T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS q-İNTEGRALLER VE BAZI ÖZELLİKLERİ

MUSTAFA AYDIN

KASIM 2017

Matematik Anabilim Dalında Mustafa AYDIN tarafından hazırlanan “Kompleks q-İntegraller ve Bazı Özellikleri” adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	: Prof. Dr. Ali ARAL
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kerim KOCA
Üye	: Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	: Prof. Dr. Fatma Taşdelen YEŞİLDAL
Üye	: Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Üye	: Doç. Dr. Murat OLGUN

24 /11/2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZET

Kompleks q-İntegraller ve Bazı Özellikleri

AYDIN, Mustafa
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA
Kasım 2017, 64 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde tezin amacı açıklanmış ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise önce q-Analizinde bazı temel tanım ve kavramlar açıklanmış, daha sonra bu bölümün alt başlıklarında q-analitik Binom fonksiyonu, q-analitik polinom fonksiyonu için q-Taylor formülü, q-analitik fonksiyonların q-Laurent açılımı, q-Laplace operatörü, genelleştirilmiş analitik fonksiyon olarak q-analitik fonksiyon, kompleks q-analitik fraktallar ve çift katlı Mellin seri genişletmesi incelenmiştir. Üçüncü bölümde kompleks q-integraller ve bazı örnekler verilmiş, bu bölümün alt başlıklarında kompleks q-integrallerin bazı özellikleri ile birinci ve ikinci tipten kompleks eğrisel q-integraller verilmiştir. Dördüncü bölümde katlı q-integral kavramı verilmiş ve q-Green özdeşliğinin yeni bir formu elde edilmiştir.
Son olarak beşinci bölümde tezde yapılanlar hakkında kısa bir bilgi verilip konu ile ilgili daha ileri aşamalarda neler yapılabileceği hakkında açıklamalarda bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: q-analiz, q-türev, q-integral, q-analitik fonksiyonlar, kompleks eğrisel q-integral, kompleks q-integral, q-Green özdeşliği

ABSTRACT

Complex *q*-Integrals and Their Some Properties

AYDIN, Mustafa
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA
November 2017, 64 pages

This thesis consists of five chapters.
Information about the purpose of the thesis and resources are given in the first chapter.
In the second chapter, some information and concepts about *q*-Analysis are explained firstly, then in the subsections of this chapter, *q*-analytic Binom function, *q*-Taylor formula for the *q*-analytic polynomial function, *q*-Laurent expansion for *q*-analytic functions, *q*-Laplace operator, *q*-analytic function as generalized analytic function, complex *q*-analytic fractals, double Mellin series expansion are presented.
Complex *q*-integrals and some examples are given in the third chapter. And in subsections of this chapter, some properties of complex *q*-integrals and the definition of the first and the second type complex line *q*-integrals are given.
In the fourth chapter, the multiple *q*-integral and a new form of *q*-Green's identity is observed.
In the last chapter, a brief information about subjects mentioned in the thesis is given. And then some explanations are given about what to do in advanced.

Key Words: *q*-calculus, *q*-derivative, *q*-integral, *q*-analytic functions, complex *q*-Line integral, complex *q*-integral, q-Green's identity

TEŞEKKÜR

Lisans, yüksek lisans ve doktora öğrenimim boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan ve bu tezin hazırlanma sürecinde gösterdiği sadece akademik değil, manevi olarak da esirgemediği destek ve yardımından dolayı çok kıymetli hocam Prof. Dr. Kerim KOCA'ya en içten duygularımla teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarından dolayı Prof. Dr. Ali ARAL ve Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince desteğini esirgemeyen Arş. Gör. İlker GENÇTÜRK'e teşekkür ederim.

Desteğini her zaman ve her konuda hissettiğim kardeşim Ayşenur AYDIN'a teşekkür ederim.

Her türlü sıkıntı ve mutluluğumda yanımda olup bu günlere gelmemde büyük emekleri olan aileme ve biricik eşim Özlem YARAR AYDIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

q-Analizinin esas ortaya çıkış noktası, doğadaki ve teknolojideki kesikli olayların araştırılmasıdır. q-Analizi son yıllarda özellikle Matematik, Fizik ve Mühendislik gibi birçok bilim dalının araştırma konuları arasında önemli bir yer tutmaktadır. Klasikte verilen birçok teori ve metotlar q-Analizine genişletilerek önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu tezin temel konularından biri de q-analitik fonksiyonlar olup bu fonksiyon sınıfının önemli özellikleri incelenmiştir. Klasik anlamda analitik fonksiyonların kuvvet serilerine açılabilmesi, bu fonksiyonların Newton tarafından mekanik problemlerin çözümünde kullanılmasını sağlamıştır. D'Alambert ve Euler hidrodinamik problemler üzerine olan çalışmalarında Cauchy-Riemann denklem sistemi olarak bilinen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ denklem sisteminin çözümünün kompleks değerli bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları olduğunu görmüşlerdir. Tezin ilerleyen bölümlerinde ise q-analitik Binom fonksiyonunun genelleştirilmiş bir analitik fonksiyon olduğu ve $\overline{\partial}-$Bar probleminin bir çözümü olduğuna yer verilmiştir.

q-Analizinde türev ve integral kavramları klasik anlamdakilere benzer şekilde bir q parametresine göre tanımlanmaktadır ve bu tezde $0 < q < 1$ olarak alınmıştır. Limit olarak $q \to 1^-$ yaklaşımında q-analizindeki sonuçlar klasik analizdeki sonuçlara indirgenmektedir. Örneğin reel bir $f(x)$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

şeklinde verilir ki $q \to 1^-$ yaklaşımı altında bu türev klasikteki $f'(x)$ türevine dönüşür. Aynı durum q-integral kavramı için de geçerlidir. [1] kaynağında Jackson integrali olarak bilinen

$$\int_0^a f(t) d_q t := (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} a q^n f(a q^n)$$

integrali için

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^a f(t) d_q t = \int_0^a f(t) dt$$

eşitliğinin geçerli olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca q-analizinin metotları kullanılarak q-fark denklemleri teorisi de geliştirilmiştir. Bu tezde kısaca q-fark denklemlerine de yer verilmiş, [5] kaynağında q-fark denklemlerinin çözümlerinin birer q-analitik fonksiyon olduğundan bahsedilmiştir.

Bu tezdeki temel araştırma konularından ikisi, daha önce çok incelenmemiş kavramlar olan kompleks q-integral ve kompleks q-eğrisel integral kavramlarıdır. Tezin

ilerleyen bölümlerinde bu önemli iki kavram incelenmiş ve bazı yeni sonuçları ortaya konmuştur.
Son olarak Jackson integralinden yararlanarak katlı q-integral kavramı verilmiş, ardından katlı q-integralleri için q-Green özdeşliği elde edilmiştir. Ayrıca reel değerli q-harmonik bir fonksiyon verildiğinde bu fonksiyonun harmonik q-eşleniğinin nasıl bulunabileceğine dair bir de teorem verilmiştir.

1.1.Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı q-analitik fonksiyonların temel yapısı ile özelliklerini ortaya koymak ve kompleks q-integral ile kompleks q-eğrisel integral kavramları üzerinde durmaktır. Eğer klasik analizde çok önemli bir yere sahip olan Cauchy integral formülünün q-analizindeki karşılığı bulunabilirse bazı kompleks kısmi türevli denklemler için verilen sınır-değer problemlerinin de q-analogları elde edilebilir. Bu durum ileri bir araştırma konusudur. Hatta q-analitik fonksiyonların seri açılımından hareketle bir kompleks q-integralin rezidü (ya da q-rezidü) yardımıyla nasıl hesaplanacağı da ele alınabilir.

Bu tezin amaçlarından biri de bunun gibi araştırma konularına zemin hazırlamaktır.

1.2. Kaynak Özeti

Bu tezin hazırlanmasında [1], [3], [4] ve [5] kaynakları temel alınmıştır. Bu kaynaklardan özellikle q-türev, q-integral kavramları ile ilgili teorik bilgiler, teoremler ve bazı sonuçlar incelenmiştir. [4] kaynağında zaman skalasında eğrisel integraller incelenmiş olup tezde bu kaynaktan yararlanarak kompleks q-eğrisel integral kavramı verilmiştir. [5] nolu kaynaktan q-analitiklik kavramı incelenmiş ve çeşitli özelliklerine yer verilmiştir.

Konulara genişlik kazandırması bakımından diğer kaynaklar da incelenmiş, bu incelemeler ışığında yeni sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır [13] nolu kaynak araştırmalarımıza uygun olması bakımından incelenmiş fakat elde etmek istediğimiz Cauchy integral formülünün q-analizindeki karşılığının bu kaynakta elde edilmediği görülmüştür. Ayrıca [14] nolu kaynakta klasik anlamdaki Cauchy integral formülünün n. Basamaktan q-türevinin nasıl elde edileceği incelenmiştir.

Tezin hazırlanmasında kullanılan diğer kaynaklardaki kavramlar, tezin amaçlarına uygun olup olmadığı çerçevesinde incelenmiş ve q-analizinin oldukça geniş bir alana uygulanabileceği kanısına varılmıştır.

İncelenen kaynaklara genel olarak bakıldığında kompleks q-analitiklik kavramlarının farklı şekillerde tanımlandığı görülür Örneğin [19] kaynağında $q = 1$ olması hali incelenmiş ve q-analitik fonksiyon kavramı yerine "monodifrik fonksiyon" kavramı kullanılmıştır. [5] kaynağında yatay ve düşey şeritler üzerinde q-analitiklik tanımlanmış fakat bu çalışmada q-eğrisel integral kavramı incelenmemiştir. Bu yayında daha çok q-analitik fonksiyonların bazı fiziksel özellikleri üzerinde durulmuştur.

[20] nolu kaynakta ise bir $f(z)$ kompleks fonksiyonunun bir $z \in \mathbb{C}$ noktasındaki q-analitikliği, $f(z)$ nin reel eksen ve sanal eksen yönündeki değişimlerinin eşit olması olarak tanımlanmış ve yeni kompleks q-eğrisel integral tanımı verilerek dikkate değer sonuçlar ortaya konulmuştur. Burada dikkate değer bir sonuç da bir kaynaktaki tanıma göre q-analitik olan bir fonksiyonun, diğer bir kaynaktaki q-analitiklik tanımına göre q-analitik olmamasıdır. Ayrıca incelenen kaynaklarda kompleks q-eğrisel integraller de farklı farklı tanımlanmaktadır. Fakat klasikteki Cauchy teoremi, farklı tanımlanan kompleks q-eğrisel integraller için geçerli olmaktadır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1 *$a \in \mathbb{C}$ olmak üzere*

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}\ ,\ q \in \mathbb{C} - \{1\}$$

ifadesine a nın q-analoğu denir. Burada $q^a = e^{a \log q}$ olup kompleks logaritma fonksiyonunun esas dalı göz önüne alınmalıdır.
$n = 1, 2, ...$ için q-faktöriyel

$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q\ ;\quad [0]_q! = 1$$

olarak tanımlanır. q-Binom katsayıları ise

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} = \frac{(1-q)_n}{(1-q)_{n-k}(1-q)_k}$$

şeklinde tanımlanıp burada $(1-q)_n = (1-q)(1-q^2)...(1-q^n)$ dir.

Tanım 2.2 *$D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit sayısı verilsin. Eğer her $z \in D$ için $\lambda z \in D$ oluyorsa D ye $\lambda-$geometrik küme denir.*

Eğer $D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi bir $\lambda-$geometrik küme ise bu takdirde her $z \in D$ için D kümesi $(z\lambda^n)_0^\infty$ formundaki tüm dizileri içerir.

$D \subset \mathbb{C}$, q-geometrik bir küme ve $f(z)$, D üzerinde tanımlanmış bir kompleks fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z)$ nin q-türevi

$$\begin{aligned} D_q f(z) &:= \frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}, \quad z \in D \setminus \{0\}, \quad |q| < 1 \\ D_q f(0) &:= \lim_{n\to\infty} \frac{f(q^n z)-f(0)}{q^n z};\ z \in D \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmaktadır. (Bakınız [3])
Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu sıfır noktasında sürekli ise fonksiyonun bu noktadaki klasik türevi ile q-türevi çakışır.
$D \subset \mathbb{R}^2$ alt bölgesinde $u = f(x, y)$ fonksiyonu verilsin. $0 < q < 1$ için $(q^n x, q^n y) \in D$ olmak üzere u nun x ve y ye göre kısmi q-türevleri sırasıyla

$$D_q^x u(x,y) = \frac{u(qx,y)-u(x,y)}{(q-1)x}, x \neq 0 \tag{2.2}$$

$$D_q^y u(x,y) = \frac{u(x,qy)-u(x,y)}{(q-1)y}, y \neq 0 \tag{2.3}$$

olarak verilir.

Tanım 2.3 *$f(x)$ tek değişkenli reel bir fonksiyon olmak üzere*

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) = [D_q^x f(x)] d_q x \tag{2.4}$$

ifadesine $f(x)$ in q-diferensiyeli denir. Burada $d_q x = (q-1)x$ dir.

x ve y reel değişkenler olmak üzere kompleks değerli bir fonksiyonun q-diferensiyeli

$$d_q f(x,y) = f(qx, qy) - f(x,y) \tag{2.5}$$

dir. Bu eşitliği

$$d_q f(x,y) = [M_q^y D_q^x f(x,y)] d_q x + [D_q^y f(x,y)] d_q y \tag{2.6}$$

şeklinde de yazabiliriz. M_q^y operatörü ise $M_q^y F(x,y) = F(x, qy)$ şeklinde tanımlanmaktadır. (2.6) eşitliğinin doğruluğunu görelim.

$$\begin{aligned} [M_q^y D_q^x f(x,y)] d_q x &= M_q^y \left(\frac{f(qx,y) - f(x,y)}{(q-1)x} \right) \\ &= f(qx, qy) - f(x, qy) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$[D_q^y f(x,y)] d_q y = f(x, qy) - f(x,y) \tag{2.8}$$

olup (2.7) ve (2.8) toplanırsa $f(qx, qy) - f(x,y) = d_q f(x,y)$ elde edilir. Benzer şekilde kompleks değerli bir $f(x,y)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli

$$d_q f(x,y) = [D_q^x f(x,y)] d_q x + [M_q^x D_q^y f(x,y)] d_q y \tag{2.9}$$

eşitliği ile de verilebilir.
$z = x + iy, \overline{z} = x - iy$ değişkenlerinin q-diferensiyelleri $d_q z = d_q x + i d_q y$ ve $d_q \overline{z} = d_q x - i d_q y$ olarak verilir. Buradan $d_q z = (q-1)z$ ve $d_q \overline{z} = (q-1)\overline{z}$ olduğu görülebilir.
Bir kompleks değerli $f(x,y)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli için

$$d_q f(x,y) = [M_q^y D_q^z f] d_q z + [M_q^y D_q^{\overline{z}} f] d_q \overline{z} \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanır. Burada D_q^z ve $D_q^{\overline{z}}$ operatörleri kompleks kısmi q-türev operatörleri olup bu operatörler

$$D_q^z = \frac{1}{2}(D_q^x - i M_{1/q}^y D_q^y) \tag{2.11}$$

$$D_q^{\overline{z}} = \frac{1}{2}(D_q^x + i M_{1/q}^y D_q^y) \tag{2.12}$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} (M_q^y D_q^z f) d_q z &= M_q^y \left[\frac{1}{2}(D_q^x f - i M_{1/q}^y D_q^y f) \right] d_q z \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(qx, qy) - f(x, qy)}{x} (x + iy) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{f(x, qy) - f(x,y)}{y} (ix - y) \end{aligned} \tag{2.13}$$

olur. Benzer şekilde

$$(M_q^y D_q^{\overline{z}} f) d_q \overline{z} = \frac{1}{2} \frac{f(qx, qy) - f(x, qy)}{x} (x - iy) + \frac{1}{2} \frac{f(x, qy) - f(x, y)}{y} (ix + y) \tag{2.14}$$

elde edilir. (2.13) ve (2.14) taraf tarafa toplanırsa

$$(M_q^y D_q^z f) d_q z + (M_q^y D_q^{\overline{z}} f) d_q \overline{z} = f(qx, qy) - f(x, y) = d_q f(x, y)$$

bulunur. (2.11) ve (2.12) ile verilen kompleks kısmi q-türev operatörleri

$$D_q^z = \frac{1}{2}(M_{1/q}^x D_q^x - i D_q^y), D_q^{\overline{z}} = \frac{1}{2}(M_{1/q}^x D_q^x + i D_q^y) \tag{2.15}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda $f(x, y)$ nin q-diferensiyelinin

$$d_q f(x, y) = (M_q^x D_q^z f) d_q z + (M_q^x D_q^{\overline{z}} f) d_q \overline{z} \tag{2.16}$$

olarak yeniden yazılabileceği görülebilir.

Tanım 2.4 *[5]İki reel değişkenli kompleks değerli bir $f(x, y)$ fonksiyonu uygun bir bölgede*

$$D_q^{\overline{z}} f(x, y) = \frac{1}{2}[D_q^x f(x, y) + i M_{1/q}^y D_q^y f(x, y)] = 0 \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlarsa $f(x, y)$ fonksiyonuna q-analitiktir denir. Bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonu q-analitik ise $f(x, y)$ nin q-diferensiyeli

$$d_q f(x, y) = (M_q^y D_q^z f(x, y)) d_q z \tag{2.18}$$

olur. $q \to 1^-$ için limit alınırsa bu tanım

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0 \tag{2.19}$$

standart analitiklik koşuluna iner.

Gerçekten

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to 1} D_q^x f(x, y) &= \lim_{q \to 1} \frac{f(qx, y) - f(x, y)}{(q-1)x} \qquad (qx = t \text{ değişken değiştirmesi yapılırsa}) \\
&= \lim_{q \to 1} \frac{x f_t(qx, y)}{x} \\
&= \lim_{q \to 1} f_t(qx, y) \\
&= f_x(x, y) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to 1} M_{1/q}^y D_q^y f(x, y) &= \lim_{q \to 1} M_{1/q}^y \frac{f(x, qy) - f(x, y)}{(q-1)y} \\
&= \lim_{q \to 1} \frac{f(x, y) - f(x, y/q)}{(q-1)y/q} \qquad (y/q = t \text{ denilirse}) \\
&= \lim_{q \to 1} \frac{-f_t(x, y/q)(-y/q^2)}{y/q^2} \\
&= \lim_{q \to 1} f_t(x, y/q) \\
&= f_y(x, y)
\end{aligned}$$

olup (2.17) eşitliği $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ klasikteki kompleks kısmi türev operatörüne dönüşür.

Tanım 2.5 *[5]*

$$D_q^z f(x,y) = \frac{1}{2}[D_q^x f(x,y) - iM_{1/q}^y D_q^y f(x,y)] = 0 \tag{2.20}$$

eşitliğini sağlayan kompleks değerli $f(x,y)$ fonksiyonuna q-antianalitik fonksiyon denir. Böylece q-antianalitik bir $f(x,y)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli

$$d_q f(x,y) = (M_q^y D_q^{\overline{z}} f(x,y)) d_q \overline{z} \tag{2.21}$$

olur.

Uyarı 2.1 *(2.15) ve (2.16) eşitlikleri göz önüne alındığında $f(x,y)$ q-analitik ise*

$$D_q^{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(M_{1/q}^x D_q^x f + iD_q^y f) = 0 \tag{2.22}$$

ve $f(x,y)$ q-antianalitik ise

$$D_q^z f = \frac{1}{2}(M_{1/q}^x D_q^x f - iD_q^y f) = 0 \tag{2.23}$$

oldukları görülebilir.

Tanım 2.6 *$A_q(qz) = A_q(z)$ eşitliğini sağlayan $A_q(z)$ fonksiyonuna z ye göre q-peri-yodik, $A_q(q\overline{z}) = A_q(\overline{z})$ eşitliğini sağlayan $A_q(\overline{z})$ fonksiyonuna ise $\overline{z}$ e göre q-periyodik fonksiyon denir.*

q-periyodik bir fonksiyon, klasik anlamdaki sabit fonksiyonun rolünü oynamaktadır. Yani $D_q^{\overline{z}} f = 0$ eşitliğini sağlayan bir $f(z)$ q-analitik fonksiyonu için $f(z) + A_q(\overline{z})$ fonksiyonu da q-analitiktir. Çünkü $D_q^{\overline{z}} A_q(\overline{z}) = 0$ dır. Örneğin $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(q^n z) = ... + g(q^{-2}z) + g(q^{-1}z) + g(z) + g(qz) + g(q^2 z) + ...$$

şeklinde bir gösterilime sahipse

$$\begin{aligned} f(qz) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(q^{n+1}z) = ...g(q^{-1}z) + g(z) + g(qz) + g(q^2 z) + ... \\ &= f(z) \end{aligned}$$

olup $f(z)$, q-periyodik olur.
(2.17) eşitliğinden q-analitik bir fonksiyon için

$$D_q^x f(x,y) = -iM_{1/q}^y D_q^y f(x,y)$$

yazılabilir. $f(x,y)$ kompleks değerli fonksiyonunu $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ formunda yazarsak

$$D_q^x\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]=-iM_{1/q}^yD_q^y\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]$$

yazılabilir. Buradan

$$D_q^xu(x,y)+iD_q^xv(x,y)=\left[-iM_{1/q}^yD_q^yu(x,y)+M_{1/q}^yD_q^yv(x,y)\right]$$

elde edilir ki reel ve sanal kısımların eşitliğinden

$$D_q^xu(x,y)=M_{1/q}^yD_q^yv(x,y)\ ,\ D_q^xv(x,y)=-M_{1/q}^yD_q^yu(x,y) \tag{2.24}$$

q-Cauchy Riemann denklem sistemi bulunur. Benzer olarak (2.22) eşitliğinden ise $f(x,y)$ q-analitik fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
D_q^{\bar{z}}f(x,y) &= \frac{1}{2}\left[M_{1/q}^xD_q^xf(x,y)+iD_q^yf(x,y)\right]=0\Rightarrow \\
M_{1/q}^xD_q^xf(x,y) &= -iD_q^yf(x,y)\Rightarrow \\
M_{1/q}^xD_q^x\left[u(x,y)+iv(x,y)\right] &= -iD_q^x\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]\Rightarrow \\
M_{1/q}^xD_q^xu(x,y)+iM_{1/q}^xD_q^xv(x,y) &= -iD_q^yu(x,y)+D_q^yv(x,y)
\end{aligned}$$

olur ki buradan

$$M_{1/q}^xD_q^xu(x,y)=D_q^yv(x,y)\ ,\ M_{1/q}^xD_q^xv(x,y)=-D_q^yu(x,y) \tag{2.25}$$

q-Cauchy Riemann denklem sisteminin bir diğer gösterilimi elde edilir. (2.25) de u ile v, x ile y nin rolleri aynı anda değiştirilirse (2.24) elde edilir.

x değişken bir değer olmak üzere bir reel f fonksiyonun $[0,x]$ aralığındaki Jackson q-integrali x e bağlı olarak

$$\int_0^x f(t)d_qt=(1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}q^nf(xq^n) \tag{2.26}$$

olarak verilir. $[a,b]$ aralığındaki Jackson q-integrali için

$$\int_a^b f(t)d_qt=\int_0^b f(t)d_qt-\int_0^a f(t)d_qt \tag{2.27}$$

özelliği geçerlidir.

Uyarı 2.2 *Tezde kullanılan q-Analizi ile ilgili diğer kavramlar tez içinde yeri geldiğinde verilecektir.*

2.2. q-Analitik Binom Fonksiyonu

Gauss Binom Formülünün q-analoğu

$$
\begin{aligned}
(x+y)_q^n &= (x+y)(x+qy)(x+q^2y)...(x+q^{n-1}y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} y^k
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

şeklinde verilir. Burada y yerine iy yazarak

$$
(x+iy)_q^n = (x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} i^k x^{n-k} y^k \tag{2.29}
$$

kompleks q-Binom formülü elde edilir.

Doğrudan hesapla

$$
D_q^{\overline{z}} (x+iy)_q^n = 0 \tag{2.30}
$$

ve

$$
D_q^{z} (x+iy)_q^n = [n]_q (x+iy)_q^{n-1} \tag{2.31}
$$

olduğu görülebilir. Gerçekten (2.11) ve (2.12) eşitliklerinde $f(x,y) = (x+iy)_q^n$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
D_q^x (x+iy)_q^n &= \frac{(qx+iy)_q^n - (x+iy)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx+iy)(qx+iqy)...(qx+iq^{n-1}y) - (x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y)}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx+iy)q^{n-1}(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)}{(q-1)x} \\
&\quad - \frac{-(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)(x+iq^{n-1}y)}{(q-1)x} \\
&= \frac{(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)\left[(qx+iy)q^{n-1} - (x+iq^{n-1}y)\right]}{(q-1)x} \\
&= \frac{(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)\left[q^n x + iq^{n-1}y - x - iq^{n-1}y\right]}{(q-1)x} \\
&= \frac{(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)\left[q^n - 1\right]}{(q-1)} \\
&= (x+iy)_q^{n-1} [n]_q
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
D_q^y(x+iy)_q^n &= \frac{(x+iqy)_q^n-(x+iy)_q^n}{(q-1)y} \\
&= \frac{(x+iqy)(x+iq^2y)...(x+iq^{n-1}y)(x+iq^ny)}{(q-1)y} \\
&\quad -\frac{(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y)}{(q-1)y} \\
&= \frac{(x+iqy)(x+iq^2y)...(x+iq^{n-1}y)\left[x+iq^ny-x-iy\right]}{(q-1)y} \\
&= i\frac{(x+iqy)(x+iq^2y)...(x+iq^{n-1}y)\left[q^n-1\right]}{(q-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{1/q}^y D_q^y(x+iy)_q^n &= i\frac{(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-2}y)\left[q^n-1\right]}{(q-1)} \\
&= i(x+iy)_q^{n-1}[n]_q \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

olup böylece (2.32) ve (2.33) eşitlikleri (2.11) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_q^{\overline{z}}(x+iy)_q^n &= \frac{1}{2}\left[D_q^x(x+iy)_q^n+iM_{1/q}^yD_q^y(x+iy)_q^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+iy)_q^{n-1}[n]_q-(x+iy)_q^{n-1}[n]_q\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.32) ve (2.33) eşitliklerini

$$
D_q^z(x+iy)_q^n=\frac{1}{2}\left[D_q^x(x+iy)_q^n-iM_{1/q}^yD_q^y(x+iy)_q^n\right]
$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
D_q^z(x+iy)_q^n &= \frac{1}{2}\left[(x+iy)_q^{n-1}[n]_q+(x+iy)_q^{n-1}[n]_q\right] \\
&= [n]_q(x+iy)_q^{n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.Böylece $f(x,y)=(x+iy)_q^n$ fonksiyonu q-analitik bir fonksiyondur. Buradan fonksiyonun q-diferensiyeli ise

$$
\begin{aligned}
d_q(x+iy)_q^n &= M_q^yD_q^z(x+iy)_q^n]d_qz+[M_q^yD_q^{\overline{z}}(x+iy)_q^n]d_q\overline{z} \\
&= [M_q^yD_q^z(x+iy)_q^n]d_qz \\
&= M_q^y([n]_q(x+iy)_q^{n-1})d_qz \\
&= [n]_q(x+iqy)_q^{n-1}d_qz \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

olur.Ayrıca $(x+iy)_q^n$ fonksiyonunun kompleks eşleniği olan $(x-iy)_q^n$ için $D_q^z(x-iy)_q^n=0$ olup $(x-iy)_q^n$ fonksiyonu q-antianalitiktir.

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ foknksiyonu q-analitik ise (2.18) eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim. (2.24) q-Cauchy-Riemann denklem sisteminden

$$D_q^x u = M_{1/q}^y D_q^y v \Rightarrow M_q^y D_q^x u = D_q^y v,$$

$$D_q^x v = -M_{1/q}^y D_q^y u \Rightarrow M_q^y D_q^x v = -D_q^y u$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
[M_q^y D_q^z f(x,y)]d_q z &= \frac{1}{2} M_q^y [D_q^x (u+iv) - i M_{1/q}^y D_q^y (u+iv)] d_q z \\
&= \frac{1}{2} M_q^y [D_q^x u + i D_q^x v - i M_{1/q}^y D_q^y v] d_q z \\
&= \frac{1}{2} [\underbrace{M_q^y D_q^x u}_{D_q^y v} + D_q^y v + i(\underbrace{M_q^y D_q^x v}_{-D_q^y u} - D_q^y u)] d_q z \\
&= [D_q^y v - i D_q^y u](q-1)(x+iy)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$M_q^y D_q^x v = \frac{v(qx,qy) - v(x,qy)}{(q-1)x} = -\frac{u(x,qy) + u(x,y)}{(q-1)y} = -D_q^y u$$

ve

$$M_q^y D_q^x u = \frac{u(qx,qy) - u(x,qy)}{(q-1)x} = \frac{v(x,qy) - v(x,y)}{(q-1)y} = D_q^y v$$

olup bu eşitlikler yerine yazılırsa

$$[M_q^y D_q^z f(x,y)]d_q z = f(qx,qy) - f(x,y) = d_q f(x,y)$$

elde edilir.

2.3. q-Analitik Polinom Fonksiyonu İçin q-Taylor Formülü

n. dereceden kompleks değerli q-analitik polinom fonksiyonu $P_n(z;q)$'nun q-Taylor açılımı

$$P_n(z;q) = \sum_{k=0}^{n} (D_z^k P_n)(0) \frac{(x+iy)_q^k}{[k]_q!} \tag{2.35}$$

dir. Klasikte Taylor Polinomu $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^k(0) z^k}{k!}$ idi.

$$a_k = \frac{(D_z^k P_n)(0)}{[k]_q!}$$

dersek (2.35) eşitliği

$$P_n(z;q) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+iy)_q^k \tag{2.36}$$

olur. (2.36) da $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$f(z;q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+iy)_q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (D_z^k f)(0) \frac{(x+iy)_q^k}{[k]_q!} \tag{2.37}$$

q-analitik fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon için $D_q^{\overline{z}} f(z) = 0$ olduğu açıktır.
$0 < q < 1$ olmak üzere

$$x^2 + q^{2n} y^2 \leq x^2 + y^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan

$$\left|(x+iy)_q^n\right| \leq |(x+iy)^n| \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)_q^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, (x+iy)^n$$

olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \left|(x+iy)(x+iqy)(x+iq^2y)...(x+iq^{n-1}y)\right| &= |x+iy| \, |x+iqy| \, ... \left|x+iq^{n-1}y\right| \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+q^2y^2}...\sqrt{x^2+q^{2n-2}y^2} \\ &\leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}...\sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)^n} = |(x+iy)^n| \end{aligned}$$

dir.
Ayrıca $f(z)$ analitik fonksiyonunun 0 noktası komşuluğundaki Taylor açılımı klasikte

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

olup serinin yakınsaklık bölgesi $|z| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = L$ dir. Yani L yarıçaplı bir disktir.

$f(z;q)$ q-analitik fonksiyonunun (2.37) ile verilen q-Taylor açılımının yakınsaklık bölgesini inceleyelim:
$f(z;q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{k-1}y)$ fonksiyonu için $u_k = a_k(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{k-1}y)$ dersek

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^k y)}{a_k(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{k-1}y)}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| .(x+iq^k y) \ , |q| < 1 \\ &= R. \, |x| < 1 \\ &\Leftrightarrow \ |x| < \frac{1}{R} = L \ , L > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani y ekseni boyunca $-L < x < L$ ile sınırlı bir şerit elde edilir.

Uyarı 2.3 *n pozitif bir tam sayı ve f fonksiyonu $x = 0$ noktasında n. basamaktan türeve sahip olsun. Bu durumda*

$$D_q^n f(0) = \lim_{x\to 0} D_q^n f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} . \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \tag{2.38}$$

eşitliği geçerlidir. (Bakınız [12])

Analitik f fonksiyonunun klasik anlamdaki Taylor açılımında katsayılar

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

dır. q-analitik $f(z;q)$ fonksiyonunun q-Taylor açılımdaki katsayılar ise

$$a_k^q = \frac{D_{q,z}^k f(0)}{[k]_q!}$$

dır. $D_{q,z}^k f(0)$ yerine eşiti olan $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} . \frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}$ yazılırsa

$$a_k^q = \frac{\frac{f^{(k)}(0)}{k!} . \frac{(q;q)k}{(1-q)^k}}{[k]_q!} = \frac{f^k(0)}{k!} = a_k$$

olup bu katsayılar klasikteki Taylor açılımının katsayıları ile çakışmış olur.Burada

$$\begin{aligned} \frac{(q;q)_k}{(1-q)^k} &= \frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}{(1-q)^k} \\ &= \frac{(1-q)}{1-q}\frac{(1-q^2)}{1-q}...\frac{(1-q^k)}{1-q} \\ &= [1]_q[2]_q...[k]_q \\ &= [k]_q! \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. O halde bir q-analitik fonksiyonun $z = 0$ noktasında her basamaktan klasik anlamda türevi varsa bu taktirde 0 noktası komşuluğundaki Taylor açılımında ortaya çıkan kuvvet serisindeki katsayılar ile q-Taylor açılımındaki katsayılar aynıdır.

Yarıçapı R olan bir $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ diskinin içinde kompleks değerli analitik bir $f(z)$ fonksiyonu için $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ olup

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Taylor açılımı mevcuttur. q-analitik bir $f(z;q)$ fonksiyonu için de $D_q^{\bar{z}} f(z;q) = 0$ olup aynı disk içinde

$$f(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)_q^n$$

q-Taylor açılımı vardır. Buna göre her analitik fonksiyona bir q-analitik fonksiyon karşılık gelir. $q = 1$ için $f(z;q)$ q-analitik fonksiyonu $f(z)$ analitik fonksiyonuna dönüşür.

Jackson'ın q-üstel fonksiyonu q-analitik bir fonksiyondur ve

$$e_q(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)_q^n}{[n]_q!} \tag{2.39}$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon için $u_k = \frac{(x+iy)_q^k}{[k]_q!}$ dersek yakınsaklık bölgesi $q > 1$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(x+iy)_q^{k+1}}{[k+1]_q!} \frac{[k]_q!}{(x+iy)_q^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x+iq^k y}{[k+1]_q} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x+iq^k y}{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(1-q)(x+iq^k y)}{1-q^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(1-q)q^k(\frac{x}{q^k}+iy)}{q^k(\frac{1}{q^k}-q)} \right| = \frac{(q-1)\,|y|}{q} < 1 \\
&\Leftrightarrow \ |y| < \frac{q}{q-1}
\end{aligned}$$

olur.(Yatay şerit)

$q < 1$ olduğunda ise $e_q(z;q)$ fonksiyonunun yakınsaklık bölgesi

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(1-q)(x+iq^k y)}{1-q^{k+1}} \right| = |x|\,(1-q) < 1 \\
&\Leftrightarrow \ |x| < \frac{1}{1-q}
\end{aligned}$$

olur.(Düşey şerit)

$z = x+iy$, $\overline{z} = x-iy$ den x ile y çözülürse $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y = \frac{i}{2}(\overline{z}-z)$ elde edilir. $z = x+iy$, $z_q = x+iqy$, $z_{q^2} = x+iq^2y, ..., z_{q^n} = x+iq^n y$ gösterilimleri kullanılırsa

$$(x+iy)_q^n = (x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y) = z.z_q.z_{q^2}...z_{q^{n-1}}$$

yazılabilir.

$$z_{q^n} = x+iq^n y = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) - \frac{1}{2}q^n(\overline{z}-z) = z(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}q^n) + \overline{z}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}q^n)$$

düşünüldüğünde z_{q^n} ifadeleri hem z hem de $\overline{z}$ e bağlıdır. Böylece q-analitik $f(z;q)$ fonksiyonu için

$$f(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)_q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_z^n f(0)}{[n]_q!}.z.z_q.z_{q^2}...z_{q^{n-1}} \tag{2.40}$$

q-Taylor açılımı hem z hem de $\overline{z}$'e bağlıdır. Bu durumda q-analitik bir fonksiyon klasik anlamda analitik olmayabilir. Ancak a, b kompleks sabitler olmak üzere $f(z) = az+b$ formundaki fonksiyonlar hem q-analitik hem de analitiktir. Aynı zamanda $f(z) = az+b$ fonksiyonu tam fonksiyondur.

Gerçekten $f(z) = az + b = ax + iay + b = ax + b + iay$ den

$$\begin{aligned}
D_q^{\overline{z}} f(z) &= \frac{1}{2}[D_q^x f(z) + iM_{1/q}^y D_q^y f(z)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{aqx + b + iay - ax - b - iay}{(q-1)x} + iM_{1/q}^y \frac{ax + b + iaqy - ax - b - iay}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[a + i\frac{iaq\frac{y}{q} - ia\frac{y}{q}}{(q-1)\frac{y}{q}}\right] \\
&= \frac{1}{2}[a + i\frac{iay(q-1)}{(q-1)y}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $f(z) = az + b$ fonksiyonu q-analitiktir.

2.4. q-Analitik Fonksiyonların q-Laurent Açılımları

$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ bölgesinde analitik bir fonksiyonun Laurent açılımı;

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{z^n}
\end{aligned}$$

dir. $D^* = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kümesindeki her z için $f(z)$ analitik fonksiyonu için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{2.41}$$

Laurent açılımı mevcuttur.
Eğer z_0, $f(z)$ nin kaldırılabilir singüler noktası ise Laurent açılımı ile Taylor açılımı çakışır. z_0 k. basamaktan kutup yeri ise ikinci toplam k'ya kadar gider. z_0 esas kutup yeri ise ikinci toplam sonsuza kadar gider, kesilmez. Serideki b_n katsayıları

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \tag{2.42}$$

dir. Negatif kuvvetli q-Binom

$$(x + iy)_q^{-n} = \frac{1}{(x + iq^{-n}y)_q^n} \tag{2.43}$$

şeklinde verilir ve q-analitik bir fonksiyondur. Yani $D_q^{\overline{z}}(x + iy)_q^{-n} = 0$ dır. Sabit q değeri için

$$\frac{1}{\left|(x + iq^{-n}y)_q^n\right|} \leq \frac{1}{|(x + iy)^n|} \tag{2.44}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\left|(x+iq^{-n}y)_q^n\right| &= \left|x+iq^{-n}y\right|\left|x+iq^{-n+1}y\right|...\left|x+iq^{-1}y\right| \\
&= \sqrt{x^2+\frac{y^2}{q^{2n}}}\sqrt{x^2+\frac{y^2}{q^{2n+2}}}...\sqrt{x^2+\frac{y^2}{q^2}} \\
&\geq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}...\sqrt{x^2+y^2} \\
&= |(x+iy)^n|
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\frac{1}{\left|(x+iq^{-n}y)_q^n\right|} \leq \frac{1}{|(x+iy)^n|} \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(x+iq^{-n}y)^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{|(x+iy)^n|} \tag{2.45}$$

elde edilir.

Lemma 2.1 *[5]Halkasal bir D bölgesinde verilen q-analitik $f(z;q)$ fonksiyonu için yakınsak*

$$f(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x+iy)_q^n \tag{2.46}$$

q-Laurent açılımı vardır.

Diğer taraftan

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n.n!},$$

$$e(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+iy)_q^n}{[n]_q!},$$

$$e(\frac{1}{z};q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+iy)_q^{-n}}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[n]_q!(x+iq^{-n}y)_q^n}$$

dir ve $e(\frac{1}{z};q)$ fonksiyonu $z=0$ hariç her yerde q-analitiktir.

2.5. q-Laplace Operatörü

$f(x,y) = u(x,y)+iv(x;y)$ q-analitik fonksiyonu için q-$Cauchy-Riemann$ denklemleri daha önce

$$D_q^x u = M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y v \quad \text{ve} \quad D_q^x v = M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y u$$

şeklinde elde edilmişti. Kompleks q-türev operatörleri de

$$D_q^z = \frac{1}{2}(D_q^x - iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y) \quad \text{ve} \quad D_q^{\overline{z}} = \frac{1}{2}(D_q^x + iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y)$$

şeklinde tanımlanmıştı.
$f(x,y)$ q-analitik bir fonksiyon ve q-yerdeğiştirme formülü $(D_q^y M_Q^y) = Q(M_Q^y D_q^y)$ şeklinde olmak üzere q-*Laplace* operatörü

$$\Delta_q = 4D_q^z D_q^{\overline{z}} = D_x^2 + \frac{1}{q} M_{\frac{1}{q^2}}^y D_y^2 \tag{2.47}$$

şeklinde elde edilebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
D_q^z D_q^{\overline{z}} &= D_q^z(\frac{1}{2}D_q^x + \frac{i}{2}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y) \\
&= \frac{1}{2}D_q^z(D_q^x) + \frac{i}{2}D_q^z(M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y) \\
&= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}D_q^x D_q^x - \frac{i}{2}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y D_q^x] + \frac{i}{2}[\frac{1}{2}D_q^x M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y - \frac{i}{2}M_{\frac{1}{q}}^y \underbrace{D_q^y M_{\frac{1}{q}}^y}_{\frac{1}{q}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y} D_q^y] \\
&= \frac{1}{4}D_x^2 - \frac{i}{4}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y D_q^x + \frac{i}{4}D_q^x M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y + \frac{1}{4}M_{\frac{1}{q}}^y \frac{1}{q} M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y D_q^y \\
&= \frac{1}{4}D_x^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{q}\underbrace{M_{\frac{1}{q}}^y M_{\frac{1}{q}}^y}_{M_{\frac{1}{q^2}}^y} D_y^2 \\
&= \frac{1}{4}D_x^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{q}M_{\frac{1}{q^2}}^y D_y^2 \\
&\Rightarrow \; 4D_q^z D_q^{\overline{z}} = D_x^2 + \frac{1}{q}M_{\frac{1}{q^2}} D_y^2
\end{aligned}$$

olur. (2.17) eşitliğinden dolayı D_q^z operatörü q-analitik bir fonksiyon için tıpkı bir D_q^x operatörü gibi davranır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
D_q^z f &= \frac{1}{2}[D_q^x f - iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y f] \\
&= \frac{1}{2}[D_q^x(u+iv) - iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y(u+iv)] \\
&= \frac{1}{2}[D_q^x u + D_q^x v \underbrace{- iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y u}_{iD_q^x v} + \underbrace{M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y v}_{D_q^x u}] \\
&= \frac{1}{2}[2D_q^u + 2iD_q^x v] \\
&= D_q^x u + iD_q^x v \\
&= D_q^x(u+iv) \\
&= D_q^x f
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.7 *[5] q-Laplace denklemini sağlayan $\phi(x,y)$ reel değerli fonksiyonuna q-harmonik fonksiyon denir. Yani $\phi(x,y)$ q-harmonikse*

$$\Delta_q \phi(x,y) = 0 \tag{2.48}$$

dır.

Tanım 2.8 *$u(x,y)$ reel değerli fonksiyonu uygun bir D kümesi üzerinde q-harmonik olsun. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, D kümesinde q-analitik olacak şekilde $v(x,y)$ reel değerli fonksiyonu bulunabilirse v ye u nun kompleks q-harmonik eşleniği denir.*

$\Delta_q f = 4D_q^z D_q^{\bar{z}} f = 0$ denklemini sağlayan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ q-analitik fonksiyonunun reel ve sanal kısımları eşlenik q-harmonik fonksiyonlar olur. Yani $\Delta_q u(x,y) = 0, \Delta_q v(x,y) = 0$.Örnek olarak q-Binom fonksiyonunu $n = 2$ için göz önüne alırsak

$$(x+iy)_q^2 = (x+iy)(x+iqy) = x^2 - qy^2 + (1+q)ixy$$

olur. Burada $u(x,y) = x^2 - qy^2$ ve $v(x,y) = (1+q)xy$ fonksiyonları birbirinin q-harmonik eşleniğidir. $f(x,y) = (x+iy)_q^n, n = 1,2,...$ fonksiyonunun q-analitik olduğunu biliyoruz.

$u(x,y) = x^2 - qy^2$ fonksiyonu için $\Delta_q u(x,y) = 0$ dır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
D_q^{\bar{z}}(x^2 - qy^2) &= \frac{1}{2}[D_q^x(x^2 - qy^2) + iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y(x^2 - qy^2)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2q^2 - qy^2 - x^2 + qy^2}{(q-1)x} + iM_{\frac{1}{q}}^y \frac{x^2 - q^3y^2 - x^2 + qy^2}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2(q^2-1)}{(q-1)x} + i\frac{-q^3\frac{y^2}{q^2} + q\frac{y^2}{q^2}}{(q-1)\frac{y}{q}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(q+1)x + i\frac{-q^2y^2 + y^2}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{2}[(q+1)x - i(q+1)y] \\
&= \frac{1}{2}(q+1)(x-iy)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
D_q^z D_q^{\overline{z}}(x^2-qy^2) &= D_q^z[\frac{1}{2}(q+1)(x-iy)] \\
&= \frac{1}{2}\left[D_q^x(\frac{1}{2}(q+1)(x-iy)-iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y(\frac{1}{2}(q+1)(x-iy))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(q+1)(qx-iy)-(q+1)(x-iy)}{(q-1)x}\right. \\
&\quad \left. -iM_{\frac{1}{q}}^y \frac{(q+1)(x-iqy)-(q+1)(x-iy)}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(q+1)(qx-iy-x+iy)}{(q-1)x}-i\frac{(q+1)(x-iy)-(q+1)(x-i\frac{y}{q})}{(q-1)\frac{y}{q}}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x(q+1)(q-1)}{(q-1)x}-i\frac{(q+1)(x-iy-x+i\frac{y}{q})}{(q-1)\frac{y}{q}}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(q+1)-i\frac{(q+1)(-iqy+iy)}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{4}[(q+1)+i^2(q+1)] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

dır. O halde $4D_q^z D_q^{\overline{z}} u(x,y)=0$ olup $\Delta_q u(x,y)=0$ denklemi sağlanır. Benzer olarak $v(x,y)=(1+q)xy$ için de $\Delta_q v(x,y)=0$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir.O halde $\Delta_q v(x,y)=\Delta_q[(1+q)xy]=4D_q^z D_q^{\overline{z}}[(1+q)xy]=0$ olup $v(x,y)=(1+q)xy$ fonksiyonu da q-harmoniktir. Böylece $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-qy^2+i(1+q)xy$ fonksiyonu q-analitik ve $u(x,y)$ ile $v(x,y)$ fonksiyonları q-Laplace denklemini sağlayıp q-harmoniktir. Yani u ile v fonksiyonları q-harmonik eşlenik olur.
Herhangi $n=1,2,...$ için polinom tipli q-harmonik fonksiyonlar

$$
u(x,y)=\frac{1}{2}[(x+iy)_q^n+(x-iy)_q^n]\ ,\ v(x,y)=\frac{1}{2i}[(x+iy)_q^n-(x-iy)_q^n] \qquad (2.49)
$$

formundadır.

2.6. Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyon Olarak q-Analitik Fonksiyon

Bu kesimdeki sonuçlar [5] nolu kaynaktan alınmıştır. Önceki bölümlerde q-analitik fonksiyonların z ve $\overline{z}$'in ikisine de bağlı olduğunu ve genelde analitik olmadıklarını gösterdik. Fakat bazı q-analitik fonksiyonlar genelleştirilmiş analitik fonksiyonların sınıfına girmektedir.
Bu fonksiyonların sınıfı $D-Bar$ problemi ($\overline{\partial}-$problemi) ile ilişkilidir.

$$
\frac{\partial \phi(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}}=f(z,\overline{z}) \qquad (2.50)
$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann denkleminin çözümleri genelleştirilmiş analitik fonksiyonların bir alt sınıfıdır.$\phi(z,\overline{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde yazılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = g(x,y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = h(x,y) \tag{2.51}$$

genelleştirilmiş Cauchy-Riemann denklemleri elde edilir.

Tanım 2.9 *Uygun bir D bölgesinde klasik anlamda $\phi(z,\overline{z})$ kompleks fonksiyonu*

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = A(z,\overline{z})\phi + B(z,\overline{z})\overline{\phi} \tag{2.52}$$

denklemini sağlarsa $\phi(z,\overline{z})$ fonksiyonuna genelleştirilmiş analitik fonksiyon denir.

$B = 0$ olması halinde bu denklem

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = A(z,\overline{z})\phi \tag{2.53}$$

$D - Bar$ denklemine dönüşür.Bu denklemin çözümü

$$\phi(z,\overline{z}) = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}} \tag{2.54}$$

şeklindedir. Burada $w(z)$ bir analitik fonksiyondur. Gerçekten $\zeta = \xi + i\eta$ ve $d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = -2id\xi d\eta$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\iint \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z}\underbrace{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}_{-2id\xi d\eta} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

olup buradan

$$\phi(z,\overline{z}) = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}} = w(z)e^{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\xi d\eta} \tag{2.55}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{\partial \phi(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}} = w(z)A(z,\overline{z})e^{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\xi d\eta} = A(z,\overline{z})\phi(z,\overline{z}) \tag{2.56}$$

elde edilir ki bu da $\phi(z,\overline{z})$ fonksiyonunun (2.53) denklemini sağladığını, yani genelleştirilmiş analitik bir fonksiyon olduğunu gösterir. O halde

$$\phi(z,\overline{z}) = w(z)\exp[\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}]$$

fonksiyonu $D - Bar$ denkleminin çözümüdür.

$\phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n$ kompleks q-Binom fonksiyonunun genelleştirilmiş analitik fonksiyon olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce $f(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+iq^k y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun klasik anlamda x değişkenine göre kısmi türevini alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+iq^k y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[\ln(x+iy) + \ln(x+iqy) + ... + \ln(x+iq^{n-1}y)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \ln[(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[\ln(x+iy)_q^n] \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+iy)_q^n}{(x+iy)_q^n}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+iy)_q^n}{(x+iy)_q^n} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{n-1} \ln(x+iq^k y) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+iq^k y} \tag{2.58}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+iy)_q^n = (x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+iq^k y} \text{ ve } \frac{\partial}{\partial y}(x+iy)_q^n = (x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{iq^k}{x+iq^k y} \tag{2.59}$$

eşitlikleri de yazılabilir. Bu eşitliklerden klasik anlamda bildiğimiz kompleks kısmi türev operatörü olan

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.60}$$

operatörünün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(x+iy)_q^n &= \frac{1}{2}\left[(x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+iq^k y} - (x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{q^k}{x+iq^k y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-q^k}{x+iq^k y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+iy)_q^n (1-q) \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-q^k}{(1-q)(x+iq^k y)}\right] \\
&= \frac{1-q}{2}(x+iy)_q^n \sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k]_q}{(x+iq^k y)}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte daha önce bulduğumuz

$$x + iq^k y = \frac{1+q^k}{2} z + \frac{1-q^k}{2}\overline{z}$$

ifadesi de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\phi(z,\overline{z}) &= \phi(z,\overline{z})\frac{1-q}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k]_q}{\frac{1+q^k}{2}z+\frac{1-q^k}{\overline{z}}} \\ &= \phi(z,\overline{z})(1-q)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k]_q}{(1+q^k)z+(1-q^k)\overline{z}} \end{aligned} \tag{2.62}$$

bulunur. Eğer burada

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k]_q}{(1+q^k)z+(1-q^k)\overline{z}} = A(z,\overline{z})$$

dersek

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\phi(z,\overline{z}) = A(z,\overline{z})\phi(z,\overline{z})$$

olur ki bu da $\phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n$ fonksiyonunun $D-Bar$ denklemini sağladığını yani genelleştirilmiş analitik fonksiyon olduğunu gösterir. Burada q parametresi analitiklikten sapmayı ifade eder ve $q = 1$ için $A(z,\overline{z}) = 0$ olur. Bu durumda $D-Bar$ denklemi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\phi(z,\overline{z}) = 0$ analitiklik durumuna indirgenir. (2.53) ve (2.54) numaralı eşitliklerin kullanılmasıyla q-Binom için

$$(x+iy)_q^n = w(z)\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{1-q}{\zeta - z}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[k]_q}{(1+q^k)\zeta+(1-q^k)\overline{\zeta}}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right] \tag{2.63}$$

yeni bir gösterilimi elde edilir. Burada

$$w(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k) \tag{2.64}$$

dır. Bu gösterilim kompleks q-Binom $(x+iy)_q^n$ ve kompleks Binom $(x+iy)^n = z^n$ arasındaki ilişkiyi gösterir.

Şimdi (2.63) ve (2.64) eşitliklerinin nasıl elde edildiğini gösterelim.
Analitik olmayan $\Phi(z)$ için genelleştirilmiş Cauchy formülü $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{\Phi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{2.65}$$

şeklindedir. Bu formüldeki integralleri

$$\Phi_n(z) = x + iq^n y = \frac{1+q^n}{2}z + \frac{1-q^n}{2}\overline{z} \tag{2.66}$$

fonksiyonu için hesaplayalım. Bu fonksiyon q-analitik değildir. Çünkü

$$
\begin{aligned}
D_q^{\overline{z}}\Phi_n(z) &= \frac{1}{2}[D_q^x\Phi_n(z) + iM_{\frac{1}{q}}^y D_q^y\Phi_n(z)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{qx+iq^ny-x-iq^ny}{(q-1)x} + iq\frac{x+iq^ny-x-iq^{n-1}y}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{qx-x}{(q-1)x} + \frac{-q^{n+1}y+q^ny}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{q^ny(1-q)}{(q-1)y}\right] \\
&= \frac{1-q^n}{2} \neq 0
\end{aligned}
$$

dır. R yarıçaplı bir disk için (2.65) deki eğrisel integral

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\frac{1+q^n}{2}\zeta + \frac{1-q^n}{2}\overline{\zeta}}{\zeta - z}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+q^n}{2}\oint_\Gamma d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\frac{1+q^n}{2}z\oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1-q^n}{2}\oint_\Gamma \frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-z} \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. Burada

$$
\oint_\Gamma d\zeta = 0\ ,\ \oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i
$$

olup eğrisel integralin değeri

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\frac{1+q^n}{2}\zeta + \frac{1-q^n}{2}\overline{\zeta}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1+q^n}{2}z + \frac{1}{2\pi i}\frac{1-q^n}{2}\oint_\Gamma \frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-z} \qquad (2.68)
$$

olur. Γ eğrisi üzerinde $\zeta\overline{\zeta} = R$ olduğundan

$$
= \frac{1+q^n}{2}z + \frac{1}{2\pi i}\frac{1-q^n}{2}\frac{R}{z}\oint_\Gamma (-\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-z})d\zeta = \frac{1+q^n}{2}z \qquad (2.69)
$$

elde edilir.(2.65) deki katlı integral ise Cauchy-Pompeiu gösteriliminden

$$
-\frac{1}{\pi}\frac{1-q^n}{2}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} = \frac{1-q^n}{2}\overline{z} \qquad (2.70)
$$

olur. Sonuç olarak (2.65) integrali

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\Phi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} = \frac{1+q^n}{2}z + \frac{1-q^n}{2}\overline{z} = \Phi_n(z)
$$

olarak hesaplanır. (2.66) daki $\Phi_n(z)$ fonksiyonu $D - Bar$ denklemini sağlar. Gerçekten

$$\frac{\partial \Phi_n(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}} = A_n(z,\overline{z})\Phi_n(z,\overline{z}) \tag{2.71}$$

olmalı.

$$A_n(z,\overline{z}) = \frac{1-q^n}{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}} \tag{2.72}$$

seçersek

$$A_n(z,\overline{z})\Phi_n(z,\overline{z}) = \frac{1-q^n}{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}}\frac{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}}{2} = \frac{1-q^n}{2} = \frac{\partial \Phi_n(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}} \tag{2.73}$$

olur. Bu fonksiyon için (2.54) gösterilimi

$$\Phi_n(z,\overline{z}) = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}} \tag{2.74}$$

şeklindedir ve bu fonksiyonun da $D - Bar$ denklemini sağladığını görmüştük. (2.74) eşitliğini kontrol etmek için integrali açıkça hesaplayıp, R yarıçaplı disk için $w(z)$ analitik fonksiyonunu bulacağız. (2.74) deki çift katlı integral için $\zeta = \xi + i\eta$ ve $D = \{\zeta : |\zeta| \leq R\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A_n(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\frac{1-q^n}{(1+q^n)\zeta+(1-q^n)\overline{\zeta}}}{\zeta - z}(-2id\xi d\eta) \\ &= -\frac{1-q^n}{\pi}\iint\limits_D \frac{d\xi d\eta}{[(1+q^n)\zeta+(1-q^n)\overline{\zeta}][\zeta - z]} \end{aligned} \tag{2.75}$$

yazılabilir. Bu I integrali $\zeta = re^{i\theta}$ kutupsal koordinatın kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} I &= \frac{q^n-1}{\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{[(1+q^n)re^{i\theta}+(1-q^n)re^{-i\theta}][re^{i\theta}-z]} \\ &= \frac{q^n-1}{\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{drd\theta}{[(1+q^n)e^{i\theta}+(1-q^n)e^{-i\theta}][re^{i\theta}-z]} \\ &= \frac{q^n-1}{\pi}\int_0^R \frac{dr}{r}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[(1+q^n)e^{i\theta}+(1-q^n)e^{-i\theta}][e^{i\theta}-\frac{z}{r}]} \end{aligned} \tag{2.76}$$

haline gelir. Burada

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[(1+q^n)e^{i\theta}+(1-q^n)e^{-i\theta}][e^{i\theta}-\frac{z}{r}]}$$

diyelim.I_0 integrali için $u = e^{i\theta}$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{i}\oint\limits_{|u|=1} \frac{du}{u} \frac{1}{[(1+q^n)u + (1-q^n)\frac{1}{u}][u - \frac{z}{r}]} \\ &= \frac{1}{i(1+q^n)} \oint\limits_{|u|=1} \frac{du}{\left[u^2 + \frac{1-q^n}{1+q^n}\right]\left[u - \frac{z}{r}\right]} \end{aligned} \tag{2.77}$$

olur. $0 < q < 1$ için integrant, birim çember içinde $u = \mp i\sqrt{\frac{1-q^n}{1+q^n}}$ ve $|z| < r$ için $u = \frac{z}{r}$ şeklinde üç basit kutba sahiptir.Rezidü teoreminden I_0 integralinin değeri

$$I_0 = \frac{2\pi}{1+q^n}\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{\frac{1-q^n}{1+q^n} + \frac{z^2}{r^2}}, & |z| > r \\ 0\ , & |z| < r \end{matrix}\right\} \tag{2.78}$$

dir. Böylece I_0 yerine konulursa I integrali

$$\begin{aligned} I &= \frac{q^n - 1}{\pi}\int_0^R \frac{dr}{r}\frac{2\pi}{1+q^n}\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{\frac{1-q^n}{1+q^n} + \frac{z^2}{r^2}}, & |z| > r \\ 0\ , & |z| < r \end{matrix}\right\} \\ &= 2\frac{1-q^n}{1+q^n}\int_0^R \frac{dr}{r}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{\frac{1-q^n}{1+q^n} + \frac{z^2}{r^2}}, & |z| > r \\ 0\ , & |z| < r \end{matrix}\right\} \end{aligned} \tag{2.79}$$

ya da

$$\begin{aligned} I &= 2\frac{1-q^n}{1+q^n}\int_0^{|z|} \frac{1}{\frac{1-q^n}{1+q^n} + \frac{z^2}{r^2}}\frac{dr}{r} \\ &= 2\frac{1-q^n}{1+q^n}\int_0^{|z|} \frac{r\,dr}{z^2 + \frac{1-q^n}{1+q^n}r^2} \\ &= \ln\left(z^2 + \frac{1-q^n}{1+q^n}r^2\right)\Big|_0^{|z|} \\ &= \ln\left(z^2 + \frac{1-q^n}{1+q^n}|z|\right) - \ln z^2 \\ &= \ln\left(\frac{z^2 + \frac{1-q^n}{1+q^n}|z|^2}{z^2}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1-q^n}{1+q^n}\frac{|z|^2}{z^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1+q^n)z^2 + (1-q^n)|z|^2}{(1+q^n)z^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1+q^n)z + (1-q^n)\overline{z}}{(1+q^n)z}\right) \end{aligned} \tag{2.80}$$

olur. Böylece (2.74) için

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z,\overline{z}) &= \frac{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}}{2} = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}} \\
\frac{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}}{2} &= w(z)e^{\ln\frac{(1+q^n)z+(1-q^n)\overline{z}}{(1+q^n)z}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{w(z)}{(1+q^n)z} \\
w(z) &= \frac{(1+q^n)}{2}z
\end{aligned}$$

olur. n. dereceden kompleks q-Binom fonksiyonu $\Phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n = (x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y)$ idi. Bu fonksiyonu $\Phi(z) = \Phi_0(z)\Phi_1(z)...\Phi_{n-1}(z)$ olarak yeniden yazalım. Burada $\Phi_n(z) = x+iq^n y$ dersek

$$\Phi_n(z) = \frac{1+q^n}{2}z + \frac{1-q^n}{2}\overline{z}$$

olur. $\Phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n$ fonksiyonu için (2.53) $D-Bar$ denkleminden $A(z,\overline{z})$ çözülürse

$$A(z,\overline{z}) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}}{\Phi(z,\overline{z})}$$

olup

$$A(z,\overline{z}) = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k]_q}{(1+q^k)z+(1-q^k)\overline{z}}$$

elde edilebilir.
$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}} = A(z,\overline{z})\Phi$ denkleminin çözümlerinden birinin de

$$\Phi(z,\overline{z}) = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}$$

olduğunu göstermiştik. Burada $w(z)$ herhangi bir analitik fonksiyondur. Buradaki Φ fonksiyonu için $\Phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n$ alırsak

$$\Phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n = w(z)e^{\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}} \tag{2.81}$$

olur. Çift katlı integrali R yarıçaplı disk üzerinden hesaplarsak $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta} &= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{(1-q)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[k]_q}{(1+q^k)\zeta+(1-q^k)\overline{\zeta}}}{\zeta-z}d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(q^k-1)\iint\limits_D \frac{d\xi d\eta}{[(1+q^k)\zeta+(1-q^k)\overline{\zeta}][\zeta-z]}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

olur. (2.82) eşitliğinde toplamın önündeki katlı integralin değeri (2.80) de

$$\frac{q^k - 1}{\pi} \iint\limits_D \frac{d\xi d\eta}{[(1+q^k)\zeta + (1-q^k)\overline{\zeta}][\zeta - z]} = \ln \frac{(1+q^k)z + (1-q^k)\overline{z}}{(1+q^k)z} \tag{2.83}$$

olarak hesaplanmıştı. O halde (2.82) integralinin değeri

$$\frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{(1+q^k)z + (1-q^k)\overline{z}}{(1+q^k)z} \tag{2.84}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\Phi(z,\overline{z}) &= (x+iy)_q^n = w(z) e^{\frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}} \\
&= w(z) e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{(1+q^k)z + (1-q^k)\overline{z}}{(1+q^k)z}} \\
&= w(z) e^{\ln \prod\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(1+q^k)z + (1-q^k)\overline{z}}{(1+q^k)z}} \\
&= w(z) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\frac{1+q^k}{2} z + \frac{1-q^k}{2} \overline{z}}{\frac{1+q^k}{2} z} \\
&= w(z) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2(x + iq^k y)}{(1+q^k)z} \\
&= w(z) \frac{2^n}{z^n \prod\limits_{k=0}^{n-1} (1+q^k)} (x+iy)_q^n
\end{aligned} \tag{2.85}$$

elde edilir. Buradan da $w(z)$ çözülürse

$$w(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1} (1+q^k) \tag{2.86}$$

bulunur.

Sonuç 2.1 *q-analitik bir fonksiyon klasik anlamda genelleştirilmiş analitik bir fonksiyon olabilir. Örneğin $\phi(z,\overline{z}) = (x+iy)_q^n$ fonksiyonu q-analitik, aynı zamanda bir genelleştirilmiş analitik fonksiyondur. Fakat klasik anlamda bir analitik fonksiyon değildir.*

2.7. Kompleks q-Analitik Fraktallar

Tanım 2.10 *Kompleks değerli bir $f(x,y)$ fonksiyonu için*

$$f(qx,qy) = q^d f(x,y) \tag{2.87}$$

sağlanırsa $f(x,y)$ fonksiyonuna d.dereceden homojen fonksiyon denir.

Bu fonksiyonun q-diferensiyeli

$$d_q f = f(qx,qy) - f(x,y) = q^d f(x,y) - f(x,y) = (q^d - 1)f(x,y) \tag{2.88}$$

olur. Böylece q-diferensiyel

$$(q^d - 1)f = (M_q^y D_q^z f)d_q z + (M_q^y D_q^{\bar{z}} f)d_q \bar{z} \tag{2.89}$$

olarak yeniden yazılabilir.
$f(x,y)$ q-analitik bir fonksiyon ise $D_q^{\bar{z}} f = 0$ olup buradan

$$(q^d - 1)f = (M_q^y D_q^z f)d_q z = (M_q^y D_q^z f)(q-1)z$$

ve buradan

$$\frac{q^d - 1}{q - 1} f = z M_q^y D_q^z f \Rightarrow z M_q^y D_q^z f = [d]_q f \tag{2.90}$$

homojen q-fark denklemi elde edilir. Klasik anlamda; $z = f(x,y)$ n. dereceden homojen, yani $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ olsun. Bu fonksiyon

$$x z_x + y z_y = n f(x,y)$$

kısmi türevli denklemini sağlar. $f(x,y) = (x+iy)_q^n$ fonksiyonu n. dereceden homojendir. Yani

$$(\lambda x + i\lambda y)_q^n = \lambda^n (x+iy)_q^n \tag{2.91}$$

dir. Burada λ yerine q yazarsak, q-analitiklik durumundan dolayı $D_q^{\bar{z}}(x+iy)_q^n = 0$ olup (2.90) denkleminden

$$z M_q^y D_q^z (x+iy)_q^n = [n]_q (x+iy)_q^n \tag{2.92}$$

elde edilebilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
z M_q^y D_q^z (x+iy)_q^n &= [n]_q (x+iy)_q^n \\
z M_q^y [n]_q (x+iy)_q^{n-1} &= [n]_q (x+iy)_q^n \\
(x+iy)(x+iqy)_q^{n-1} &= (x+iy)_q^n \\
(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^{n-1}y) &= (x+iy)_q^n \\
(x+iy)_q^n &= (x+iy)_q^n
\end{aligned}$$

dir.

$$f(x,y) = (x+iy)_q^n A_q(x,y) \tag{2.93}$$

fonksiyonuna (2.90) q-fark denkleminin genel q-analitik fraktal çözümü denir. Burada $A_q(x,y) = A_q(qx,y) = A_q(x,qy) = A_q(qx,qy)$ olup $A_q(x,y)$ fonksiyonu

x ve y ye göre kompleks değerli q-periyodik fonksiyondur. Gerçekten $D_q^z A = 0$ olması nedeniyle

$$\begin{aligned} zM_q^y D_q^z[(x+iy)_q^n A_q(x,y)] &= zM_q^y[[n]_q(x+iy)_q^{n-1}A_q(x,y)] \\ &= z[n]_q(x+iy)_q^{n-1}A_q(x,y) \\ &= [n]_q.(x+iy)(x+iqy)...(x+iq^n y)A_q(x,y) \\ &= [n]_q(x+iy)_q^n A_q(x,y) \\ &= [n]_q f(x,y) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca (2.93) ile verilen $f(x,y) = (x+iy)_q^n A_q(x,y)$ fonksiyonu q-analitik, q-periyodik ve n. dereceden homojendir. n. dereceden bir homojen fonksiyon için (2.89) denklemini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned} (q^d-1)f(x,y) &= (M_q^y D_q^z f)d_q z + (M_q^y D_q^{\overline{z}} f)d_q\overline{z} \\ &= M_q^y[\frac{1}{2}D_q^x f - \frac{i}{2}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y f]d_q z + M_q^y[\frac{1}{2}D_q^x f + \frac{i}{2}M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y f] \\ &= [\frac{1}{2}M_q^y D_q^x f - \frac{i}{2}D_q^y f](q-1)z + [\frac{1}{2}M_q^y D_q^x f + \frac{i}{2}D_q^y f](q-1)\overline{z} \\ &= \frac{(q-1)z}{2}M_q^y D_q^x f - i\frac{(q-1)z}{2}D_q^y f \\ &\quad + \frac{(q-1)\overline{z}}{2}M_q^y D_q^x f + i\frac{(q-1)\overline{z}}{2}D_q^y f \\ &= \left[\frac{(q-1)z}{2} + \frac{(q-1)\overline{z}}{2}\right] M_q^y D_q^x f - i\left[\frac{(q-1)z}{2} - \frac{(q-1)\overline{z}}{2}\right] D_q^y f \\ &= (q-1)xM_q^y D_q^x f + (q-1)yD_q^y f \\ &= (q-1)[xM_q^y D_q^x f + yD_q^y f] \\ &\Rightarrow \frac{q^d-1}{q-1}f(x,y) = xM_q^y D_q^x f + yD_q^y f \\ &\Rightarrow [d]_q f(x,y) = xM_q^y D_q^x f + yD_q^y f \end{aligned} \tag{2.94}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem klasikteki n. dereceden homojen fonksiyon için $xz_x + yz_y = nz$ denklemine benzemektedir.

Uyarı 2.4 *q-periyodik bir fonksiyon genel formda*

$$A_q(x,y) = (xy)^{-s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-s(k+l)}G(q^k x, q^l y) \tag{2.95}$$

formundadır. Gerçekten

$$A_q(qx,y) = (qxy)^{-s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-s(k+l)}G(q^{k+1}x, q^l y)$$

olup burada k yerine $k-1$ yazarak indis kaydırması yaparsak

$$\begin{aligned} A_q(qx,y) &= (qxy)^{-s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-s(k-1+l)}G(q^k x, q^l y) \\ &= (xy)^{-s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-s(k+l)}G(q^k x, q^l y) \\ &= A_q(x,y) \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak $A_q(x, qy) = A_q(x, y)$ olduğu görülebilir. Yani $A_q(x, y)$ fonksiyonu hem x hem de y ye göre q-periyodiktir.

Buna göre (2.93) q-fark denkleminin genel q-analitik fraktal çözümü

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+iy)_q^n A_q(x,y) \\ &= (xy)^{-s}(x+iy)_q^n \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-s(k+l)} G(q^k x, q^l y) \end{aligned} \tag{2.96}$$

olur. $G(x, y) = \sin x. \sin y$ olursa (2.95) den

$$A_q(x,y) = (xy)^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(q^k x)\sin(q^l y)}{q^{s(k+l)}} \tag{2.97}$$

elde edilir.Bu fonksiyon q-periyodiktir. Gerçekten

$$\begin{aligned} A_q(qx,qy) &= (qx,qy)^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(q^{k+1}x)\sin(q^{l+1}y)}{q^{s(k+l)}} \\ &= (xy)^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(q^{k+1}x)\sin(q^{l+1}y)}{q^{2s}q^{s(k+l)}} \end{aligned}$$

olup k yerine $k-1$, l yerine $l-1$ yazarak indis kaydırması yaparsak

$$A_q(qx,qy) = (xy)^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(q^k x)\sin(q^l y)}{q^{s(k+l)}} = A_q(x,y) \tag{2.98}$$

olur.Başka bir seçim olarak $G(x, y) = (1 - e^{ix})(1 - e^{iy})$ alınırsa

$$A_q(x,y) = (xy)^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{iq^k x})(1-e^{iq^l y})}{q^{s(k+l)}} \tag{2.99}$$

fonksiyonunun da q-periyodik olduğu görülebilir.Bu fonksiyonu

$$A_q(x,y) = x^{-s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{iq^k x}}{q^{sk}} y^{-s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{iq^k y}}{q^{sl}}$$

şeklinde q-periyodik parçalar şeklinde ayırabiliriz.

2.8. Çift Katlı Mellin Seri Genişletmesi

$A_q(qx) = A_q(x)$, $B_q(qy) = B_q(y)$ olmak üzere $A_q(x, y)$ fonksiyonunu $A_q(x, y) = A_q(x)B_q(y)$ olarak q-periyodik parçalara ayrıldığını düşünelim. $\ln x = t$ ve $\ln q = T$ değişken değiştirmesi ile $A_q(qx) = A_q(x)$ olduğundan

$$A_q(e^T e^t) = A_q(e^t) \tag{2.100}$$

yazabiliriz. $A_q(e^t) = F(t)$ dersek $A_q(e^{t+T}) = F(t+T)$ olur ki buradan $F(t+T) = F(t)$ dir. Yani $F(t)$ fonksiyonu $T-$periyodiktir. Bu durumda $F(t)$ Fourier serisine açılabilir.

$2T$ periyotlu $F(t)$ fonksiyonu için $-T \leq t \leq T$ olmak üzere kompleks Fourier serisi

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{T}} \tag{2.101}$$

olup

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(t)e^{-\frac{in\pi t}{T}}dt \tag{2.102}$$

dir. (2.100) deki fonksiyonu T periyotlu olup -$\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ olmak üzere

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{\frac{T}{2}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2in\pi t}{T}} \tag{2.103}$$

ve

$$c_n = \frac{1}{2\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)e^{-\frac{in\pi t}{\frac{T}{2}}}dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} F(t)e^{-\frac{2in\pi t}{T}}dt \tag{2.104}$$

dir. Buna göre $A_q(x)$ de kompleks bir seri olarak gösterilebilir (Mellin Serisi). Böylece c_n katsayıları için $T = \ln q$, $\ln x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ olması nedeniyle

$$c_n = \frac{1}{\ln q}\int_{1}^{q} A_q(x)x^{\frac{-2\pi in}{\ln q}}\frac{dx}{x} \tag{2.105}$$

ve Fourier serisi

$$A_q(x) = F(\ln x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^{\frac{i2\pi n}{\ln q}} \tag{2.106}$$

olur.Benzer yolla $B_q(y)$ için d_n Fourier katsayıları

$$d_n = \frac{1}{\ln q}\int_{1}^{q} B_q(y)y^{-\frac{2\pi in}{\ln q}}\frac{dy}{y} \tag{2.107}$$

ve Fourier serisi

$$B_q(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n y^{\frac{i2\pi in}{\ln q}} \tag{2.108}$$

olur. Bu iki serinin bir araya getirilmesiyle $A_q(x,y)$ q-periyodik fonksiyonu

$$A_q(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n d_m x^{\frac{i2\pi n}{\ln q}} y^{\frac{i2\pi m}{\ln q}} \tag{2.109}$$

olarak çift katlı Mellin serisi şeklinde gösterilebilir.(2.93) deki $f(x,y) = (x + iy)_q^n A_q(x,y)$ fonksiyonu da $(x+iy)_q^n$ Gauss-Binom formülüne göre açılırsa ve (2.109) daki $A_q(x,y)$ yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k d_m x^{\frac{i2\pi k}{\log q}} y^{\frac{i2\pi m}{\log q}} \sum_{l=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_q q^{\frac{l(l-1)}{2}} i^l x^{n-l} y^l \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k d_m \sum_{l=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_q i^l x^{n-l+\frac{i2\pi k}{\log q}} y^{l+\frac{i2\pi m}{\log q}} \end{aligned} \tag{2.110}$$

elde edilir.Yani kendine benzeyen q-analitik fonksiyon (q-analitik fraktal) olan $f(x,y)$ fonksiyonu çift katlı Mellin serisi olarak ifade edilebilir.

2.9. q-Analitik Fraktal Örnekleri

$$A_q(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right) \tag{2.111}$$

fonksiyonu x ve y ye göre q-periyodiktir.Gerçekten

$$\begin{aligned} A_q(qx,qy) &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|qx|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|qy|\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}(\ln q + \ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}(\ln q + \ln|y|\right) \\ &= \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right) \\ &= A_q(x,y). \end{aligned}$$

$A_q(x,y)$ nin (2.111) daki gibi seçilmesiyle

$$f_n(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)(x+iy)_q^n \tag{2.112}$$

n. dereceden kendine benzer q-analitik fraktalların homojen bir sınıfı elde edilir. $\operatorname{Re} f_n(x,y) = u_n$ ve $\operatorname{Im} f_n(x,y) = v_n$ olmak üzere bu fonksiyonlar kendine benzer q-harmonik fonksiyonların bir sınıfıdır.
$n = 0$ için

$$f_0(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)(x+iy)_q^0 = A_q(x,y)$$

dir.$n = 2$ için

$$
\begin{aligned}
f_2(x,y) &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)(x+iy)_q^2 \\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)[x^2-qy^2+i[2]_q xy]
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
u_2 &= (x^2-qy^2)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right) \\
v_2 &= [2]_q.xy\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

elde edilir.
$n = 3$ için

$$
f_3(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)(x+iy)_q^3
$$

olup

$$
\begin{aligned}
(x+iy)_q^3 &= (x+iy)(x+iqy)(x+iq^2y) \\
&= (x^2-qy^2+i[2]_q xy)(x+iq^2y) \\
&= x^3+ix^2q^2y-qxy^2-iq^3y^3+i[2]_q x^2y-[2]_q q^2xy^2 \\
&= x^3-qxy^2-[2]_q q^2xy^2+iy(x^2q^2-q^3y^2+[2]_q x^2) \\
&= x(x^2-qy^2-[2]_q q^2y^2)+iy([2]_q x^2+q^2(x^2-qy^2))
\end{aligned}
$$

den

$$
\begin{aligned}
u_3(x,y) &= x(x^2-qy^2-[2]_q q^2y^2)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right) \\
v_3(x,y) &= y([2]_q x^2+q^2(x^2-qy^2))\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|x|\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\ln q}\ln|y|\right)
\end{aligned} \tag{2.114}
$$

elde edilir.

3. KOMPLEKS q-İNTEGRALLER

Önceki kesimlerde reelde Jackson q-integralinin (2.26) ve (2.27) ile tanımlandığı belirtilmişti. $[0, a]$ ve $[0, b]$ üzerinde $x^\alpha f(x), \ (0 \leq \alpha < 1)$ fonksiyonu sınırlı ise bu durumda (2.26) daki seri yakınsaktır. Ayrıca

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^b f(t)\ d_q t = \int_0^b f(t)\ dt \tag{3.1}$$

eşitliği geçerlidir. Bunu bir lemmayla gösterelim:

Lemma 3.1 *Eğer $f(z)$ fonksiyonu γ sürekli eğrisi üzerinde q-integrallenebilir ise*

$$\lim_{q \to 1^-} \int_\gamma f(z) d_q z = \int_\gamma f(z) dz$$

dir.

İspat. $f(z)$, γ üzerinde q-integrallenebilir olsun. $1 - q < \delta$ olmak üzere

$$|aq^n - aq^{n+1}| = |aq^n||1 - q| < |aq^n|\delta = a\delta q^n < a\delta := \varepsilon$$

yazılabilir. $z(t)$ sürekli olduğundan $|aq^n - aq^{n+1}| < \varepsilon$ için $|z(aq^n) - z(aq^{n+1})| < \varepsilon_1$olacak şekilde yeterince küçük ε_1 sayısı vardır. Riemann integralinin tanımı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z) dz &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(z(t_k^*))[z(t_{k+1}) - z(t_k)]\ , 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(z(t_n^*))[z(t_{n+1}) - z(t_n)]\ ,\ t_n < t_n^* < t_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\int_\gamma f(z) d_q z = \int_0^a f(z(t)) D_q z(t) d_q t = \sum_{n=0}^{\infty} f(z(aq^n))[z(aq^n) - z(aq^{n+1})] \tag{3.3}$$

dir. Burada $\lim_{q \to 1^-}[z(aq^n) - z(aq^{n+1})] = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. (3.2) de, t_n^* yerine aq^n, t_{n+1} yerine aq^n ve t_n yerine aq^{n+1} alınırsa yeterince büyük n için

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z) dz &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{q \to 1^-} \left\{ f(z(aq^k))[z(aq^k) - z(aq^{k+1})] \right\} \\
&= \lim_{q \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} f(z(aq^k))[z(aq^k) - z(aq^{k+1})] \\
&= \lim_{q \to 1^-} \int_\gamma f(z) d_q z
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada sağdaki seri sayısal ve yakınsak olduğundan limit ile toplam yer değiştirebilir. ■

Genel olarak literatürde q-integraller reelde tanımlanmış, kompleks q- türevi mevcut olmakla birlikte kompleks q- integralleri çeşitli şekillerde tanımlanmıştır. Bununla beraber bir bölgede ve sınırında analitik olan bir f kompleks fonksiyonu için verilen klasikteki Cauchy-integral bağıntısının kompleks q- türevi mevcuttur.

Teorem 3.1 *[14] γ, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı eğri olsun ve $z_0 = 0$ noktası γ nın içinde bulunsun. Eğer $f(z)$, γ nın çevrelediği basit kapalı irtibatlı q- geometrik D bölgesinde analitikse; bu durumda*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in D \tag{3.4}$$

Cauchy integral formülünün n. basamaktan q- türevi

$$D_q^n f(z) = \frac{[n]_q!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - qz)\cdots(\zeta - q^n z)} d\zeta \tag{3.5}$$

dir.

Şimdi bizim yaptığımız kompleks q-integral tanımımızı bir teoremle verelim.

Teorem 3.2 *$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sürekli $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t);\ 0 \leq t \leq a$ eğrisi ve bu eğri üzerinde $f(z) = u(z) + iv(z) = u(z(t)) + iv(z(t))$ sınırlı kompleks değerli fonksiyonu verilsin.*
Bu durumda $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\int_{\gamma} f(z) d_q z = \int_{t=0}^{a} f(z(t))\ D_q(z(t))\ d_q t = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} f(z(aq^n)) D_q z(aq^n) q^n \tag{3.6}$$

dir.

İspat.

$$\gamma : z(t) = x(t) + iy(t); 0 \leq t \leq a$$

$$f(z) := u + iv = u(z(t)) + iv(z(t))$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\gamma} f(z)d_qz = \int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ D_qz(t)\ d_qt \\
&= \int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ \Big(D_qx(t) + iD_qy(t)\Big)\ d_qt \\
&= \int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ D_qx(t)\ d_qt + i\int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ D_qy(t)\ d_qt \\
&= \int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ \frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\ d_qt + i\int\limits_{t=0}^{a} f(z(t))\ \frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\ d_qt \\
&= \int\limits_{t=0}^{a} \big[u(z(t)+iv(z(t))\big]\ \frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\ d_qt + i\int\limits_{t=0}^{a} \big[u(z(t)+iv(z(t))\big]\ \frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\ d_qt \\
&= \underbrace{\int\limits_{t=0}^{a} u(z(t))\ \frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\ d_qt}_{I_1} + \underbrace{i\int\limits_{t=0}^{a} v(z(t))\ \frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\ d_qt}_{I_2} \\
&\quad \underbrace{+i\int\limits_{t=0}^{a} u(z(t))\ \frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\ d_qt}_{I_3} \underbrace{-\int\limits_{t=0}^{a} v(z(t))\ \frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\ d_qt}_{I_4}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

olmak üzere reeldeki q-integralinin

$$\int\limits_{t=0}^{a} \varphi(t)d_qt = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(aq^n)q^n$$

tanımından

$$\begin{aligned}
I_1 = \int\limits_{t=0}^{a} \underbrace{u(z(t))\ \frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}}_{\varphi(t)}\ d_qt &= (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(aq^n)q^n \\
&= (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} u\big(z(aq^n)\big)\ \frac{x(aq^n)-x(aq^{n+1})}{(1-q)aq^n}q^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u\big(z(aq^n)\big)\ \big(x(aq^n)-x(aq^{n+1})\big)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} iv\big(z(aq^n)\big)\ \big(x(aq^n) - x(aq^{n+1})\big), \\ I_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} iu\big(z(aq^n)\big)\ \big(y(aq^n) - y(aq^{n+1})\big), \\ I_4 &= -\sum_{n=0}^{\infty} v\big(z(aq^n)\big)\ \big(y(aq^n) - y(aq^{n+1})\big) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$I_1 + I_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[u\big(z(aq^n)\big) + iv\big(z(aq^n)\big)\Big]\big(x(aq^n) - x(aq^{n+1})\big)$$

ve

$$I_3 + I_4 = i\sum_{n=0}^{\infty}\Big[u\big(z(aq^n)\big) + iv\big(z(aq^n)\big)\Big]\big(y(aq^n) - y(aq^{n+1})\big)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} I = \int_{\gamma} f(z)d_qz &= \int_{t=0}^{a} f\big(z(t)\big)\ D_q\big(z(t)\big)\ d_qt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f\big(z(aq^n)\big)\Big[x(aq^n) - x(aq^{n+1}) + i\big(y(aq^n) - y(aq^{n+1})\big)\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f\big(z(aq^n)\big)\Big[x(aq^n) + iy(aq^n) - \big(x(aq^{n+1}) + iy(aq^{n+1})\big)\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f\big(z(aq^n)\big)\Big[z(aq^n) - z(aq^{n+1})\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f\big(z(aq^n)\big)\frac{\Big[z(aq^n) - z(aq^{n+1})\Big]}{(1-q)aq^n}(1-q)aq^n \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Tanım 3.1 *(3.6) daki seri yakınsak ise $f(z)$ fonksiyonuna γ üzerinde q-integrallenebilirdir denir.*

Uyarı 3.1 *$t \in [0, a]$ ve $0 < q < 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq q^n t < 1$ olup buradan $z(aq^n) \in \gamma$ dır.*

Teorem 3.2 de verdiğimiz kompleks q-integral tanımını kullanarak bazı örnekler verelim:

Örnek 3.1 *$\gamma : z(t) = t + it, 0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $f(z) = z$ fonksiyonu için*

$$I=\int_{\gamma} zd_qz=\int_{t=0}^{1} z(t)D_qz(t)d_qt$$

integralini hesaplayalım.

$$I=\int_{\gamma} zd_qz=\int_{t=0}^{1} z(t)D_qz(t)d_qt$$

$$D_qz(t)=\frac{z(t)-z(qt)}{(1-q)t}=\frac{t+it-(qt+iqt)}{(1-q)t}=\frac{t(1+i)(1-q)}{(1-q)t}=1+i, \quad 0<q<1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1}(t+it)(1+i)d_qt &= (1+i)^2\int_{t=0}^{1} td_qt=(1+i)^2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^nq^n\\ &= (1+i)^2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\\ &= (1+i)^2(1-q)\frac{1}{1-q^2}\\ &= (1+i)^2\frac{1}{1+q} \qquad (3.7)\end{aligned}$$

bulunur. Yani kompleks q-integralin sonucu

$$I=\int_{\gamma} zd_qz=(1+i)^2\frac{1}{1+q}, \quad \gamma: z(t)=t+it, 0\le t\le 1 \qquad (3.8)$$

dir. İntegrali klasik anlamda hesaplarsak

$$I=\int_{\gamma} zdz=\int_{t=0}^{1}(t+it)(1+i)dt=\frac{1}{2}(1+i)^2 \qquad (3.9)$$

olur. (3.8) de $q\to 1^-$ için limit alınırsa

$$\lim_{q\to 1^-}\int_{\gamma} zd_qz=\frac{1}{2}(1+i)^2=\int_{\gamma} zdz$$

olup böylece iki sonucun çakıştığı görülür.

Örnek 3.2 $\gamma: z(t)=t^2+it, 0\le t\le 2$ *olmak üzere,* $f(z)=\overline{z}$ *fonksiyonu için*

$$I = \int_{\gamma} \overline{z} d_q z$$

integralini hesaplayalım.
Kompleks q- integral tanımından

$$I = \int_{\gamma} \overline{z} d_q z = \int_{t=0}^{2} (t^2 - it) D_q(z(t)) d_q t$$

yazılabilir.

$$D_q(z(t)) = \frac{t^2 + it - ((qt)^2 + iqt))}{(1-q)t} = \frac{t^2(1-q^2) + it(1-q)}{(1-q)t} = t^2(1+q) + i$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t=0}^{2} (t^2 - it)(t(1+q) + i) d_q t = 2(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} [(2q^n)^2 - 2iq^n][2q^n(1+q) + i] q^n \\
&= 2(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} (4q^{3n} - 2iq^{2n})(2q^n + 2q^{n+1} + i) \\
&= 2(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \left[8q^{4n} + 8q^{4n+1} + 4iq^{3n} - 4iq^{3n} - 4iq^{3n+1} + 2q^{2n}\right], \quad 0 < q < 1 \\
&= 2(1-q) \left[\frac{8}{1-q^4} + \frac{8q}{1-q^4} - \frac{4iq}{1-q^3} + \frac{2}{1-q^2}\right] \\
&= 2(1-q) \left[\frac{8(1+q)}{(1-q)(1+q)(1+q^2)} - \frac{4iq}{(1-q)(1+q+q^2)} + \frac{2}{(1-q)(1+q)}\right] \\
&= \frac{16}{1+q^2} - \frac{8iq}{1+q+q^2} + \frac{4}{1+q} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine burada $q \to 1^-$ için limit alınırsa

$$\lim_{q \to 1^-} I = \frac{16}{1+q^2} - \frac{8iq}{1+q+q^2} + \frac{4}{1+q} = 10 - \frac{8i}{3} \qquad (3.11)$$

olur ki bu sonuç integralin klasik anlamdaki değeridir.

Örnek 3.3 *γ eğrisi, köşeleri $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = i$ noktalarında olan birim karenin çevresinin pozitif yönde yönlendirilmiş hali olduğuna göre*

$$\int_{\gamma} z d_q z$$

integralini hesaplayalım.

Verilen çevre $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: z(t) = t,\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_2 &: z(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_3 &: z(t) = 1 - t + i,\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_4 &: z(t) = i(1-t),\ 0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

şeklinde parametrik olarak ifade edelim.Her bir eğri üzerindeki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım. $z \in \gamma_1$ için $z(t) = t, 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = \frac{t - qt}{(1-q)t} = 1$$

olduğundan

$$\int_{\gamma_1} z d_q z = \int_{t=0}^{1} t D_q z(t) d_q t = \int_{t=0}^{1} t d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1+q} \tag{3.12}$$

olur. $z \in \gamma_2$ için $z(t) = 1 + it, 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = \frac{1 + it - (1 + iqt)}{(1-q)t} = \frac{it(1-q)}{(1-q)t} = i$$

olup böylece

$$\int_{\gamma_2} z d_q z = \int_{t=0}^{1} (1+it) i d_q t = \int_{t=0}^{1} (1+it) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + iq^n) i q^n \tag{3.13}$$

bulunur. $z \in \gamma_3$ için $z(t) = 1 - t + i, 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = \frac{1 - t + i - (1 - qt + i)}{(1-q)t} = \frac{-1t(1-q)}{(1-q)t} = -1$$

olduğundan

$$\int_{\gamma_3} z d_q z = \int_{t=0}^{1} (1-t+i)(-1) d_q t = -\int_{t=0}^{1} (1-t+i) d_q t = -(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q^n + i) q^n \tag{3.14}$$

elde edilir. $z \in \gamma_4$ için $z(t) = i(1-t), 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = \frac{i(1-t) - i(1-qt)}{(1-q)t} = \frac{-it(1-q)}{(1-q)t} = -i$$

olup böylece

$$\int_{\gamma_4} z d_q z = \int_{t=0}^{1} i(1-t)(-i) d_q t = i(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} (1-q^n)(-i) q^n \tag{3.15}$$

bulunur. Böylece integralin sonucu

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} z d_q z &= \int\limits_{\gamma_1} z d_q z + \int\limits_{\gamma_2} z d_q z + \int\limits_{\gamma_3} z d_q z + \int\limits_{\gamma_4} z d_q z \\
&= \frac{1}{1+q} + (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(1+iq^n)iq^n - (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^n+i)q^n \\
&\quad +(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^n)q^n \\
&= \frac{1}{1+q} + (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\left[iq^n - q^{2n} - q^n + q^{2n} - iq^n + q^n - q^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{1+q} - (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1+q} - (1-q)\frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1+q} - \frac{1}{1+q} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca klasikteki Cauchy teoreminden

$$\int\limits_{\gamma} z dz = 0$$

olduğunu biliyoruz.

Örnek 3.4 *γ eğrisi, köşeleri $z_1 = -1-i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 1+i$, $z_4 = -1+i$ noktalarında olan birim karenin çevresinin pozitif yönde yönlendirilmiş hali olduğuna göre*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d_q z}{z}$$

integralini hesaplayalım.

Yine verilen çevreyi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \ z(t) = 2t-1,\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_2 &: \ z(t) = 1 + i(2t-1),\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_3 &: \ z(t) = (-2t+1) + i,\ 0 \le t \le 1 \\
\gamma_4 &: \ z(t) = -1 - i(2t-1),\ 0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

şeklinde parametrik olarak ifade edelim. $z \in \gamma_1$ için $z(t) = 2t-1-i, 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = 2$$

olup

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{d_q z}{z} = \int\limits_{t=0}^{1} \frac{2}{2t-1-i} d_q t = 2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{2q^n - 1 - i} \tag{3.16}$$

elde edilir. $z \in \gamma_2$ için $z(t) = 1 + i(2t-1), 0 \le t \le 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = 2i$$

olup

$$\int_{\gamma_2} \frac{d_q z}{z} = 2i(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+i(2q^n-1)} \tag{3.17}$$

elde edilir. $z \in \gamma_3$ için $z(t) = (-2t+1)+i, 0 \leq t \leq 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = -2$$

olup

$$\int_{\gamma_3} \frac{d_q z}{z} = -2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{-2q^n+1+i} \tag{3.18}$$

elde edilir. $z \in \gamma_4$ için $z(t) = -1-i(2t-1), 0 \leq t \leq 1$ parametrik denkleminden

$$D_q z(t) = -2i$$

olup

$$\int_{\gamma_4} \frac{d_q z}{z} = -2i(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{-1-i(2q^n-1)} \tag{3.19}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ üzerinden integralin değeri

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{d_q z}{z} &= \int_{\gamma_1} \frac{d_q z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{d_q z}{z} + \int_{\gamma_3} \frac{d_q z}{z} + \int_{\gamma_4} \frac{d_q z}{z} \\
&= 2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{2q^n-1-i} + 2i(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+i(2q^n-1)} \\
&\quad -2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{-2q^n+1+i} - 2i(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{-1-i(2q^n-1)} \\
&= 2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[\frac{1}{2q^n-1-i} + \frac{i}{1+i(2q^n-1)} - \frac{1}{-2q^n+1+i} \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{-1-i(2q^n-1)}\right] \\
&= 8(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2q^n-1-i} q^n = 8i(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+i(2q^n-1)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. İntegralin sonucundaki seride
$a_n = \dfrac{q^n}{|1+i(2q^n-1)|} = \dfrac{q^n}{\sqrt{2}\sqrt{1+2q^n(q^n-1)}}$ denilirse, oran kriterinden
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} q\sqrt{\dfrac{1+2q^n(q^n-1)}{1+2q^{n+1}(q^{n+1}-1)}} = q < 1$ olduğundan elde edilen seri her $q \in (0,1)$ için yakınsaktır.

Örnek 3.5 *$D = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}z \leq b, c \leq Imz \leq d\}$ kümesi üzerinde herhangi bir q integrallenebilir f fonksiyonu $f : D \to \mathbb{C}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,*

$\partial D = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ *olmak üzere;*

$$\int_\gamma f(z) d_q z$$

integralini hesaplayalim.

Çözüm 3.1 $\gamma_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ *eğrileri*

$\gamma_1(t)$ *egrisinin parametrik denklemi* $\gamma_1(t) = a + ic + (b - a)t, \quad 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_2(t)$ *egrisinin parametrik denklemi* $\gamma_2(t) = b + ic + (d - c)it, \quad 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_3(t)$ *egrisinin parametrik denklemi* $\gamma_3(t) = b + id + (a - b)t, \quad 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_4(t)$ *egrisinin parametrik denklemi* $\gamma_4(t) = a + id + (c - d)it, \quad 0 \leq t \leq 1$

olarak alınabilir. Eğrilerin q- türevleri

$D_q\gamma_1(t) = b - a, \quad D_q\gamma_2(t) = i(d - c),$
$D_q\gamma_3(t) = a - b, \quad D_q\gamma_1(t) = i(c - d)$

dır.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z) d_q z &= \int_{\gamma_1} f(z) d_q z + \int_{\gamma_2} f(z) d_q z + \int_{\gamma_3} f(z) d_q z + \int_{\gamma_4} f(z) d_q z \\
&= \int_{t=0}^{1} f(\gamma_1(t))\ \gamma_{1_q}\ d_q t + \int_{t=0}^{1} f(\gamma_2(t))\ \gamma_{2_q}\ d_q t \\
&\quad + \int_{t=0}^{1} f(\gamma_3(t))\ \gamma_{3_q}\ d_q t + \int_{t=0}^{1} f(\gamma_4(t))\ \gamma_{4_q}\ d_q t \\
&= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(\gamma_1(q^n))(b - a) q^n + (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(\gamma_2(q^n)) i(d - c) q^n \\
&\quad + (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(\gamma_3(q^n))(a - b) q^n + (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(\gamma_4(q^n)) i(c - d) q^n \\
&= (1-q)(b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \Big[f(\gamma_1(q^n)) - f(\gamma_3(q^n)) \Big] q^n \\
&\quad + (1-q) i(d-c) \sum_{n=0}^{\infty} \Big[f(\gamma_2(q^n)) - f(\gamma_4(q^n)) \Big] q^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa sonuç olarak

$$\int_\gamma f(z) d_q z = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Big\{ (b-a) \left[f(\gamma_1(q^n)) - f(\gamma_3(q^n)) \right] + i(d-c) \left[f(\gamma_2(q^n)) - f(\gamma_4(q^n)) \right] \Big\} \tag{3.20}$$

bulunur. $M := \max_{\gamma} |f(z)|$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma} f(z)d_qz\right| &\leq 2(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n M|f(q^n)|\Big(b+d-(a+c)\Big)\\ &\leq 2M(1-q)\Big(b+d-(a+c)\Big)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\\ &= 2M\Big(b+d-(a+c)\Big)\end{aligned}$$

olduğundan f *fonksiyonu* γ *eğrisinin sınırladığı açık küme üzerinde ve sınırında analitik olmak üzere (3.20) serisi daima yakınsaktır. Dolayısıyla* $\int_{\gamma} f(z)d_qz$ *mevcuttur.*

3.1. Kompleks q- İntegrallerin Bazı Özellikleri

Tek değişkenli, reel değerli bir $F(x)$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_qF(x) = \frac{F(x)-F(qx)}{(1-q)x} = \frac{1}{(1-q)x}(1-M_q)F(x) := f(x), x \neq 0$$

olarak da tanımlanır. Burada $M_qF(x) = F(qx)$ dir. $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in q-antitürevi adı verilir.Burada $0 < q < 1$ dir.(Bakınız [1])

Tanım 3.2 *Eğer her* $x \in [0,a]$ *için* $\lim_{n\to\infty} F(q^nx)$ *limiti mevcutsa,* $F(x)$ *fonksiyonuna* $x = 0$ *da* q*-regülerdir denir.* $F(x)$*,* $x = 0$ *da sürekli ise bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} F(q^nx) = F(0)$$

dır.

Eğer $F(0) = 0$ ise , $f(x)$ fonksiyonunun q-antitürevi

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{1-M_q}[(1-q)xf(x)] = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} M_q^n[xf(x)]\\ &= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^nf(q^nx) \qquad (3.21)\end{aligned}$$

olarak da yazılabilir. Genel olarak $x \in [0,a]$ için

$$\int_0^x f(t)d_qt = F(x) - \lim_{n\to\infty} F(q^nx) \qquad (3.22)$$

dır. Eğer $a > 0$ olmak üzere $x \in [0,a]$ ise bu durumda $qx, ..., q^n x \in [0,a]$ dır. $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$ olsun. Bu takdirde $f(x)$ fonksiyonunun Jackson integrali

$$\int\limits_0^x f(t)d_qt = (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) = F(x) \tag{3.23}$$

veya

$$\int\limits_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a) \tag{3.24}$$

olarak tanımlanir. Buradan daha genel olarak

$$\int\limits_0^x f(t)D_qg(t)d_qt = (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x)D_qg(q^n x) \tag{3.25}$$

veya

$$\int\limits_0^x f(t)d_qg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n x)[g(q^n x) - g(q^{n+1}x)] \tag{3.26}$$

yazılabilir. (Bakınız [1])

Tanım 3.3 *Eğer (3.23) deki, Jackson integral tanımındaki seri yakınsak ise $f(x)$ fonksiyonuna q-integrallenebilirdir denir.*

Uyarı 3.2 *Eğer $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ da q-regüler değilse, Jackson integrali doğru olmayabilir.*

Tanım 3.4 *$D \subset \mathbb{C}$, q-geometrik kümesi üzerinde $f(z)$ kompleks fonksiyonu verilsin. $0 \in D$ olmak üzere her $z \in D$ için*

$$\lim_{n\to\infty} f(q^n z) = f(0)$$

oluyorsa, $f(z)$ ye $z = 0$ noktasında q-regülerdir denir.

Teorem 3.3 *[3] Sıfır noktasını içeren bir $D \subset \mathbb{C}$ q-geometrik alt kümesinde $f(z)$ fonksiyonu verilsin ve $f(z)$ sıfır noktasında q-regüler olsun. Bu takdirde*

$$F(z) := \int\limits_0^z f(t)d_qt \tag{3.27}$$

fonksiyonu sıfır noktasında q-regülerdir. Ayrıca her $z \in D$ için $D_qF(z) = f(z)$ dir. Tersine, her $z \in D$ ve $0 \in D$ için

$$\int\limits_0^z D_qf(t)d_qt = f(z) - f(0) \tag{3.28}$$

dir.

Uyarı 3.3 *Eğer Teorem 3.3 deki $f(z)$ fonksiyonu $z=0$ da q-regüler değilse*

$$\int_0^z D_q f(t) d_q t = f(z) - \lim_{n\to\infty} f(q^n z) \tag{3.29}$$

veya daha genel olarak, $a, b \in D \subseteq \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\int_a^b D_q f(t) d_q t = \left[f(b) - \lim_{n\to\infty} f(q^n b) \right] - \left[f(a) - \lim_{n\to\infty} f(q^n a) \right] \tag{3.30}$$

dır.

Lemma 3.2 *$[0,a] \times [0,a]$ kümesi üzerinde $h(x,t)$ fonksiyonu verilsin ve her $t \in [0,a]$ için bu fonksiyon q-integrallenebilir olsun. Diğer taraftan*

$$f(x) := \int_0^x h(x,t) d_q t$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $h(x,qx) = 0$ ise

$$D_q^x \int_0^x h(x,t) d_q t = \int_0^x D_q^x h(x,t) d_q t \tag{3.31}$$

dir.

İspat. Jackson integrali tanımından basit bir hesapla

$$D_q^x \int_0^x h(x,t) d_q t = h(x,x) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[h(q^n x, x) - h(q^n x, qx) \right] \tag{3.32}$$

ve

$$\int_0^x D_q^x h(x,t) d_q t = h(x,x) - h(x,qx) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[h(q^n x, x) - h(q^n x, qx) \right] \tag{3.33}$$

olup (3.32) ile (3.33) ün karşılaştırılmasıyla sonuç görülür. ■

Uyarı 3.4

$$\gamma : z(t) = x(t) + iy(t) \ , 0 \leq t \leq a$$

rektiflenebilen parçalı düzgün eğrisinin klasik anlamda pozitif yönde yönlendirildiğini varsayalım. Bu durumda γ nın başlangıç noktası $z(0) = z_0 = x(0) + iy(0)$ ve bitiş noktası $z(a) = z_a = x(a) + iy(a)$ olur. $f(z)$, γ üzerinde q-integrallenebilir bir fonksiyon olsun.$\widetilde{\gamma}$,γ nın klasik anlamda ters yönde yönlendirilmiş halini göstersin. $aq^n \in [0,a], n = 0, 1, 2, ...$ parametrelerine karşılık gelen γ üzerindeki noktalar $z_n = z(aq^n) = x(aq^n) + iy(aq^n)$, $n = 0, 1, 2, ...$olsun. Bu noktalar aynı zamanda $\widetilde{\gamma}$ üzerinde olup γ nın $\{z_n = z(aq^n)\}, n = 0, 1, 2, ...$ parçalanma noktalarında $f(z(aq^n))$ değerleri hem γ hem de $\widetilde{\gamma}$ üzerinde değişmeyecektir. Bu nedenden dolayı $f(z)$ nin $\widetilde{\gamma}$ üzerinden eğrisel q-integrali (3.6) tanımının da kullanılmasıyla;

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)d_q z := (q-1)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(z(aq^n))D_q z(aq^n) = -\int_{\gamma} f(z)d_q z \tag{3.34}$$

olarak tanımlanır. γ eğrisi üzerinde $z_n = x(aq^n) + iy(aq^n), n = 0, 1, 2, ...$ noktalarını göz önüne alalım ve $\ell_n := |z(aq^{n+1}) - z(aq^n)|, n = 0, 1, 2, ...$ olsun. Jackson integralinden,

$$\begin{aligned} \int_0^a |D_q z(t)|d_q t &= (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z(aq^{n+1}) - z(aq^n)|}{|aq^{n+1} - aq^n|} q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |z_{n+1} - z_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n. \end{aligned} \tag{3.35}$$

yazılabilir. Burada $x(t)$ ve $y(t)$, $I = [0, a]$ üzerinde$D_q x(t), D_q y(t)$ türevlerine sahip ve bu türevler q-integrallenebilir fonksiyonlardır. Rektiflenebilir bir γ eğrisi için (3.35) serisi yakınsaktır.

3.2. Birinci ve İkinci Tipten Kompleks Eğrisel q-İntegraller

Tanım 3.5 *Parçalı düzgün rektiflenebilen $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde $f(z)$ fonksiyonu veya dolaylı olarak $I = [0, a]$ üzerinde $f(z(t))$ bileşke fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve yeterince büyük k sayıları için $|z(aq^k) - z(aq^{k+1})| < \delta$ olduğunda $|f(z(aq^k)) - f(z(aq^{k+1}))| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayıları bulunabiliyorsa $f(z)$ ye γ üzerinde veya $f(z(t))$ bileşke fonksiyonu I üzerinde q-düzgün süreklidir denir.*

γ üzerinde tanımlanmış q-düzgün sürekli, sıfır noktasında q-regüler kompleks $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $t \in [0, a], 0 < q < 1$ için $u = u(z(t)) = u(x(t), y(t))$ ve $v = v(z(t)) = v(x(t), y(t))$ fonksiyonları ile $D_q x(t), D_q y(t)$ türevleri $I = [0, a]$ üzerinde q-integrallenebilirdir. Ayrıca $f(z(t))$, q-düzgün sürekli olduğundan $u(z(t))$ ve $v(z(t))$ fonksiyonları da q-düzgün süreklidir.Diğer taraftan $z_k = z(aq^k)$ olmak üzere

$$S_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\ell_k, \tag{3.36}$$

$$S_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} u(z_k)\Delta_q x(aq^k), \tag{3.37}$$

$$S_3^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} v(z_k)\Delta_q y(aq^k) \tag{3.38}$$

sonlu toplamlarını göz önüne alalım.Burada $\Delta_q x(aq^k) := x(aq^k) - x(aq^{k+1})$, $\Delta_q y(aq^k) := y(aq^k) - y(aq^{k+1})$ dir. Bu gösterimler [4] de zaman skalası için kullanılmıştır. Ayrıca

$$I_1 = \int_0^a f(z(t))|D_q z(t)|d_q t, \tag{3.39}$$

$$I_2 = \int_0^a u(z(t))D_q x(t)d_q t, \tag{3.40}$$

$$I_3 = \int_0^a v(z(t))D_q y(t)d_q t \tag{3.41}$$

integrallerini göz önüne alalım.(3.40) ve (3.41) integrallerinin toplanmasından,

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= \int_0^a [u(x(t), y(t))D_q x(t) + v(x(t), y(t))D_q y(t)]d_q t \\ &:= \int_\gamma u(x, y)d_q x + v(x, y)d_q y \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir.

Tanım 3.6 *(3.39) integrali $f(z)$ nin birinci tip eğrisel q- integrali; (3.42) integrali ise (u, v) ikilisinin ikinci tip eğrisel q-integrali olarak adlandırılır.*

$f(z)$, γ üzerinde q-düzgün sürekli olduğundan $L_1 = \sup_\gamma |f(z)|$ sayısı vardır. Ayrıca, $\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k = \ell_q$ olacak şekilde $\ell_q \in (0, +\infty)$ sayısı da vardır. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olacak şekilde yeterince büyük n ler seçildiğinde $|\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k - \ell_q| < \frac{\varepsilon}{L_1}$ yazılabilir. Buradan her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük n ler için

$$\begin{aligned} |S_1^{(n)} - I_1| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f(z(aq^k)) - (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(z(aq^k)) |\frac{z(aq^{k+1}) - z(aq^k)}{(q-1)aq^k}| \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f(z(aq^k))||z(aq^{k+1}) - z(aq^k)| \\ &\leq L_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell_k \\ &= L_1|\ell_q - (\ell_0 + \ell_1 + ... + \ell_n)| \\ &< L_1 \frac{\varepsilon}{L_1} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$\lim_{n\to\infty} S_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(z(aq^n))\ell_k = \int_0^a f(z(t))|D_q z(t)|d_q t = I_1 \tag{3.43}$$

elde edilir. Diğer taraftan $u(z)$ fonksiyonu γ üzerinde q-düzgün sürekli olduğundan,

$$\sup_{\gamma} |u(z)| = \sup_{[0,a]} |u(z(t))| = L_2$$

olacak şekilde $L_2 \in (0, +\infty)$ sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
|I_2 - S_2^{(n)}| &= \left| \int_0^a u(z(t))D_q x(t)d_q t - \sum_{k=0}^{n} u(z_k)\Delta_q x(aq^k) \right| \\
&= \left| (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k u(z(aq^k)) \left[\frac{x(aq^{k+1}) - x(aq^k))}{(q-1)aq^k} \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} u(z_k)[x(aq^k) - x(aq^{k+1})] \right| \\
&= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u(z(aq^k)) \left[x(aq^k) - x(aq^{k+1}) \right] \right| \\
&\leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(aq^k) - x(aq^{k+1})| \\
&\leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell_k
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k$ serisi yakınsak olduğundan, $\sum_{k=0}^{\infty} |x(aq^k) - x(aq^{k+1})|$ serisi yakınsaktır. O halde bu serinin $(n+1)$. kalan terimi için

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(aq^k) - x(aq^{k+1})| < \frac{\varepsilon}{L_2}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayıları vardır. Böylece

$$|I_2 - S_2^{(n)}| < \varepsilon$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} S_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} u(z(aq^k))\Delta_q x(aq^k) = \int_0^a u(z(t))D_q x(t)d_q t = I_2 \tag{3.44}$$

bulunur. Tamamen benzer düşünceyle

$$I_3 = \lim_{n\to\infty} S_3^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} v(z(aq^k))\Delta_q y(aq^k) = \int_0^a v(z(t))D_q y(t)d_q t \tag{3.45}$$

olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} u(x,y)d_qx &= \int\limits_{\gamma} u(z)d_qx = \int\limits_{0}^{a} u(z(t))d_qx(t) = \int\limits_{0}^{a} u(x(t),y(t))D_qx(t)d_qt \\ &= (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n u(x(aq^n),y(aq^n))\frac{x(aq^{n+1})-x(aq^n)}{(q-1)aq^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u(z(aq^n))\Delta_q x(aq^n) \qquad (3.46)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} v(x,y)d_qy &= \int\limits_{0}^{a} v(x(t),y(t))d_qy(t) = \int\limits_{0}^{a} v(x(t),y(t))D_qy(t)d_qt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v(z(aq^n))\Delta_q y(aq^n) \qquad (3.47)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.46) ve (3.47) integrallerinin taraf tarafa toplanmasıyla, (u,v) ikilisinin 2. tip eğrisel q-integrali

$$\int\limits_{\gamma} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = \sum_{n=0}^{\infty}[u(z(aq^n))\Delta_q x(aq^n) + v(z(aq^n))\Delta_q y(aq^n)] \quad (3.48)$$

olarak yazılabilir.

4. KATLI q-İNTEGRALLER VE q-GREEN ÖZDEŞLİĞİ

4.1. Katlı q-İntegraller

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ karesi üzerinde $h(x,y)$ fonksiyonu verilsin. $(x,y) \in D$ için $h(x,y)$ nin katlı q-integrali $0 < q < 1$ olmak üzere

$$I = \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) \tag{4.1}$$

olarak verilebilir. Şimdi (4.1) katlı serisinin hangi koşullarda yakınsak olacağını araştıralım.Eğer her $(x,y) \in D$ için $|h(x,y)| \leq M$ olacak şekilde $M \in (0,+\infty)$ sayısı varsa (4.1) integrali daima mevcuttur. Ancak $h(x,y)$, D üzerinde sınırsız olduğu zaman da (4.1) integrali mevcut olabilir. Bununla ilgili bir teorem verelim:

Teorem 4.1 *$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ kümesi üzerinde $h(x,y)$ fonk-siyonu verilsin ve her $(x,y) \in (0,a] \times (0,a]$ için $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$ olmak üzere*

$$x^\alpha y^\beta |h(x,y)| < M \tag{4.2}$$

olacak şekilde pozitif M sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (4.1) serisi her $(x,y) \in (0,a] \times (0,a]$ için yakınsaktır.

İspat. (4.2) eşitsizliğinden $x > 0$, $y > 0$ için

$$|h(x,y)| < Mx^{-\alpha} y^{-\beta} \tag{4.3}$$

yazılabilir. (4.3) de x yerine $q^n x$ ve y yerine $q^k y$ yazarsak

$$|h(q^n x, q^k y)| < M(q^n x)^{-\alpha} (q^k y)^{-\beta} = Mq^{-n\alpha} x^{-\alpha} q^{-k\beta} y^{-\beta}$$

elde edilir. Buradan

$$q^{n+k} |h(q^n x, q^k y)| < Mq^{(1-\alpha)n} q^{(1-\beta)k} x^{-\alpha} y^{-\beta}$$

yazılabilir. $0 < q < 1$ için $0 < q^{1-\alpha} < 1, 0 < q^{1-\beta} < 1$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Mx^{-\alpha} y^{-\beta} q^{(1-\alpha)n} q^{(1-\beta)k} = \frac{Mx^{-\alpha} y^{-\beta}}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{1-\beta})} \tag{4.4}$$

geometrik serisi noktasal yakınsaktır. Böylece her $(x,y) \in (0,a] \times (0,a]$ için

$$(1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} |h(x,y)| < \frac{Mx^{1-\alpha} y^{1-\beta} (1-q)^2}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{1-\beta})} \tag{4.5}$$

olup (4.1) serisi mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır. ■

Uyarı 4.1 *(4.1) serisinin yakınsak olması için (4.2) eşitsizliğinin sağlanması yeterli fakat gerekli değildir.*

Diğer taraftan

$$\int_0^a \int_0^a h(x,y) d_q x d_q y = (1-q)^2 a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} h(aq^n, aq^k) \tag{4.6}$$

integralinin geometrik anlamı$D_{n,k} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : aq^{n+1} \leq x \leq aq^n, aq^{k+1} \leq y \leq aq^k, 0 < q < 1\}, n,k = 0,1,...$ dikdörtgenlerinin sağ üst köşesindeki fonksiyon değeri ile $D_{n,k}$ dikdörtgenlerinin alanları çarpımlarının toplamıdır. Ayrıca

$$\bigcup_{n,k=0}^{\infty} D_{n,k} = (0,a] \times (0,a]$$

dır. Eğer her $(x,y) \in D$ için $h(x,y) = 1$ alınırsa $0 < q < 1$ için

$$\int_0^a \int_0^a d_q x d_q y = a^2 = Alan(D) \tag{4.7}$$

olur ve katlı q-integralin geometrik anlamından yararlanılarak

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^a \int_0^a h(x,y) d_q x d_q y = \int_0^a \int_0^a h(x,y) dx dy \tag{4.8}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 4.1 *$0 < q < 1$ olmak üzere $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ q-geometrik kümesi üzerinde $h(x,y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(x,y) \in D$ ve $x \neq 0, y \neq 0$ için*

$$\lim_{n \to \infty} h(q^n x, y) = h(0,y) \tag{4.9}$$

ve

$$\lim_{k \to \infty} h(x, q^k y) = h(x,0) \tag{4.10}$$

oluyorsa $h(x,y)$ fonksiyonuna sırasıyla $D_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq a\}$ ve $D_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq a\}$ doğru parçaları üzerinde q-regülerdir denir. Ayrıca, eğer

$$\lim_{n,k \to \infty} h(q^n x, q^k y) := \lim_{n \to \infty} [\lim_{k \to \infty} h(q^n x, q^k y)] = \lim_{k \to \infty} [\lim_{n \to \infty} h(q^n x, q^k y)] = h(0,0) \tag{4.11}$$

oluyorsa $h(x,y)$ fonksiyonuna $(0,0)$ noktasında q-regülerdir denir.

Uyarı 4.2 *Eğer $h(x,y)$ fonksiyonu $D_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq a\}$ kümesi, $D_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq a\}$ kümesi üzerinde ve $(0,0)$ noktasında q-regüler değilse (4.1) ile tanımlanan katlı q-integrali doğru olmayabilir.Eğer $h(x,y)$, D_1 ve D_2 üzerinde, ayrıca $(0,0)$ noktasında q-regüler ve bu noktalarda sıfır değerini alıyorsa (4.1) daima doğrudur.*

Uyarı 4.3 *$F(x,y)$, $D_q^x D_q^y F(x,y) = h(x,y)$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.*

$$\int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = F(x,y) \tag{4.12}$$

olması için yeterli koşul $F(x,y)$ nin $(0,0)$ noktasında, $D_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \le a\}$, $D_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le a\}$ eksen parçaları üzerinde q- regüler olması ve $F(x,y)$ nin q- regüler noktalarda sıfır değerini almasıdır.Bu koşullar altında

$$\int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = F(x,y) = (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) \tag{4.13}$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 4.1 *$F(x,y) = \dfrac{q-1}{(1+q)logq} x^2 logy$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x > 0$, $y > 0$ için*

$$\begin{aligned} D_q^x D_q^y F(x,y) &= \frac{q-1}{(1+q)logq} \left[D_q^x x^2\right] D_q^y \left[logy\right] \\ &= \frac{q-1}{(1+q)logq} \frac{1-q^2}{1-q} x \frac{logq}{q-1} \frac{1}{y} \\ &= \frac{x}{y} \\ &= h(x,y) \end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. Diğer taraftan Jackson integralinden,

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y \frac{s}{t} d_q t d_q s &= \left(\int_0^x \frac{d_q t}{t} \right) \left(\int_0^y s d_q s \right) \\ &= (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{q^n x} (1-q) y \sum_{k=0}^{\infty} q^k q^k y \\ &= (1-q)^2 y^2 \frac{1}{1-q^2} \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty, 0 < q < 1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.

$\int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = F(x,y)$ doğru olsaydı $\int_0^x \int_0^y \frac{s}{t} d_q t d_q s = \dfrac{q-1}{(1+q)logq} x^2 logy$ olması gerekirdi. Bu doğru değildir. Çünkü $F(x,y)$ fonksiyonu D_1 eksen parçası üzerinde q-regüler değildir. $h(x,y)$ fonksiyonu $D^* = (0,a] \times (0,a]$ üzerinde hem x hem de y ye göre q-integrallenebilirse

$$\int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = \int_0^y \int_0^x h(s,t) d_q s d_q t \tag{4.16}$$

olduğu görülebilir.
Şimdi

$$F(x,y) := \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s \tag{4.17}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Katlı q-integral tanımından

$$F(x,y) = (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) \tag{4.18}$$

yazabiliriz. Şimdi hangi koşullar altında

$$D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = \int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t d_q s \tag{4.19}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ için basit bir hesapla

$$\begin{aligned} D_q^x D_q^y F(x,y) &= D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - q h(q^n x, q^{k+1} y) \\ &\quad - q h(q^{n+1} x, q^k y) + q^2 h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)] \\ &= h(x,y) \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y D_q^t h(s,t) d_q t d_q s &= \int_0^x \int_0^y \frac{h(s,qt) - h(s,t)}{(q-1)t} d_q t d_q s \\ &= \int_0^x (1-q) y \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left[\frac{h(s,q^{k+1}y) - h(s,q^k y)}{(q-1) q^k y} \right] d_q s \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} [h(s,q^k y) - h(s,q^{k+1} y)] d_q s \end{aligned} \tag{4.21}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{N} [h(s,q^k y) - h(s,q^{k+1} y)] = h(s,y) - h(s,q^{N+1} y) \tag{4.22}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} h(s,q^k y) - h(s,q^{k+1} y) = h(s,y) - h(s,0) \tag{4.23}$$

olduğu elde edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^y D_q^t h(s,t) d_q t d_q s &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} [h(s,q^k y) - h(s,q^{k+1}y)] d_q s \\
&= \int_0^x [h(s,y) - h(s,0)] d_q s \\
&= (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n [h(q^n x, y) - h(q^n x, 0)] \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

ve son olarak (4.19) eşitliğinin sağ tarafı için

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t d_q s &= \int_0^x D_q^s [h(s,y) - h(s,0)] d_q s \\
&= h(x,y) - h(x,0) - h(0,y) + h(0,0)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 4.1 *$h(x,y)$ fonksiyonu $D_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq a\}$,*

$D_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq a\}$ ve $(0,0)$ noktasında q-regüler olsun. Eğer $h(0,y) = h(x,0) = h(0,0) = 0$ ise bu durumda

$$D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t d_q s = \int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t d_q s \qquad (4.25)$$

dir.

4.2. q-Green Özdeşliği

Teorem 4.2 *$D = [0,a] \times [0,a]$ kümesi üzerinde $u(x,y), v(x,y)$ reel değerli fonksiyonları verilsin ve $u, v, D_q^x v, D_q^y u$ fonksiyonları D üzerinde hem x hem de y ye göre q-integrallenebilir olsun. Bu durumda*

$$\int_{\partial D} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = \iint_D [D_q^x v(x,y) - D_q^y u(x,y)] d_q x d_q y \qquad (4.26)$$

dir. Burada $\partial D, D$ dikdörtgeninin çevresinin pozitif yönde yönlendirilmiş halidir.

İspat. $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ olsun.$\gamma_1 : x = t, , y = 0,\ 0 \leq t \leq a,\ d_q x(t) = d_q t,\ d_q y(t) = 0$ olup buradan (4.26) nın sol tarafı γ_1 üzerinden hesaplanırsa

$$\int_{\gamma_1} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = \int_0^a u(t,0) d_q t \qquad (4.27)$$

bulunur. Benzer şekilde $\gamma_2 : x = a,\ y = t,\ 0 \leq t \leq a, d_qx(t) = 0,\ d_qy(t) = d_qt$ için hesaplama yapılırsa,

$$\int\limits_{\gamma_2} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = \int\limits_0^a v(a,t)d_qt \tag{4.28}$$

olur. Diğer taraftan γ_3 eğrisi $\widetilde{\gamma_3} : x = t,\ y = a, 0 \leq t \leq a$ eğrisinin ters yönde yönlendirilmiş halidir. Böylece (3.34) den $\widetilde{\gamma_3}$ üzerinde , $d_qy = 0$, $d_qx = d_qt$ olacağından

$$\int\limits_{\gamma_3} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = -\int\limits_{\widetilde{\gamma_3}} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = -\int\limits_0^a u(t,a)d_qt \tag{4.29}$$

bulunur. Benzer şekilde γ_4 eğrisi $\widetilde{\gamma_4} : x = 0, y = t, 0 \leq t \leq a$ eğrisinin ters yönde yönlendirilmiş hali olduğundan aynı düşünceyle

$$\int\limits_{\gamma_4} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = -\int\limits_{\widetilde{\gamma_4}} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = -\int\limits_0^a v(0,t)d_qt \tag{4.30}$$

bulunur. Böylece

$$\int\limits_{\partial D} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = \int\limits_0^a [u(t,0) + v(a,t) - u(t,a) - v(0,t)]d_qt \tag{4.31}$$

elde edilmiş olur. Diğer taraftan (4.24) den

$$\iint\limits_D D_q^x v(x,y)d_qxd_qy = \int\limits_0^a \int\limits_0^a D_q^x v(x,y)d_qxd_qy = \int\limits_0^a [v(a,t) - v(0,t)]d_qt \tag{4.32}$$

ve

$$\iint\limits_D D_q^y u(x,y)d_qxd_qy = \int\limits_0^a \int\limits_0^a D_q^y u(x,y)d_qxd_qy = \int\limits_0^a [u(t,a) - u(t,0)]d_qt \tag{4.33}$$

yazılabilir. (4.32) ve (4.33) ün kullanılmasıyla

$$\iint\limits_D [D_q^x v(x,y) - D_q^y u(x,y)]d_qxd_qy = \int\limits_0^a [v(a,t) - v(0,t) - u(t,a) + u(t,0)]d_qt \tag{4.34}$$

bulunmuş olur. (4.31) ve (4.34) karşılaştırılırsa (4.26) q-Green özdeşliğinin doğru olduğu görülür. ■

Uyarı 4.4 *[18] Temel Kavramlarda reel değerli bir $f(x,y)$ fonksiyonunun kısmi q- türevleri verilmişti. Şimdi kompleks değerli bir $f(z)$ fonksiyonunun kısmi q-türevlerini verelim. $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, D de tanımlanmış* *kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $f(z)$ nin x ve y ye göre kısmi q-türevleri sırasıyla,*

$$\begin{aligned} D_{q,x}f(z) &= \frac{f(x+iy)-f(qx+iy)}{(1-q)x} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(qx,y)-iv(qx,y)}{(1-q)x} \\ &= D_{q,x}u + iD_{q,x}v \end{aligned} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned} D^*_{q,y}f(z) &= \frac{f(x+iy)-f(x+iqy)}{(1-q)iy} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x,qy)-iv(x,qy)}{(1-q)iy} \\ &= -iD_{q,y}u + D_{q,y}v \end{aligned} \tag{4.36}$$

dir. Bu durumda $f(z)$ nin z ve $\overline{z}$ e göre kısmi q-türevleri sırasıyla,

$$D_q^z f(z) = \frac{1}{2}[D_{q,x}f(z) + D^*_{q,y}f(z)] = \frac{1}{2}[D_{q,x}f(z) - iD_{q,y}f(z)] \tag{4.37}$$

$$D_q^{\overline{z}} f(z) = \frac{1}{2}[D_{q,x}f(z) - D^*_{q,y}f(z)] = \frac{1}{2}[D_{q,x}f(z) + iD_{q,y}f(z)] \tag{4.38}$$

şeklindedir.Burada $D_{q,y}$ ile $D^*_{q,y}$ opeatörleri arasında $D^*_{q,y}f(z) = -iD_{q,y}f(z)$ ilişkisi vardır. Böylece kompleks q- kısmi türev operatörleri sırasıyla

$$D_q^z = \frac{1}{2}(D_{q,x} - iD_{q,y}) \tag{4.39}$$

$$D_q^{\overline{z}} = \frac{1}{2}(D_{q,x} + iD_{q,y}) \tag{4.40}$$

olarak verilebilir.

$f(z)$, D de bir fonksiyon olsun. Eğer $D_q^{\overline{z}} f(z) = 0$ oluyorsa bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna D de q-analitiktir denir.

Örnek 4.2 *$f(z) = \frac{x^2-y^2}{1+q} + ixy$ fonksiyonu q-analitik bir fonksiyondur.*

Eğer $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu D de q-analitik bir fonksiyon ise tanımdan, u, v için q-Cauchy Riemann sistemi

$$D_{q,x}u(x,y) = D_{q,y}v(x,y)\ ,\ D_{q,y}u(x,y) = -D_{q,x}v(x,y) \tag{4.41}$$

şeklinde yeni halleriyle elde edilir. (4.41) den ve $\Delta_q := \Delta_q^x + \Delta_q^y \equiv D_q^x D_q^x + D_q^y D_q^y$ den hareketle

$$\Delta_q u = 0\ ,\ \Delta_q v = 0$$

q-Laplace denklemlerinin de geçerli olduğu görülebilir.

Teorem 4.3 *D ve ∂D Teorem 4.2 deki gibi olsun. Eğer $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu z ve $\overline{z}$ e göre kısmi q-türevlere sahip ve bu q-türevler q-integrallenebilir ise bu durumda*

$$\int_{\partial D} f(z)d_q z = 2i \iint_D D_q^{\overline{z}} f(z) d_q x d_q y \tag{4.42}$$

$$\int_{\partial D} f(z)d_q \overline{z} = -2i \iint_D D_q^{z} f(z) d_q x d_q y \tag{4.43}$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı direkt hesapla görülebilir. ■

Tanım 4.2 *(4.42) ve (4.43) formüllerine kompleks düzlemde q-Gauss formülleri denir.*

Uyarı 4.5 *Eğer kompleks değerli $f(z)$ fonksiyonu $D = [0,a] \times [0,a]$ de q-analitik ise bu durumda $\gamma = \partial D$ olmak üzere $D_q^{\overline{z}} f(z) = 0$ olup (4.42) den*

$$\int_{\gamma} f(z) d_q z = 0 \tag{4.44}$$

dır.

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ Teorem 4.3'ün şartlarını sağlayan kompleks değerli iki fonksiyon ise (4.42) ve (4.43) in kullanılmasıyla

$$\int_{\gamma} f(z) d_q z + g(z) d_q \overline{z} = 2i \iint_{D} \left[D_q^{\overline{z}} f(z) - D_q^{z} g(z) \right] d_q x d_q y \tag{4.45}$$

yazılabilir.

Uyarı 4.6 *[5] numaralı kaynakta $f(z)$ nin z ve $\overline{z}$ e göre kısmi q-türevleri sırasıyla*

$$\begin{aligned} D_z f &= \frac{1}{2}\left[D_q^x f(z) - i M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y f(z) \right] \\ D_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}\left[D_q^x f(z) + i M_{\frac{1}{q}}^y D_q^y f(z) \right] \end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $M_q^y f(x,y) = f(x,qy)$ idi. Hatta $f(z)$ nin q-analitikliği $D_{\overline{z}} f = 0$ şeklinde tanımlanmıştır.Fakat, Teorem 4.2 bu şartlarda kullanılamaz. Çünkü tanımdaki $M_{\frac{1}{q}}$ operatörü $f(z)$ fonksiyonunun tanım kümesini değiştirir.

Teorem 4.4 *$v(x,y)$ reel değerli fonksiyonu uygun bir D kümesinde q-analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı olsun ve Tanım 4.1 ve Tanım 2.1 deki özellikleri sağlasın. Bu takdirde $f(z)$ nin reel kısmı olan $u(x,y)$ fonksiyonu $D_{q,u} u(0,y) = 0$ koşulu altında $x \neq 0$, $y \neq 0$ için,*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x}{y} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[v(q^n x, y) - v(q^n x, qy) \right] \\ &\quad - \lim_{n \to \infty} \frac{(1-q)y}{q^n x} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left[v(q^n x, q^k y) - v(0, q^k y) \right] + c \end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde bulunabilir. Burada c keyfi reel sabittir.

İspat. İspat için (4.41) eşitliklerini, 0 noktasındaki q-türev tanımı olan (2.1) tanımını ve v fonksiyonunun q-harmonik olduğunu kullanacağız. $D_{q,x} u(x,y) =$

$D_{q,y}v(x,y)$ ifadesinin her iki tarafının 0 dan x e kadar birinci değişkene göre q-integralini alalım,

$$\int_0^x D_{q,x}u(t,y)d_qt = u(x,y) - u(0,y) = \int_0^x D_{q,y}v(t,y)d_qt + \varphi(y)$$

olur. Buradan her iki tarafın y ye göre q-türevinin alınmasıyla v, q-Laplace denklemini sağlayacağından

$$\begin{aligned} D_{q,y}u(x,y) - D_{q,y}u(0,y) &= \int_0^x D^2_{q,y}v(t,y)d_qt + D_{q,y}\varphi(y) \\ &= -\int_0^x D^2_{q,x}v(t,y)d_qt + D_{q,y}\varphi(y) \\ &= -D_{q,x}v(x,y) + D_{q,x}v(0,y) + D_{q,y}\varphi(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$D_{q,y}\varphi(y) = -D_{q,x}v(0,y)$$

olur ve buradan 0 dan y ye birinci değişkene göre her iki tarafın q-integrali alınırsa

$$\varphi(y) = -\int_0^y D_{q,x}v(0,t)d_qt + c$$

olur. Son olarak $u(x,y)$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x D_{q,y}v(t,y)d_qt - \int_0^y D_{q,x}v(0,t)d_qt + c \\ &= \int_0^x \frac{v(t,y)-v(t,qy)}{(1-q)y}d_qt - \int_0^y \lim_{n\to\infty}\frac{v(q^nx,s)-v(0,s)}{q^nx}d_qs + c \\ &= \frac{(1-q)x}{(1-q)y}\sum_{n=0}^{\infty} q^n[v(q^nx,y)-v(q^nx,qy)] \\ &\quad - \lim_{n\to\infty}\frac{(1-q)y}{q^nx}\sum_{k=0}^{\infty} q^k[v(q^nx,q^ky)-v(0,q^ky)] + c \\ &= \frac{x}{y}\sum_{n=0}^{\infty} q^n\left[v(q^nx,y)-v(q^nx,qy)\right] \\ &\quad - \lim_{n\to\infty}\frac{(1-q)y}{q^nx}\sum_{k=0}^{\infty} q^k\left[v(q^nx,q^ky)-v(0,q^ky)\right] + c \end{aligned}$$

olup böylece (4.46) nın doğruluğu görülmüş olur. ■

Örnek 4.3 $v(x,y) = ax + by + c, (a, b, c$ reel sabitler) *olsun. Bu fonksiyon q-harmoniktir. v nin q-eşleniği (4.46) den* $u(x,y) = bx - ay + k$ *(k keyfi reel bir sabit) olarak bulunur.* $f(z) = bx - ay + k + i(ax + by + c)$ *fonksiyonu hem q-analitik, hem de alışılmış anlamda analitiktir.*

Örnek 4.4 $v(x,y) = x(1-y)$ *kompleks düzlemde q-harmoniktir.Bu durumda (4.46) dan v nin q-eşleniği* $u(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{1+q} - y + c$ *olarak bulunur.*
Dolayısıyla $f(z) = \dfrac{y^2 - x^2}{1+q} - y + c + ix(1-y)$ *fonksiyonu q-analitiktir.*

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde q-analitiklik, kompleks q-integraller ile özellikleri, katlı q-integraller ve eğrisel q-integral kavramı incelenmiştir. Katlı q-integraller Jackson integral tanımından yararlanarak tanımlanmış ve tanımlanan bu katlı q- integral yardımıyla orijinal q-Green formülü elde edilmiştir. Ayrıca verilen iki bağımsız değişkenli reel değerli q-harmonik bir fonksiyonun q-eşleniğinin nasıl bulunabileceği verilmiştir.

Eğer Cauchy integral formülünün q-analoğu elde edilebilirse, kompleks sınır değer problemlerinin q-analizinde incelenmesi mümkün olacaktır. Bu tezin amaçlarından biri de bunun gibi çalışmalara zemin hazırlamak olmuştur.

Kompleks kısmi türevli denklemlerde en basit sınır-değer problemi $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde

$$\begin{aligned} w_{\overline{z}} &= 0, \;\; z \in D \\ w|_{\partial D} &= \gamma(z), \gamma \in C(D, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak verilmektedir. Bu Dirichlet probleminin çözümü $|z| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{z d\overline{\zeta}}{1 - \overline{z}\zeta} = 0 \tag{5.2}$$

koşulu altında

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{5.3}$$

şeklindedir. Benzer şekilde diğer bir sınır-değer problemi

$$\begin{aligned} w_{\overline{z}} &= 0, \;\; z \in D \\ \operatorname{Re} w|_{\partial D}\gamma(z), \operatorname{Im} w(0) &= c; \;\; \gamma \in C(D, \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Schwarz sınır-değer problemidir. Bu problemin çözümü ise koşulsuz olarak

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{(\zeta + z)}{(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic \tag{5.5}$$

olarak verilir. Sınır-değer problemleri hakkında detaylı bilgi için [7] kaynağına bakılabilir. Buradan da görüldüğü gibi problemlerin çözümleri Cauchy tipi kompleks integraller yardımıyla verilmektedir. Eğer Cauchy integral formülünün q-Analizinde karşılığı bulunabilirse (5.1) ve (5.4) gibi problemlerin q-analizinde incelenmesi yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kac, V., Cheung, P., Quantum Calculus, Springer, 2002.

[2] Ernst, T., A Comprehensive Treatment of q-Calculus, Springer Basel, 2012.

[3] Annaby, M.H., Mansour, Z.S., q-Fractional Calculus and Equations, Lecture Notes in Mathematics 2056, Springer, 2012.

[4] Bohner, M., Guseinov G.Sh., "Line Integrals and Green's Formula on Time Scales", J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 1124-1141.

[5] Pashaev, O. K., Nalci, S., "q-analytic functions, fractals and generalized analytic functions", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(4), 045204, 2014.

[6] Brown, J.W., Churchill; Complex Variables and Applications, Mc Graw Hill Inc. 1996.

[7] Begehr H.; "Boundary Value Problems in Complex Analysis I, II", Bol. Asoc. Math. Venozolona, 65-85, 165-184, 2005.

[8] Andrews G. E., Askey R., Roy R.; Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press,1999.

[9] Rajkovic, P. M., Marinkovic, S. D., Stankovic, M. S., "Fractional integrals and derivatives in q-Calculus", Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 1 (2007), 311-323.

[10] Andrews, G. E., "q-Series: Their Development and application in analysis", Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986.

[11] Agarwal, R.P., "Certain fractional q-integrals and q-derivatives", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 66, pp 365-370, 1969.

[12] Koekoek, J., Koekoek, R., "A note on the q-derivatives operator", J. Math. Anal. Appl. 176 (1993), 627-634, 1999.

[13] Al-Salam, W.A., "*q*- Analogues of Cauchy's Formulas", Proc. Am. Math. Soc. 17, 616-621, 1966.

[14] Salem, A., "On *q*-extension of Laurent expansion with applications" Arab Journal Math. Sci. 20 (1), 141-156, 2014.

[15] Pashaev, O.K., "Two-circles theorem, *q*-periodic functions and entangled qubit states", J. Phsy.: Conf. Ser. 2014.

[16] Nalci, S., Pashaev, O. K., "*q*-analogue of shock soliton solution", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43(44), 445205, 2010.

[17] Pashaev, O. K., Nalci, S., "*q*-shock soliton solution evolution", Chaos, Solitons & Fractals, 45(9), 1246-1254, 2012.

[18] Koca, K., Gençtürk, İ., Aydın, M., "Complex line *q*-integrals and *q*-Green's Formula on the plane", An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) (Accepted 2016).

[19]Kurowski, G.J., "Further results in the theory of monodiffric functions", Pacific Journal Math. 18, 139-147, 1966.

[20] Harman C.J., "Discrete geometric function theory I", Applicable Analysis, An International Journal, Vol. 7, 315-336, 1978.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Mustafa AYDIN

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 29/09/1984

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Bahçelievler Deneme Lisesi 2001

Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2006

Yüksek Lisans: Kasım 2017

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: MEB

Yayınları: Koca K., Gençtürk İ. and Aydın M.,'Complex line q-integrals and q-Green's Formula on the plane", An. Stiint. Univ. Al. Cuza. Iasi. Mat. (N.S.), (Accepted 2016).