



T.C.

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RADİYATİF TRANSFER DENKLEMİNDE  
 $S_N$  METODU VE HG FAZ FONKSİYONU İLE  
ÖZDEĞER SPEKTRUMU**

**NURAN TAŞDELEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**KAHRAMANMARAŞ 2017**

**T.C**

**KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADİYATİF TRANSFER DENKLEMİNDE  
 $S_N$  METODU VE HG FAZ FONKSİYONU İLE  
ÖZDEĞER SPEKTRUMU**

**NURAN TAŞDELEN**

**Bu Tez,**

**Fizik Anabilim Dalında**

**YÜKSEK LİSANS**

**derecesi için hazırlanmıştır.**

**KAHRAMANMARAŞ 2017**

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Nuran TAŞDELEN tarafından hazırlanan “ Radyatif Transfer Denkleminde  $S_N$  Metodu ve HG Faz Fonksiyonu İle Özdeğer Spektrumu” adlı bu tez, jürimiz tarafından 15 / 12 / 2017 tarihinde **oy birliği** ile Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. FİKRET ANLI (DANIŞMAN) .....

Nükleer Fizik Anabilim Dalı

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Prof. Dr. ŞÜKRÜ KARATAŞ (ÜYE) .....

Genel Fizik Anabilim Dalı

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Doç. Dr. AHMET BÜLBÜL (ÜYE) .....

Elektrik Anabilim Dalı

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylım.

Doç. Dr. MUSTAFA ŞEKKELİ .....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, alıntı yapılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nuran TAŞDELEN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# RADİYATİF TRANSFER DENKLEMİNDE $S_N$ METODU VE HG FAZ FONKSİYONU İLE ÖZDEĞER SPEKTRUMU

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

NURAN TAŞDELEN

## ÖZET

Bu çalışma, Henyey-Greenstein saçılımının, radyatif transfer denklemi analizi ile ilgili olup, tek boyutlu ve tek hızlı radyatif transfer denkleminde Henyey-Greenstein saçılımının, özdeğerleri üzerindeki etkisi, değiştirilebilir  $g$  parametresi kullanılarak çalışılmıştır.

Tek boyutlu radyatif transfer denklemine, Legendre polinomları yaklaşımı ( $P_N$ ) ve ayrık ordinatlar polinomları yaklaşımı ( $S_N$ ) uygulanarak özdeğer spektrumlarının hesaplanması yapıldı. Farklı  $c$  (filyon başına ortaya çıkan ortalama foton sayısı) değerleri ve  $g$  parametresi değerleri kullanılarak  $\nu$  özdeğer spektrumları hesaplanması yapılmıştır.

Bu katsayılar, nükleer reaktör sistemleri ve diğer fen bilimleri için önemlidir. Bilgisayarların yardımıyla bu bileşenlerin çeşitli özelliklerini tahmin eden kapsamlı hesaplamalar yapılabilmektedir. Doğru değerlendirme sağlayabilmek için, özdeğerlere dair kapsamlı bir sayısal inceleme yürütülmüştür.

Sonuç olarak  $P_N$  ve  $S_N$  şeklinde her iki metoda göre  $c$  ve  $g$  için elde edilen sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Tablolardan da anlaşılacağı üzere bulunan sonuçlar birbirlerine yakınsamaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Radyatif transfer, Henyey-Greenstein faz fonksiyonu, Özdeğer spektrumu

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı, Aralık / 2017

Danışman : Prof. Dr. Fikret ANLI

Sayfa sayısı : 34

# APPLICATION $S_N$ METHOD AND HG PHASE FUNCTIONS TO RADIATIVE TRANSFER EQUATION OF EIGENVALUE SPEKTRUM

(M.Sc. THESIS)

NURAN TAŞDELEN

## ABSTRACT

This study is concerned with the analysis of the radiative transfer equation of Henyey-Greenstein kernel. The effect of Henyey-Greenstein scattering kernel on the eigenvalues of slab is studied using adjustable parameter  $g$  in one-speed radiative transfer equation.

Eigenvalue spectrum calculated by applying discrete-ordinates polynomials and Legendre which are known ( $S_N$ ) approximation and ( $P_N$ ) approximation to one dimensional radiative transfer equation.  $\nu$  eigenvalue spectrum calculated by using different  $g$  and  $c$  (where is the mean number of secondary foton per collision and known as the fundamental eigenvalue).

These parameters are important for nuclear reactor systems and other physical sciences. With the aid of computers, extensive calculations which predict the performance of certain combinations of these components can be performed. An extensive numerical survey is carried out for the eigenvalues in order to provide accurate evaluation.

As a result, obtained results from  $P_N$  and  $S_N$  approximations with different  $c$  and  $g$  parameters presented in tables. As seen in tables, obtained results are converge to each other.

**Keywords:** Radiative transfer, Henyey-Greenstein kernel, Eigenvalue spectrum

University of Kahramanmaraş Sütçü İmam  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics, December / 2017

Supervisor : Prof. Dr. Fikret ANLI

Page Number : 34

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőması sűresince engin bilgi ve tecrűbelerinden faydalandığım ve çalıőmamın her aőamasında sağladığı bilimsel katkılardan dolayı Prof. Dr. Fikret ANLI 'ya teőekkűrlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalıőmalarım sűresince, deđerli gűrűőlerini benimle paylaőan, bilgisayar hesaplamalarında őahsıma yardımcı olan yűksek lisans arkadaőım Sayın Vahide AKYAR'a en içten teőekkűr ve saygılarımı sunarım.

Son olarak, yűksek lisans űđrenimim sűresince űzerimde manevi desteklerini her daim gűrdűđűm sevgili eőim Mehmet TAŐDELEN'e, ođlum Ahmet Baturhan'a ve kızım Emine Berra'ya en içten sevgi ve teőekkűrlerimi iletirim.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	vi
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	3
3. MATERYAL VE METOD .....	6
3.1. Radyatif Transfer Denklemi.....	6
3.2. Legendre Polinomu .....	9
3.3. Legendre Polinomu Yaklaşımı : $P_N$ Metodu.....	11
3.4. Henyey – Greenstein Faz Fonksiyonu .....	14
3.5. $P_N$ Yöntemi İle HG Faz Fonksiyonu Kullanılarak Özdeğer Hesabı .....	15
3.6. Ayrık Ordinatlarda Yöntemi : $S_N$ Metodu .....	18
3.7. $S_N$ Yöntemi İle HG Faz Fonksiyonu Kullanılarak Özdeğer Hesabı .....	20
4. SONUÇ VE TARTIŞMALAR.....	24
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	34

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No:

Şekil 1.1. Radyatif transferde soğurulma ve yayılma.....	1
Şekil 3.1. Kartezyen koordinat sistemi.....	7
Şekil 3.2. Radyasyon geliş ve saçılma doğrultusu.....	8
Şekil 3.3. Radyatif transfer kullanım örnekleri .....	8



## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa No:

Çizelge 4.1. $c = 0.00$ için özdeğer spektrumu .....	27
Çizelge 4.2. $c = 0.25$ için özdeğer spektrumu .....	28
Çizelge 4.3. $c = 0.50$ için özdeğer spektrumu .....	29
Çizelge 4.4. $c = 0.75$ için özdeğer spektrumu .....	30
Çizelge 4.5. $c = 0.99$ için özdeğer spektrumu .....	31



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

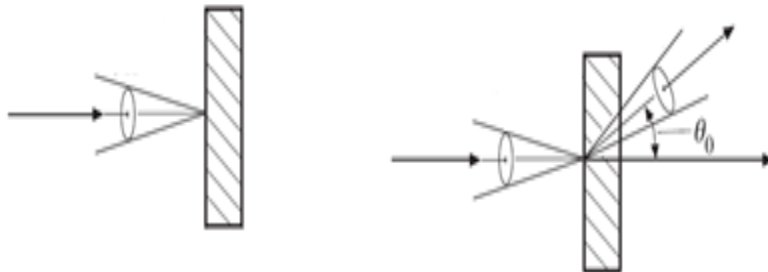
- $c$**  : Filyon başına ortaya çıkan ortalama foton sayısı
- $S_N$**  : Ayrık ordinatlar yaklaşımı
- $P_N$**  : Legendre polinomları yaklaşımı
- $N$**  : Saçılım mertebesi
- $v$**  : zdeęer
- $\sigma$**  : Tesir kesiti
- $g$**  : zdeęer parametresi (asimetri parametresi)
- $HG$**  : Henyey - Greenstein
- $K$**  : 1. Tip eliptik integral
- $E$**  : 2. Tip eliptik integral

## 1.GİRİŞ

Radyatif transfer (radyasyon yayınlanması) bir nevi elektromanyetik radyasyonun fiziksel olarak enerji taşınımı şeklinde bilinir (Kaşkaş ve Tezcan, 2009). Enerjinin taşınması şüphesiz ki parçacıklar aracılığı ile gerçekleşmekte olup, bu parçacıklar nötron, elektron, foton vs. olabilir. Enerjinin taşınımı esnasında bu parçacıkların, taşınımın gerçekleştiği ortamda soğrulma ve taşınımın saçılma olasılıkları vardır. Soğrulma ve saçılma gibi karmaşık fiziksel olaylar da ortamın yapısı ile çok yakından ilgilidir.

Radyatif transfer kavramı astrofizik, optik, atmosfer fiziği, deniz bilimleri ve uzaktan algılama sistemleri gibi fiziğin birçok alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Dave, 1975). Radyatif transfer hakkında gerçekleşen fiziksel bir olayda makul bir yorum, radyatif transfer denkleminin, olayın gerçekleştiği fiziksel geometride çözümlenmesi ile mümkündür. Çözümler genel olarak sayısal yöntemlerle yapılmakla birlikte nadiren analitik olarak da yapılabilmektedir.

Radyatif transfer olayının bir ortamda gerçekleşmesi esnasında soğurulma, emisyon (yayma) ve saçılma gibi fiziksel etkenler gerçekleşir. Bu durum olaya pozitif ve negatif katkı sağlar (DeBarros ve Larsen, 1990). Örnek olarak güneşi emisyon kaynağı olarak gösterebiliriz; Güneş tarafından yayınlanan elektromanyetik radyasyon (ışık), foton olarak adlandırılan partikül radyasyonu ve ışık hızında yayılan dalgalar olmak üzere iki farklı görüş çerçevesinde değerlendirilmektedir. Kaynaktan yapılan emisyon vasıtasıyla partiküllerin bir ortam içerisinde devinimi ile soğurulma ve saçılma olayları gerçekleşebilir, bu durum ortamın özelliklerine ve partiküllerin sahip oldukları enerjilerine bağlıdır.



Şekil 1.1. Radyatif transferde soğurulma ve yayılma

Radyatif transfer denklemlerinin herhangi bir geometride çözümleri için  $P_N$  ve  $S_N$  yöntemleri (yaklaşımları) yaygın olarak kullanılmaktadır. Her iki yöntemde de temel matematiksel araç  $P_N(\mu)$  Legendre polinomudur. Elbette ki argümanın  $-1 \leq \mu \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\mu = \cos \theta$  ile tanımlandığı polinom sadece  $P_N(\mu)$  Legendre polinomları değildir. Bunun yanında  $T_N(\mu)$  ve  $U_N(\mu)$  polinomlarının I. ve II. tipleri ve Jacobi polinomları da bu argümanla tanımlanan bir değişkene sahip olup, radyatif transfer denkleminin çözümlerinde kullanılabilir. Ancak Legendre polinomlarının kullanışlı özellikleri ve matematiksel açıdan kolaylık sağlamasından dolayı genel olarak Legendre polinomları kullanılır.

Bu tez çalışmasında Henyey-Greenstein ( $HG$ ) faz fonksiyonu kullanılarak, ayrık ordinatlar yöntemi ( $S_N$ ) ile özdeğer spektrumları incelenecektir.  $S_N$  yönteminin uygulanmasında  $P_N(\mu)$  Legendre polinomları önemli bir araç olduğundan bu polinomun özellikleri ve sağladığı büyük avantajlar belirtilecektir.  $S_N$  yöntemiyle elde edilen sonuçlar ile  $P_N$  yöntemiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. İleri bölümlerde  $P_N$  ve  $S_N$  yönteminin radyatif transfer denklemine uygulanışı ve çözüm elde edilişi tüm ayrıntılarına kadar verilecektir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Radyatif transfer eşitliğinin çözümü bazı özel durumlar için vardır. Gerçekten de günümüze kadar bu eşitliğin çözümü için çok sayıda yaklaşımlar yapılmıştır. Ancak, bazı yaklaşımlar altında lineerize edilmiş eşitliğinin çözümleri, birçok parametrenin çalıştırılmasında iyi sonuçlar vermektedir.

1960 yılında Chandrasekhar, radyasyonel aktarım için Boltzmann denklemini istatistiksel fizik yöntemleri kullanılarak elde edilebilirliğini göstermiştir.

1963 yılında Sobolev saçılma ortamları için basit integro-diferansiyel denklemini önermiştir.

Bir ortamda radyasyon yoğunluğunun yerel değerlerini bulmak için, radyasyon transferinin tam denklemini astrofiziksel yaklaşım uygulayarak 1972 yılında çalışma yapanlar Siegel ve Howell olmuştur.

1975 yılında Kattawar atmosferik optik olayları için iki fazlı Henyey-Greenstein fonksiyonunu önermiştir.

1978 yılında ise Ishimaru, radyatif saçılma ile ilgili olarak önemli literatür çalışmaları yapmış ve problemler üzerinde çalışmıştır.

1978 yılında Williams saçılma faz fonksiyonunu alternatif olarak farklı analitik formla yazmıştır.

Brockmann (1981), radyatif transfer denkleminin hem homojen hem de heterojen problemlerde kritiklik sonuçlarının güvenilir olduğunu göstermiştir.

Protopopescu ve Sostandı (1981), lineer ve anizotropik saçılmaları ile ilgili temel çalışmaların çoğunu nümerik olarak yapmıştır. Lewis ve Miller (1984), uzaysal hücre adımı büyüdükçe çözümlemede negatif akı değerleri meydana geldiğini gösteren bir çalışma yaptılar. Aronson (1984), Lee ve Dias (1985), kritik yarı kalınlık, kritik yarıçap hesaplamalarını Legendre polinomları ile çözüme ulaştırmaya çalıştılar.

Lemonnier ve Dez düzlem geometride korunumlu ve korunumlu olmayan radyatif transfer denklemini ortamın soğurma ve saçılma etkilerini de dikkate alarak kesikli ordinat yöntemini ( $S_N$ ) kullanarak radyatif transfer denklemi için nümerik çözümler elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçları diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak vermişlerdir.

Fiveland, üç boyutlu bir ortamda radyatif ısı transferi denkleminin çözümünü  $S_N$  yöntemi ile yapmıştır. Çalışmada ortamın soğurgan, anizotropik saçılmalı olduğu kabul edilmiştir. Sonuçta radyasyon şiddeti, enerjisi ve yüzey ısı akısı gibi fiziksel olgular diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Dave, radyasyon dağılımının azimutal bağımlılığını dikkate alarak radyatif transfer denklemini küresel harmonikler yaklaşımı ile çözümlenmeye çalışmıştır. Çalışmada homojen ve heterojen bir düzlemsel atmosferik yapı dikkate alınarak sınır değerler uygulaması ile cebirsel denklemler oluşturulmuş ve çözümleri gerçekleştirilmiştir.

Williams (1985), grup içi saçılma, kaynak ve özdeğer problemi için çözüm aradı. Riyait ve Ackroyd (1987), şiddetli anizotropik saçılımlı tek boyutta çok gruplu radyatif transfer problemlerini test ederek nümerik sonuçlar elde etti.

1994 yılında Mobley birim alana düşen radyan gücü olan ışınım şiddetini radyatif transfer denklemini kullanarak tespit etmiştir.

Kaşkaş ve ark. (2000), sonsuz ortamda Green fonksiyonlarını temel alarak çalışma yaptılar.

2002 yılında Haltrin deniz suyundaki ışık saçılmasını Henyey-Greenstein faz fonksiyonu ile karakterize ederek radyatif transfer denkleminin çözümü ve özdeğer spektrumu üzerine çalışmalar yapmıştır.

Herman ve Browing, yatay olarak homojen bir ortamlı düzlem geometride radyatif transfer denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir.

Çalışmada metodun saçılmalı ve saçılmalı olmayan ortamlarda uygulanabilirliği ve ortamdan yansıyan ve geçen radyasyon sonuçlarının literatürde mevcut olan Rayleigh saçılma ile elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Tarvainen, Vouhkonen, Arridge difüzyon yaklaşımının iyi sonuçlar vermediği durumlarda radyatif transfer denkleminin optik tomografide kullanılabileceği konusunda bir çalışma yapmışlardır. Çalışma Gauss-Newton algoritması ile çözümlenebilen en küçük kareler yöntemi üzerine kurulmuş olup, radyatif transfer denklemi hem uzaysal hem de açısal diskretizasyon ile sonlu elemanlar metodu ile çözümlenmiştir. Sonuç olarak radyatif transfer denklemin optik tomografide uygulanabileceği gösterilmiştir.

Anlı ve ark. (2007), tek enerjili izotropik saçılmalı durum için  $T_N$  metodu kullandılar. Buldukları nümerik sonuçlarda  $P_N$  metodu ile uyum olduğu sonucuna ulaştılar.

Kaşkaş ve Tezcan (2009), optik olarak taşınım teorisinin uygulanması için Henyey-Greenstein faz fonksiyonunu, radyatif taşınım teorisi ve istatistiksel fiziği kullanarak görünür optik özelliklerin tahminini yapmışlardır.

Bu çalışmada radyatif transfer denklemini analitik olarak elde edebilen saçılma tesir kesiti ayrık ordinatlar yöntemini ( $S_N$ ) kullanarak, özdeğer problemi çözülmeye çalışıldı ve  $P_N$  yöntemi ile elde edilen değerlerle karşılaştırıldı.

### 3. MATERYAL VE METOT

#### 3.1. Radyatif Transfer Denklemi

Radyatif transfer, elektromanyetik radyasyon formundaki enerji transferinin fiziksel olgusudur. Bir ortam içerisinde radyasyon yayılımı soğurulma, emisyon ve saçılma süreçlerinden etkilenir. Radyasyon transfer denklemi optik, astrofizik, atmosferik bilim ve uzaktan algılama gibi fiziğin çok çeşitli alanlarında uygulanabilmektedir. Basit durumlarda (kaynağın olmadığı ve izotropik saçılımlı ortamlar için) radyasyon transfer denkleminin analitik çözümleri vardır, ancak karmaşık çoklu saçılma etkileri olan daha gerçekçi ortamlar için sayısal yöntemler gereklidir.

Tek gruplu (tüm partiküller aynı enerjili) ve tek boyutlu (slab geometri) kararlı durum (zamandan bağımsız) için radyatif transfer denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir (Haltrin, 2002);

$$\mu \frac{dL(r, \mu, \varphi)}{dr} + \sigma_T L(r, \mu, \varphi) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_S(\mu_0) L(r, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' \quad (3.1)$$
$$-\infty < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi, \varphi' \leq 2\pi, \quad -1 \leq \mu, \mu' \leq 1$$

Denklem 3.1'de kullanılan notasyonlar şu şekilde tanımlanabilir;

$\sigma_S, \sigma_T$  : Sırasıyla saçılma ve toplam tesir kesiti,

$L(r, \mu, \varphi)$  : Açısal akı dağılım fonksiyonu veya radyasyon açısal akısı dağılım fonksiyonu

$\sigma_S(\mu_0)$  : Saçılma fonksiyonu,

$\mu'$  : Çarpışma öncesi geliş doğrultusundaki açının kosinüsü,

$\mu$  : Çarpışma sonrası gidiş doğrultusundaki açının kosinüsü,

olarak ifade edilir. Burada  $\mu_0$  teriminin ne olduğu ve  $\mu, \mu', \varphi, \varphi'$  değişkenlerine nasıl bağlı olduğunun gösterilmesi için kartezyen geometride tanımlanan bir vektörü kullanmalıyız (Bkz. Şekil 3.1).

Bir partikülün konum vektörü;

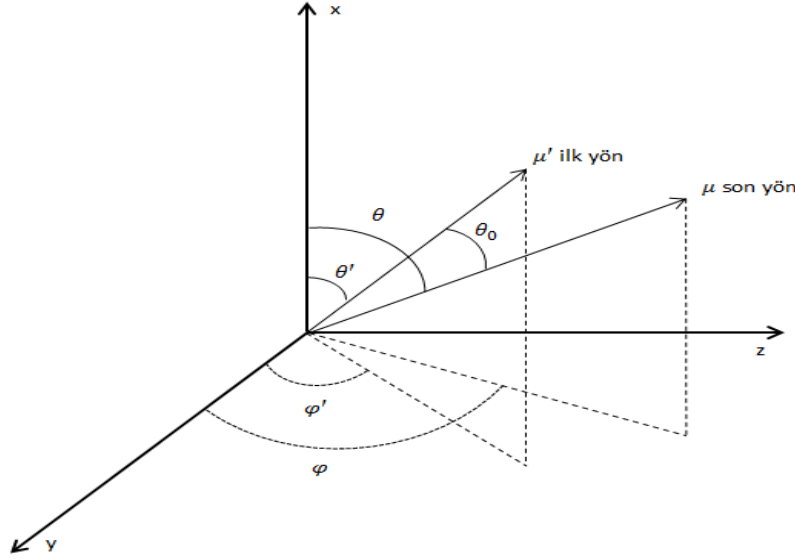
$$\vec{r} = |\vec{r}| \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + |\vec{r}| \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + |\vec{r}| \cos \theta \hat{k}, \quad (3.2)$$

bağıntısı ile verilebilir.

$\vec{r}$  vektörü doğrultusundaki birim vektör ise şöyle ifade edilir.

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \quad (3.3)$$

Bu birim vektör partikülün hedeften saçıldıktan sonraki yönünü göstermektedir.



Şekil 3.1. Kartezyen koordinat sistemi

Benzer şekilde;

$$\vec{r}' = |\vec{r}'| \sin \theta' \cos \varphi' \hat{i} + |\vec{r}'| \sin \theta' \sin \varphi' \hat{j} + |\vec{r}'| \cos \theta' \hat{k} \quad (3.4)$$

hedefe geliş doğrultusunu temsil eden konum vektörü olmak üzere,

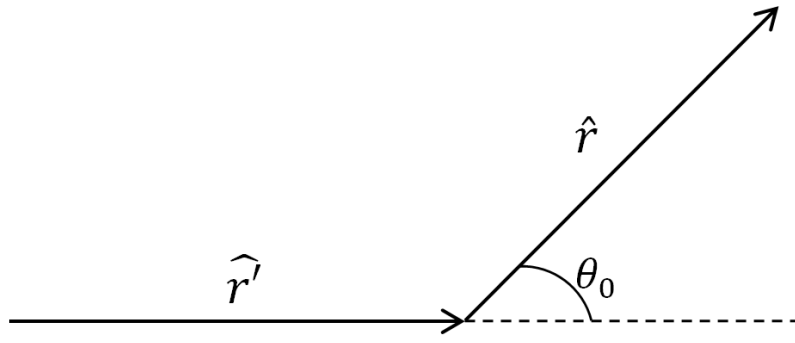
$$\hat{r}' = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \sin \theta' \cos \varphi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k}, \quad (3.5)$$

şeklinde birim vektör yazılabilir. Denklem 3.3 ve Denklem 3.5 'in skaler çarpımı, doğrultu kosinüsü olarak bilinir ve  $\mu_0$  ifadesinin daha sade biçiminin elde edilmesine imkân sağlamaktadır ;  $\hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos \theta_0 = \mu_0$  olmak üzere,

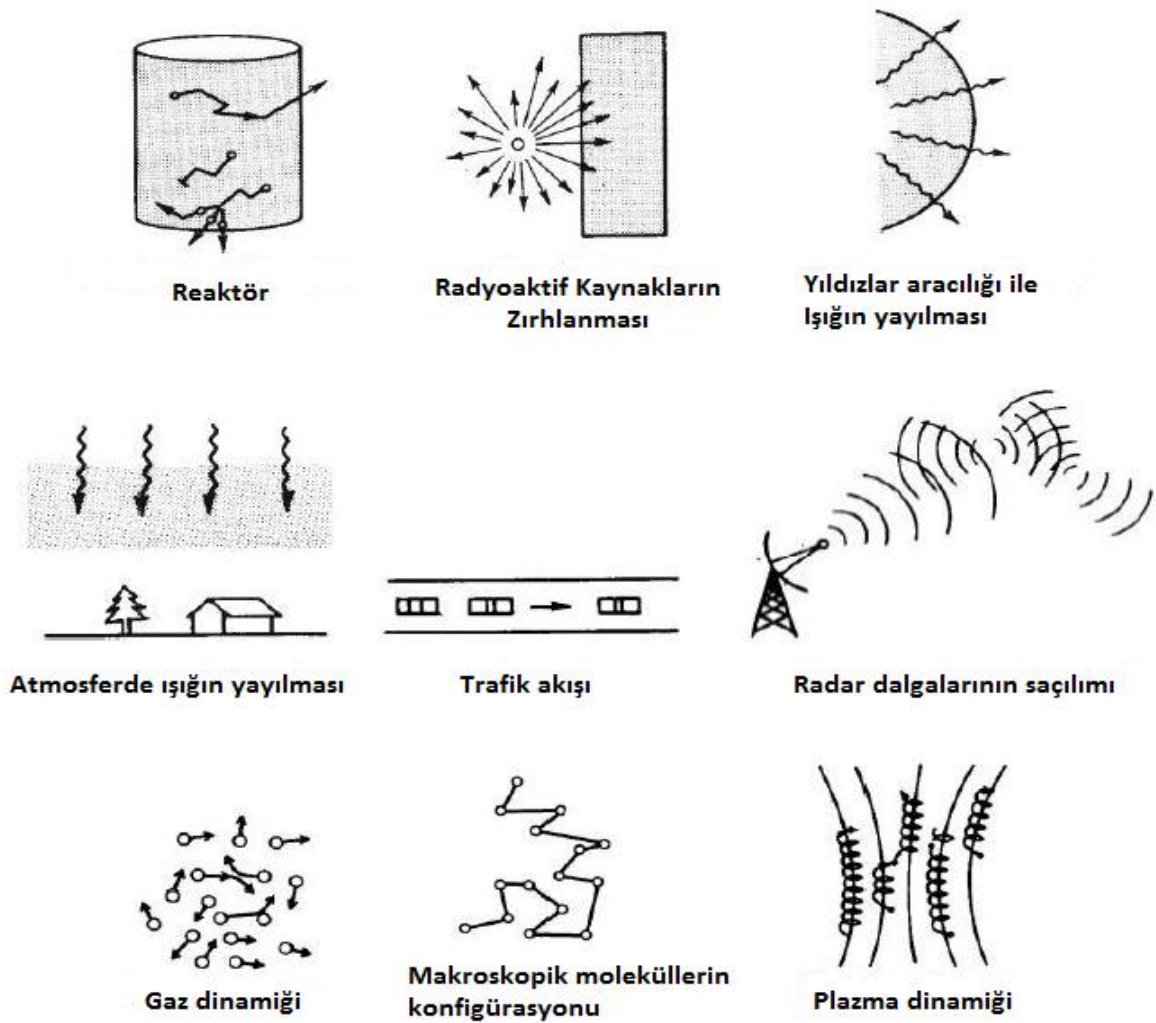
$$\mu_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \quad (3.6)$$

$$P_n(\mu_0) = P_n(\mu)P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')] \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 3.7 daha sonra kullanacağımız Legendre polinomları için kullanılan toplama kuralını ifade etmektedir.



Şekil 3.2. Radyasyon geliş ve saçılma doğrultusu



Şekil 3.3. Radyatif transfer kullanım örnekleri

### 3.2. Legendre Polinomları

Fransız matematikçi olan A.M. Legendre eliptik fonksiyonlar ve sayılar teorisine önemli katkılarda bulunmuştur. Küresel kütleler (gezegenler) arasındaki çekim kuvvetlerinin incelenmesi üzerine yaptığı çalışmalarda, bugün kendi adıyla anılan diferansiyel denklemi ve fonksiyonlarını tanımlamıştır (DeBarros ve Larsen, 1990).

Fizikte, Legendre diferansiyel denklemiyle küresel simetriye sahip sınır değer problemlerinin çözümlerinde karşılaşılır. Anımsanacağı üzere Schrödinger dalga denkleminin küresel koordinatlarda değişkenlere ayırma yöntemi çözümü için elde edilen Legendre diferansiyel denklemi;

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \left( k - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \phi = 0 \quad (3.8)$$

ile verilebilir. Burada,  $k$  sabit,  $m$  bir tamsayıdır. Denklem 3.8'de  $\mu = \cos \theta$  dönüşümü yapıldığında denklem,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \phi}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\phi}{d\mu} + \left( k - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) \phi = 0 \quad (3.9)$$

eşitliğindeki gibi olur.  $\theta$  açısı  $[0, \pi]$  aralığında değiştiği için  $\mu$  değişkeni  $[-1, 1]$  aralığında olmalıdır. Denklem 3.9'un genel çözümü  $P_n^m(\mu)$  ile verilmekte olup  $P_n^m(\mu)$  bağlı Legendre (associated Legendre) fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır.

$$\phi(\mu) = P_n^m(\mu) \quad (3.10)$$

Denklem 3.9'daki değişkenler,  $k = n(n + 1)$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $-n \leq m \leq n$  aralıklarındadırlar ve çözümleri bağlı Legendre polinomları olarak adlandırılmaktadır. Denklem 3.10, bağlı Legendre polinomlarıdır. Denklem 3.10 da  $m = 0$  olduğu zaman denklem Legendre diferansiyel denklemi, çözümü Legendre polinomları olarak adlandırılır ve  $P_n(\mu)$  ile gösterilir. Bu durumda  $\phi(\mu) = P_n(\mu)$  çözümü Denklem 3.9'da kullanıldığında ( $k = n(n + 1)$ ,  $m = 0$ );

$$(1 - \mu^2) P_n''(\mu) - 2\mu P_n'(\mu) + n(n + 1) P_n(\mu) = 0, \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.11)$$

diferansiyel denklemi sağladığı görülür. Legendre polinomları, üretme fonksiyonlarından da elde edilebilir. Bu polinomlar için üretme fonksiyonu Denklem 3.12'de ki gibidir.

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\mu g + g^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)g^n, \quad |g| < 1, \quad |\mu| \leq 1 \quad (3.12)$$

Denklem 3.12'nin sol tarafı  $g$ 'ye göre kuvvet açılımı yapıldığında  $g$ 'nin katsayıları ile  $P_n(\mu)$  polinomları elde edilebilir. Legendre polinomlarını, başka biçimlerde elde etmek de mümkündür. Rodrigues formülü denilen aşağıdaki bağıntı bu polinomları elde etmekte oldukça kullanışlıdır.

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{d\mu} \right)^n (\mu^2 - 1)^n \quad (3.13)$$

Legendre polinomlarını, elde edebileceğimiz diğer bir yöntem ise tekrarlama bağıntısıdır.

$$(2n + 1)\mu P_n(\mu) = (n + 1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu) \quad (3.14)$$

Denklem 3.14 kullanılarak  $n$ 'in çeşitli değerleri için  $P_n(\mu)$  polinomları kolayca bulunabilir. Örneğin  $n = 1$  için  $P_2(\mu)$ 'yi bulalım. Denklem 3.14'de  $n$  yerine 1 (bir) yazdığımızda denklemimiz Denklem 3.15 gibi olacaktır.

$$3\mu P_1(\mu) = 2P_2(\mu) + P_0(\mu) \quad (3.15)$$

Denklem 3.15'de  $P_0(\mu) = 1$  ve  $P_1(\mu) = \mu$  değerlerini yerlerine yazdığımızda,

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \quad (3.16)$$

$P_2(\mu)$  Denklem 3.16'daki gibi bulunacaktır. Bu şekilde diğer  $P_n(\mu)$  polinomları bulunabilir. Legendre polinomları için türev bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$P'_{n+1}(\mu) - \mu P'_n(\mu) = (n + 1)P_n(\mu) \quad (3.17a)$$

$$\mu P'_n(\mu) - P'_{n-1}(\mu) = nP_n(\mu) \quad (3.17b)$$

$$P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu) = (2n + 1)P_n(\mu) \quad (3.17c)$$

$$(\mu^2 - 1)P'_n(\mu) = n\mu P_n(\mu) - nP_{n-1}(\mu) \quad (3.17d)$$

Legendre polinomları için ortogonalite (diklik) bağıntısı;

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n + 1}, & n = m \end{cases} \quad n = 0,1,2,3, \dots \dots \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır.

Polinomun bu özelliği, verilen bir  $F(\mu)$  fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açma işleminde kullanışlıdır.

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + \dots \quad (3.19)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 F(\mu) P_n(\mu) d\mu \quad (3.20)$$

Denklem 3.19'da  $A_n$  katsayılarını bulmamız gerekiyor. Denklem 3.19'un her iki yanını  $P_n(\mu)$  ile çarpılıp  $[-1, 1]$  aralığında integrali alındığında  $A_n$  değerleri bulunur. Bu şekilde  $F(\mu)$  fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açılmış yani Legendre serisine açılmış olur. Aşağıda bazı Legendre polinomlarının birkaçı verilmiştir:

$$P_n(\mu) = 1 \quad (3.21a)$$

$$P_1(\mu) = \mu \quad (3.21b)$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) \quad (3.21c)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu) \quad (3.21d)$$

.....

### 3.3. Legendre Polinomu Yaklaşımı : $P_N$ Metodu

$P_N$  metodu, radyatif transfer denkleminin çözümünde çok yaygın olarak kullanılan bir metottür. Denklem 3.1'i çözmeye başlamadan önce uygun bir forma dönüştürmeliyiz;  $x = \sigma_T r / v$  değişken dönüşümü yapalım ve sistemin azimutal simetriye ( $\varphi, \varphi'$  açılarından bağımsız) ve izotropik (eş saçılımlı) bir saçılma tesir kesitine sahip olduğunu varsayalım, bu kabullenişlere göre Denklem 3.1 şu şekilde dönüşür;

$$\mu \frac{dL(x, \mu)}{dx} + vL(x, \mu) = \frac{vc}{2} \int_{-1}^1 L(x, \mu') d\mu' \quad (3.22)$$

burada  $c = \sigma_S / \sigma_T$  dir ve denklemin çözümü için aşağıdaki Legendre serisini önerebiliriz.

$$L(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu) \quad -a \leq x \leq a, \quad 1 \leq \mu \leq 1 \quad (3.23)$$

Bu çözümle Denklem 3.23 de görüldüğü gibi  $L(x, \mu)$  açısal akı fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açılır. Bu çözümde  $P_n(\mu)$  Legendre polinomları,  $\Phi_n(x)$  akı momentleri ve bu yönteme de  $P_N$  yöntemi denir.

Legendre polinomları için ortogonalite (diklik) bağıntısı denklem 3.18'de ve aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \quad (3.24)$$

Ayrıca diklik bağıntısından,

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)d\mu = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

şeklinde olacağı açık bir şekilde gözükmektedir. Akı momentleri, aşağıdaki bağıntıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^1 L(x, \mu)P_n(\mu)d\mu \quad (3.26)$$

Giriş bölümünde de vurguladığımız gibi Denklem 3.26'da ilk iki terimin fiziksel olarak bir anlamı vardır. Denklem 3.26'da  $n = 0$  için  $P_0 = 1$  ve  $n = 1$  için  $P_1 = \mu$  olacaktır ve bunlar yerlerine yazıldığında,

$$\Phi_0(x) = \int_{-1}^1 L(x, \mu)d\mu \quad (3.27)$$

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^1 \mu L(x, \mu) d\mu \quad (3.28)$$

şeklinde olur. Burada, Denklem 3.27'yi  $x$  noktasındaki radyans (ışın) veya toplam foton akısı, Denklem 3.28'i ise  $x$  noktasındaki radyans dağılımının asimetri faktörü, cosinüs ortalaması veya foton akımı olarak adlandırabiliriz (Lemonnier, 2002).

Genel olarak  $\Phi_n(x)$  momentlerini elde etmek için önce Denklem 3.23'ü Denklem 3.22 de yerine yazacağız ardından aynı denklemde Legendre polinomları için tekrarlama bağıntısını kullanacağız.

Son olarak ortaya çıkan tüm terimleri  $P_m(\mu)$  ile çarpıp  $[-1,1]$  aralığında integralini aldığımızda (Legendre polinomunun ortogonalite özelliğinin kullanıldığı anlamına gelir)  $n$ 'nin çeşitli değerleri için  $\Phi_n(x)$  akı momentleri için kuplajlı diferansiyel denklemlerini buluruz;

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + v \Phi_0(x) = vc \Phi_0(x) \quad n = 0 \rightarrow P_0(\mu) \quad (3.29a)$$

$$2 \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + \frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 3v \Phi_1(x) = 0 \quad n = 1 \rightarrow P_1(\mu) \quad (3.29b)$$

$$3 \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + 2 \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + 5v \Phi_2(x) = 0 \quad n = 2 \rightarrow P_2(\mu) \quad (3.29c)$$

$$4 \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + 3 \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + 7v \Phi_3(x) = 0 \quad n = 3 \rightarrow P_3(\mu) \quad (3.29d)$$

.....

şeklinde elde edilirler. Bu denklemlerden faydalanarak genel denklem aşağıdaki gibi verilebilir;

$$(n + 1) \frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx} + n \frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n + 1)v\Phi_n(x) = vc\Phi_0(x)\delta_{n0} \quad n \geq 0 \quad (3.30)$$

Denklemlerde yer alan değişkenin  $-a \leq x \leq a$  aralığında oldukları unutulmamalıdır. Denklem 3.30'da gözüken  $\delta_{n0}$  sembolü Kroniker delta olarak bilinir ve,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.31)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Akı momentlerinin genel ifadesinde,  $n = 0,1,2, \dots, N$  olmak üzere sonlu sayıda birbiri ile bağıntılı  $N + 1$  tane  $\Phi_n(x)$  akı momentleri vardır.  $P_{N+1}(\mu)$  polinomu  $N$ 'nin büyük değerleri için hızlı salınımlar sergiler yani  $-1 \leq \mu \leq 1$  aralığında  $N + 1$  kez işaret değiştirir. Bu durum  $\Phi_{N+1}(x)$ 'in büyük  $N$  değerleri için yeterince küçük olacağını gösterir. Buna göre  $\Phi_{N+1}(x) = 0$  yaklaşımı uygun bir çözüm olur ve bu yaklaşım  $P_N$  yaklaşımı olarak bilinmektedir. Denklem 3.30'da verilen birbirine bağlı (kuplajlı) diferansiyel denklem sisteminin çözümü için  $\Phi_n(x)$  akı momentini ifadesine,

$$\Phi_n(x) = A_n(v)e^x \quad (3.32)$$

olacak şekilde bir çözüm önerelim.

Burada  $v$  değerleri ‘‘özdeğerler’’ ve  $A_n(v)$  ‘ler de özfonksiyonlarıdır (Kaşkaş, 2007). Denklem 3.32’yi Denklem 3.30’da yerine yazıp elde edilen denklem çözülrse  $A_n(v)$ ’ler için ‘‘recurrence relation’’ tekrarlama bağıntısı elde edilir;

$$A_0(v) = 1 \quad (3.33a)$$

$$A_1(v) + v(1 - c)A_0(v) = 0 \quad (3.33b)$$

$$2A_2(v) + 3vA_1(v) + A_0(v) = 0 \quad (3.33c)$$

Genel olarak yazmak istersek,

$$(n + 1)A_{n+1}(v) + (2n + 1)vA_n(v) + nA_{n-1}(v) = vcA_0(v)\delta_{n0} \quad (3.34)$$

bağıntısı elde edilir.  $v$  özdeğerlerini bulmak için  $A_{n+1}(v) = 0$  denklemini çözümlmek yeterlidir. Örnek olması bakımından  $n = 1$  yaklaşımı için  $A_2(v) = 0$  olacağından,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{3(1 - c)}} \quad (3.35)$$

özdeğerleri bulunur. Burada anlatılan özdeğer hesaplama yönteminden başka, bir metod olarak matris cebiri kullanarak da bu özdeğerler hesaplanabilir.

### 3.4. Henyey – Greenstein Faz Fonksiyonu

Önceki bölümde radyatif transfer denklemini izotropik saçılma tesir kesitli bir ortam için çözdük. Bu kısımda astrofizik ve fiziğin diğer alanlarında yaygın olarak kullanılan saçılma tesir kesiti fonksiyonu veya Henyey-Greenstein faz fonksiyonu olarak bilinen bir saçılma fonksiyonu kullanacağız. Radyatif transfer problemlerinin çözümleri için saçılım faz fonksiyonu gerekmektedir (Herman ve Browing, 1965). Radyatif transfer teorisi, partiküllerin davranışlarını konum, açı, enerji ve zaman değişkenine bağlı olarak inceler. Radyatif transfer denkleminin çözümlünde en önemli faktör uygun bir saçılma faz fonksiyonunu tanımlamaktır (Fiveland, 1988). Faz fonksiyonu bir hedef tarafından saçılan bir parçacık veya elektromanyetik dalğanın açısız dağılımını ifade eder. Belirli bir yönden gelen radyasyonun bir başka yöndeki katı açı içerisinde saçılma ihtimalini gösterir (Zhao, 2006). Şimdiye kadar saçılım faz fonksiyonunu belirlemek için çok sayıda model geliştirilmiştir. Henyey ve Greenstein (1941) faz fonksiyonu adıyla bilinen radyasyonun bir galaksideki saçılımını tanımlamak için deneysel bir model ortaya koymuşlardır.

Tek  $g$  (asimetri faktörü) parametrelili olan bu ifade, basit ve analitik şekli sebebiyle biyofizik uygulamalarında ve atmosferik bilimlerde geniş ölçüde kullanılmıştır (Kaşkaş, 2007). Astronomik çalışmalarda, biyolojik dokularda ışık saçılması, sudaki ışık yayılması, astrofizikte ve meteorolojide sıklıkla kullanılmaktadır (Türeci, 2005). Henyey-Greenstein ( $HG$ ) faz fonksiyonu analizi zor olan Mie saçılım faz fonksiyonunun sadeleştirilmiş hali olduğundan kullanımı çok popülerdir. Bu bölümde kullanacağımız  $HG$  saçılma faz fonksiyonu,  $\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')$  olmak üzere aşağıdaki gibidir;

$$\sigma_S^{HG}(\mu_0) = \frac{\sigma_S}{4\pi} \frac{1-g^2}{(1-2g\mu_0+g^2)^{3/2}} \quad (3.36)$$

Deklem 3.36  $-1 \leq g \leq 1$  aralığında değerler alır (Henyey ve Greenstein, 1941).  $g$ 'nin pozitif ve negatif değeri alınarak grafik çizdirildiğinde;  $g$ 'nin pozitif değerinde daha ileri saçılım gözlenmiştir. Ayrıca  $g$ 'nin negatif değerinde daha geriye saçılım gözlenmiştir. Asimetri parametresi  $g$  saçılım olayını takiben ışığın yeniden dağılımının şeklini kontrol eder.

Biyolojik dokularda asimetri parametresi  $0,69 \leq g \leq 0,99$  aralığında değerler alır (Cheong ve ark., 1990). Bu dağılım tıpta teşhis ve tedavi amaçlı yapılan çalışmalarda sıklıkla kullanılır.

### 3.5. $P_N$ Yöntemi ile $HG$ Faz Fonksiyonu Kullanılarak Özdeğer Hesabı

Bu bölümde  $HG$  faz fonksiyonunu kullanarak radyatif transfer denklemini çözümlenmeye çalışacağız. Bunun için Denklem 3.36 da verilen  $HG$  faz fonksiyonunu Legendre serisine açacağız ve işlemleri buna göre düzenleyeceğiz. Denklem 3.36 Legendre serisine şu şekilde açılabilir;

$$\sigma_S^{HG}(\mu_0) = \frac{\sigma_S}{4\pi} \frac{1-g^2}{(1-2g\mu_0+g^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_S}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g^n P_n(\mu_0) \quad (3.37)$$

yukarıda verilen  $HG$  faz fonksiyonunun  $\varphi'$  üzerinden integralini radyatif transfer denkleminin çözümümünde kullanacağımız iki farklı duruma göre vereceğiz;

$$\int_0^{2\pi} \sigma_S^{HG}(\mu_0) d\varphi' = \frac{\sigma_S}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g^n P_n(\mu) P_n(\mu') \quad (3.38)$$

$$\int_0^{2\pi} \sigma_S^{HG}(\mu_0) d\varphi' = \frac{\sigma_S(1-g^2)}{4\pi} \left\{ \frac{8\mathbf{E}(k)}{(b^2-a^2)^{3/4}} - \frac{4\mathbf{K}(k)}{(b^2-a^2)^{3/4}} \right\} \quad (3.39)$$

$$a = 1 - 2\mu\mu'g + g^2 \quad (3.40)$$

$$b = 2g\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2} \quad (3.41)$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2-b^2}}} \quad (3.42)$$

Denklem 3.39'daki  $\mathbf{K}(k)$  ve  $\mathbf{E}(k)$  sırsı ile 1. ve 2. tip tam eliptik integraller olarak bilinmekte ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du \quad (3.44)$$

Bu bilgiler ışığında, Denklem 3.1'i verilen bir saçılma fonksiyonu ile çözmeye çalışacağız, bunun için saçılma fonksiyonu olarak Denklem 3.37'yi kullanacağız;

$$\mu \frac{dL(x, \mu)}{dx} + vL(x, \mu) = \frac{v\sigma_S}{4\pi\sigma_T} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-g^2)L(x, \mu')}{(1-2g\mu_0 + g^2)^{3/2}} d\varphi' d\mu' \quad (3.45)$$

Denklem 3.38'i Denklem 3.45 de kullanırsak,

$$\mu \frac{dL(x, \mu)}{dx} + vL(x, \mu) = \frac{vc}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1)g^n P_n(\mu)\Phi_n(x) \quad (3.46)$$

burada  $\Phi_n(x)$ ,

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^1 L(x, \mu') P_n(\mu') d\mu' \quad (3.47)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem 3.29'un çözümü için önceki bölümde olduğu gibi  $L(x, \mu)$  açısıl akı fonksiyonunu Legendre serisi olarak kullanacağız.

$$L(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N (2m+1) P_m(\mu)\Phi_m(x) \quad (3.48)$$

Denklem 3.47’de verilen skaler akı fonksiyonu Denklem 3.46’da yerine yazılıp, Legendre polinomları için tekrarlama bağıntısı gerekli yerde kullanıldıktan sonra denklemin her iki tarafını  $P_n(\mu)$  ile çarpıp  $[-1,1]$  aralığında integrali alındığında (Legendre polinomları için ortogonalite özelliği kullanılmaktadır) aşağıdaki diferansiyel denklemleri elde ederiz;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + v\phi_0(x) = vc\phi_0(x) \quad (3.49a)$$

$$2\frac{d\phi_2(x)}{dx} + \frac{d\phi_0(x)}{dx} + 3v\phi_1(x) = 3vcg\phi_1(x) \quad (3.49b)$$

$$3\frac{d\phi_3(x)}{dx} + 2\frac{d\phi_1(x)}{dx} + 5v\phi_2(x) = 5vg^2\phi_1(x) \quad (3.49c)$$

.....

Genel olarak da şu şekilde yazılabilir;

$$(n+1)\frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + n\frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n+1)v\phi_n(x) = (2n+1)vcg^n\phi_n(x) \quad (3.50)$$

Denklem 3.50’de verilen birbirine bağlı diferansiyel denklem sisteminin çözümü için,  $\phi_n(x)$  akı momentleri ifadesine,

$$\phi_n(x) = A_n(v, g) e^x \quad (3.51)$$

şeklinde bir çözüm önereceğiz. Burada  $v$  özdeğerler ve  $A_n(v, g)$  de özfonksiyonlardır. Önerilen çözümü Denklem 3.50’de yerine yazıp her  $n$  değeri için işlem yapıldığında  $A_n(v, g)$ ’ler bulunabilir;

$$A_1(v, g) + vA_0(v, g) = vcA_0(v, g) \quad (3.52a)$$

$$2A_2(v, g) + A_0(v, g) + 3vA_1(v, g) = 3vcgA_1(v, g) \quad (3.52b)$$

$$3A_3(v, g) + 2A_1(v, g) + 5vA_2(v, g) = 5vcg^2A_2(v, g) \quad (3.52c)$$

.....

ve genel olarak da

$$(n+1)A_{n+1}(v, g) + nA_{n-1}(v, g) + (2n+1)vA_n(v, g) = (2n+1)vcg^nA_n(v, g) \quad (3.53)$$

sonucuna ulaşılır. Özdeğerleri ( $v$ ) bulabilmek için önceki bölümde değindiğimiz gibi iki yöntem vardı. Çalışmamızda  $A_{n+1}(v, g) = 0$  eşitliğini kullanacağız.

Kullanılacak olan yaklaşım mertebesi kadar hesaplamalar yapılabilir. Örnek olması bakımından  $P_1$  yaklaşımı için  $n = 1$  alınmak suretiyle,  $A_2 = 0$  denklemini çözerek özdeğerler hesaplanabilir;

$$A_0(v, g) = 1 \quad (3.54a)$$

$$A_1(v, g) = -v(1 - c) \quad (3.54b)$$

$$A_2(v, g) = \frac{3}{2}v^2(1 - cg)(1 - c) - \frac{1}{2} \quad (3.54c)$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{3(1 - c)(1 - cg)}} \quad (3.55)$$

Burada  $c = \frac{\sigma_S}{\sigma_T}$  şeklinde olduğunu daha önce de vurgulamıştık.

### 3.6. Ayrık Ordinatlar Yöntemi : $S_N$ Metodu

Radyatif transfer denklemi zaman, yön, enerji ve uzay değişkenlerine bağlı bir denklemdir. Bu denklemi doğrudan analitik olarak çözmek genelde zordur hatta mümkün olmayabilir, bundan dolayı denklemi çözerken karşılaşılan birtakım engelleri aşmak için zaman, uzay, enerji ve yön ayrıklaştırması yapılarak bu denkleme sayısal olarak yaklaşık bir çözüm bulma yoluna gidilir. Son yıllarda belirli tip parçacık transfer problemlerinin çözümüne yönelik birçok yaklaşık yöntem geliştirilmiştir. Örneğin radyatif transfer denkleminin yönsel ayrıklaştırılması için Kesikli (Ayrık) Ordinatlar ( $S_N$ ) ve Küresel Harmonikler ( $P_N$ ) yöntemleri gibi yaklaşımlar yapılmıştır (Kaşkaş, 2007). Bunlardan  $S_N$  yöntemi hesapsal doğruluk ve verim arasında iyi bir uyum sağlayan ve yüksüz parçacık transfer denklemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemlerden biridir. Bu yöntemde toplam  $4\pi$ 'lik katı açıyı tarayan bir dizi ayrık yön boyunca radyatif transfer denklemlerinin sayısal çözümü yapılır ve yön üzerindeki integraller sayısal karelemeler ile yer değiştirir. Küresel Harmonik yöntemi de yine parçacığın yönsel ayrıklaştırılmasında kullanılan etkili yöntemlerden biridir (Lathrop, 2000).

Radyatif transfer denkleminde akı ve akım ögelerinin analitik ve sayısal hesaplamaları  $P_N$  ve  $S_N$  diye adlandırılan iki ana metotla yapılır.  $P_N$  metodunda, açısal akı konum ve açıya bağlı olduğundan açısal akısı Legendre Polinomları cinsinden seriye açılır. Bu açılımın katsayıları konuma bağlıdır ve sadece ilk iki terimin fiziksel anlamı vardır.

Sıfırncı bileşen skaler akı ve birinci bileşen parçacık akımı olarak bilinir.  $S_N$  metodunda, skaler ve açısai akının çözümlü için Gauss-Legendre kuadratür setleri kullanılır. Bu yöntemden başka kullanılan yöntemlerde mevcuttur. Fakat  $P_N$  ve  $S_N$  yöntemleri kadar yaygın değildir.  $S_N$  yönteminde elde edilen sonuçlar  $P_N$  yönteminde elde edilen sonuçlarla uyum içindedir.

Ayrık ordinatlar yöntemi basitçe ayrık açısai yönlerde radyatif transfer denkleminin çözümlünü sağlar. Yön değışkeni birim küre boyunca ayrıklaştırılır. Temel olarak ilgili birim küre alanı  $\omega_m$  ile gösterilir. Burada  $m=1, \dots, N$  ayrık ordinat sayısıdır. Bu  $N$  değeri  $S_N$  derecesini belirler.

Örneğın;  $N = 2$ ,  $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$ ,  $\mu_2 = -\mu_1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$

Bütün ayrık ordinatlar bazı şartları sağlamak zorundadır:

- Fiziksel simetrijlerin ayrıklaştırma sonrası korunmuş olması
- Kaynak terimlerinin doğru gösterimi için küresel harmonikler momentlerine iyi bir yaklaşım yapılması
- Akış operatöründe yer alan yöne göre türeve doğru bir yaklaşım yapılması

İkinci şartı sağlamak için akı momentlerinin kareleme formülü ile doğru olarak hesaplanması gereklidir. Bunun için  $\mu \in [-1, 1]$  aralığında  $N$  ordinat yani  $\mu_m$ ,  $m = 1 \dots N$  ve bunlara karşılık gelen  $\omega_m$  ağırlık noktası kullanılır, burada  $\mu_m$ 'ler  $P_N(\mu)$  Legendre polinomlarının kökleridir.

Gauss-Legendre quadratur seti kullanılarak verilen bir  $F(\mu)$  fonksiyonunun  $[-1, 1]$  aralığında integrali (eğer integral bu aralıkta değil ise uygun bir dönüşüm ile integral aralığı  $[-1, 1]$  'e dönüştürölür) şu şekilde verilir;

$$I = \int_{-1}^1 F(\mu) d\mu \cong \sum_{m=1}^N F(\mu_m)\omega_m \quad (3.56)$$

Ağırlıklar pozitifdir ve toplamı 2'yi verecek şekilde normalize edilir:

$$\int_{-1}^1 d\mu = \sum_{m=1}^N \omega_m = 2 \quad (3.57)$$

$\mu = 0$  etrafında fiziksel simetrisinin sağlanması için çift sayıda ordinat seçilir.

$$\mu_{N+1-m} = -\mu_m, \mu_m > 0, \omega_{N+1-m} = \omega_m, \quad m = 1, 2, \dots, N/2 \quad (3.58)$$

Ordinatlar ( $\mu_m, m = 1, 2, \dots, N$ ) Legendre polinomlarının köklerinden bulunur:

$$P_N(\mu_m) = 0 \quad (3.59)$$

Ağırlıklar ( $\omega_m$ ) Legendre polinomlarını doğru şekilde integre edebilen kareleme formülünden de bulunabilir:

$$\sum_{m=1}^N \omega_m P_n(\mu_m) = 2\delta_{n0}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.60)$$

Bu çalışmamızda Gauss-Legendre kuadratur setinin radyatif transfer denkleminde uygulanmasında temel gösterimler şu şekilde olacaktır;

$$\Phi(x) = \int_{-1}^1 L(x, \mu) d\mu \cong \sum_{m=1}^N L(x, \mu_m) \omega_m = \sum_{m=1}^N L_m(x) \omega_m \quad (3.61)$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^1 P_n(\mu) L(x, \mu) d\mu \cong \sum_{m=1}^M P_n(\mu_m) L_m(x) \omega_m, \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.62)$$

Ayrık ordinatlar yönteminin en büyük dezavantajı, onu diğer geometrilere genişletmenin zorluğudur.

### 3.7. $S_N$ Yöntemi ile HG Faz Fonksiyonu Kullanılarak Özdeğer Hesabı

Önce tek gruplu, zamandan bağımsız ve dış kaynağın olmadığı homojen bir ortam için tek boyutlu dilim (slab) geometride radyatif transfer denklemini tekrar yazalım ve daha önce de belirtildiği üzere,  $L(x, \mu)$  radyans dağılım fonksiyonunun azimutal açıdan bağımsız olduğunu kabul edelim (Lathrop, 2000);

$$\mu \frac{dL(x, \mu)}{dx} + vL(x, \mu) = \frac{v\sigma_S}{4\pi\sigma_T} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-g^2)L(x, \mu')}{(1-2g\mu_0 + g^2)^{3/2}} d\varphi' d\mu' \quad (3.63)$$

burada,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\mu' = \cos \theta'$  saçılma öncesi ve sonrası yönelimin  $x$ -ekseni ile yaptığı açı,  $\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')$  daha önceden tanımlandığı geliş ve saçılma doğrultuları arasındaki açının kosinüsü veya kosinüs doğrultmanıdır.

Denklem 3.63 de ilk yapılması gereken iş verilen integralde  $\varphi'$  üzerinden integrali almaktır. Dikkat edileceği üzere  $\varphi'$  değişkeni sadece  $[1 - 2\mu_0 g + g^2]^{-3/2}$  ifadesi içerisinde yer almakta, bundan dolayı bu ifadeyi uygun bir değişkene göre ( $b'$  ye göre) seriye açıp terim terim integralini almak en makul yol olacaktır;

$$\frac{1}{[1 - 2\mu_0 g + g^2]^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)! b^n [\cos(\varphi - \varphi')]^n}{2^{2n} (n!)^2 a^{n+3/2}} \quad (3.64)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{[1 - 2\mu_0 g + g^2]^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)! b^n}{2^{2n} (n!)^2 a^{n+3/2}} \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi - \varphi')]^n d\varphi' \quad (3.65)$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos(\varphi - \varphi')]^n d\varphi' = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ise} \\ \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (3.66)$$

Denklem 3.66'yı Denklem 3.65' de kullandığımızda integral sonucu olarak,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{[1 - 2\mu_0 g + g^2]^{3/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)! b^{2n}}{2^{4n} ((2n)!)^2 a^{2n+3/2}} \left( \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right) \\ &= \frac{4}{(a^2 - b^2)^{3/4}} [2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)] \end{aligned} \quad (3.67)$$

$a, b, k, \mathbf{K}(k)$  ve  $\mathbf{E}(k)$  terimlerinin ifade ettikleri anlamları veya ifadesi Denklem (3.40 - 3.44) de sırasıyla belirtilmiştir. Denklem 3.67'yi Denklem 3.63 de kullandığımızda,

$$\mu \frac{dL(x, \mu)}{dx} + vL(x, \mu) = \frac{vc}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{4(1-g^2)}{(a^2 - b^2)^{3/4}} [2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)] L(x, \mu') d\mu' \quad (3.68)$$

$$a = 1 - 2\mu\mu'g + g^2, \quad b = 2g\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2} \quad (3.69)$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2 - b^2}}}, \quad c = \sigma_S / \sigma_T \quad (3.70)$$

bağıntısını elde ederiz.

Bu çalışmada,  $S_N$  yönteminin kullanılabilmesi bakımından Denklem 3.68'in çözümü için uygulanabilecek en uygun seçim "değişkenlerine ayırma" kuralını uygulamaktır. Bu amaçla Denklem 3.68'in çözümü için aşağıda verilen çözümü öneriyoruz;

$$L(x, \mu) = L_0 H(v, \mu) e^x \quad (3.71)$$

$L_0$  başlangıç şartlarından belirlenebilecek bir sabit,  $H(v, \mu)$  ise radyans dağılım fonksiyonu olup normalizasyon şartını sağlamalıdır;

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 H(v, \mu) d\mu = 1 \quad (3.72)$$

Denklem 3.71'i Denklem 3.68 de kullanırsak,

$$\mu H(v, \mu) + \nu H(v, \mu) = \frac{\nu c(1 - g^2)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{4H(v, \mu')}{(a^2 - b^2)^{3/4}} [2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)] d\mu' \quad (3.73)$$

bağıntısını elde ederiz.

$S_N$  yöntemini uygulayarak  $\nu$  özdeğerlerini hesaplamaya hazırız. Bundan sonraki yapacağımız işlemlerde aşağıda verilen temsili gösterimde olduğu gibi  $H(v, \mu_m) = H_m(v)$ ,  $H(v, \mu_n) = H_n(v)$  gösterimlerini kullanacağız.

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 H(v, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N H_m(v) \omega_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.74)$$

Gauss-Legendre kuadratür setleri nümerik analiz kitaplarında tablo halinde bulmak mümkündür. Gauss-Legendre kuadratür setini kullanarak nümerik integrasyon yardımı ile  $\nu$  özdeğerleri Case yönteminde olduğu gibi kolaylıkla bulunabilir. Bilindiği gibi analitik Case yönteminde bu sürekli  $\nu$  özdeğerleri singüleriteli integral çözümlerinden elde edilmektedir. Biz bu sürekli özdeğerleri nümerik yaklaşım ile bulmaktayız.

Burada  $\omega_m$  ağırlık değerleridir.  $N$ 'in çift mertebe yaklaşımında  $\mu_m$  kökleri, 0 orijinine göre simetrik olduğundan genelde  $N$  sayısının çift durumu kullanılır.

$N$  sayısı tek alınırsa, kökün biri orijinde olmak üzere diğer değerler yine simetriktir.  $\mu_m$ 'in mertebesi (veya  $N$  sayısı)  $\nu$  özdeğerlerinin sayısını belirler.

Buna göre Denklem 3.73 şu şekilde düzenlenmektedir;

$$(\nu + \mu_m)H_m(\nu) = \frac{\nu c(1 - g^2)}{4\pi} \sum_{n=1}^N \frac{4H_n(\nu)\omega_n}{(a_{m,n}^2 - b_{m,n}^2)^{3/4}} [2\mathbf{E}(k_{m,n}) - \mathbf{K}(k_{m,n})] \quad (3.75)$$

burada

$$a_{m,n} = 1 - 2\mu_m\mu_n g + g^2, b_{m,n} = 2g\sqrt{1 - \mu_m^2}\sqrt{1 - \mu_n^2} \quad (3.76)$$

$$k_{m,n} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{a_{m,n}}{2}}{2\sqrt{a_{m,n}^2 - b_{m,n}^2}}} \quad (3.77)$$

Denklem 3.75'i daha sade bir biçimde yazacak olursak,

$$H_m = \sum_{n=1}^{N/2} R_{mn} H_n \omega_n \quad (3.78)$$

olur ve burada  $R_{m,n}$ ,

$$R_{m,n} = \frac{\nu c(1 - g^2)}{\pi(\nu + \mu_m)(a_{m,n}^2 - b_{m,n}^2)^{3/4}} [2\mathbf{E}(k_{m,n}) - \mathbf{K}(k_{m,n})] \quad (3.79)$$

şeklindedir.

$\nu$  özdeğerlerini hesaplamak için Denklem 3.78'i kullanarak kare matris oluşturacağız ve bu matris'in determinantını sifira eşitleyeceğiz.

Genel olarak yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} 1 - R_{1,1} & -R_{1,2} & \dots & -R_{1,N} \\ -R_{2,1} & 1 - R_{2,2} & \dots & -R_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R_{N,1} & -R_{N,2} & 1 - R_{N,N} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\nu) \\ H_2(\nu) \\ \dots \\ H_N(\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$N$  satır ve  $N$  sütundan oluşan bir kare matris elde edilmektedir. Bu kare matrisin determinantının sifira eşitlenerek  $\nu$  özdeğerleri için "aşikâr olmayan" (non-trivial) çözümler elde edilir. Tez boyunca yapılan analitik ve nümerik işlemlerin tamamı Maple 15 software ile yapılmıştır.

#### 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Fizik ve Mühendislikte herhangi bir ortamda parçacıkların hareketinin bilinmesi önem arz etmektedir. Fizikteki birçok önemli problem ve teknolojik pratik uygulamalar dahil parçacıkların hareketlerinde ortamın özelliklerinin etkisi vardır.

Nükleer reaktörler yakıt, moderatör, soğutucu, kontrol çubukları ve çevresel yapılar içeren kompleks sistemlerdir. Böyle sistemlerde nükleer reaktör tasarımı ve kontrolü için nötron parçacıklarının akı momentleri, difüzyon uzunluğu, difüzyon katsayısı, kritik kütle gibi parametrelerin doğru bir şekilde hesaplanması gerekmektedir. Nükleer reaktörler heterojen yapılardır. Bu nedenle her kısım farklı özelliklere sahiptir ve yapılacak işlemlerde bu farklılıklar göz önünde bulundurulmalıdır.

Çalışmada ilk olarak astrofizikte yaygın olarak kullanılan Henyey-Greenstein faz (saçılma fonksiyonu) fonksiyonu tek boyutlu slab geometride radyatif transfer denkleminin çözümü için uygulandı. Uyguladığımız işlemlerde radyatif transfer denkleminin çözümü için  $P_N$  ve  $S_N$  yöntemleri kullanıldı (çözümde elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırmak için bu iki yöntemi tercih ettik).

Radyatif transfer denkleminin çözümünü gerçekleştirebilmek için öncelikle özdeğer spektrumlarını bulmamız gerekmektedir. Her iki yöntemle elde ettiğimiz özdeğer spektrum değerleri tablolar halinde verilerek karşılaştırılmıştır.

$P_N$  yaklaşımı adından da anlaşılacağı üzere açılalaki'yı Legendre polinomları cinsinden seriye açmak ve konuma bağlı olan  $\Phi_n(x)$  momentlerini bulma işleminden ibarettir.

$S_N$  denklemi ise radyatif transfer denklemini, integral içeren bir diferansiyel denklem olması nedeniyle Gauss-Legendre kuadratur seti kullanarak çözmek için geliştirilmiş bir yöntemdir.

Bu çalışmamızda ayarlanabilir asimetri parametresi  $g$ , fisyon başına ortaya çıkan ortalama foton sayısı  $c$  ve  $N$ 'nin farklı değerleri için Tablo 4.1 ile Tablo 4.5'e kadar verilmiştir. Bilgisayar yardımıyla bu bileşenlerin kombinasyonlarının performansları uzun hesaplamalarla belirlenebilir. Tablolarda üretilen sayısal sonuçlar Maple 15 yazılımı kullanılarak hesaplanmıştır. Ayarlanabilir asimetri parametresi  $g$ 'nin artan değerlerinin partikülleri ileri ve azalan değerlerinin ise geri yönde saçtığı anlamı literatürde bir kabullenimdir.

Çalışmamızda elde edilen değerler incelendiğinde  $HG$  faz fonksiyonunda  $c$ 'nin artan değerlerine göre bazı  $g$  parametreleri için özdeğer hesaplamaları yapılmıştır. Ancak  $HG$  faz fonksiyonunda bazı  $c$  ve  $g$  değerlerinde özdeğerlerin bulunamaması ve bazı mertebeden yaklaşımlarda eksik özdeğerlerin olması yöntemin dezavantajı olarak değerlendirmekteyiz.  $HG$  faz fonksiyonu bahsedilen durumlar haricinde incelendiğinde elde edilen değerlere göre  $g$  parametresinin artması ile ıraksamalar göstermektedir. Bu durum  $c$ 'nin artması ile her ne kadar azalmış olsa da  $c$ 'nin 1'e yakın değerlerindeki hesaplamalar esastır. Dilim geometride  $P_N$  ve  $S_N$  metodundaki  $\nu$  özdeğerleri  $c = 0$  olduğu durumda, elde edilen kökler özdeştir.  $g$  parametresinin artmasıyla difüzyon uzunluğunun belli bir korelasyonda arttığı tespit edilmiştir.  $HG$  faz fonksiyonu kullanılarak yapılan hesaplamalarda  $g = 1$ 'e yakın değerlerinde aşırı piklenme gözlemlenmektedir. Bulunan sonuçlarda  $N$  değeri büyüdükçe  $P_N$  ve  $S_N$  için bulunan değerlerin birbirine yaklaştığı görülür. Hesaplamalarda bulunan sonuçlar virgülden sonra beşinci basamağa kadar yukarı yuvarlama yapılarak verildi. Tablolar dikkatlice incelendiğinde  $P_N$  ve  $S_N$  yönteminden elde edilen çözümlerin özellikle  $N = 4$  yaklaşımından sonra hemen hemen neredeyse birbirine eşit olduğu görülür. Yani  $N$  arttıkça sonuçlar arasındaki uyumluluk da artmaktadır.

Özel durumlar için mevcut sonuç, literatürde mevcut diğer sonuçlar ile mükemmel bir uyum içindedir. Her iki yöntemle de hesaplanan özdeğerlerin birbiri ile uyumlu olması her iki yöntemin radyatif transfer denkleminin çözümünde iyi birer yaklaşım olduğu doğrulamaktadır.

Dikkat edilecek olursa  $c = 0$  olduğu durumda, integral içeren radyatif transfer denkleminde integral terimi yok olmaktadır. Bundan dolayı ;

- a.  $P_N$  yaklaşımında Denklem 3.53'den anlaşıldığı üzere denklem doğrudan Legendre polinomlarının tekrarlama bağıntısına dönüşmekte olup  $\nu$  özdeğerleri uygulanan yaklaşım mertebesine göre,  $P_N(\nu) = 0$  Legendre polinomlarının köklerine eşit olmaktadır.
- b.  $S_N$  yaklaşımında ise Denklem 3.73'den anlaşıldığı üzere  $(\nu + \mu)H(\nu, \mu) = 0$  olduğundan  $(\nu + \mu_n)H_n(\mu) = 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  düzenlemesi ile bunun diyagonal bir matris olduğu ve determinantı da  $|(\nu + \mu_1)(\nu + \mu_2) \dots (\nu + \mu_N)| = 0$  olduğundan,  $\nu$  özdeğerleri  $P_N$  yaklaşımında olduğu gibi  $P_N(\nu)$  Legendre polinomunun köklerine eşit olmaktadır.

$g = 0$  durumu ise çok özel bir durumdur. Hem Denklem 3.53 hem de Denklem 3.73 görüldüğü üzere ortamın tamamen izotropik olduğu anlamına gelmektedir, buna göre  $g = 0$  durumu izotropik ortamda radyatif transfer denkleminin çözümlerini içermektedir.

$g = \pm 1$  durumu için şunlar söylenebilir;

a.  $P_N$  yaklaşımında basitçe Denklem 3.55 incelemek yeterlidir.  $g = 1$  olduğunda  $\pm 1/\sqrt{3(1-c)^2}$ ,  $g = -1$  olduğunda ise  $\pm 1/\sqrt{3(1-c^2)}$  birinci denklem ikincisinde mutlak değerce her zaman daha büyüktür, bu nedenle özdeğerlerin sayısal değerini  $c$  değerleri belirlemekte olup  $c \rightarrow 1$  asimptotik sonuçlara ulaşılmaktadır.

b.  $S_N$  yaklaşımında ise  $v$  özdeğerler eliptik fonksiyonların argümanında yer alan  $g$  ve diğer  $\mu_n, \mu_m$  değerlerine göre değerlendirilmektedir. Bu detaya burada yer vermeyeceğiz.

Sonuç olarak bulunan özdeğerler radyatif transfer denkleminin çözümü için kullanılacağından,

a.  $P_N$  yaklaşımı için;

$$L(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k (2m+1) P_m(\mu) A_m(v_k, g) e^{\sigma_T x / v_k}$$

b.  $S_N$  yaklaşımı için;

$$L(x, \mu) = L_0 \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k H(v_k, \mu) e^x$$

çözümlerine ulaşılır.

Son olarak anizotropik terimi de içeren  $HG$  faz fonksiyonunun, transport eşitliğinin çözümünde  $P_N$  ve  $S_N$  yaklaşımları ile yapılan hesaplamalarda uygun değerler verdiği ve bu sonuçtan  $HG$  faz fonksiyonunun radyatif transfer çözümünde kullanılabilir olduğu görüldü.

Tablo 4.1.  $c = 0.0$  için özdeğer spektrumu

$g$	$P_2$	$S_2$	$P_4$	$S_4$	$P_8$	$S_8$
<b>1.00</b>	$\pm 0.57735$	–	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	–	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	–
<b>0.75</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>0.50</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>0.25</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>0.00</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>-0.25</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>-0.50</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>-0.75</b>	$\pm 0.57735$	$\pm 0.57735$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$
<b>-1.00</b>	$\pm 0.57735$	–	$\pm 0.33998$ $\pm 0.86113$	–	$\pm 0.18343$ $\pm 0.52553$ $\pm 0.79666$ $\pm 0.96028$	–

Tablo 4.2.  $c = 0.25$  için özdeğer spektrumu

$g$	$P_2$	$S_2$	$P_4$	$S_4$	$P_8$	$S_8$
<b>1.00</b>	$\pm 0.76980$	–	$\pm 0.45330$ $\pm 1.14818$	–	$\pm 0.24457$ $\pm 0.70070$ $\pm 1.06222$ $\pm 1.28038$	–
<b>0.75</b>	$\pm 0.73960$	$\pm 0.96866$	$\pm 0.40848$ $\pm 1.04716$	$\pm 0.43998$ $\pm 1.12161$	$\pm 0.20607$ $\pm 0.59054$ $\pm 0.89269$ $\pm 1.10778$	$\pm 0.20863$ $\pm 0.59731$ $\pm 0.90277$ $\pm 1.11611$
<b>0.50</b>	$\pm 0.71269$	$\pm 0.74025$	$\pm 0.38554$ $\pm 0.98361$	$\pm 0.38753$ $\pm 0.98707$	$\pm 0.19621$ $\pm 0.56163$ $\pm 0.84883$ $\pm 1.03636$	$\pm 0.19625$ $\pm 0.56171$ $\pm 0.84895$ $\pm 1.03640$
<b>0.25</b>	$\pm 0.68853$	$\pm 0.69067$	$\pm 0.37485$ $\pm 0.94061$	$\pm 0.37490$ $\pm 0.94066$	$\pm 0.19305$ $\pm 0.55235$ $\pm 0.83434$ $\pm 0.99898$	$\pm 0.19305$ $\pm 0.55235$ $\pm 0.83434$ $\pm 0.99898$
<b>0.00</b>	$\pm 0.66666$	$\pm 0.66666$	$\pm 0.37092$ $\pm 0.91141$	$\pm 0.37092$ $\pm 0.91141$	$\pm 0.19220$ $\pm 0.54840$ $\pm 0.82430$ $\pm 0.98011$	$\pm 0.19220$ $\pm 0.54840$ $\pm 0.82430$ $\pm 0.98011$
<b>-0.25</b>	$\pm 0.64676$	$\pm 0.64610$	$\pm 0.36957$ $\pm 0.89268$	$\pm 0.36954$ $\pm 0.89267$	$\pm 0.19262$ $\pm 0.54493$ $\pm 0.81550$ $\pm 0.97123$	$\pm 0.19262$ $\pm 0.54493$ $\pm 0.81550$ $\pm 0.97123$
<b>-0.50</b>	$\pm 0.62853$	$\pm 0.62896$	$\pm 0.36727$ $\pm 0.88260$	$\pm 0.36662$ $\pm 0.88273$	$\pm 0.19394$ $\pm 0.54016$ $\pm 0.80934$ $\pm 0.96784$	$\pm 0.19392$ $\pm 0.54014$ $\pm 0.80933$ $\pm 0.96784$
<b>-0.75</b>	$\pm 0.61177$	$\pm 0.64947$	$\pm 0.36139$ $\pm 0.88070$	$\pm 0.36295$ $\pm 0.89057$	$\pm 0.19466$ $\pm 0.53589$ $\pm 0.80729$ $\pm 0.97004$	$\pm 0.19411$ $\pm 0.53608$ $\pm 0.80788$ $\pm 0.97084$
<b>-1.00</b>	$\pm 0.59628$	–	$\pm 0.35113$ $\pm 0.88937$	–	$\pm 0.18945$ $\pm 0.54276$ $\pm 0.82279$ $\pm 0.99178$	–

Tablo 4.3.  $c = 0.50$  için özdeğer spektrumu

$g$	$P_2$	$S_2$	$P_4$	$S_4$	$P_8$	$S_8$
<b>1.00</b>	$\pm 1.15470$	–	$\pm 0.67996$ $\pm 1.72227$	–	$\pm 0.36686$ $\pm 1.05106$ $\pm 1.59333$ $\pm 1.92057$	–
<b>0.75</b>	$\pm 1.03279$	$\pm 3.08636$	$\pm 0.51092$ $\pm 1.36111$	$\pm 0.62236$ $\pm 1.64306$	$\pm 0.23552$ $\pm 0.67133$ $\pm 1.00357$ $\pm 1.39003$	$\pm 0.24178$ $\pm 0.68925$ $\pm 1.02839$ $\pm 1.41381$
<b>0.50</b>	$\pm 0.94280$	$\pm 1.04496$	$\pm 0.44434$ $\pm 1.18796$	$\pm 0.44968$ $\pm 1.19690$	$\pm 0.21084$ $\pm 0.60094$ $\pm 0.89513$ $\pm 1.20760$	$\pm 0.21092$ $\pm 0.60115$ $\pm 0.89538$ $\pm 1.20764$
<b>0.25</b>	$\pm 0.87287$	$\pm 0.87940$	$\pm 0.41742$ $\pm 1.08156$	$\pm 0.41754$ $\pm 1.08164$	$\pm 0.20370$ $\pm 0.58123$ $\pm 0.87139$ $\pm 1.10371$	$\pm 0.20370$ $\pm 0.58123$ $\pm 0.87139$ $\pm 1.10371$
<b>0.00</b>	$\pm 0.81649$	$\pm 0.81649$	$\pm 0.40938$ $\pm 1.01137$	$\pm 0.40938$ $\pm 1.01137$	$\pm 0.20193$ $\pm 0.57529$ $\pm 0.86140$ $\pm 1.04223$	$\pm 0.20193$ $\pm 0.57529$ $\pm 0.86140$ $\pm 1.04223$
<b>-0.25</b>	$\pm 0.76980$	$\pm 0.76912$	$\pm 0.40890$ $\pm 0.96615$	$\pm 0.40883$ $\pm 0.96614$	$\pm 0.20311$ $\pm 0.57164$ $\pm 0.84981$ $\pm 1.00934$	$\pm 0.20311$ $\pm 0.57164$ $\pm 0.84981$ $\pm 1.00934$
<b>-0.50</b>	$\pm 0.73029$	$\pm 0.74752$	$\pm 0.40768$ $\pm 0.94208$	$\pm 0.40660$ $\pm 0.94326$	$\pm 0.20679$ $\pm 0.56531$ $\pm 0.83888$ $\pm 0.99658$	$\pm 0.20674$ $\pm 0.56527$ $\pm 0.83887$ $\pm 0.99658$
<b>-0.75</b>	$\pm 0.69631$	$\pm 1.14113$	$\pm 0.40141$ $\pm 0.94286$	$\pm 0.41998$ $\pm 0.99835$	$\pm 0.21098$ $\pm 0.56048$ $\pm 0.83704$ $\pm 1.00683$	$\pm 0.21028$ $\pm 0.56207$ $\pm 0.83995$ $\pm 1.01076$
<b>-1.00</b>	$\pm 0.66666$	–	$\pm 0.39257$ $\pm 0.99435$	–	$\pm 0.21181$ $\pm 0.60683$ $\pm 0.91991$ $\pm 1.10884$	–

Tablo 4.4.  $c = 0.75$  için özdeğer spektrumu

$g$	$P_2$	$S_2$	$P_4$	$S_4$	$P_8$	$S_8$
<b>1.00</b>	$\pm 2.30940$	–	$\pm 1.35992$ $\pm 3.44454$	–	$\pm 0.73373$ $\pm 2.10212$ $\pm 3.18666$ $\pm 3.84115$	–
<b>0.75</b>	$\pm 1.74574$	$\pm 2.91511$	$\pm 0.67984$ $\pm 2.07132$	$\pm 1.05366$ $\pm 3.66551$	$\pm 0.27428$ $\pm 0.77344$ $\pm 1.15043$ $\pm 2.07875$	$\pm 0.28728$ $\pm 0.80997$ $\pm 1.19585$ $\pm 2.16457$
<b>0.50</b>	$\pm 1.46059$	$\pm 1.91485$	$\pm 0.52188$ $\pm 1.65387$	$\pm 0.53296$ $\pm 1.67868$	$\pm 0.22772$ $\pm 0.64333$ $\pm 0.93633$ $\pm 1.65745$	$\pm 0.22785$ $\pm 0.64368$ $\pm 0.93667$ $\pm 1.65755$
<b>0.25</b>	$\pm 1.28102$	$\pm 1.30157$	$\pm 0.46877$ $\pm 1.42779$	$\pm 0.46898$ $\pm 1.42792$	$\pm 0.21550$ $\pm 0.61046$ $\pm 0.89702$ $\pm 1.43146$	$\pm 0.21550$ $\pm 0.61046$ $\pm 0.89702$ $\pm 1.43146$
<b>0.00</b>	$\pm 1.15470$	$\pm 1.15470$	$\pm 0.45594$ $\pm 1.28423$	$\pm 0.45594$ $\pm 1.28423$	$\pm 0.21265$ $\pm 0.60341$ $\pm 0.89143$ $\pm 1.28944$	$\pm 0.21265$ $\pm 0.60341$ $\pm 0.89143$ $\pm 1.28944$
<b>-0.25</b>	$\pm 1.05962$	$\pm 1.06295$	$\pm 0.46029$ $\pm 1.18878$	$\pm 0.46016$ $\pm 1.18880$	$\pm 0.21498$ $\pm 0.60353$ $\pm 0.88844$ $\pm 1.19709$	$\pm 0.21498$ $\pm 0.60353$ $\pm 0.88844$ $\pm 1.19709$
<b>-0.50</b>	$\pm 0.98473$	$\pm 1.12844$	$\pm 0.46852$ $\pm 1.13059$	$\pm 0.46750$ $\pm 1.13729$	$\pm 0.22247$ $\pm 0.60255$ $\pm 0.88369$ $\pm 1.14386$	$\pm 0.22239$ $\pm 0.60251$ $\pm 0.88368$ $\pm 1.14389$
<b>-0.75</b>	$\pm 0.92376$	$\pm 0.74364$	$\pm 0.47892$ $\pm 1.12118$	$\pm 0.57533$ $\pm 1.50618$	$\pm 0.23535$ $\pm 0.60837$ $\pm 0.89202$ $\pm 1.14431$	$\pm 0.23526$ $\pm 0.61379$ $\pm 0.90001$ $\pm 1.16307$
<b>-1.00</b>	$\pm 0.87287$	–	$\pm 0.51400$ $\pm 1.30191$	–	$\pm 0.27732$ $\pm 0.79453$ $\pm 1.20444$ $\pm 1.45182$	–

Tablo 4.5.  $c = 0.99$  için özdeğer spektrumu

$g$	$P_2$	$S_2$	$P_4$	$S_4$	$P_8$	$S_8$
<b>1.00</b>	$\pm 57.73502$	–	$\pm 33.99810$ $\pm 86.11363$	–	$\pm 18.34346$ $\pm 52.55324$ $\pm 79.66664$ $\pm 96.02898$	–
<b>0.75</b>	$\pm 11.37760$	$\pm 0.97790$	$\pm 0.98928$ $\pm 11.48062$	$\pm 3.00553$ $\pm 3.97730$	$\pm 0.32545$ $\pm 0.89908$ $\pm 1.38955$ $\pm 11.48062$	$\pm 0.35028$ $\pm 0.96524$ $\pm 1.47342$ $\pm 13.40815$
<b>0.50</b>	$\pm 8.12444$	$\pm 3.25565$	$\pm 0.62116$ $\pm 8.16776$	$\pm 0.64151$ $\pm 13.17655$	$\pm 0.24653$ $\pm 0.68710$ $\pm 0.98018$ $\pm 8.16777$	$\pm 0.24673$ $\pm 0.68763$ $\pm 0.98057$ $\pm 8.17797$
<b>0.25</b>	$\pm 6.65558$	$\pm 9.94915$	$\pm 0.52539$ $\pm 6.68407$	$\pm 0.52572$ $\pm 6.69180$	$\pm 0.22800$ $\pm 0.63718$ $\pm 0.91331$ $\pm 6.68407$	$\pm 0.22800$ $\pm 0.63719$ $\pm 0.91331$ $\pm 6.68407$
<b>0.00</b>	$\pm 5.77350$	$\pm 5.77350$	$\pm 0.50506$ $\pm 5.79672$	$\pm 0.50506$ $\pm 5.79672$	$\pm 0.22382$ $\pm 0.62734$ $\pm 0.90605$ $\pm 5.79672$	$\pm 0.22382$ $\pm 0.62734$ $\pm 0.90605$ $\pm 5.79672$
<b>-0.25</b>	$\pm 5.16914$	$\pm 7.59408$	$\pm 0.51732$ $\pm 5.19136$	$\pm 0.51714$ $\pm 5.19699$	$\pm 0.22757$ $\pm 0.63191$ $\pm 0.90758$ $\pm 5.19136$	$\pm 0.22756$ $\pm 0.63191$ $\pm 0.90758$ $\pm 5.19136$
<b>-0.50</b>	$\pm 4.72192$	$\pm 1.52666$	$\pm 0.54849$ $\pm 4.74729$	$\pm 0.54862$ $\pm 7.56553$	$\pm 0.24041$ $\pm 0.64273$ $\pm 0.91280$ $\pm 4.74730$	$\pm 0.24029$ $\pm 0.64268$ $\pm 0.91280$ $\pm 4.75299$
<b>-0.75</b>	$\pm 4.37374$	$\pm 0.43864$	$\pm 0.63397$ $\pm 4.41388$	$\pm 0.80964$ $\pm 1.03427$	$\pm 0.27088$ $\pm 0.68627$ $\pm 0.96589$ $\pm 4.41389$	$\pm 0.27307$ $\pm 0.69951$ $\pm 0.98254$ $\pm 4.93074$
<b>-1.00</b>	$\pm 4.09272$	–	$\pm 2.41006$ $\pm 6.10443$	–	$\pm 1.30033$ $\pm 3.72540$ $\pm 5.64741$ $\pm 6.80731$	–

## KAYNAKLAR

- Henye, L.G., Greenstein, J.L. 1941. Diffuse Radiation in the Galaxy. *Astrophysic Journal*, Vol: 93, p: 70-83.
- Herman. B. M., Browning. S. R., 1965. Numerical Solution to The Equation of Radiative Transfer. *Journal of Atmospheric Sciences*. Vol: 22, p: 559-566.
- Dave. J. V., 1975. A Direct Solution of The Spherical Harmonics Approximation to The RTD for an Arbitrary Solar Elevation. *Journal of Atmospheric Sciences*. Vol: 32, p:790-798.
- Fiveland. W. A., 1988. Three Dimensional Radiative Heat-Transfer Solutions By The Discrete Ordinates Method. *Journal of Thermophysics*. Vol: 2, No:4, p: 309-316.
- DeBarros, R.C., Larsen, E.W., 1990. *Nucl. Sci. Eng.* Vol:104, p: 199.
- Cheong, W., Prahl, S.A., Welch, A.J., 1990. A Review of the Optical Properties of Biological Tissue. *IEEE Journal Quant Elec.* Vol: 26 (12), p: 2166-2185.
- Yavuz, M., 1995. A One-D Simlified Discrete-Ordinates Method With No Spatial Truncation Error. *Ann Nucl Energy*; Vol:22, p:203.
- Lathrop, K.D., 2000. A Comparison of Angular Difference Schemes for One-Dimensional Spherical Geometry  $S_N$  Equation. *Nucl Sci Eng.* Vol: 134, p: 239.
- Lemonnier, D., Dez, V. Le., 2002. Discrete Ordinates Solution of RTD Across a Slab With Variable Refractive İndex. *JQSRT*; Vol: 73, p: 195-204.
- Haltrin, V. I., 2002. One-parameter two-term Henyey–Greenstein phase function for light scattering in seawater. *Optical Society of America*, Vol: 41, No: 6.
- Türeci, R.G., 2005. Nötron Transport Denkleminin HN Yöntemiyle Çözümü ve Uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara 166 s.
- Zhao, W., 2006. N T Approximation to Reflected Slab and Computation of The Critical Half Thicknesses. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol:101, p: 135-140.

- Kaşkaş, A. 2007. HN Yönteminin Düzlem Geometrideki Polarizasyon Problemlerine Uygulanması. Fırat Üniv. Fen ve Müh. Bil. Dergisi Vol:19 (4), p: 449-453.
- Öztürk H., Anlı F., Güngör S., 2007. "TN Method for the Critical Thickness of One-Speed Neutrons in a Slab with Forward and Backward Scattering", Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 105: 211-216.
- Tarvainen, T., Vauhkonen, M., Arridge, S.R., 2008. Gauss-Newton Reconstruction Method for Optical Tomography Using The Finite Element Solution of The RTD. JQSRT, Vol: 109, p:2767-2778.
- A. Kaşkaş., C. Tezcan., (2009). An Application of Transport Theory in Optical Oceanography: The Estimation of the Apparent Optical Properties Using Henyey-Greenstein Phase Function, Transport Theory and Statistical Physics. Vol: 38:6, p: 317-329.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı, soyadı : Nuran TAŞDELEN  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 1974 / Mersin - Tarsus  
Medeni hali : Evli  
Telefon : 0505 469 4078  
e-posta : tasdelennuran\_@hotmail.com

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	KSÜ / Fizik Bölümü	2017
Lisans	Gazi Üniversitesi / Fizik Öğretmenliği	1994
Lise	Tarsus Cengiz Topel Lisesi	1990

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1994 – Devam Ediyor	Kahramanmaraş	Fizik Öğretmenliği

### Yabancı Dil

İngilizce

### Hobiler

Sanatsal etkinliklere gitmek (Tiyatro, Sinema ...), Kitap okumak