CAS DALGACIK METODUYLA GECİKEN DEĞİŞKENLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Elif DENİZ ÖZTÜRK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT
2018
Her Hakkı Saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAS DALGACIK METODUYLA GECİKEN DEĞİŞKENLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Elif DENİZ ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2018

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

CAS DALGACIK METODUYLA GECİKEN DEĞİŞKENLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Yrd.Doç.Dr. Arzu AYKUT danışmanlığında, Elif DENİZ ÖZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma, 25/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / ~~oy çokluğu~~ (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ercan ÇELİK İmza :

Üye : Yrd. Doç.Dr. Arzu AYKUT İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 01./02/2018 tarih ve ...5...../...31..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CAS DALGACIK METODUYLA GECİKEN DEĞİŞKENLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Elif DENİZ ÖZTÜRK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

$\tau(x) \geq 0$ fonksiyonu $0 \leq x \leq T$ aralığında sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$y''(x) + a(x)y\big(x - \tau(x)\big) = f(x), (0 \leq x \leq T)$$

$$y(x) = \varphi(x)(\lambda_0 \leq x \leq 0), y(T) = y(c)\ (0 < c < T)$$

sınır değer problemi göz önüne alınarak bu probleme denk olan Fredholm - Volterra İntegral Denklemi yazıldı. Bazı şartlar altında Fredholm - Volterra integral denklemi Fredholm integral denklemine dönüştürüldü. Bu integral denklemin yaklaşık çözümü "CAS Dalgacık " metodu ile elde edildi. Böylece verilen sınır değer probleminin bir yaklaşık çözümü bulundu.

2018, 36 sayfa

Anahtar Kelimeler: Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklemler, Fredholm ve Volterra İntegral Denklemleri, CAS Dalgacık Metodu.

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF DELAYED VARIABLE BOUNDARY VALUE BY THE CAS WAVELET METHOD

Elif DENİZ ÖZTÜRK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Arzu AYKUT

In this thesis, by considering the boundary value problem

$$y''(x) + a(x)y\big(x - \tau(x)\big) = f(x), (0 \leq x \leq T)$$

$$y(x) = \varphi(x)(\lambda_0 \leq x \leq 0), y(T) = y(c)\ (0 < c < T)$$

such that $\tau(x) \geq 0$ is an arbitrary continous function on $0 \leq x \leq T$, Fredholm-Volterra Integral Equation, which is equivalent to this problem, was written considering the boundary value problem. Under certain conditions, the Fredholm-Volterra integral equation was transformed into the Fredholm integral equation. The solution of this integral equation is approximated by the "CAS Wavelet" method. Thus, an approximate solution to the given boundary value problem was found.

2018, 36 pages

Keywords:.Fredholm-Volterra Integral Equations, Differential Equation with Retarded Argument, CAS Wavelet Method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve bilgilerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT'a, Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e, Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na ve matematik bölümünün tüm öğretim üyelerine teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte yanımda olup desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Elif DENİZ ÖZTÜRK
Ocak, 2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 4
2.1. Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklemler 4
2.2. İntegral Denklemler 5
2.3. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması 6
2.3.1. Lineer olan veya lineer olmayan integral denklemler 6
2.3.2. İntegral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması 7
2.4. Bazı Özel İntegral Denklemler 9
2.5. Yardımcı Formüller 13
3. MATERYAL VE YÖNTEM 14
3.1. (1.1) Problemi İçin Denk İntegral Denklemin Oluşturulması: 14
3.1.1. (1.1) Probleminin denk Fredholm-Volterra integral denklemine dönüştürülmesi 14
3.1.2. (1.1) Probleminin denk Fredholm integral denklemine dönüştürülmesi 19
3.2. Örnek 21
3.3. CAS Dalgacık Metodu 24
3.3.1. CAS Dalgacık özellikleri 24
3.3.2. CAS Dalgacığı ile fonksiyonu eşdeğerine açmak 25
3.3.3. CAS dalgacığının operasyonel matris çarpımı 26
3.4. Fredholm İntegral Denklemin CAS Metoduyla Çözümü 26
3.5. Nümerik Örnek 28
3.6. Volterra İntegral Denkleminin CAS Metoduyla Çözümü 28
3.7. Nümerik Örnek 29
3.8. (3.8) Probleminin CAS Dalgacık Metoduyla Yaklaşık Çözümü 29
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 34

5. TARTIŞMA ve SONUÇ 35
KAYNAKLAR 36
ÖZGEÇMİŞ 37

SİMGELER DİZİNİ

$CAS_m(t)$,	CAS dalgacık fonksiyonu
$F_\lambda^T x$,	$[0, \lambda(T)]$ aralığında Fredholm operatörü
$F_\lambda^c x$,	$[0, \lambda(c)]$ aralığında Fredholm operatörü
$G_c(t, s)$,	Green fonksiyonu
I_n ,	nxn tipinde Birim matris
$V_\lambda x$,	$[0, \lambda(t)]$ aralığında Volterra operatörü
$\psi_{nm}(t)$,	Dalga fonksiyonu
$A(x)$,	Sıkan operatör
$C[0, T]$,	$[0, T]$ aralığında tanımlı, sürekli $x(t)$ fonksiyonlarının uzayı
$K(t, s)$,	İntegral denklemin çekirdeği

1. GİRİŞ

Birçok probleme adi diferansiyel denklem karşılık getirilerek çözümler arandığı, diferansiyel denklemler teorisinden bilinir. Bu problemlerdeki işlemin değişme hızı ancak değişme anındaki durumla bağlantılıdır. Bundan dolayı alınan diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevleri, bağımsız değişkenin o andaki değerine bağlıdır (Dağ 1983; Kaçar and Memmedov 1994). Fakat öyle fiziki problemler vardır ki işlemin değişme hızı, işlemin o andaki durumuyla değil de onun geçmiş ya da gelecekteki durumuyla ilişkilidir. Böyle işlemlere karşılık gelen diferansiyel denklemlere sapan değişkenli (ya da meyleden değişkenli) diferansiyel denklemler denir. Özel halde bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevi $t-\tau(t)$, $(\tau(t)\geq 0)$ değişkenine bağlı ise böyle diferansiyel denklemlere geciken değişkenli diferansiyel denklem denir.

İkinci mertebeden geciken değişkenli lineer diferansiyel denklemler için konulmuş

$$\left.\begin{array}{c} x''(t)+a(t)x\big(t-\tau(t)\big)=f(t),\ (0\leq t\leq T) \\ x(t)=\varphi(t)\ (\lambda_0\leq t\leq 0),\ x(T)=x(c)\ \ (0<c<T) \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $a(t)\geq 0,\ f(t)\geq 0,\ \tau(t)\geq 0,\ (0\leq t\leq T)$ ve $\varphi(t),\ (\lambda_0\leq t\leq 0)$ fonksiyonları önceden verilmiş sürekli fonksiyonlardır. $\lambda(t)=t-\tau(t)$ olarak alınırsa bu halde $t_0\in[0,T]$, T nin solunda öyle bir noktadır ki $\lambda(t_0)=0$ ve $\lambda(t)\leq 0,\ (0\leq t\leq t_0)$ şartı korunur. $\lambda_0=\min\limits_{0\leq t\leq t_0}\lambda(t)$ dır. $\lambda(t)$ fonksiyonu $(t_{0,}T)$ aralığında azalmayan, $\lambda(t)=\sigma$ denkleminin keyfi $\sigma\in[0,\lambda(T)]$ değeri için $t=\gamma(\sigma)$ çözümü var ve bu çözüm sürekli diferansiyellenebilir olduğu kabul edilir.

(1.1) problemi literatürde çeşitli metodlarla ele alındı (El'sgol'c 1960; Ahmedov 1972; Kaçar ve Memmedov 1994). Ayrıca bu problem, tezde incelenen metodlarla $\tau(t)\equiv 0$

(Memmedov and Kaçar 1993) ve $\tau(t) =$ sabit hali (Kaçar and Memmedov 1994) incelendi. Bu tezde $\tau(t)$ nın keyfi sürekli bir fonksiyon olması hali araştırıldı.

Ayrıca,

$$\left.\begin{array}{c} x''(t) + a(t)x\big(t - \tau(t)\big) = f(t),\ (0 \le t \le T) \\ x(t) = \varphi(t)(\lambda_0 \le t \le 0),\ x(T) = 1 \quad (0 < c < T) \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

şeklinde ki benzer çalışma değişik sınır şartı altında incelenmiştir (Aykut 1995).

Matematik geçmişinde dalga analizi birçok farklı şekilde gösterilmiştir. Bu alandaki çalışmaların çoğu 1930 yıllarında yapılmıştır. 1930 dan önce dalga teorisi, matematiğin temel taşı olan, Joseph Fourier (1807) ile başlamıştır. Fourier'in teorisinde ki frekans analizi teorileri şimdilerde sık sık Fourier sentezi olarak anılıyor. Onun iddiasına göre; herhangi bir 2π-periyodik fonksiyonu olan $f(x)$ in toplamı

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

şeklinde Fourier serisi olarak gösterilir. Burada

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

katsayıları şeklinde tanımlanmıştır.

Matematikçilerin fonksiyonlar hakkındaki görüşleri arasında Fourier'in görüşleri önemli rol oynar. Öyle ki Fourier'in görüşleri fonksiyonlar için yeni bir kapı açmıştır. 1807 den sonra bazı fonksiyonların anlamları açıklanmıştır. Fourier serisi, ortonormal sistem ve geçmişteki frekans analizi kavramından yola çıkılarak ölçek analizi kavramları açıklanmıştır. Yani yukarıda verilen $f(x)$ analiz edilerek birçok yeni matematiksel yapı tanımlanmıştır. Dalga analizi de bunlardan biridir (Beylkin 1991).

Dalga teorisi nispeten yeni gelişmekte olan bir alandır. Geniş bir alanda uygulanan dalga metodu özellikle, mühendislik alanında uygulanmaktadır (Chui 1997). Dalgacık çeşitli fonksiyonların ve operatörlerin doğru olarak gösterilmesine olanak sağlar. Ayrıca dalgacıklar sayısal algoritmalar arasında bağlantı kurar (Beylkin 1991).

Bu metotta, incelenen problem denk bir Fredholm-Volterra integral denklemine dönüştürülür, sonra bu integral denkleme CAS dalgacık metodu uygulanır. Burada integral denkleme ait olan Fredholm operatörünün çekirdeğinin bozulmuş olması özelliğinden faydalanılır (Delves and Walsh 1974).

Sunulan tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde kuramsal bilgiler verilmiş olup, burada geciken değişkenli diferansiyel denklem, integral denklem kavramlarına değinildi. Üçüncü bölümde (1.1) problemine denk olan Fredholm – Volterra integral denklemi elde edildi. Ayrıca bu bölümde, CAS Dalgacık metoduyla ilgili bilgi verilip (1.1) probleminin yaklaşık çözümü bulunmuştur. Dördüncü bölümde, araştırma bulgularına değinilmiştir. Beşinci bölüm sonuç bölümü olup geciken değişkenli sınır değer probleminin yaklaşık çözümünün bulunması için alternatif bir yöntem olduğu belirtilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu başlık altında Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklem, Fredholm İntegral Denklem, Volterra İntegral Denklemi, Fredholm – Volterra İntegral Denklemi ve bazı özel integral denklemlere değinilmiştir.

2.1. Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklemler

$$y'(x) = f\left(x, y\big(x - \tau(x)\big)\right) \ \ (0 \leq x \leq T) \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemine birinci mertebeden sapan değişkenli lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Burada $\tau(x)$, $(0 \leq x \leq T)$, değişkenin sapanı olarak adlandırılır. Eğer $\tau(x) \geq 0$ ise (2.1) denklemine geciken değişkenli diferansiyel denklem; $\tau(x) = sabit$ olduğunda ise

$$y'(x) = f\big(x, x(x - \tau)\big) \ \ (0 \leq x \leq T) \tag{2.2}$$

diferansiyel denklemine sabit geciken değişkenli diferansiyel denklem denir. $\tau = \tau(t)$ olduğunda denkleme değişken geciken değişkenli diferansiyel denklem denir.

(2.2) diferansiyel denklemi $[0, T]$ aralığında

$$y(x) = \varphi(x) \ \ (-\tau \leq x \leq 0) \tag{2.3}$$

şartıyla beraber bir başlangıç değer problemi oluşturur. Burada $\varphi(x)$, $(-\tau \leq x \leq 0)$ fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu adı verilir. $\tau \equiv 0$ olduğunda (2.3) şartının $y(0) = \varphi(0)$ olduğu aşikardır.

$\tau(x) > 0$ olmak üzere,

$$y''(x) = f\left(x, y\big(x - \tau(x)\big)\right),\ (0 \leq x \leq T) \tag{2.4}$$

diferansiyel denklemine ikinci mertebeden sapan değişkenli lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Bu denklem de birinci mertebeden diferansiyel denklemde olduğu gibi τ ve $\tau(x)$ nin durumuna göre sabit geciken değişkenli diferansiyel denklem, değişken geciken değişkenli diferansiyel denklem gibi isimler alacaktır.

(2.4) diferansiyel denklemi $[0, T]$ aralığında

$$y(x) = \varphi(x)\ \ (-\tau \leq x \leq 0)$$

$$y'(x) = \varphi'(x)\ \ (-\tau \leq x \leq 0)$$

şartlarıyla beraber bir başlangıç değer problemi oluşturur.

Ayrıca,

$$y''(x) + a(x)y(x - \tau) = f(x),\ (0 \leq x \leq T, \tau \geq 0) \tag{2.5}$$

diferansiyel denklemine lineer diferansiyel denklem denir. Bu denklem $[0, T]$ aralığında

$$y(x) = \varphi(x)\ \ (-\tau \leq x \leq 0), \qquad y(T) = y_T$$

sınır şartlarıyla beraber bir sınır değer problemi oluşturur.

2.2. İntegral Denklemler

İntegral işareti içerisinde bilinmeyen fonksiyon barındıran denkleme integral denklem denir.

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds \tag{2.6}$$

integral denkleminde $f(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ ve $K(t,s)$, $(0 \leq t\,, s \leq T)$ bilinen fonksiyonlar, $x(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $f(t)$ fonksiyonu integral denklemin serbest terimi, $K(t,s)$ fonksiyonu ise integral denklemin çekirdeğidir.

$C[0,T]$ ile $[0,T]$ aralığında tanımlı sürekli $x(t)$ fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir. Burada,

$$\|x\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$$

şeklinde tanımlanan eşitlik normdur. $C[0,T]$ uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır. (1.1) probleminin çözümünün varlığı ve tekliği bu uzayda incelenecektir.

2.3. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.3.1. Lineer olan veya lineer olmayan integral denklemler

İntegral denklemler çeşitli şekillerde sınıflandırılmışlardır. Lineer integral denklemler ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki ana başlık altında incelenecektir.

$y(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt \tag{2.7}$$

$y(x)$ fonksiyonu lineer ise integral denklemde lineer integral denklemdir denir.

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y^n(t)dt \tag{2.8}$$

integral denklemi lineer olmayan integral denklemdir.

Daha genel olarak;

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \phi[x, t, u(t)]dt \tag{2.9}$$

integral denklemi lineer olmayan integral denklemdir.

2.3.2. İntegral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üçe ayrılırlar. $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt \tag{2.10}$$

şeklinde bir integral denkleme I. Cins İntegral Denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu, bilinen fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt \tag{2.11}$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ bilinen olan fonksiyonlardır.

Bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere,

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek, (2.10) denklemi yapısında yazılabilirler

$$e^x = x - \int_0^{1/2} x^2 t\, u(t)dt$$

denklemi bu tür denklemler için bir örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.12}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.13}$$

şeklindeki integral denklemler ise II. Cins İntegral Denklemler sınıfını oluşturmaktadır.

$$u(x) = \int_0^x e^{x+t}u(t)dt$$

ve

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 (sinx + tu(t))dt$$

bu tür denklemlere birer örnektir.

Bu iki cins integral denklemlerden başka $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilindiğine göre

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

şeklinde integral denklemlere III. cins integral denklemi denilmektedir.

2.4. Bazı Özel İntegral Denklemler

Bazı özel lineer integral denklemler aşağıda sınıflandırılmıştır:

1.

$$x(t) = f(x) + \int_0^T K(t,s)x(s)ds \tag{2.15}$$

biçimindeki integral denkleme lineer Fredholm integral denklemi,

$$F_x \equiv \int_0^T K(t,s)x(s)ds$$

operatörüne ise Fredholm operatörü denir.

2.

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds \tag{2.16}$$

denklemi lineer Volterra integral denklemi ve

$$V_x \equiv \int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

operatörü ise Volterra operatörü olarak isimlendirilir.

$$K^*(t,s) = \begin{cases} K(t,s)\,, & 0 \le t \le T\,, \quad 0 \le s \le T \\ 0\,, & 0 \le t \le T\,, \quad t \le s \le T \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa Volterra integral denklemi,

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K^*(t,s)x(s)ds$$

Fredholm integral denklemine dönüşür (Blyth *et al.* 2003).

3.

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)x(s)ds \tag{2.17}$$

denklemine lineer Fredholm-Volterra integral denklemi denir. Bu integral denklemi de

$$K^*(t,s) = {K_1}^*(t,s) + {K_2}^*(t,s)$$

$${K_1}^*(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s)\,, & 0 \le s \le t \\ 0\,, & t \le s \le T \end{cases}$$

$${K_2}^*(t,s) = \begin{cases} K_2(t,s)\,, & 0 \le s \le t \\ 0\,, & t \le s \le T \end{cases}$$

tanımlamaları sonrasında

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K^*(t,s)x(s)ds$$

Fredholm integral denklemi olarak yazılabilir. Burada yine Volterra operatörünün özelliği kaybolmuştur.

Volterra operatörünün özelliğinden yararlanılacak ise (2.16) ve (2.17) integral denklemlerinden yararlanılabilir.

Özel olarak,

$$K(t,s) = a(t)b(s)$$

şeklinde alınırsa,

$$Fx \equiv a(t)\int_0^T b(s)x(s)ds$$

integral operatörüne bozulmuş çekirdekli Fredholm integral operatörü denir. Açıktır ki Fredholm operatörü (aynı şekilde Volterra operatörü) fonksiyonlar uzayının herhangi bir elemanını bir fonksiyona dönüştürür.

Fredholm operatörünün özel hali olan

$$F_0x \equiv \int_0^T b(s)x(s)ds$$

şeklindeki operatör ise fonksiyonlar uzayının elemanını reel sayıya dönüştürür. Bu özellikte olan Fredholm operatörü Fredholm fonksiyoneli adını alır.

Bu çalışmada incelenen Fredholm integral denklemi

$$x(t) = f(t) + a(t)F_0x$$

şeklinde, yani bozulmuş çekirdekli integral denklem olacaktır. Böyle integral denklemlerin $F_0a \neq 1$ olması halinde çözümünün (kesin çözümünün) varlığı aşağıdaki Lemma ile ispatlanır.

Lemma 2.4.1: $F_0a \neq 1$ olması halinde

$$x(t) = f(t) + a(t)F_0x \tag{2.21}$$

Fredholm integral denkleminin bir çözümü vardır.

İspat: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $F_0 x = c$ olduğundan Fredholm integral denklemi

$$x(t) = f(t) + a(t)c$$

şeklinde yazılır. Burada $f(t)$ ve $a(t)$ bilinen fonksiyonlar, c sabittir. Ancak c nin değeri bilinmemektedir. O halde bu c değerini tespit edelim.

$$c = F_0 f + cF_0 a$$

cebirsel denkleminden yararlanılır. Hipotezden $F_0 a \neq 1$ olup

$$c = \frac{F_0 f}{1 - F_0 a}$$

olur. Buradan,

$$x(t) = f(t) + \frac{a(t)}{1 - F_0 a} F_0 f$$

elde edilir. Böylece $x(t)$ fonksiyonu belirlenmiştir. Yani (2.21) denkleminin kesin çözümüdür.

2.4.2. CAS Dalgacık

a ve b iki parametre olmak üzere,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

eşitliği dalgacık fonksiyonudur.

$$CAS_m(t) = \cos(2m\pi t) + \sin(2m\pi t)$$

ifadesi ise CAS dalgacık fonksiyonudur.(Gu and Jiang 1996)

CAS dalgacığıyla ilgili daha detaylı bilgi sonraki kısımlarda verilecektir.

2.5. Yardımcı Formüller

Bu kısımda materyal ve yöntem bölümünde verilen problemin çözümünde karşılaşılan bazı integrallerin hesaplanmasında kolaylık sağlayan formül ve interpolasyon polinomlarına değinilmiştir.

1. $\int_0^t \int_0^\sigma F(s)ds\, d\sigma = \int_0^t (t-s)F(s)ds$
2. $\sqrt{t} \approx 2{,}83824t - 3{,}85786t^2 + 2{,}01962t^3$
3. $\sqrt{1+16t-8\sqrt{t}} \approx 1 - 2{,}64704t + 12{,}56854t^2 - 7.92150t^3$
4. $\sqrt{t}\sqrt{1+16t-8\sqrt{t}} \approx 1{,}16176t + 3{,}85786t^2 - 2{,}01962t^3$

Burada 2,3 ve 4 denk olan interpolasyon polinomlarıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. (1.1) Problemi İçin Denk İntegral Denklemin Oluşturulması:

Bu kısımda giriş bölümünde verilen (1.1) sınır değer problemi, denk olan Fredholm-Volterra integral denklemine ve Fredholm integral denklemine dönüştürülecektir.

3.1.1. (1.1) Probleminin denk Fredholm-Volterra integral denklemine dönüştürülmesi

$x^*(t)$ fonksiyonunun , (1.1) sınır değer probleminin çözümü olduğunu kabul edelim. Bu $x^*(t)$ fonksiyonunun

$$\check{h}(t) = \varphi(0) - t\int_0^T \frac{T-s}{T-c} a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds + t\int_0^c \frac{c-s}{T-s} f(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

olmak üzere,

$$x(t) = \check{h}(t) + \int_0^T \frac{T-s}{T-c} a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds - \int_0^c \frac{c-s}{T-s}\, a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-\int_0^t (t-s)a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds \tag{3.1}$$

integral denkleminin de çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için (1.1) sınır değer probleminde $x(t)$ yerine $x^*(t)$ yazıp $[0,T]$ aralığında integral alındığında

$$\frac{d}{dt}x^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(0) + \int_0^t a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds = \int_0^t f(s)ds$$

olur. Tekrar bu ifadeyi $[0,T]$ aralığında integre edersek

$$x^*(t) = \varphi(0) + t\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^t \int_0^\sigma a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)dsd\sigma$$

$$+\int_0^t \int_0^\sigma f(s)dsd\sigma \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) denklemine 2.5 te ki yardımcı formüllerden 1.si uygulandığında

$$x^*(t) = \varphi(0) + t\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^t (t-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$+\int_0^t (t-s)f(s)ds \tag{3.3}$$

olur. $x^*(t)$ de sırasıyla t yerine T ve c yazalım.

$$x^*(T) = \varphi(0) + T\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds + \int_0^T (T-s)f(s)ds$$

$$x^*(c) = \varphi(0) + c\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^c (c-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds + \int_0^c (c-s)f(s)ds$$

elde edilir. $x^*(T) = x^*(c)$ olup,

$$T\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds + \int_0^T (T-s)f(s)ds$$

$$= c\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^c (c-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^c (c-s)f(s)ds$$

yazılırsa

$$(T-c)\frac{d}{dt}x^*(0) = \int_0^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-\int_0^T (T-s)f(s)ds - \int_0^c (c-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^c (c-s)f(s)ds$$

veya

$$\frac{d}{dt}x^*(0) = \int_0^T \frac{T-s}{T-c}a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds - \int_0^T \frac{T-s}{T-c}f(s)ds$$

$$-\int_0^c \frac{c-s}{T-c}a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^c \frac{c-s}{T-c}f(s)ds$$

şeklinde elde edilir. Bu değer (3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$x^*(t) = \varphi(0) + t\int_0^T \frac{T-s}{T-c}a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds - t\int_0^T \frac{T-s}{T-c}f(s)ds$$

$$-t\int_0^c \frac{c-s}{T-c}a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds + \int_0^c \frac{c-s}{T-c}f(s)ds$$

$$-\int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

bulunur. Böylece,

$$x^*(t) = \check{h}(t) + t\int_0^T \frac{T-s}{T-c} a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds - t\int_0^c \frac{c-s}{T-c} a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-\int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds \tag{3.4}$$

olduğu görülür. O halde $x^*(t)$, (3.1) integral denkleminin çözümüdür.

Diğer yandan, $x^*(t)$, (3.1) integral denkleminin çözümü olduğunu kabul edelim. Kolayca gösterilebilir ki $x^*(t)$, (1.1) sınır değer probleminin de çözümüdür. Böylece (1.1) sınır değer problemi ile (3.1) integral denkleminin denk (eşdeğer) olduğu görülür. (3.1) integral denklemi yeniden düzenlenerek daha kullanışlı bir integral denkleme dönüştürülür. Bunun için $\sigma = s - \tau(s)$ yazılırsa

$$x(t) = h(t) + t\int_0^{\lambda(T)} \frac{T-\gamma(\sigma)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_0^{\lambda(c)} \frac{c-\gamma(\sigma)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_0^{\lambda(t)} \big(t-\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

elde edilir. Burada,

$$h(t) = \check{h}(t) + \int_0^{\lambda_\circ} \frac{\big(T-\gamma(\sigma)\big)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\varphi(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_{\lambda_\circ}^{0} \frac{\big(T-\gamma(\sigma)\big)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\varphi(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_{\lambda_\circ}^{0} \big(t-\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)\varphi(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$

dır. Nihayet,

$$K_1(\sigma) = \frac{T-\gamma(\sigma)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)$$

$$K_2(\sigma) = -\frac{c-\gamma(\sigma)}{T-c} a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)$$

$$K(t,\sigma) = -\big(t-\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)$$

denirse

$$x(t) = h(t) + t\int_0^{\lambda(T)} K_1(\sigma)x(\sigma)d\sigma + t\int_0^{\lambda(c)} K_2(\sigma)x(\sigma)d\sigma + \int_0^{\lambda(t)} K(t,\sigma)x(\sigma)d\sigma \qquad (3.5)$$

integral denklemi elde edilir. Burada,

$$F_\lambda^T x = \int_0^{\lambda(T)} K_1(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

$$F_\lambda^c x = \int_0^{\lambda(c)} K_2(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

Fredholm operatörleri ve

$$V_\lambda x = \int_0^{\lambda(t)} K(t,\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

Volterra tipli integral operatöründen yararlanılırsa

$$x(t) = h(t) + tF_\lambda^T x + tF_\lambda^c x + V_\lambda x \tag{3.6}$$

Fredholm-Volterra integral denklemi elde edilir. Bu denklem, (1.1) problemine denk olan Fredholm-Volterra integral denklemidir.

3.1.2. (1.1) Probleminin denk Fredholm integral denklemine dönüştürülmesi

(1.1) problemine denk olan (3.1) integral denkleminde ilk integrali parçalayarak

$$x(t) = \check{h}(t) + t\int_0^T \frac{T-s}{T-c} a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-t\int_0^c \frac{c-s}{T-c} a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-\int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds$$

yazılır. Buradan,

$$x(t) = \int_0^t \left[\frac{t(T-s)}{T-c} - (t-s)\right] a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$+t\int_{t}^{T}\frac{(T-s)}{T-c}a(s)x^{*}\big(s-\tau(s)\big)ds$$

$$-\int_{0}^{c}\frac{(c-s)}{T-c}a(s)x^{*}(s-\tau(s))ds$$

veya $G_c(t,s)$ Green fonksiyonu olmak üzere,

$$x^{*}(t)=h^{*}(t)+\int_{0}^{T}G_c(t,s)\,a(s)x(s-\tau(s))ds$$

bulunur. Burada $G_c(t,s)$ Green fonksiyonu

$$G_c(t,s)=\begin{cases}\dfrac{c(t-s)+s(T-t)}{T-c} & , \quad 0\le s\le t\\[2ex] \dfrac{t(T-s)}{T-c} & , \quad t\le s\le T\end{cases}$$

şeklindedir. $G_c(t,s)$, $(0\le s\le t)$ Green fonksiyonu pozitif, sürekli ve

$$|G_c(t,s)|\le\frac{T^2}{4(T-c)},\qquad \int_{0}^{T}|G_c(t,s)|\,ds\le\frac{T^4}{8(T-c)^2}$$

özelliklerini sağlar. Son integral denklemde $\sigma=s-\tau(s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$x(t)=h(t)+\int_{0}^{\lambda(T)}G_c\big(t,\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma \tag{3.7}$$

olur. Bu ise bir Fredholm integral denklemidir.

Böylece (1.1) problemi (3.6) ve (3.7) integral denklemlerine denk olduğundan, (1.1) problemi yerine (3.1) veya (3.7) integral denklemleri incelenecektir.

3.2. Örnek

(1.1) probleminin özel hali olan

$$\left.\begin{array}{c} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = -2t^3 + 2t^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} - 4\,, (0 \le t \le 1) \\ x(t) = 0\,, \left(-\frac{1}{16} \le t \le 0\right)\,, x(1) = x(\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \quad (3.8)$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada $a(t) = t\,, f(t) = -2t^3 + 2t^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} - 4\,, \tau(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t} \ge 0\,, (0 \le t \le 1)$ ve $\varphi(t) \equiv 0\,, t \in [-\frac{1}{16}, 0]$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $t_0 = \frac{1}{4}$ noktasında $\lambda(t) = t - \frac{1}{2}\sqrt{t}$ fonksiyonu sıfır değerini alır. Yani $\lambda(t_0) = 0$ ve $\lambda(t) \le 0, (0 \le t \le \frac{1}{4})$ ve $min\lambda(t) = -\frac{1}{16}$ dır. Şimdi,

$$\lambda(t) = \sigma, \qquad \sigma \in [0, \frac{1}{2}]$$

denkleminde $t = \gamma(\sigma)$ çözümünü bulalım. Böylece,

$$t - \frac{1}{2}\sqrt{t} - \sigma = 0$$

denkleminin [0,1] aralığına ait olan bir kökü

$$t = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{1 + 16\sigma})^2 = \gamma(\sigma)$$

şeklindedir. $\gamma'(\sigma)$ fonksiyonunun $[0, \frac{1}{2}]$ aralığında sürekli diferansiyellenebildiği aşikardır. Böylece (3.8) denklemine ait olan bilinen fonksiyonların (1.1) problemi için

verilen şartları sağladığı görüldü. Buna göre (3.8) problemi, (3.5) integral denkleminin özel halidir.

Şimdi (3.5) integral denkleminden yararlanarak (3.8) problemine denk olan integral denklemi yazalım. Önce (3.8) deki denklemi ard arda iki kez integre edersek

$$x(t) = -t\int_0^1 2(1-s)\left(-2s^3 + 2s^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}s^2 - \frac{3}{2}s^{\frac{3}{2}} - 4\right)ds$$

$$+t\int_0^{1/2}(1-2s)\left(-2s^3 + 2s^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}s^2 - \frac{3}{2}s^{\frac{3}{2}} - 4\right)ds$$

$$+\int_0^t (t-s)\left(-2s^3 + 2s^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}s^2 - \frac{3}{2}s^{\frac{3}{2}} - 4\right)ds$$

$$+t\int_0^{\frac{1}{2}} 2[1-\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2]\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2\frac{1+\sqrt{1+16\sigma}}{\sqrt{1+16\sigma}}x(\sigma)d\sigma$$

$$-t\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}[1-\frac{1}{8}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2]\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2\frac{1+\sqrt{1+16\sigma}}{\sqrt{1+16\sigma}}x(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_0^{t-\frac{\sqrt{t}}{2}}[t-\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2]\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2\frac{1+\sqrt{1+16\sigma}}{\sqrt{1+16\sigma}}x(\sigma)d\sigma$$

bulunur. Bunu düzenleyerek,

$$x(t) = 2{,}872933230t - 2t^2 - 0{,}1714285714t^{\frac{7}{2}} + 0{,}2083333333t^4 + 0{,}1269841270t^{\frac{9}{2}} - 0{,}1t^5 + \frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[3 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{3 + 28\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma + \frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\left[1 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{1 + 4\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma - \frac{1}{16}\int_0^{t-\frac{\sqrt{t}}{2}}\left[(4t - 1) + (16t - 12)\sigma - 16\sigma^2 + \frac{(4t - 1) + (48t - 20)\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

elde edilir. Burada,

$$h(t) = 2{,}872933230t - 2t^2 - 0{,}1714285714t^{\frac{7}{2}} + 0{,}2083333333t^4 + 0{,}1269841270t^{\frac{9}{2}} - 0{,}1t^5$$

$$K_1(\sigma) = \frac{1}{8}(3 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{3 + 28\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}})$$

$$K_2(\sigma) = -\frac{1}{8}(1 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{1 + 4\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}})$$

$$K(t,\sigma) = -\frac{1}{16}((4t - 1) + (16t - 12)\sigma - 16\sigma^2 + \frac{(4t - 1) + (48t - 20)\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}})$$

dir (Aykut 1995).

3.3. CAS Dalgacık Metodu

Dalga teorisi, matematik araştırmasında nispeten yeni ve gelişmekte olan bir alandır. Mühendislik disiplininde oldukça geniş alanda uygulanır. Özellikle; dalga biçimi gösterimi için sinyal analizinde, hücre bölünmesinde, zaman-frekans analizinde kolayca uygulanan bir metottur (Chui 1997). Ayrıca dalgalar sayısal algoritmalar arasında bağlantı kurar (Beylkin 1991). Bununla birlikte, çeşitli integral denklemlerin dalga yöntemiyle çözümü umut veren bir olaydır (Karabacak, Çelik 2015 ; Karabacak, Yiğider 2016). CAS dalgacık metodu da bir dalgacık çeşidi olup, bu çalışmada (1.1) probleminin yaklaşık çözümünün bulunmasında kullanılmıştır.

3.3.1. CAS Dalgacık özellikleri

a ve b iki parametre olmak üzere,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

eşitliği dalgacık fonksiyonudur. Burada a ve b parametreleri $a = a_0^{-k}$, $b = nb_0a_0^{-k}$, $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ şeklinde sınırlanırsa n ve k pozitif tamsayı olmak üzere dalgacığı;

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}}\psi(a_0^k t - nb_0)$$

olur ki burada $\psi_{k,n}(t)$ dalgacığı $L^2(\mathbb{R})$ olur. Yani $\psi_{k,n}(t)$ tüm reel sayılarda karesi integrallenebilir. Eğer $a_0 = 2,\ b_0 = 1$ seçilirse $\psi_{k,n}(t)$ ortonormal olur (Gu and Jiang 1996).

$$CAS_m(t) = \cos(2m\pi t) + \sin(2m\pi t)$$

olmak üzere,

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} CAS_m(2^k t - n), & \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0\,, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ifadesinde $n = 0,1,2, \dots, 2^k - 1$, k negatif olmayan herhangi bir tamsayı , m tamsayıdır. Burada k dalgadaki artım sayısını gösterir. Yukarıdaki ifadede $a = 2^{-k}, b = n2^{-k}$ seçilirse CAS dalgacığı da ortonormal olur.

3.3.2. CAS Dalgacığı ile fonksiyonu eşdeğerine açmak

$u(t) \in L^2[0,1)$ olmak üzere ; $(u(t), [0,1)$ aralığında karesi integrallenebillen fonksiyondur)

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{nm} \psi_{nm}(t)$$

şeklinde yazılır ki burada

$$c_{nm} =< u(t), \psi_{nm}(t) >$$

iç çarpımıdır. $u(t)$ ile verilen sonsuz toplam belli bir noktada kesilirse aşağıdaki ifadeye denk olur.

$$u(t) \cong \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=-M}^{M} c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t)$$

şeklinde yazılır ki burada, $M \in \mathbb{Z}$, C ve $\psi(t)$ iki vektör olup;

$$C = [c_{1(-M)}\,, c_{1(-M+1)}\,, c_{1(-M+2)}\,, \dots, c_{2(-M)}, \dots, c_{2^k(-M)}, \dots, c_{2^k(M)}]^T$$

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_{2^k}]^T$$

$$\Psi(t) = [\psi_{1(-M)}, \psi_{1(-M+1)}, \psi_{1(-M+2)}, \dots, \psi_{2(-M)}, \dots, \psi_{2^k(-M)}, \dots, \psi_{2^k(M)}]^T$$

şeklinde yazılır. C ve $\Psi(t)$ matrisleri $2^k(2M+1) \times 1$ tipinde matrislerdir.

CAS geometrik olarak yorumlanırsa; k yatay yöndeki değişimi, M dikey değişimini gösterir. Yani k dalga artım sayısını , M ise dalganın boyunnu göstermektedir.

3.3.3. CAS dalgacığının operasyonel matris çarpımı

$$\Psi(t)\Psi(t)^T C \cong \check{C}\Psi(t)$$

olmak üzere Č, $2^k(2M+1) \times 2^k(2M+1)$ tipindeki operasyonel matristir.

$M = 1$ ve $k = 1$ olarak seçilip $\Psi(t)$ ve C yi aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$C = [c_{1(-1)}, c_{1(0)}, c_{1(1)}, c_{2(-1)}, c_{2\,(0)}, c_{2\,(1)}]^T$$

$$\Psi(t) = [\psi_{1(-1)}, \psi_{1(0)}, \psi_{1(1)}, \psi_{2(-1)}, \psi_{2\,(0)}, \psi_{2\,(1)}]^T$$

3.4. Fredholm İntegral Denklemin CAS Metoduyla Çözümü

$$y(x) = f(x) + \int_0^T K(x,t)y(t)dt$$

integral denklemi Fredholm integral denklemi olmak üzere,

$$y(x) = C^T\Psi(x)$$

$$f(x) = d^T\Psi(x)$$

ve

$$K(x,t) = \Psi(x)^T K \Psi(x)$$

burada C ve $\Psi(x)$ daha önceden tanımlanmıştır. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olup, K matrisi $2^k(2M+1) \times 2^k(2M+1)$ tipindedir. Burada K matrisi ,

$$K = \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{ni}(x)\Psi_{lj}(t)K(x,t)dtdx$$

$n = 1, \dots, 2^k$, $i = -M, \dots, M$, $l = 1, \dots, 2^k$, $j = -M, \dots, M$ şeklinde tanımlanır. $y(x)$ ve $f(x)$ değerleri Fredholm integral denkleminde yerine yazılırsa;

$$C^T\Psi(x) = d^T\Psi(x) + \lambda \int_0^1 \Psi(x)^T K \Psi(x) \Psi(x)^T C dt$$

elde edilir.

CAS dalgacığının ortonormallik özelliğinden

$$\Psi(x)^T C = \Psi(x)^T d + \lambda \Psi(x)^T K C$$

olur.

Yukarıdaki lineer sistemden C çözülürse

$$C = (I - K)^{-1} d$$

olarak bulunur. Burada I birim matristir.

3.5. Nümerik Örnek

$$y(x) = \cos(4\pi x) + \int_0^1 t y(t) dt$$

Fredholm integral denklemi için $k = 1$ ve $M = 1$ kabul edilip yaklaşık çözümü,

$$d = [\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}]^T$$

ve

$$K_{6\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0 & 0 & 0{,}125 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & -\frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0{,}375 & 0 & 0 & 0{,}375 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8\pi} & 0 & 0 & \frac{1}{8\pi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (I - K)^{-1} d = [\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}]^T$$

olur. Buradan,

$$y(x) = C^T \Psi(x) = \cos(4\pi x)$$

bulunur (Yousefi 2006; Banifatemi 2006).

3.6. Volterra İntegral Denkleminin CAS Metoduyla Çözümü

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s) x(s) ds$$

integral denklemi Volterra İntegral Denklemi olmak üzere,

$$K^*(t,s) = \begin{cases} K(t,s)\,, & 0 \le t \le T\,, \quad 0 \le s \le T \\ 0\,, & 0 \le t \le T\,, \quad t \le s \le T \end{cases}$$

özelliğinden yararlanılarak

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K^*(t,s)x(s)ds$$

Fredholm integral denklemi elde edilmiş olur. Sonrasında 3.4. başlığı altında verilen adımlar takıp edilerek Volterra integral denkleminin çözümü CAS dalgacık metoduyla yaklaşık olarak bulunur.

3.7. Nümerik Örnek

$$y(t) = t + \int_0^t \sin(t-s)y(s)ds \qquad 0 \le t \le 1$$

Volterra integral denkleminin CAS dalgacık metoduyla yaklaşık çözümü $y(t) = t + \frac{1}{6}t^3$ bulunur (Blyth *et al.* 2003) Burada Volterra integral denkleminin Fredholm integral denklemine dönüştürülme özelliğinden yararlanılmıştır.

3.8. (3.8) Probleminin CAS Dalgacık Metoduyla Yaklaşık Çözümü

(1.1) probleminin özel hali olan

$$x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = -2t^3 + 2t^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} - 4\,, (0 \le t \le 1)$$
$$x(t) = 0\,, \left(-\frac{1}{16} \le t \le 0\right), x(1) = x(\frac{1}{2})$$

(3.8) problemine denk olan Fredholm – Volterra integral denklemi

$$x(t) = 2{,}872933230t - 2t^2 - 0{,}1714285714t^{\frac{7}{2}} + 0{,}2083333333t^4 + 0{,}1269841270t^{\frac{9}{2}} - 0{,}1t^5 + \frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[3 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{3 + 28\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma + \frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\left[1 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{1 + 4\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma - \frac{1}{16}\int_0^{t-\frac{\sqrt{t}}{2}}\left[(4t - 1) + (16t - 12)\sigma - 16\sigma^2 + \frac{(4t - 1) + (48t - 20)\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

şeklinde olduğu daha önceden tanımlanmıştır. Burada,

$$f(x) = 2{,}872933230x - 2x^2 - 0{,}1714285714x^{\frac{7}{2}} + 0{,}2083333333x^4 + 0{,}1269841270x^{\frac{9}{2}} - 0{,}1x^5$$

$$K_1(x) = \frac{1}{8}(3 + 4x - 16x^2 + \frac{3 + 28x - 80x^2}{\sqrt{1 + 16x}})$$

$$K_2(x) = -\frac{1}{8}(1 + 4x - 16x^2 + \frac{1 + 4x - 80x^2}{\sqrt{1 + 16x}})$$

$$K(x,t) = (4x - 1) + (16x - 12)t - 16t^2 + \frac{(4x - 1) + (48x - 20)t - 80t^2}{\sqrt{1 + 16t}}$$

olup CAS Dalgacık metodundan yararlanarak yaklaşık çözüm;

$$y(x) = C^T \Psi(x)$$

$$f(x) = d^T \Psi(x)$$

olmak üzere (3.8) problemi için,

$$d = [-0{,}163928 \;\; 0{,}296835 \;\; -0{,}132907 \;\; -0{,}276517 \;\; 0{,}728253 \;\; 0{,}219904]^T$$

$$\frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[3 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{3 + 28\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right] x(\sigma) d\sigma$$

ilk integral denklemi için,

$$K = \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{ni}(x) \Psi_{lj}(t) K(x,t) dt dx$$

olup,

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}29232 & 0 & 0 & -0{,}29232 & 0 \\ 0 & -1{,}0156 & 0 & 0 & -1{,}0156 & 0 \\ 0 & 0{,}38861 & 0 & 0 & 0{,}38861 & 0 \\ 0 & -0{,}23447 & 0 & 0 & -0{,}23447 & 0 \\ 0 & -2{,}7792 & 0 & 0 & -2{,}7792 & 0 \\ 0 & 0{,}24657 & 0 & 0 & 0{,}24657 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = (I - K)^{-1} d$$

$$C = [-0{,}22642 \;\; 7{,}9712 \times 10^{-2} \;\; -4{,}9826 \times 10^{-2} \;\; -0{,}32665 \;\; 0{,}13408 \;\; 0{,}27262]^T$$

olup,

$$y_1(x) = 1.0972\sin(12.566x) - 0.46708\cos(12.566x) + 0.30235$$

bulunur.

$$\frac{t}{8}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\left[1 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{1 + 4\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1 + 16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

için,

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}35460 & 0 & 0 & 0{,}35460 & 0 \\ 0 & 1{,}4844 & 0 & 0 & 1{,}4844 & 0 \\ 0 & -0{,}45695 & 0 & 0 & -0{,}45695 & 0 \\ 0 & 0{,}28969 & 0 & 0 & 0{,}28969 & 0 \\ 0 & 3{,}6247 & 0 & 0 & 3{,}6247 & 0 \\ 0 & -0{,}30332 & 0 & 0 & -0{,}30332 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (I - K)^{-1}d$$

$$= [-0.25239\ \ -7.3478 \times 10^{-2}\ \ -1.8917 \times 10^{-2}\ \ -0.34879\ \ -0.1760.29557]^T$$

$$y_2(x) = \ 1.2414\sin(12.566x) - 0.45895\cos(12.566x) - 0.35282$$

olur.

$$\frac{1}{16}\int_0^{t-\frac{\sqrt{t}}{2}}\left[(4t - 1) + (16t - 12)\sigma - 16\sigma^2 + \frac{(4t-1)+(48t-20)\sigma-80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

için,

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} -4{,}9563\times10^{-3} & -3{,}7302\times10^{-2} & 5{,}4378\times10^{-3} & -4{,}3944\times10^{-3} & -6{,}7278\times10^{-2} & 4{,}516\times10^{-3} \\ 0{,}19287 & 0{,}85938 & -0{,}24556 & 0{,}15865 & 2{,}0237 & -0{,}16585 \\ 4{,}9563\times10^{-3} & 3{,}7302\times10^{-2} & -5{,}4378\times10^{-3} & 4{,}3944\times10^{-3} & 6{,}7278\times10^{-2} & -4{,}516\times10^{-3} \\ -4{,}9563\times10^{-3} & -3{,}7302\times10^{-2} & 5{,}4378\times10^{-3} & -4{,}3944\times10^{-3} & -6{,}7278\times10^{-2} & 4{,}516\times10^{-3} \\ 0{,}16173 & 0{,}625 & -0{,}21139 & 0{,}13104 & 1{,}6010 & -0{,}13747 \\ 4{,}9563\times10^{-3} & 3{,}7302\times10^{-2} & -5{,}4378\times10^{-3} & 4{,}3944\times10^{-3} & 6{,}7278\times10^{-2} & -4{,}516\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$C = [-0.11499\ \ -0.92852\ \ -0.18185\ \ -0.22757\ \ -0.19045\ \ 0.17098]^T$$

$$y_3(x) = \ 0.46908\sin(12.566x) - 0.49983\cos(12.566x) - 1.5825$$

olup bulunan değerler derlenirse (3.8) probleminin yaklaşık çözümü,

$$y(x) = 1.2414sin(12.56x) - 0.45895cos(12.56x) - 0.26234\ + 0.46908sin(12.56x) - 0.49983cos(12.56x) - 1.5825 + 1.0972sin(12.56x) - 0.46708cos(12.56x) + 0.30235$$

$$y(x) = \ 2.8077\sin(12.56x) - 1.4259\cos(12.56x) - 1.5425$$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada

$$\left.\begin{array}{c} y''(x) + a(x)y\big(x - \tau(x)\big) = f(x), (0 \le x \le T) \\ y(x) = \varphi(x)(\lambda_0 \le x \le 0), y(T) = y(c)\ (0 < c < T) \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemi denk Fredholm-Volterra integral denkleme dönüştürülerek CAS Dalgacık metoduyla yaklaşık çözümü elde edildi. Bu metodla elde edilen çözüm aynı zamanda (4.1) sınır değer probleminin çözümü olarak kabul edildi.

CAS Dalgacık metodunun sonunda,

$$\left.\begin{array}{c} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = -2t^3 + 2t^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} - 4\,, (0 \le t \le 1) \\ x(t) = 0\,, \left(-\frac{1}{16} \le t \le 0\right)\,, x(1) = x(\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

örnek problemi yaklaşık olarak çözülerek, yaklaşık çözümü

$$y(x) = \ 2.8077\sin(12.56x) - 1.4259\cos(12.56x) - 1.5425$$

bulunmuştur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, geciken değişkenli sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için CAS Dalgacık Metodu kullanılmıştır. Öncelikle geciken değişkenli sınır değer problemine denk Fredholm-Volterra İntegral Denklem yazlmıştır. CAS Dalgacık metodunun uygulanabilmesi için denk Fredholm-Volterra İntegral Denkleminin Volterra kısmı bazı özel şartlar altında denk Fredholm İntegral denklemine dönüştürüldü. Bu dönüşümlerden sonra CAS Dalgacık Metodu uygulanmıştır. Daha önce farklı metodlarla çözülen geciken değişkenli sınır değer problemi farklı bir metodla çözülmüştür.

KAYNAKLAR

Ahmedov Q. A., 1972, Adi Diferansiyel Denklemler, Maarif, Bakü, 18.

Aykut A.,1995. İkinci mertebeden geciken değişkenli lineer adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık metodlarla çözümü. Atatürk Üniversitesi.

Banifatemi, A. 2006, Numerical solution of Fredholm integral equations by using CAS wavelets, Amirkabir University of Technology, 183(2006) 458-463

Beylkin,G., R., 1991 Caifman and V. Rokhlin 'Fast wavelet transforms and numericalalgorithms I.' Communication on Pure and Applied Mathematics 44(1991): 141-183

Blyth, W.F. R.L. May, P. Widyaningsih, 2003 Volterra İntegral Equations Solved in Fredholm form Using Walsh Funcions, ANZIAM J. E(2003) 269-C282

Chui, C.K. 1997 Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis, SIAM,Philadelphia PA.

Dağ İ., 1983, Bayağı Diferansiyel Denklemler, Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 106.

Delves L. M. and Walsh J., 1974, Numerical Soluation of İntegral Equations, Oxford Univercity Press.

El'sgol'c L.E., 1960, Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations With Deviating Arguments, Uspehi Mat. Nauk 15, Russian, 222 – 224.

Gu, J.S. W.S. Jiang, 1996, The Haar Wavelets Operational Matrix of Integral, Int.J.Sys. Sci. 27(1996) 623-628

Kaçar A. ve Memmedov Y. C., 1994, Geciken argümentli diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin yaklaşık metodlarla çözümü, Fen Bilimleri Dergisi, Van.

Karabacak M., Çelik E., 2015, The Numerical Soluation of Fractional-Differential Algebraic Equations by Haar Wavelet Functions, International Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol 2 Issue 10

Karabacak M., Yiğider M., 2016, Shannon Wavelet Transform for Solving Fractional Differ Entialalgebraic Equations Numerically, International Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol 3 Issue 12

Memmedov Y. C. ve Kaçar A., 1993, Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Probleminin Yaklaşık Metodlarla Çözümü, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 57.

Yousefı S. , Banifatemi A., 2006, Numerical solution of Fredholm integral equations by using CAS wavelets

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümüne başladı. Burada bir yıl eğitim aldıktan sonra, 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne başlayıp 2015 yılında mezun oldu. 2015 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans programına başladı.