}\right]}b^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = ab \right. \right\rangle$$

yarıgrup takdimi bir grup tanımlar ve $|Sg(p_3)| = |Gp(p_3)| + n^2$ dir.

İspat: (Bkz. Ahmadidelir, K., Campbell, C.M., Doostie, H., 2009; Teorem C). <

4.2. Grup Tanımlayan Monoid Takdimleri

Monoid takdiminin grup tanımladığını göstermek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.2.1. $M = \langle A | R \rangle$ bir monoid takdimi olsun. Her $a \in A$ için, $u_a a = 1$ (ya da $au_a = 1$) olacak şekilde $u_a \in A^+$ kelimesi varsa, M bir grup tanımlar.

İspat: u_a kelimesi a nın sol tersi olsun. u_a kelimesinin aynı zamanda a nın sağ tersi olduğunu yani $au_a = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dikkat edilecek olursa

$$(au_a)^2 = a(u_a a)u_a = au_a$$

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

dir. Burada $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere $u_a \equiv a_1 \mathbf{L} a_n$ olsun. O halde kabulümüzden her $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) için

$$u_1 a_1 = \mathbf{L} = u_n a_n = 1$$

olacak şekilde $u_i \in A^+$ kelimeleri vardır. O halde

$$u_n \mathbf{L} u_1(u_a a) a_1 \mathbf{L} a_n = u_n \mathbf{L} u_1 a_1 a_2 \mathbf{L} a_n = u_n \mathbf{L} u_2(u_1 a_1) a_2 \mathbf{L} a_n = \mathbf{L} = 1$$

dir.

$$\begin{aligned} a u_a &= 1 a u_a = (u_n \mathbf{L} u_1 u_a a a_1 \mathbf{L} a_n) a u_a \equiv u_n \mathbf{L} u_1 u_a (a u_a)^2 \\ &= u_n \mathbf{L} u_1 u_a a u_a \equiv u_n \mathbf{L} u_1 u_a a a_1 \mathbf{L} a_n = 1 \end{aligned}$$

olup u_a kelimesinin aynı zamanda a nın sağ tersi olduğu gösterilmiş olur. <

Grup tanımlayan monoid takdimleri, (Ahmadidelir K., Campbell C.M., Doostie H., 2009; Campbell, C.M., Robertson E.F., Ruskuc, N., Thomas R.M., 1998; Johnson .D.L., 1997 ve Smith G.C.) de ele alınmıştır. Johnson & Smith (1997) de, özellikle iki doğuraylı ve tek ilişkili monoid takdimleri üzerinde çalışmışlar ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 4.2.2. a, b, c, d pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M = \langle x, y \mid x^a y^b x^c y^d = 1 \rangle$$

monoid takdiminin bir grup tanımlaması için gerek ve yeter koşul $d \leq b$, $a \leq c$ ve bu eşitsizliklerin en az birinin kesin eşitsizlik olmasıdır.

İspat: (Smith, G.C.) e bakınız. <

Teorem 4.2.3.

a, b, c, d pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M = \langle x, y \mid x^a y^b x^c y^d x^e y^f = 1 \rangle$$

monoid takdiminin bir grup tanımlaması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

- a) $b = d$, $c = e$, $a \leq c$, $f \leq d$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.
- b) $a \leq e$, $f \leq b$, ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.
- c) $a = e$, $b = f$, $c \leq a$, $b \leq d$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.
- d) $a = e$, $b = f$, $a \leq c$, $d \leq b$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.

İspat: (Smith, G.C.) ye bakınız. <

Teorem 4.2.4. $n \geq 2$ pozitif tamsayı olmak üzere

$$p_1 = \left\langle a, b \mid a^n = b^n, aba^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]} = 1 \right\rangle$$

monoid takdimi bir grup tanımlar.

İspat: (Bkz. Ahmadidelir, K., Campbell, C.M., Doostie, H., 2009; Teorem A). <

4.3. Grup Tanımladığı Gösterilen Monoid ve Yarıgrup Takdimleri

Yukarıda bulunan 4.1 ve 4.2 nolu bölümlerde, bu zamana kadar grup tanımladığı gösterilen monoid ve yarıgrup takdimleri ile bu takdimlerin grup

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

tanımladığını göstermek için kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir. Bu bölümde ise bazı yeni monoid ve yarıgrup takdimlerinin grup tanımladığını ve yukarıdaki bazı takdimlerin grup tanımladığının alternatif ispatları yapılmıştır. Öncelikle iki doğuraylı iki ilişkili $P = \langle a, b \mid aua = a, ava = b \rangle$ yarıgrup takdiminin hangi durumlarda grup tanımladığını gösterelim. Bu takdimin bir diğer özelliği de sağ ve sol Adian grafikleri bir devirden oluşmadığı halde grup tanımlamasıdır.

Teorem 4.3.1. $u, v \in A^+$ olmak üzere

$$P = \langle a, b \mid aua = a, ava = b \rangle$$

yarıgrup takdimi bir grup tanımlar.

İspat: Eğer u kelimesi b yi içermiyorsa, $a^k = a$ ilişkisi elde edilir. Böylece P , $a^k = a$ ilişkisine sahip olup, P bir grup tanımlamaz. Bu nedenle u kelimesi, b doğurayını içermelidir. Eğer v kelimesi b yi içermezse $ava = b$ ilişkisi gereksiz bir ilişki olur. Bu yüzden, v kelimesi de b doğurayını içermelidir. $e \equiv au$ ve $f \equiv ua$ olsun. Bu durumda

$$ea \equiv aua = a$$

$$eb = (au)b = (au)ava = (aua)va = ava = b$$

$$af \equiv aua = a$$

$$bf = b(ua) = (ava)ua = av(aua) = ava = b$$

olup, e bir sol birim ve f bir sağ birimdir. Eğer S , P nin tanımladığı yarıgrup ise, S sağ ve sol birime sahip olup monoiddir ve

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

$$e = f \Rightarrow au = ua$$

dir. Böylece $a^k u^k = u^k a^k = e$ elde edilir.

$e \equiv au = ua$ olduğundan, u kelimesi, a nın hem sol hem sağ tersidir. b nin sol tersini bulalım. $v_1 \in \{a, b\}^*$ olmak üzere, u kelimesini $u \equiv v_1 b a^k$ ($k \geq 0$) şeklinde yazabiliriz. $w \equiv a^k a v_1$ olsun.

$$wb \equiv (a^k a v_1) b = (a^k a v_1) b e = (a^k a v_1) b a^k u^k = a^k a (v_1 b a^k) u^k = a^{k+1} u^{k+1} = e$$

olduğundan, w kelimesi, b nin sol tersidir. O halde Lemma 4.1.1 den $\mathbf{P}$ yarıgrup takdimi grup tanımlar. <

Şimdi grup tanımlayan çeşitli monoid takdimlerini inceleyelim. Öncelikle, iki doğuraylı ve tek ilişkili

$$\langle a, b \mid r = 1 \rangle$$

monoid takdiminin bazı durumlarda grup tanımladığını aşağıdaki teoremden gösterdik.

Teorem 4.3.2. $u \in \{a, b\}^*$ olmak üzere, $M_1 = \langle a, b \mid aua = 1 \rangle$ bir monoid takdimi olsun.

- i) Eğer u kelimesi, b doğurayını içermiyor ise M_1 bir grup tanımlamaz.
- ii) Eğer u kelimesi, en az bir b doğurayını içeriyor ise M_1 bir grup tanımlar.

İspat: i) Eğer u hiç b içermiyorsa, M_1 takdimi $\langle a \mid a^m = 1 \rangle$ formuna gelir ve b nin tersi yoktur. Bu yüzden monoid takdimi M_1 bir grup tanımlamaz.

ii) au , a nın sol tersi olduğu M_1 takdiminin ilişkilerinden açıktır. Bu nedenle,

$$a^{k+1}(ua)^{k+1} \equiv a^k(aua)(ua)^k = a^k(ua)^k = \mathbf{L} = aua = 1$$

dir. $v \in \{a, b\}^*$ olmak üzere, $u \equiv vba^k$ ($k \geq 0$) olsun. Böylece

$$\begin{aligned} (a^{k+2}v)b &= (a^{k+2}v)b(a^{k+1}(ua)^{k+1}) \equiv a^{k+1}(a(vba^k)a)(ua)^{k+1} \\ &= a^{k+1}(aua)(ua)^{k+1} = a^{k+1}(ua)^{k+1} = 1 \end{aligned}$$

olup $a^{k+2}v$, b nin sol tersidir. Dolayısıyla Lemma 4.2.1 den, M_1 monoid takdimi grup tanımlar. <

Örnek 4.3.3. (Campbell C.M., Robertson E.F., Ruskuc N., Thomas R.M., 1998) de ele alınan,

$$\langle x, y \mid xyxyx = 1 \rangle$$

ve

$$\langle x, y \mid xyyx = 1 \rangle$$

monoid takdimlerinin grup tanımladığı Teorem 4.3.2 den kolayca görülür.

Teorem 4.3.4. $A = \{a, b\}$ olsun. $w \in A^*$ ve $v \in aA^*b$ olmak üzere

$$M_2 = \langle a, b \mid vwav = 1 \rangle$$

monoid takdimi M_2 bir grup tanımlar.

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

İspat: $v \in aA^*b$ olduğundan, $v \equiv a\bar{v}b$ olacak şekilde $\bar{v} \in A^*$ vardır.

$$vwav \equiv (a\bar{v}b)wa(a\bar{v}b) = 1$$

olup $a\bar{v}bwa\bar{v}$ kelimesinin b nin sol tersi olduğu açıktır. Şimdi a nın sol tersini bulalım. M_2 deki ilişki kullanılarak

$$vwa = vwa1 = vwa(vwav) \equiv (vwav)wav = wav$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$1 = v(wav) = vvwa$$

olup vw kelimesi, a nın sol tersidir. Böylece Lemma 4.2.1 den, monoid takdimi M_2 bir grup tanımlar. <

Teorem 4.3.5. $A = \{a, b\}$ olsun. $w \in A^*$ ve $v \in aA^*b$ olmak üzere

$$M_3 = \langle a, b \mid vbwv = 1 \rangle$$

monoid takdimi M_3 bir grup tanımlar.

İspat: $v \in aA^*b$ olduğundan, $v \equiv a\bar{v}b$ olacak şekilde $\bar{v} \in A^*$ vardır.

$$vbwv \equiv (a\bar{v}b)bw(a\bar{v}b) = 1$$

olup $\bar{v}bbwa\bar{v}$ kelimesinin a nin sağ tersi olduğu açıktır. Şimdi b nın sağ tersini bulalım. M_3 deki ilişki kullanılarak

$$vbw = vbw1 = vbw(vbwv) \equiv (vbwv)bwv = bwv$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$1 = (vbw)v = bwvv$$

olup wv kelimesi, b nin sağ tersidir. Böylece Lemma 4.2.1 den, monoid takdimi M_3 bir grup tanımlar. <

Örnek 4.3.6.

$$\langle x, y \mid xy^2xy = 1 \rangle$$

monoid takdiminin grup tanımladığı Teorem 4.3.5 te $v \equiv xy$, $w \equiv e$ alınarak kolayca görülür.

Teorem 4.3.7. $A = \{a, b\}$ olsun. $l \geq 2$ için, $w \in A^*$ ve $v \in aA^*b$ olmak üzere

$$M_4 = \langle a, b \mid vb^l wvb = 1 \rangle$$

monoid takdimi M_4 bir grup tanımlar.

İspat: $v \in aA^*b$ olduğundan, $v \equiv a\bar{v}b$ olacak şekilde $\bar{v} \in A^*$ vardır. Dolayısıyla,

$$vb^l wvb = a\bar{v}bb^l wa\bar{v}bb = 1$$

dir. Bu nedenle, $\bar{v}bb^l wa\bar{v}bb$ kelimesi a nın sağ tersidir.

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

$$vb^l w = vb^l w.1 = vb^l w(vb^l wvb) \equiv (vb^l wvb)b^{l-1}wvb = b^{l-1}wvb$$

elde edilir. O halde yukarıdaki eşitlikten,

$$1 = (vb^l w)vb = (b^{l-1}wvb)vb$$

dir. Bundan dolayı $b^{l-2}wvbvb$ kelimesi b nın sağ tersidir. Lemma 4.2.1 den, monoid takdimi M_4 bir grup tanımlar. <

Şimdi bölüm 4.2 de bahsettiğimiz grup tanımlayan monoid takdimlerinin grup tanımladıklarını göstermek için alternatif ispatları Teorem 4.3.4, Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.7 yi kullanarak yapalım.

Teorem 4.3.8. a, b, c, d pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M_5 = \langle x, y \mid x^a y^b x^c y^d = 1 \rangle$$

olarak tanımlanan M_5 monoid takdimi olsun. $d \leq b$, $a \leq c$ ve bu eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizlik ise M_5 monoid takdimi bir grup tanımlar.

İspat: $d \leq b$, $a \leq c$ ve bu eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizlik olsun. Bu durumda

$$d \leq b \Rightarrow b = d + k, \quad k \geq 0$$

$$a \leq c \Rightarrow c = a + l, \quad l \geq 0$$

olacak şekilde k, l tamsayıları vardır. $d \leq b$, $a \leq c$ ve bu eşitsizliklerin en az birinin kesin eşitsizlik olması $k \neq 0$ veya $l \neq 0$ olmasıdır. $x^a y^b x^c y^d$ kelimesini,

$$x^a y^b x^c y^d = x^a y^d y^k x^l x^a y^d \equiv x(x^{a-1}y^{d-1})y.y^k x^l x(x^{a-1}y^{d-1})y$$

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

olarak yazabiliriz. $v \equiv x(x^{a-1}y^{d-1})y$ alalım. $k \neq 0$ ise $w \equiv y^k x^{l-1}$ alınarak Teorem 4.3.4 den ve $l \neq 0$ ise $w \equiv y^{k-1} x^l$ alınarak Teorem 4.3.5 ten dolayı M_5 monoid takdimi bir grup tanımlar. <

Teorem 4.3.9. a, b, c, d, e, f pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M_6 = \langle x, y \mid x^a y^b x^c y^d x^e y^f = 1 \rangle$$

olarak tanımlanan M_6 monoid takdimi olsun.

- a) $b = d$, $c = e$, $a \leq c$, $f \leq d$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.
- b) $a \leq e$, $f \leq b$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizliktir.
- c) $a = e$, $b = f$, $c \leq a$, $b \leq d$ ve $b \geq 2$ dir.
- d) $a = e$, $b = f$, $a \leq c$, $d \leq b$ ve $b \geq 2$ dir.

Yukarıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise monoid takdimi M_6 grup tanımlar.

İspat: a) $b = d$, $c = e$, $a \leq c$, $f \leq d$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizlik olsun.

$$a \leq c \Rightarrow c = a + k, k \geq 0$$

$$f \leq d \Rightarrow d = f + l, l \geq 0$$

olacak şekilde k, l tamsayıları vardır. $a \leq c$, $f \leq d$ bu eşitsizliklerden en az birinin kesin eşitsizlik olması $k \neq 0$ veya $l \neq 0$ olmasıdır. $x^a y^b x^c y^d x^e y^f$ kelimesini,

$$x^a y^b x^c y^d x^e y^f = x^a y^{f+l} x^{a+k} y^{f+l} x^{a+k} y^f \equiv x(x^{a-1} y^{f-1}) y (y^l x^{a+k} y^{f+l} x^k) x (x^{a-1} y^{f-1}) y$$

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

olarak yazabiliriz. $v \equiv x(x^{a-1}y^{f-1})y$ alalım. $k \neq 0$ ise $w \equiv y^l x^{a+k} y^{f+l} x^{k-1}$ alınarak Teorem 4.3.4 den ve $l \neq 0$ ise $w \equiv y^{l-1} x^{a+k} y^{f+l} x^k$ alınarak Teorem 4.3.5 ten dolayı M_6 monoid takdimi bir grup tanımlar.

(b) $a \leq e, f \leq b$ ve eşitsizliklerin en az biri kesin eşitsizlik olsun.

$$a \leq e \Rightarrow e = a + k, k \geq 0$$

$$f \leq b \Rightarrow b = f + l, l \geq 0$$

olacak şekilde k, l tamsayıları vardır. $a \leq e, f \leq b$ bu eşitsizliklerden en az birinin kesin eşitsizlik olması $k \neq 0$ veya $l \neq 0$ olmasıdır. $x^a y^b x^c y^d x^e y^f$ kelimesini,

$$x^a y^b x^c y^d x^e y^f \equiv x^a y^{f+l} x^c y^d x^{a+k} y^f \equiv x(x^{a-1}y^{f-1})y(y^l x^c y^d x^k)x(x^{a-1}y^{f-1})y$$

olarak yazabiliriz. $v \equiv x(x^{a-1}y^{f-1})y$ alalım. $k \neq 0$ ise $w \equiv y^l x^c y^d x^{k-1}$ alınarak Teorem 4.3.4 den ve $l \neq 0$ ise $w \equiv y^{l-1} x^c y^d x^k$ alınarak Teorem 4.3.5 ten dolayı M_6 monoid takdimi bir grup tanımlar.

(c) $a = e, b = f, c \leq a, b \leq d$ ve $b \geq 2$ olsun.

$$c \leq a \Rightarrow a = c + k, k \geq 0$$

$$b \leq d \Rightarrow d = b + l, l \geq 0$$

olacak şekilde k, l tamsayıları vardır. $x^a y^b x^c y^d x^e y^f$ kelimesini,

$$x^a y^b x^c y^d x^e y^f \equiv x^{c+k} y^b x^c y^{b+l} x^{c+k} y^b \equiv x(x^{c-1}x^k y^{b-2})y(yx^c y^{b+l})x(x^{c-1}x^k y^{b-2})yy$$

olarak yazabiliriz. $b \geq 2$ olmak üzere $v \equiv x(x^{c-1}x^k y^{b-2})y$ ve $w \equiv x^c y^{b+l}$ alınırsa Teorem 4.3.7 den dolayı M_6 monoid takdimi bir grup tanımlar. Dikkat edilecek

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

olursa $c \leq a$, $b \leq d$ eşitsizliklerinden en az biri kesin eşitsizlik olmak zorunda değildir.

(d) $a = e$, $b = f$, $a \leq c$, $d \leq b$ ve $b \geq 2$ olsun.

$$a \leq c \Rightarrow c = a + k, \quad k \geq 0$$

$$d \leq b \Rightarrow b = d + l, \quad l \geq 0$$

olacak şekilde k, l tamsayıları vardır. $x^a y^b x^c y^d x^e y^f$ kelimesini,

$$x^a y^b x^c y^d x^e y^f = x^a y^{d+l} x^{a+k} y^d x^a y^{d+l} \equiv x(x^{a-1} y^d y^{l-2}) y (y x^{a+k} y^d) x (x^{a-1} y^d y^{l-2}) y y$$

olarak yazabiliriz. $b \geq 2$ olmak üzere $v \equiv x(x^{a-1} y^d y^{l-2}) y$ ve $w \equiv x^{a+k} y^d$ alınırsa Teorem 4.3.7 den dolayı M_6 monoid takdimi bir grup tanımlar. Dikkat edilecek olursa $a \leq c$, $d \leq b$ eşitsizliklerinden en az biri kesin eşitsizlik olmak zorunda değildir. <

İki doğuraylı ve iki ilişkili

$$\langle a, b \mid r = s, v = 1 \rangle$$

monoid takdiminin grup tanımladığı bir durum aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 4.3.10. $m, n \geq 2$ pozitif tamsayılar ve $w \in \{a, b\}^+$ olmak üzere,

$$M = \langle a, b \mid a^m = b^n, w = 1 \rangle$$

monoid takdimi bir grup tanımlar.

4. GRUP TANIMLAYAN YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ Belgin ÖZER

İspat: $|w|=1$ ise $w \equiv a$ veya $w \equiv b$ olup M monoid takdimi devirli bir grup tanımlar.

$|w| \geq 2$ ise $u, v \in \{a, b\}^+$ olmak üzere $w \equiv ua$ veya $w \equiv vb$ şeklindedir.

$w \equiv ua$ ise a nın sol tersi u dur. O halde $u^m a^m = 1$ olduğundan,

$$(u^m b^{n-1})b \equiv u^m b^n = u^m a^m = 1$$

elde edilir. Böylece $u^m b^{n-1}$ kelimesi, b nin sol tersidir. Lemma 4.2.1 den, monoid takdimi M bir grup tanımlar. <

Aşağıdaki teoremde verilen (Ahmadidelir K., Campbell, C.M., Doostie, H., 2009) daki monoid takdiminin grup tanımladığını yukarıdaki teoremin özel bir durumu olarak verebiliriz.

Teorem 4.3.11. $n \geq 2$ pozitif tamsayı olmak üzere

$$p_1 = \left\langle a, b \mid a^n = b^n, aba^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]} = 1 \right\rangle$$

monoid takdimi p_1 grup tanımlar.

İspat: Teorem 4.3.10 dan $M = \langle a, b \mid a^m = b^n, w = 1 \rangle$ monoid takdimi grup

tanımladığından $n = m$ ve $w = aba^{\left[\frac{n}{2}\right]} b^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ alınrsa p_1 grup tanımladığı açıktır. <

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

$P = \langle A|R \rangle$ gereksiz ilişki içermeyen sonlu bir yarıgrup takdimi ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. Eğer S monoid ya da regüler bir yarıgrup ise, $w_a \in A^+$ olacak şekilde $w_a = a$ formunda R de bir ilişki vardır.

Üçüncü bölümde ayrıca

$$P = \langle a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \mathbf{K}, w_n = a_n \rangle$$

formundaki yarıgrup takdimlerinin Adian grafikleri ile ilgili ulaşılan sonuçlar yer almaktadır. Bu çeşit bir takdime **doğuray üreten takdim (generator producing)** ya da kısaca **GP takdimi** deriz. $P = \langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi olsun. $a \in A$ için, $(w = a) \in R$ olacak şekilde, bir $w \in (A/a)^+$ kelimesi varsa, a ya P nin **gereksiz bir doğurayı** denir. Bu bölümde GP takdimlerinin gereksiz doğurayları olmadığını ve her bir $w = a$ ilişkisi için, $|w| \geq 2$ ve w nin a yı içerdiğini kabul edeceğiz.

$$P = \langle A|R \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | w_1 = a_1, w_2 = a_2, \dots, w_n = a_n \rangle$$

gereksiz ilişki içermeyen bir GP takdimi olsun. P bir monoid tanımlıyorsa, sol ve sağ Adian grafiklerinin bağlantılı olduğu yine üçüncü bölümde gösterildi. Eğer $P = \langle A|R \rangle$ bağlantılı bir GP takdimi ise, P ile aynı yarıgrubu tanımlayan,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | a_1 v_1 = a_1, a_1 v_2 = a_2, \dots, a_1 v_n = a_n \rangle$$

bir GP takdimi, $\bar{P}$ nin bulunabileceğini gösterdik. Ayrıca P bir GP takdimi ve S , P ile tanımlı bir yarıgrup olmak üzere $A_L \cap A_R \neq \emptyset$, örneğin, $a_1 \in A_L \cap A_R$ ise, S yarıgrubunun,

$$\bar{P} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 u_1 a_1 = a_1, a_1 u_2 a_1 = a_2, \dots, a_1 u_n a_1 = a_n \rangle$$

takdimi ile tanımlı olduğu yine üçüncü bölümde ispatlandı. P bağlantılı bir GP takdimi olsun. Eğer, $A_L \cap A_R \neq \emptyset$ ise, P bir monoid tanımladığı Adian grafiği kullanılmadan ispatlandı.

Bu takdimden yola çıkarak, bölüm 4 te, $u, v \in A^+$ olacak şekilde iki doğuraylı,

$$P = \langle a, b \mid aua = a, ava = b \rangle$$

yarıgrup takdiminin bir grup tanımladığı gösterilmiştir. Yani Adian Grafiği devir olmayan bir takdimin grup tanımladığına bir örnek olduğundan önem taşır. Yine bölüm 4 te $u \in \{a, b\}^*$ olacak şekilde, $M_1 = \langle a, b \mid aua = 1 \rangle$ bir monoid takdimi olmak üzere

- i) Eğer u , hiç b içermezse, M_1 bir grup tanımlamadığı
- ii) Eğer u en az bir b içerirse, M_1 bir grup tanımladığı

ispatlanmıştır.

$A = \{a, b\}$, $w \in A^*$, $v \in aA^*b$ ve k, l pozitif tamsayılar olmak üzere

$$M_2 = \langle a, b \mid vwav = 1 \rangle$$

$$M_3 = \langle a, b \mid vbwv = 1 \rangle$$

$$M_4 = \langle a, b \mid vb'wvb = 1 \rangle$$

monoid takdimlerinin grup tanımladığı gösterilmiştir. Yukarıdaki takdimlerin özel bir durumu olarak Smith, G.C.tarafından yapılan çalışmada yer alan teorem 4 ün alternatif ispatı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- ADJAN, S.I. 1966. Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups. AMS, Providence.
- AHMADİDELİR, K., CAMPBELL, C.M., DOOSTİE, H., 2009. Two classes of finite semigroups and monoids involving Lucas Numbers. Semigroup Forum, 78 (2): 200-209.
- ARTHUR, R., ARAUJO, I.M., and THOMSON, R., 1999. Seminar on Combinatorial Algebra. University of St. Andrews.
- AYIK, G., 2003. Yarıgrup Takdimleri, Otomatiklik ve Adian Grafikleri. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ Y., 2008. Semigroup presentations and Adian graphs, Discrete Math., 308 (11): 2288-2291.
- AYIK, H., 1998. Presentations and efficiency of semigroups. Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.
- AYIK, H., RUSKUC N., 1999. Generators and Relations of Rees Matrix semigroups. Proc.Edinburg Math. Soc. 42: 481-495.
- AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., RUSKUC, N., 2000. The semigroups Efficiency of Direct Powers of Groups. In P.Smith, E.Giraldes and P.Martins (eds.), 'Proceedings of the International Conference on Semigroups, Braga, Portugal 18-23 June 1999' World Scientific, Singapore, 19-25.
- AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., RUSKUC, N., 2000a. On the efficiency of wreath products of groups. In: Baik YG, Johnson DL, Kim A (eds) Group Korea 98, Berlin: Walter de Gruyter , 39-51.
- AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., RUSKUC, N., 2000b. The semigroup efficiency of groups and monoids, Math Proc. Roy. Irish Acad., 100A: 171-176.
- AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., RUSKUC, N., 2000c. Minimal Presentations and Efficiency of Semigroups. Semigroup Forum, 60: 231-242.

- AYIK, H., KUYUCU, F., VATANSEVER, B., 2002. On Semigroup Presentations and Efficiency. *Semigroup Forum*, 63: 231-242.
- BAUMSLAG, G., GERSTEIN, S.M., SHAPIRO, M., and SHORT, H., 1991. Automatic groups and their amalgams. *Journal of Pure and Appl. Algebra*, 76: 229-316.
- CAMPBELL, C.M., MITCHELL, J.D., RUSKUC, N., 2002. On defining group efficiently without using inverses. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 133: 31-36.
- CAMPBELL, C.M., MITCHELL, J.D., RUSKUC, N., 2002b. Comparing Semigroup and Monoid Presentations for finite monoids. *Monatsh. Math.*, 134: 287-293.
- CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., THOMAS, R.M., 1994. Fibonacci Semigroups, *Journal of Pure and Appl. Algebra* 94: 49-57.
- CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., THOMAS, R.M., 1995. Semigroup and group presentations. *Bull. London Math. Soc.*, 27: 46-50.
- CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., THOMAS, R.M., 1996. On Subsemigroups of finitely presented semigroups. *Journal of Algebra*, 180: 1-21.
- CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., THOMAS, R.M., 1998. Presentations for subsemigroups-applications to ideals of semigroups. *Journal of .Pure and Applied Algebra*, 124: 47-64.
- CARVALHO, C., 2003. Presentations of subsemigroups and inverse semigroups. Ph.D.Thesis, University of St. Andrews.
- CONWAY, J.H., 1965. Advanced Problem 5327- *Amer. Math. Monthly*, 72:915.
- EPSTEIN, D.B.A., 1992. *Word Processing in Groups*. (Jones and Bartlett Publishers, Boston).
- HIGGINS, P.M., 1992. *Techniques of Semigroup Theory*. Oxford University Press, Oxford.
- HIGGINS, P.M. , HOWIE, J.M., RUSKUC, N., 1998. Generators and factorizations of transformation semigroups. *Proc. Roy. Soc. Edinburg* 128: 1355-1369.
- HOWIE, J.M., RUSKUC, N., 1994. Constructions and presentations for monoids. *Communication in Algebra* 22(15): 6209-6224

- HOWIE, J.M., 1995. Foundations of Semigroup Theory. Claredon Press, Oxford.
- _____, 1995a. Fundamentals of Semigroup Theory. Claredon Press, Oxford.
- HUNGERFORD, T.W., 1974. Algebra. Springer-Verlag, Newyork, Heidelberg, Berlin.
- JOHNSON, D.L., 1976. Presentations of Groups. London Math. Soc., Lecture Notes .22, Cambridge University Pres, Cambridge.
- _____, 1997. Monoid Presentations of Groups. Proceedings of the Royal Irish Academy. 97A: 1-4.
- JURA, A., 1978. Determining ideals of finite index in a finitely presented semigroup. Demonstratio Math. 11: 813-827.
- LALLEMENT, G., 1979. Semigroups and Combinatorial Applications. John Wiley, Newyork.
- MITCHELL, J.D., 2002. Extremal Problems in Combinatorial Semigroup Theory. Ph.D. Thesis, University of St. Andrews.
- NEUMANN, B.H., 1967. Some remarks on semigroup presentations. Canad, J. Math. 19: 1018-1026.
- ROBERTSON, E.F., and ÜNLÜ, Y., 1993. On semigroup presentations. Proc. Edinburg Math. Soc. 36: 55-68.
- RUSKUC, N., 1995. 'Semigroup Presentations. Ph.D. Thesis, University of St. Andrews.
- _____, 1995a. Matrix Semigroups-generators and relations. Semigroup Forum, 51: 319-333.
- RUSKUC, N., ARAUJO, I.M., 2001. Finite presentability of Bruck-Reilly extensions of groups. J.Algebra 242: 20-30.
- SIMS, C.C., 1994. Computation with finitely presented groups. Cambridge University Press.
- SMITH, G.C., On Monoids with a single defining relator. Proceedings of the Royal Irish Academy.
- WALKER, T. G., 1992. Semigroup Enumeration- Computer Implementation and Applications. Ph.D. Thesis, University of St. Andrews.

WILSON, R. J., WATKINS, J.J., 1990. *Graphs: An Introductory Approach*, Wiley, Newyork.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Adıyaman ın Besni ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Adıyaman-Besni ilçesinde Dumlupınar İlköğretim Okulunda, orta öğrenimini ise, Besni lisesinde tamamladı. 1993 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Kimya Öğretmenliği bölümünde, lisans eğitimine başladı. 1994 te, aynı üniversitenin Matematik Öğretmenliği bölümüne yatay geçiş yaptı. 1998 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl TED Ankara Koleji Vakfı Özel Okullarında Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2001 yılında, Gaziantep Üniversitesi matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya ve aynı zamanda , yüksek lisans eğitimine başladı. 2005 yılında, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans çalışmasını tamamladı. 2005 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında doktora programına, 2006 yılında doktora tez çalışmalarına başladı.

Evli ve bir çocuk annesidir.