



**DEĞİŞİM KATSAYILARININ EŞİTLİĞİ İÇİN KULLANILAN TESTLER:
BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI**

Arda UZUNOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2018

Arda UZUNOĞLU tarafından hazırlanan “DEĞİŞİM KATSAYILARININ EŞİTLİĞİ İÇİN KULLANILAN TESTLER: BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Hülya BAYRAK

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Esra POLAT

İstatistik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 05/01/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Arda UZUNOĞLU

05/01/2018

DEĞİŞİM KATSAYILARININ EŞİTLİĞİ İÇİN KULLANILAN TESTLER:
BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Arda UZUNOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2018

ÖZET

Değişim katsayısı, bir rastgele değişkenin gözlemlerinin tutarlılığını ya da tekdüzeliğini ölçer. Değişim katsayısı, ortalama başına standart sapma olduğundan göreceli değişkenliğin bir ölçüsüdür. Bu sebepten dolayı gruplar arasındaki değişkenliği karşılaştırmak için kullanılmaktadır. Literatürde k sayıda normal yığının DK'larını karşılaştırmak için bazı testler önerilmiştir. Bu çalışmada k normal yığının değişim katsayılarının eşitliğinin test edilmesinde kullanılan Wald testi, Bennett testi, skor testi, merkezi olmayan t testi, olabilirlik oran testi, genelleştirilmiş p yaklaşımı, Wald-2 testi, düzeltilmiş Miller testi incelenmiştir. Ayrıca bu testler, farklı örnek çapı ve grup sayısı durumları altında deneysel I.tip hata oranları ve güçleri bakımından simülasyon yoluyla karşılaştırılmış ve sonuçları yorumlanmıştır.

Bilim Kodu : 20513
Anahtar Kelimeler : Değişim katsayısı, Wald testi, Bennett testi, olabilirlik oran testi, merkezi olmayan t testi, skor testi, genelleştirilmiş p yaklaşımı, Wald-2 testi, düzeltilmiş Miller testi.
Sayfa Adedi : 49
Danışman : Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR

TESTS FOR THE EQUALITY OF SEVERAL COEFFICIENT OF VARIATION:
A SIMULATION STUDY

(M. Sc. Thesis)

Arda UZUNOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2018

ABSTRACT

Coefficient of variation measures the uniformity or the consistency of the observations of a random variable. Since coefficient of variation is standard deviance per mean, it is a measurement of relative variability. For this reason coefficient of variation is used to determine the variability of the groups. In literature, some tests are given to compare the coefficients of variations k numbers of groups. In this study, the Wald test, Bennett's test, Score test, Non-central t test, Likelihood ratio test, Generalized p value, the Wald-2 test, the modified Miller test are investigated. Also, these test statistics are compared according to their type I-error rates and powers under different of sample sizes and different number of groups.

ScienceCode : 20513

KeyWords : Coefficients of variation, Wald test, Bennett's test, likelihood ratio test, non central t test, score test, generalized p approach, the Wald-2 test, the modified Miller test

PageNumber : 49

Supervisor : Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bana yardım ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR 'a, Arş. Gör. Esra GÖKPINAR ve yaşamım boyunca maddi ve manevi desteklerini gördüğüm canım annem Fethiye Uzunoğlu'ya ve babam Suat Uzunoğlu'ya teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEST İSTATİSTİKLERİ	3
2.1. Bennett Testi	3
2.2. Olabilirlik Oranı Testi	5
2.3. Merkezi Olmayan t Testi.....	10
2.4. Wald Testi	13
2.5. Skor Testi	14
2.6. Genelleştirilmiş p Değeri Yaklaşımı	20
2.7. Wald-2 Testi.....	26
2.8. Düzeltilmiş Miller Testi	28
3. SİMÜLASYON	29
4. SONUÇ	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	49

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $\alpha=0.05$ için testlerin I. tip hata oranları	30
Çizelge 3.2. $k=2$ için testlerin güç değerleri	32
Çizelge 3.3. $k=3$ için testlerin güç değerleri	34
Çizelge 3.4. $k=4$ için testlerin güç değerleri	37
Çizelge 3.5. $k=5$ için testlerin güç değerleri	40



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi	8
Şekil 2.2. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 1.adım	9
Şekil 2.3. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 1.adımın devamı	9
Şekil 2.4. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 2.adım	9
Şekil 2.5. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 2.adımın devamı	9



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar

Açıklamalar

BT	Merkezi Benet Testi
DK	Değişim Katsayısı
DMT	Düzenlenmiş Miller
E.Ç.O	En Çok Olabilirlik
GPY	Genelleştirilmiş P Yaklaşımı
MOT	Merkezi Olmayan t Testi
NYE	Normal Yağış Eğrisi
ODKT	Örnek Değişim Katsayısının Tersisi
OOT	Olabilirlik Oran Testi
ST	Skor Testi
VAR	Varyans
WT-1	Wald Testi
WT-2	Wald-2 Testi

1. GİRİŞ

Değişim katsayısı (DK), dağılışın ölçü biriminden bağımsız göreceli bir ölçüsüdür. DK, kısaca standart sapmanın ortalamaya oranı olarak ifade edilir. Genel olarak, bir rastgele değişkenin gözlemlerinin tutarlılığını ya da tekdüzeliğini ölçer. DK, ortalama başına standart sapma olduğundan göreceli değişkenliğin bir ölçüsüdür. İlgili değişkenin varyansları ve ortalamaları farklı olsa bile gruplar aynı göreceli değişkenliğe sahip olabilir.

Birçok bilimsel araştırmada, DK, standart sapmadan daha yaygın kullanılmaktadır. Fiziksel, biyolojik ve tıbbi bilimlerin yanı sıra iklim bilimi, iş ve mühendislik gibi bilimsel alanlarda da yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin; iklim biliminde, Ananthakrishnan ve Soman (1989), yağış verilerinin analizinde DK kullanmışlardır. Buna göre, normal yağış eğrisi için, bir model geliştirilmiştir. Oluşturulan bu model, sadece yağış serisinden DK'ya bağlı olarak belirlenmiştir. Bu konuda benzer çalışmalar, Ma ve Zhang (1991) ve Singh ve diğerleri (1987) tarafından da yapılmıştır. İş ve mühendislik biliminde, De ve diğerleri (1996), DK'yı en aza indirmeye dayalı olarak işlerin planlanması problemini ele almıştır. Bununla ilgili başka bir çalışmada, depolama alanının paylaşımına ilişkin işlem esnasında DK'nın etkisini tartışan Hiller ve So (1991)'dur. DK'nın başka bir uygulaması ise yapay açıklıklı radar görüntülerinde DK'nın etkisini tartışan D'Alvise ve diğerleri (1999)'dur. Ayrıca Zeevi (1999) çalışmasında DK'nın geçerliliğini incelemiştir.

Yukardaki örnekler, birbiriyle ilişkili bilim dallarında DK'nın geniş kullanım alanını göstermektedir. Kendall ve Stuart (1977), örnek DK'nın ortalama ve varyansı için formül vermesine rağmen sadece DK için hipotez testleri üzerine bir çalışma yapılmamıştır. Serfling (1980), örnek DK'nın limit dağılımını kitabında açık problem olarak ifade etmiştir. Rao ve Bhatt (1989), bir ve iki yığın durumunda DK için testler önermiş ve örnek DK'nın dağılım fonksiyonu için Edgeworth açılımını vermişlerdir. Bu testlerin asimptotik sağlamlılığı Rao ve Vidya (1992) tarafından tartışılmıştır. Rao ve Bhatt (1995), ayrıca bir ve iki örnek durumları için jackknife ve bootstrap tekniklerine dayalı testler önermiştir. Durumunda, Singh (1993) örnek DK'nın tersi (ODKT)'ne dayalı çeşitli testler önermiştir. [ODKT ile ilgili çalışma için Bowman ve Shanton (1981) 'a bakınız.] Sharma ve Krishman (1994) 'da, yığının DK'sı hakkında çıkarım yapmak için ODKT kullanılmıştır. Diğer makalelerden farklı olarak bu makalede normallik varsayımı kullanılmamıştır.

Bu çalışmada, k normal yığınının DK'larının eşitliğinin test edilmesinde kullanılan yöntemler incelenecektir. Değişim katsayılarının eşitliğinin testi için literatürde çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar kısaca aşağıdaki gibidir. Miller ve Karson (1977), iki DK'nın eşitliğinin testi için bir test geliştirmişlerdir. Doornbos ve Dijkstra (1983), k normal yığın için olabilirlik oran testi ve merkezi olmayan t testine dayalı iki test geliştirmişlerdir. İki'den fazla yığın olduğunda olabilirlik oran testi cebirsel olarak çözümlenemeyen parametre tahmin denklemlerini içermektedir. Bu denklemlerin çözümü iterasyon yöntemi kullanılarak Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından verilmiştir. Ayrıca Gupta ve Ma (1996) tarafından bu denklemlerin daha iyi bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Bennett (1976), k normal yığınının DK'larının eşitliği için dönüştürülmüş örnek DK'yı kullanarak bir test önermiştir. Daha sonra bu test, Shafer ve Sullivan (1986) tarafından geliştirilmiştir. Feltz ve Miller (1996) düzeltilmiş Miller testini önermişlerdir. Rao ve Vidya (1992), iki ve üç yığınının DK'ların eşitliğinin testi için Wald testi (Wald,1943; Silvey, 1970) geliştirmişlerdir. Yığın sayısı 3'ten büyük olduğunda Wald testinin elde edilmesi oldukça karışık olduğundan yapılamadığı ifade edilmiştir. Nairy ve Rao (2003), DK'lerin eşitliği için alternatif bir Wald testi olan Wald-2 testini önermiştir. Nairy ve Rao (2003), önerdiği bu testte katsayı matrisini de Rao ve Vidya (1992) 'nin önerdiğinden farklı olarak ifade etmiştir. Son yıllarda ise, Forkman (2009) ve Liu ve diğerleri (2011) bu konuda çalışmalar yapmışlardır. Liu ve diğerleri (2011) genelleştirilmiş p yaklaşımına dayalı bir test önermişlerdir.

Bu çalışmada k normal yığınının DK'larının eşitliğinin testi için kullanılan en önemli testlerden düzenlenmiş Bennett testi (Shafer ve Sullivan, 1986), olabilirlik oran testi (Gupta ve Ma, 1996), merkezi olmayan t testi (Doornbos ve Dijkstra, 1983), skor testi (Lawless, 1982), Wald testi (Wald,1943; Silvey, 1970), düzeltilmiş Miller testi (Feltz ve Miller, 1996), Wald-2 testi (Nairy ve Rao, 2003), genelleştirilmiş p yaklaşımı (Liu ve diğerleri, 2011) incelenmiştir. Ayrıca bu testler deneysel 1.tip hata oranları ve güçleri bakımından karşılaştırılmış ve hangi durumlarda birbirlerine üstünlük sağladıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla çalışmanın 2. bölümünde yukarıda bahsedilen testler kısaca tanıtılmıştır. Çalışmanın 3. bölümünde ise testler deneysel 1.tip hata oranları ve güçleri bakımından farklı örnek çapı ve grup sayısı durumları altında karşılaştırılmıştır. Çalışmanın 4. bölümünde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEST İSTATİSTİKLERİ

Bu bölümde k tane grubun değişim katsayılarının eşitliği hipotezi ile ilgilenilecektir. Bu amaçla, k sayıdaki μ_i ortalamalı ve $\sigma_i^2 = \mu_i^2 R_i^2$ varyanslı Normal dağılımdan $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ ($i=1,2,\dots,k$) rasgele örneği alınsın. Burada R_i , i'nci grubun değişim katsayısını ifade etmek üzere aşağıdaki hipotezler kurulabilir.

$$H_0: R_i = R, i=1,2,\dots,k \text{ için,}$$

$$H_1: R_i \neq R_j, \exists i, j \in \{1,2, \dots, k\} \quad (2.1)$$

k tane değişim katsayısının eşitliği hipotezinin testi ile ilişkili yöntemler için bazı varsayımlar sağlanmalıdır. Bu varsayımlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}}{n_i}, i=1,2,\dots,k \text{ olmak üzere}$$

$$\mu_i > 0;$$

ve

$$\Pr\{\bar{X}_i < 0\} \cong 0, \forall i \in \{1,2, \dots, k\} \text{ olur.}$$

Diğer bir değişle ortalamanın sıfırdan küçük bir değer alması olasılığı 0'a yakındır.

Bu bölümün geri kalan kısmında Eş. 2.1'de verilen H_1 hipotezine karşı H_0 hipotezinin testi için kullanılan bazı testler verilecektir.

2.1. Bennett Testi

Bennett (1976), k normal yığının DK'larının eşitliği için dönüştürülmüş örnek DK'yı kullanarak Bennett testini önermiştir. Daha sonra bu test, Shafer ve Sullivan (1986) tarafından yeniden düzenlenmiştir. Bennett (1976) tarafından önerilen ve olabilirlik oranına dayanan Bennett testi için gerekli bazı gösterimler aşağıda verildiği gibidir:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i}$$

$$r_i = \frac{S_i}{\bar{X}_i}$$

$$D_i = \frac{(R_i^2 + 1)}{R_i^2}$$

$$d_i = \frac{n_i r_i^2}{r_i^2 + 1}$$

$$B_i = D_i d_i, \quad i=1,2,\dots,k.$$

Burada verilen B_i istatistiklerinde, tüm $i \in \{1,2, \dots, k\}$ için, yaklaşık olarak $n_i - 1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olduğu McKay (1932), Iglewicz ve Myers (1970) tarafından gösterilmiştir. Eş. 2.1'de verilen hipotezler D_i 'lere bağlı olarak,

$D_i > 0$ ve $\mu_i > 0$ olmak üzere;

$$H_0': D_1 = D_2 = \dots = D_k,$$

$$H_1': D_i \neq D_j, \exists i, j \in \{1,2, \dots, k\}$$

hipotezlerine denktir. H_1' hipotezine karşı H_0' hipotezini test etmek için Λ olabirlik oranı testleri;

$$-2 \ln \Lambda = (N-k) \ln \sum_{i=1}^k \frac{d_i}{N-k} - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln \left(\frac{d_i}{n_i - 1} \right) \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir.

$N = \sum_{i=1}^k n_i$ olmak üzere Eş. 2.2'deki istatistikler yaklaşık olarak $k-1$ serbestlik derecesi ile χ^2 dağılır (Silvey, 1970). Eş. 2.2'deki istatistik Bennett'in ilk hazırladığı Bennett testidir (Bennett, 1976), daha sonra Shafer ve Sullivan (1986) tarafından oluşturulmuş ve düzenlenmiş Bennett testi olarak adlandırılmaktadır.

α anlamlılık düzeyinde H_1 'e karşı H_0 test edilirken H_0 'ın red edilmesi için;

$$-2\ln\Lambda > \chi^2_{k-1,\alpha}$$

olmalıdır.

2.2. Olabilirlik Oranı Testi

Doornbos ve Dijkstra (1983), k normal yığın için olabilirlik oran testini geliştirmiştir. İki'den fazla yığın olduğunda olabilirlik oran testi cebirsel olarak çözümlenemeyen parametre tahmin denklemlerini içermektedir. Bu denklemlerin çözümü iterasyon yöntemi kullanılarak Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından verilmiştir. Ayrıca Gupta ve Ma (1996) tarafından bu denklemleri için daha iyi bir çözüm yöntemi önerilmiştir.

H_0 altında olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$L_0 = \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_i R} \right)^{n_i} \exp \left[- \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\mu_i^2 R^2} \right]$$

$$\ln L_0 = - \sum_{i=1}^k n_i \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_i R} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^2 R^2}$$

$$\ln L_0 = - \sum_{i=1}^k n_i \ln(\sqrt{2\pi}\mu_i R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^2 R^2} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir. Eş. 2.3'de R 'ye göre türev alındığında;

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial R} = - \sum_{i=1}^k \frac{n_i \sqrt{2\pi}\mu_i}{\sqrt{2\pi}\mu_i R} + \frac{1}{2} 2R^{-3} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^2}$$

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial R} = - \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{R} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^2 R^3} = 0 \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Eş. 2.3'de μ_i 'ye göre türev alınırsa;

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial \mu_i} = - \frac{n_i \sqrt{2\pi} R}{\sqrt{2\pi}\mu_i R} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{2(X_{ij} - \mu_i)(-1)\mu_i^2 R^2 - 2\mu_i R^2 (X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^4 R^4}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_i\sqrt{2\pi}R}{\sqrt{2\pi}\mu_i R} + \frac{1}{2} 2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}(X_{ij} - \mu_i)}{\mu_i^3 R^2} \\
&= -\frac{n_i}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}(X_{ij} - \mu_i)}{\mu_i^3 R^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki Eş. 2.6 elde edilir.

$$\sum_{i=1}^k n_i \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4R^2(r_i^2 + 1)}}{2(r_i^2 + 1)} \right] - \sum_{i=1}^k n_i = 0 \tag{2.6}$$

Eş. 2.6'den ikinci derece denklemi elde edilir.

$$-n_i + \frac{1}{\mu_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}^2}{R^2} - \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}}{R^2} = 0$$

Buradan denklemin kökleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_i} &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}}{R^2} \pm \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}^2}{R^4} + 4 \frac{n_i}{R^2} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2}}{2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}^2}{R^2}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \pm \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 + 4n_i R^2 \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2}}{2 \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2}
\end{aligned}$$

Hatırlanacağı üzere;

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}}{n_i}$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i}$$

$$r_i = \frac{S_i}{\bar{X}_i}$$

şeklindedir. Buradan;

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}^2}{n_i \bar{X}_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - n_i \bar{X}_i + n_i \bar{X}_i}{n_i \bar{X}_i} \\
 &= \frac{(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - n_i \bar{X}_i^2 + n_i \bar{X}_i^2)}{n_i \bar{X}_i} \\
 &= \frac{(\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + n_i \bar{X}_i^2)}{n_i \bar{X}_i} \\
 &= \left(\frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\frac{n_i}{\bar{X}_i}} \right) + \bar{X}_i \\
 &= \frac{S_i^2}{\bar{X}_i} + \bar{X}_i \\
 &= \left(\frac{S_i^2}{\bar{X}_i} + 1 \right) \bar{X}_i \\
 &= (r_i^2 + 1) \bar{X}_i
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}} &= n_i \frac{(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - n_i \bar{X}_i^2 + n_i \bar{X}_i^2)}{n_i \bar{X}_i^2} \\
 &= \frac{(\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + n_i \bar{X}_i^2)}{n_i \bar{X}_i^2} \\
 &= \left(\frac{S_i^2}{\bar{X}_i} + 1 \right) \\
 &= (r_i^2 + 1)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece μ_i 'nin en çok olabilirlik(E.Ç.O) tahmin edicisi, $\hat{\mu}_i$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\mu}_i = \left[\frac{[1 + \sqrt{1 + 4R^2(r_i^2 + 1)}]}{2(r_i^2 + 1)\bar{X}_i} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

H_0 hipotezi altında R ve μ_i 'nin sınırlı E.Ç.O tahmin edicileri, \hat{R} ve $\hat{\mu}_i$, Eş. 2.6 ve Eş. 2.7'in çözümünden elde edilir. Burada dikkat edilecek önemli bir nokta, Eş. 2.6'nin $k > 2$ olduğu zaman cebirsel olarak çözümünün olmamasıdır. Dolayısıyla R 'nin tahmini için Gupta ve Ma (1996) tarafından verilen iteratif yöntem kullanılır. Bu yöntem, aşağıda tarif edildiği gibidir.

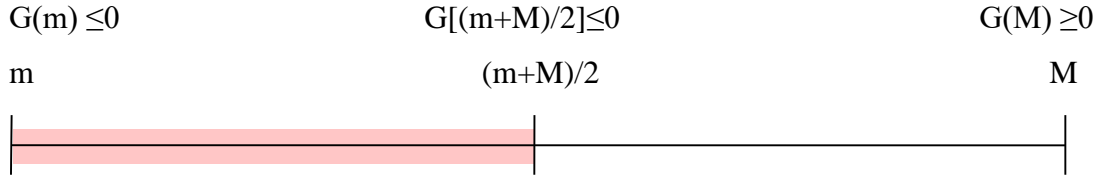
$M = \text{Max}\{r_i, i=1,2,\dots,k\}$ ve $m = \text{Min}\{r_i, i=1,2,\dots,k\}$ olarak alınsın. $G(R)$, Eş. 2.6'nin sol tarafı olsun. Ayrıca $r_1 = r_2 = \dots = r_k$ (Bu durumda Eş. 2.7 bir çözüm aralığına sahiptir.) olduğu zaman Eş. 2.6'nin çözümü sadece $m \leq \hat{R} \leq M$ aralığında olur. Aralığın tam ortasındaki G fonksiyon değerine bakılır. Eğer bu değer pozitif ise soldaki aralık, negatif ise sağdaki aralık dikkate alınarak devam edilir. Yeni elde edilen aralığın sol ucu m_1 , sağ ucu M_1 olarak ifade edilir. Bu işlem, aralık istenilen darlığa ulaşınca kadar devam edilir. İstenilen darlığa ulaşıldığında $([m_n, M_n])$, $\hat{R}_{(n)} = \frac{m_n + M_n}{2}$ olarak alınır. Bu durum Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir.

$m \leq \hat{R} \leq M$ aralığını tanımlansın. $G(R)$ denkleminin, m ve M değerleri için gösterimi Şekil 2.1'de verildiği gibidir.



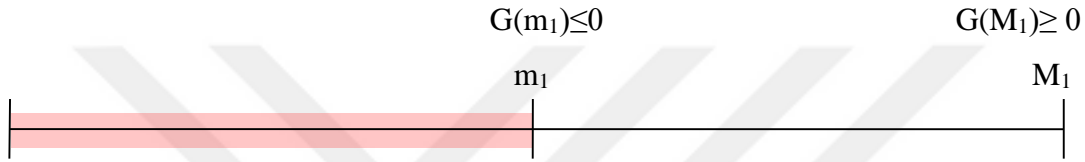
Şekil 2.1. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi

$[m, M]$ aralığını iki eşit parçaya bölen $(m+M)/2$ noktası alınır. Bunun bir gösterimi Şekil 2.2'de verildiği gibidir.



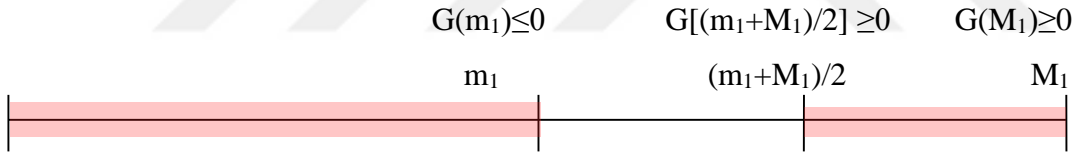
Şekil 2.2. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 1.adım

$G((m+M)/2)$ değeri 0'dan büyükse $M_1 = (m+M)/2$; değilse $m_1 = (m+M)/2$ olarak alınır. Burada $(m+M)/2 < 0$ olduğu varsayılırsa $m_1 = (m+M)/2 < 0$ olacaktır dolayısıyla $G(m_1) \leq 0$ ve $G(M_1) \geq 0$ olacaktır.



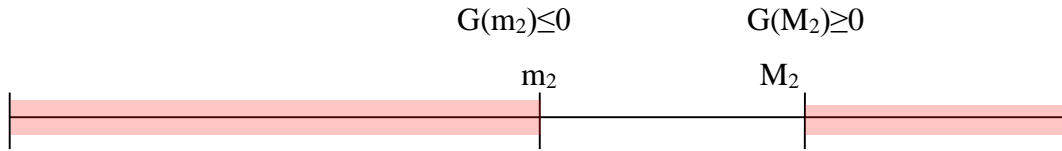
Şekil 2.3. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 1.adımın devamı

Benzer şekilde $[m_1, M_1]$ aralığını iki eşit parçaya bölen $(m_1 + M_1)/2$ noktası alalım.



Şekil 2.4. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 2.adım

$m_2 = (m_1 + M_1)/2$ olsun. Böylece $G(m_2) \leq 0$ ve $G(M_2) \geq 0$ olacaktır.



Şekil 2.5. Ramesh C.Gupta ve Suchun Ma'nın aralık yöntemi ile 2.adımın devamı

Bu şekilde iki uç arasındaki fark pozitif en küçük ε değeri elde edene kadar n defa bölünür. $(m_n + M_n)/2$, $[m_n, M_n]$ aralığının orta noktasıdır. $G[(m_n + M_n)/2]$ değeri en küçük pozitif değeri sağlıyorsa süreç durdurulur. Eş. 2.6'nın çözümü;

$$\hat{R}_{(n)} = (m_n + M_n)/2$$

olarak alınır.

Bu nedenle H_0 altında kısıtlı en çok olabilirlik;

$$\ln L_0 = \left(-\frac{N}{2}\right) \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^k n_i \ln(\hat{\mu}_i \hat{R}) - \frac{N}{2}$$

şeklinde iken H_0 kısıtlı olmaksızın $\ln L$ ise;

$$\ln L = \left(-\frac{N}{2}\right) \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^k n_i \ln(S_i) - \frac{N}{2}$$

olacaktır.

Bu nedenle λ olabilirlik oranı olmak üzere;

$$-2 \ln \lambda = \sum_{i=1}^k n_i \ln \left(\frac{\hat{\mu}_i^2 \hat{R}^2}{S_i^2} \right)$$

elde edilir. Bu test istatistiği $k-1$ serbestlik dereceli asimptotik χ^2 dağılımına sahiptir.

2.3. Merkezi Olmayan t Testi

Merkezi olmayan t dağılımına dayalı olan bu test istatistiği Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından önerilmiştir. Bu test için gerekli ifadeler aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$S_{(i)}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{(n_i - 1)}$$

$$r_{(i)} = \frac{S_{(i)}}{\bar{X}_i}$$

$$b_i = r_{(i)}^{-1},$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i b_i}{N},$$

ve

$$T = \sum_{i=1}^k n_i (b_i - \bar{b})^2 \text{ olsun.}$$

T, H_0 hipotezinden sapmalara duyarlıdır. Merkezi olmama parametresi $\frac{\sqrt{n_i}}{R}$ ve serbestlik derecesi n_i-1 olan $t_i = \sqrt{n_i} b_i$, merkezi olmayan t dağılımına sahiptir.

$$E(t_i) = \frac{\sqrt{n_i} \left(\sqrt{\frac{(n_i-1)}{2}} \right) \Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]}{R \Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \quad (2.8)$$

şeklinde olur. Buradan $E(b_i)$ ve $E^2(b_i)$ ifadeleri Eş. 2.8'in her iki tarafı $\sqrt{n_i}$ 'ye bölünerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(b_i) = \frac{\left(\sqrt{\frac{(n_i-1)}{2}} \right) \Gamma\left[\frac{(n_i-2)}{2}\right]}{R \Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \quad (2.9)$$

$$E^2(b_i) = \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{(n_i-1)}{2}} \right) \Gamma\left[\frac{(n_i-2)}{2}\right]}{R \Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \right]^2 \quad (2.10)$$

Eş. 2.9 ve Eş. 2.10 kullanılarak $\text{Var}(t_i)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{Var}(t_i) = (n_i - 1) \left(\frac{(R^2 + n_i)}{R^2(n_i-3)} - \frac{n_i}{2R^2} \left(\frac{\Gamma\left[\frac{(n_i-2)}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \right)^2 \right) \quad (2.11)$$

Eş. 2.11'in her iki tarafı n_i 'ye bölünerek $\text{Var}(b_i)$ ifadesi;

$$\text{Var}(b_i) = (n_i - 1) \left(\frac{(R^2 + n_i)}{n_i R^2 (n_i - 3)} - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\Gamma\left[\frac{(n_i-2)}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \right)^2 \right) \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. Buna göre;

$$E(b_i^2) = \text{Var}(b_i) + E^2(b_i) \quad (2.13)$$

Eş. 2.13'de Eş. 2.10 ve Eş. 2.12 yerine koyulursa

$$E(b_i^2) = \frac{(n_i-1)}{(n_i-3)} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{R^2} \right) \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilir. Eş. 2.9, Eş. 2.14'ten ve Stirling formülünden yararlanılarak aşağıdaki şekilde $\text{Var}(b_i)$ elde edilir.

$$\text{Var}(b_i) = \left(\frac{1}{n_i} \right) \left(1 + \frac{1}{2R^2} \right) + o\left(\frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2.15)$$

b_i 'ler asimptotik normal olduğundan T , $(1 + \frac{1}{R^2}) \chi^2_{(k-1)}$ asimptotik dağılımına sahiptir.

Eş. 2.13'ten aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$E(\sum_{i=1}^k n_i b_i^2) = \left[\sum_{i=1}^k \frac{(n_i-1)}{(n_i-3)} \right] + \left[\left(\frac{1}{R^2} \right) \sum_{i=1}^k \frac{n_i(n_i-1)}{(n_i-3)} \right] \quad (2.16)$$

R^{-2} nin yansız tahmin edicisi \hat{R}^{-2} olmak üzere;

$$\hat{R}^{-2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^k n_i b_i^2 - \sum_{i=1}^k \frac{(n_i-1)}{(n_i-3)} \right]}{\left[\sum_{i=1}^k \frac{n_i(n_i-1)}{(n_i-3)} \right]} \quad (2.17)$$

şeklinde olur. T istatistiğinin dağılımının daha uygun yaklaşımını elde etmek için, sonlu n_i değeri için $E(T)$ değeri bulunur.

$$E(T) = E\left[\sum_{i=1}^k n_i b_i^2 - N \bar{b}^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{(N-n_i)(n_i-1)}{N(n_i-3)} + \frac{1}{R^2} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{n_i(N-n_i)(n_i-1)}{N(n_i-3)} + \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^k n_i^2 \varepsilon_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_i \varepsilon_i \right)^2 \right] \right\}$$

Burada $\varepsilon_i = \frac{\Gamma\left[\frac{(n_i-2)}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{(n_i-1)}{2}\right]} \sqrt{\frac{(n_i-1)}{2}}$, $i=1,2,\dots,k$ şeklinde olacaktır.

R^2 yerine \hat{R}^2 yazıldığında $E(T)$ yerine $\overline{E(T)}$ ifadesi kullanılsın. Bu durumda Doornbos ve Dijkstra(1983) test istatistiğini aşağıdaki şekilde tanımlar:

$$D = (k-1) \frac{T}{E(T)}$$

Ayrıca,

$\overline{E(T)} \approx E(T) \approx (1 + \frac{1}{2R^2})(k-1)$ olduğundan, D , büyük örnek çaplarında yaklaşık χ^2_{k-1} dağılımına sahiptir.

2.4. Wald Testi

Rao ve Vidya (1992), iki ve üç yığın DK'ların eşitliğinin testi için Wald testi (Wald,1943; Silvey, 1970) geliştirmişlerdir. Yığın sayısı 3'ten büyük olduğunda Wald testinin elde edilmesi oldukça karışık olduğundan yapılamadığı ifade edilmiştir.

$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]$ bilinmeyen parametre vektörü olmak üzere kısıtsız E.Ç.O tahmin edicisi $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p]$ olsun.

Kabul edelim ki,

$$H'_0: h(\theta) = [h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_m(\theta)]' = 0$$

şeklindedir.

Her (i,j) (i=1,2,...,p, j=1,2,...,m) hücresi $\frac{\partial(h_j(\theta))}{\partial\theta_i}$, şeklinde tanımlanan $p \times m$ matrisi H ile ifade edilsin. Ayrıca her (i,j) (i=1,2,...,p, j=1,2,...,p) hücresi $E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right)$ olmak üzere verilen simetrik matris Fisher bilgi matrisi olup $I(\theta)$ ile ifade edilsin.

θ yerine $\hat{\theta}$ koyulduğu zaman, $h(\theta)$, H ve $I^{-1}(\theta)$ ifadeleri yerine $h(\hat{\theta})$, \hat{H} ve $I^{-1}(\hat{\theta})$ ifadeleri gelir. Böylece Wald test istatistiği,

$$W = h'(\hat{\theta})[\hat{H}'I^{-1}(\hat{\theta})\hat{H}]^{-1}$$

olarak ifade edilir (Wald,1943; Silvey, 1970). W, k-1 serbestlik derecesi ile χ^2 asimptotik dağılımına sahiptir.

Bu durumda;

$$\theta = [\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \dots, \mu_k, \sigma_k] \text{ ve } h_i(\theta) = \frac{\sigma_i}{\mu_i} - \frac{\sigma_{i+1}}{\mu_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

'dır. H_0' altında (bu H_0 eşittir.) W, k-1 serbestlik derecesi ile asimptotik χ^2 dağılımına sahiptir.

k=2 için W istatistiği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_2 = \frac{\left(\frac{S_1}{\bar{X}_1} - \frac{S_2}{\bar{X}_2}\right)^2}{\frac{S_1^2}{2n_1\bar{X}_1^2} + \frac{S_1^4}{2n_1\bar{X}_1^4} + \frac{S_2^2}{2n_2\bar{X}_2^2} + \frac{S_2^4}{2n_2\bar{X}_2^4}}$$

k=3 için $r_i = \frac{S_i}{\bar{X}_i}$ olmak üzere W istatistiği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W_3 = \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r_1^2}{2n_1} + \frac{r_1^4}{n_1} + \frac{r_2^2}{2n_2} + \frac{r_2^4}{n_2} & -\frac{r_2^2}{n_2} - \frac{r_2^4}{n_2} \\ -\frac{r_2^2}{n_2} - \frac{r_2^4}{n_2} & \frac{r_2^2}{2n_2} + \frac{r_2^4}{n_2} + \frac{r_3^2}{2n_3} + \frac{r_3^4}{n_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 - r_3 \end{pmatrix}$$

W_k istatistiğinin k'nın genel hali için genelleştirilmiş bir formül mevcuttur. Ancak burada kompleks olduğundan ihmal edilir.

2.5. Skor Testi

k sayıda normal yığınının DK eşitliği için Skor testinde kullanacağımız parametre vektörü θ ve log-olabilirlik fonksiyonunun kısmi türevler vektörü $U(\theta)$ olsun. Böylece

$$\theta = (R_1, R_2, \dots, R_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$$

ve

$$U(\theta) = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial R_1}, \frac{\partial \ln L}{\partial R_2}, \dots, \frac{\partial \ln L}{\partial R_k}, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_k} \right)$$

şeklinde olur.

$B(\theta)$ her bir hücresi $(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j})$ şeklinde olan $2k \times 2k$ boyutlu bir matris olsun. Dolayısıyla Fisher'in bilgi matrisi ;

$$I(\theta) = E(B(\theta))$$

şeklinde tanımlanır.

H_0 'ın doğruluğu altında sınırlı E.Ç.O tahmin edicileri gereklidir. Bu tahmin ediciler Eş. 2.6 ve Eş. 2.7'nin çözümünden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tilde{\theta} = (\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_k, \widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2, \dots, \widetilde{\mu}_k)$$

Ayrıca H_0 hipotezi altında $[U(\tilde{\theta})]'I^{-1}(\tilde{\theta})U(\tilde{\theta})$ ifadesi asimptotik $\chi^2_{(p)}$ dağılımına sahiptir. Buradaki p, kısıtların sayısı olarak ifade edilir. (Rao (1973) ve Lawless (1982)).

Bu durumda skorlar;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial R_i} = -\frac{n_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\mu_i^2 R_i^3}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_i} = -\frac{n_i}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}(X_{ij} - \mu_i)}{\mu_i^3 R_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde olur.

Fisher'in bilgi matrisi $I(\theta)$

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2n_1}{R_1^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{2n_1}{R_1\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2n_2}{R_2^2} & \dots & 0 & 0 & \frac{2n_2}{R_2\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n_k}{R_k^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{2n_k}{R_k\mu_k} \\ \frac{2n_1}{R_1\mu_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{n_1(2R_1^2+1)}{\mu_1^2 R_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2n_2}{R_2\mu_2} & \dots & 0 & 0 & \frac{n_2(2R_2^2+1)}{\mu_2^2 R_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n_k}{R_k\mu_k} & 0 & 0 & 0 & \frac{n_k(2R_k^2+1)}{\mu_k^2 R_k^2} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$I(\theta)$ matrisinin tersi MATLAB R2013a'nın içerisinde var olan MUPAD isimli sembolik araç kutusu yardımıyla elde edilmiştir. Bu matrisin tersi $I^{-1}(\theta)$ şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki şekilde bulunmuştur:

$$I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n_1(2R_1^2+1)}{\mu_1^2 R_1^2 \Delta_k} & 0 & \dots & 0 & -\frac{2n_1}{R_1 \mu_1 \Delta_k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n_2(2R_2^2+1)}{\mu_2^2 R_2^2 \Delta_{k-1}} & \dots & 0 & 0 & -\frac{2n_2}{R_2 \mu_2 \Delta_{k-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_k(2R_k^2+1)}{\mu_k^2 R_k^2 \Delta_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2n_k}{R_k \mu_k \Delta_1} \\ -\frac{2n_1}{R_1 \mu_1 \Delta_k} & 0 & \dots & 0 & \frac{2n_1}{R_1^2 \Delta_k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{2n_2}{R_2 \mu_2 \Delta_{k-1}} & \dots & 0 & 0 & \frac{2n_2}{R_2^2 \Delta_{k-1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{2n_k}{R_k \mu_k \Delta_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{2n_k}{R_k^2 \Delta_1} \end{pmatrix}$$

Burada,

$$\Delta_1 = \frac{n_k(2R_k^2+1)}{\mu_k^2 R_k^2} \times \frac{2n_k}{R_k^2} - \frac{2n_k}{R_k \mu_k} \times \frac{2n_k}{R_k \mu_k}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$\Delta_{k-1} = \frac{n_2(2R_2^2+1)}{\mu_2^2 R_2^2} \times \frac{2n_2}{R_2^2} - \frac{2n_2}{R_2 \mu_2} \times \frac{2n_2}{R_2 \mu_2}$$

$$\Delta_k = \frac{n_1(2R_1^2+1)}{\mu_1^2 R_1^2} \times \frac{2n_1}{R_1^2} - \frac{2n_1}{R_1 \mu_1} \times \frac{2n_1}{R_1 \mu_1}$$

şeklinde elde edilir. Buradan yukarıdaki denklemlerin genel hali aşağıdaki şekilde

$$\Delta_i = \frac{n_{k+1-i}(2R_{k+1-i}^2+1)}{\mu_{k+1-i}^2 R_{k+1-i}^2} \times \frac{2n_{k+1-i}}{R_{k+1-i}^2} - \frac{2n_{k+1-i}}{R_{k+1-i}} \times \left(\frac{2n_{k+1-i}}{R_{k+1-i} \mu_{k+1-i}} \right)^2, \quad i=1, \dots, k. \quad (2.18)$$

elde edilir.

Eş. 2.18 ifadesi $I^{-1}(\theta)$ matrisinde yerine yazıldığında;

$$I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{(2R_1^2+1)R_1^2}{2n_1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\mu_1 R_1^3}{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(2R_2^2+1)R_2^2}{2n_2} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\mu_2 R_1^3}{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(2R_k^2+1)R_k^2}{2n_k} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\mu_k R_1^3}{n_k} \\ -\frac{\mu_1 R_1^3}{n_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{R_1^2 \mu_1^2}{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2 R_1^3}{n_2} & \dots & 0 & 0 & \frac{R_2^2 \mu_2^2}{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\mu_k R_1^3}{n_k} & 0 & 0 & 0 & \frac{R_k^2 \mu_k^2}{n_k} \end{pmatrix}$$

olur. Böylece $I^{-1}(\theta)$ matrisi en sade şekli ile elde edilir.

a_i ve b_i notasyonları aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

$$a_i = -\frac{n_i}{\tilde{\mu}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \tilde{\mu}_i)^2}{\tilde{\mu}_i^2 \tilde{R}_i^3} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.19)$$

ve

$$b_i = -\frac{n_i}{\tilde{\mu}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}(X_{ij} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i^3 \tilde{R}_i^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.20)$$

Buradan;

$$U(\tilde{\theta}) = (a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k)'$$

şeklinde olsun.

$[U(\tilde{\theta})]' I^{-1}(\tilde{\theta})U(\tilde{\theta})$ ifadesi asimptotik $\chi^2_{(k-1)}$ dağılımına sahiptir. Bu ifadede $[U(\tilde{\theta})]'$, $I^{-1}(\tilde{\theta})$ ve $U(\tilde{\theta})$ değerlerini yerine yazıldığında;

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k) \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\mu_1\tilde{R}^3}{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_2} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\mu_2\tilde{R}^3}{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_k} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\mu_k\tilde{R}^3}{n_k} \\ -\frac{\mu_1\tilde{R}^3}{n_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\tilde{R}^2\mu_1^2}{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2\tilde{R}^3}{n_2} & \dots & 0 & 0 & \frac{\tilde{R}^2\mu_2^2}{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\mu_k\tilde{R}^3}{n_k} & 0 & 0 & \dots & \frac{\tilde{R}^2\mu_k^2}{n_k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Buradan matrسته çarpma işlemlerini yapacak olursak sonuç aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} & a_1^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_1} - a_1 b_1 \frac{\mu_1 \tilde{R}^3}{n_1} + a_2^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_2} - a_2 b_2 \frac{\mu_2 \tilde{R}^3}{n_2} + \dots + a_k^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_k} - a_k b_k \frac{\mu_k \tilde{R}^3}{n_k} - \\ & a_1 b_1 \frac{\mu_1 \tilde{R}^3}{n_1} + b_1^2 \frac{\mu_1^2 \tilde{R}^2}{n_1} - a_2 b_2 \frac{\mu_2 \tilde{R}^3}{n_2} + b_2^2 \frac{\mu_2^2 \tilde{R}^2}{n_2} + \dots - a_k b_k \frac{\mu_k \tilde{R}^3}{n_k} + b_k^2 \frac{\mu_k^2 \tilde{R}^2}{n_k} \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir.

Eş. 2.20 ve Eş. 2.21'i yukarıdaki Eş. 2.22'de yerine yazarsak,

$$a_1^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_1} + a_2^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_2} + \dots + a_k^2 \frac{(2\tilde{R}^2+1)\tilde{R}^2}{2n_k}$$

elde edilir.

Elde edilen bu ifade $\frac{(2\bar{R}^2+1)\bar{R}^2}{2}$ parantezine alınırsa

$$\frac{(2\bar{R}^2+1)\bar{R}^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{a_i^2}{n_i}$$

elde edilir.

Test istatistiğinin kesin değeri

$$\frac{\bar{R}^2(2\bar{R}^2+1)}{2} \sum_{i=1}^k \frac{a_i^2}{n_i}$$

şeklinde elde edilir.

2.6. Genelleştirilmiş p Değeri Yaklaşımı

Bu bölümde değişim katsayıları eşitliği için genelleştirilmiş p değeri yaklaşımı verilecektir. Bu yaklaşım verilmeden genelleştirilmiş test değişkeni ve p değeri kavramlarını vermek gerekir. İstatistiksel hipotez testinde yaygın olarak kullanılan genelleştirilmiş test değişkeni ve p değeri kavramları ilk olarak Tsui ve Weerahandi (1989) tarafından verildi. Bu yaklaşım genelde istenmeyen parametrelerin varlığı söz konusu olduğundaki problemlere uygulanır.

X rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(X/\zeta)$ şeklinde olsun. Burada $\zeta = (\theta, \eta)$ bilinmeyen parametre vektördür. Ayrıca θ ilgilenilen ve η ilgilenilmeyen parametre vektörüdür. Belirli bir θ değeri için aşağıdaki problemle ilgilenilsin:

Farz edelim ki;

$$H: \theta \leq \theta_0$$

Buna karşı

$$K: \theta > \theta_0 \text{ olsun.}$$

θ_0 belirlemiş bir değerdir.

2.6.1. Tanım (Genelleştirilmiş Test Değişkeni) x , X 'in gözlem değerini belirtsin. Genelleştirilmiş test değişkeni $T(X; x, \zeta)$ gözlem değeri x ve ζ parametresine bağlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

- i) Sabit x ve $\zeta = (\theta_0, \eta)$ için, $T(X; x, \zeta)$ dağılımı istenmeyen η parametrelerinden bağımsızdır.
- ii) $t = T(x; x, \zeta)$ bilinmeyen parametrelere bağlı değildir. (2.22)
- iii) Sabit x ve η için, herhangi bir t değeri için $P(T(X; x, \zeta) \geq t)$ olasılığı θ ya göre stokastik olarak artıp ya da azalmaktadır.

Yukarıdaki koşullar altında; $T(X; x, \zeta)$, θ 'ya göre stokastik olarak artıyorsa genelleştirilmiş p-değeri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$p = \sup_{\theta \leq \theta_0} P\{T(X; x, \theta, \eta) \geq t\}$$

$$= P\{T(X; x, \theta_0, \eta) \geq t\}.$$

Burada $t = T(x; x, \theta_0, \eta)$ şeklinde tanımlanır. p değeri, nominal α 'dan küçük ise H_0 red edilir.

Bu bölümün geri kalan kısmında, Liu ve diğerleri (2011) tarafından değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için verilen genelleştirilmiş p değeri yaklaşımı tanıtılacaktır.

Genelleştirilmiş test değişkeni oluşturmak için Eş. 2.1'de verilen hipotez aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:

$$H_{10}: \frac{\mu_i}{\sigma_i} = \frac{\mu_k}{\sigma_k} \quad \forall i=1,2,\dots,k-1$$

$$H_{11}: \frac{\mu_i}{\sigma_i} \neq \frac{\mu_k}{\sigma_k} \quad \exists i \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \quad (2.23)$$

Bu hipotezler $C = \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}, \frac{\mu_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\mu_k}{\sigma_k} \right)'$ ve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(k-1) \times k}$$

şeklinde olmak üzere yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H_{20}: AC = 0$$

$$H_{21}: AC \neq 0. \quad (2.24)$$

μ_i ve σ_i için genelleştirilmiş pivotları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} R_{\mu_i} &= \bar{x}_i - \frac{S_i}{S_i} (\bar{x}_i - \mu_i) \\ &= \bar{x}_i - \frac{S_i}{\sqrt{n_i - 1}} T_i \end{aligned}$$

$$R_{\sigma_i} = \frac{s_i}{S_i} \sigma_i = \frac{\sqrt{n_i}}{U_i} s_i .$$

Burada;

$$T_i = \frac{(\bar{x}_i - \mu_i)}{S_i} \sqrt{n_i - 1} \sim t_{n_i - 1}$$

ve

$$U_i^2 = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i-1}^2 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

şeklindedir. Ayrıca T_i 'ler ve U_i^2 'ler birbirlerinden bağımsızdır.

$(\bar{X}_i, S_i^2) = (\bar{x}_i, s_i^2)$ verildiğinde $R_{\mu_i} = \mu_i$ ve $R_{\sigma_i} = \sigma_i$ olarak elde edilir. R_{μ_i} ve R_{σ_i} dağılımları, (\bar{x}_i, s_i^2) bilindiğinde herhangi bir bilinmeyen parametreden bağımsızdır. Böylece μ_i ve σ_i için sırasıyla genelleştirilmiş pivotları R_{μ_i} ve R_{σ_i} 'dir. O halde AC için genelleştirilmiş pivotları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$R_{AC} = AR_C = A \left(\frac{R_{\mu_1}}{R_{\sigma_1}}, \frac{R_{\mu_2}}{R_{\sigma_2}}, \dots, \frac{R_{\mu_k}}{R_{\sigma_k}} \right)'$$

Burada;

$$\frac{R_{\mu_i}}{R_{\sigma_i}} = \frac{\left[\bar{x}_i - \frac{s_i}{s_i} (\bar{x}_i - \mu_i) \right]}{\left[\frac{s_i}{s_i} \sigma_i \right]} = \frac{\bar{x}_i}{s_i} \frac{s_i}{\sigma_i} - \frac{(\bar{x}_i - \mu_i)}{\sigma_i} = \frac{\bar{x}_i}{s_i \sqrt{n_i}} U_i - \frac{1}{\sqrt{n_i}} Z_i$$

ve

$$U_i^2 \sim \chi_{n_i-1}^2 \text{ ve } Z_i \sim N(0,1) \text{ 'dir (} i=1,2,\dots,k \text{).}$$

$\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)'$ ve $S = (S_1, S_2, \dots, S_k)'$ şeklinde (\bar{X}, S) 'in gözlenen değeri (\bar{x}, s) olsun. (\bar{x}, s) bilindiğinde R_{AC} nin koşullu beklenen değeri;

$$\mu_R = E(R_{AC} | (\bar{x}, s)) = AE(R_C | (\bar{x}, s))$$

$$= A \left(E \left(\frac{R_{\mu_1}}{R_{\sigma_1}} | (\bar{x}, s) \right), E \left(\frac{R_{\mu_2}}{R_{\sigma_2}} | (\bar{x}, s) \right), \dots, E \left(\frac{R_{\mu_k}}{R_{\sigma_k}} | (\bar{x}, s) \right) \right)'$$

şeklinde elde edilir. (\bar{x}, s) bilindiğinde R_{AC} nin koşullu kovaryans matrisi

$$\Sigma_R = \text{Cov}(R_{AC} | (\bar{x}, s)) = A \text{Cov}(R_C | (\bar{x}, s)) A'$$

$$= \text{Adiag} \left(\text{Var} \left(\frac{R_{\mu_1}}{R_{\sigma_1}} | (\bar{x}, s) \right), \text{Var} \left(\frac{R_{\mu_2}}{R_{\sigma_2}} | (\bar{x}, s) \right), \dots, \text{Var} \left(\frac{R_{\mu_k}}{R_{\sigma_k}} | (\bar{x}, s) \right) \right) A'$$

şeklinde elde edilir. Buradan μ_R ve Σ_R ifadeleri;

$$E \left(\frac{R_{\mu_i}}{R_{\sigma_i}} | (\bar{x}, s) \right) = \frac{\bar{x}_i}{s_i \sqrt{n_i}} E(U_i)$$

$$\text{Var} \left(\frac{R_{\mu_i}}{R_{\sigma_i}} | (\bar{x}, s) \right) = \left(\frac{\bar{x}_i}{s_i \sqrt{n_i}} \right)^2 \text{Var}(U_i) + \frac{1}{n_i}$$

şeklinde olur.

n_i 'nin tek ve çift değerleri için U_i 'nin beklenen değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E(U_i) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n_i-1}{2}} \Gamma(\frac{n_i-1}{2})} x^{\left(\frac{n_i-3}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Buradan kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa;

$$E(U_i) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n_i-1}{2})} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)$$

şeklinde integralin sonucu elde edilir.

n_i 'ler çift iken;

$$E(U_i) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n_i-1}{2})} \left(\frac{n_i}{2} - 1\right)! \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca Gamma fonksiyonunun genel özelliklerinden paydadaki ifade;

$$\Gamma\left(\frac{n_i}{2} - \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n_i}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(2\left(\frac{n_i}{2} - 1\right)\right)!!}{2^{\frac{n_i}{2}-1} \sqrt{\pi}}$$

olur. Bu eşitlik Eş. 2.25’de yerine yazılırsa;

$$E(U_i) = \frac{(n_i-2)!!}{(n_i-3)!!} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

şeklinde elde edilir.

n_i ’ler tek iken;

$$E(U_i) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{n_i-3}{2}\right)!} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right) \quad (2.26)$$

olur.

$\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right) = \left(\frac{n_i-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ ifadesi Eş. 2.26’da yerine yazılırsa;

$$E(U_i) = \frac{(n_i-2)!!}{(n_i-3)!!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

şeklinde elde edilir.

U_i ’nin varyansı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_i) &= E(U_i^2) - (E(U_i))^2 \\ &= n_i - 1 - (E(U_i))^2 \end{aligned}$$

$(\bar{X}, S) = (\bar{x}, s)$ için D ’nin gözlenen değeri d ’dir. R_{Ac} ’nin standart ifadesi $D = (\Sigma_R)^{-1/2} (R_{Ac} - \mu_R)$ şeklindedir. (\bar{x}, s) verildiğinde D ’nin dağılımı herhangi bir bilinmeyen parametreden bağımsızdır. Bu durumda $\|D\|^2 = (R_{Ac} - \mu_R)' \Sigma_R^{-1} (R_{Ac} - \mu_R)$ herhangi bir parametreden bağımsızdır ve $H_{20}: AC=0$ hipotezi altında $\|d\|^2$ ’nin gözlenen değeri herhangi bir parametreden bağımsız bilinen bir sabit olan $\mu_R' \Sigma_R^{-1} \mu_R$ ’ye eşittir. Bu nedenle Tanım 2.6.1’de verilen koşulları sağlayan $\|D\|^2$ genelleştirilmiş test değişkenidir. $\|D\|^2$ ye göre p değeri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned}
p &= P(\|D\|^2 \geq \|d\|^2 | H_{20}) \\
&= ((R_{Ac} - \mu_R)' \Sigma_R^{-1} (R_{Ac} - \mu_R) \geq \mu_R' \Sigma_R^{-1} \mu_R) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^k \frac{[\bar{x}_i(U_i - E(U_i)) - s_i Z_i]^2}{\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^k n_j s_j^2 / (\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2)} \times \left(\sum_{i=1}^k \frac{[\bar{x}_i(U_i - E(U_i)) - s_i Z_i]}{\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2} \right)^2 \geq \right. \\
&\left. \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{x}_i E(U_i))^2}{\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2} - \frac{1}{\sum_{j=1}^k n_j s_j^2 / (\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\bar{x}_i E(U_i) \sqrt{n_i} s_i}{\bar{x}_i^2 \text{Var}(U_i) + s_i^2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

p değeri, α 'dan küçük ise H_{20} red edilir.

Uygulamada p değerini elde etmek için Monte Carlo simülasyonu kullanılır. p değerini elde etmek için gerekli adımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Verilen bir veri seti $\{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i\}$ için;

- 1) $\bar{x}_i = \left(\frac{1}{n_i}\right) \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $s_i^2 = \left(\frac{1}{n_i}\right) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- 2) μ_R ve Σ_R için, $\|d\|^2 = \mu_R' \Sigma_R^{-1} \mu_R$ elde edilir.
- 3) $U_i^2 \sim \chi_{n_i-1}^2$ ve $Z_i \sim N(0,1)$ 'dir ($i=1,2,\dots,k$). elde edilir.
- 4) R_{Ac} , $\|D\|^2 = (R_{Ac} - \mu_R)' \Sigma_R^{-1} (R_{Ac} - \mu_R)$ hesaplanır.
- 5) $\|D\|^2 \geq \|d\|^2$, iken $R_i=1$ diğer durumlarda $R_i=0$ 'dır.
- 6) 3-5 adımları toplam L kere tekrarlanır. Eş. 2.24'in testi için geliştirilmiş p değerinin simülasyon tahmini $\left(\frac{1}{L}\right) \sum_{i=1}^L R_i$ 'dir.

2.7. Wald-2 Testi

Nairy ve Rao (2003), DK'lerin eşitliği için alternatif bir Wald testi önermiştir. Bu test, Rao ve Vidya (1992) tarafından önerilen Wald testinden farklı olarak DK'ların doğrudan eşitliği yerine terslerinin eşitliğine dayandırılmaktadır. Nairy ve Rao (2003), önerdiği bu

testte katsayı matrisi Rao ve Vidya (1992) önerdiğinden farklı olarak ifade edilmiştir. Bu test için gerekli tanımlamalar aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Eş.2.1'deki H_1 hipotezine karşı H_0 hipotezinin testi için i 'nci grubun değişim katsayısının tersi $\theta_i = \frac{1}{\varphi_i} = \frac{\mu_i}{\sigma_i}$ olsun. Bu ifadeye dayalı olarak Eş.2.1'deki hipotezler aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$H_0'' : H\theta = 0$$

$$H_1'' : H\theta \neq 0$$

Burada $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]'$, $H = [1: -I_{k-1}]$, $1 = (1, \dots, 1)'$ ve I_{k-1} birim matristir. Böylece Wald test istatistiği,

$$WT = \hat{h}' [H\hat{U}H']^{-1} \hat{h}$$

olarak ifade edilir.

Burada;

$$\hat{h} = (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_k)'$$

$$\hat{U} = \left[\text{diag} \left(\frac{2 + \hat{\theta}_1^2}{2n_1}, \dots, \frac{2 + \hat{\theta}_k^2}{2n_k} \right) \right]$$

$$\hat{\theta}_i = \frac{\bar{x}_i}{s_{i(b)}}$$

ve

$$S_{i(b)}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i}$$

şeklindedir.

Buradan Wald istatistiği,

$$WT = \sum_{i=1}^k \frac{2n_i \hat{\theta}_i^2}{2 + \hat{\theta}_i^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \frac{2n_i \hat{\theta}_i^2}{2 + \hat{\theta}_i^2} \right)^2}{\frac{2n_i \hat{\theta}_i^2}{2 + \hat{\theta}_i^2}}$$

WT, H_0 altında $k-1$ serbestlik derecesi ile χ^2 asimptotik dağılımına sahiptir. $WT > \chi_{k-1, \alpha}^2$ ise H_0 red edilir.

2.8. Düzeltilmiş Miller Testi

Feltz ve Miller (1996) Eş.2.1'deki H_1 hipotezine karşı H_0 hipotezinin testi için düzeltilmiş Miller testini (DMT) önermişlerdir. Ayrıca burada;

$$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \hat{R}_i}{n - k}$$

$$\hat{R}_i = \frac{S_i}{X_i}$$

olarak verilsin.

DMT testi için kullanılan test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$DMT = \hat{R}^{-2} (0.5 + \hat{R}^2)^{-1} \left[\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \left(\hat{R}_i - \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \hat{R}_i}{n - k} \right)^2 \right]$$

DMT, H_0 altında $k-1$ serbestlik derecesi ile χ^2 asimptotik dağılımına sahiptir.

3. SİMÜLASYON

Simülasyon çalışmasında, DK'ların eşitliği için bölüm 2'de tanıtılan Bennet testi (BT), skor testi (ST), merkezi olmayan t testi (MOT), olabilirlik oran testi (OOT), wald testi (WT-1), genelleştirilmiş p yaklaşımı (GPY), wald-2 testi (WT-2) ve düzeltilmiş Miller testi (DMT) testleri, deneysel I. tip hata oranları ve güçleri bakımından karşılaştırılmıştır. Bu amaçla, farklı k sayıdaki normal yığından n_i ($i=1, \dots, k$) sayıda veriler türetilmiştir. Nominal alfa değeri 0.05 olarak alınmıştır. Testlerin deneysel I. tip hata ve güç değerleri için 5000 tekrar yapılmıştır. Ayrıca her tekrarda, GPY'de p değerini elde etmek için 5000 tekrar yapılmıştır.

İlk olarak, testlerin deneysel I. tip hata oranlarını elde etmek için, ortalaması $\mu_i=3$, ve standart sapması $\sigma_i=1$ (dolayısıyla $DK_i=1/3$) ($i=1, \dots, k$) olan normal dağılımdan veriler üretilmiştir. Buna göre testlerin deneysel I. tip hata oranları Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. $\alpha=0.05$ için testlerin I. tip hata oranları

k	n	OOT	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT
2	10 10	0.0684	0.0542	0.0214	0.0380	0.0410	0.0402	0.0556	0.0492
	20 20	0.0622	0.0538	0.0406	0.0462	0.0496	0.0482	0.0526	0.0490
	30 30	0.0572	0.0534	0.0426	0.0458	0.0494	0.0476	0.0530	0.0514
	10 20	0.0626	0.0504	0.0344	0.0588	0.0388	0.0404	0.0532	0.0470
	10 30	0.0686	0.0520	0.0516	0.0882	0.0370	0.0444	0.0582	0.0490
	20 30	0.0558	0.0504	0.0412	0.0500	0.0454	0.0450	0.0556	0.0534
3	10 10 10	0.0766	0.0552	0.0298	0.0752	0.0488	0.0362	0.0530	0.0530
	20 20 20	0.0582	0.0474	0.0378	0.0590	0.0446	0.0414	0.0518	0.0486
	30 30 30	0.0578	0.0502	0.0466	0.0568	0.0494	0.0472	0.0568	0.0564
	10 10 20	0.0696	0.0518	0.0426	0.0874	0.0432	0.0392	0.0566	0.0518
	10 10 30	0.0774	0.0582	0.0576	0.0942	0.0480	0.0458	0.0570	0.0482
	10 20 20	0.0692	0.0522	0.0460	0.0632	0.0468	0.0428	0.0532	0.0490
	10 20 30	0.0602	0.0464	0.0478	0.0642	0.0424	0.0372	0.0578	0.0516
	20 20 30	0.0626	0.0532	0.0446	0.0632	0.0466	0.0436	0.0588	0.0550
20 30 30	0.0612	0.0530	0.0474	0.0636	0.0518	0.0480	0.0486	0.0454	
4	10 10 10 10	0.0806	0.0580	0.0382	***	0.0582	0.0362	0.0546	0.0530
	20 20 20 20	0.0660	0.0538	0.0470	***	0.0548	0.0442	0.0526	0.0502
	30 30 30 30	0.0592	0.0516	0.0504	***	0.0532	0.0450	0.0544	0.0540
	10 10 20 20	0.0726	0.0546	0.0504	***	0.0506	0.0382	0.0556	0.0532
	10 10 30 30	0.0756	0.0582	0.0624	***	0.0532	0.0458	0.0538	0.0482
	10 20 30 30	0.0670	0.0558	0.0534	***	0.0510	0.0450	0.0510	0.0468
	10 20 20 30	0.0670	0.0542	0.0506	***	0.0514	0.0422	0.0552	0.0514
20 20 30 30	0.0684	0.0590	0.0566	***	0.0534	0.0510	0.0502	0.0488	
5	10 10 10 10 10	0.0804	0.0540	0.0358	***	0.0564	0.0308	0.0586	0.0582
	20 20 20 20 20	0.0682	0.0546	0.0520	***	0.0570	0.0448	0.0494	0.0502
	30 30 30 30 30	0.0628	0.0522	0.0524	***	0.0554	0.0464	0.0546	0.0530
	10 10 10 20 20	0.0816	0.0600	0.0586	***	0.0576	0.0376	0.0592	0.0558
	10 10 20 20 20	0.0698	0.0524	0.0566	***	0.0524	0.0364	0.0556	0.0532
	10 10 10 30 30	0.0832	0.0562	0.0744	***	0.0580	0.0390	0.0590	0.0536
	10 10 30 30 30	0.0772	0.0562	0.0734	***	0.0532	0.0426	0.0566	0.0498
	10 10 20 30 30	0.0754	0.0526	0.0700	***	0.0550	0.0392	0.0548	0.0514
20 20 20 30 30	0.0630	0.0500	0.0498	***	0.0550	0.0416	0.0554	0.0524	
20 20 30 30 30	0.0640	0.0536	0.0512	***	0.0554	0.0432	0.0516	0.0534	

Çizelge 3.1'den testleri genel olarak incelediğimizde OOT'nin deneysel I.tip hata oranlarının diğer testlere göre α 'dan oldukça uzak olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, örnek çapları arttıkça nominal α değerine yakınlaştığı görülmektedir. BT, WT-2 ve DMT testlerinin deneysel I. tip hata oranlarının genel olarak k ve örnek çapına bakılmaksızın α 'ya yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. MOT'nin deneysel I.tip hata oranları ise k=2,3 için n değeri küçükken α 'dan oldukça küçük bir değer alırken, n değeri arttıkça α 'ya yaklaştığı görülmektedir. k sayısı arttıkça ise (k=4,5) bu durum biraz daha düzelmekte olup, n küçükken MOT deneysel I. tip hata oranının α 'ya yaklaştığı görülmektedir. ST'nin deneysel I.tip hata oranlarını incelediğimizde, k=2 için α 'ya yakın sonuçlar verirken n farklılaştığında ise α 'dan daha küçük değerler aldığı görülmektedir. k sayısı arttığında ise bu durumun düzeldiği ve α 'ya oldukça yaklaştığı gözlenmiştir. GPY ise k=2 için genel olarak α 'ya daha yakın sonuçlar vermiştir. k arttıkça ise bu durumdan biraz olumsuz etkilenerek n küçükken ve n'ler farklı iken α 'dan daha küçük değerler aldığı görülmektedir. WT-1 testinde ise k=2,3 için örnek çapları eşitken özellikle örnek çapı arttıkça nominal α değerine yakın sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte örnek çapları farklılaştıkça nominal α değerinden oldukça uzaklaştığı görülür.

Testleri güç değerleri elde etmek için DK değerleri farklı olan normal dağılımdan veriler üretilmiştir. Buna göre testlerin güç değerleri Çizelge 3.2, Çizelge 3.3, Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5'te verilmiştir. Deneysel I.tip hata oranları 0,06'nın üzerinde olan testlerin güç değerleri çizelgede '***' ile ifade edilmiştir. Ayrıca yığın sayısı 3'ten büyük olduğunda WT-1 testinin elde edilmesi oldukça karışık olduğundan yapılamadığı için '***' ile ifade edilmiştir.

Çizelge 3.2. k=2 için testlerin güç değerleri

DK	n	OOT	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT	
1/3 1/4	10 10	***	0.1218	0.0606	0.0956	0.0980	0.0954	0.1294	0.1240	
	20 20	***	0.2064	0.1686	0.1906	0.1934	0.1886	0.2174	0.2114	
	30 30	0.3162	0.3046	0.2720	0.2910	0.2928	0.2904	0.3050	0.2996	
	10 20	***	0.1686	0.0296	0.0560	0.1820	0.1702	0.1486	0.1534	
	10 30	***	0.1840	0.0232	***	0.2088	0.1994	0.1666	0.1748	
	20 30	0.2460	0.2442	0.1522	0.1684	0.2532	0.2424	0.2488	0.2506	
	20 10	***	0.1516	0.1714	0.2488	0.0778	0.1104	0.1570	0.1312	
	30 10	***	0.1470	0.2010	***	0.0480	0.0980	0.1742	0.1320	
	30 20	0.2684	0.2402	0.2558	0.2928	0.2010	0.2098	0.2480	0.2350	
	1/3 1/5	10 10	***	0.2894	0.1748	0.2496	0.2456	0.2426	0.2918	0.2782
		20 20	***	0.5328	0.4822	0.5146	0.5142	0.5144	0.5486	0.5428
		30 30	0.7334	0.7216	0.6936	0.7126	0.7128	0.7114	0.7274	0.7232
10 20		***	0.3986	0.1276	0.2058	0.4290	0.4056	0.3806	0.3852	
10 30		***	0.4662	0.0888	***	0.5038	0.4920	0.4208	0.4270	
20 30		0.6290	0.6288	0.4970	0.5300	0.6396	0.6266	0.6334	0.6364	
20 10		***	0.3550	0.3884	0.5068	0.2136	0.2748	0.3724	0.3184	
30 10		***	0.3686	0.4600	***	0.1654	0.2784	0.4082	0.3356	
30 20		0.6398	0.6016	0.6232	0.6636	0.5558	0.5662	0.6196	0.6018	

OOT'nin genel olarak deneysel I.tip hata oranları α değerinden oldukça uzaklaştığı için testin güç bakımından değerlendirilmesinde dikkate alınmamıştır. Buna göre k=2 ve DK=(1/3, 1/4) iken testlerin güçleri incelendiğinde WT-2, BT ve DMT testlerin güç değerleri örnek çapları eşit olduğu durum için diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. Burada MOT'nin deneysel I.tip hata oranları α değerinden daha düşük olduğu için bu testin gücü, diğer testlere göre daha düşüktür. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken MOT'nin bu durumdan olumlu etkilenecek diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir. Aslında bu durumda WT-1 testi diğer testlerden daha yüksek güç değerine sahiptir. Ancak n=(10 30) olduğunda I.tip hatası α 'dan oldukça büyük çıktığı için burada testin güç değeri dikkate alınmamıştır. n=(20 30) olduğunda ise yine testin güç değeri diğer testlerden daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir.

Burada testin deneysel I.tip hata oranlarındaki dalgalanma güç bakımından değerlendirmeyi de güçleştirmektedir. Bununla birlikte, DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir.

Bununla birlikte, $DK=(1/3,1/5)$ için testlerin güç değerleri incelendiğinde örnek çapları eşitken WT-2 ve DMT testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken MOT, diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST en yüksek güç değerine sahiptir.

Genel olarak $k=2$ için Çizelge 3.2 değerlendirildiğinde, örnek çapları eşitken DMT ve WT-2, DK ile örnek çapları arasındaki ilişki doğru orantılı iken MOT ters orantılı iken ST en yüksek güç değerine sahiptir.

Çizelge 3.3. k=3 için testlerin güç değerleri

DK	n	OOT	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT	
1/3	10	***	0,2344	0,1100	***	0,2180	0,1808	0,2408	0,2376	
	20	0,5028	0,4720	0,3798	0,1844	0,4586	0,4396	0,4360	0,4340	
	30	0,6556	0,6378	0,5860	0,1818	0,6280	0,6254	0,6312	0,6280	
	10	***	0,3342	0,0688	***	0,3682	0,3260	0,3210	0,3322	
	10	***	0,3666	0,0502	***	0,4238	0,3858	0,3588	0,3694	
	10	***	0,3296	0,1194	***	0,3582	0,3286	0,3136	0,3210	
	10	***	0,3802	0,1030	***	0,4176	0,3924	0,3726	0,3822	
	20	***	0,5362	0,3750	***	0,5478	0,5272	0,5326	0,5390	
	20	***	0,5346	0,4004	***	0,5388	0,5268	0,5280	0,5314	
1/4	20	***	0,3000	0,3020	***	0,2020	0,2104	0,3176	0,2834	
	30	***	0,3428	0,4080	***	0,1880	0,2340	0,3672	0,3042	
	20	***	0,3096	0,3042	***	0,2568	0,2474	0,3242	0,3012	
	30	***	0,3612	0,4138	***	0,2752	0,2854	0,3908	0,3484	
	30	***	0,5360	0,5254	***	0,4872	0,4900	0,5472	0,5334	
	30	***	0,5182	0,5062	***	0,4858	0,4850	0,5512	0,5414	
	1/5	10	***	0,3000	0,3020	***	0,2020	0,2104	0,3176	0,2834
		10	***	0,3428	0,4080	***	0,1880	0,2340	0,3672	0,3042
		10	***	0,3096	0,3042	***	0,2568	0,2474	0,3242	0,3012
10		***	0,3612	0,4138	***	0,2752	0,2854	0,3908	0,3484	
20		***	0,5360	0,5254	***	0,4872	0,4900	0,5472	0,5334	
20		***	0,5182	0,5062	***	0,4858	0,4850	0,5512	0,5414	

Çizelge 3.3. (devam) k=3 için testlerin güç değerleri

DK		n	OOT	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT
1/3 1/5 1/7	10	10	***	0,5690	0,3294	***	0,5382	0,5032	0,5554	0,5524
	20	20	0,8936	0,8838	0,8290	0,4482	0,8722	0,8672	0,8828	0,8822
	30	30	0,9798	0,9778	0,9694	0,5488	0,9756	0,9748	0,9806	0,9802
	10	10	***	0,7324	0,3000	***	0,7550	0,7280	0,7228	0,7286
	10	10	***	0,7916	0,2524	***	0,8236	0,8082	0,7874	0,7920
	10	20	***	0,7240	0,3958	***	0,7350	0,7190	0,7058	0,7062
	10	20	***	0,8058	0,4040	***	0,8258	0,8168	0,7894	0,7918
	20	20	***	0,9402	0,8700	***	0,9412	0,9388	0,9364	0,9378
	20	30	***	0,9360	0,8740	***	0,9358	0,9330	0,9334	0,9338
	20	10	***	0,7156	0,6928	***	0,5922	0,6082	0,7338	0,7076
	30	10	***	0,7742	0,8140	***	0,6040	0,6646	0,8072	0,7640
	20	20	***	0,7562	0,7098	***	0,7024	0,6970	0,7736	0,7536
30	20	***	0,8388	0,8530	***	0,7648	0,7798	0,8474	0,8228	
30	20	***	0,9462	0,9424	***	0,9298	0,9324	0,9550	0,9518	
30	30	***	0,9496	0,9432	***	0,9380	0,9380	0,9504	0,9482	

DK=(1/3, 1/4, 1/5) için testin gücü incelendiğinde, örnek çapları eşit ve küçükken WT-2 diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. Örnek çapı arttığında ise, BT ve özellikle OOT'nin diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken, MOT ve WT-2'nin bu durumdan olumlu etkilenerek diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte, DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST daha yüksek güç değerine sahiptir.

DK=(1/3, 1/5, 1/7) için testin gücü incelendiğinde ise, örnek çapları eşit ve küçükken BT testinin yanı sıra WT-2 ve DMT testlerinin güç değerlerinin diğer testlere göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Örnek çapı arttıkça ise bu testlerin yanı sıra OOT'de oldukça iyi sonuç verdiği görülmektedir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2 ve hemen ardından BT ve DMT testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST ve hemen ardından BT testleri en iyi güç değerine sahiptir.

Buradan $k=3$ için örnek çapları eşitken BT, WT-2 ve DMT; DK ile örnek çapları arasındaki ilişki doğru orantılı iken WT-2, BT ve DMT ters orantılı iken ST ve BT en yüksek güç değerine sahiptir.

Çizelge 3.4. k=4 için testlerin güç değerleri

DK	n	OOT	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT
	10 10 10 10	***	0,2002	0,0988	***	0,2034	0,1468	0,2062	0,2060
	20 20 20 20	***	0,4016	0,2970	***	0,4014	0,3694	0,4104	0,4112
	30 30 30 30	0,5968	0,5744	0,5030	***	0,5740	0,5572	0,5662	0,5656
1/3	10 10 20 20	***	0,2882	0,0918	***	0,3286	0,2770	0,2798	0,2862
	10 10 30 30	***	0,3446	***	***	0,3810	0,3528	0,3304	0,3378
	10 20 20 30	***	0,3398	0,1096	***	0,3836	0,3440	0,3298	0,3384
1/4	20 20 30 30	***	0,4670	0,3192	***	0,4834	0,4588	0,4714	0,4778
	20 20 10 10	***	0,2842	0,2560	***	0,2528	0,2156	0,3040	0,2878
	30 30 10 10	***	0,3374	0,3398	***	0,2906	0,2722	0,3788	0,3450
1/5	30 20 20 10	***	0,3404	0,3638	***	0,3026	0,2742	0,3850	0,3584
	30 30 20 20	***	0,4798	0,4442	***	0,4642	0,4406	0,4892	0,4828

Çizelge 3.4. (devam) k=4 için testlerin güç değerleri

DK	n	00T	BT	MOT	WT-1	ST	GPY	WT-2	DMT
	10 10 10 10	***	0,5314	0,2614	***	0,5390	0,4600	0,5278	0,5290
	20 20 20 20	***	0,8560	0,7524	***	0,8472	0,8318	0,8540	0,8538
	30 30 30 30	0,9706	0,9670	0,9462	***	0,9610	0,9612	0,9666	0,9674
1/3 1/5 1/5 1/7	10 10 20 20	***	0,6772	0,2884	***	0,7002	0,6686	0,6666	0,6716
	10 10 30 30	***	0,7642	***	***	0,7812	0,7706	0,7396	0,7410
	10 20 20 30	***	0,7550	0,3942	***	0,7720	0,7626	0,7408	0,7440
	20 20 30 30	***	0,9080	0,8100	***	0,9104	0,9038	0,9042	0,9070
	20 20 10 10	***	0,7232	0,6162	***	0,6926	0,6562	0,7430	0,7310
	30 30 10 10	***	0,8382	0,7850	***	0,8092	0,7842	0,8580	0,8412
	30 20 20 10	***	0,8342	0,8176	***	0,8058	0,7826	0,8464	0,8308
	30 30 20 20	***	0,9368	0,9148	***	0,9268	0,9228	0,9374	0,9360

DK=(1/3, 1/4, 1/4, 1/5) için testin gücü incelendiğinde örnek çapları eşit ve küçükken BT, ST, WT-2 ve DMT testlerinin güçlerinin birbirine oldukça yakın çıktığı gözlenmiştir. Örnek çapı artığında ise, bu testlere OOT de eklenmiştir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2'nin bu durumdan olumlu etkilenerek, diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir. Ancak DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST en iyi güç değerine sahiptir.

DK=(1/3, 1/5, 1/5, 1/7) için testin gücü incelendiğinde ise, örnek çapları eşitken BT, ST, WT-2 ve DMT testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2, diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST en iyi güç değerine sahiptir.

Buradan $k=4$ için örnek çapları eşitken BT, ST, WT-2 ve DMT testleri DK ile örnek çapları arasındaki ilişki doğru orantılı iken WT-2, ters orantılı iken ST en yüksek güç değerine sahiptir.

Çizelge 3.5. (devam) k=5 için testlerin güç değerleri

DK	n			00T	BT	MOT	WT-1	SKOR	GPY	WT-2	DMT	
1/3 1/5 1/7 1/7	10	10	10	10	0,7912	0,5316	***	0,7798	0,7214	0,8010	0,8026	
	20	20	20	20	0,9870	0,9726	***	0,9854	0,9838	0,9850	0,9844	
	30	30	30	30	0,9994	0,9994	***	0,9992	0,9994	0,9996	0,9996	
	10	10	10	20	***	0,5176	***	0,9376	0,9178	0,9056	0,9100	
	10	10	20	20	***	0,6074	***	0,9330	0,9222	0,9184	0,9196	
	10	10	10	30	***	0,9474	***	0,9650	0,9556	0,9458	0,9464	
	10	10	30	30	***	0,9530	***	0,9638	0,9596	0,9458	0,9468	
	10	10	20	30	***	0,9578	***	0,9686	0,9618	0,9498	0,9512	
	20	20	20	30	***	0,9966	0,9826	***	0,9960	0,9964	0,9968	
	20	20	30	30	***	0,9966	0,9894	***	0,9974	0,9960	0,9956	
	20	20	10	10	***	***	0,8978	***	0,8106	0,8198	0,9282	0,9114
	20	20	20	10	***	0,9178	0,9078	***	0,8700	0,8682	0,9310	0,9170
30	30	10	10	***	0,9416	***	***	0,8074	0,8684	0,9494	0,9268	
30	30	30	10	***	0,9678	***	***	0,9334	0,9422	0,9706	0,9642	
30	30	20	10	***	0,9578	***	***	0,8940	0,9164	0,9624	0,9498	
30	30	20	20	***	0,9972	0,9976	***	0,9944	0,9954	0,9978	0,9974	
30	30	30	20	***	0,9974	0,9974	***	0,9954	0,996	0,9986	0,9982	

DK=(1/3 1/3 1/4 1/5 1/5) için testin gücü incelendiğinde, örnek çapları eşit ve küçükken WT-2 ve DMT testleri örnek çapı artıkça da bu testlere ek olarak BT ve ST testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2'nin bu durumdan olumlu etkilenecek diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST'nin en iyi güç değerine sahip olduğu görülmektedir.

DK=(1/3 1/3 1/5 1/7 1/7) için testin gücü incelendiğinde, örnek çapları eşitken WT-2, DMT, BT ve ST testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2 diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahiptir. DK ile örnek çapları arasındaki ilişki ters orantılı iken ST en iyi güç değerine sahiptir.

Genel olarak $k=5$ için durumu incelediğimizde, örnek çapı eşitken WT-2, DMT, BT ve ST testleri DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2, ters orantılı iken ST testi diğer testlere göre biraz daha yüksek güç değerlerine sahiptir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, k normal yığının DK'larının eşitliğini test etmek için yaygın kullanılan testlerden düzenlenmiş Bennett testi (Shafer ve Sullivan, 1986), olabilirlik oran testi (Gupta ve Ma, 1996), merkezi olmayan t testi (Doornbos ve Dijkstra, 1983), skor testi (Lawless, 1982), Wald testi (Wald,1943; Silvey, 1970), düzeltilmiş Miller testi (Feltz ve Miller, 1996), Wald-2 testi (Nairy ve Rao, 2003), genelleştirilmiş p yaklaşımı (Liu ve diğerleri, 2011) incelenmiştir. Ayrıca bu testler, farklı örnek çapı ve grup sayısı durumları altında deneysel I.tip hata oranları ve güçleri bakımından simülasyon yoluyla karşılaştırılmış ve sonuçları yorumlanmıştır.

Yapılan simülasyon çalışmasına göre OOT'nin I.tip hata oranlarının diğer testlere göre α değerinden oldukça uzak olduğu görülmektedir. BT, WT-2 ve DMT testlerinin deneysel I. tip hata oranlarının genel olarak k ve örnek çapına bakılmaksızın α 'ya yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Diğer testler ise bazı durumlarda α 'ya yakın iken bazı durumlarda α 'dan uzaklaştığı görülmektedir. Genel olarak bu testlerin I.tip hata bakımından tatminkar sonuçlar vermediği görülmektedir.

Testin gücüne bakıldığında ise tüm yığın sayılarında örnek çapları eşitken, WT-2, BT, DMT ve ST testleri en yüksek güç değerine sahip olduğu gözlemlenmiştir. DK ile örnek çapı doğru orantılı iken WT-2, ters orantılı iken ST testleri diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir.



KAYNAKLAR

- Ananthkrishnan, R., Soman, M.K. (1989). Statistical distribution of daily rainfall and its association with the coefficient of variation of rainfall series. *International Journal of Climatology*, 9, 485-500.
- Bennett, B.M., (1976). On approximate test for homogeneity of coefficient of variation, In: Walter John Ziegler, Birhauser Verlag, Basel and Stuttgart, eds. *Contribution to Applied Statistics*, 169-171.
- Bowman, K.O., Shanton, L.R. (1981). Moment series for the coefficient of variation in Weibull sampling. *American Statistical Association-Proceedings of the Statistical Computation Section*, 148-153.
- D'Alvise, R., Moloney, C., Ramponi, G. (1999, 28 June - 2 July). *Statistical methods for the evaluation of the coefficient of variation in SAR images*. Paper presented at the Geoscience and Remote Sensing Symposium, Hamburg, Germany.
- De, P., Ghosh, J. B. and Wells, C.E. (1996). Scheduling to minimize the coefficients of variation. *International Journal of Production Economics*, 44, 249-253.
- Doornbos R., Dijkstra J.B. (1983). A multi sample test for the equality of coefficients of variation in normal populations. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 12, 147-158.
- Feltz, C.J., Miller, G.E. (1996). An asymptotic test for the equality of coefficients of variation from k populations. *Statistics in Medicine*, 15, 647-658.
- Forkman, J. 2009. Estimator and tests for common coefficients of variation in normal distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 38, 233-251.
- Gupta R.C., Ma, S. (1996). Testing the equality of the coefficients of variation in k normal populations. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 25, 115-132.
- Hillier FS and So KC (1991). The effect of the coefficient of variation of operation times on the allocation of storage space in production line systems. *Institute of International Education Transactions*, 23, 198-206.
- Iglewicz, B., Myers, R. H. (1970). Comparison of approximations to the percentage points of the sample coefficient of variation. *Technometrics*, 12, 166-169.
- Kendall, M., Stuart, A. (1977). *The advanced theory of statistics* (Vol 1). London: Charles Griffin and Co.
- Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York: John Wiley & Sons.

- Liu, X., Xu, X., Zhao, J. (2011). A new generalized p-value approach for testing equality of coefficients of variation in k normal populations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(9), 1121-1130.
- Ma. S., Zhang, X. (1991). Some rules of variation of coefficient of annual rainfall in Xinjiang (1991). *Acta Meteorologica Sinica*, 49, 39-45.
- McKay, A. T. (1932). Distribution of the coefficient of variation and the extended t distribution. *Journal of the Royal Statistical Society*, 95, 695-698.
- Miller E.G., Karson M.J. (1977). Testing equality of two coefficients of variation, *Amer. Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, Part. I*, 278-283.
- Nairy K.S., Rao K.A. (2003). Tests of coefficient of variation of normal population. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 32, 641-661.
- Rao, K.A. Bhatt, A.R.S. (1989). A note on test for coefficient of variation. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 38, 225-229.
- Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications* (Second edition). New York: Wiley.
- Rao, K.A. Bhatt, A.R.S. (1995). Tests for coefficient of variation. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, XLVII, 225-229.
- Rao, K.A., Vidya, R. (1992). On the performance of a test for coefficient of variation. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 42, 87-95.
- Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. New York: Wiley.
- Shafer N. J., Sullivan J. A. (1986). A simulation study of a test for the equality of the coefficient of variation. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 15, 681-695.
- Sharma, K.K., Khrisnan, H. (1994). Asymptotic sampling distribution of inverse coefficient of variation and its applications. *The Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Reliability*, 43, 630-633.
- Silvey, S.D. (1970). *Statistical inference*. Harmondsworth: Penguin.
- Singh, M. (1993). Behavior of sample coefficient of variation drawn from several distributions. *Sankhya B*, 55, 65-76.
- Singh, W., Soman, M.K. and Kumar, K.K. (1987). Use of coefficient of variation in determining rainfall probabilities in a humid region. *Mausam*, 38, 261-264.

- Tsui, K., Weerahandi, S. (1989). Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 602-607.
- Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical Society*, 54, 426-482.
- Zeevi, D. (1999). Coefficient of variation in maximal and beigried static and dynamic grip efforts. *American Journal of Physical Medicine and Rehabilitation*, 78, 216-221.





ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : UZUNOĞLU, Arda
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 27.04.1982, Elazığ
Medeni hali : Bekar
Telefon : -
Faks : -
e-mail : arda-uzunoglu@hotmail.com.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik	Devam ediyor
Lisans	Fırat Üniversitesi /Matematik	2007
Lise	Balagazi Süper Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-Halen	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

-

Hobiler

-



GAZİ GELECEKTİR..