

T.C.  
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI FARK DİZİ UZAYLARININ  
TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Tayfur AKBAŞ

ŞUBAT 2018

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI FARK DİZİ UZAYLARININ  
TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Hazırlayan  
Tayfur AKBAŞ

Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Jüri üyeleri

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR  
Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ  
Yrd. Doç. Dr. Fahrettin ÖZBEY

ŞUBAT 2018

Tayfur AKBAŞ tarafından hazırlanan “**Lucas Sayıları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Fark Dizi Uzaylarının Topolojik ve Geometrik Özellikleri**” adlı tez çalışması 07/02/ 2018 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

(Başkan)

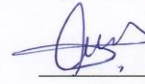
Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

(Danışman)

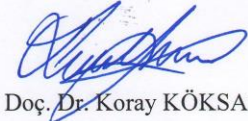
Yrd. Doç. Dr. Fahrettin ÖZBEY

(Üye)

**İmza**



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 13/04/ 2018. gün ve 13/01 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Koray KÖKSAL

Enstitüsü Müdürü

## ÖZET

### LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI FARK DİZİ UZAYLARININ TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Tayfur AKBAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Ocak 2018, 36 sayfa

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konumuza temel oluşturan kavramlar açıklanmıştır. İkinci bölümde bu kavramlarla ilgili literatürde günümüze kadar yapılan araştırmalardan bahsedilmiş ve bu çalışmaların bir kısmına atıf yapılmıştır. Üçüncü bölümde çalışmanın devamında kullanacağımız temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilerek, Banach uzayların bazı geometrik özelliklerinden söz edilmiştir. Temel sonuçlarımızın yer aldığı dördüncü bölümde sonsuz üçgensel matrisler ve modülüs fonksiyonu yardımıyla yeni fark dizi uzayları oluşturularak, bu uzayların topolojik ve geometrik yapısı incelenmiştir. Son bölümde, elde edilen bulgular değerlendirilip bunlara ilaveten neler yapılabileceği ifade edilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Banach-Saks Özelliği, Fark Dizi Uzayı, Lucas Sayıları, Modülüs Fonksiyonu, Sonsuz Matris

## ABSTRACT

### TOPOLOGICAL AND GEOMETRICAL PROPERTIES OF SOME DIFFERENCE SEQUENCE SPACES DEFINED BY LUCAS NUMBERS

Tayfur AKBAŞ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

January 2018, 36 pages

In the first part of this work, the concepts of our topic are explained basically. In the second part, researches in literature related to these concepts are mentioned and some of these studies are attributed. In the third chapter, some geometrical properties of Banach spaces are mentioned by giving basic definitions, theorems and inequalities that we will use in the sequel of work. In the fourth section where our basic results are included, new difference sequence spaces are established by means of infinite triangular matrices and modulus function and also the topological and geometrical structure of these spaces are investigated. In the last part, by considering the findings, it is stated what can be done in addition to all these.

**Keywords:** Banach-Saks Property, Difference Sequence Space, Lucas Numbers, Modulus Function, Infinite Matrice.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasından yazımına kadar, her aşamasında bana yardımcı olan, beni yönlendiren kıymetli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ' a sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren, cesaretlendiren ve hep yanımda olan değerli aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

|                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>ÖZET</b> .....                                                                                                              | i   |
| <b>ABSTRACT</b> .....                                                                                                          | ii  |
| <b>TEŞEKKÜR</b> .....                                                                                                          | iii |
| <b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....                                                                                                | iv  |
| <b>SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....                                                                                       | v   |
| <b>1. GİRİŞ</b> .....                                                                                                          | 1   |
| <b>2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b> .....                                                                                              | 2   |
| <b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....                                                                                             | 4   |
| 3.1. Temel Tanım ve Teoremler .....                                                                                            | 4   |
| 3.2. Bazı Geometrik Özellikler .....                                                                                           | 7   |
| <b>4. BULGULAR</b> .....                                                                                                       | 10  |
| 4.1. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_{\infty}(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Lucas Fark Dizi Uzayları.....                 | 10  |
| 4.2. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_{\infty}(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri .....  | 11  |
| 4.3. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Uzayında p Tipi Banach-Saks Özelliği.....                                                 | 16  |
| 4.4. $l(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_{\infty}(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ Lucas Fark Dizi Uzayları .....    | 19  |
| 4.5. $l(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_{\infty}(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ Uzaylarının Topolojik Yapısı..... | 20  |
| 4.6. $l(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ Uzayının Geometrik Yapısı.....                                                      | 25  |
| <b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....                                                                                              | 29  |
| <b>KAYNAKLAR</b> .....                                                                                                         | 30  |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....                                                                                                          | 36  |

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                   |                                              |
|-------------------|----------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$      | Doğal sayılar kümesi                         |
| $\mathbb{R}$      | Reel sayılar kümesi                          |
| $\mathbb{C}$      | Kompleks sayılar kümesi                      |
| $w$               | Reel (yada kompleks) terimli dizilerin uzayı |
| $(BS_p)$          | p tipi Banach-Saks özelliği                  |
| $\xrightarrow{w}$ | Zayıf yakınsaklık                            |
| $f_n$             | Fibonacci sayıları                           |
| $L_n$             | Lucas sayıları                               |

## 1. GİRİŞ

Fransız Matematikçi Edward Lucas tarafından tanımlanan Lucas sayı dizisi, Fibonacci sayı dizisindeki  $f_0 = f_1 = 1$   $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 1$  başlangıç koşullarının,  $L_0 = 2, L_1 = 1$  şeklinde değiştirilmesiyle  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n \geq 1$  bağıntısı kullanılarak Fibonacci tekraralama bağıntısına benzer bir şekilde elde edilmiştir. Bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu süregelen araştırmalar kanıtlamıştır.

Fark dizi uzayı kavramı (Kızmaz 1981) tarafından  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi ve  $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$  olmak üzere  $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$  için

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x \in X\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu kavram (Et ve Çolak 1995) tarafından  $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$  olmak üzere genelleştirilmiş ve sonrasında (Et ve Nuray 2001)  $X$  herhangi bir dizi uzayı olmak üzere bu uzayları  $X(\Delta^m)$  dizi uzaylarına genelleştirerek bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Kızmaz ve beraberindeki yazarlardan farklı olarak (Altay ve Başar 2003) farkları  $l_p$  uzayı içinde yer alan dizilerin oluşturduğu uzayı,

$$\Delta = (\delta_{nk}) = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{n-k}, & n-1 \leq k \leq n \\ 0, & 0 \leq k \leq n-1 \text{ yada } k > n \end{array} \right\}$$

matrisinin etki alanı yardımıyla

$$bv_p = (l_p)_\Delta = \{x \in w : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty\}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Daha sonra (Başar vd. 2008) bu uzayı  $bv(v, p)$  uzayına genellemişlerdir.

Üçgensel bir matrisin etki alanı yardımıyla yeni bir dizi uzayı oluşturma fikri, son yıllarda oldukça ilgi çekicidir. Bunun yanı sıra, geometrinin analizle anılmaya başlandığı tarihten bu yana çalışmakta olan ilgi çekici bir konu da dizi uzaylarının geometrik özellikleridir.

Ayrıca modülüs fonksiyonu kavramı ilk olarak (Nakano 1953) tarafından verilmiştir ve bu konu pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, Lucas sayıları kullanılarak oluşturulan üçgensel bir matrisin etki alanı yardımıyla ve modülüs fonksiyonu da kullanılarak yeni fark dizi uzayları tanımlanacaktır. Sonrasında bu uzaylara ilişkin bazı topolojik ve geometrik özellikler incelenecektir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Üçgensel bir matrisin etki alanı kullanılarak dizi uzayı oluşturma yaklaşımı birçok yazar tarafından kullanılmaktadır. Özellikle Fibonacci sayıları yardımıyla tanımlanan matrislerin etki alanları ile bu tür çalışmalar yapılmıştır. Örneğin (Kara ve Başarır 2012; Kara 2013; Debnath ve Saha 2014; Kara ve İlkhan 2016; Başarır vd. 2013; Alotaibi vd. 2015; Candan 2015; Candan ve Kayaduman 2015; Candan ve Kara 2015; Kara vd. 2013) bu çalışmalardan bazılarıdır.

Fibonacci sayılarının yakın akrabası olmasına rağmen, Lucas sayıları da farklı ve ilginç özelliklere sahiptir. Bu sayılara ilişkin özelliklerin ve bağıntıların yer aldığı kaynaklar literatürde mevcuttur (Vajda 1989; Koshy 2001; Kalman ve Mena 2003).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f_k^2 &= f_n \cdot f_{n+1}, n \geq 1, \\ \sum_{k=1}^n f_k &= f_{n+2} - 1, n \geq 1, \\ \sum_{k=1}^n L_{2k} &= L_{2n+1} - 1, \\ \sum_{k=1}^n L_k &= L_{n+1} - 3,\end{aligned}$$

Ayrıca fark dizi uzayları konusu yıllardır birçok yazar tarafından çalışılmıştır ve halen çalışılmaya devam edilmektedir. Bunlardan bazıları (Çolak ve Et 1997; Et ve Esi 2000; Tripathy vd. 2008; Bektaş vd. 2004; Et ve Başarır 1997; Aydın ve Başar 2004; Mursaleen ve Noman 2010; Et 2000; Altay ve Polat 2006; Altay ve Başar 2005a, 2005b, 2006, 2007) şeklindedir.

Fark dizi uzayı oluştururken kullanılan kavramlardan biri de modülüs fonksiyonudur. Bu fonksiyon yardımıyla oluşturulmuş fark dizi uzayları literatürde mevcuttur. Örneğin (Altın ve Et 2005; Et 2006; Altın 2009; Altın ve Altınok 2003; Et 2003; Esi ve Tripathy 2008).

Fark dizi uzaylarının geometrik özelliklerinin incelenmesi konusu da popüler olup buna ilişkin (Mursaleen vd. 2007)  $m(\phi, p, \Delta^{(r)})$  fark dizi uzayını tanımlayarak bazı geometrik eşitsizlikleri ele almışlardır. (Karakaş vd. 2013) Lacunary dizisi içeren genelleştirilmiş fark dizi uzayının geometrik yapısını incelemişlerdir. (Et vd. 2014) de la Vallee-Poussin ortalaması yardımıyla tanımladıkları fark dizi uzayına ilişkin bazı geometrik özellikleri araştırmışlardır.

(Aydın ve Başar 2014) genelleştirilmiş fark matrisi  $B(r, s)$ ' nin etki alanı yardımıyla mutlak olmayan tipten  $\hat{l}(p)$  uzayını oluşturarak, bu uzayın rotundluğunu çalışmışlardır. (Raj vd. 2015) modülüs fonksiyonu kullanarak Fibonacci fark dizi uzayı tanımlamışlardır ve geometrik özelliğini incelemişlerdir. Buna benzer bir çalışma (Kılınç ve Candan 2017) tarafından yapılmıştır.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 3.1.1.**  $X \neq \emptyset$  bir cümle ve  $K$  kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot: K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $X$  cümlesine  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) adı verilir (Çakar 2007). Her  $x, y, z \in X$  için ve her  $\lambda, \mu \in K$  için

**L1)**  $x + y = y + x$

**L2)**  $(x + y) + z = x + (y + z)$

**L3)**  $x + \theta = x$  olacak şekilde bir  $\theta \in X$  vardır.

**L4)** Her bir  $x \in X$  için  $x + (-x) = \theta$  olacak şekilde bir  $(-x) \in X$  vardır.

**L5)**  $1 \cdot x = x$

**L6)**  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

**L7)**  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

**L8)**  $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

**Tanım 3.1.2.** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $|x_n| \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  pozitif reel sayısı varsa  $(x_n)$  dizisine sınırlı dizi denir (Dernek 2009).

**Tanım 3.1.3.**  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise  $f'$  ye bir modülüs fonksiyonu denir. Her  $u, v \in [0, \infty)$  için,

i.  $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii. Her  $u \geq 0, v \geq 0$  için  $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$

iii.  $f$  artandır.

iv.  $f$  sıfırda sağdan süreklidir ( Nakano 1953).

(ii) ve (iv) özelliklerinden dolayı  $f, [0, \infty)$  üzerinden her yerde süreklidir. Modülüs fonksiyonu sınırlı ve sınırsız olabilir.

**Tanım 3.1.4.**  $X$  bir lineer topolojik uzay,  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $g$  aşağıdaki şartları sağlıyor ise  $g$  ye bir paranorm,  $(X, g)$  ikilisine paranormlu uzay denir (Choudary ve Nanda 1989).

i.  $g(\theta) = 0,$

ii.  $g(x) = g(-x),$

iii.  $g(x + y) \leq g(x) + g(y),$

iv.  $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$  ve  $x, x_0 \in X$  için  $\lambda \rightarrow \lambda_0, x \rightarrow x_0 \rightarrow \lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$ .

**Tanım 3.1.5.**  $X$  bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $X$  üzerinde norm ve normla birlikte  $X$  vektör uzayına bir normlu uzay denir.  $(X, \|\cdot\|)$  ile gösterilir.  $X$  normlu bir lineer uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  in bir elemanına yakınsıyorsa  $X$  e Banach uzay denir (Bayraktar 2006).

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Tanım 3.1.6**  $X$  bir dizi uzayı olsun.  $X$  bir Banach uzayı ve  $\tau_k(x): X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) dönüşümü sürekli ise  $X$  e bir  $BK$ -uzayı denir (Choudary ve Nanda 1989).

**Tanım 3.1.7.**  $X$  ve  $Y$ , aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer  $x_1, x_2 \in X$  ve  $a_1, a_2$  skalerleri için

$$T(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 T x_1 + a_2 T x_2$$

oluyorsa  $T : X \rightarrow Y$  dönüşümü lineerdir denir.  $T : X \rightarrow Y$  lineer dönüşümü, bire-bir ve örten ise bu  $T$  dönüşümüne bir izomorfizm denir. Bu durumda  $X$  ve  $Y$  uzayları lineer olarak izomorfik uzaylar adını alır ve  $X \cong Y$  yazılır (Bayraktar 2006).

**Tanım 3.1.8.**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $x_0 \in X$  sabit bir nokta ve  $r > 0$  bir reel sayı olsun.

$$B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \text{ kümesine açık yuvar,}$$

$$\tilde{B}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \text{ kümesine kapalı yuvar,}$$

$$S(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\} \text{ kümesine küre adı verilir (Bayraktar 2006).}$$

**Tanım 3.1.9.** Normlu bir  $X$  uzayında  $(x_n)$  dizisi verilmiş olsun. Eğer her  $f \in X'$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa  $(x_n)$  dizisi  $x$ 'e zayıf yakınsaktır denir ve  $x_n \xrightarrow{w} x$  şeklinde yazılır (Kreyszig 1978).

**Tanım 3.1.10.**  $(x_n)$  dizisi verilsin,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n < x_{n+1}$  ise monoton artan,  $x_n \leq x_{n+1}$  ise azalmayan dizi  $x_n > x_{n+1}$  ise monoton azalan,  $x_n \geq x_{n+1}$  ise artmayan dizi monoton artan veya azalan diziye kısaca monoton dizidir (Dernek 2009).

**Tanım 3.1.11.**  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(n) = a_n$  ve  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $k(n) = k_n$  dizileri verilsin ve  $k_n$  artan olsun.  $a \circ k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(k(n)) = a_{k_n}$  bileşke fonksiyonuna  $a$  dizisinin bir alt dizisi denir (Dernek 2009).

**Tanım 3.1.12.**  $n, k \in \mathbb{N}$  için  $a_{nk} \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $(a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$  ifadesine bir sonsuz matris denir ve

$$A = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir (Başar 2011).

**Tanım 3.1.13.** Kompleks terimli tüm  $x = (x_k)$ ,  $(k = 1, 2, 3, \dots)$  dizilerinin cümlesini  $w$  ile göstereceğiz.  $x = (x_k)$ ,  $y = (y_k)$  ve  $\alpha$  bir skaler olmak üzere;

$$\begin{aligned} x + y &= (x_k) + (y_k) \\ \alpha x &= (\alpha x_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında  $w$  bir lineer uzaydır.  $w$ 'nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir (Başar 2011).

**Teorem 3.1.14.(Minkowski Eşitsizliği)**  $p \geq 1$ ,  $x = (\xi_j)$  ve  $y = (\zeta_j)$  dizileri  $\sum |\xi_j|^p < \infty$ ,  $\sum |\zeta_j|^p < \infty$  şartlarını sağlamak üzere,

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \zeta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^p \right)^{1/p}$$

Minkowski eşitsizliği sağlanır (Bayraktar 2006).

**Tanım 3.1.15.** Fibonacci sayı dizisi  $f_0 = 0$  ve  $f_1 = f_2 = 1$  başlangıç koşulları ile verilen ve genel terimi

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

olan bir dizidir. Burada

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

sayıları Fibonacci sayı dizisini oluşturur.

Benzer şekilde Lucas sayı dizisi  $L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  başlangıç koşulları ile verilen ve genel terimi

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$$

olan bir dizidir. Bu sayı dizisi

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \dots$$

şeklinde oluşmuştur (Karabudak 2016).

**Tanım 3.1.16.**  $(p_k)$  kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve  $H = \sup p_k$  olsun. Bu takdirde  $C = \max\{1, 2^{H-1}\}$ ,  $t_k = \frac{p_k}{H} \leq 1$  ve  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C. (|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}) \quad (3.1)$$

ve

$$|a_k + b_k|^{t_k} \leq |a_k|^{t_k} + |b_k|^{t_k} \text{ eşitsizliği sağlanır (Maddox 1967).}$$

### 3.2. Bazı Geometrik Özellikler

Genellikle  $l(p)$ - tipi uzaylar  $l(p)$  ve  $l_p$  uzaylarının özelliklerinden dolayı birçok uygulamaya sahiptir. (Kamthan ve Gupta 1981) zengin geometrik özelliklere sahip Orlicz uzayların alt uzaylarının  $l_p$  uzayına izomorf olduğunu göstermiştir. Ayrıca  $l_p$  uzayı  $1 < p < \infty$  için yansılmalı ve konveks olduğundan bu uzayların geometrik yapısını düşünmek doğaldır.

Son yıllarda, topolojik ve diğer bazı alışılmış özelliklerine ilaveten dizi uzaylarının geometrik özelliklerinin araştırılması büyük ilgi göstermektedir. Literatürde farklı dizi uzaylarının geometrik özellikleriyle ilgili birçok çalışma bulunmaktadır.

Şimdi Banach uzayların birkaç geometrik özelliğini açıklayacağız.

**Tanım 3.2.1.** Herhangi bir  $\varepsilon \in (0,1]$  için  $\|x\| = 1, \|y\| = 1$  ve  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  ile birlikte  $x, y \in X$  iken  $\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \leq 1 - \delta$  olacak şekilde  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sayısı mevcutsa  $X$  normlu uzayına düzgün konvektir denir (Chidume 1965).

**Teorem 3.2.1.**  $1 < p < \infty$  için  $L_p$  uzayları düzgün konvektir (Chidume 1965).

**Tanım 3.2.2.**  $X$  bir normlu uzay olmak üzere  $\forall x, y \in X, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$  için

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1, (\forall \lambda \in (0,1))$$

oluyorsa  $X$  normlu uzayına kesin konvektir denir (Chidume 1965).

**Teorem 3.2.2.** Her düzgün konveks uzay aynı zamanda kesin konvektir (Chidume 1965).

**Örnek 3.2.1.**  $l_1$  uzayı kesin konveks değildir. Bunu görmek için  $\varepsilon = 1$  alalım.  $\bar{x} = (1,0,0, \dots)$  ve  $\bar{y} = (0, -1,0,0, \dots)$  seçelim. Açıkça  $\bar{x}, \bar{y} \in l_1$  dir ve

$$\|\bar{x}\| = 1 = \|\bar{y}\|$$

ve

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = 2 > \varepsilon$$

olur. Böylece

$$\left\| \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right\| = 1$$

elde edilir ve bu  $l_1$  uzayının kesin konveks olmadığını gösterir (Chidume 1965).

**Tanım.3.2.3.**  $X$  bir Banach uzayı olsun.  $X$  uzayındaki her sınırlı  $\{x_n\}$  dizisi için

$$t_k(z) = \frac{1}{k}(z_1 + z_2 + \dots + z_k)$$

şeklinde tanımlı  $\{t_k(z)\}$  dizisi  $X$  uzayında yakınsak olacak şekilde  $(x_n)$  dizisinin  $z = (z_n)$  alt dizisi mevcutsa  $X$  uzayı Banach-Saks özelliğine sahiptir denir (Knaust 1992).

**Tanım.3.2.4.**  $X$  bir Banach uzayı olsun. Sıfıra zayıf yakınsak her  $(x_n) \subset X$  dizisi,  $\exists C > 0$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$\left\| \sum_{l=0}^n x_{k_l} \right\| < C(n+1)^{1/p}$$

olacak şekilde bir  $(x_{k_l})$  alt dizine sahipse  $X$  uzayı p-tipi Banach-Saks özelliğine sahiptir denir (Knaust 1992).

**Tanım 3.2.5.**  $X$  bir banach uzayı olsun.  $X$  deki her  $(x_n)$  zayıf sıfır dizisinin

$$\{1/n (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\}$$

aritmetik ortalama dizisi norma göre yakınsak olacak şekilde bir  $(Z_n)$  alt dizisi varsa  $X$  Banach uzayı zayıf Banach-Saks özelliğine sahiptir denir (Cui vd. 2000).

**Tanım 3.2.6.**  $X$  bir Banach uzay olsun.  $X'$  in zayıf kompakt konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen öz- dönüşüm bir sabit noktaya sahipse  $X$  Banach uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Garcia-Falset 1994).

**Tanım 3.2.7.** Bir  $X$  Banach uzayına ait  $R(x)$  katsayısı

$$R(x) = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n + x\| : (x_n) \subset B(x), x_n \xrightarrow{w} 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Garcia-Falset 1994).

**Teorem 3.2.3.**  $R(x) < 2$  şartını sağlayan bir  $X$  Banach uzayı zayıf sabit nokta özelliğini sağlar (Garcia-Falset 1997).

## 4. BULGULAR

### 4.1. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Lucas Fark Dizi Uzayları

(Karakaş ve Metin Karakaş 2017)  $\forall n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  için Lucas sayı dizisi yardımıyla  $\hat{E} = (\hat{L}_{nk})$  matrisini

$$\hat{L}_{nk} = \begin{cases} -\frac{L_n}{L_{n-1}}, & k = n - 1 \\ \frac{L_{n-1}}{L_n}, & k = n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımladılar. Bu matrisin tersini

$$\hat{L}^{-1} = \begin{cases} \frac{L_n^2}{L_{k-1}L_k}, & n \geq k > 0 \\ 0, & n < k \end{cases}$$

ile ve bir  $x = (x_n)$  dizisinin  $\hat{E}$ -dönüşümünü

$$y_n = \hat{E}_n(x) = \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1}, n \geq 1 \quad (4.2)$$

eşitliğiyle verdiler.

Çalışmamızın bu kısmında yukarıdaki matrisi ve modülüs fonksiyonunu kullanarak

$$l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u) = \left\{ x \in w: \sum_n \left[ u_n F_n \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) \right]^{p_n} < \infty \right\}$$

ve

$$l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u) = \left\{ x \in w: \sup_n \left[ u_n F_n \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) \right]^{p_n} < \infty \right\}$$

uzaylarını tanımlayalım.

Burada  $\mathcal{F} = (F_n)$  modülüs fonksiyonlar dizisi,  $p = (p_n)$  pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve  $u = (u_n)$  kesin pozitif reel sayılar dizisidir.

#### 4.2. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ ve $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Uzaylarının Bazı Topolojik Özellikleri

**Teorem 4.2.1.**  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  ve  $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayları  $\mathbb{C}$  kompleks cismi üzerinde lineer uzaylardır.

**İspat**  $x, y \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  olsun. Bu takdirde

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) \right]^{p_n} < \infty$$

ve

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right) \right]^{p_n} < \infty$$

olur.  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  için  $|\lambda| \leq K_\lambda$  ve  $|\mu| \leq N_\mu$  olacak şekilde  $K_\lambda$  ve  $N_\mu$  tamsayıları vardır. Modülüs fonksiyonunun tanımı ve (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[ u_n F_n \left( |\lambda| \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) + |\mu| \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right) \right) \right]^{p_n} \\ & \leq \sum_n \left[ u_n F_n \left( |\lambda| \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} + \sum_n \left[ u_n F_n \left( |\mu| \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ & \leq C \cdot K_\lambda^H \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ & \quad + C \cdot K_\mu^H \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir ki bu  $\lambda x + \mu y \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  olduğunu gösterir.  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayı bir lineer uzaydır.  $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayının lineer uzay olduğu benzer şekilde ispatlanabilir.

**Teorem 4.2.2.**  $\mathcal{F} = (F_n)$  modülüs fonksiyonlar dizisi,  $p = (p_n)$  sınırlı pozitif reel sayılar dizisi ve  $u = (u_n)$  kesin pozitif reel sayı dizisi olsun. O halde  $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$  ve  $\mu = \max\{1, H\}$  olmak üzere  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayı bir paranormlu uzaydır ve üzerinde

$$g(x) = \sup_n \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} < \infty$$

paranormu tanımlıdır.

**İspat**  $\forall x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  için  $g(-x) = g(x)$  dir. Ayrıca  $x = 0$  için

$\frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} = 0$  olduğu açıktır.  $\frac{p_n}{\mu} \leq 1$  olduğundan Minkowsky eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \left( \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right) + \left( \frac{L_{n-1}}{L_n}y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}y_{n-1} \right) \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \\ & \leq \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right| \right) + u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \\ & \leq \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} + \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}y_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \end{aligned}$$

buluruz. O halde  $g$  alt toplamsaldır. Şimdi herhangi bir  $\alpha \in \mathbb{C}$  sayısı gözönüne alalım. Buradan  $C_\alpha$  sayısı,  $|\alpha| \leq C_\alpha$  şartını sağlayan bir

$$\begin{aligned} g(\alpha x) &= \sup_n \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \alpha \left( \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right) \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \\ &\leq C_\alpha^{\frac{H}{\mu}} g(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi  $g(x) = 0$  olmak üzere herhangi bir sabit  $x$  için  $\alpha \rightarrow 0$  olsun.  $|\alpha| < 1$  için tanımdan,  $n > n_0(\varepsilon)$  için,

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon \quad (4.3)$$

bulunur. Aynı zamanda  $\alpha$  yeterince küçük seçilecek  $1 \leq n < n_0$  için ve  $F_K$  sürekli olduğundan

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n}x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}}x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon \quad (4.4)$$

dir. Dolayısıyla (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden  $\alpha \rightarrow 0$  iken  $g(\alpha x) \rightarrow 0$  olur ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.3.**  $\mathcal{F} = (F_n)$  modül fonksiyonlar dizisi,  $p = (p_n)$  ve  $q = (q_n)$  dizileri

$0 \leq p_n \leq q_n < \infty$  şartını sağlayan sınırlı, pozitif reel sayı dizileri olsunlar. O halde  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u) \subset l(\hat{E}, \mathcal{F}, q, u)$  dir.

**İspat**  $x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  için  $\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$  dir. Bu ise yeterince büyük  $n$  değerleri için, yeni  $n_0 \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $n \geq n_0$  için,

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \leq 1$$

olduğunu gösterir.  $p_n \leq q_n$  ve  $F_n$  artan fonksiyon olduğundan

$$\sum_{n \geq n_0} \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{q_n} \leq \sum_{n \geq n_0} \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

olup  $x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, q, u)$  elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.2.4.**  $\mathcal{F} = (F_n)$  modülüs fonksiyon dizisi ve  $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_n(t)}{t} > 0$  olsun. O halde  $l(\hat{E}, p, u) \subseteq l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  dir.

**İspat**  $Q > 0$  olsun.  $Q$ ' nun tanımından  $\forall t > 0$  için  $F_n(t) \geq Q(t)$  olur.  $Q > 0$  olduğundan  $\forall t > 0$  için  $t \leq \frac{1}{Q} F_n(t)$  dir. Şimdi  $x \in l(\hat{E}, p, u)$  olsun. Böylece

$$\sum_n \left[ u_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \leq \frac{1}{Q} \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n}$$

olup bu  $x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  olduğunu ifade eder ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.5.**  $\mathcal{F}' = (F'_n)$  ve  $\mathcal{F}'' = (F''_n)$  iki modülüs fonksiyon dizisi olmak üzere

$$l(\hat{E}, \mathcal{F}', p, u) \cap l(\hat{E}, \mathcal{F}'', p, u) \subseteq l(\hat{E}, \mathcal{F}' + \mathcal{F}'', p, u)$$

dir.

**İspat**  $x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}', p, u) \cap l(\hat{E}, \mathcal{F}'', q, u)$  olsun. Bu takdirde

$$\sum_n \left[ u_n F'_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

ve

$$\sum_n \left[ u_n F_n'' \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[ u_n (F_n' + F_n'') \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ & \leq \mu \left\{ \sum_n \left[ u_n (F_n') \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right\} + \mu \left\{ \left[ u_n (F_n'') \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right\} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\sum_n \left[ u_n (F_n' + F_n'') \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

Yani  $x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}' + \mathcal{F}'', p, u)$  elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

**Teorem 4.2.6.**  $\mathcal{F} = (F_n)$  ve  $\mathcal{F}' = (F_n')$  iki modülüs fonksiyon dizisi olmak üzere,

$$l(\hat{E}, \mathcal{F}', p, u) \subseteq l(\hat{E}, \mathcal{F} \circ \mathcal{F}', p, u)$$

dir.

**İspat**  $\varepsilon > 0$  olsun  $0 \leq t \leq \delta$  için  $F_n(t) < \varepsilon$  olacak şekilde  $0 < \delta < 1$  seçelim.

$y_n = \left[ u_n F_n' \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]$  olsun ve

$$\sum_n [F_n(y_n)]^{p_n} = \sum_{y_n \leq \delta} [F_n(y_n)]^{p_n} + \sum_{y_n > \delta} [F_n(y_n)]^{p_n}$$

olduğunu düşünelim.  $F_n$  sürekli olduğundan

$$\sum_{y_n \leq \delta} [F_n(y_n)]^{p_n} < \varepsilon^H \quad (4.5)$$

ve

$y_n > \delta$  için  $y_n < \frac{y_n}{\delta} \leq 1 + \frac{y_n}{\delta}$  olsun.

tanımdan  $y_n > \delta$  için  $F_n(y_n) < 2F_n(1) \frac{y_n}{\delta}$  olup buradan

$$\sum_{y_n > \delta} [F_n(y_n)]^{p_n} \leq \max(1, (2F_n(1)\delta^{-1})^H) \sum_n [y_n]^{p_n} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.5) ve (4.6)' dan  $l(\hat{E}, \mathcal{F}', p, u) \subseteq l(\hat{E}, \mathcal{F} \circ \mathcal{F}', p, u)$  elde edilir.

Şimdi vereceğimiz teorem kolayca kanıtlanabileceğinden ispatsız olarak ifade edeceğiz.

**Teorem 4.2.7.**  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  olsun.  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  ve  $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$

$$\|x\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} = \sum_n \left( \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu}$$

ve

$$\|x\|_{l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} = \sup_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n}$$

normlarına göre  $BK$  uzayıdır.

**Uyarı 4.2.8.**  $|x| = |x_n|$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  olmak üzere,  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  ve  $l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayları mutlak olmayan tipten dizi uzaylarıdır. Gerçekten bu uzaylar üzerinde mutlak olma özelliği sağlanmaz, yani her iki uzaydaki en az bir dizi için

$$\|x\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} \neq \| |x| \|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)}$$

ve

$$\|x\|_{l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} \neq \| |x| \|_{l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)}$$

dir.

**Teorem 4.2.9.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  için mutlak olmayan tipten  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  dizi uzayı  $l_p$  uzayına lineer izomorftur.

**İspat** İki uzay arasında 1:1 örten lineer bir dönüşümün varlığını göstermek yeterlidir. (4.2)

eşitliğiyle tanımlı  $R: l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u) \rightarrow l_p$ ,  $x \rightarrow y = Rx$  dönüşümünü düşünelim. O halde

$\forall x \in l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  için  $Rx = y = \hat{E}x \in l_p$  dir. Ayrıca  $R$ 'nin lineer olduğu açıktır. Bununla birlikte  $x = 0$  iken  $Rx = 0$  olduğu aşıkardır ve buradan  $R$  dönüşümü 1:1 dir.

Şimdi  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  için  $y = (y_n) \in l_p$  olduğunu kabul edelim ve  $x = (x_n)$  dizisini

$$x_n = \sum_{j=1}^n \frac{L_n^2}{L_{j-1}L_j} y_j$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde  $p = \infty$  ve  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  olması halinde

$$\begin{aligned} \|x\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} &= \sum_n \left( \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \\ &= \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} \sum_{j=1}^n \frac{L_n^2}{L_{j-1}L_j} y_j - \frac{L_n}{L_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{L_{n-1}^2}{L_{j-1}L_j} y_j \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/\mu} \\ &= \|y\|_p < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_\infty(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} &= \sup_n \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ &= \|y\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak  $R$  dönüşümü 1:1 örten ve lineer olup  $l_p$  ile  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzaylarının lineer izomorf olduğu görülür.

#### 4.3. $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$ Uzayında $p$ Tipi Banach-Saks Özelliği

Teorem 4.2.7.' den  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayının bir Banach uzay olduğu bilinmektedir. Şimdi bu uzayın  $p$  tipi Banach Saks özelliğini sağladığını gösterelim.

**Teorem.4.3.1.**  $\forall k \in \mathbb{N}$  ve  $1 < p_k \leq H < \infty$  olmak üzere  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  dizi uzayı  $(BS_p)$  özelliğine sahiptir.

**İspat**  $(\varepsilon_n)$  dizisi,  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$  olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve  $(x_n)$ ,  $B(l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u))$  yuvarında sıfıra zayıf yakınsak bir dizi olsun.  $x_0 = 0$  ve  $z_1 = x_{n_1} = x_1$  alalım. Bu takdirde

$$\left\| \sum_{i=s_1+1}^{\infty} z_1(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $s_1 \in \mathbb{N}$  mevcuttur.  $x_n \xrightarrow{w} 0$  iken  $x_n \rightarrow 0$  olduğundan  $n \geq n_2$  için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_1} x_n(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $n_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Şimdi  $z_2 = x_{n_2}$  alalım.

Bu takdirde

$$\left\| \sum_{i=s_2+1}^{\infty} z_2(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde  $s_1 < s_2 \in \mathbb{N}$  mevcuttur.  $x_n \rightarrow 0$  olduğundan  $n \geq n_3$  için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_2} x_n(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde  $n_2 < n_3 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu şekilde devam edilirse  $z_j = x_{n_j}$  olmak üzere  $n \geq n_j$  için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_j} x_n(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_j$$

ve

$$\left\| \sum_{i=s_j+1}^{s_2} z_j(i) e_i \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_j$$

olacak şekilde  $(s_i)$  ve  $(n_i)$  artan dizileri bulabiliriz.

$\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j < 1$  olduğundan  $\|x\|_{l_{\infty}(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} < 1$  dir.

Buradan

$$\left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} = \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{s_{j-1}} z_j(i) e_i + \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i + \sum_{i=s_j+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{s_{j-1}} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} + \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} \\
&\quad + \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=s_{j-1}+1}^{\infty} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} + 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)}^{p_k} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{i-1}}{L_i} z_j(i) - \frac{L_i}{L_{i-1}} z_j(i-1) \right| \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[ u_n F_n \left( \left| \frac{L_{i-1}}{L_i} z_j(i) - \frac{L_i}{L_{i-1}} z_j(i-1) \right| \right) \right]^{p_k} \leq n
\end{aligned}$$

buluruz. Sonuç olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|_{l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)} \leq n^{1/p_k} + 1 \leq 2n^{1/p_k}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

**Uyarı 4.3.2.**  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u) \cong l_p$  olduğundan  $R(l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)) = R(l_p) = 2^{1/p}$  dir.

Şimdi Uyarı 4.3.2. ve teorem 3.2.3 yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 4.3.3.**  $l(\hat{E}, \mathcal{F}, p, u)$  uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir.

#### 4.4. $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ ve $\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ Lucas Fark Dizi Uzayları

Bu bölümde (Karakaş ve Metin Karakaş 2017) tarafından tanımlanan  $\hat{E}(r, s) = (L_{nk}(r, s))$  Lucas matrisini kullanacağız. Bu matris;

$$\hat{E}(r, s) = \begin{cases} s \frac{L_n}{L_{n-1}}, & k = n - 1 \\ r \frac{L_n}{L_{n-1}}, & k = n \\ 0, & 0 \leq k < n - 1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ve  $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  dır.

Şimdi  $\hat{E}(r, s)$  matrisi ve modülüs fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki Lucas fark dizi uzaylarını tanımlıyoruz.

$$\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u) = \left\{ x \in w: \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_n}{L_{n-1}} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty \right\}$$

ve

$$\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u) = \left\{ x \in w: \sup_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_n}{L_{n-1}} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty \right\}$$

burada  $\mathcal{F} = (F_n)$  modülüs fonksiyonlar dizisi,  $p = (p_n)$  pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve  $u = (u_n)$  kesin pozitif reel sayılar dizisidir.

Ayrıca  $\hat{E}(r, s)$  matrisinin tersini;

$$\hat{E}^{-1}(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left( -\frac{s}{r} \right)^{n-k} \frac{L_n^2}{L_{k-1} \cdot L_k}, & 0 < k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (4.7)$$

ve bir  $x = (x_n)$  dizisinin  $\hat{E}(r, s)$ - dönüşüm dizisini,

$$y_n = \hat{E}(r, s)(x) = r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlıyoruz.

#### 4.5. $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ ve $\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$ Uzaylarının Topolojik Yapısı

**Teorem 4.5.1.**  $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  ve  $\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  uzayları  $\mathbb{C}$  kompleks cismi üzerinde lineer uzaylardır.

**İspat**  $x, y \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  olsun. Bu takdirde

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

ve

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

olur.  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  için  $|\lambda| \leq K_\lambda$  ve  $|\mu| \leq N_\mu$  olacak şekilde  $K_\lambda$  ve  $N_\mu$  tamsayıları mevcuttur. Modülüs fonksiyonunun tanımı ve (3.1) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[ u_n F_n \left| \lambda \left( r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) + \mu \left( r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right) \right| \right]^{p_n} \\ & \leq \sum_n \left[ u_n F_n |\lambda| \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right]^{p_n} + \sum_n \left[ u_n F_n |\mu| \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right]^{p_n} \\ & \leq C \cdot K_\lambda^H \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ & + C \cdot N_\mu^H \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\lambda x + \mu y \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  olur.  $\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  uzayı için de aynı yöntem uygulanır.

**Teorem 4.5.2.**  $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$  ve  $M = \max\{1, H\}$  olmak üzere,  $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  uzayı;

$$\sigma(x) = \sup_n \left( \sum_n \left[ a_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M}$$

paranormuyla birlikte bir paranormlu uzaydır.

**İspat**  $\forall x \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  için  $\sigma(x) = \sigma(-x)$  olduğu aşıkardır.

Ayrıca  $x = 0$  için  $r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} = 0$  olduğunu kolayca görebiliriz.  $\frac{p_n}{M} \leq 1$  olduğundan Minkowsky eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} + \left( r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right) \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M} \\
& \leq \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) + u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M} \\
& \leq \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M} \\
& + \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M}
\end{aligned}$$

buluruz. O halde  $\sigma$  alt toplamsaldır. Çarpımın sürekliliği için, herhangi bir  $\alpha$  kompleks sayısı alalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha x) &= \left( \sup_n \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| \alpha \left( r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right) \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M} \\
&\leq \mathcal{D}_\alpha^{\frac{H}{M}} \sigma(x)
\end{aligned}$$

olur. Burada  $\mathcal{D}_\alpha, |\alpha| \leq \mathcal{D}_\alpha$  olacak şekilde bir pozitif tamsayıdır. Şimdi  $\sigma(x) = 0$  şartını sağlayan sabit  $x$  için  $\alpha \rightarrow 0$  olsun.  $\alpha'$  yı yeterince küçük alarak,  $|\alpha| < 1$  ve  $1 < n < n_0$  için,

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon, \quad n > n_0(\varepsilon) \quad (4.9)$$

buluruz.  $F_n$  sürekli olduğundan,

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon \quad (4.10)$$

olur. (4.9) ve (4.10) dan  $\alpha \rightarrow 0$  iken  $\sigma(\alpha x) \rightarrow 0$  bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

**Teorem 4.5.3.**  $p = (p_n)$  ve  $q = (q_n)$  dizileri, her  $n$  için  $0 \leq p_n \leq q_n < \infty$  olmak üzere pozitif reel sayıların sınırlı dizileri ise,

$$\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u) \subseteq \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, q, u)$$

dir.

**İspat**  $x \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  olsun. O halde

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

dir. Bu ise

$$\sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \leq 1$$

olduğunu ifade eder.

$F_n$  artan ve  $p_n \leq q_n$  olduğundan  $\exists n_0$  ve  $n \geq n_0$  için,

$$\sum_{n \geq n_0} \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{q_n} \leq \sum_{n \geq n_0} \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} y_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} y_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

buluruz. Dolayısıyla  $x \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, q, u)$  olup ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.4.**  $\mathcal{F} = (F_n)$  modülüs fonksiyonlar dizisi ve  $\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_n(t)}{t} > 0$  olsun. Bu takdirde

$\ell(\hat{E}(r, s), p, u) \subseteq \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  dir.

**İspat**  $\gamma > 0$  olsun.  $\gamma$ 'nın tanımından  $\forall t > 0$  için  $F_n(t) \geq \gamma(t)$  ve  $t \leq \frac{1}{\gamma} F_n(t)$  olur. Şimdi  $x = (x_n) \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  dizisini alalım. O halde

$$\sum_n \left[ u_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \leq \frac{1}{\gamma} \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n}$$

olup bu  $x = (x_n) \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.5.**  $\mathcal{F}^1 = (F_n^1)$  ve  $\mathcal{F}^2 = (F_n^2)$  iki modülüs fonksiyonlar dizisi olsun. O halde  $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^1, p, u) \cap \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^2, p, u) \subseteq \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2, p, u)$  dir.

**İspat**  $x = (x_n) \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^1, p, u) \cap \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^2, p, u)$  olsun.

Böylece

$$\sum_n \left[ u_n F_n^1 \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

ve

$$\sum_n \left[ u_n F_n^2 \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[ u_n (F_n^1 + F_n^2) \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\ & \leq M \left\{ \sum_n \left[ u_n F_n^1 \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right\} \\ & + M \left\{ \sum_n \left[ u_n F_n^2 \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right\} \end{aligned}$$

buluruz. Sonuç olarak

$$\sum_n \left[ u_n (F_n^1 + F_n^2) \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

yani  $x = (x_n) \in \ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2, p, u)$  olup ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.6.**  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  olsun. Bu durumda  $\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  ve  $\ell_\infty(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)$  uzayları

$$\|x\|_{\ell(\hat{E}(r, s), \mathcal{F}, p, u)} = \left( \sum_n [u_n F_n(|\hat{E}_n(r, s)(x)|)]^{p_n} \right)^{1/M}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_\infty(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} = \sup_n [u_n F_n(|\hat{E}_n(r,s)(x)|)]^{p_n}$$

normlarına göre normlu uzaylardır.

**Uyarı 4.5.7.**  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  ve  $\ell_\infty(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayları üzerinde mutlak olma özelliğinin sağlanmadığı kolayca görülebilir. Yani, her iki uzaydaki en az bir dizi için

$$\|x\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \neq \|x\|_{\ell_\infty(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_\infty(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \neq \|x\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)}$$

olup bu bağıntılar, uzayların mutlak olmayan tipten dizi uzayları olduğunu ifade eder.

**Teorem 4.5.8.**  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq p_k \leq H < \infty$  olmak üzere  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  dizi uzayı  $\ell_p$  uzayına lineer izomorftur, yani  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u) \cong \ell_p$  dir.

**İspat** Öncelikle  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  ve  $\ell_p$  uzayları arasında 1:1, örten ve lineer bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz. Bunun için (4.8) eşitliğiyle tanımlı

$$Z: \ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u) \rightarrow \ell_p, x \rightarrow y = Zx$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

Buradan  $x \in \ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  için  $Zx = y = \hat{E}(r,s)x \in \ell_p$  dir.

Ayrıca, Z' nin lineer olduğu açıktır. İlaveten  $Zx = 0 \Rightarrow x = 0$  olacağı kolayca görülebilir.

Şimdi  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  için  $y = (y_n) \in \ell_p$  olduğunu düşünelim ve  $x = (x_n)$

dizisini,  $x_n = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \left(-\frac{s}{r}\right)^{n-j} \frac{L_n^2}{L_{j-1}L_j} y_j$  şeklinde tanımlayalım. Buradan  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  ve  $p = \infty$  durumunda

$$\|x\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} = \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{s}{r} \right)^{n-j} \frac{L_n^2}{L_{j-1} L_j} y_j \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + s \frac{L_n}{L_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{s}{r} \right)^{n-j} \frac{L_{n-1}^2}{L_{j-1} L_j} y_j \right| \right) \right]^{p_n} \right)^{1/M} \\
&= \|y\|_{\ell_p} < \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_\infty(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} &= \sup_n \left[ u_n F_n \left( \left| r \frac{L_{n-1}}{L_n} x_n + s \frac{L_n}{L_{n-1}} x_{n-1} \right| \right) \right]^{p_n} \\
&= \|y\|_{\ell_\infty} < \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla  $Z$  1:1, örten ve lineer bir dönüşüm olup  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  ve  $\ell_p$  uzayları  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq p_n \leq H < \infty$  için lineer izomorfikler.

#### 4.6. $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$ Uzayının Geometrik Yapısı

Şimdi  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayının,  $1 < p_k \leq H < \infty$  olmak üzere, geometrik yapısına ilişkin aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Teorem 4.6.1.**  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $1 < p_k \leq H < \infty$  olsun. Bu takdirde  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayı  $p$  tipi Banach- Saks özelliğine sahiptir.

**İspat**  $(\varepsilon_n)$  dizisi,  $\sum \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$  olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve  $(x_n)$   $B(\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u))$  yuvarında sıfıra zayıf yakınsak, yani  $x_n \xrightarrow{w} 0$  olsun.

$x_0 = 0$  ve  $b_1 = x_{n_1} = x_1$  alalım. O halde

$$\left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} b_1(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $m_1 \in \mathbb{N}$  sayısı mevcuttur.

$x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$  olduğundan  $n \geq n_2$  için

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_1} x_n(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $n_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Şimdi  $b_2 = x_{n_2}$  alalım. Bu takdirde

$$\left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} b_2(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde  $m_2 > m_1$  doğal sayısı mevcuttur.  $x_n \rightarrow 0$  olduğu tekrar kullanılırsa,  $n \geq n_3$  için

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_2} x_n(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde bir  $n_3 > n_2$  sayısı vardır. Bu şekilde devam edildiğinde,  $\forall n \geq n_{j+1}$  için,

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_j} x_n(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_j$$

ve  $b_j = x_{n_j}$  olmak üzere,

$$\left\| \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e_i \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} < \varepsilon_j$$

olacak şekilde  $(m_i)$  ve  $(n_i)$  artan alt dizilerini bulabiliriz. Buradan;

$$\left\| \sum_{j=1}^n b_j \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)} = \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{m_{j-1}} b_j(i) e_i + \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e_i + \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s), \mathcal{F}, p, u)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{m_{j-1}} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} + \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \\
&\quad + \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=m_j+1}^{\infty} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} + 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca  $\|x\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} < 1$  olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e_i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)}^{p_k} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} \left[ u_k F_k \left( \left| r \frac{L_{i-1}}{L_i} b_j(i) + s \frac{L_i}{L_{i-1}} b_j(i-1) \right| \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[ u_k F_k \left( \left| r \frac{L_{i-1}}{L_i} b_j(i) + s \frac{L_i}{L_{i-1}} b_j(i-1) \right| \right) \right]^{p_k} \\
&\leq n
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\left\| \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} b_j(i) e^i \right) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \leq (n)^{1/p_k}$$

elde edilir.

$1 < p_k < \infty$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq n^{1/p_k}$  olduğu göz önüne alınırsa

$$\left\| \sum_{j=1}^n b_j(i) \right\|_{\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)} \leq n^{1/p_k} + 1 < 2n^{1/p_k}$$

bulunur. Bu ise  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayının  $p$  tipi Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu gösterir.

**Uyarı 4.6.2.**  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayı  $\ell_p$  uzayına lineer izomorf olduğundan  $R(\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)) = R(\ell_p) = 2^{1/p}$  dir.

Sonuç olarak  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  bir Banach uzayı ve  $R(\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)) = 2^{1/p} < 2$  olduğundan Teorem 3.2.3 gereğince aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.6.3.**  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $1 < p_k \leq H < \infty$  olmak üzere  $\ell(\hat{E}(r,s),\mathcal{F},p,u)$  uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Banach uzaylarının geometrik özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Son yıllarda, Fibonacci ve Lucas sayıları yardımıyla tanımlanan fark dizi uzaylarının topolojik ve geometrik özellikleri de ilgi gören ve çalışılmakta olan konulardan biridir. Biz bu tez çalışmasında  $l_p$  uzayına Lucas sayıları yardımıyla oluşturulan iki sonsuz üçgensel matrisin etki alanını ve modülüs fonksiyonunu uygulayarak yeni fark dizi uzayları elde ettik. Sonrasında bu uzayların bazı topolojik özellikleri ile  $(BS_p)$  ve zayıf sabit nokta gibi geometrik özelliklerini araştırdık.

Banach uzaylarının geometrik özelliklerinden bazıları sabit nokta teorisinde önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle çalıştığımız uzayların sabit nokta teorisindeki yerinin daha iyi anlaşılabilmesi adına zayıf sabit nokta özelliği dışında hangi özellikleri sağladığı hem yazarlar hem de okuyucular adına bir çalışma alanı oluşturabilir. Bunun yanında uzaylarımızın daha genel hallerinin oluşturulması ve bu şekilde elde edilecek yeni uzayların duallerinin hesaplanması ve aralarındaki matris sınıflarının karakterize edilmesi de yeni bir araştırma konusu olarak düşünülebilir.

## KAYNAKLAR

- Alotaibi A, Mursaleen M, Alamri B, Mohiuddine SA, 2015. Compact Operators on Some Fibonacci Difference Sequence Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015: 203.
- Altay B, Başar F, 2005. Some Euler Sequence Spaces of Non-absolute Type. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57 (1): 1-17.
- Altay B, Başar F, 2005. On the Fine Spectrum of the Generalized Difference Operator  $B(r, s)$  Over the Sequence Spaces  $c_0$  and  $c$ . *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005 (18): 3005-3013.
- Altay B, Başar F, 2006. Some Paranormed Riesz Sequence Spaces of Non- absolute Type. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 30 (4): 591-608.
- Altay B, Başar F, 2007. The Fine Spectrum and the Matrix Domain of the Difference Operator  $\Delta$  on the Sequence Space  $l_p$ ,  $(0 < p < 1)$ . *Communications in Mathematical Analysis*, 2 (2): 1-11.
- Altay B, Polat H, 2006. On Some New Euler Difference Sequence Spaces. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 30 (2): 209-220.
- Altın Y, 2009. Properties of Some Sets of Sequences Defined by a Modulus Function. *Acta Mathematica Scientia*, 29 (2): 427-434.
- Altın Y, Altınok H, 2003. On Some Generalized Difference Sequence Spaces Defined by a Modulus Function. *Filomat*, 17: 23-33.
- Altın Y, Et M, 2005. Generalized Difference Sequence Spaces Defined by a Modulus Function in a Locally Convex Space. *Soochow Journal of Mathematics*, 31 (2): 233-243.

- Aydın C, Başar F, 2004. Some New Difference Sequence Spaces. *Applied Mathematics and Computation*, 157 (3): 677-693.
- Aydın C, Başar F, 2014. Some Topological and Geometric Properties of the Domain of the Generalized Difference Matrix  $B(r,s)$  in the Sequence Space  $l(p)$ . *Thai Journal of Mathematics*, 12 (1): 113-132.
- Başar F, 2011. *Summability Theory and Its Applications*. Bentham Science Publishers. İstanbul.
- Başar F, Altay B, 2003. On the Space of Sequences of  $p$ -Bounded Variation and Related Matrix Mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55 (1): 136-147.
- Başar F, Altay B, Mursaleen M, 2008. Some Generalizations of the Space  $bv_p$  of  $p$  – Bounded Variation Sequences. *Nonlinear Analysis*, 68 (2): 273-287.
- Başarır M, Başar F, Kara EE, 2013. On The Spaces of Fibonacci Difference Null and Convergent Sequences. [arXiv:1309.0150 \[math. FA\]](https://arxiv.org/abs/1309.0150).
- Bayraktar M, 2006. *Fonksiyonel Analiz*. Fersa Matbaacılık. Ankara.
- Bektaş ÇA, Et M, Çolak R, 2004. Generalized Difference Sequence Spaces and Their Dual Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 292 (2): 423-432.
- Candan M, 2015. A New Approach on the Spaces of Generalized Fibonacci Difference Null and Convergent Sequences. *Mathematica Aeterna*, 5 (1): 191-210.
- Candan M, Kayaduman K, 2015. Almost Convergent Sequence Space Derived by Generalized Fibonacci Matrix and Fibonacci Core. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 7 (2): 150-167.
- Candan M, Kara EE, 2015. A Study on Topological And Geometrical Characteristics of New Banach Sequence Spaces. *Gulf Journal of Mathematics*, 3 (4): 67-84.

- Chidume CE, 1965. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Heidelberg. Berlin.
- Choudary B, Nanda S, 1989. Functional Analysis with Applications. Wiley Eastern Limited. New Delhi. India.
- Cui Y, Meng C, Pluciennik R, 2000. Banach-Saks Property and Property ( $\beta$ ) in Cesaro Sequence Spaces. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24: 201-210.
- Çakar Ö, 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I. A.Ü Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları. No:13. Ankara.
- Çolak R, Et M, 1997. On Some Generalized Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations. Hokkaido Mathematical Journal, 26 (3): 483-492.
- Debnath S, Saha S, 2014. Some Newly Defined Sequence Spaces Using Regular Matrix of Fibonacci Numbers. Afyon Kocatepe University Journal of Science & Engineering, 14 (1): 1-3.
- Dernek A, 2009. Analiz I. Nobel Yayın Dağıtım. No:639. Ankara.
- Et M, 2000. On Some Topological Properties of Generalized Difference Sequence Spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 24 (11): 785-791.
- Et M, 2003. Strongly Almost Summable Difference Sequences of Order  $m$  Defined by a Modulus. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 40 (4): 463-476.
- Et M, 2006. Spaces of Cesaro Difference Sequences of order  $r$  Defined by a Modulus Function in a Locally Convex Space. Taiwanese Journal of Mathematics, 10 (4): 865-879.
- Et M, Başarır M, 1997. On Some New Generalized Difference Sequence Spaces. Periodica Mathematica Hungarica, 35 (3): 169-175.

- Et M, Çolak R, 1995. On Some Generalized Difference Sequence Spaces. Soochow Journal of Mathematics, 21 (4): 377-386.
- Et M, Esi A, 2000. On Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Difference Sequence Spaces. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 23 (1): 25-32.
- Et M, Karakaş M, Karakaya V, 2014. Some Geometric Properties of a New Difference Sequence Space Defined by de la Vallee- Poussin Mean. Applied Mathematics and Computation, 234: 237-244.
- Et M, Nuray F, 2001.  $\Delta^m$ - Statistical Convergence. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 32 (6): 961-969.
- Esi A, Tripathy BC, 2008. On Some Generalized New Type Difference Sequence Spaces Defined by a Modulus Function in a Seminormed Space. Fasciculi Mathematici, 40: 15-24.
- Garcia-Falset J, 1994. Stability and Fixed Points for Nonexpansive Mappings. Houston Journal of Mathematics, 20 (3): 495-506.
- Garcia-Falset J, 1997. The Fixed Point Property in Banach Spaces With the NUS-Property. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 215: 532-542.
- Kalman D, Mena R, 2003. The Fibonacci Numbers-Exposed. Matematics Magazine, June 76 (3).
- Kara EE, 2013. Some Topological and Geometrical Properties of New Banach Sequence Spaces. Journal of Inequalities and Applications, 2013:38 15 pp.
- Kara EE, Başarır M, Mursaleen M, 2013. Compactness of Matrix Operators on Some Sequence Spaces Derived By Fibonacci Numbers. arXiv:1309.0152v1 [math. FA].
- Kara EE, Başarır M, 2012. An Application of Fibonacci Numbers into Infinite Toeplitz Matrices. Caspian Journal of Mathematics Sciences, 1 (1): 1-6.

- Kara EE, İlkhan M, 2016. Some Properties of Generalized Fibonacci Sequence Spaces. *Linear Multilinear Algebra*, 64 (11): 2208-2223.
- Karabudak H, 2016. Fibonacci Ve Lucas Sayıları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Regüler Matrisler Ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi ve Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüleri, Bitlis.
- Kamthhan PK, Gupta M, 1981. *Sequence Spaces and Series*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. New York. USA.
- Karakaş M, Et M, Karakaya V, 2013. Some Geometric Properties of a New Difference Sequence Space Involving Lacunary Sequences. *Acta Mathematica Scientia Series B English Edition*, 33 (6): 1711-1720.
- Karakaş M, Karakaş AM, 2017. New Banach Sequence Spaces That is Defined by the Aid of Lucas Numbers. *Iğdır University Journal of Institute of Science & Technology*, 7 (4): 103-111.
- Kılınç G, Candan M, 2017. Some Generalized Fibonacci Difference Spaces Defined by a Sequence of Modulus Functions. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 32 (1): 95-116.
- Kızmaz H, 1981. On Certain Sequence Spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24 (2): 169-176.
- Koshy T, 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers With Applications*. John Wiley & Sons Inc. Canada.
- Kreyszig E, 1978. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons. New York.
- Maddox IJ, 1970. *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge University Press. London.

- Mursaleen M, Çolak R, Et M, 2007. Some Geometric Inequalities in a New Banach Sequence Space. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 86757, 6pages.
- Mursaleen M, Noman AK, 2010. On Some New Difference Sequence Spaces of Non-absolute Type. *Mathematical and Computer Modelling*, 52 (3-4): 603-617.
- Nakano H, 1953. Concave Modularity. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 5: 29-49.
- Raj K, Pandoh S, Jamwal S, 2015. Fibonacci Difference Sequence Spaces For Modulus Functions. *Le Matematiche*, 70 (1): 137-156.
- Tripathy B, Altın Y, Et M, 2008. Generalized Difference Sequence Spaces on Seminormed Spaces Defined by Orlicz functions. *Mathematica Slovaca*, 58 (3): 315-324.
- Vajda S, 2008. *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications*. Dover Publications Inc. NewYork.

## ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Erciş’de doğdum. İlk ve Ortaokulu Erciş Atatürk İlk ve Ortaokulu’nda, ve Liseyi de İzmir Vali Nevzat AYAZ Lisesi’nde tamamladım. 2000 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladım. 2004 yılında mezun oldum. 2006 yılında Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Tezsiz Yüksek Lisans Programını tamamladım. 2016 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün İstatistik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans programına başladım. Ocak 2018’ de yüksek lisansımı tamamladım. Yabancı dilim İngilizcedir.

Tayfur AKBAŞ