



**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR

**Hazırlayan
Samed ÖZKAN**

**Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA**

Doktora Tezi

**Ocak 2018
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR
(Doktora Tezi)**

**Hazırlayan
Samed ÖZKAN**

**Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA**

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 114F300 proje numaralı 1002 kodlu program ve Erciyes Üniversitesi BAP birimince Kurum Dışı Destekli Araştırmalar için İhtiyaç Projesi türünde FDA-2015-5625 kodlu proje ile desteklenmiştir.

**Ocak 2018
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.



Samed ÖZKAN

“Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar” adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.



Hazırlayan

Samed ÖZKAN



Danışman

Doç. Dr. Muammer KULA



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ

Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Samed ÖZKAN** tarafından hazırlanan “**Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

29/01/2018

JÜRİ :

Danışman : Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Prof. Dr. İshak ALTUN

Üye : Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Üye : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ONAY :

Bu tezin kabûlü Enstitü Yönetim Kurulunun 06/02/2018 tarih ve 2018/07-08 sayılı kararı ile onaylanmıştır.


06 / 02 / 2018

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez danışmanlığımın yanında her durumda yakın ilgi ve desteğiyle yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımın her safhasında önerileriyle yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Muammer KULA'ya teşekkür ederim.

Akademik gelişimime önemli katkıları olan, engin bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet BARAN'a, doktora çalışmalarım sırasında tez izleme komitesi üyeliğini üstlenen değerli hocalarım Prof. Dr. Osman MUCUK ve Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmasında maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu TÜBİTAK'a, Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne katkılarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca lisansüstü eğitimim boyunca verdiği her türlü destekten ötürü Türk Eğitim Vakfı'na teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince birçok fedakârlık göstererek sabırla beni daima destekleyen hayat arkadaşım, değerli eşim Semiha ÖZKAN'a, biricik kızım Beyza'ya, maddi ve manevi desteklerini hissettiğim aileme ve tüm dostlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Samed ÖZKAN

Ocak 2018, KAYSERİ

HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR

Samed ÖZKAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Doktora Tezi, Ocak 2018

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan proximity uzay kavramı, örnekleri, özellikleri, temel kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verildi. Ardından objeleri proximity uzaylar, morfizmleri p -dönüşümler olan proximity uzaylar kategorisinin (**PROX**) bir topolojik kategori olduğu gösterildi.

İkinci bölümde, ilk olarak topolojik kategorilerde lokal ayırma aksiyomlarının ve (kuvvetli) kapalılık kavramının tanımları verildi. Bu tanımlar ile birlikte **PROX** kategorisinde bir p noktasında (lokalde) $Pre\bar{T}_2$, $PreT'_2$, $\bar{T}_2$, T'_2 , $\bar{T}_3$, T'_3 , $S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edildi.

Üçüncü bölümde, herhangi bir topolojik kategori için genelde ayırma aksiyomlarının tanımları verilerek **PROX** kategorisinde $Pre\bar{T}_2$, $PreT'_2$, $\bar{T}_2$, T'_2 , $\bar{T}_3$, T'_3 , $S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edildi.

Dördüncü bölümde, **PROX** kategorisinde karakterize ettiğimiz bir p noktasında ve genelde pre-Hausdorff, Hausdorff ve regüler objelerin her birinin çeşitli formlarının aralarında ortaya çıkan ilişkiler incelendi. Ayrıca karakterize edilen objeler, proximity uzaylardaki bazı klasik ayırma aksiyomlarıyla karşılaştırıldı.

Son bölümde, diğer bölümlerde elde ettiğimiz sonuçlar özetlendi ve araştırılmamış konulara, çözülmemiş problemlere dikkat çekilerek ileriki çalışmalar için çeşitli önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Kategori, Proximity Uzay, Ayırma, Pre-Hausdorff, Hausdorff, Regüler.

HAUSDORFF AND REGULAR PROXIMITY SPACES

Samed ÖZKAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Ph.D. Thesis, January 2018

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Muammer KULA

ABSTRACT

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, the concept of proximity space, examples, properties, fundamental categorical notions and some necessary theorems which will be used in next chapters were given. Also, the category of proximity spaces (**PROX**) which consists of proximity spaces as objects and p -maps as morphisms was shown to be a topological category.

In the second chapter, the definitions of local separation properties in topological categories and the concept of (strongly) closedness were given. Then the separation axioms $Pre\bar{T}_2$, $PreT'_2$, $\bar{T}_2$, T'_2 , $\bar{T}_3$, T'_3 , $S\bar{T}_3$ and ST'_3 at a point p (locally) were characterized in the category of **PROX**.

In the third chapter, the definitions of separation properties for an arbitrary topological category were given and the separation axioms $Pre\bar{T}_2$, $PreT'_2$, $\bar{T}_2$, T'_2 , $\bar{T}_3$, T'_3 , $S\bar{T}_3$ and ST'_3 were characterized in the category of **PROX**.

In the fourth chapter, the relationships among the various form of each of the pre-Hausdorff, Hausdorff and regular objects in the category of **PROX** were examined. In addition, these notions were compared to some classical separation axioms in proximity spaces.

In the last chapter, the results we have obtained were summarized and taking attention to unresolved issues and unsolved problems various proposals for further research were discussed.

Keywords: Topological Category, Proximity Space, Separation, Pre-Hausdorff, Hausdorff, Regular.

İÇİNDEKİLER

HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	ii
KABUL VE ONAY	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	x

GİRİŞ	1
-----------------	---

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Proximity Uzaylar	8
1.1.1. Proximity Uzay Örnekleri	11
1.1.2. Proximity Tarafından Üretilen Topoloji	16
1.1.3. Proximity Bağıntısının Alternatif Tanımı	21
1.1.4. Genelleştirilmiş Proximity Uzaylar	23
1.1.5. Betimsel (Descriptive) Proximity Uzaylar	24
1.2. Kategori	27
1.3. Fanktor	32
1.4. Topolojik Kategori	36
1.5. PROX Kategorisi	38

2. BÖLÜM	
p NOKTASINDA HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR	
2.1. Topolojik Kategorilerde Lokal Ayırma Aksiyomları ve Kapalılık	42
2.1.1. Kapalılık	47
2.2. p Noktasında Pre-Hausdorff Proximity Uzaylar	49
2.3. p Noktasında Hausdorff Proximity Uzaylar	55
2.4. p Noktasında Regüler Proximity Uzaylar	56
3. BÖLÜM	
HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR	
3.1. Topolojik Kategorilerde Ayırma Aksiyomları	60
3.2. Pre-Hausdorff Proximity Uzaylar	64
3.3. Hausdorff Proximity Uzaylar	70
3.4. Regüler Proximity Uzaylar	72
4. BÖLÜM	
LOKAL VE GENEL PRE-HAUSDORFF, HAUSDORFF, REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER	
4.1. p Noktasında Pre-Hausdorff, Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar Arasındaki İlişkiler	75
4.2. Pre-Hausdorff, Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar Arasındaki İlişkiler	76
4.3. Lokal ve Genel Arasındaki İlişkiler	76
5. BÖLÜM	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	
5.1. Sonuçlar	78
5.2. Öneriler	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	85

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1.	Bazı Kategori Örnekleri	29
Tablo 1.2.	Bazı Özel Morfizmlerin SET ve TOP Kategorilerindeki Karşılıkları	31



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	(P5) aksiyomunu sağlayan bir E alt kümesi	13
Şekil 1.2.	Betimsel proximity bağıntısı örneği	26
Şekil 1.3.	Betimsel EF-proximity uzay örneği	27
Şekil 1.4.	SET kategorisinde bir pushout diyagramı	32
Şekil 1.5.	Kategori - Fanktor - Doğal Dönüşüm	36
Şekil 1.6.	Başlangıç Kaldırma	37
Şekil 1.7.	Bitiş Kaldırma	37
Şekil 1.8.	$\mathcal{U}: \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$ fanktoru için başlangıç kaldırma	41
Şekil 2.1.	p noktasında wedge çarpım	42
Şekil 2.2.	p de Temel (Principle) Eksen Dönüşümü	44
Şekil 2.3.	p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü	44
Şekil 2.4.	p de Katlama (Fold) Dönüşümü	45
Şekil 2.5.	$B = \mathbb{R}$ ve $p = 0$ için A_p ve S_p dönüşümlerinin görüntüsü	45
Şekil 2.6.	q fonksiyonu	57
Şekil 3.1.	Diyagonal boyunca wedge çarpım	60
Şekil 3.2.	Pre-Hausdorff ve Hausdorff uzay ilişkisi	65
Şekil 3.3.	T_0, T_2 ve $PreT_2$ arasındaki ilişki	71

GİRİŞ

Proximity uzay kavramı ilk olarak 1908 yılında Roma’da düzenlenen uluslararası matematikçiler kongresinde Riesz [1] tarafından tanımlanan “Bağlantılılık (Enchainment) Teorisi” ile ortaya çıkmıştır. Bu teori proximity uzaylar teorisinin temelini oluşturmaktadır. 1950’lerde Efremovič [2,3] bu kavramı tekrar ele alarak proximity bağıntısını tanımlamıştır. Bu bağıntı X in herhangi A ve B alt kümeleri için “ A kümesi B kümesine yakındır” şeklinde karakterize edilmiş bir yakınlık bağıntısıdır. Bir X kümesi bu bağıntıyla birlikte proximity uzay adını alır ve bu uzay metrik uzayın bir genellemesidir.

Krishna Murti [4], Wallace [5, 6] ve Szymanski [7] tarafından Efremovič’in tanımından on yıl kadar önce yayınlanan “Kümelerin Ayrılması” ile ilgili çalışma proximity uzaylar teorisinin temel kavramlarını oluşturmuştur. Bu çalışma Efremovič’in tanımı ile benzer olmasına rağmen Efremovič’in aksiyomlarından daha zayıf aksiyomlar içermektedir.

Efremovič daha sonraları proximity uzay aksiyomlarına denk aksiyomlar elde etmek için proximity komşuluk kavramını kullanmıştır. Bu sayede proximity uzaylar teorisine alternatif bir yaklaşım sağlamıştır.

X in bir A alt kümesinin kapanışını, X in A ya yakın olan tüm noktalarının bir sınıfı olarak tanımlayan Efremovič [3], bu şekilde bir proximity uzayda topolojik uzay üretilebileceğini ve elde edilen topolojik uzayın tam regüler olduğunu göstermiştir. Ayrıca daha sonraki çalışmalarında Efremovič, Urysohn fonksiyonu ile tam regüler her X uzayının bir proximity uzaya dönüştürülebileceği sonucunu elde etmiştir. Burada Urysohn fonksiyonu “ $A \bar{\delta} B \iff f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır” şeklinde tanımlı fonksiyondur.

Smirnov [8], tam regüler her uzayın maksimal ilişkili bir proximity uzaya sahip olduğunu ve “Tam regüler her uzay minimal ilişkili bir proximity uzaya sahiptir ancak ve ancak uzay lokal kompakttır” ifadesini ispatlamıştır.

Sonraki zamanlarda Mrówka [9], bir proximity uzaydan tüm dizilerin kümesine bir yakınlık bağıntısı tanımlamıştır. Bunun sonucunda Fréchet L-uzayında proximity bağıntısına benzer bir kavram ortaya çıkmıştır. Goetz [10], UL-uzayını elde etmek için bağımsız çalışmalarla proximity bağıntısına benzer bir kavrama ulaşmıştır. Ancak bir proximity uzayın tam regülerliğinin aksine UL-uzayı bir topolojik uzay bile olmak zorunda değildir. Poljakov [11] ve Goetz bu alandaki çalışmaları daha ileri taşıyarak bu kavram ile Efremovič’in proximity bağıntısı arasındaki bağlantıyı tartışmışlardır.

Proximity uzaylar arasındaki dönüşümleri araştırmak amacıyla yola çıkan Efremovič, proximity dönüşüm kavramını tanımlamıştır. Kümelerin proximity özelliğini koruyan proximity dönüşüm kavramı, topolojik uzaylardaki sürekli fonksiyonların ve düzgün uzaylardaki düzgün sürekli dönüşümlerin bir benzeri olarak düşünülebilir. Ayrıca iki proximity uzay arasındaki bir proximity dönüşüm üretilen topolojilere göre süreklidirler.

1952 yılında Smirnov [8], proximity uzaylarla ilgili çalışmalarını genişleterek Alexandroff’un şu sorusunu cevaplamıştır: “Hangi topolojik uzaylar verilen topoloji ile uyumlu bir proximity bağıntısını kabul ederler?” Smirnov bir Tychonoff uzayının Hausdorff kompaktlaştırması ile bu uzayla uyumlu bir proximity bağıntısı arasındaki bağlantıyı keşfetmiştir. Buradan hareketle “Bir topolojik uzay uyumlu bir proximity bağıntısını kabul eder ancak ve ancak o topolojik uzay kompakt bir Hausdorff uzayın alt uzayıdır” ifadesini elde etmiştir.

Ultrasüzgeç kavramının proximity uzaylardaki benzeri olan cluster kavramı Leader [12] tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram proximity uzaylardaki birçok problemin çözümü için alternatif yaklaşımlar sağlamıştır. Örneğin Leader [12], bir proximity uzayın kompaktlaştırmasını elde ederken cluster kavramından yararlanmıştır.

Proximity uzaylar ile düzgün (uniform) uzaylar arasındaki ilişkiyi ilk keşfeden Smirnov olmuştur. Smirnov [8], düzgün uzayların düzgün örtüleri (coverings) içeren alternatif aksiyomlarını kullanarak, düzgün yapıların her proximity denklik sınıfının bir en kaba eleman içerdiğini göstermiştir. Bu eleman aynı zamanda denklik sınıfının tek tamamen sınırlı (totally bounded) yapısıdır. Ayrıca Smirnov, tam regüler bir uzayda verilen tüm proximity yapıların kısmi sıralı kümesi ile tüm kompaktlaştırmalarının kısmi sıralı kümesi arasında bir izomorfizm olduğunu göstermiştir.

1959 yılında Gál [13], düzgün uzaylar ile proximity uzaylar arasındaki bağlantıları araştırmaya devam etmiştir. Gál, proximity bağıntılar ile tamamen sınırlı yapılar arasında sırayı koruyan birebir eşlemenin var olduğunu ispatlamıştır. Üstelik Gál, düzgünleştirilebilen bir uzayın kompaktlaştırması ile topolojisiyle uyumlu tamamen sınırlı düzgün yapılar arasında da birebir eşleme olduğunu göstermiştir. Aynı yıl Alfsen ve Fenstad [14], Gál'in çalışması ile Efremovič ve Smirnov'un çözdükleri birçok problemi Weil'in düzgün yapıları çerçevesinde kıyaslamışlardır. Alfsen ve Njåstad [15], proximal süreklilik ile düzgün süreklilik (uniform continuity) arasında bir bağıntı bulup Efremovič'in "Metrik düzgün süreklilik metrik proximal sürekliliğe denktir" sonucuna ulaşmışlardır. Njåstad [16], genelleştirilmiş düzgün yapı kavramını geliştirerek proximity yapıların ve genelleştirilmiş düzgün yapıların başlangıç ile bitişlerinin varlığını ve uyumluluğunu göstermiştir.

Efremovič'in proximity bağıntısı tanımından sonra bazı araştırmacılar esas küme üzerinde keyfi topolojileri tanımlayabilmek için Efremovič'in aksiyomlarından daha zayıf aksiyomlar kullanmışlardır. Bu şekilde quasi-proximity, paraproximity ve pseudo-proximity gibi genelleştirilmiş proximity bağıntılar literatürdeki yerini almıştır.

1963 yılında Pervin [17] ve Leader [18], Efremovič'in aksiyomlar kümesinin genelleştirmesini birbirinden bağımsız olarak çalışmışlardır. Pervin, simetri aksiyomunu çıkararak quasi-proximity bağıntısını elde etmiştir. Leader ise simetri aksiyomunu ihmal etmenin yanı sıra (P5) aksiyomunun daha zayıf bir

formunu kullanmıştır. Her topolojik uzaydan $A \delta B \iff A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ şeklinde tanımlı δ bağıntısıyla bir genelleştirilmiş proximity uzay elde edilebileceği ve tersine, eğer kapanış operatörü $cl(A) = \{x: \{x\} \delta A\}$ şeklinde tanımlanırsa her quasi-proximity uzaydan da bir topolojik uzay elde edilebileceği gösterilmiştir.

Lodato [19], daha sonra Leader'ın aksiyomlar kümesine simetri şartını ekleyerek Lodato proximity olarak ifade edilen simetrik bağıntıyı elde etmiştir. Ayrıca üzerinde Lodato proximity bağıntısı tanımlı her kümenin R_0 aksiyomunu (Her açık küme, noktalarının her birinin kapanışını içerir) sağladığını kanıtlamıştır. Lodato, eğer δ bağıntısı $A \delta B \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ şeklinde tanımlanırsa, herhangi bir R_0 uzayından verilen topoloji ile uyumlu bir Lodato proximity elde edilebileceğini göstermiştir.

1960'larda Hayashi [20, 21], paraproximity kavramını ve pseudo-proximity bağıntısını, Leader [22] ise lokal proximity uzayları tanımlamıştır.

1970 yılında Naimpally and Warrack [23] bu konudaki en geniş kapsamlı çalışma olan "Proximity Uzaylar" adlı kitabı yayınlamışlardır.

Proximity bağıntılarının iki formu mevcuttur. Bunlardan biri klasik anlamda ele aldığımız uzaysal (spatial) EF-proximity bağıntısı, diğeri ise son yıllarda çok fazla uygulaması olan ve farklı alanlara uygulanabilirliği yüksek olan betimsel (descriptive) EF-proximity bağıntısıdır. Betimsel EF-proximity kavramı 2007 yılında Peters [24, 25] tarafından tanımlanmış olup belirli özelliklere göre sınıflandırdığımız nesnelerin betimsel olarak yakınlığını inceler. Betimsel EF-proximity tek bir dijital görüntünün içindeki parçaların veya ayrık dijital görüntülerdeki yakın ya da uzak kümelerin parçalarının tanımlanması, betimlenmesi, analiz edilmesi ve sınıflandırılması konusunda oldukça yararlı ve kullanışlıdır.

Son yıllarda proximity uzaylar teorisinin sitoloji (hücre biyolojisi) alanında, kriminolojide el yazısı sahteciliği ve sahte imza tespitinde, zoolojide kamuflaj konusunda ve digital görüntü işleme gibi güncel birçok alanda uygulamalarının mevcut olduğunu gösteren çok sayıda araştırma yayınlanmıştır (bkz. [26–28]).

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [29], Kent [30], Wyler [31], Schwartz [32] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [29], belli bir kaynaktan başlangıç kaldırmaların (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriye tanımlamıştır. Wyler [31] ise topolojik kategori kavramını tam latris kategorisindeki fonktora dayandırarak tanımlamıştır.

Genel topolojide ayırma aksiyomları farklı noktaları ve ayırık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu aksiyomlar Urysohn metrikleşme teoremi, Urysohn lemması, Tietze genişleme teoremi, Tychonoff teoremi gibi çok önemli teoremlerde karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olmaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeler ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları gibi bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemelerin çoğu kapanış operatörleri yardımıyla yapılmıştır. Baran [33], 1990 yılında başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeleri kullanarak topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını direkt olarak tanımladı ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli [34] anlamında kapanış operatörü oluşturduğunu gösterdi [35]. Baran, 1996 yılında [36] Hausdorffluk, 1997 yılında [37] kompaktlık, 1998 yılında [38] regülerlik ve normallik kavramlarını, 2006 yılında da Kula ile birlikte [39] bağlantılılık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletti.

Klasik T_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ayırma aksiyomları Baran [40] tarafından kategorik olarak çalışılmış, genel topolojideki tek bir kavramın topolojik kategorilerde pek çok farklı karakterizasyonu olabileceğini göstermiştir. Bu kavramların

farklı formları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Örneğin, topolojik uzaylar kategorisinde alışılmış T_0 aksiyomuna denk olan iki farklı $(\overline{T}_0, T'_0)$, $PreT_2$ aksiyomuna denk olan iki farklı $(Pre\overline{T}_2, PreT'_2)$ ve T_3 aksiyomuna denk olan dört farklı $(\overline{T}_3, T'_3, S\overline{T}_3, ST'_3)$ kategorik tanım vardır.

Pre-Hausdorff objelerin pek çok kullanım alanı mevcuttur. Örneğin Mielke [41], bir topolojik kategoride bir toposun geometrik morfizmle elde edilen görüntüsünün $PreT'_2$ objelerin oluşturduğu alt kategori içinde yer aldığını ispatlamıştır. $PreT'_2$ objeler özellikle genel geometrik realizasyonlar teorisinde, birleşik aralıklar ve bunların yerini tutan homotopi yapılarında kullanılmaktadır ve önemlidir [41]. Dolayısıyla bir topolojik kategoride geometrik teorilerin çalışılabilmesi için pre-Hausdorff objelerin anlaşılması gerekmektedir.

Mielke [42], bir topostada decidable objeleri karakterize etmek için pre-Hausdorff objeleri kullanmıştır. Ayrıca Baran [36, 38] herhangi bir topolojik kategoride Hausdorff, regüler ve normal objelerin çeşitli formlarını, pre-Hausdorff objeler yardımıyla tanımlamıştır.

Baran [40], kümeler üzerinde tanımlanmış keyfi bir topolojik kategori için öncelikle bir p noktasında, yani lokal olarak ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır. Ardından bunu topos teorideki üreteç eleman (the generic element) metodunu ([43], s. 39) kullanarak noktadan bağımsız olan tanımlara genelleştirmiştir. Topostaki objeler noktalara sahip olmayabilir, fakat bu objelerin her zaman bir üreteç noktası mevcuttur. Bu genelleştirmeyi yapmasının bir nedeni budur. Diğer bir nedeni de keyfi topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarının bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmış olmasıdır ([40], s. 335).

Kümeler ve fonksiyonlardan oluşan kategori **SET**, proximity uzaylar ve proximity dönüşümlerden oluşan kategori **PROX** ile gösterilmek üzere Hunsaker ve Sharma [44] $\mathcal{U}: \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$ fanktorunun bir topolojik fanktor olduğunu, yani **PROX** kategorisinin **SET** kategorisi üzerinde bir topolojik kategori olduğunu göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında temel olarak Hausdorffluk ve regülerlik kavramları Proximity uzaylar topolojik kategorisinde karakterize edilerek aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

İlk olarak proximity uzay kavramı, örnekleri, özellikleri, temel kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir. Ardından kapalılık, kuvvetli kapalılık kavramları ve p noktasında $\bar{T}_0, T'_0, T_1$ ayırma aksiyomları yardımıyla **PROX** kategorisinde p noktasında $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

Lokalde elde edilen karakterizasyonların genelde de yapılması amacıyla herhangi bir topolojik kategori için genelde ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir. Bu tanımlarla **PROX** kategorisinde $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

PROX kategorisinde lokalde ve genelde pre-Hausdorff, Hausdorff ve regüler objeler belirlendikten sonra karakterize ettiğimiz bu objelerin her birinin çeşitli formlarının aralarında ortaya çıkan ilişkiler incelenmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde proximity uzay kavramı, örnekleri, özellikleri, temel kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler ayrıntılı olarak verilmiştir.

1.1. Proximity Uzaylar

Bir (X, τ) topolojik uzayında τ topolojisi, “ $x, A \subset X$ in bir kapanış noktasıdır” bağıntısına ilişkin Kuratowski tarafından verilen kapanış aksiyomları ile belirlenir. x, A nın bir kapanış noktası olduğunda “ x noktası A kümesine yakındır” diyebiliriz. Bu yakınlık bağıntısına göre sürekli bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, “ x noktası A kümesine yakın iken $f(x)$ noktası $f(A)$ kümesine yakındır” özelliğini sağlayacak şekilde tanımlanabilir. Bu şekilde X in A ve B alt kümeleri için “ A kümesi B kümesine yakındır” bağıntısı aksiyomlaştırılmıştır.

Tanım 1.1.1. [23] X boştan farklı bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. X in kuvvet kümesi üzerindeki bir δ ikili bağıntısına, eğer aşağıdaki aksiyomları sağlarsa X üzerinde bir Efremovič proximity (EF-proximity) denir. (X, δ) çiftine de EF-proximity uzay adı verilir.

$$\mathbf{P1)} \quad A \delta B \iff B \delta A$$

$$\mathbf{P2)} \quad A \delta (B \cup C) \iff A \delta B \text{ veya } A \delta C$$

$$\mathbf{P3)} \quad A \delta B \implies A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

$$\mathbf{P4)} \quad A \cap B \neq \emptyset \implies A \delta B$$

$$\mathbf{P5)} \quad A \bar{\delta} B \implies A \bar{\delta} E \text{ ve } (X \setminus E) \bar{\delta} B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

Burada $A \bar{\delta} B$ ifadesi, $A \delta B$ ifadesinin olumsuzudur. Genel olarak $A \delta B$, “ A yakındır B ” şeklinde okunurken $A \bar{\delta} B$, “ A yakın değildir B ” veya “ A uzaktır B ” şeklinde okunur.

Ayrıca δ EF-proximity bağıntısı aşağıdaki aksiyomu da sağlarsa ayrılmış (separated) EF-proximity adını alır.

$$\mathbf{P6)} \quad \{x\} \delta \{y\} \implies x = y$$

“Güçlü Aksiyom (The Strong Axiom)” olarak adlandırılan (P5) aksiyomu proximity uzaylar teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Fakat bazı genelleştirilmiş proximity uzaylarda bu aksiyom ya çıkarılmıştır ya da daha zayıf bir şartla değiştirilmiştir.

Bir küme üzerinde ayrık ve ayrık olmayan topolojiler tanımlanabildiği gibi ayrık (diskre) ve ayrık olmayan (indiskre) proximity bağıntıları da mevcuttur.

Tanım 1.1.2. X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere;

$$A \delta B \iff A \cap B \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlı δ bağıntısına X üzerinde diskre proximity denir.

Tanım 1.1.3. X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere;

$$A \delta B \iff A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlı δ bağıntısına X üzerinde indiskre proximity denir.

Topolojik uzaylarda sürekli fonksiyonların, düzgün (uniform) uzaylarda düzgün (uniformly) sürekli fonksiyonların proximity uzaylar teorisindeki karşılığı olan proximity dönüşüm kavramının tanımını verelim:

Tanım 1.1.4. (X, δ) ve (Y, δ') iki proximity uzay, $A, B \subseteq X$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $A \delta B$ olduğunda $f(A) \delta' f(B)$ ise f 'ye proximity dönüşüm (p -dönüşüm) denir.

Buna denk olarak f bir p -dönüşümdür ancak ve ancak $C, D \subseteq Y$ için $C \bar{\delta} D$ olduğunda $f^{-1}(C) \bar{\delta} f^{-1}(D)$ dir.

Teorem 1.1.1. İki p -dönüşümün bileşkesi yine bir p -dönüşümdür.

İspat: $(X, \delta_1), (Y, \delta_2)$ ve (Z, δ_3) proximity uzaylar olmak üzere $f: (X, \delta_1) \rightarrow (Y, \delta_2)$ ve $g: (Y, \delta_2) \rightarrow (Z, \delta_3)$ iki p -dönüşüm olsun. p -dönüşümün tanımından $A, B \subseteq X$ için $A \delta_1 B \implies f(A) \delta_2 f(B)$ dir ve $f(A), f(B) \subseteq Y$ olduğundan $f(A) \delta_2 f(B) \implies g(f(A)) \delta_3 g(f(B))$ olur. Buradan $A \delta_1 B \implies g(f(A)) \delta_3 g(f(B))$ elde edilir. O halde $g \circ f: (X, \delta_1) \rightarrow (Z, \delta_3)$ bir p -dönüşümdür.

Tanım 1.1.5. f birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere hem f hem de f^{-1} birer p -dönüşüm ise f ye proximity izomorfizm (p -izomorfizm) denir.

Tanım 1.1.6. δ_1 ve δ_2 bağıntıları X üzerinde iki proximity olsun. Her $A, B \subseteq X$ için $A \delta_1 B \implies A \delta_2 B$ sağlanıyorsa δ_1, δ_2 den daha incedir veya δ_2, δ_1 den daha kabadır denir ve $\delta_2 < \delta_1$ şeklinde gösterilir. Yani;

$$\delta_2 < \delta_1 \iff A \delta_1 B \text{ ise } A \delta_2 B$$

Eğer $\delta_1 < \delta_2$ ve $\delta_2 < \delta_1$ ise δ_1, δ_2 ye denktir denir ve $\delta_1 \cong \delta_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.7. (X, δ) bir proximity uzay ve $Y \subset X$ olsun. $A, B \subseteq Y$ için $A \delta_Y B \iff A \delta B$ ile tanımlı δ_Y bağıntısı Y üzerinde bir proximity bağıntısıdır. Bu bağıntıya alt uzay proximity bağıntısı denir. (Y, δ_Y) uzayına da (X, δ) proximity uzayının alt uzayı adı verilir.

Proximity uzayların $\{(X_\alpha, \delta_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ailesinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1.8. Her $\alpha \in \Lambda$ için $(X_\alpha, \delta_\alpha)$ proximity uzaylar olmak üzere $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ kümesi her $\alpha \in \Lambda$ için X_α kümelerinin kartezyen çarpımını gösterecek şekilde $A, B \subseteq X$ olsun. Buna göre X üzerindeki δ çarpım proximity bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$A \delta B \iff A$ ve B nin sırasıyla $\{A_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ ve $\{B_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$ sonlu örtülerinin her bir çifti için ve her bir $\alpha \in \Lambda$ için $\Pi_\alpha(A_i) \delta_\alpha \Pi_\alpha(B_j)$ olacak şekilde bir (A_i, B_j) ikilisi mevcuttur.

Burada $\Pi_\alpha: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ şeklinde tanımlıdır. Yani Π_α, X in X_α üzerine izdüşüm fonksiyonudur.

Tanım 1.1.9. [45] X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olsun. X in kuvvet kümesi üzerindeki bir $\mathfrak{B}$ ikili bağıntısına, eğer aşağıdaki aksiyomları sağlarsa X üzerindeki proximity baz denir.

$$\mathbf{B1)} \quad (\emptyset, X) \notin \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{B2)} \quad A \cap B \neq \emptyset \implies (A, B) \in \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{B3)} \quad (A, B) \in \mathfrak{B} \iff (B, A) \in \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{B4)} \quad (A, B) \in \mathfrak{B} \text{ ve } A \subseteq A^*, B \subseteq B^* \implies (A^*, B^*) \in \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{B5)} \quad (A, B) \notin \mathfrak{B} \implies (A, E) \notin \mathfrak{B} \text{ ve } (X \setminus E, B) \notin \mathfrak{B} \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

Eğer her $x, y \in X$ için $(\{x\}, \{y\}) \in \mathfrak{B} \implies x = y$ oluyorsa X kümesi üzerindeki $\mathfrak{B}$ proximity bazı ayrılmıştır denir.

Not 1.1.1. $\mathfrak{B}, X$ kümesi üzerindeki bir proximity baz olmak üzere X in kuvvet kümesi üzerindeki bir $\delta(\mathfrak{B})$ ikili bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

A ve B nin sırasıyla $\{A_i \mid i \in J_m\}$ ve $\{B_j \mid j \in J_n\}$ sonlu örtüleri verildiğinde $(A_i, B_j) \in \mathfrak{B}$ olacak şekilde bir $(i, j) \in J_m \times J_n$ çifti mevcut ise $(A, B) \in \delta(\mathfrak{B})$ dir.

Bu şekilde tanımlı $\mathfrak{B}$ proximity bazı tarafından üretilen $\delta(\mathfrak{B})$ bağıntısı $\mathfrak{B}$ bağıntısından ince X üzerindeki en kaba proximity bağıntısıdır. Ayrıca $\delta(\mathfrak{B})$ proximity bağıntısı ayrılmıştır ancak ve ancak $\mathfrak{B}$ proximity bazı ayrılmıştır.

1.1.1. Proximity Uzay Örnekleri

Bu bölümde çeşitli proximity uzay örnekleri verilmiştir.

Örnek 1.1.1. (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. A ve B kümeleri arasındaki uzaklık $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ ile verilsin. Buna göre $A \delta B \iff d(A, B) = 0$ şeklinde tanımlanan δ , bir EF-proximity bağıntısıdır.

EF-proximity uzay aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$$P1) A \delta B \iff B \delta A$$

$A \delta B \iff d(A, B) = 0$ olup metrik uzayın tanımından $d(B, A) = 0$ olur. Dolayısıyla $B \delta A$ elde edilir.

$$P2) A \delta (B \cup C) \iff A \delta B \text{ veya } A \delta C$$

$$\begin{aligned} A \delta (B \cup C) &\iff d(A, B \cup C) = 0 = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B \cup C\} \\ &\iff \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B \vee y \in C\} = 0 \\ &\iff \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = 0 \vee \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in C\} = 0 \\ &\iff d(A, B) = 0 \text{ veya } d(A, C) = 0 \\ &\iff A \delta B \text{ veya } A \delta C \end{aligned}$$

$$P3) A \delta B \implies A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

$A \delta B$ ise tanımdan $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = 0$ dir. Kabul edelim ki $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ olsun. O zaman $A = \emptyset$ için $d(A, B) = \inf \{d(\emptyset, y) \mid y \in B\} = \inf \{\emptyset\} = \infty \neq 0$ ve $B = \emptyset$ için $d(A, B) = \inf \{d(x, \emptyset) \mid x \in A\} = \inf \{\emptyset\} = \infty \neq 0$ olur ve çelişki elde edilir. O halde $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ dir.

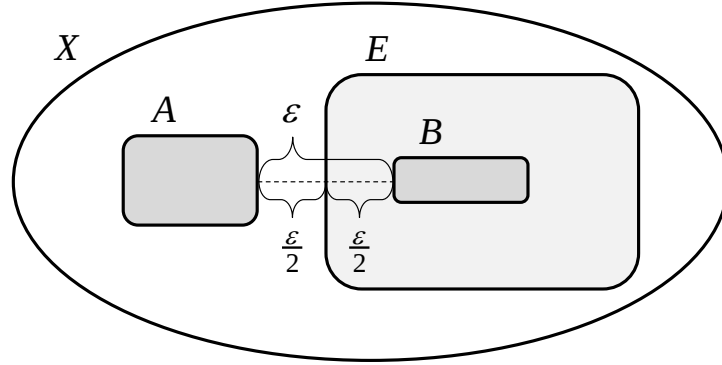
$$P4) A \cap B \neq \emptyset \implies A \delta B$$

$A \cap B \neq \emptyset$ ise $\exists x \in (A \cap B)$ vardır. Buradan $x \in A, x \in B$ ve $d(x, x) = 0$ olduğundan $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = 0$ olur. O halde $A \delta B$ elde edilir.

$$P5) A \bar{\delta} B \implies A \bar{\delta} E \text{ ve } (X \setminus E) \bar{\delta} B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

$A \bar{\delta} B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $d(A, B) = \epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. $E = \{x \in X \mid d(x, B) \leq \frac{\epsilon}{2}\}$ seçildiğinde $d(A, E) \geq \frac{\epsilon}{2}$ ve $d(X \setminus E, B) \geq \frac{\epsilon}{2}$ bulunur. Buradan $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ elde edilir.

(P5) aksiyomunun sağlandığı aşağıdaki şekille de gösterilebilir:



Şekil 1.1. (P5) aksiyomunu sağlayan bir E alt kümesi

$d(A, B) = \epsilon$ olmak üzere, E kümesi Şekil 1.1 deki gibi seçildiğinde $d(A, E) = \frac{\epsilon}{2}$ ve $d(X \setminus E, B) = \frac{\epsilon}{2}$ olur. O halde $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ dir.

Örnek 1.1.2. $X = \{a, b\}$ iki elemanlı bir küme olsun. $P(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ dir. Aşağıda verilen $P(X)$ üzerinde tanımlı δ_1 ve δ_2 bağıntıları birer EF-proximity bağıntısıdır.

$$\delta_1 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X)\}$$

$$\delta_2 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X),$$

$$(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}$$

δ_1 EF-proximity bağıntısı diskredir. Ayrıca farklı tek nokta çiftlerini içermediğinden (P6) aksiyomu da sağlanır ve δ_1 ayrılmış proximity bağıntısıdır.

δ_2 EF-proximity bağıntısı indiskredir. Ayrıca farklı tek nokta çiftlerini içerdiğinden (P6) aksiyomu sağlanmaz ve δ_2 ayrılmış proximity bağıntısı değildir.

Örnek 1.1.3. $X = \{a, b, c\}$ üç elemanlı bir küme olsun. $P(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ dir. Aşağıda verilen $P(X)$ üzerinde tanımlı δ_i ($i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) bağıntıları birer EF-proximity bağıntısıdır.

$$\begin{aligned}
\delta_1 = & \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (\{c\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{b, c\}), \\
& (\{a, c\}, \{a, c\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X), (X, \{c\}), (\{c\}, X), \\
& (X, \{a, b\}), (\{a, b\}, X), (X, \{b, c\}), (\{b, c\}, X), (X, \{a, c\}), (\{a, c\}, X), \\
& (\{a\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{a\}), (\{b\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, b\}, \{b\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{b\}), (\{c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{c\}), \\
& (\{c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), \\
& (\{a, c\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\})\}
\end{aligned}$$

δ_1 EF-proximity bağıntısı diskredir ve ayrılmıştır.

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \delta_1 \cup \{(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{a\}), (\{b\}, \{a, c\}), \\
& (\{a, c\}, \{b\})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3 = & \delta_1 \cup \{(\{a\}, \{c\}), (\{c\}, \{a\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{a\}), (\{c\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, b\}, \{c\})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_4 = & \delta_1 \cup \{(\{b\}, \{c\}), (\{c\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b\}), (\{c\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, b\}, \{c\})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_5 = & \delta_1 \cup \{(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}), (\{a\}, \{c\}), (\{c\}, \{a\}), (\{b\}, \{c\}), (\{c\}, \{b\}), \\
& (\{a\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, \{a\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b\}), (\{c\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, b\}, \{c\})\}
\end{aligned}$$

δ_i ($i = \{2, 3, 4, 5\}$) bağıntıları farklı tek nokta çiftlerini içerdiğinden ayrılmış proximity bağıntıları değildir. δ_5 EF-proximity bağıntısı indiskredir. Çünkü $\delta_5 = [P(X) \setminus \{\emptyset\}] \times [P(X) \setminus \{\emptyset\}]$ dir.

Örnek 1.1.4. [23] (X, τ) topolojik uzayı normal uzay olmak üzere X in A ve B alt kümeleri için $A \delta B \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ile tanımlı δ bağıntısı X üzerinde bir EF-proximity bağıntısıdır.

EF-proximity uzay aksiyomlarından (P1)–(P4) aksiyomlarının sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. (P5) aksiyomunun sağlandığını gösterelim:

$$P5) A \bar{\delta} B \implies A \bar{\delta} E \text{ ve } (X \setminus E) \bar{\delta} B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

$A \bar{\delta} B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ dir. Uzay normal ve $\bar{A}$, $\bar{B}$ kapalı kümeler olduğundan $\bar{B} \subseteq E$ ve $\bar{A} \cap \bar{E} = \emptyset$ olacak şekilde bir E açığı mevcuttur. Burada $(X \setminus E)$ kapalı ve $\bar{B} \subseteq E$ olduğundan $(X \setminus E) \cap \bar{B} = \emptyset$ bulunur. O halde $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ elde edilir.

Örnek 1.1.5. [23] (X, τ) topolojik uzayı tam regüler olsun. X in A ve B alt kümeleri fonksiyonel olarak ayrılabilir ancak ve ancak $f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır.

Buna göre X üzerinde bir δ EF-proximity bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A \bar{\delta} B \iff A \text{ ve } B \text{ fonksiyonel olarak ayrılabilir.}$$

Örnek 1.1.6. [46] (X, τ) topolojik uzayı lokal kompakt ve Hausdorff uzay olsun. X 'in boştan farklı A ve B alt kümeleri verilsin. $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ sırasıyla A ve B nin kapanışlarını göstermek üzere X üzerinde bir δ EF-proximity bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A \bar{\delta} B \iff \bar{A} \text{ ve } \bar{B} \text{ den en az biri kompakt ve } \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \text{ dir.}$$

Buna denk olarak aşağıdaki tanım da verilebilir:

$$A \delta B \iff \bar{A} \text{ ve } \bar{B} \text{ kompakt değildir veya } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset \text{ dir.}$$

Bu şekilde tanımlı proximity bağıntısı Alexandroff proximity olarak adlandırılır. Alexandroff proximity uzay bir ayrılmış EF-proximity uzaydır.

Örnek 1.1.7. [23] $(X, *, \tau)$ bir topolojik grup ve $\mathcal{N}$ de birimin komşuluklar sistemi olsun. O zaman aşağıdaki şekilde δ_1 ve δ_2 proximity bağıntıları tanımlanabilir:

$$A \delta_1 B \iff \text{Her } N \in \mathcal{N} \text{ için } NA \cap B \neq \emptyset \text{ dir}$$

$$A \delta_2 B \iff \text{Her } N \in \mathcal{N} \text{ için } AN \cap B \neq \emptyset \text{ dir}$$

Genelde δ_1 ve δ_2 proximity bağıntıları birbirinden farklı olmasına rağmen X in değişmeli ya da kompakt olduğu durumlarda birbirine denk olur.

Örnek 1.1.8. [23] $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün (uniform) uzay olmak üzere, aşağıdaki şekilde X üzerinde bir δ proximity bağıntısı tanımlanabilir:

$A \delta B \iff$ Her $\mu \in \mathcal{U}$ için aşağıdaki birbirine denk üç şarttan biri (dolayısıyla hepsi) sağlanır:

- i) $\mu[A] \cap B \neq \emptyset$
- ii) $A \cap \mu[B] \neq \emptyset$
- iii) $(A \times B) \cap \mu \neq \emptyset$

1.1.2. Proximity Tarafından Üretilen Topoloji

Bir X kümesi üzerindeki proximity bağıntısı tarafından topoloji nasıl üretilir sorusunun cevabını vermeden önce bazı teoremlerin ispatında kullanacağımız (P1), (P2) ve (P5) aksiyomlarından kolaylıkla elde edilebilen aşağıdaki Lemma'yı verelim:

Lemma 1.1.1. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $A, B, C, D \subseteq X$ olsun.

- i) $A \delta B, A \subset C$ ve $B \subset D$ ise $C \delta D$ dir. Dolayısıyla X kümesi boştan farklı her alt kümesine yakındır.
- ii) $A \delta \{x\}$ ve $\{x\} \delta B$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $A \delta B$ dir.

Teorem 1.1.2. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$A \text{ kapalıdır ancak ve ancak } \{x\} \delta A \implies x \in A$$

şeklinde tanımlanan bütün kapalı kümelerin tümleyenlerinin sınıfı X kümesi üzerinde bir $\tau = \tau(\delta)$ topolojisini verir. Bu şekilde elde edilen $\tau(\delta)$ topolojisine δ proximity bağıntısı tarafından üretilen topoloji denir.

İspat: $\emptyset$ ve X in kapalı kümeler oldukları açıktır.

Kapalı kümelerin keyfi kesişimlerinin kapalı olduğunu gösterelim. $\{A_i \mid i \in I\}$ kapalı kümelerin keyfi bir sınıfı olsun. Eğer $\{x\} \delta \bigcap_{i \in I} A_i$ ise Lemma 1.1.1 den her bir $i \in I$ için $\{x\} \delta A_i$ dir. A_i ler kapalı kümeler olduklarından her bir $i \in I$ için $x \in A_i$ dir. Buradan $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ elde edilir. O halde $\bigcap_{i \in I} A_i$ kapalıdır.

Şimdi de kapalı kümelerin sonlu birleşimlerinin kapalı olduğunu gösterelim. A_1, A_2 kapalı ve $\{x\} \delta (A_1 \cup A_2)$ olsun. (P2) aksiyomundan $\{x\} \delta A_1$ veya $\{x\} \delta A_2$ dir. A_1 ve A_2 kapalı olduğundan $x \in A_1$ veya $x \in A_2$ bulunur. Yani $x \in (A_1 \cup A_2)$ dir. Böylece $A_1 \cup A_2$ kapalıdır.

Teorem 1.1.3. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $\tau = \tau(\delta)$ olmak üzere bir $A \subset X$ kümesinin $\bar{A}$ τ -kapanışı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\bar{A} = \{x \mid \{x\} \delta A\}$$

İspat: $\bar{A}$ kümesi A ve $A^\delta = \{x \mid \{x\} \delta A\}$ yı içeren bütün kapalı kümelerin kesişimini ifade ettiğinden $\bar{A} = A^\delta$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in A^\delta$ ise $\{x\} \delta A$ dır. Lemma 1.1.1 den $\{x\} \delta \bar{A}$ bulunur. $\bar{A}$ kapalı olduğundan $x \in \bar{A}$ dır. Böylece $A^\delta \subset \bar{A}$ elde edilir.

$\bar{A} \subset A^\delta$ ifadesini ispat etmek için A^δ nın kapalı olduğunu, yani $\{x\} \delta A^\delta \implies x \in A^\delta$ ifadesinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $x \notin A^\delta$ olsun. O zaman $\{x\} \bar{\delta} A$ dır. (P5) aksiyomundan $\{x\} \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} A$ olacak şekilde bir E kümesi vardır. Böylece $(X \setminus E)$ nin A ya yakın hiçbir noktası yoktur, yani $A^\delta \subset E$ dir. $\{x\} \bar{\delta} E$ olduğundan $\{x\} \bar{\delta} A^\delta$ elde edilir.

Sonuç 1.1.1. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $G \subset X$ olsun. Her $x \in G$ için $G \in \tau(\delta) \iff \{x\} \bar{\delta} (X \setminus G)$ dir.

Teorem 1.1.4. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $A, B \subset X$ olsun.

$$\text{i) } A \bar{\delta} B \implies \bar{B} \subset (X \setminus A)$$

$$\text{ii) } A \bar{\delta} B \implies B \subset (X \setminus A)^\circ$$

Burada kümelerin kapanışı ve içi $\tau(\delta)$ ya göre alınmıştır.

İspat: (X, δ) bir proximity uzay ve $A, B \subset X$ olsun.

i) $A \bar{\delta} B$ ve $x \notin (X \setminus A)$ olsun. O zaman $x \in A$ dır, yani $\{x\} \delta A$ olur. $A \bar{\delta} B$ olduğundan $\{x\} \bar{\delta} B$ bulunur. Buradan $x \notin \bar{B}$ elde edilir. O halde $\bar{B} \subset (X \setminus A)$ dır.

ii) $A \bar{\delta} B$ olsun. $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$ olduğunu biliyoruz. $x \notin (X \setminus A)^\circ$ ise $x \in \bar{A}$ dır. Buradan $\{x\} \delta A$ olur. $A \bar{\delta} B$ olduğundan $x \notin B$ elde edilir. O halde $B \subset (X \setminus A)^\circ$ dir.

Teorem 1.1.5. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere $A \delta B \iff \bar{A} \delta \bar{B}$ dır. Burada kapanış $\tau(\delta)$ ya göre alınmıştır.

İspat: Gereklik için $A \delta B$ olsun. $A \subseteq \bar{A}$ ve $B \subseteq \bar{B}$ olduğundan Lemma 1.1.1 den $\bar{A} \delta \bar{B}$ elde edilir. Yeterlilik için $A \bar{\delta} B$ olduğunu kabul edelim. (P5) aksiyomundan $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ olacak şekilde bir E kümesi vardır. Teorem 1.1.4 den $\bar{B} \subset E$ ve Lemma 1.1.1 den $A \bar{\delta} E \implies A \bar{\delta} \bar{B}$ bulunur. (P1) simetri aksiyomundan $\bar{A} \bar{\delta} \bar{B}$ elde edilir.

Tanım 1.1.10. X kümesi üzerinde bir τ topolojisi ve bir δ proximity bağıntısı tanımlansın. $\tau = \tau(\delta)$ ise δ proximity bağıntısı τ topolojisi ile uyumludur (compatible) denir.

Teorem 1.1.6. [23] (X, τ) topolojik uzayı tam regüler olmak üzere " $A \bar{\delta} B \iff A$ ve B fonksiyonel olarak ayrılabilir" şeklinde tanımlanan δ proximity bağıntısı τ topolojisi ile uyumludur. Eğer (X, τ) topolojik uzayı Tychonoff (Tam regüler ve T_1) ise δ ayrılmış proximity bağıntısı olur.

İspat: δ bağıntısının bir proximity bağıntısını olduğunu göstermek için (P5) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Diğer aksiyomların sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. $A \bar{\delta} B$ ve $f, f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ olacak şekilde X den $[0, 1]$ e sürekli bir fonksiyon olsun. $E = \{x \in X \mid \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1\}$ alalım. O zaman $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ dir. Örneğin $g, [0, 1]$ den $[0, 1]$ e aşağıdaki şekilde tanımlı bir fonksiyon olsun:

$$g(y) = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

g fonksiyonu sürekli dir. Dolayısıyla $g \circ f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu da sürekli olur. Burada $g \circ f(A) = 0$ ve $g \circ f(E) = 1$ dir.

Şimdi (X, τ) uzayı Tychonoff olduğunda δ nın ayrılmış proximity bağıntısı olduğunu gösterelim:

(X, τ) uzayı Tychonoff, yani tam regüler ve T_1 olsun. (X, τ) uzayı T_1 olduğundan $x \neq y$ için $x \notin \overline{\{y\}}$ dir. Uzay tam regüler olduğundan $\{x\}$ ve $\overline{\{y\}}$ fonksiyonel olarak ayrılabilir dir. Buradan $\{x\} \bar{\delta} \{y\}$ elde edilir.

Son olarak $\tau = \tau(\delta)$ olduğunu gösterelim. $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. O zaman $X \setminus G$ kümesi kapalı ve $x \notin (X \setminus G)$ dir. Buradan $f(x) = 0$ ve $f(X \setminus G) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu mevcuttur, yani $\{x\} \bar{\delta} (X \setminus G)$ dir. Sonuç 1.1.1 den $G \in \tau(\delta)$ elde edilir.

Tersine $G \in \tau(\delta)$ ve $x \in G$ olsun. O zaman $\{x\} \bar{\delta} (X \setminus G)$ dir. Buradan $f(x) = 0$ ve $f(X \setminus G) = 1$ olacak şekilde τ -sürekli bir $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu mevcuttur. O halde $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ kümesi x in G de iç erilen bir τ -açık komşuluğudur. Dolayısıyla $G \in \tau$ elde edilir.

Sonuç 1.1.2. Tam regüler her topolojik uzay üzerinde uyumlu bir proximity bağıntısı, her Tychonoff uzayı üzerinde de ayrılmış bir proximity bağıntısı tanımlanabilir.

Teorem 1.1.6 nın tersi de doğrudur. Yani bir δ proximity bağıntısı tarafından üretilen $\tau(\delta)$ topolojisi her zaman tam regülerdir. Benzer şekilde ayrılmış

bir δ proximity bağıntısı tarafından üretilen $\tau(\delta)$ topolojisi de her zaman Tychonoff'tur.

Teorem 1.1.7. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

- i) δ_1 ve δ_2 bağıntıları bir X kümesi üzerinde tanımlı iki proximity olmak üzere; $\delta_1 < \delta_2 \implies \tau(\delta_1) \subset \tau(\delta_2)$ dir.
- ii) τ_1 ve τ_2 bir X kümesi üzerinde tanımlı tam regüler iki topoloji ve δ_1, δ_2 bağıntıları da X üzerinde sırasıyla τ_1, τ_2 ye göre " $A \bar{\delta} B \iff A$ ve B fonksiyonel olarak ayrılabilir" şeklinde tanımlı iki proximity olmak üzere; $\tau_1 \subset \tau_2 \implies \delta_1 < \delta_2$ dir.

İspat:

- i) $\delta_1 < \delta_2$ ve $A \in \tau(\delta_1)$ olsun. Sonuç 1.1.1 den her $x \in A$ için $\{x\} \bar{\delta}_1 (X \setminus A)$ bulunur. $\delta_1 < \delta_2$ olduğundan her $x \in A$ için $\{x\} \bar{\delta}_2 (X \setminus A)$ elde edilir. Böylece $A \in \tau(\delta_2)$ olur ve $\tau(\delta_1) \subset \tau(\delta_2)$ dir.
- ii) $\delta_1 < \delta_2$ ifadesini ispatlamak için $A \bar{\delta}_1 B \implies A \bar{\delta}_2 B$ olduğunu göstermeliyiz. $\tau_1 \subset \tau_2$ ve $A \bar{\delta}_1 B$ olsun. O zaman $f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ olacak şekilde τ_1 -sürekli bir $f: (X, \tau_1) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu mevcuttur. $\tau_1 \subset \tau_2$ olduğundan f aynı zamanda τ_2 -sürekli bir fonksiyondur. Buradan $A \bar{\delta}_2 B$ elde edilir.

Teorem 1.1.8. (X, δ_1) ve (Y, δ_2) proximity uzaylar olmak üzere $f: (X, \delta_1) \rightarrow (Y, \delta_2)$ p -dönüşümü $\tau(\delta_1)$ ve $\tau(\delta_2)$ ye göre süreklidir.

İspat: $f: (X, \delta_1) \rightarrow (Y, \delta_2)$ bir p -dönüşüm ve $\{x\} \delta_1 A$ olsun. O zaman $x \in \bar{A}$ dir. Buradan $f(x) \in f(\bar{A})$ elde edilir. Diğer taraftan f bir p -dönüşüm olduğundan $\{x\} \delta_1 A \implies \{f(x)\} \delta_2 f(A)$ dir. O zaman $f(x) \in \overline{f(A)}$ bulunur. Böylece $f(x) \in f(\bar{A}) \implies f(x) \in \overline{f(A)}$ elde edilir. Yani $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ dir. O halde f dönüşümü $\tau(\delta_1)$ ve $\tau(\delta_2)$ ye göre süreklidir.

1.1.3. Proximity Bağıntısının Alternatif Tanımı

Proximity uzaylarla ilgili çalışmalara alternatif bir yaklaşım sağlayan proximity komşuluk (p -komşuluk) kavramının tanımını verelim:

Tanım 1.1.11. [23] (X, δ) bir proximity uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. B , A nın bir proximity komşuluğudur ($A \ll B$) ancak ve ancak $A \bar{\delta} (X \setminus B)$ dir.

Lemma 1.1.2. [23] EF-proximity uzay aksiyomlarından (P5) aksiyomu aşağıdaki ifadeye denktir:

$A \bar{\delta} B \implies A \bar{\delta} (X \setminus C), (X \setminus D) \bar{\delta} B$ ve $C \bar{\delta} D$ olacak şekilde C ve D alt kümeleri mevcuttur.

İspat: (P5) aksiyomunun sağlandığını kabul edelim. O zaman $A \bar{\delta} B$ ise $A \bar{\delta} D$ ve $(X \setminus D) \bar{\delta} B$ olacak şekilde bir D kümesi vardır. $A \bar{\delta} D$ olduğundan $A \bar{\delta} (X \setminus C)$ ve $C \bar{\delta} D$ olacak şekilde bir C kümesi vardır.

Tersine, $A \bar{\delta} B$ iken $A \bar{\delta} (X \setminus C), (X \setminus D) \bar{\delta} B$ ve $C \bar{\delta} D$ olacak şekilde C ve D alt kümeleri mevcut olsun. $C \bar{\delta} D$ olduğundan $C \subset (X \setminus D)$ dir. $(X \setminus D) \bar{\delta} B$ olduğundan Lemma 1.1.1 (i) den $C \bar{\delta} B$ elde edilir. $E = X \setminus C$ olsun. $C = X \setminus E$ yazılabilir. O halde $A \bar{\delta} B$ iken $A \bar{\delta} E$ ve $(X \setminus E) \bar{\delta} B$ olacak şekilde bir E kümesi vardır.

Sonuç 1.1.3. $A \bar{\delta} B$ ise $A \ll C, B \ll D$ ve $C \bar{\delta} D$ olacak şekilde C ve D alt kümeleri vardır. Buna bağlı olarak bir (X, δ) ayrılmış EF-proximity uzayının $\tau(\delta)$ topolojisi Hausdorff olur.

Teorem 1.1.9. [23] (X, δ) bir EF-proximity uzay olmak üzere $\ll$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $X \ll X$ dir.

ii) $A \ll B \implies A \subset B$ dir.

Ayrıca (X, δ) uzayı diskre ise ifadenin tersi de sağlanır.

iii) $A \subset B \ll C \subset D \implies A \ll D$ dir.

iv) $i = 1, 2, \dots, n$ için $A \ll B_i \iff A \ll \bigcap_{i=1}^n B_i$ dir.

v) $A \ll B \implies (X \setminus B) \ll (X \setminus A)$ dır.

vi) $A \ll B$ ise $A \ll C \ll B$ olacak şekilde bir C kümesi vardır.

Eğer (X, δ) uzayı ayrılmış ise

vii) $\{x\} \ll (X \setminus \{y\}) \iff \{x\} \neq \{y\}$ dir.

Yukarıdaki teoremin (vi) ve (vii) maddelerinin, EF-proximity uzay aksiyomlarından sırasıyla (P5) ve (P6) aksiyomlarına denk olduğuna dikkat edelim.

Teorem 1.1.10. [23] X bir küme ve $\ll$ de $P(X)$ üzerinde Teorem 1.1.9 (i)–(vi) maddelerini sağlayan bir ikili bağıntı olsun. δ bağıntısı $A \ll B \iff A \bar{\delta} (X \setminus B)$ şeklinde tanımlansın. Buna göre δ , X üzerinde bir proximity bağıntısıdır. Ayrıca $\ll$ bağıntısı Teorem 1.1.9 (vii) maddesini de sağlıyorsa δ , ayrılmış proximity bağıntısı olur.

İspat: İspatı [23] de mevcuttur.

Tanım 1.1.12. (X, δ) bir proximity uzay, Y boştan farklı bir küme ve $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta^*)$ örten bir fonksiyon olsun. $\ll^*$ ve $\ll_\delta$ sırasıyla δ^* ve δ proximity bağıntılarından elde edilen p -komşuluk bağıntıları olmak üzere, f bir p -dönüşüm olacak şekildeki Y üzerindeki en ince proximity yapısı olan δ^* **bölüm proximity** bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

Her $A, B \subset Y$ için $A \ll^* B$ dir ancak ve ancak $[0, 1]$ aralığındaki her s rasyonel sayısı için $C_0 = A$, $C_1 = B$ olacak şekilde en az bir $C_s \subset Y$ vardır ve $s < t$ ise $f^{-1}(C_s) \ll_\delta f^{-1}(C_t)$ dir [47, 48].

Not 1.1.2. Tanım 1.1.12 de verilen $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta^*)$ fonksiyonu birebir ise, o zaman δ^* bölüm proximity bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

Her $A, B \subset Y$ için $A \delta^* B$ dir ancak ve ancak $f^{-1}(A) \delta f^{-1}(B)$ dir ([47], s. 591).

1.1.4. Genelleştirilmiş Proximity Uzaylar

EF-proximity uzay tanımında verilen aksiyomlardan bazıları ihmal edilerek veya daha zayıf aksiyomlarla değiştirilerek genelleştirilmiş proximity uzaylar ortaya çıkmıştır. Örneğin, Pervin [17] (P1) simetri aksiyomunu çıkararak quasi-proximity uzay da denilen P-proximity uzayı, Lodato [18] (P5) güçlü aksiyomunu daha zayıf bir aksiyomla değiştirerek LO-proximity uzayı elde etmiştir. Literatürde proximity uzayların birçok genelleştirilmiş formları mevcuttur. Bunlardan bazılarının EF-proximity uzayların ortaya çıkmasından daha önce de var olduğu bilinmektedir. Bu bölümde bazı genelleştirilmiş proximity uzaylar ve bunlar arasındaki ilişkilerden kısaca bahsedilmiştir.

Tanım 1.1.13. [49] $X \neq \emptyset$ bir küme ve λ , X in kuvvet kümesi üzerinde bir ikili bağıntı olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar verilsin.

$$\mathbf{GP0.} \{x\} \lambda \{y\} \implies x = y$$

$$\mathbf{GP1.} A \lambda B \iff B \lambda A$$

$$\mathbf{GP2.} A \lambda (B \cup C) \iff A \lambda B \text{ veya } A \lambda C$$

$$(A \cup B) \lambda C \iff A \lambda C \text{ veya } B \lambda C$$

$$\mathbf{GP3.} A \lambda B \implies A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

$$\mathbf{GP4.} A \cap B \neq \emptyset \implies A \lambda B$$

$$\mathbf{GP5.} A \bar{\lambda} B \implies A \bar{\lambda} E \text{ ve } (X \setminus E) \bar{\lambda} B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

$$\mathbf{GP6.} \{a\} \bar{\lambda} B \implies \{a\} \bar{\lambda} E \text{ ve } (X \setminus E) \bar{\lambda} B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

$$\mathbf{GP7.} A \lambda B \text{ ve } \forall b \in B \text{ için } \{b\} \lambda C \implies A \lambda C$$

$$\mathbf{GP8.} \{a\} \lambda B \text{ ve } \forall b \in B \text{ için } \{b\} \lambda C \implies \{a\} \lambda C$$

Burada $A \bar{\lambda} B$ ifadesi, $A \lambda B$ ifadesinin olumsuzudur.

Buna göre eğer λ bağıntısı;

- $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **EF-proximity** adını alır.
- $i = 2, 3, 4, 5$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **Quasi-proximity** veya **P-proximity** adını alır.
- $i = 1, 2, 3, 4, 7$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **LO-proximity** adını alır.
- $i = 2, 3, 4, 7$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **LE-proximity** adını alır.
- $i = 1, 2, 3, 4, 6$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **R-proximity** adını alır.
- $i = 0, 1, 2, 3, 4, 8$ için (GP_i) aksiyomlarını sağlarsa **S-proximity** adını alır.

Ayrıca S-proximity bağıntısı hariç diğer genelleştirilmiş proximity bağıntıları ek olarak (GP_0) aksiyomunu da sağlıyorsa bunlara ayrılmış proximity denir.

Genelleştirilmiş proximity uzaylar arasındaki bazı ilişkiler aşağıda verilmiştir:

Not 1.1.3. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\lambda, P(X)$ üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Buna göre;

- i. (X, λ) uzayı ayrılmış LO-proximity uzay ise S-proximity uzaydır.
- ii. (X, λ) uzayı EF-proximity uzay ise R-proximity uzaydır.
- iii. (X, λ) uzayı P-proximity uzay ise LE-proximity uzaydır.
- iv. (X, λ) uzayı EF-proximity uzay ise LO-proximity uzaydır.
- v. (X, λ) uzayı ayrılmış EF-proximity uzay ise S-proximity uzaydır.

1.1.5. Betimsel (Descriptive) Proximity Uzaylar

Proximity bağıntılarının iki formu mevcuttur. Bunlardan biri klasik anlamda ele aldığımız uzaysal (spatial) EF-proximity bağıntısı, diğeri ise son yıllarda çok fazla uygulaması olan ve farklı alanlara uygulanabilirliği yüksek olan betimsel (descriptive) EF-proximity bağıntısıdır. Bu bölümde betimsel EF-proximity bağıntısından kısaca bahsedilmiştir.

X boştan farklı bir küme, δ_Φ $P(X)$ üzerinde bir bağıntı (betimsel proximity bağıntısı) ve $x \in X$ olsun. $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n\}$ her bir x in özelliklerini temsil eden $\phi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ inceleme (probe) fonksiyonlarının bir kümesi olmak üzere $\Phi(x)$, x objesi için bir özellik vektörünü gösterebilir. Yani $\Phi(x)$, x elemanını tasvir eden özellik değeri vektörüdür. Özellik vektörü bir elemanın betimlemesidir. Burada $\Phi(x) = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_n(x)\}$ dir ve $1 \leq i \leq n$ için $\phi_i(x)$, x elemanının özellik değerini göstermektedir.

$A, B \in P(X)$ olsun. $\mathcal{Q}(A)$ ve $\mathcal{Q}(B)$ sırasıyla A ve B nin elemanlarının betimlemelerinin kümesini gösterebilir. Yani, $\mathcal{Q}(A) = \{\Phi(a) \mid a \in A\}$ ve $\mathcal{Q}(B) = \{\Phi(b) \mid b \in B\}$ dir.

$A \delta_\Phi B$ ifadesi “ A betimsel olarak B ye yakındır” şeklinde okunur. A ve B nin betimsel proximity bağıntısı $A \delta_\Phi B \iff \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) \neq \emptyset$ şeklinde tanımlanır.

$A \delta_\Phi B$ ifadesinin olumsuzu A ve B nin betimsel uzak olmasıdır ve $A \underline{\delta}_\Phi B$ ile gösterilir, $A \underline{\delta}_\Phi B \iff \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B) = \emptyset$ şeklinde tanımlanır.

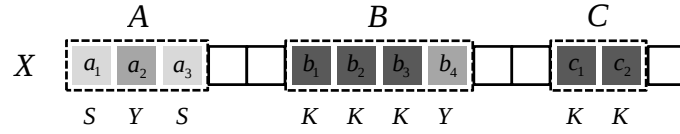
A ve B nin betimsel kesişimi $A \cap_\Phi B$ ile gösterilir ve $A \cap_\Phi B = \{x \in A \cup B \mid \Phi(x) \in \mathcal{Q}(A) \text{ ve } \Phi(x) \in \mathcal{Q}(B)\}$ şeklinde tanımlanır.

Bazı $a \in A$ ve $b \in B$ elemanları için $\Phi(x) = \Phi(a) = \Phi(b)$ olması koşuluyla $x \in A \cup B$ elemanı $A \cap_\Phi B$ kesişimindedir. $A \cap_\Phi B$ betimsel kesişimi boştan farklı olduğunda A ve B nin ayık olabileceğini gözlemleyebiliriz.

$A, B \in P(X)$ kümelerinin betimsel yakınlığını incelemek için A nın ve B nin kapanışlarının (cl) betimsel kesişimlerine bakılmalıdır. $cl(A) \cap_\Phi cl(B) \neq \emptyset$ ise $A \delta_\Phi B$ dir. Buna göre betimsel proximity bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\delta_\Phi = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid cl(A) \cap_\Phi cl(B) \neq \emptyset\}$$

Örnek 1.1.9. [50] S sarı, Y yeşil ve K kırmızı rengi göstermek üzere Şekil 1.2 deki renkli ve beyaz kareler bir örgünün hücrelerini temsil etmektedir. Kumaştaki bir hücre, bir örgü ipliğinin bir başka örgü ipliğiyle örtüşen kısmıdır. Bir dokumadaki her katmanın paralel iplikleri, diğer katmandaki ipliklerle dikeydir ve hücreleri kare yapmaktadır.



Şekil 1.2. Betimsel proximity bağıntısı örneği

Φ örgüdeki hücre renklerini temsil eden inceleme fonksiyonlarının bir kümesi olmak üzere δ_Φ betimsel proximity bağıntısı verilsin. Buna göre $A, B \in P(X)$ kümeleri ayrıktır, fakat betimsel kesişimleri boştan farklıdır. Yani $cl(A) \cap_\Phi cl(B) = \{a_2, b_4\}$ tür. Dolayısıyla $A \delta_\Phi B$ (betimsel yakın) dir. Benzer şekilde $B, C \in P(X)$ kümeleri için $cl(B) \cap_\Phi cl(C) = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2\}$ olduğundan $B \delta_\Phi C$ dir, yani B ve C kümeleri betimsel yakındır.

Şekil 1.2 deki $A, C \in P(X)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca A ve C kümelerinde aynı renkli hücre bulunmadığından betimsel kesişimleri de boştur. $cl(A) \cap_\Phi cl(C) = \emptyset$ olduğundan $A \not\delta_\Phi C$ dir, yani A ve C kümeleri betimsel yakın değildir veya betimsel uzaktır.

Tanım 1.1.14. [51] X boştan farklı bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. X in kuvvet kümesi üzerindeki bir δ_Φ ikili bağıntısına, eğer aşağıdaki aksiyomları sağlarsa X üzerinde bir betimsel (descriptive) Efremoviç proximity (betimsel EF-proximity) denir. (X, δ_Φ) çiftine de betimsel EF-proximity uzay adı verilir.

$$\mathbf{BP1)} \quad A \delta_\Phi B \iff B \delta_\Phi A$$

$$\mathbf{BP2)} \quad A \delta_\Phi (B \cup C) \iff A \delta_\Phi B \text{ veya } A \delta_\Phi C$$

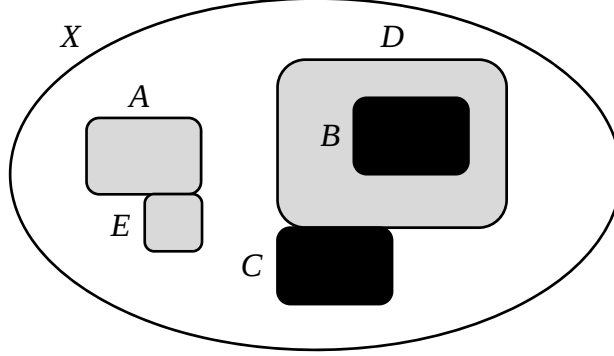
$$\mathbf{BP3)} \quad A \delta_\Phi B \implies A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

$$\mathbf{BP4)} \quad A \cap_\Phi B \neq \emptyset \implies A \delta_\Phi B$$

$$\mathbf{BP5)} \quad A \not\delta_\Phi B \implies A \not\delta_\Phi E \text{ ve } (X \setminus E) \not\delta_\Phi B \text{ olacak şekilde bir } E \subseteq X \text{ vardır}$$

Örnek 1.1.10. $A, B, C, D, E \subset X$ alt kümeleri Şekil 1.3 de gri tonlamalı bölgeler ile gösterilsin. Φ sınıfı da resim elemanlarının gri tonlamalarını temsil eden inceleme fonksiyonlarının kümesi olsun. Burada resim elemanı dediğimiz resmin görülebilir en küçük parçasıdır (pixel) ve her bir resim elemanı beyaz, gri, siyah

gibi ayırt edici özelliklere sahiptir. Bu tanımlamalara göre (X, δ_Φ) bir betimsel EF-proximity uzaydır.



Şekil 1.3. Betimsel EF-proximity uzay örneği

Burada A ile D ve B ile C kümelerinin klasik anlamda (uzaysal) yakın olmadığı halde aynı özelliklere (gri, siyah) sahip olduğundan betimsel olarak yakın olduklarına dikkat edelim. Şekil 1.3 e göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

$A \bar{\delta} B$ (uzaysal yakın değildir) ve $A \underline{\delta}_\Phi B$ (betimsel yakın değildir)

$A \delta E$ (uzaysal yakındır) ve $A \delta_\Phi E$ (betimsel yakındır)

$B \bar{\delta} C$ (uzaysal yakın değildir) fakat $B \delta_\Phi C$ (betimsel yakındır)

$C \delta D$ (uzaysal yakındır) fakat $C \underline{\delta}_\Phi D$ (betimsel yakın değildir)

Betimsel EF-proximity belirli özelliklere göre sınıflandırdığımız nesnelerin betimsel olarak yakınlığını inceler. Betimsel EF-proximity, tek bir dijital görüntünün içindeki parçaların veya ayrık dijital görüntülerdeki yakın ya da uzak kümelerin parçalarının tanımlanması, betimlenmesi, analiz edilmesi ve sınıflandırılması konusunda oldukça yararlı ve kullanışlıdır. Ayrıca son yıllarda betimsel EF-proximity uzayların çok sayıda uygulaması yayınlanmıştır [26,27].

1.2. Kategori

Tanım 1.2.1. [52] Objelerin bir sınıfı $Ob(\mathcal{E})$ ve her bir $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ obje çifti için A dan B ye tüm morfizmlerin sınıfı $\mathcal{E}(A, B)$ olmak üzere

$$Mor(\mathcal{E}) = \bigcup_{A, B \in Ob(\mathcal{E})} \mathcal{E}(A, B)$$

olsun. $Mor(\mathcal{E})$ üzerinde her $A, B, C \in Ob(\mathcal{E})$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(B, C) \times \mathcal{E}(A, B) &\longrightarrow \mathcal{E}(A, C) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

kısmi işlemi tanımlansın. Bu şekilde tanımlı kısmi işlem aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- (1) Eğer $f \in \mathcal{E}(A, B)$, $g \in \mathcal{E}(B, C)$ ve $h \in \mathcal{E}(C, D)$ ise $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dir.
- (2) Her bir $A \in Ob(\mathcal{E})$ için $f \in \mathcal{E}(A, -)$ ve $g \in \mathcal{E}(-, A)$ iken $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \mathcal{E}(A, A)$ birim morfizmi mevcuttur.

Bu şekildeki yapıya bir **kategori** denir ve $\mathcal{E}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.1. Tüm kümelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri $A, B, C, \dots$ gibi kümeler, morfizmleri kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kısmi işlem de fonksiyonların bileşkesidir. Buna göre;

- (1) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ve $h: C \rightarrow D$ olmak üzere fonksiyonlarda $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ birleşme özelliği sağlanır.
- (2) Her bir A kümesi için birim morfizm $1_A: A \rightarrow A$ birim fonksiyonudur. Ayrıca her $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f \circ 1_A = f$ ve her $g: B \rightarrow A$ fonksiyonu için $1_A \circ g = g$ dir.

Bu kategoriye kümelerin kategorisi denir ve $\mathcal{E} = \mathbf{SET}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.2. Tüm topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri $(X, \tau), (Y, \sigma), (Z, \delta), \dots$ gibi topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem de fonksiyonların bileşkesidir. Buna göre;

- (1) $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $g: (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \delta)$ ve $h: (Z, \delta) \rightarrow (T, \mu)$ olmak üzere f, g ve h fonksiyonları sürekli olduklarından bunların bileşkeleri sürekli ve $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ birleşme özelliği sağlanır.
- (2) $(X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ olacak şekilde $1_X: X \rightarrow X$ birim fonksiyonu vardır ve sürekli. Ayrıca her $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için $f \circ 1_X = f$ ve her $g: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu için $1_X \circ g = g$ dir.

Bu kategoriye topolojik uzayların kategorisi denir ve $\mathcal{E} = \mathbf{TOP}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.3. Tüm grupların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri $(G, \circ), (H, \Delta), \dots$ gibi gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve kısmi işlem de grup homomorfizmlerinin bileşkesidir. Bu kategoriye grupların kategorisi denir ve $\mathcal{E} = \mathbf{GRP}$ ile gösterilir.

Kategori	Objeler	Morfizmler
AB	Değişmeli Gruplar	Grup Homomorfizmleri
GRP	Gruplar	Grup Homomorfizmleri
MET	Metrik Uzaylar	Sürekli Dönüşümler
PROX	Proximity Uzaylar	p -Dönüşümler
RNG	Halkalar	Halka Homomorfizmleri
SET	Kümeler	Fonksiyonlar
TOP	Topolojik Uzaylar	Sürekli Dönüşümler
UNIF	Düzgün Uzaylar	Düzgün Sürekli Dönüşümler
TOPGRP	Topolojik Gruplar	Sürekli Grup Homomorfizmleri
VEC	Vektör Uzayları	Lineer Dönüşümler

Tablo 1.1. Bazı Kategori Örnekleri

Örnek 1.2.4. [52] Birimli bir yarı gruba **monoid** denir. Bir M monoidi tek objeli bir $\mathcal{E}$ kategorisi olarak düşünülebilir. Burada $Ob(\mathcal{E}) = \{*\}$ ve $Mor(\mathcal{E}) = \mathcal{E}(*, *) = M$ dir. Yani, her bir $m \in M$ elemanı $\mathcal{E}$ nin bir $m: * \rightarrow *$ morfizmi olarak alınır. $\mathcal{E}$ nin 1_* birim morfizmi $e \in M$ birim elemanı ve $\mathcal{E}$ kategorisinin kısmi işlemi ise monoidin işlemidir. Buradan kategori kavramının monoidin bir genelleştirmesi olduğu söylenebilir.

Tanım 1.2.2. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{E}$ nin bir **alt kategorisi** denir.

- (1) $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{E})$ dir.
- (2) Her bir $A, B \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{E}(A, B)$ dir.
- (3) $\mathcal{D}$ kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi, $\mathcal{E}$ kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi ile aynıdır.
- (4) Her bir $A \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}$ deki 1_A birim morfizmi, $\mathcal{E}$ deki birim morfizm ile aynıdır.

$\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{E}$ nin bir alt kategorisi olmak üzere; eğer her $A, B \in Ob(\mathcal{D})$ obje çifti için $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{E}(A, B)$ ise $\mathcal{D}$ alt kategorisine **dolu alt kategori**, eğer $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{E})$ ise $\mathcal{D}$ ye **geniş alt kategori** denir [52].

Örnek 1.2.5. **TOP** ve **GRP** kategorileri **SET** kategorisinin alt kategorileridir. Ayrıca Abel grupların kategorisi **AB**, **GRP** kategorisinin dolu bir alt kategorisidir. Çünkü sadece objelerde bir kısıtlama mevcuttur.

Tanım 1.2.3. [53] $\mathcal{E}$ bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ olsun.

- (1) $f: A \rightarrow B$ monomorfizmdir ancak ve ancak verilen herhangi bir C objesi ve $g, h: C \rightarrow A$ morfizmleri için $f \circ g = f \circ h$ ise $g = h$ dır, yani f morfizmi soldan sadeleşme özelliğine sahiptir.
- (2) $f: A \rightarrow B$ epimorfizmdir ancak ve ancak verilen herhangi bir C objesi ve $g, h: B \rightarrow C$ morfizmleri için $g \circ f = h \circ f$ ise $g = h$ dır, yani f morfizmi sağdan sadeleşme özelliğine sahiptir.
- (3) $f: A \rightarrow B$ bimorfizmdir ancak ve ancak f monomorfizm ve epimorfizmdir, yani f morfizmi soldan ve sağdan sadeleşme özelliğine sahiptir.
- (4) $f: A \rightarrow B$ izomorfizmdir ancak ve ancak $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g: B \rightarrow A$ morfizmi vardır.

Kategori	SET	TOP
Monomorfizm	Birebir	Birebir ve Sürekli
Epimorfizm	Örten	Örten ve Sürekli
Bimorfizm	Bijektif	Bijektif ve Sürekli
İzomorfizm	Bijektif	Homeomorfizm

Tablo 1.2. Bazı Özel Morfizmlerin SET ve TOP Kategorilerindeki Karşılıkları

Tanım 1.2.4. [52] Bir $\mathcal{E}$ kategorisinde morfizmlerin bir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ k \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

diyagramı verilsin. Eğer başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizmleri eşit ise, yani $g \circ f = h \circ k$ oluyorsa bu diyagrama **değişmeli diyagram** denir.

Tanım 1.2.5. [52] $\mathcal{E}$ bir kategori ve $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$ bu kategoride iki morfizm olsun. Bir $Q \in Ob(\mathcal{E})$ ve $q_1: B \rightarrow Q$, $q_2: C \rightarrow Q$ morfizmleri için

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow q_1 \\ C & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array}$$

değişmeli ($q_1 \circ f = q_2 \circ g$) diyagramı verilsin. Eğer herhangi bir

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow p_1 \\ C & \xrightarrow{p_2} & X \end{array}$$

değişmeli ($p_1 \circ f = p_2 \circ g$) diyagramı verildiğinde

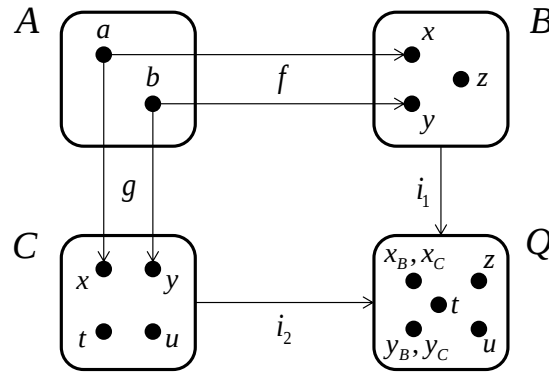
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow q_1 \\ C & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow p_1 \\ \downarrow \theta \\ \searrow p_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ X \end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa, yani $\theta \circ q_1 = p_1$ ve $\theta \circ q_2 = p_2$ olacak şekilde bir tek $\theta: Q \rightarrow X$ morfizmi varsa

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow q_1 \\ C & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array}$$

diyagramına f ve g nin **pushout (ileri itme) diyagramı** denir.

Örnek 1.2.6. Şekil 1.4 de **SET** kategorisinde bir pushout diyagramı örneği verilmiştir. Burada Q kümesi, B ve C kümelerindeki görüntüleri aynı olan A kümesindeki elemanların görüntülerinden ve B, C kümelerinde kalan diğer bütün elemanlardan oluşmaktadır.



Şekil 1.4. **SET** kategorisinde bir pushout diyagramı

Örnek 1.2.7. **SET** kategorisinde $f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow C$ fonksiyon çifti verilsin. i_1 ve i_2 içine fonksiyonlar olmak üzere f ve g nin pushout diyagramı

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ C & \xrightarrow{i_2} & Q \end{array}$$

değişmeli ($i_1 \circ f = i_2 \circ g$) diyagramıdır.

1.3. Fanktor

Herhangi bir kategoride objeler arasında morfizm denilen dönüşümler olduğu gibi kategoriler arasında da fanktor adı verilen dönüşümler mevcuttur. Şimdi fanktor kavramının tanımını verelim.

Tanım 1.3.1. [52] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{E}$ nin her bir A objesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(A)$ objesine, $\mathcal{E}$ nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmini $\mathcal{D}$ nin bir $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümüne **fanktor** denir.

(1) Her $A \in Ob(\mathcal{E})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

(2) $\mathcal{E}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olmak üzere $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

Örnek 1.3.1. [52] $\mathcal{E}$ bir kategori olmak üzere her bir $A \in Ob(\mathcal{E})$ objesini A objesine ve her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmini kendisine dönüştüren $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ fanktoruna **birim fanktor** denir ve $I = 1_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.3.2. **TOP** kategorisinin objesi olan her bir (X, τ) topolojik uzayını, üzerindeki topoloji yapısını atarak sadece X kümesine ve **TOP** kategorisinin morfizmi olan her bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli fonksiyonunu kümeler arasındaki $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna dönüştüren bir $\mathcal{U}: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ fanktoruna **unutkan fanktor** denir. Burada;

(1) Her $(X, \tau) \in Ob(\mathbf{TOP})$ için $\mathcal{U}(1_{(X, \tau)}) = 1_{\mathcal{U}(X, \tau)} = 1_X$ dir.

(2) $\mathcal{U}(g) = g$ ve $\mathcal{U}(f) = f$ olduğundan $\mathcal{U}(g) \circ \mathcal{U}(f) = g \circ f$ ve $\mathcal{U}(g \circ f) = g \circ f$ dir. $\mathcal{U}(g \circ f) = \mathcal{U}(g) \circ \mathcal{U}(f)$ olur.

$$\mathcal{U}_1 : \mathbf{GRP} \longrightarrow \mathbf{SET}$$

$$\mathcal{U}_2 : \mathbf{TOPGRP} \longrightarrow \mathbf{GRP}$$

$$\mathcal{U}_3 : \mathbf{PROX} \longrightarrow \mathbf{SET}$$

şeklinde unutkan fanktorlar tanımlanabilir.

Örnek 1.3.3. **SET** kategorisinin objesi olan her bir X kümesini, üzerine diskre topoloji yapısını ekleyerek $(X, P(X))$ diskre topolojik uzayına ve **SET** kategorisinin morfizmi olan her bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu topolojik uzaylar arasındaki $\mathcal{D}(f) = f: (X, P(X)) \rightarrow (Y, P(Y))$ sürekli fonksiyonuna dönüştüren $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ dönüşümü bir fanktordur. Bu fanktora **diskre fanktor** denir.

Örnek 1.3.4. **SET** kategorisinin objesi olan her bir X kümesini, üzerine indiske topoloji yapısını ekleyerek $(X, \{\emptyset, X\})$ indiske topolojik uzayına ve **SET** kategorisinin morfizmi olan her bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu topolojik uzaylar arasındaki $\mathcal{D}^*(f) = f: (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (Y, \{\emptyset, Y\})$ sürekli fonksiyonuna dönüştüren $\mathcal{D}^*: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ dönüşümü bir fanktordur. Bu fanktora **indiske fanktor** denir.

Tanım 1.3.2. [53] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktoru verilsin.

- (1) Her $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $f: F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmi için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g: A \rightarrow B$ morfizmi varsa F ye **dolgun (full) fanktor** denir.
- (2) Her $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $f, g: A \rightarrow B$ morfizmleri için $F(f) = F(g)$ iken $f = g$ oluyorsa F ye **düzenli (faithful) fanktor** denir.
- (3) $f: A \rightarrow A$ morfizmi için $F(f) = 1_{F(A)}$ ve f izomorfizm iken $f = 1_A$ oluyorsa F ye **amnestik fanktor** denir.
- (4) F fanktoru hem düzenli hem de amnestik ise F ye **belirli (concrete) fanktor** denir.
- (5) Her $B \in Ob(\mathcal{D})$ objesi için $F^{-1}(B) = \{A \in Ob(\mathcal{E}) \mid F(A) = B\}$ bir küme ise F ye **küçük demetlere sahip fanktor** denir.

Kategoriler arasında fanktor adı verilen dönüşümler olduğu gibi fanktorlar arasında da doğal dönüşüm adı verilen dönüşümler mevcuttur. Şimdi doğal dönüşüm kavramının tanımını verelim.

Tanım 1.3.3. [52] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fanktor olsun. Her $A \in Ob(\mathcal{E})$ objesini $\mathcal{D}$ nin bir $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine dönüştüren bir $\alpha: Ob(\mathcal{E}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ dönüşümü verilsin. $\mathcal{E}$ kategorisindeki her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise α ya F den G ye bir **doğal dönüşüm** denir ve $\alpha: F \rightarrow G$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.3.5. $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktoru verilsin. Her bir $A \in Ob(\mathcal{E})$ objesini $1_{F(A)}: F(A) \rightarrow F(A)$ birim morfizmine dönüştüren $1_F: F \rightarrow F$ doğal dönüşümüne **birim doğal dönüşüm** denir.

Örnek 1.3.6. $\mathcal{U}: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ unutkan, $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ diskre ve $\mathcal{D}^*: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ indiskre fanktorları verilsin.

$$(1) \alpha: I \rightarrow \mathcal{U} \circ \mathcal{D} \quad (\mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET})$$

$$(2) \beta: \mathcal{D} \circ \mathcal{U} \rightarrow I \quad (\mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{TOP})$$

$$(3) \gamma: I \rightarrow \mathcal{D}^* \circ \mathcal{U} \quad (\mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{TOP})$$

$$(4) \mu: \mathcal{U} \circ \mathcal{D}^* \rightarrow I \quad (\mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET})$$

dönüşümleri birer doğal dönüşümdür.

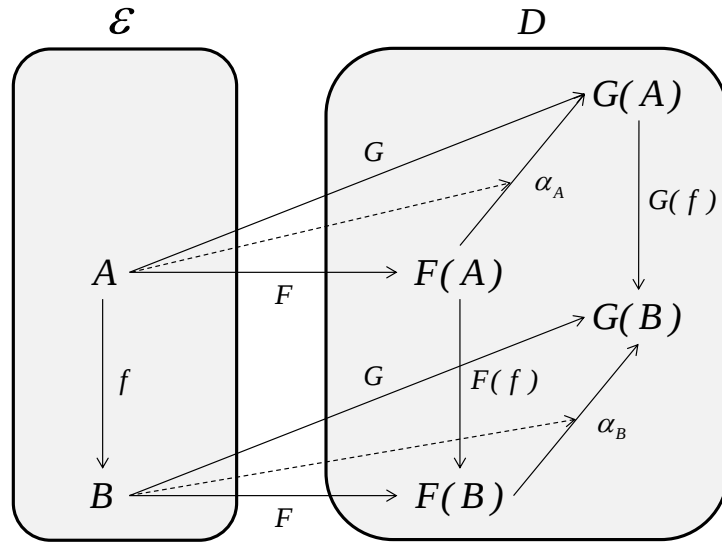
Tanım 1.3.4. [53] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $R: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ ve $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ fanktorları verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise L ye R nin **sol adjointi** veya R ye L nin **sağ adjointi** denir.

$$(1) \alpha: I \rightarrow R \circ L \text{ ve } \beta: L \circ R \rightarrow I \text{ doğal dönüşümler olmalıdır.}$$

$$(2) L\alpha: L \rightarrow LRL, \beta L: LRL \rightarrow L \text{ olmak üzere } (\beta L) \circ (L\alpha) = I \text{ ve} \\ \alpha R: R \rightarrow RLR, R\beta: RLR \rightarrow R \text{ olmak üzere } (R\beta) \circ (\alpha R) = I \\ \text{eşitlikleri sağlanmalıdır.}$$

Örnek 1.3.7. $\mathbf{TOP}$ ve $\mathbf{SET}$ kategorileri verilsin. $\mathcal{U}: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ unutkan fanktor ve $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ diskre fanktor olmak üzere $\mathcal{D}, \mathcal{U}$ nun sol adjointi, $\mathcal{U}$ da $\mathcal{D}$ nin sağ adjointidir.

$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori, $F, G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fanktor ve $\alpha: Ob(\mathcal{E}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ bir doğal dönüşüm olmak üzere; kategori, fanktor ve doğal dönüşüm kavramları arasındaki ilişki Şekil 1.5 de gösterilmiştir.



Şekil 1.5. Kategori - Fanktor - Doğal Dönüşüm

1.4. Topolojik Kategori

Tanım 1.4.1. [53] $\mathcal{E}$ bir kategori ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ olmak üzere $f_i: A \rightarrow A_i$ morfizmleri verilsin. $(A, (f_i)_{i \in I})$ ikilisine bir **kaynak** denir.

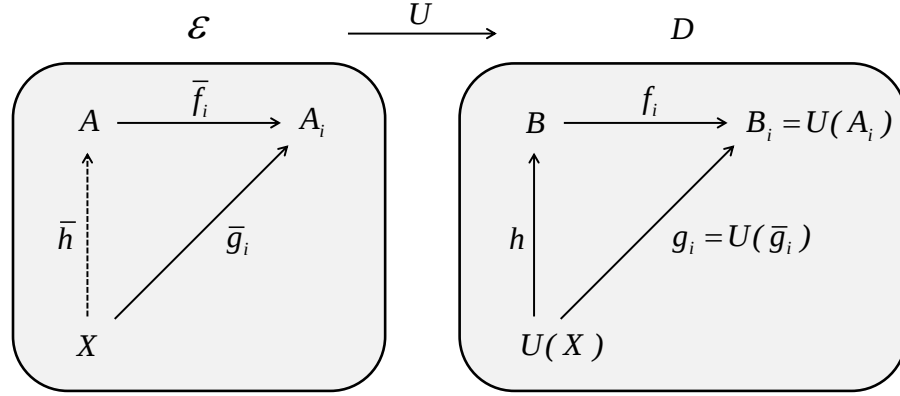
Tanım 1.4.2. [53] $\mathcal{E}$ bir kategori ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ olmak üzere $f_i: A_i \rightarrow A$ morfizmleri verilsin. $((f_i)_{i \in I}, A)$ ikilisine bir **kavşak** denir. Kavşak kavramı kaynak kavramının dualidir.

Tanım 1.4.3. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler olmak üzere $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ bir fanktoru verilsin.

- (1) $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ ve $f_i: B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)$ morfizmleri $\mathcal{D}$ kategorisinde bir $\mathcal{U}$ -kaynağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir **başlangıç kaldırmasının** (**initial lift**) $A \in Ob(\mathcal{E})$, $\mathcal{U}(A) = B$ ve $\mathcal{U}(\overline{f_i}) = f_i$ olacak şekildeki $\overline{f_i}: A \rightarrow A_i$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$\overline{g_i}: X \rightarrow A_i$, $\mathcal{E}$ kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $\mathcal{U}(\overline{g_i}) = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde bir $h: \mathcal{U}(X) \rightarrow B$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $\overline{f_i} \circ \overline{h} = \overline{g_i}$ olacak şekilde en az bir $\overline{h}: X \rightarrow A$ morfizmi vardır.

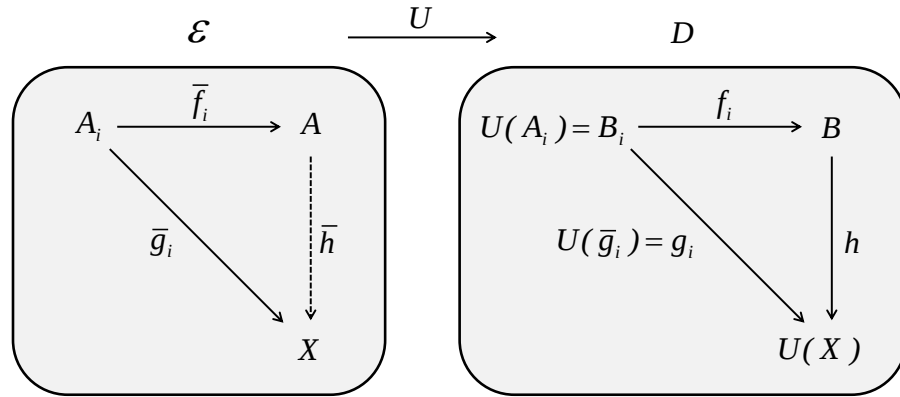
Eğer $\overline{f_i}: A \rightarrow A_i$ bir başlangıç kaldırma ise A üzerindeki yapıya $\overline{f_i}$ morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapıya $\overline{f_i}$ denir.



Şekil 1.6. Başlangıç Kaldırma

(2) $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ ve $f_i: \mathcal{U}(A_i) = B_i \rightarrow B$ morfizmleri $\mathcal{D}$ kategorisinde bir $\mathcal{U}$ -kavşağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir **bitiş kaldırmasının (final lift)** $A \in Ob(\mathcal{E})$, $\mathcal{U}(A) = B$ ve $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekildeki $\bar{f}_i: A_i \rightarrow A$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$\bar{g}_i: A_i \rightarrow X$, $\mathcal{E}$ kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $\mathcal{U}(\bar{g}_i) = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $h \circ f_i = g_i$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow \mathcal{U}(X)$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $\bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{g}_i$ olacak şekilde en az bir $\bar{h}: A \rightarrow X$ morfizmi vardır.



Şekil 1.7. Bitiş Kaldırma

Eğer $\bar{f}_i: A_i \rightarrow A$ bir bitiş kaldırma ise A üzerindeki yapıya $\bar{f}_i$ morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapı denir.

Not 1.4.1. Topolojik kategorilerde keyfi bir $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırmasının varlığına denktir.

Yani bitiş kaldırma kavramı başlangıç kaldırmanın dualidir.

Tanım 1.4.4. [53] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler olmak üzere $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktoru verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{U}$ ya bir **topolojik fanktor** veya $\mathcal{E}$ kategorisine $\mathcal{D}$ üzerinde bir **topolojik kategori** denir.

- (1) $\mathcal{U}$ fanktoru belirli (düzenli ve amnestik) olmalıdır.
- (2) $\mathcal{U}$ fanktoru küçük demetlere sahip olmalıdır.
- (3) Her $\mathcal{U}$ –kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahip olmalıdır.

Örnek 1.4.1. **TOP** ve **SET** kategorileri verilsin. $\mathcal{U}(X, \tau) = X$ şeklinde tanımlı $\mathcal{U}: \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{SET}$ unutkan fanktoru bir topolojik fanktordur.

Tanım 1.4.5. [54] $\mathcal{E}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ topolojik fanktoru bir $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathcal{E}$ sol adjointine sahip olup, bu sol adjointe **diskre fanktor** ve $A = \mathcal{D}(\mathcal{U}(A))$ objesine de $\mathcal{E}$ kategorisinde **diskre obje** denir.

Tanım 1.4.6. [54] $\mathcal{E}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ topolojik fanktoru bir $\mathcal{D}^*: \mathbf{SET} \rightarrow \mathcal{E}$ sağ adjointine sahip olup, bu sağ adjointe **indiskre fanktor** ve $B = \mathcal{D}^*(\mathcal{U}(B))$ objesine de $\mathcal{E}$ kategorisinde **indiskre obje** denir.

Örnek 1.4.2. Tanım kümesi diskre topolojik uzay veya değer kümesi indiskre topolojik uzay olan her fonksiyon sürekli olduğundan $\mathcal{E} = \mathbf{TOP}$ için diskre obje diskre topolojik uzay, indiskre obje de indiskre topolojik uzay olur.

1.5. PROX Kategorisi

Tanım 1.5.1. Tüm proximity uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri $(X, \delta), (Y, \delta'), (Z, \delta''), \dots$ gibi proximity uzaylar, morfizmleri p –dönüşümler ve kısmi işlem de

$$\begin{aligned} \circ: Mor((X, \delta), (Y, \delta')) \times Mor((Y, \delta'), (Z, \delta'')) &\longrightarrow Mor((X, \delta), (Z, \delta'')) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bileşke işlemidir ve f, g morfizmleri p –dönüşüm olduklarından bunların bileşkesi $g \circ f$ de p –dönüşümdür. Buna göre;

- (1) $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$, $g: (Y, \delta') \rightarrow (Z, \delta'')$ ve $h: (Z, \delta'') \rightarrow (T, \delta''')$ olmak üzere f, g ve h morfizmleri birer p -dönüşüm olduklarından bunların bileşkeleri de p -dönüşümdür ve $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ birleşme özelliği sağlanır.
- (2) Her (X, δ) objesi için $1_{(X, \delta)}: (X, \delta) \rightarrow (X, \delta)$ birim morfizmi vardır ve her $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$ morfizmi için $f \circ 1_{(X, \delta)} = f$ ve her $g: (Y, \delta') \rightarrow (X, \delta)$ morfizmi için $1_{(X, \delta)} \circ g = g$ dir.

Bu kategoriye proximity uzayların kategorisi denir ve $\mathcal{E} = \mathbf{PROX}$ ile gösterilir.

Not 1.5.1. $\mathbf{PROX}$ kategorisinin objesi olan her bir (X, δ) proximity uzayını, üzerindeki proximity bağıntısını atarak sadece X kümesine ve $\mathbf{PROX}$ kategorisinin morfizmi olan her bir $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$ p -dönüşümünü kümeler arasındaki $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna dönüştüren $\mathcal{U}: \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$ dönüşümü bir unutkan fanktordur. Burada;

- (1) Her $(X, \delta) \in Ob(\mathbf{PROX})$ için $\mathcal{U}(1_{(X, \delta)}) = 1_{\mathcal{U}(X, \delta)} = 1_X$ dir.
- (2) $\mathcal{U}(g) = g$ ve $\mathcal{U}(f) = f$ olduğundan $\mathcal{U}(g) \circ \mathcal{U}(f) = g \circ f$ ve $\mathcal{U}(g \circ f) = g \circ f$ dir. $\mathcal{U}(g \circ f) = \mathcal{U}(g) \circ \mathcal{U}(f)$ olur.

Tanım 1.5.2. $X \neq \emptyset$ bir küme, her bir $i \in I$ için (X_i, δ_i) bir proximity uzay ve $f_i: X \rightarrow (X_i, \delta_i)$ $\mathbf{PROX}$ kategorisinde bir kaynak olsun. X in kuvvet kümesi üzerinde bir $\mathfrak{B}$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$A, B \in P(X)$ için $A \mathfrak{B} B$ dir ancak ve ancak her $i \in I$ için $f_i(A) \delta_i f_i(B)$ dir.

Bu durumda $\mathfrak{B}$ bağıntısı X kümesi üzerinde bir proximity bazdır ([45], Teorem 3.8). Buna göre X kümesi üzerindeki δ_* **başlangıç proximity** yapısı yukarıda verilen $\mathfrak{B}$ proximity bazından aşağıdaki şekilde üretilir:

$A, B \in P(X)$ için $A \delta_* B$ dir ancak ve ancak A ve B nin sırasıyla $\{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ve $\{B_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ sonlu örtüleri için $(A_i, B_j) \in \mathfrak{B}$ olacak şekilde bir (i, j) çifti vardır.

Not 1.5.2. $\mathcal{U}(X, \delta) = X$ şeklinde tanımlı $\mathcal{U}: \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$ unutkan fanktoru bir topolojik fanktordur [44]. Gösterelim:

(1) $\mathcal{U}$ fanktorunun belirli (düzenli ve amnestik) olduğunu gösterelim.

$(X, \delta), (Y, \delta')$ proximity uzaylar ve $f, g: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$ iki p -dönüşüm olmak üzere $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olsun. $\mathcal{U}$ fanktorunun tanımından $\mathcal{U}(f) = f$ ve $\mathcal{U}(g) = g$ dir. Böylece $f = g$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ düzenlidir.

$f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$ bir p -dönüşüm, $\mathcal{U}(f) = 1_X$ ve f, p -izomorfizm olsun. $\mathcal{U}(f) = f = 1_X$ olduğundan $X = Y$ dir. Dolayısıyla $f: (X, \delta) \rightarrow (X, \delta')$ olur. Bu durumda $\delta \cong \delta'$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $A, B \subset X$ için $A \delta B$ olsun. f, p -dönüşüm olduğundan $f(A) \delta' f(B)$ dir. $\mathcal{U}(f) = f = 1_X$ olduğundan $1_X(A) \delta' 1_X(B)$ dir ve $A \delta' B$ bulunur. Dolayısıyla $\delta' < \delta$ elde edilir.

Tersine f, p -izomorfizm olduğundan $f^{-1}: (X, \delta') \rightarrow (X, \delta)$ dir. Her $A, B \subset X$ için $A \delta' B$ olsun. f^{-1}, p -dönüşüm olduğundan $f^{-1}(A) \delta f^{-1}(B)$ dir. $f^{-1} = (1_X)^{-1} = 1_X$ olduğundan $1_X(A) \delta 1_X(B)$ dir ve $A \delta B$ bulunur. Dolayısıyla $\delta < \delta'$ elde edilir.

O halde $\mathcal{U}$ amnestiktir.

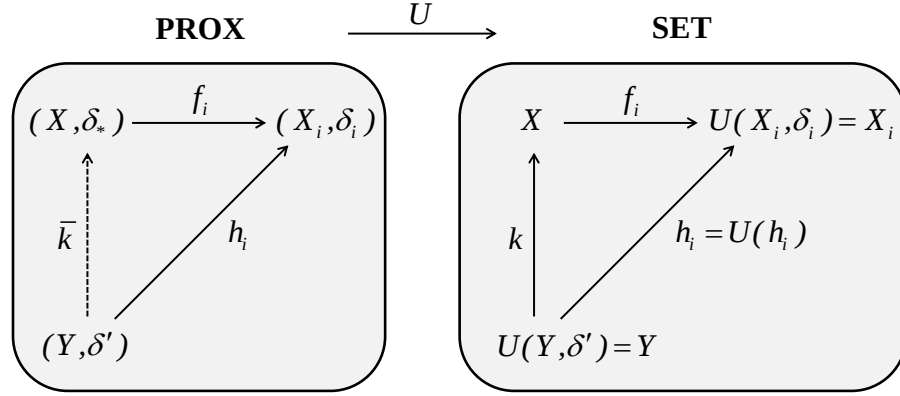
(2) $\mathcal{U}$ fanktorunun küçük demetlere sahip olduğunu gösterelim.

$\mathcal{U}^{-1}(X) = \{(X, \delta) \mid \mathcal{U}(X, \delta) = X \text{ ve } f: (X, \delta) \rightarrow (X, \delta') \text{ } p\text{-dönüşümü için } \mathcal{U}(f) = 1_X: X \rightarrow X\}$ olmak üzere her $X \in \text{Ob}(\mathbf{SET})$ için $\mathcal{U}^{-1}(X)$ in bir küme olduğunu göstermeliyiz.

$\Delta = \{\delta \mid \delta, X \text{ üzerinde bir proximity bağıntısı}\}$ olsun. $\Phi: \mathcal{U}^{-1}(X) \rightarrow \Delta$, $\Phi(X, \delta) = \delta$ şeklinde tanımlansın. Φ birebir ve örten olduğundan $\mathcal{U}^{-1}(X) \cong \Phi \subset P^2(X)$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{U}^{-1}(X)$ bir kümedir.

(3) Her $\mathcal{U}$ -kaynağının bir başlangıç kaldırmaya sahip olduğunu gösterelim.

$\{f_i: X \rightarrow \mathcal{U}(X_i, \delta_i) = X_i \mid i \in I\}$ ailesi $\mathbf{SET}$ kategorisinde herhangi bir $\mathcal{U}$ -kaynağı ve δ_* Tanım 1.5.2 de tanımlanan başlangıç proximity bağıntısı olsun. Buna göre $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması $f_i: (X, \delta_*) \rightarrow (X_i, \delta_i)$ ailesidir.



Şekil 1.8. $\mathcal{U}: \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$ fanktoru için başlangıç kaldırma

Her $(X_i, \delta_i) \in \text{Ob}(\mathbf{PROX})$ ve $\mathbf{PROX}$ kategorisinde $\{h_i: (Y, \delta') \rightarrow (X_i, \delta_i)\}$ morfizmler ailesi için $f_i \circ \bar{k} = h_i$ ve $f_i \circ k = \mathcal{U}(h_i) = h_i$ olacak şekilde en az bir $\bar{k}: (Y, \delta') \rightarrow (X, \delta_*)$ morfizmi vardır. $\bar{k}$ nin bir p -dönüşüm olduğunu göstereyim.

Her $G, H \subset Y$ için $G \delta' H$ ise her bir $i \in I$ için h_i p -dönüşüm olduğundan $h_i(G) \delta_i h_i(H)$ bulunur. $f_i \circ \bar{k} = h_i$ olduğundan $(f_i \circ \bar{k})(G) \delta_i (f_i \circ \bar{k})(H)$ yazılabilir. Her $i \in I$ için $f_i(\bar{k}(G)) \delta_i f_i(\bar{k}(H))$ olup Tanım 1.5.2 den $\bar{k}(G) \mathfrak{B} \bar{k}(H)$ dir. $\mathfrak{B}, \delta_*$ bağıntısı için proximity baz olduğundan $\bar{k}(G) \delta_* \bar{k}(H)$ elde edilir. Bu durumda $\bar{k}$ morfizmi bir p -dönüşümdür.

O halde $\mathbf{PROX}$ kategorisi bir topolojik kategoridir.

Tanım 1.5.3. X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\mathbf{PROX}$ kategorisinde X üzerindeki δ **diskre proximity yapısı**

$$A \delta B \iff A \cap B \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.5.4. X boştan farklı bir küme ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\mathbf{PROX}$ kategorisinde X üzerindeki δ **indiskre proximity yapısı**

$$A \delta B \iff A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlıdır.

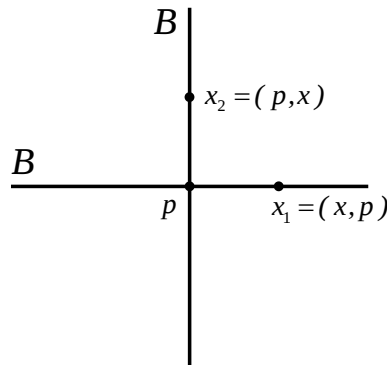
2. BÖLÜM

p NOKTASINDA HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle bir p noktasındaki wedge çarpım tanımı, bazı dönüşümler ve herhangi bir topolojik kategori için (kuvvetli) kapalılık kavramının ve p noktasında ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir. Ardından bu tanımlar ile birlikte [55] de karakterize edilen proximity uzayların topolojik kategorisinde kapalılık, kuvvetli kapalılık kavramları ve p noktasında $\bar{T}_0, T'_0, T_1$ ayırma aksiyomları yardımıyla **PROX** kategorisinde p noktasında $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

2.1. Topolojik Kategorilerde Lokal Ayırma Aksiyomları ve Kapalılık

B bir küme, $p \in B$ ve $B \coprod B$, B nin iki ayrık kopyası olsun. B nin p noktasındaki wedge çarpımı $B \coprod B$ nin p de çakışmasıdır ve $B \vee_p B$ şeklinde gösterilir. $B \vee_p B$ deki bir x noktası birinci bileşende ise x_1 , ikinci bileşende ise x_2 olarak gösterilecektir. Ayrıca $x = p$ ise $x_1 = x_2$ dir, yani $p_1 = p_2$ olur.



Şekil 2.1. p noktasında wedge çarpım

Not 2.1.1. B bir küme, $p \in B$ ve $B \vee_p B$ de B kümesinin p noktasındaki wedge çarpımı olsun. $\{*\}$, **SET** kategorisinde bitiş objesi ve $i_1, i_2: B \rightarrow B \vee_p B$ dönüşümleri de sırasıyla birinci ve ikinci içirme dönüşümleri (inclusion maps) olmak üzere;

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B & \xrightarrow{i_2} & B \vee_p B \end{array}$$

değişmeli diyagramı bir pushout diyagramıdır.

$id: B \rightarrow B$ birim dönüşüm ve $f: B \rightarrow B$ de p ye giden sabit dönüşüm olmak üzere; $A_p i_1 = (id, f): B \rightarrow B^2$, $A_p i_2 = (f, id): B \rightarrow B^2$, $S_p i_1 = (id, id): B \rightarrow B^2$, $S_p i_2 = (f, id): B \rightarrow B^2$ ve $\nabla_p i_1 = \nabla_p i_2 = id: B \rightarrow B$ dönüşümleri yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında sadece Tanım 2.1.1 ile verilen A_p , S_p ve ∇_p dönüşümleri elde edilir. Örneğin A_p dönüşümünün elde edilişi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B & \xrightarrow{i_2} & B \vee_p B \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow A_p i_1 \\ B & \xrightarrow{A_p i_2} & B^2 \end{array}$$

değişmeli diyagramları için

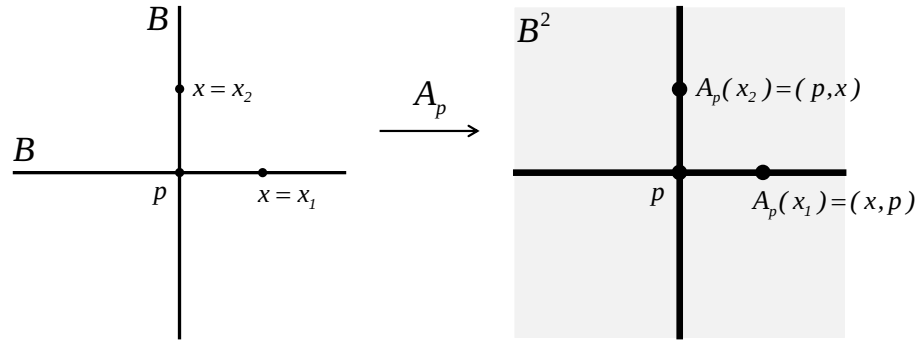
$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B & \xrightarrow{i_2} & B \vee_p B \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow A_p i_1 \\ \downarrow A_p \\ \searrow A_p i_2 \end{array} \quad B^2$$

diyagramı değişmeli, yani $A_p i_1 f = A_p i_2 f = (f, f)$ olduğundan bir tek $A_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$ morfizmi vardır.

Tanım 2.1.1. [40] B bir küme, $p \in B$ ve $B^2 = B \times B$ de B nin kendisi ile kartezyen çarpımı olsun. Buna göre A_p , S_p ve ∇_p dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(1) p de Temel (Principle) Eksen Dönüşümü:

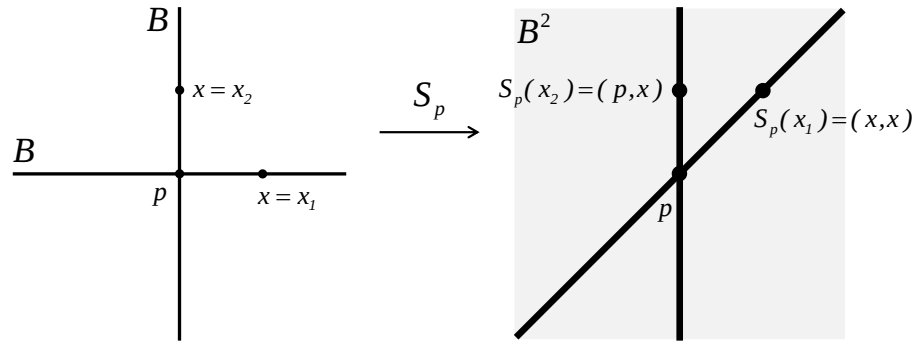
$$A_p: B \vee_p B \rightarrow B^2, \quad A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p) & , \quad i = 1 \\ (p, x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$



Şekil 2.2. p de Temel (Principle) Eksen Dönüşümü

(2) p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü:

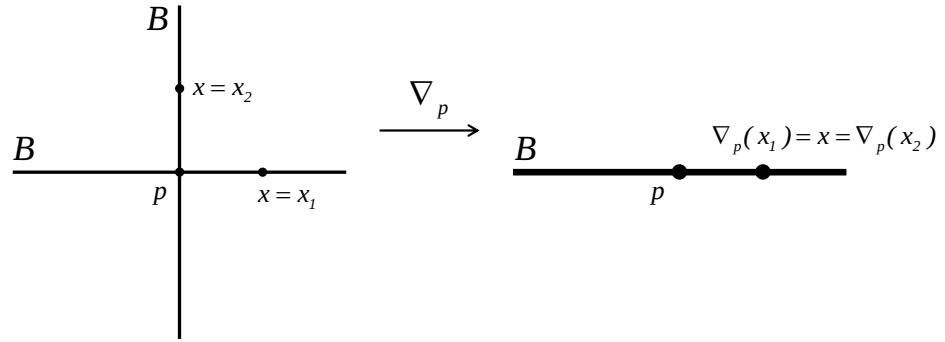
$$S_p: B \vee_p B \rightarrow B^2, \quad S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x) & , \quad i = 1 \\ (p, x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$



Şekil 2.3. p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü

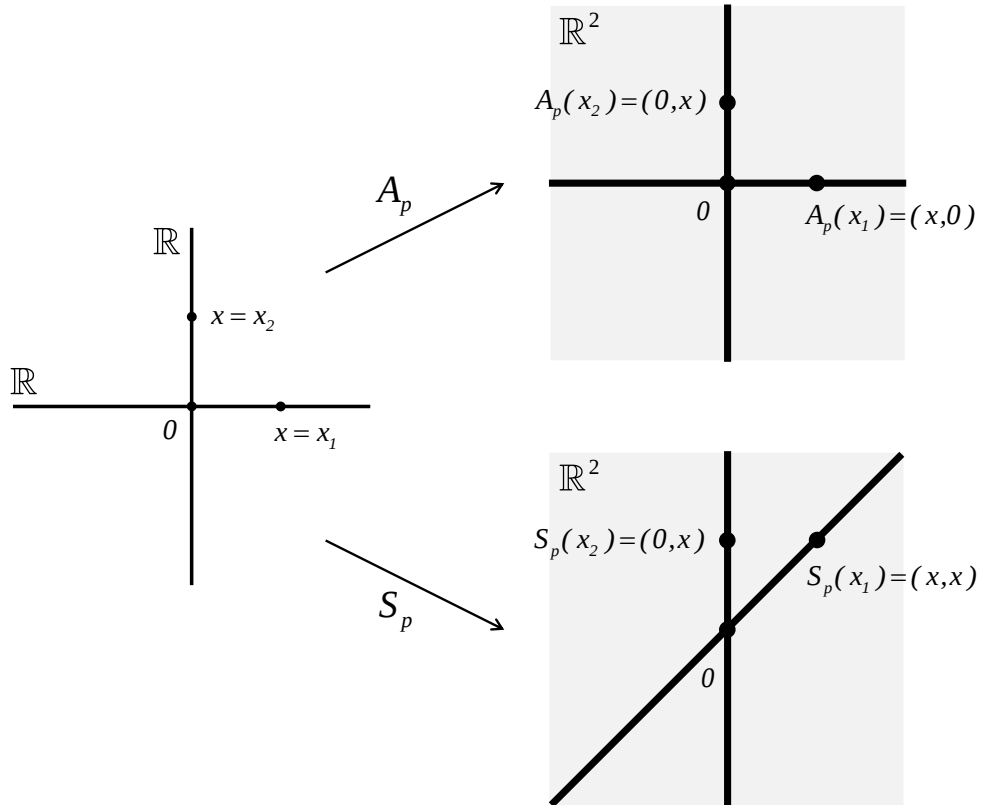
(3) p de Katlama (Fold) Dönüşümü:

$$\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow B, \quad \nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2$$



Şekil 2.4. p de Katlama (Fold) Dönüşümü

Örnek 2.1.1. Eğer $B = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $p = 0$ noktası seçilirse p de temel eksen (A_p) dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimi, p de eğik eksen (S_p) dönüşümünün görüntüsü de $y = x$ doğrusu ile y ekseninin birleşimi olur.



Şekil 2.5. $B = \mathbb{R}$ ve $p = 0$ için A_p ve S_p dönüşümlerinin görüntüsü

Topolojik uzaylarda iyi bilinen bir p noktasında T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.2. (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

1. (B, τ) uzayı p de T_0 dır ancak ve ancak her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğu veya $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğu vardır.
2. (B, τ) uzayı p de T_1 dir ancak ve ancak her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğu ve $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğu vardır.

Teorem 2.1.1. [56] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı p de T_0 dır.
2. B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $A_p: B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.
3. $i_1, i_2: B \rightarrow B \vee_p B, x \mapsto i_1(x) = x_1, x \mapsto i_2(x) = x_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B \vee_p B$ üzerindeki bitiş topolojisi τ_* olmak üzere, $id: B \vee_p B \rightarrow (B \vee_p B, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

Teorem 2.1.2. [56] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de T_1 dir ancak ve ancak B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S_p: B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

Baran [40] topolojik uzaylardaki p noktasındaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını Tanım 2.1.1 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 2.1.3. [40] $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere X , $\mathcal{E}$ nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

1. X objesi p de $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$ nun sol adjointi olan diskre fanktordur.
2. X objesi p de T'_0 dür ancak ve ancak $\{id : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X \vee_p X) = B \vee_p B \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $X \vee_p X, \mathcal{E}$ de wedge çarpımdır, yani i_1, i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırmasıdır.
3. X objesi p de T_1 dir ancak ve ancak $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

Daha önce [55] de **PROX** kategorisinde karakterize edilen p noktasında $\overline{T}_0, T'_0$ ve T_1 ayırma aksiyomları aşağıda verilmiştir. İspatları [55] de mevcuttur.

Teorem 2.1.3. [55] (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

Teorem 2.1.4. [55] Tüm EF-proximity uzaylar p de T'_0 dür.

Teorem 2.1.5. [55] (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de T_1 dir ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

Not 2.1.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. Teoremler 2.1.3 ve 2.1.5 den (X, δ) uzayı p de $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak p de T_1 dir.

2.1.1. Kapalılık

Tanım 2.1.4. [40, 57] B bir küme ve $p \in B$ olsun. B nin p noktasındaki sonsuz wedge çarpımı $\vee_p^\infty B$, B nin sayılabilir adetteki ayırık kopyalarının alınması ve bunların p noktasında çakıştırılması ile elde edilir. $B^\infty = B \times B \times \dots$, B nin sayılabilir kartezyen çarpımı olmak üzere A_p^∞ ve ∇_p^∞ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow B^\infty, \quad A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, p, x, p, \dots)$$

$$\nabla_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow B, \quad \nabla_p^\infty(x_i) = x$$

Burada $i \in I$ için x_i sonsuz wedge çarpımının i -inci bileşeninde ve x , $(p, p, \dots, p, x, p, \dots)$ ifadesinde i -inci yerdedir.

Topolojik uzaylarda iyi bilinen kapalı küme kavramı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.5. (B, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset B$ olsun. Eğer F kümesinin tümleyeni $B \setminus F$ açıksa, yani $B \setminus F \in \tau$ ise F ye kapalı küme denir.

Teorem 2.1.6. (B, τ) bir topolojik uzay ve F de B nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $q, B/F$ üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q: (B, \tau) \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ fonksiyonunun ürettiği bitiş topolojisi τ_* ile gösterilsin. p, B de bir nokta olsun.

1. τ^*, B^∞ üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere, $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $\{A_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow (B^\infty, \tau^*) \text{ ve } \nabla_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow (B, P(B))\}$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.
2. $F \subset B$ kapalıdır ancak ve ancak F nin görüntüsü $\{*\}$, $(B/F, \tau_*)$ da kapalıdır.
3. $F \subset B$ kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak $(B/F, \tau_*)$, $*$ da T_1 dir.

Baran [40, 57], topolojik uzaylardaki kapalılık kavramını Tanım 2.1.4 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 2.1.6. [40, 57] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve F, B nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $q, B/F$ üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ epi $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir. p, B de bir nokta olsun.

1. $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $\{A_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow \mathcal{U}(X^\infty) = B^\infty \text{ ve } \nabla_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.
2. $F \subset X$ kapalıdır ancak ve ancak F nin görüntüsü $\{*\}$, X/F de kapalıdır.

3. $F \subset X$ kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak $X/F, *$ da T_1 dir.
4. Eğer $F = \emptyset$ veya $F = X$ ise F hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır.

Daha önce [55] de **PROX** kategorisinde karakterize edilen kapalı ve kuvvetli kapalı küme kavramları aşağıda verilmiştir. İspatları [55] de mevcuttur.

Teorem 2.1.7. [55] (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. $\{p\}$, X de kapalıdır ancak ve ancak herhangi bir $B \subset X$ için $\{p\} \delta B$ ise $p \in B$ dir.

Teorem 2.1.8. [55] (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. $\emptyset \neq F \subset X$ kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta F$ olduğunda $x \in F$ dir.

Teorem 2.1.9. [55] (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. $\emptyset \neq F \subset X$ kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta F$ olduğunda $x \in F$ dir.

Not 2.1.3. Herhangi bir topolojik kategoride genelde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları birbirinden bağımsızdır. Fakat **PROX** kategorisinde bu kavramlar çakışır. (X, δ) bir EF-proximity uzay olmak üzere bir $F \subset X$ kümesi kapalıdır ancak ve ancak kuvvetli kapalıdır.

2.2. p Noktasında Pre-Hausdorff Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen bir p noktasında $PreT_2$ ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de $PreT_2$ dir ancak ve ancak her $p \neq q$ için $\{p, q\}$ kümesi indiske değilse, p ve q nun ayırık komşulukları vardır.

Örnek 2.2.1. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı a ve b noktalarında $PreT_2$ dir, fakat c ve d noktalarında $PreT_2$ değildir.

Örnek 2.2.2. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı her noktada $PreT_2$ dir.

Teorem 2.2.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı p de $PreT_2$ dir.
2. B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S_p : B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi ile $A_p : B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi aynıdır.
3. B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S_p : B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi ile $i_1, i_2 : B \rightarrow B \vee_p B$, $x \mapsto i_1(x) = x_1, x \mapsto i_2(x) = x_2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi aynıdır.

Baran [40, 59], topolojik uzaylardaki p noktasındaki $PreT_2$ ayırma aksiyomunu Tanım 2.1.1 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 2.2.2. [40, 59] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

1. X objesi p de $Pre\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması ile $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması çıkarır.
2. X objesi p de $PreT'_2$ dür ancak ve ancak $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması ile $\{i_1, i_2 : \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırması çıkarır.

Tanım 2.2.3. X bir küme, $p \in X$ ve $X \vee_p X$ de X kümesinin p noktasındaki wedge çarpımı olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa i_1 ve i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\mathbf{PROX}$ kategorisindeki $\{i_1, i_2 : (X, \delta) \rightarrow (X \vee_p X, \delta')\}$ epi-kavşağı bir bitiş kaldırmadır:

$X \vee_p X$ nin farklı bileşenlerindeki her A, B çifti için $A \delta' B$ dir ancak ve ancak $k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(A) = C$ ve $i_j^{-1}(B) = D$ olmak üzere $C \delta \{p\}$ ve $\{p\} \delta D$

olacak şekilde $C, D \in X$ kümeleri mevcuttur. Eğer A, B çifti $X \vee_p X$ nin aynı bileşeninde ise, o zaman $A \delta' B$ dir ancak ve ancak $k = 1, 2$ için $i_k^{-1}(A) = C$ ve $i_k^{-1}(B) = D$ olmak üzere $C \delta D$ olacak şekilde $C, D \in X$ kümeleri mevcuttur. Özel olarak, eğer $i_k(C) = A$ ve $i_k(D) = B$ ise, o zaman $(i_k(C), i_k(D)) = (A, B) \in \delta'$ dür ancak ve ancak $(i_k^{-1}(i_k(C)), i_k^{-1}(i_k(D))) = (C, D) \in \delta$ dir.

Bu tanım, Tanım 1.1.12 ve Not 1.1.2 nin özel bir durumudur.

PROX kategorisinde p noktasında $Pre\overline{T}_2$ ve $PreT'_2$ ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.2. Tüm EF-proximity uzaylar p de $Pre\overline{T}_2$ dir.

İspat: (X, δ) herhangi bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayının p de $Pre\overline{T}_2$ olduğunu gösterelim. Yani Tanım 1.5.2 ve Tanım 2.2.2 den wedge çarpımdaki herhangi bir U ve V çifti için $\pi_1 A_p(U) \delta \pi_1 A_p(V)$, $\pi_2 A_p(U) \delta \pi_2 A_p(V)$ dir ancak ve ancak sırasıyla $\pi_1 S_p(U) \delta \pi_1 S_p(V)$, $\pi_2 S_p(U) \delta \pi_2 S_p(V)$ dir, gösterelim.

U ve V için çeşitli durumları ele alalım. Bu durumlar $\{x_1\} \subseteq U$, $\{x_2\} \subseteq U$ veya $\{x_1, x_2\} \subseteq U$ ve $\{x_1\} \subseteq V$, $\{x_2\} \subseteq V$ veya $\{x_1, x_2\} \subseteq V$ dir. Tanım 1.1.1 in (P2) şartından yukarıda verilen durumlarda “alt küme” yerine “eşittir” almak yeterlidir.

$U = \{x_1\}$ ve $V = \{x_1\}$ durumunu ele alalım. Eğer $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_1\}) = \{p\} \delta \{p\}$ ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\} = \pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1\})$ dir. Tersine, eğer $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\} = \pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1\})$ ise, o zaman $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_1\}) = \{p\} \delta \{p\}$ dir (Tanım 1.1.1 in (P4) şartından).

$U = \{x_1\}$ ve $V = \{x_2\}$ durumunu ele alalım. Eğer $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{p\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{x\}$ ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{p\}$ ve $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir (Tanım 1.1.1 in (P4) şartından). Tersine, eğer $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{p\}$ ve $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ ise, o zaman $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_2\}) =$

$\{x\} \delta \{p\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{x\}$ dir (Tanım 1.1.1 in (P1) şartından).

$U = \{x_1\}$ ve $V = \{x_1, x_2\}$ durumunu ele alalım. Eğer $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x, p\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_1, x_2\}) = \{p\} \delta \{p, x\}$ ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x, p\}$ ve $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir (Tanım 1.1.1 in (P4) şartından). Tersine, eğer $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x, p\}$ ve $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ ise, o zaman $\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_1, x_2\}) = \{x\} \delta \{x, p\}$ ve $\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_1, x_2\}) = \{p\} \delta \{p, x\}$ dir (Tanım 1.1.1 in (P4) şartından).

Benzer şekilde eğer $U = \{x_2\}$ veya $\{x_1, x_2\}$ ve $V = \{x_1\}, \{x_2\}$ veya $\{x_1, x_2\}$ ise, o zaman da $\pi_1 A_p(U) \delta \pi_1 A_p(V), \pi_2 A_p(U) \delta \pi_2 A_p(V)$ dir ancak ve ancak sırasıyla $\pi_1 S_p(U) \delta \pi_1 S_p(V), \pi_2 S_p(U) \delta \pi_2 S_p(V)$ dir sonucu elde edilir.

O halde (X, δ) uzayı p de $Pre\overline{T}_2$ dir.

Teorem 2.2.3. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ dür ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (X, δ) EF-proximity uzayı p de $PreT'_2$ olsun. Bu durumda Tanım 1.5.2, Tanım 2.2.2 ve Tanım 2.2.3 den wedge çarpımdaki herhangi U, V kümeleri için (a) $\pi_1 S_p(U) \delta \pi_1 S_p(V)$ ve $\pi_2 S_p(U) \delta \pi_2 S_p(V)$ dir ancak ve ancak (b) $\{x\} \delta \{y\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k\{x\} = x_k \in U$ ve $i_k\{y\} = y_k \in V$ olacak şekilde bir $x, y \in X$ çifti mevcuttur.

$X \vee_p X$ nin farklı bileşenindeki her bir U, V çifti için $U \delta' V$ dir ($\delta', X \vee_p X$ üzerindeki EF-proximity yapısıdır) ancak ve ancak $k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(U) = C$ ve $i_j^{-1}(V) = D$ olmak üzere $C \delta \{p\}$ ve $\{p\} \delta D$ olacak şekilde X de C, D kümeleri mevcuttur. Eğer U ve V wedge çarpımının aynı bileşeninde iseler, o zaman $U \delta' V$ dir ancak ve ancak $C \delta D$ ve $k = 1, 2$ için $i_k^{-1}(U) = C$ ve $i_k^{-1}(V) = D$ olacak şekilde X de C, D kümeleri mevcuttur. Özel olarak, eğer $i_k(C) = U$ ve $i_k(D) = V$ ise, o zaman $(i_k(C), i_k(D)) \in \delta'$ dür ancak ve ancak $(i_k^{-1}(i_k(C)), i_k^{-1}(i_k(D))) = (C, D) \in \delta$ dir. Bu Tanım 1.1.12 ve Not 1.1.2 nin özel bir durumudur.

Şartın sağlandığını göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $x \neq p$ olmak üzere bazı $x, p \in X$ için $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$ olsun. Bu durumda $U \supseteq \{x_1\}$ ve $V \supseteq \{x_2\}$ olmak üzere $(U, V) \in \delta'$ için $(\delta', \text{wedge çarpım üzerindeki EF-proximity yapısı})$ $\pi_1 S_p(U) \delta \pi_1 S_p(V) \supseteq \pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \pi_1(\{(x, x)\}) \delta \pi_1(\{(p, x)\}) = \{x\} \delta \{p\}$ dir, yani $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$ dır; $\pi_2 S_p(U) \delta \pi_2 S_p(V) \supseteq \pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_2\}) = \pi_2(\{(x, x)\}) \delta \pi_2(\{(p, x)\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır. Burada $\pi_i : X^2 \rightarrow X$ ($i = 1, 2$) izdüşüm dönüşümleridir.

$k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(U) = A$ ve $i_j^{-1}(V) = B$ olmak üzere $A \delta \{p\}$ ve $\{p\} \delta B$ olacak şekilde X de A, B kümeleri mevcuttur. $i_k(i_k^{-1}(U)) = i_k(A) \subseteq U$ ve $i_j(i_j^{-1}(V)) = i_j(B) \subseteq V$ dir.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{x_1\} \subseteq i_k(A)$ ve $\{x_2\} \subseteq i_k(B)$ olur. Fakat, eğer bazı $(A, B) \in \delta$ ve $k = 1$ ($k = 2$) için $(i_k(A), i_k(B)) \supseteq (\{x_1\}, \{x_2\}) \in \delta'$ ise, o zaman $(\{x_1\}, \{x_2\}) \subseteq (i_1(A), i_1(B))$ olup, bu x_2 (x_1) nin $X \vee_p X$ in birinci (ikinci) bileşeninde olduğunu gösterir. Bu ise $x \neq p$ olduğundan bir çelişkidir.

Benzer şekilde eğer $i_k(A)$, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(B)$, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{x_2\} \subseteq i_k(A)$ ve $\{x_1\} \subseteq i_k(B)$ olur. Fakat, eğer bazı $(A, B) \in \delta$ ve $k = 1$ ($k = 2$) için $(i_k(A), i_k(B)) \supseteq (\{x_2\}, \{x_1\}) \in \delta'$ ise, o zaman $(\{x_2\}, \{x_1\}) \subseteq (i_1(A), i_1(B))$ olup, bu x_2 (x_1) nin $X \vee_p X$ in birinci (ikinci) bileşeninde olduğunu gösterir. Bu ise $x \neq p$ olduğundan bir çelişkidir.

O halde eğer $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$ ise, o zaman $x = p$ dir.

Tersine, kabul edelim ki her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ olsun. (X, δ) nın p de $PreT'_2$ olduğunu, yani Tanım 1.5.2, Tanım 2.2.2 ve Tanım 2.2.3 den yukarıda verilen (a) ve (b) nin denk olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak (a) nın (b) yi gerektirdiğini gösterelim. $U \delta' V$ (δ' , wedge çarpım üzerindeki EF-proximity yapısıdır), yani $\pi_i S_p(U) \delta \pi_i S_p(V)$ ($i = 1, 2$) olsun.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{x_1\} \subseteq i_k(A)$ ve $\{x_2\} \subseteq i_k(B)$ olur.

Tanım 1.1.1 in (P2) şartından burada “alt küme” yerine “eşittir” almak yeterlidir. Bu durumda $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \pi_1(\{(x, x)\}) \delta \pi_1(\{(p, x)\}) = \{x\} \delta \{p\}$ dir, yani $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$ dır. $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ (kabulden) olduğundan Tanım 1.1.1 in (P2) şartından $(\{x_1\}, \{x_2\}) \notin \delta'$ elde edilir.

$i_k(A) \subseteq U$ nun, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(B) \subseteq V$ nin, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninin alt kümesi olduğu durumda da benzer şekilde aynı sonuca ulaşılır. Böylece $i_k(A)$ ve $i_k(B)$, $X \vee_p X$ in farklı bileşenlerinde olamaz.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$ ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in her iki bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(A) \supseteq \{x_1, x_2\}$ ve $V \supseteq i_k(B) \supseteq \{x_1, x_2\}$ olur.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in her iki bileşeninin de alt kümesi ise, o zaman $U \supseteq i_k(A) \supseteq \{x_1\}$ ve $V \supseteq i_k(B) \supseteq \{x_1, x_2\}$ olur.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$, $X \vee_p X$ in her iki bileşeninin de alt kümesi ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $U \supseteq i_k(A) \supseteq \{x_1, x_2\}$ ve $V \supseteq i_k(B) \supseteq \{x_2\}$ olur.

Eğer $i_k(A) \subseteq U$ ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in birinci bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(A) \supseteq \{x_1\}$ ve $V \supseteq i_k(B) \supseteq \{x_1\}$ olur. Benzer şekilde eğer $i_k(A) \subseteq U$ ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in ikinci bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(A) \supseteq \{x_2\}$ ve $V \supseteq i_k(B) \supseteq \{x_2\}$ olur.

Eğer $(\{x_i\}, \{x_i\}) \in \delta'$ ($i = 1, 2$) ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır; $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır ve $\pi_1 S_p(\{x_2\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{p\}$ dir, yani $(\{p\}, \{p\}) \in \delta$ dır; $\pi_2 S_p(\{x_2\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır.

Buna göre $(i_k(A), i_k(B)) \supseteq (\{x_i\}, \{x_i\})$ ($i = 1, 2$) olur, yani $i_k(A) \subseteq U$ ve $i_k(B) \subseteq V$, $X \vee_p X$ in birinci, ikinci ya da her iki bileşenindedir. Bu nedenle $\{x\} \delta \{y\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k\{x\} = x_k \in U$ ve $i_k\{y\} = y_k \in V$ olacak şekilde bir $x, y \in X$ çifti mevcuttur. O halde (a), (b) yi gerektirir.

Şimdi de (b) nin (a) yı gerektirdiğini gösterelim. Kabul edelim ki (b) sağlansın.

Wedge çarpımındaki herhangi U, V kümeleri için $\pi_i S_p(U) \delta \pi_i S_p(V)$ ($i = 1, 2$) olduğunu göstermeliyiz.

$\{x\} \delta \{y\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k\{x\} = x_k \in U$ ve $i_k\{y\} = y_k \in V$ olacak şekilde bir $x, y \in X$ çifti mevcuttur. Yukarıda kullanılan aynı yolla $(i_k\{x\}, i_k\{y\}) \supseteq (\{x_i\}, \{x_i\})$, ($i = 1, 2$) elde edilir.

$i = 1$ için, eğer $(\{x_1\}, \{x_1\}) \in \delta'$ ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır; $\pi_2 S_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır.

$i = 2$ için, eğer $(\{x_2\}, \{x_2\}) \in \delta'$ ise, o zaman $\pi_1 S_p(\{x_2\}) \delta \pi_1 S_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{p\}$ dir, yani $(\{p\}, \{p\}) \in \delta$ dır; $\pi_2 S_p(\{x_2\}) \delta \pi_2 S_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dır.

Buradan $\pi_i S_p(U) \delta \pi_i S_p(V)$ ($i = 1, 2$) elde edilir. Böylece (b), (a) yı gerektirir.

O halde (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ dür.

2.3. p Noktasında Hausdorff Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen bir p noktasında Hausdorff (T_2) ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de T_2 dir ancak ve ancak her $p \neq q$ için p ve q nun ayrık komşulukları vardır.

Buna denk olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.3.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de T_2 dir ancak ve ancak (B, τ) uzayı p de T_0 ve p de $PreT_2$ dir.

Baran [40], topolojik uzaylardaki p noktasındaki Hausdorff (T_2) ayırma aksiyomunu Teorem 2.3.1 i kullanarak herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 2.3.2. [56] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere X , $\mathcal{E}$ nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

1. X objesi p de $\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak X objesi p de $\overline{T}_0$ ve p de $Pre\overline{T}_2$ dir.
2. X objesi p de T'_2 dür ancak ve ancak X objesi p de T'_0 ve p de $PreT'_2$ dür.

PROX kategorisinde p noktasında $\overline{T}_2$ ve T'_2 ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de $\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.3.2, Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.2.2 den açıktır.

Teorem 2.3.3. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de T'_2 dür ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.3.2, Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.2.3 den açıktır.

Not 2.3.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. Teoremler 2.3.2 ve 2.3.3 den (X, δ) uzayı p de $\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak p de T'_2 dür.

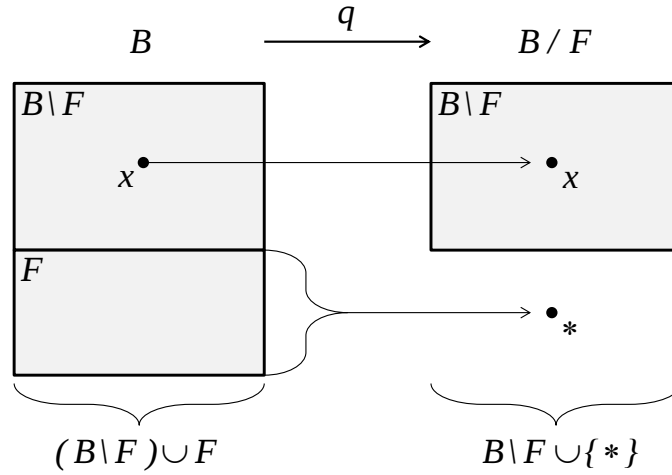
2.4. p Noktasında Regüler Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen bir p noktasında T_3 ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4.1. (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de T_3 tür ancak ve ancak (B, τ) uzayı p de T_1 dir ve $p \notin F$ olacak şekilde boştan farklı kapalı her $F \subset B$ için p ve F nin ayrık komşulukları vardır.

Teorem 2.4.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) uzayı p de T_3 tür ancak ve ancak (B, τ) uzayı p de T_1 dir ve $p \notin F$ olacak şekilde B nin boştan farklı kapalı her F alt kümesi için B/F p de $PreT_2$ dir. Burada q , B/F üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere $q: (B, \tau) \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ dır (Şekil 2.6).

Baran [40], topolojik uzaylardaki p noktasındaki T_3 ayırma aksiyomunu Teorem 2.4.1 i kullanarak herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Şekil 2.6. q fonksiyonu

Tanım 2.4.2. [40] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere X , $\mathcal{E}$ nin bir objesi ve F , B nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. q , B/F üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ epi $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir. p , B de bir nokta olsun.

1. X objesi p de $\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak X objesi p de T_1 ve $p \notin F$ olacak şekilde kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi p de $Pre\overline{T}_2$ dir.
2. X objesi p de T'_3 dür ancak ve ancak X objesi p de T_1 ve $p \notin F$ olacak şekilde kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi p de $PreT'_2$ dür.
3. X objesi p de $\overline{ST}_3$ dir ancak ve ancak X objesi p de T_1 ve $p \notin F$ olacak şekilde kuvvetli kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi p de $Pre\overline{T}_2$ dir.
4. X objesi p de ST'_3 dür ancak ve ancak X objesi p de T_1 ve $p \notin F$ olacak şekilde kuvvetli kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi p de $PreT'_2$ dür.

PROX kategorisinde p noktasında $\overline{T}_3$, T'_3 , $\overline{ST}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4.2. (X, δ) uzayı p de $Pre\overline{T}_2$ ise $(X/F, \delta^*)$ uzayı da p de $Pre\overline{T}_2$ dir.

İspat: Teorem 2.2.2 den açıktır.

Teorem 2.4.3. (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ ise $(X/F, \delta^*)$ uzayı da p de $PreT'_2$ dır.

İspat: Kabul edelim ki (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ olsun ve birbirinden farklı $a, p \in X/F$ noktaları verilsin. Teorem 2.2.3 den $(\{a\}, \{p\}) \notin \delta^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada δ^*, q tarafından üretilen X/F üzerindeki EF-proximity yapısıdır.

İlk olarak $p = *$ alalım. Kabul edelim ki $a \neq *$ olsun. q dönüşümü tanımından $q(a) = a$ ve her $c \in F$ için $q(c) = *$ olacak şekilde en az bir $a \in X$ ve $F \subset X$ vardır. Her $c \in F$ için $a \notin F$ olduğundan $a \neq c$ ve (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ olduğundan $\{a\} \bar{\delta} \{c\}$ dir. Tanım 1.1.1 in (P2) şartından $\{a\} \bar{\delta} F$ elde edilir. Buradan $\{a\} \bar{\delta} F = q^{-1}(\{a\}) \bar{\delta} q^{-1}(\{*\})$ bulunur. Tanım 1.1.11 ve Tanım 1.1.12 gereğince $[0, 1]$ aralığındaki her s rasyonel sayısı için $C_0 = \{a\}$, $C_1 = \{*\}^c$ olacak şekilde en az bir $C_s \subset Y$ vardır ve $s < t$ ise $q^{-1}(C_s) \ll_\delta q^{-1}(C_t)$ dir. $q^{-1}(\{a\}) \bar{\delta} q^{-1}(\{*\})$ olduğundan $q^{-1}(\{a\}) \ll_\delta (q^{-1}(\{*\}))^c = q^{-1}(\{a\}) \ll_\delta q^{-1}(\{*\}^c)$ dir ancak ve ancak $\{a\} \ll^* \{*\}^c$ dir. Böylece $\{a\} \bar{\delta}^* \{*\}$ dır, yani $(\{a\}, \{*\}) \notin \delta^*$ dır.

Şimdi de $a \neq p \neq *$ alalım. q dönüşümü tanımından $q(a) = a$ ve $q(p) = p$ olacak şekilde en az bir $a, p \in X$ çifti vardır. Burada q dönüşümü birebir olarak düşünülebilir. Kabul edelim ki $\{a\} \delta^* \{p\}$ olsun. q dönüşümü tanımı ve Not 1.1.2 gereğince $\{a\} \delta^* \{p\}$ dir ancak ve ancak $q^{-1}(\{a\}) \delta^* q^{-1}(\{p\}) = \{a\} \delta \{p\}$ dir. $(\{a\}, \{p\}) \in \delta$ elde edilir. Bu ise (X, δ) uzayının p de $PreT'_2$ olmasıyla çelişir. O halde $(\{a\}, \{p\}) \notin \delta^*$ dır.

Sonuç olarak, birbirinden farklı $a, p \in X/F$ noktaları için $(\{a\}, \{p\}) \notin \delta^*$ dır. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 den $(X/F, \delta^*)$ uzayı p de $PreT'_2$ dır.

Teorem 2.4.4. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de $\bar{T}_3$ dir ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.4.2, Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.4.2 den açıktır.

Teorem 2.4.5. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de T'_3 dır ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.4.2, Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.4.3 den açıktır.

Teorem 2.4.6. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de $\overline{ST}_3$ dir ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.4.2, Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.4.2 den açıktır.

Teorem 2.4.7. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) uzayı p de ST'_3 dür ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 2.4.2, Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.4.3 den açıktır.

Not 2.4.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. Teoremler 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6 ve 2.4.7 den (X, δ) uzayı p de $\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak p de T'_3 dür ancak ve ancak p de $\overline{ST}_3$ dir ancak ve ancak p de ST'_3 dür.

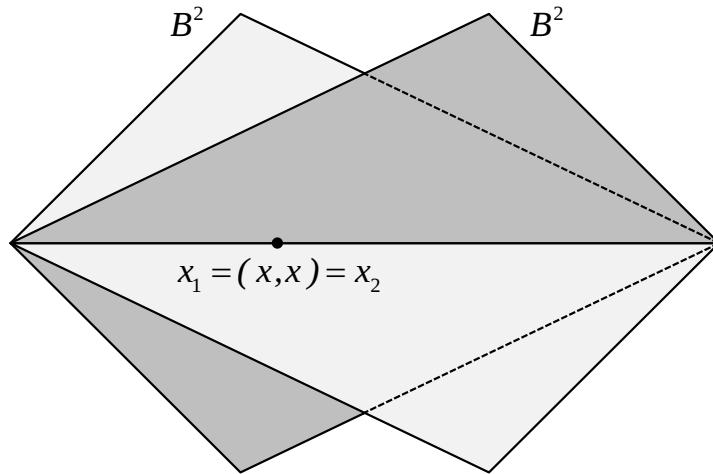
3. BÖLÜM

HAUSDORFF VE REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle diyagonal boyunca wedge çarpım tanımı, bazı dönüşümler ve herhangi bir topolojik kategori için genelde ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir. Ardından bu tanımlar ile birlikte [60] da **PROX** kategorisinde karakterize edilen $\bar{T}_0, T'_0$ ve T_1 ayırma aksiyomları yardımıyla $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

3.1. Topolojik Kategorilerde Ayırma Aksiyomları

B bir küme, $B^2 = B \times B$, B nin kendisi ile kartezyen çarpımı ve $B^2 \coprod B^2$, B^2 nin iki ayrık kopyası olsun. B^2 nin Δ diyagonalı boyunca wedge çarpımı $B^2 \coprod B^2$ nin Δ diyagonalinde çakışmasıdır ve $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ şeklinde gösterilir. $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ deki bir (x, y) noktası birinci bileşende ise $(x, y)_1$, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ olarak gösterilecektir. Ayrıca $x = y$ ise $(x, y)_1 = (x, y)_2$ dir, yani $(x, x)_1 = (x, x)_2$ olur.



Şekil 3.1. Diyagonal boyunca wedge çarpım

Not 3.1.1. $B \in \mathbf{SET}$ bir küme, $B^2 = B \times B$ kartezyen çarpım ve $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ de B^2 kümesinin Δ diyagonalı boyunca wedge çarpımı olsun. $i_1, i_2: B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2$ dönüşümleri de sırasıyla birinci ve ikinci içerme dönüşümleri (inclusion maps) olmak üzere;

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B^2 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B^2 & \xrightarrow{i_2} & B^2 \vee_{\Delta} B^2 \end{array}$$

değişmeli diyagramı bir pushout diyagramıdır.

$id_B: B \rightarrow B$, $id_{B^2}: B^2 \rightarrow B^2$ birim dönüşümler ve $i = 1, 2$ için $\pi_i: B^2 \rightarrow B$ izdüşüm dönüşümleri olmak üzere; $Ai_1 = (\pi_1, \pi_2, \pi_1): B^2 \rightarrow B^3$, $Ai_2 = (\pi_1, \pi_1, \pi_2): B^2 \rightarrow B^3$, $Si_1 = (\pi_1, \pi_2, \pi_2): B^2 \rightarrow B^3$, $Si_2 = (\pi_1, \pi_1, \pi_2): B^2 \rightarrow B^3$ ve $\nabla i_1 = \nabla i_2 = id_{B^2}: B^2 \rightarrow B^2$ dönüşümleri yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında sadece Tanım 3.1.1 ile verilen A , S ve ∇ dönüşümleri elde edilir. Örneğin A dönüşümünün elde edilişi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B^2 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B^2 & \xrightarrow{i_2} & B^2 \vee_{\Delta} B^2 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B^2 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow Ai_1 \\ B^2 & \xrightarrow{Ai_2} & B^3 \end{array}$$

değişmeli diyagramları için

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B^2 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B^2 & \xrightarrow{i_2} & B^2 \vee_{\Delta} B^2 \end{array} \begin{array}{c} \searrow Ai_1 \\ \xrightarrow{A} \\ \searrow Ai_2 \end{array} B^3$$

diyagramı değişmeli, yani $Ai_1\Delta = Ai_2\Delta = (id_B, id_B, id_B)$ olduğundan bir tek $A: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^3$ morfizmi vardır.

Tanım 3.1.1. [40] B bir küme olmak üzere $B^2 = B \times B$ ve $B^3 = B \times B \times B$ çarpımları verilsin. Buna göre;

(1) Temel (Principle) Eksen Dönüşümü:

$$A: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^3, \quad A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x) & , \quad i = 1 \\ (x, x, y) & , \quad i = 2 \end{cases}$$

(2) Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü:

$$S: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^3, \quad S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y) & , \quad i = 1 \\ (x, x, y) & , \quad i = 2 \end{cases}$$

(3) Katlama (Fold) Dönüşümü:

$$\nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^2, \quad \nabla((x, y)_i) = (x, y), \quad i = 1, 2$$

olarak tanımlanır.

Topolojik uzaylarda iyi bilinen T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.2. (B, τ) bir topolojik uzay olsun.

1. (B, τ) uzayı T_0 dır ancak ve ancak her $x \neq y$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde x in en az bir N_x komşuluğu veya $x \notin N_y$ olacak şekilde y nin en az bir N_y komşuluğu vardır.
2. (B, τ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak her $x \neq y$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde x in en az bir N_x komşuluğu ve $x \notin N_y$ olacak şekilde y nin en az bir N_y komşuluğu vardır.

Baran [61], Teorem 2.1.1 i noktadan bağımsız olan aşağıdaki teoreme genişletmiştir.

Teorem 3.1.1. [61] (B, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı T_0 dır.
2. B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $A: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.
3. $i_1, i_2: B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2, (x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1, (x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ üzerindeki bitiş topolojisi τ_* olmak üzere, $id: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2 \vee_{\Delta} B^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

Baran [61], Teorem 2.1.2 yi noktadan bağımsız olan aşağıdaki teoreme genişletmiştir.

Teorem 3.1.2. [61] (B, τ) bir topolojik uzay olsun. (B, τ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

Baran [40], topolojik uzaylardaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını Tanım 3.1.1 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 3.1.3. [40] $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor olmak üzere $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $\mathcal{U}(X) = B$ olsun.

1. X objesi $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak $\{A: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $\mathcal{D}, \mathcal{U}$ nun sol adjointi olan diskre fanktordur.
2. X objesi T'_0 dür ancak ve ancak $\{id: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^2 \vee_{\Delta} X^2) = B^2 \vee_{\Delta} B^2 \text{ ve } \nabla: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $X^2 \vee_{\Delta} X^2, \mathcal{E}$ de wedge çarpımdır, yani i_1, i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2: \mathcal{U}(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırmasıdır.

3. X objesi T_1 dir ancak ve ancak $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

Daha önce [60] da **PROX** kategorisinde karakterize edilen $\overline{T}_0$, T'_0 ve T_1 ayırma aksiyomları aşağıda verilmiştir. İspatları [60] de mevcuttur.

Teorem 3.1.3. [60] (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

Teorem 3.1.4. [60] Tüm EF-proximity uzaylar T'_0 dür.

Teorem 3.1.5. [60] (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

Not 3.1.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. Teoremler 3.1.3 ve 3.1.5 den (X, δ) uzayı $\overline{T}_0$ dir ancak ve ancak T_1 dir.

3.2. Pre-Hausdorff Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen $PreT_2$ ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

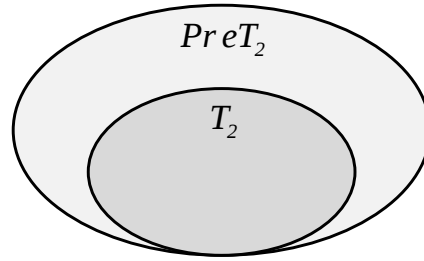
Tanım 3.2.1. [58] (B, τ) topolojik uzayı $PreT_2$ dir ancak ve ancak her $x \neq y$ için $\{x, y\}$ kümesi indiskre değilse, x ve y nun ayrık komşulukları vardır.

Örnek 3.2.1. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı $PreT_2$ değildir.

Örnek 3.2.2. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı $PreT_2$ dir.

Not 3.2.1. Pre-Hausdorff ($PreT_2$) ayırma aksiyomu, Hausdorff (T_2) ayırma aksiyomundan daha geneldir. Yani, Hausdorff her uzay $PreT_2$ dir. Fakat bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 3.2.3. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı $PreT_2$ olmasına rağmen Hausdorff değildir. Çünkü $a, b \in X$ çifti için ayrık açık komşuluklar bulunamaz.



Şekil 3.2. Pre-Hausdorff ve Hausdorff uzay ilişkisi

Baran [58], Teorem 2.2.1 i noktadan bağımsız olan aşağıdaki teoreme genişletmiştir.

Teorem 3.2.1. [58] (B, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı $PreT_2$ dir.
2. B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi ile $A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi aynıdır.
3. B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi ile $i_1, i_2 : B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2$, $(x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1$, $(x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi aynıdır.

Baran [40], topolojik uzaylardaki $PreT_2$ ayırma aksiomunu Tanım 3.1.1 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genişletmiştir.

Tanım 3.2.2. [40] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor olmak üzere $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $\mathcal{U}(X) = B$ olsun.

1. X objesi $Pre\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması ile $\{A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması çakışır.

2. X objesi $PreT'_2$ dır ancak ve ancak $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırması ile $\{i_1, i_2 : \mathcal{U}(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2\}$ $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırması çıkarır.

Tanım 3.2.3. $X \in \mathbf{SET}$ bir küme, $X^2 = X \times X$ kartezyen çarpım ve $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de X^2 kümesinin Δ diyagonalı boyunca wedge çarpımı olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa i_1 ve i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere **PROX** kategorisindeki $\{i_1, i_2 : (X^2, \delta) \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \delta')\}$ epi-kavşağı bir bitiş kaldırmadır:

$X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin farklı bileşenlerindeki her A, B çifti için $A \delta' B$ dir ancak ve ancak $k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(A) = C$ ve $i_j^{-1}(B) = D$ olmak üzere $C \delta U$ ve $U \delta D$ olacak şekilde $C, D, U \in X^2$ kümeleri mevcuttur. Eğer A, B çifti $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin aynı bileşeninde ise, o zaman $A \delta' B$ dir ancak ve ancak $k = 1, 2$ için $i_k^{-1}(A) = C$ ve $i_k^{-1}(B) = D$ olmak üzere $C \delta D$ olacak şekilde $C, D \in X^2$ kümeleri mevcuttur. Özel olarak, eğer $i_k(E) = A$ ve $i_k(F) = B$ ise, o zaman $(i_k(E), i_k(F)) = (A, B) \in \delta'$ dır ancak ve ancak $(i_k^{-1}(i_k(E)), i_k^{-1}(i_k(F))) = (E, F) \in \delta$ dır.

Bu tanım, Tanım 1.1.12 ve Not 1.1.2 nin özel bir durumudur.

PROX kategorisinde $Pre\overline{T}_2$ ve $PreT'_2$ ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.2. Tüm EF-proximity uzaylar $Pre\overline{T}_2$ dir.

İspat: (X, δ) herhangi bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayının $Pre\overline{T}_2$ olduğunu gösterelim. Yani Tanım 1.5.2 ve Tanım 3.2.2 den wedge çarpımdaki herhangi bir U ve V çifti için $\pi_1 A(U) \delta \pi_1 A(V)$, $\pi_2 A(U) \delta \pi_2 A(V)$ ve $\pi_3 A(U) \delta \pi_3 A(V)$ dir ancak ve ancak sırasıyla $\pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ ve $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V)$ dir, gösterelim.

U ve V için çeşitli durumları ele alalım. Bu durumlar bazı $x, y, z, t \in X$ için $\{(x, y)_1\} \subseteq U$, $\{(x, y)_2\} \subseteq U$ veya $\{(x, x)\} \subseteq U$ ve $\{(z, t)_1\} \subseteq V$, $\{(z, t)_2\} \subseteq V$ veya $\{(z, z)\} \subseteq V$ dir. Tanım 1.1.1 in (P2) şartından yukarıda verilen durumlarda “alt küme” yerine “eşittir” almak yeterlidir.

Eğer $U = \{(x, y)_1\}$ ve $V = \{(z, t)_1\}$ ise, o zaman $\pi_1 A(U) \delta \pi_1 A(V) = \{x\} \delta \{z\} = \pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 A(U) \delta \pi_2 A(V) = \{y\} \delta \{t\} = \pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ dir ve $\pi_3 A(U) \delta \pi_3 A(V) = \{x\} \delta \{z\}$ dir ancak ve ancak $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V) = \{y\} \delta \{t\}$ dir.

Eğer $U = \{(x, y)_1\}$ ve $V = \{(z, t)_2\}$ ise, o zaman $\pi_1 A(U) \delta \pi_1 A(V) = \{x\} \delta \{z\} = \pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 A(U) \delta \pi_2 A(V) = \{y\} \delta \{z\} = \pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ dir. Ayrıca δ bir EF-proximity bağıntısı olduğundan $\pi_3 A(U) \delta \pi_3 A(V) = \{x\} \delta \{t\}$ dir ancak ve ancak $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V) = \{y\} \delta \{t\}$ dir.

Eğer $U = \{(x, y)_1\}$ ve $V = \{(z, z)\}$ ise, o zaman $\pi_1 A(U) \delta \pi_1 A(V) = \{x\} \delta \{z\} = \pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 A(U) \delta \pi_2 A(V) = \{y\} \delta \{z\} = \pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ dir ve $\pi_3 A(U) \delta \pi_3 A(V) = \{x\} \delta \{z\}$ dir ancak ve ancak $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V) = \{y\} \delta \{z\}$.

Benzer şekilde eğer $U = \{(x, y)_2\}$ veya $\{(x, x)\}$ ve $V = \{(z, t)_1\}$, $\{(z, t)_2\}$ veya $\{(z, z)\}$ ise, o zaman da $\pi_1 A(U) \delta \pi_1 A(V)$, $\pi_2 A(U) \delta \pi_2 A(V)$ ve $\pi_3 A(U) \delta \pi_3 A(V)$ dir ancak ve ancak sırasıyla $\pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ ve $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V)$ dir sonucu elde edilir.

O halde (X, δ) uzayı $Pre\overline{T}_2$ dir.

Teorem 3.2.3. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı $PreT'_2$ dür ancak ve ancak X deki her ayırık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Kabul edelim ki (X, δ) EF-proximity uzayı $PreT'_2$ olsun. Bu durumda Tanım 1.5.2, Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 den $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ deki herhangi U, V kümeleri için (a) $\pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V)$, $\pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V)$ ve $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V)$ dir ancak ve ancak (b) $\{(a, b)\} \delta^2 \{(c, d)\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k \{(a, b)\} = U$ ve $i_k \{(c, d)\} = V$ olacak şekilde bir $(a, b), (c, d) \in X^2$ çifti mevcuttur. Burada δ^2 , X^2 üzerindeki çarpım proximity yapısıdır.

$X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin farklı bileşenindeki her bir U, V çifti için $U \delta' V$ dir ancak ve ancak $k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(U) = C$ ve $i_j^{-1}(V) = D$ olmak üzere $C \delta^2 A$ ve $A \delta^2 D$ olacak şekilde X^2 de C, D ve A kümeleri mevcuttur. Eğer U ve V wedge çarpımının aynı bileşeninde ise, o zaman $U \delta' V$ dir ancak ve ancak $C \delta^2 D$ ve $k = 1, 2$ için $i_k^{-1}(U) = C$ ve $i_k^{-1}(V) = D$ olacak şekilde X^2 de C, D kümeleri mevcuttur. Özel

olarak, eğer $i_k(E) = U$ ve $i_k(F) = V$ ise, o zaman $(i_k(E), i_k(F)) \in \delta'$ dır ancak ve ancak $(i_k^{-1}(i_k(E)), i_k^{-1}(i_k(F))) = (E, F) \in \delta^2$ dir. Bu Tanım 1.1.12 ve Not 1.1.2 nin özel bir durumudur.

Şartın sağlandığını göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $x \neq y$ olmak üzere bazı $x, y \in X$ için $(\{x\}, \{y\}) \in \delta$ olsun. Bu durumda $U \supseteq \{(x, y)_1\}$ ve $V \supseteq \{(x, y)_2\}$ olmak üzere $(U, V) \in \delta'$ için $(\delta', X^2 \vee_\Delta X^2)$ üzerindeki EF-proximity yapıdır $\pi_1 S(U) \delta \pi_1 S(V) \supseteq \pi_1 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_1 S\{(x, y)_2\} = \pi_1\{(x, y, y)\} \delta \pi_1\{(x, x, y)\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_2 S(U) \delta \pi_2 S(V) \supseteq \pi_2 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_2\} = \pi_2\{(x, y, y)\} \delta \pi_2\{(x, x, y)\} = \{y\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{y\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_3 S(U) \delta \pi_3 S(V) \supseteq \pi_3 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_3 S\{(x, y)_2\} = \pi_3\{(x, y, y)\} \delta \pi_3\{(x, x, y)\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir. Burada $\pi_i : X^3 \rightarrow X$ ($i = 1, 2, 3$) izdüşüm dönüşümleridir.

$k, j = 1, 2$ ve $k \neq j$ için $i_k^{-1}(U) = E$ ve $i_j^{-1}(V) = F$ olmak üzere $E \delta^2 A$ ve $A \delta^2 F$ olacak şekilde X^2 de E, F ve A kümeleri mevcuttur. $i_k(i_k^{-1}(U)) = i_k(E) \subseteq U$ ve $i_j(i_j^{-1}(V)) = i_j(F) \subseteq V$ dir.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{(x, y)_1\} \subseteq i_k(E)$ ve $\{(x, y)_2\} \subseteq i_k(F)$ olur. Fakat, eğer bazı $(E, F) \in \delta^2$ ve $k = 1$ ($k = 2$) için $(i_k(E), i_k(F)) \supseteq (\{(x, y)_1\}, \{(x, y)_2\}) \in \delta'$ ise, o zaman $(\{(x, y)_1\}, \{(x, y)_2\}) \in (i_1(E), i_1(F))$ olup, bu $(x, y)_2 ((x, y)_1)$ nin $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olduğunu gösterir. Bu ise $x \neq y$ olduğundan bir çelişkidir.

Benzer şekilde eğer $i_k(E)$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(F)$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{(x, y)_2\} \subseteq i_k(E)$ ve $\{(x, y)_1\} \subseteq i_k(F)$ olur. Fakat, eğer bazı $(E, F) \in \delta^2$ ve $k = 1$ ($k = 2$) için $(i_k(E), i_k(F)) \supseteq (\{(x, y)_2\}, \{(x, y)_1\}) \in \delta'$ ise, o zaman $(\{(x, y)_2\}, \{(x, y)_1\}) \in (i_1(E), i_1(F))$ olup, bu $(x, y)_2 ((x, y)_1)$ nin $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci (ikinci) bileşeninde olduğunu gösterir. Bu ise $x \neq y$ olduğundan bir çelişkidir. Bu yüzden $i_k(E)$ ve $i_k(F)$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin farklı bileşenlerinde olamaz.

Tersine, kabul edelim ki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ olsun. (X, δ) nın $PreT'_2$ olduğunu, yani Tanım 1.5.2, Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 den yukarıda verilen (a) ve (b) nin denk olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak (a) nın (b) yi gerektirdiğini gösterelim. (U, V) , δ' de herhangi bir küme, yani $\pi_i S(U) \delta \pi_i S(V)$ ($i = 1, 2, 3$) olsun.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $\{(x, y)_1\} \subseteq i_k(E)$ ve $\{(x, y)_2\} \subseteq i_k(F)$ olur. Tanım 1.1.1 in (P2) şartından burada “alt küme” yerine “eşittir” almak yeterlidir. Bu durumda $\pi_2 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_2\} = \pi_2\{(x, y, y)\} \delta \pi_2\{(x, x, y)\} = \{y\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{y\}, \{x\}) \in \delta$ dir. $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ (kabulden) olduğundan Tanım 1.1.1 in (P2) şartından $(\{(x, y)_1\}, \{(x, y)_2\}) \notin \delta'$ elde edilir.

$i_k(E) \subseteq U$ nun, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(F) \subseteq V$ nin, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninin alt kümesi olduğu durumda da benzer şekilde aynı sonuca ulaşılır. Böylece $i_k(E)$ ve $i_k(F)$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin farklı bileşenlerinde olamaz.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$ ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin her iki bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(E) \supseteq \{(x, y)_1, (x, y)_2\}$ ve $V \supseteq i_k(F) \supseteq \{(x, y)_1, (x, y)_2\}$ olur.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninin alt kümesi ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin her iki bileşeninin de alt kümesi ise, o zaman $U \supseteq i_k(E) \supseteq \{(x, y)_1\}$ ve $V \supseteq i_k(F) \supseteq \{(x, y)_1, (x, y)_2\}$ olur.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin her iki bileşeninin de alt kümesi ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninin alt kümesi ise, o zaman $U \supseteq i_k(E) \supseteq \{(x, y)_1, (x, y)_2\}$ ve $V \supseteq i_k(F) \supseteq \{(x, y)_2\}$ olur.

Eğer $i_k(E) \subseteq U$ ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin birinci bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(E) \supseteq \{(x, y)_1\}$ ve $V \supseteq i_k(F) \supseteq \{(x, y)_1\}$ olur. Benzer şekilde eğer $i_k(E) \subseteq U$ ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_\Delta X^2$ nin ikinci bileşeninde iseler, o zaman $U \supseteq i_k(E) \supseteq \{(x, y)_2\}$ ve $V \supseteq i_k(F) \supseteq \{(x, y)_2\}$ olur.

Eğer $(\{(x, y)_i\}, \{(x, y)_i\}) \in \delta'$, ($i = 1, 2$) ise, o zaman $\pi_1 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_1 S\{(x, y)_1\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_2 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_1\} = \{y\} \delta \{y\}$

dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir; $\pi_3 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_3 S\{(x, y)_1\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir ve $\pi_1 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_1 S\{(x, y)_2\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_2 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_2\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_3 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_3 S\{(x, y)_2\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir.

Buna göre $(i_k(E), i_k(F)) \supseteq (\{(x, y)_i\}, \{(x, y)_i\})$ ($i = 1, 2$) olur, yani $i_k(E) \subseteq U$ ve $i_k(F) \subseteq V$, $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin birinci, ikinci ya da her iki bileşenindedir. Bu nedenle $\{(a, b)\} \delta^2 \{(c, d)\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k\{(a, b)\} = U$ ve $i_k\{(c, d)\} = V$ olacak şekilde bir $(a, b), (c, d) \in X^2$ çifti mevcuttur. O halde $(a), (b)$ yi gerektirir.

Şimdi de (b) nin (a) yı gerektirdiğini gösterelim. Kabul edelim ki (b) sağlansın. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ deki herhangi U, V kümeleri için $\pi_i S(U) \delta \pi_i S(V)$ ($i = 1, 2, 3$) olduğunu göstermeliyiz.

$\{(a, b)\} \delta^2 \{(c, d)\}$ ve $k = 1$ veya 2 için $i_k\{(a, b)\} = U$ ve $i_k\{(c, d)\} = V$ olacak şekilde bir $(a, b), (c, d) \in X^2$ çifti mevcuttur. Yukarıda kullanılan aynı yolla $(i_k\{(a, b)\}, i_k\{(c, d)\}) \supseteq (\{(x, y)_i\}, \{(x, y)_i\})$, ($i = 1, 2$) elde edilir.

$i = 1$ için, eğer $(\{(x, y)_1\}, \{(x, y)_1\}) \in \delta'$ ise, o zaman $\pi_1 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_1 S\{(x, y)_1\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_2 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_1\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir; $\pi_3 S\{(x, y)_1\} \delta \pi_3 S\{(x, y)_1\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir.

$i = 2$ için, eğer $(\{(x, y)_2\}, \{(x, y)_2\}) \in \delta'$ ise, o zaman $\pi_1 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_1 S\{(x, y)_2\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_2 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_2 S\{(x, y)_2\} = \{x\} \delta \{x\}$ dir, yani $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ dir; $\pi_3 S\{(x, y)_2\} \delta \pi_3 S\{(x, y)_2\} = \{y\} \delta \{y\}$ dir, yani $(\{y\}, \{y\}) \in \delta$ dir.

Buradan $\pi_i S(U) \delta \pi_i S(V)$ ($i = 1, 2, 3$) elde edilir. Böylece $(b), (a)$ yı gerektirir.

O halde (X, δ) uzayı $PreT'_2$ dür.

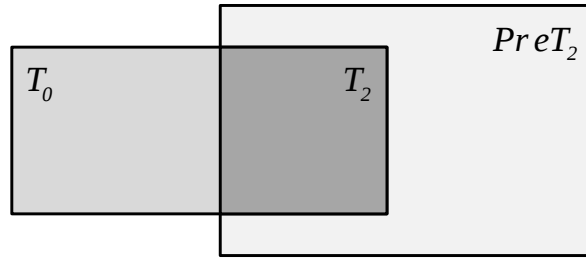
3.3. Hausdorff Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen Hausdorff (T_2) ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.1. [58] (B, τ) topolojik uzayı T_2 dir ancak ve ancak her $x \neq y$ için x ve y nin ayrık komşulukları vardır.

Buna denk olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.1. [58] (B, τ) topolojik uzayı T_2 dir ancak ve ancak (B, τ) uzayı T_0 ve $PreT_2$ dir.



Şekil 3.3. T_0, T_2 ve $PreT_2$ arasındaki ilişki

Baran [40], topolojik uzaylardaki Hausdorff (T_2) ayırma aksiyomunu Teorem 3.3.1 i kullanarak herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 3.3.2. [40] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor olmak üzere $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $\mathcal{U}(X) = B$ olsun.

1. X objesi $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak X objesi $\bar{T}_0$ ve $Pre\bar{T}_2$ dir.
2. X objesi T'_2 dür ancak ve ancak X objesi T'_0 ve $PreT'_2$ dür.

PROX kategorisinde $\bar{T}_2$ ve T'_2 ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Tanım 3.3.2, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.2.2 den açıktır.

Teorem 3.3.3. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı T'_2 dür ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Tanım 3.3.2, Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.2.3 den açıktır.

Not 3.3.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. Teoremler 3.3.2 ve 3.3.3 den (X, δ) uzayı $\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak T'_2 dür.

3.4. Regüler Proximity Uzaylar

Topolojik uzaylarda iyi bilinen T_3 ayırma aksiyomu aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.4.1. (B, τ) topolojik uzayı T_3 tür ancak ve ancak (B, τ) uzayı T_1 dir ve $x \notin F$ olacak şekilde boştan farklı kapalı her $F \subset B$ için x ve F nin ayırık komşulukları vardır.

Teorem 3.4.1. [58] (B, τ) topolojik uzayı T_3 tür ancak ve ancak (B, τ) uzayı T_1 dir ve $x \notin F$ olacak şekilde B nin boştan farklı kapalı her F alt kümesi için B/F $PreT_2$ dir. Burada q , B/F üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere $q: (B, \tau) \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ dir.

Baran [40], topolojik uzaylardaki T_3 ayırma aksiyomunu Teorem 3.4.1 i kullanarak herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 3.4.2. [40] $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere X , $\mathcal{E}$ nin bir objesi ve F , B nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. q , B/F üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ epi $\mathcal{U}$ -kavşağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir.

1. X objesi $\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak X objesi T_1 ve $x \notin F$ olacak şekilde kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi $Pre\overline{T}_2$ dir.
2. X objesi T'_3 dür ancak ve ancak X objesi T_1 ve $x \notin F$ olacak şekilde kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi $PreT'_2$ dür.
3. X objesi $S\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak X objesi T_1 ve $x \notin F$ olacak şekilde kuvvetli kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi $Pre\overline{T}_2$ dir.
4. X objesi ST'_3 dür ancak ve ancak X objesi T_1 ve $x \notin F$ olacak şekilde kuvvetli kapalı her $\emptyset \neq F \subset B$ için X/F objesi $PreT'_2$ dür.

PROX kategorisinde $\overline{T}_3$, T'_3 , $S\overline{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomlarının karakterizasyonları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.4.2. (X, δ) uzayı $Pre\overline{T}_2$ ise $(X/F, \delta^*)$ uzayı da $Pre\overline{T}_2$ dir.

İspat: Teorem 3.2.2 den açıktır.

Teorem 3.4.3. (X, δ) uzayı $PreT'_2$ ise $(X/F, \delta^*)$ uzayı da $PreT'_2$ dür.

İspat: Kabul edelim ki (X, δ) uzayı $PreT'_2$ olsun ve birbirinden farklı $a, b \in X/F$ noktaları verilsin. Teorem 3.2.3 den $(\{a\}, \{b\}) \notin \delta^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada δ^* , q tarafından üretilen X/F üzerindeki EF-proximity yapısıdır.

Kabul edelim ki $a \neq *$ olsun. q dönüşümü tanımından $q(a) = a$ ve her $c \in F$ için $q(c) = *$ olacak şekilde en az bir $a \in X$ ve $F \subset X$ vardır. Her $c \in F$ için $a \notin F$ olduğundan $a \neq c$ ve (X, δ) uzayı $PreT'_2$ olduğundan $\{a\} \bar{\delta} \{c\}$ dir. Tanım 1.1.1 in (P2) şartından $\{a\} \bar{\delta} F$ elde edilir. Buradan $\{a\} \bar{\delta} F = q^{-1}(\{a\}) \bar{\delta} q^{-1}(\{*\})$ bulunur. Tanım 1.1.11 ve Tanım 1.1.12 gereğince $[0, 1]$ aralığındaki her s rasyonel sayısı için $C_0 = \{a\}$, $C_1 = \{*\}^c$ olacak şekilde en az bir $C_s \subset Y$ vardır ve $s < t$ ise $q^{-1}(C_s) \ll_\delta q^{-1}(C_t)$ dir. $q^{-1}(\{a\}) \bar{\delta} q^{-1}(\{*\})$ olduğundan $q^{-1}(\{a\}) \ll_\delta (q^{-1}(\{*\}))^c = q^{-1}(\{a\}) \ll_\delta q^{-1}(\{*\}^c)$ dir ancak ve ancak $\{a\} \ll^* \{*\}^c$ dir. Böylece $\{a\} \bar{\delta}^* \{*\}$ dır, yani $(\{a\}, \{*\}) \notin \delta^*$ dir.

Şimdi de $a \neq b \neq *$ alalım. q dönüşümü tanımından $q(a) = a$ ve $q(b) = b$ olacak şekilde en az bir $a, b \in X$ çifti vardır. Burada q dönüşümü birebir olarak düşünülebilir. Kabul edelim ki $\{a\} \delta^* \{b\}$ olsun. q dönüşümü tanımı ve Not 1.1.2 gereğince $\{a\} \delta^* \{b\}$ dir ancak ve ancak $q^{-1}(\{a\}) \delta^* q^{-1}(\{b\}) = \{a\} \delta \{b\}$ dir. $(\{a\}, \{b\}) \in \delta$ elde edilir. Bu ise (X, δ) uzayının $PreT'_2$ olmasıyla çelişir. O halde $(\{a\}, \{b\}) \notin \delta^*$ dır.

Sonuç olarak, birbirinden farklı $a, b \in X/F$ noktaları için $(\{a\}, \{b\}) \notin \delta^*$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.2.3 den $(X/F, \delta^*)$ uzayı $PreT'_2$ dür.

Teorem 3.4.4. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı $\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dır.

İspat: Tanım 3.4.2, Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.4.2 den açıktır.

Teorem 3.4.5. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı T'_3 dür ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Tanım 3.4.2, Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.4.3 den açıktır.

Teorem 3.4.6. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı $\overline{ST}_3$ dir ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Tanım 3.4.2, Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.4.2 den açıktır.

Teorem 3.4.7. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. (X, δ) uzayı ST'_3 dür ancak ve ancak X deki her ayrık x, y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

İspat: Tanım 3.4.2, Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.4.3 den açıktır.

Not 3.4.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. Teoremler 3.4.4, 3.4.5, 3.4.6 ve 3.4.7 den (X, δ) uzayı $\overline{T}_3$ dir ancak ve ancak T'_3 dür ancak ve ancak $\overline{ST}_3$ dir ancak ve ancak ST'_3 dür.

4. BÖLÜM

LOKAL VE GENEL PRE-HAUSDORFF, HAUSDORFF, REGÜLER PROXİMİTY UZAYLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde **PROX** kategorisinde karakterize ettiğimiz bir p noktasındaki (lokalde) ve genelde pre-Hausdorff, Hausdorff ve regüler objelerin her birinin çeşitli formlarının aralarında ortaya çıkan özel ilişkiler incelenmiştir. Bizim elde ettiğimiz Hausdorff EF-proximity uzay şartı ile klasik anlamdaki Hausdorff EF-proximity uzay şartının çakıştığı görülmüştür.

4.1. p Noktasında Pre-Hausdorff, Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Not 4.1.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. Teorem 2.2.3 ve Notlar 2.3.1, 2.4.1 den (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ dür ancak ve ancak p de $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak p de T'_2 dür ancak ve ancak p de $\bar{T}_3$ dir ancak ve ancak p de T'_3 dür ancak ve ancak p de $S\bar{T}_3$ dir ancak ve ancak p de ST'_3 dür ancak ve ancak her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dir.

Not 4.1.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $p \in X$ olsun. Teoremler 2.2.2, 2.2.3 ve Notlar 2.3.1, 2.4.1 den (X, δ) uzayı p de $PreT'_2$ veya p de $\bar{T}_2$ veya p de T'_2 veya p de $\bar{T}_3$ veya p de T'_3 veya p de $S\bar{T}_3$ veya p de ST'_3 ise p de $Pre\bar{T}_2$ dir. Ancak bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.1. $X = \{a, b\}$ iki elemanlı bir küme olmak üzere X üzerinde $\delta = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X), (\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}$ indiskre EF-proximity bağıntısı verilsin. Buna göre (X, δ) uzayı $p = a$ da $Pre\bar{T}_2$ dir, fakat $a \neq b$ için $(\{a\}, \{b\}) \in \delta$ olduğundan $p = a$ olmak üzere p de $PreT'_2$, p de $\bar{T}_2$, p de T'_2 , p de $\bar{T}_3$, p de T'_3 , p de $S\bar{T}_3$ ve p de ST'_3 değildir.

4.2. Pre-Hausdorff, Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Not 4.2.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. Teorem 3.2.3 ve Notlar 3.3.1, 3.4.1 den (X, δ) uzayı $PreT'_2$ dür ancak ve ancak $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak T'_2 dür ancak ve ancak $\bar{T}_3$ dir ancak ve ancak T'_3 dür ancak ve ancak $S\bar{T}_3$ dir ancak ve ancak ST'_3 dür ancak ve ancak her ayırık $x, y \in X$ çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dır.

Not 4.2.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun. Teoremler 3.2.2, 3.2.3 ve Notlar 3.3.1, 3.4.1 den (X, δ) uzayı $PreT'_2$ veya $\bar{T}_2$ veya T'_2 veya $\bar{T}_3$ veya T'_3 veya $S\bar{T}_3$ veya ST'_3 ise $Pre\bar{T}_2$ dir. Ancak bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.2.1. $X = \{a, b\}$ iki elemanlı bir küme olmak üzere X üzerinde $\delta = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X), (\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}$ indiskre EF-proximity bağıntısı verilsin. Buna göre (X, δ) uzayı $Pre\bar{T}_2$ dir, fakat $a \neq b$ için $(\{a\}, \{b\}) \in \delta$ olduğundan $PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 değildir.

4.3. Lokal ve Genel Arasındaki İlişkiler

EF-proximity uzaylarda bazı ayırma aksiyomlarının klasik anlamdaki tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.3.1. [23,62] (X, δ) bir EF-proximity uzay ve $x, y \in X$ olsun.

- $x \neq y$ iken $x \bar{\delta} y$ oluyorsa (X, δ) uzayı T_0 dır.
- $x \neq y$ iken $x \bar{\delta} y$ oluyorsa (X, δ) uzayı T_1 dir.
- $x \delta y$ iken $x = y$ oluyorsa (X, δ) uzayı T_2 (**Hausdorff**) dir.

Not 4.3.1. (X, δ) bir EF-proximity uzay olsun.

1. Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.2.2 den (X, δ) uzayı T'_0 dür ancak ve ancak $Pre\bar{T}_2$ dir.
2. i. (X, δ) uzayı $Pre\bar{T}_2$ ($PreT'_2$) dir ancak ve ancak her $p \in X$ için (X, δ) p de $Pre\bar{T}_2$ ($PreT'_2$) dir.

ii. (X, δ) uzayı $\overline{T}_2$ (T'_2) dir ancak ve ancak her $p \in X$ için (X, δ) p de $\overline{T}_2$ (T'_2) dir.

iii. (X, δ) uzayı $\overline{T}_3$ ($T'_3, S\overline{T}_3, ST'_3$) dir ancak ve ancak her $p \in X$ için (X, δ) p de $\overline{T}_3$ ($T'_3, S\overline{T}_3, ST'_3$) dir.

3. Teorem 3.3.2, Teorem 3.3.3 ve Tanım 4.3.1 den (X, δ) uzayı $\overline{T}_2$ dir ancak ve ancak T'_2 dür ancak ve ancak $\mathbf{T}_2$ (**Hausdorff**) dir. Yani elde ettiğimiz Hausdorff EF-proximity uzay şartı ile klasik anlamdaki Hausdorff EF-proximity uzay şartı çakışmaktadır.

Tüm bu karşılaştırmalardan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Not 4.3.2. (X, δ) bir EF-proximity uzay olmak üzere Tanım 4.3.1 ve Notlar 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 den aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. (X, δ) uzayı $\overline{T}_0$ dir.
- ii. (X, δ) uzayı $\mathbf{T}_0$ dır.
- iii. (X, δ) uzayı T_1 dir.
- iv. (X, δ) uzayı $\mathbf{T}_1$ dır.
- v. (X, δ) uzayı $PreT'_2$ dür.
- vi. (X, δ) uzayı $\overline{T}_2$ dir.
- vii. (X, δ) uzayı T'_2 dür.
- viii. (X, δ) uzayı $\mathbf{T}_2$ (**Hausdorff**) dir.
- ix. (X, δ) uzayı $\overline{T}_3$ dir.
- x. (X, δ) uzayı T'_3 dür.
- xi. (X, δ) uzayı $S\overline{T}_3$ dir.
- xii. (X, δ) uzayı ST'_3 dür.
- xiii. Her ayrık $x, y \in X$ çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dır.
- xiv. (X, δ) uzayı her $p \in X$ için p de $PreT'_2$ ($\overline{T}_2, T'_2, \overline{T}_3, T'_3, S\overline{T}_3, ST'_3$) dür.

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında öncelikle proximity uzay kavramı, örnekleri, özellikleri, temel kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir. Ardından objeleri proximity uzaylar, morfizmleri p -dönüşümler olan proximity uzaylar kategorisinin (**PROX**) bir topolojik kategori olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra bir p noktasındaki wedge çarpım tanımı, bazı dönüşümler ve herhangi bir topolojik kategori için (kuvvetli) kapalılık kavramının ve bir p noktasında (lokalde) ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir. Bu tanımlar ile birlikte daha önce [55] de karakterize edilen proximity uzayların topolojik kategorisinde kapalılık, kuvvetli kapalılık kavramları ve p noktasında $\bar{T}_0, T'_0, T_1$ ayırma aksiyomları yardımıyla **PROX** kategorisinde p noktasında $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

Lokalde elde edilen karakterizasyonların genelde de yapılması amacıyla ilk olarak diyagonal boyunca wedge çarpım tanımı, bazı dönüşümler ve herhangi bir topolojik kategori için genelde ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir. Yine bu tanımlar ile birlikte daha önce [60] da karakterize edilen proximity uzayların topolojik kategorisinde $\bar{T}_0, T'_0$ ve T_1 ayırma aksiyomları yardımıyla **PROX** kategorisinde $Pre\bar{T}_2, PreT'_2, \bar{T}_2, T'_2, \bar{T}_3, T'_3, S\bar{T}_3$ ve ST'_3 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir.

Bu şekilde **PROX** kategorisinde lokalde ve genelde pre-Hausdorff, Hausdorff ve regüler objeler belirlenmiştir.

Sonraki aşamada **PROX** kategorisinde karakterize ettiğimiz bir p noktasındaki (lokalde) ve genelde pre-Hausdorff, Hausdorff ve regüler objelerin her birinin çeşitli formlarının aralarında ortaya çıkan özel ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca karakterize edilen objeler, proximity uzaylardaki bazı klasik ayırma aksiyomlarıyla karşılaştırılmıştır.

Bunun sonucunda bizim elde ettiğimiz Hausdorff EF-proximity uzay şartı ile klasik anlamdaki Hausdorff EF-proximity uzay şartının çakıştığı görülmüştür. Üstelik Hausdorff ve regüler objelerin tüm formlarının birbirine denk olduğu sonucu elde edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalarda lokal ve genel ayırma aksiyomları, kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi önemli topolojik kavramlar, quasi-proximity uzay ve LO-proximity uzay gibi bazı genelleştirilmiş proximity uzayların topolojik kategorilerinde karakterize edilebilir.

PROX kategorisinde karakterize ettiğimiz $PreT_2$, T_2 ve T_3 ayırma aksiyomlarının Tanım 1.1.14 ile verilen betimsel EF-proximity uzaylardaki karşılıkları araştırılabilir, aralarındaki ilişkiler incelenebilir.

Betimsel EF-proximity için [50] de verilen ayırma aksiyomlarının kategorik olarak genelleştirilebilirliği araştırılabilir.

Bu tez çalışmasında uzaysal EF-proximity uzaylar için elde edilen sonuçlar betimsel EF-proximity uzaylara uygulandığında ne gibi sonuçlar ortaya çıkacağı merak konusudur, fakat betimsel EF-proximity uzayların farklı alanlara uygulanabilirliği göz önünde bulundurulduğunda ortaya çıkan sonuçların aynı problemlere farklı boyutta, daha kaliteli ve daha kapsamlı yeni anlamlar kazandıracağı aşikardır.

KAYNAKLAR

1. Riesz, F., 1908. Stetigkeitsbegriff und Abstrakte Mengenlehre, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Rome, Volume II*: 18–24.
2. Efremovič, V. A., 1951. Infinitesimal Spaces, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **76**: 341–343.
3. Efremovič, V. A., 1952. The Geometry of Proximity I, *Matematicheskii Sbornik*, **31**: 189–200.
4. Krishna Murti, S. B., 1940. A Set of Axioms for Topological Algebra, *Journal of the Indian Mathematical Society*, **4**: 116–119.
5. Wallace, A. D., 1941. Separation Spaces, *Annals of Mathematics*, **42**: 687–697.
6. Wallace, A. D., 1942. Separation Spaces II, *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, **14**: 203–206.
7. Szymanski, P., 1941. La Notion des Ensembles Separes Comme Terme Primitif de la Topologie, *Mathematica Timisoara*, **17**: 65–84.
8. Smirnov, Y. M., 1952. On Proximity Spaces, *American Mathematical Society Translations*, **38**: 5–35.
9. Mrówka, S. G., 1957. On the Uniform Convergences in Proximity Spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **5**: 255–257.
10. Goetz, A., 1962. On a Notion of Uniformity for L-spaces of Fréchet, *Colloquium Mathematicum*, **9**: 223–231.
11. Poljakov, V. Z., 1965. On Uniform Convergence Spaces, *Colloquium Mathematicum*, **13**: 167–179.
12. Leader, S., 1959. On Clusters in Proximity Spaces, *Fundamenta Mathematicae*, **47**: 205–213.
13. Gal, I. S., 1959. Proximity Relation and Precompact Structures, *Indagationes Mathematicae*, **21**: 304–326.

14. Alfsen, E. M. ve Fenstad, J. E., 1959. On the Equivalence Between Proximity Structures and Totally Bounded Uniform Structures, **Mathematica Scandinavica**, 7: 353–360.
15. Alfsen, E. M. ve Njåstad, O., 1963. Proximity and Generalized Uniformity, **Fundamenta Mathematicae**, 52: 235–252.
16. Njåstad, O., 1963. Some Properties of Proximity and Generalized Uniformity, **Mathematica Scandinavica**, 12: 47–56.
17. Pervin, W. J., 1963. Quasi-proximities for Topological Spaces, **Mathematische Annalen**, 150: 325–326.
18. Leader, S., 1964. On Products of Proximity Spaces, **Mathematische Annalen**, 154: 185–194.
19. Lodato, M. W., 1964. On Topologically Induced Generalized Proximity Relations, **Proceedings of the American Mathematical Society**, 15: 417–422.
20. Hayashi, E., 1964. On Some Properties of a Proximity, **Journal of the Mathematical Society of Japan**, 16: 375–378.
21. Hayashi, E., 1965. A Note on Proximity Spaces, **Bull. Aichi Gakugei Univ.**, 14: 1–4.
22. Leader, S., 1967. Local Proximity Spaces, **Mathematische Annalen**, 169: 275–281.
23. Naimpally, S. A. ve Warrack, B. D., 1970. Proximity Spaces, Cambridge University Press, Cambridge.
24. Peters, J. F., 2007. Near sets. General Theory about Nearness of Objects, **Applied Mathematical Sciences**, 53: 2609–2629.
25. Peters, J. F., 2007. Near sets. Special Theory about Nearness of Objects, **Fundamenta Informaticae**, 75: 407–433.

26. Peters, J. F., 2013. Nearness of Sets in Local Admissible Covers, **Theory and Application in Micropalaeontology**, **126** (4): 433–444.
27. Peters, J. F., 2013. Local Near Sets: Pattern Discovery in Proximity Spaces, **Mathematics in Computer Science**, **7** (1): 87–106.
28. Naimpally, S. A. ve Peters, J. F., 2013. Topology with Applications: Topological Spaces via Near and Far, World Scientific, Singapore.
29. Herrlich, H., 1975. Topological Functors, **General Topology and its Applications**, **4** (2): 125–142.
30. Kent, D. C., 1969. Convergence Quotient Maps, **Fundamenta Mathematicae**, **165**: 197–205.
31. Wyler, O., 1971. Top Categories and Categorical Topology, **General Topology and its Applications**, **1** (1): 17–28.
32. Schwartz, F., 1978. Connections Between Convergence and Nearness, **Lecture Notes in Mathematics**, Springer, **719**: 345–354.
33. Baran, M., 1990. Separation Properties in Topological Categories, Ph.D. Thesis, University of Miami, Miami.
34. Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1987. Closure Operators I, **Topology and its Applications**, **27**: 129–143.
35. Baran, M., 2002. Compactness, Perfectness, Separation, Minimality and Closedness with Respect to Closure Operators, **Applied Categorical Structures**, **10**: 403–415.
36. Baran, M. ve Altındış, H., 1996. T_2 -objects in Topological Categories, **Acta Mathematica Hungarica**, **71**: 41–48.
37. Baran, M., 1997. A Notion of Compactness in Topological Categories, **Publicationes Mathematicae Debrecen**, **50**: 221–234.
38. Baran, M., 1998. T_3 and T_4 -objects in Topological Categories, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **29**: 59–69.

39. Baran, M. ve Kula M., 2006. A Note on Connectedness, **Publicationes Mathematicae Debrecen**, **68**: 489–501.
40. Baran, M., 1992. Separation Properties, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **23**: 333–341.
41. Mielke, M. V., 1994. Separation Axioms and Geometric Realizations, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **25**: 711–722.
42. Mielke, M. V., 1999. Hausdorff Separations and Decidability, Symposium on Categorical Topology, University of Cape Town, Rondebosch, 155–160.
43. Johnstone, P. T., 1977. Topos Theory, L.M.S. Mathematical Monographs No. 10, Academic Press, New York.
44. Hunsaker, W. N. ve Sharma, P. L., 1974. Proximity Spaces and Topological Functors, **Proceedings of the American Mathematical Society**, **45**: 419–425.
45. Sharma, P. L., 1971. Proximity Bases and Subbases, **Pacific Journal of Mathematics**, **37**: 515–526.
46. Di Concilio, A., 2009. Proximity: A Powerful Tool in Extension Theory, Function Spaces, Hyperspaces, Boolean Algebras and Point-Free Geometry, **American Mathematical Society Contemporary Mathematics**, **486**: 89–114.
47. Friedler, L. M., 1973. Quotients of Proximity Spaces, **Proceedings of the American Mathematical Society**, **37**: 589–594.
48. Willard, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
49. Özkan, S., 2013. Proximity Uzaylar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.
50. Peters, J. F. ve Hettiarachichi, R., 2013. Visual Motif Patterns in Separation Spaces, **Theory and Applications of Mathematics and Computer Science**, **3** (2): 36–58.

51. Peters, J. F., 2014. *Topology of Digital Images: Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces*, Springer, Berlin.
52. Mucuk, O., 2010. *Topoloji ve Kategori*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
53. Adámek, J., Herrlich, H. ve Strecker, G. E., 1990. *Abstract and Concrete Categories*, Wiley, New York.
54. Mielke, M. V., 1985. Geometric Topological Completions with Universal Final Lifts, **Topology and its Applications**, **19**: 277–293.
55. Kula, M., Maraşlı, T. ve Özkan, S., 2014. A Note on Closedness and Connectedness in the Category of Proximity Spaces, **Filomat**, **28** (7): 1483–1492.
56. Baran, M. ve Şimşek, H., 1993. p de Ayrılma Aksiyomları, **Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, **10** (1-2): 55–69.
57. Baran, M., 1993. The Notion of Closedness in Topological Categories, **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae**, **34**: 383–395.
58. Baran, M., 1996. Separation Properties in Topological Categories, **Mathematica Balkanica**, **10**: 39–48.
59. Baran, M., 2009. $PreT_2$ -objects in Topological Categories, **Applied Categorical Structures**, **17**: 591–602.
60. Kula, M., Özkan, S. ve Maraşlı, T., 2017. Pre-Hausdorff and Hausdorff Proximity Spaces, **Filomat**, **31** (12): 3837–3846.
61. Baran, M., 1993. Ayrılma Aksiyomları, **Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, **10** (1-2): 47–54.
62. Sieber J. L., 1963. Generalizations of Some Topological Notions to Syntopogenic Spaces, Ph.D. Thesis, The Pennsylvania State University, Pennsylvania.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Samed ÖZKAN
 Doğum Tarihi : 28.12.1988
 Doğum Yeri : Salihli/MANİSA
 Medeni Durumu : Evli
 E-Posta : ozkans@nevsehir.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2013
Lisans	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2011
Lise	Nilüfer Milli Piyango Anadolu Lisesi, Bursa	2006

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2017–Halen	Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2013–2017	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2012–2013	Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Kula, M., Maraşlı, T., Özkan, S., 2014. A note on closedness and connectedness in the category of proximity spaces. **Filomat**, **28** (7): 1483–1492.
2. Kula, M., Özkan, S., Maraşlı, T., Pre-Hausdorff and Hausdorff proximity spaces, **Filomat**, **31** (12): 3837–3846.