

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

ÖKLİD UZAYLARININ r -HELİS ALT MANİFOLDLARI ÜZERİNE

Evren ZİPLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

ÖKLİD UZAYLARININ r -HELİS ALT MANİFOLDLARI ÜZERİNE

Evren ZİPLAR

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ileri bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, helis hiperyüzeyleri ve özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, r -helis hiperyüzeyler ve özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir.

Beşinci bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki r -helis alt manifoldlar ve r -helis alt manifoldlarda bazı özel eğriler incelenmiştir.

Son bölümde, f -eikonal helis alt manifoldlar ve f -eikonal helis eğrileri incelenmiştir.

Ocak 2013, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler : r -Helis alt manifold, f -eikonal helis alt manifold, f -eikonal helis eğrisi, Slant helis, Geodezik eğri, Asimptotik eğri, Eğrilik çizgisi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON THE r -HELIX SUBMANIFOLDS OF EUCLIDEAN SPACES

Evren ZIPLAR

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis comprises six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which are needed in the next chapters are given.

In the third chapter, the relations between helix hypersurfaces and special curves are given.

In the fourth chapter, the relations between r -helix hypersurfaces and special curves are given.

In the fifth chapter, r -helix submanifolds in $\mathbb{R}^n$ and some special curves on these manifolds are investigated.

In the last chapter, f -eikonal helix submanifolds and f -eikonal helix curves are investigated.

January 2013, 68 pages

Key Words : r -Helix submanifold, f -eikonal helix submanifold, f -eikonal helix curve, Slant helix, Geodesic curve, Asymptotic curve, Line of curvature

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren çok değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr.Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, yardımlarını benden esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'a ve Sayın Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmada, maddi ve manevi her türlü konuda bana yardımcı olan, bilimsel araştırma isteğini aşıl原因an çok sevgili annem, babam ve kardeşime, çalışmam süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen eşim Ümmügülsüm ZIPLAR'a en derin duygularla teşekkür ederim.

Evren ZIPLAR

Ankara, Ocak 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Öklid Uzayları.....	3
2.2 Riemann Manifoldları.....	5
2.3 Helis Alt Manifoldlar.....	7
3. HELİS HİPERYÜZEYLER.....	11
3.1 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzey ve Bazı Özel Eğriler.....	11
3.2 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzeyler Üzerindeki Regle Yüzeyler.....	13
3.3 $\mathbb{R}^3$ de Düzlemsel Bir Eğriden Bir Helis Hiperyüzey Elde Etme.....	15
3.4 $\mathbb{R}^3$ de Helis Hiperyüzey ve Darboux Çatısı.....	19
3.5 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzey ve Gauss Dönüşümü.....	22
4. r -HELİS HİPERYÜZEYLER.....	25
4.1 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Hiperyüzeyler ve Bazı Özel Eğriler.....	25
4.2 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Hiperyüzey ve Gauss Dönüşümü.....	30
5. r -HELİS ALT MANİFOLDLAR.....	34
5.1 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve Bazı Özel Eğriler.....	34
5.2 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlarda Teğet ve Normal Bileşenler.....	39
5.3 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve İntegral Eğrileri.....	40
5.4 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve Asimptotiklik.....	42
5.5 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlarda Çizgili Helis ve Helis Çizgileri.....	44
6. f -EİKONAL HELİS ALT MANİFOLDLAR	45
6.1 f -Eikonal Helis Eğrileri ve Helis Alt Manifoldlar.....	45
6.2 f -Eikonal Helis Eğrilerinin Ekseni ve Helis Alt Manifoldlar.....	52
6.3 f -Eikonal Helis Alt Manifoldlar ve Harmonik Eğrilik Fonksiyonları...	57
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	67

1. GİRİŞ

Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ alt manifoldu ve bir $d \in \mathbb{R}^n$ birim vektörü verilsin. Eğer, her bir $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabit ise, bu taktirde M manifoldu d ye göre bir helis olarak adlandırılır. Öte yandan, bir $M \subset \mathbb{R}^n$ alt manifoldu için, $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ bir r -boyutlu lineer alt uzayı var ve bu uzaydaki her bir $d \in \hat{H}$ doğrultusuna göre M bir helis ise, bu taktirde M manifoldu bir r -helis alt manifold olarak adlandırılır.

Yukarıda bahsettiğimiz, Öklidyen uzayın helis alt manifoldları konusu son yılların çalışılan önemli konularından biridir. Bu manifoldlar ilk olarak, Di Scala ve Ruiz-Hernández tarafından verilmiştir. Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009 yılında yaptıkları çalışmada (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009) helis hiperyüzeylerinin nasıl inşa edileceğini vermiş ve incelemişlerdir. Öte yandan, 2009 yılında Di Scala, Öklid uzaylarının zayıf helis alt manifoldlarını tanımlamış (Di Scala 2009) ve bu çalışmada (güçlü) r -helis alt manifoldlarla zayıf r -helis alt manifoldların genel olarak aynı olmadığını vermiştir. Ayrıca 2010 yılındaki çalışmalarında (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010), helis manifoldların eikonal kısmi diferensiyel denklemlerle olan bağlantısını vermişler ve yerel olarak, eikonal kısmi diferensiyel denklemlerin her çözümünü bulmak için bir yöntem vermişlerdir. Yine aynı çalışmada, doğrusal helis alt manifoldları karakterize etmişlerdir. Ve son yıllarda Ruiz-Hernández $N^n \times \mathbb{R}$ minimal helis yüzeyleri ile çalışmıştır (Ruiz-Hernández 2011).

Diğer taraftan, H.Wente tarafından formülleştirilen gölge problemi M.Ghomi tarafından çözülmüştür (Ghomi 2002). O, çalışmalarında gölge sınır kavramını kullanmıştır. Ruiz-Hernández, gölge sınırlarını doğal olarak helis alt manifoldlarla bağlantılı olarak incelemiştir (Ruiz-Hernández 2008). Cermelli ve Di Scala, sıvı kristallerin interfaz fiziği ile ilgili olan helis hiperyüzeyleri ile çalışmıştır (Cermelli ve Di Scala 2007). Munteanu ve Dillen de, helis yüzeylerini düzlemsel olmayan Öklid uzaylarında çalışmıştır (Dillen ve Munteanu 2009).

Bu tezin planı aşağıdaki gibidir. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan

temel kavramlar verilmiştir. Bölüm 3 de, $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir. Yine bu yüzeyler üzerindeki bazı özel regle yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğriden bir helis hiperyüzey elde edilmiş ve bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ile açılabilirlik durumları incelenmiştir. Daha sonra, $\mathbb{R}^3$ deki eğrilerin Darboux çatı özellikleri dikkate alınarak, $\mathbb{R}^3$ deki helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir. Bu bölümün sonunda ise, $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerin Gauss dönüşümü bulunmuş ve koni helis hiperyüzeyinin Gauss dönüşümünün helis alt manifold olan bir çember olduğu örnekle verilmiştir. Bölüm 4 te, $\mathbb{R}^n$ deki r -helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar incelenmiştir. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ deki r -helis hiperyüzeylerinin ve bu yüzeyler üzerindeki eğrilerin Gauss dönüşümleri incelenmiştir. Bölüm 5 de, $\mathbb{R}^n$ de r -helis alt manifoldlar ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir. Yine bu manifoldların teğet ve normal bileşenleri arasındaki önemli bir bağıntı verilmiştir. Ayrıca, bu manifoldların doğrultularının integral eğrileri incelenmiştir. Daha sonra, bir Riemann manifoldunda, bir teğet vektör alanının ve bir eğrinin bir normal doğrultuda asimptotik olması tanımlanmıştır. Ve bu kavramlar r -helis alt manifoldlarda incelenmiştir. Bu bölümün sonunda ise, $\mathbb{R}^n$ deki helis alt manifoldlarda, çizgili helisler ile helis çizgileri arasındaki bir özel bağıntı verilmiş ve hiperyüzey durumunda önemli bir sonuç verilmiştir. Bölüm 6 da, $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann alt manifoldunun f -eikonal helis alt manifold olması ve bir Riemann alt manifold üzerindeki bir eğrinin f -eikonal helis eğrisi olması tanımları ilk defa verilmiştir. Daha sonra, f -eikonal helis eğrilerinin geodezik eğrilerle, genel helislerle ve f -eikonal helis alt manifoldlarla olan bağlantıları verilmiştir. Sondan bir önceki alt bölümde ise, 3-boyutlu Riemann manifoldlarda, f -eikonal helis eğrisinin ekseni ve f -eikonal helis eğrileri için karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, f -eikonal helis eğrilerinin genel helislerle ve Riemann helis alt manifoldlarla bağlantıları verilmiştir. Bölüm 6 nın sonunda ise, n -boyutlu Riemann manifoldlarda, f -eikonal helis eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları ile Frenet çatısı arasında bir bağıntı ve bu eğrinin ekseni verilmiştir. Ayrıca, f -eikonal helis alt manifoldlarla ilgili önemli sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu ikinci bölüm, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel Tanım ve Teoremleri içermektedir.

2.1 Öklid Uzayları

Tanım 2.1.1.(Frenet Çatısı) $\mathbb{R}^n$ de birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer, $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ ise, α eğrisi birim hızlı bir eğri olarak adlandırılacak. Burada $\langle, \rangle$ ifadesi $\mathbb{R}^n$ deki standart skalar çarpımı göstermektedir. Herbir $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde verilir. $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$, α eğrisi boyunca hareketli çatı (Frenet çatısı) olsun. Burada, V_i ler karşılıklı olarak ortogonal ve $\langle V_i, V_i \rangle = 1$. Bu taktirde α nın Frenet denklemleri

$$V_1' = k_1 V_2$$

$$V_{n-1}' = -k_{n-2} V_{n-2} + k_{n-1} V_n$$

$$V_n' = -k_{n-1} V_{n-1}$$

formülleriyle verilir. Burada, $k_i(s)$ ler α nın i . eğrilikleri olarak adlandırılır (Gök vd. 2009).

Tanım 2.1.2. (Darboux Çatısı) $\mathbb{R}^3$ Öklidyen 3-uzayındaki bir M hiperyüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. α eğrisi boyunca $\{T, Y = T \times N, N\}$ çatısını gözönüne alalım. Burada T , α nın teğet vektör alanı ve N , M üzerinde bir birim normal vektör alanıdır. Bu taktirde, $\{T, Y, N\}$ çatısı M ye göre α nın Darboux çatısı olarak ve T, Y, N vektör alanları M ye göre α nın Darboux vektör alanları

olarak adlandırılır. Bu çatının Darboux denklemleri de

$$T' = k_g Y + k_n N$$

$$Y' = -k_g T + \tau_g N$$

$$N' = -k_n T - \tau_g Y$$

eşitlikleri ile verilir. Burada k_n , M üzerindeki α nın normal eğriliği, k_g , α nın geodezik eğriliği ve τ_g , α nın geodezik torsiyonu olarak adlandırılır (Özkaldı ve Yaylı 2011).

Tanım 2.1.3.(Slant Helis) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ de birim hızlı bir eğri ve k_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) eğrilikleri sıfırdan farklı olsun. $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$ de α eğrisinin Frenet çatısını gösterebilir. Eğer n . birim vektör alanı V_n , $\mathbb{R}^n$ deki sabit bir birim X vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa, yani α eğrisi boyunca

$$\langle V_n, X \rangle = \cos(\varphi), \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \text{constant}$$

ise, bu taktirde α , bir V_n -slant helis olarak adlandırılır (Gök vd. 2009).

Tanım 2.1.4.(Genel Helis) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi $\mathbb{R}^n$ de birim hızlı bir eğri ve X , $\mathbb{R}^n$ de birim bir sabit vektör alanı olsun. Bütün $s \in I$ lar için,

$$\langle V_1, X \rangle = \cos(\varphi), \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \text{sabit}$$

ise, bu taktirde α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir genel helis olarak adlandırılır. Burada, V_1 , α nın birim teğet vektör alanı ve φ açısı, V_1 ve X vektör alanları arasındaki açıdır (Gök vd. 2009).

2.2 Riemann Manifolds

Tanım 2.2.1.(Vektör Alanı) M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir $p \in M$ noktasındaki teğet vektörlerinin uzayı $T_p M$ olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$$

olarak tanımlanan birebir ve örten X fonksiyonuna denir. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.2.(Riemann manifoldu) M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g = \langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise, M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $\langle, \rangle$ işlemine iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.3.(Gauss Denklemi) $M, \mathbb{R}^n$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyon olsun. Bu taktirde, M ye teğet olan her X, Y vektör alanları için,

$$D_X Y = \nabla_X Y + V(X, Y)$$

şeklinde tanımlanan denkleme Gauss denklemi denir. Burada, ∇ , M üzerindeki Riemann konneksiyonu ve V , simetrik vektör değerli olup ikinci temel tensör olarak adlandırılır. Ayrıca, $\nabla_X Y$ ve $V(X, Y)$, sırasıyla, $D_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir (Hicks 1974).

Tanım 2.2.4.(Weingarten Operatörü) $M, \mathbb{R}^n$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. D nin $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu ve ∇ nin M üzerindeki

Riemann konneksiyonu olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, M ye teğet her X vektör alanı ve M ye normal her ξ vektör alanı için,

$$D_X \xi = -A^\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi$$

denklemine Weingarten formülü denir. A^ξ , ξ ile birleşen şekil operatörü veya ξ ile birleşen Weingarten operatörü olarak bilinir. $\nabla^\perp$, M nin normal demetinde üretilmiş konneksiyondur.

Burada, $A^\xi(X)$, $-D_X \xi$ nin teğet bileşenidir ve $A^\xi(X) = \tan(-D_X \xi)$ şeklinde gösterilir (Munteanu 2010, Lopez ve Munteanu 2011).

Tanım 2.2.5. (Eğrilik Çizgisi) Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ Öklidyen alt manifoldu ve M üzerinde T teğetli bir α eğrisi verilsin. Eğer T , eğrinin her bir noktasında bir asli vektör ise, bu taktirde α , M de bir eğrilik çizgisi olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle, keyfi bir $\xi \in \vartheta(M)$ normal vektör alanı için, α eğrisi boyunca $A^\xi(T) = \tan(-D_T \xi) = \lambda_j T$ oluyorsa α eğrisi M de bir eğrilik çizgisidir. Burada, A^ξ , ξ ile birleşen şekil operatörü ve D , $\mathbb{R}^n$ üzerinde Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) dir (Cartan 1983).

Tanım 2.2.6. (Normal Eğrilik) M , $\mathbb{R}^n$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve α , M üzerinde C^∞ sınıfından birim T teğetli bir eğri olsun. Bu durumda, $V(T, T)$, α nın normal eğrilik vektör alanı ve $k_T = \|V(T, T)\|$, α nın normal eğriliği olarak adlandırılır (Hicks 1974).

Tanım 2.2.7. (Frenet Denklemleri) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, 3-boyutlu bir M Riemann manifoldunda gömülmüş bir eğri ve α nın birim teğet vektör alanı t olsun. $\kappa > 0$ ve τ , sırasıyla, α nın eğrilik ve torsiyonunu gösterebilir. Böylelikle, $\{t, n, b\}$, α nın Frenet çatısı ve ∇ , M üzerindeki Riemann konneksiyonu ise, bu taktirde α nın Frenet denklemleri

$$\nabla_t t = \kappa n$$

$$\nabla_t n = -\kappa t + \tau b$$

$$\nabla_t b = -\tau n$$

şeklinde tanımlanır (Barros 1997).

Tanım 2.2.8.(Eikonal Fonksiyon) (M, g) , g metrikli bir Riemann manifoldu olsun. Ayrıca, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve ∇f bunun gradyenti (yani, $df(X) = g(\nabla f, X)$) olsun. Eğer

$$\|\nabla f\| = \text{sabit}$$

eşitliği (eikonal kısmi diferensiyel denklem) sağlanıyorsa, bu taktirde f , eikonal fonksiyon olarak adlandırılır (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Tanım 2.2.9. (Frenet eğrisi ve Frenet denklemleri) n -boyutlu bir Riemann manifoldu M^n de, yay uzunluğu s ile parametrize edilmiş C^∞ sınıfından bir eğri $\alpha = \alpha(s)$ olsun. Eğer,

$$\nabla_{\alpha'} V_i(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \quad i = 1, \dots, n,$$

alşılmış denklem sistemini sağlayan α boyunca $\{V_1 = \alpha', \dots, V_n\}$ ortonormal çatı alanları ve $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$ pozitif fonksiyonları varsa, bu taktirde α eğrisi proper n den bir Frenet eğrisi olarak adlandırılır. Yukarıdaki denklem α Frenet eğrisi için Frenet formülü olarak adlandırılır. $k_i(s)$ ($i = 1, \dots, n-1$) fonksiyonları ve $\{V_1, \dots, V_n\}$ ortonormal çatısı, sırasıyla α eğrisinin eğrilikleri ve Frenet çatısı olarak adlandırılır. Yukarıdaki denklem için, $V_0 = V_{n+1} = 0$ ve $\nabla_{\alpha'}$, α eğrisi boyunca Riemannian konneksiyonunu göstermektedir (Maeda ve Adachi 2000).

2.3 Helis Alt Manifoldlar

Tanım 2.3.1.(Helis Hiperyüzey) Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperyüzeyi ve $\mathbb{R}^n$ de bir $d \neq 0$ birim vektörü verilsin. Eğer her bir $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabitse, bu taktirde M , d sabit doğrultusuna göre bir helis olarak adlandırılır. Belirtelim ki, bu

tanım, M boyunca $\langle d, \xi \rangle$ çarpımının sabit olması gerçeğine denktir. Burada ξ , M üzerinde bir normal vektör alanıdır (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009).

Teorem 2.3.1. $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ de yönlendirilebilir bir hiperyüzey ve η , H nin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde,

$$f_\theta(x, s) = x + s(\sin(\theta)\eta(x) + \cos(\theta)d), f_\theta : H \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \theta = \text{constant}$$

ifadesi $\mathbb{R}^n$ deki d sabit doğrultusuna göre bir helis hiperyüzeyidir ($x \in H$, $s \in \mathbb{R}$, $-\epsilon < s < \epsilon$). Burada $d = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektörü, η ve H ye ortogonal olacak şekildeki vektördür. Aynı zamanda, bu yüzeyin bir birim normal vektör alanı

$$\xi(x) = -\cos(\theta)\eta(x) + \sin(\theta)d$$

ile verilir ($x \in H$) (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009).

Tanım 2.3.2.(Helis Alt Manifold) Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ alt manifoldu ve bir $d \in \mathbb{R}^n$ birim vektörü verilsin. Eğer her bir $q \in M$ için d ve $T_q M$ arasındaki açı sabitse, bu taktirde M , d sabit doğrultusuna göre bir helis olarak adlandırılır.

Belirtelim ki, d birim vektörü M manifoldu boyunca bunun teğet ve normal bileşenlerine ayrılabilir. Yani d vektörü

$$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$$

olarak yazılabilir. Burada $T \in TM$ (teğet demet), $\xi \in \vartheta(M)$ (normal demet) dir. Ayrıca, $\|T\| = \|\xi\| = 1$.

Vurgulayalım ki, d ile $T_q M$ arasındaki açı sabittir ancak ve ancak d nin teğetsel bileşeni $\|\cos(\theta)T\| = \cos(\theta)$ sabit uzunluğuna sahiptir.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olduğunu kabul edeceğiz ve M yi θ açılı bir helis olarak adlandıracaktır

(Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Tanım 2.3.3.(Helis Doğrultusu) Yukarıdaki tanımdaki T ve ξ , M helis altmanifoldunun sırasıyla teğet ve normal doğrultuları olarak ve d de M nin helis doğrultusu olarak adlandırılır. Ve, d her zaman birim kabul edilecek (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Hatırlatma 2.3.1. $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ doğrultulu bir $M \subset \mathbb{R}^n$ helis alt manifoldu ve her $X \in TM$ için

$$\cos(\theta)\nabla_X T - \sin(\theta)A^\xi(X) = 0$$

$$\cos(\theta)V(X, T) + \sin(\theta)\nabla_X^\perp \xi = 0$$

sistemi sağlanır (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Tanım 2.3.4.(Helis Çizgisi) $M \subset \mathbb{R}^n$, bir $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultulu bir helis alt manifold olsun. M helisinin T teğet doğrultusunun integral eğrileri, M nin d ye göre helis çizgileri olarak adlandırılır.

Ayrıca, M nin bütün helis çizgileri düz çizgiler ise, $M \subset \mathbb{R}^n$ alt manifoldu bir çizgili helis olarak adlandırılır (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Önerme 2.3.1. Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ helis alt manifoldunun helis çizgileri, M de geodezik-tirler (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Teorem 2.3.2. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ doğrultusuna göre helis olan bir full alt manifold (yani, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bir hiperdüzlemi tarafından kapsanmayacak) olsun. Bu taktirde, M bir çizgili helis dir gerek ve yeter şart ξ için $\nabla_T^\perp \xi = 0$ (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2010).

Tanım 2.3.5.(Güçlü r -Helis) $M \subset \mathbb{R}^n$ bir alt manifold olsun. Eğer $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ bir r -boyutlu lineer alt uzayı var ve bu uzaydaki her bir $d \in \hat{H}$ doğrultusuna göre M

bir helis ise, bu taktirde M bir (güçlü) r -helis alt manifold olarak adlandırılır. Ve $\hat{H}$ alt uzayda, helis doğrultularının alt uzayı olarak adlandırılır (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009, 2010).

Tanım 2.3.6.(Zayıf r -Helis) $M \subset \mathbb{R}^n$ bir alt manifold olsun. Eğer M manifoldu r tane lineer bağımsız $d_1, \dots, d_r$ doğrultularına göre bir helis ise, bu taktirde M manifoldu bir (zayıf) r -helis olarak adlandırılır (Di Scala 2009).

3. HELİS HİPERYÜZEYLER

Bu üçüncü bölümde, genel olarak helis hiperyüzeyleri ve özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir.

3.1 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzey ve Bazı Özel Eğriler

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

Teorem 3.1.1. M , $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M de birim hızlı bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_2 -slant helisdir.

İspat: ξ , M üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. M , d doğrultulu bir helis hiperyüzey olduğundan, $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan α , M de geodezik olduğundan, α eğrisi boyunca $\alpha'' = \lambda \xi$ yazabiliriz. Ayrıca, Frenet denklemlerini de kullanırsak $\alpha'' = V_1' = k_1 V_2$ yazabiliriz. Böylece son iki eşitlikten, α boyunca, $\lambda \xi = k_1 V_2$ elde edilir. Böylelikle, son denklemden her iki tarafın normunu alarak, α boyunca $\xi = V_2$ yada $\xi = -V_2$ bulunur. Buradanda, α boyunca $\langle d, V_2 \rangle = \text{sabit}$ olduğunu görebiliriz. Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_2 arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_2 -slant helisdir.

Aşağıda, yukarıdaki Teoremde $n = 3$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. Teorem : α , bir N birim normal vektör alanına sahip bir sabit açılı ve sabit doğrultusu k olan bir M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Eğer α , M de geodezik ise, bu taktirde α , $\mathbb{R}^3$ de bir V_2 -slant helisdir (Özkaldı ve Yaylı 2011).

Teorem 3.1.2. M , $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M

de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α nın n .birim vektör alanı V_n , ξ veya $-\xi$ ye eşit ise, bu taktirde α , $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_n -slant helisdir.Burada ξ , M üzerinde bir birim normal vektör alanıdır.

İspat: M , d doğrultulu bir helis hiperyüzey olduğundan, $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan, α nın n .birim vektör alanı V_n , ξ veya $-\xi$ ye eşit olduğundan, α boyunca $\langle d, V_n \rangle = \text{sabit}$ elde edilir.Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_n arasındaki açı sabittir.Sonuç olarak, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de d doğrultulu bir V_n -slant helisdir.

Teorem 3.1.3. M , $\mathbb{R}^n$ deki bir birim d doğrultusuna göre bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde t parametrelili bir eğri olsun. α , M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde α eğrisi boyunca $d \in Sp\{T\}^\perp$ dir. Burada, T , α nın birim teğet vektör alanıdır.

İspat: M nin bir birim normal vektör alanı ξ olsun. M , d ye göre bir helis yüzey olduğundan, α eğrisi boyunca $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. $\langle d, \xi \rangle = \text{sabit}$ eşitliğinin her iki tarafının α eğrisi boyunca t ye göre türevini alırsak,

$$\langle \xi', d \rangle = 0 \quad (3.1.1)$$

elde edilir. Öte yandan, bu Teoreme göre α , M üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğundan, α boyunca

$$\xi' = S(T) = \lambda T \quad (S: M \text{ nin şekil operatörü}) \quad (3.1.2)$$

yazabiliriz. Böylece, (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden,

$$\langle T, d \rangle = 0$$

elde edilir.Sonuç olarak, α eğrisi boyunca $d \in Sp\{T\}^\perp$ dir.

3.2 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzeyler Üzerindeki Regle Yüzeyler

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeyler üzerindeki bazı özel regle yüzeyler incelenmiş ve bunların açılabilir olma şartı verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ de yönlendirilebilir bir hiperyüzey ve

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

$$t \rightarrow \beta(t)$$

H yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu taktirde,

$$\Phi(t, s) = \beta(t) + s(\sin(\theta)\eta(\beta(t)) + \cos(\theta)d) \quad (3.2.1)$$

yüzeyi, Teorem 2.3.1. de tanımlanan birim d doğrultulu $M_\theta \subset \mathbb{R}^n$ helis hiperyüzeyi üzerinde bir 2- (regle) yüzeydir. Burada, η , hiperyüzey olan H nin bir birim normal vektör alanıdır. (3.2.1) de tanımlanan Φ yüzeyi β eğrisi tarafından meydana getirilen regle yüzey olarak adlandırılacaktır.

Teorem 3.2.1. (3.2.1) deki $\Phi(t, s)$ yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart H yüzeyi üzerindeki β eğrisinin bir eğrilik çizgisi olmasıdır.

İspat: β eğrisinin H yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğunu kabul edelim.

Doğrultmanları

$$X(t) = \sin(\theta)\eta(\beta(t)) + \cos(\theta)d$$

ve dayanak eğrisi β olan

$$\Phi(t, s) = \beta(t) + s(\sin(\theta)\eta(\beta(t)) + \cos(\theta)d)$$

yüzeyini gözönüne alalım. $\Phi(t, s)$ nin her iki tarafının t ye göre türevini alırsak,

$$\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \beta' + (s \sin(\theta))(\eta \circ \beta)' \quad (3.2.2)$$

elde ederiz. β , H yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğundan $S(T) = \lambda T$ ($T : \beta$ nın teğet vektör alanı ve $S : H$ yüzeyinin şekil operatörü) yazabiliriz. Buradanda,

$$S(T) = \frac{d\eta}{dt} = (\eta \circ \beta)' = \lambda T \quad (3.2.3)$$

bulunur. Böylelikle, (3.2.2) ve (3.2.3) kullanılarak

$$\Phi_t = (1 + \lambda s \sin(\theta)) \beta' = (1 + \lambda s \sin(\theta)) T$$

elde edilir. Böylece, $\{\Phi_t, T\}$ sistemi lineer bağımlıdır. Öte yandan biliyoruz ki, bir $X(t)$ doğrultmanı boyunca bir teğet düzlem, $\Phi_s = X(t)$ ve $\Phi_t = kT$ tarafından gerilir. Sonuçta, $\beta(t)$ noktasından geçen $X(t)$ doğrultmanları boyunca teğet düzlemler paralel kalır. Bu da, $\Phi(t, s)$ yüzeyinin açılabilir olduğunu gösterir.

Şimdi $\Phi(t, s)$ yüzeyinin açılabilir olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $\{\Phi_t, T = \beta'\}$ sistemi lineer bağımlıdır. Bu durumda, (3.2.2) eşitliğinden, $(\eta \circ \beta)' = \lambda T$ dir. Yani, $(\eta \circ \beta)' = S(T) = \lambda T$ elde edilir ki, bu da β nın H üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.1. deki H hiperyüzeyini,

$$S^{n-2} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n-1}) : f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1, \|\vec{\nabla} f\| \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

birim hiperküresi olarak gözönüne alalım. Ve bu hiperküre üzerinde bir eğri β olsun. Bu taktirde,

$$\Phi(t, s) = \beta(t) + s(\sin(\theta)N(\beta(t)) + \cos(\theta)d) \subset \mathbb{R}^n$$

yüzeyi Teorem 3.2.1. den her zaman açılabiliridir. Çünkü, S^{n-2} yüzeyi üzerindeki her eğri bir eğrilik çizgisidir.

3.3 $\mathbb{R}^3$ de Düzlemsel Bir Eğriden Bir Helis Hiperyüzey Elde Etme

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğriden bir helis hiperyüzey elde edilmiş ve bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ile açılabilirlik durumları incelenmiştir.

Tanım 3.3.1. $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u)$$

olsun. Bu taktirde,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v (\sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B)$$

yüzeyi α eğrisi kullanılarak elde edilmiş bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyi, α eğrisi tarafından meydana getirilmiş yüzey olarak adlandıracağız. Burada, V_2 ve B , $\{V_1 = T, V_2, V_3 = B\}$ Frenet çatısının elemanlarıdır. Ve, sırasıyla, α nın teğeti, asli normali ve binormali diye adlandırılır. Belirtelim ki, $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğrinin binormali sabittir.

Teorem 3.3.1. $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u)$$

olsun. Bu taktirde,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v (\sin(\theta)V_2(u) + \cos(\theta)B)$$

şeklinde tanımlanan yüzeyi, B doğrultulu bir helis yüzeyidir. Ve bu yüzeyi M ile göstereceğiz. Burada θ sabit ve B vektörü (binormal) α eğrisinin düzlemine dik olan

bir sabit birim vektördür.

İspat: Z , M yüzeyinin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde, M yüzeyi boyunca $\langle Z, B \rangle$ çarpımının sabit olduğunu göstermek istiyoruz. İlk olarak yüzeyin bir birim normal vektör alanı Z yi bulacağız. Bunu, yapmak için ϕ nin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplarsak:

$$\phi_u(u, v) = (1 - k_1 v \sin(\theta)) T \quad \text{ve} \quad \phi_v(u, v) = \sin(\theta) V_2 + \cos(\theta) B \quad (3.3.1)$$

elde ederiz. Böylece, (3.3.1) daki eşitlikleri kullanarak, M nin bir birim normal vektör alanı

$$Z = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = -\cos(\theta) V_2 + \sin(\theta) B \quad (3.3.2)$$

olarak elde edilir. Böylece (3.3.2) eşitliği yardımıyla görülür ki, $\langle Z, B \rangle$ çarpımı M boyunca sabittir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.3.1. de tanımlanan,

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \alpha(u) + v (\sin(\theta) V_2(u) + \cos(\theta) B)$$

yüzeyi her zaman açılabiliridir.

İspat: T , α eğrisinin teğet vektör alanı ve $X = \sin(\theta) V_2(u) + \cos(\theta) B$ olsun. Bu taktirde $\det(T, X, X') = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için T ve $\frac{dX}{du} = X'$ vektör alanlarını hesaplarsak:

$$T = \alpha'$$

$$X' = -k_1 \sin(\theta) T$$

elde ederiz. Böylelikle, T ve X' lineer bağımlı olduğundan $\det(T, X, X') = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2. $\mathbb{R}^3$ de doğrusal olmayan birim hızlı bir düzlemsel eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s)$$

olsun. Tanım 3.3.1. de tanımlanan, α eğrisi tarafından meydana getirilmiş

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, v) \rightarrow \phi(s, v) = \alpha(s) + v (\sin(\theta)V_2(s) + \cos(\theta)B)$$

yüzeyini göz önüne alalım. Bu taktirde M nin Gauss eğriliği sıfır ve ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \right)$$

dır. Burada k_1 , α eğrisinin birinci eğriliğidir.

İspat: Sonuç 3.3.1. den, M yüzeyi açılabilir olduğundan Gauss eğriliği sıfırdır. Şimdi, M nin ortalama eğriliğini hesaplayalım:

$\phi(s, v)$ noktasında, M nin teğet uzayının bazı $\left\{ x_1 = \frac{\phi_s}{\|\phi_s\|}, x_2 = \phi_v \right\}$ olsun. Hatırlatalım ki, Teorem 3.3.1. den M nin bir birim normal vektör alanı $Z(s, v) = -\cos(\theta)V_2(s) + \sin(\theta)B$ dır. Ve, M nin $\phi(s, v)$ noktasındaki ortalama eğriliği,

$$H(\phi(s, v)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \langle S(x_i), x_i \rangle$$

dir. Burada S , M nin Z doğrultusundaki şekil operatörüdür. Şimdi, $S(x_1)$ ve $S(x_2)$

yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
S(x_1) &= D_{x_1} Z = D_{\frac{\phi_s}{\|\phi_s\|}} Z \\
&= \frac{1}{\|\phi_s\|} D_{\phi_s} Z \\
&= \frac{1}{\|\phi_s\|} \frac{dZ}{ds} \\
&= \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{|1 - k_1 v \sin(\theta)|} \right) T.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S(x_2) &= D_{x_2} Z = D_{\phi_v} Z \\
&= \frac{dZ}{dv} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada D , $\mathbb{R}^3$ deki standart kovaryant türevidir. Böylece,

$$\langle S(x_1), x_1 \rangle = \frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \quad \text{ve} \quad \langle S(x_2), x_2 \rangle = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, ϕ nin ortalama eğriliği:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 \cos(\theta)}{1 - k_1 v \sin(\theta)} \right)$$

olarak elde edilir ($1 - k_1 v \sin(\theta) \neq 0$). Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.3.1. $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir eğri

$$\alpha(s) = \left(\frac{3}{5} \sin(s), 1 + \cos(s), \frac{4}{5} \sin(s) \right), \quad s \in [0, 5\pi]$$

şeklinde verilsin. Bu taktirde, α nın asli normali ve binormali sırasıyla,

$$V_2 = \left(-\frac{3}{5} \sin(s), -\cos(s), -\frac{4}{5} \sin(s) \right)$$

$$B = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right)$$

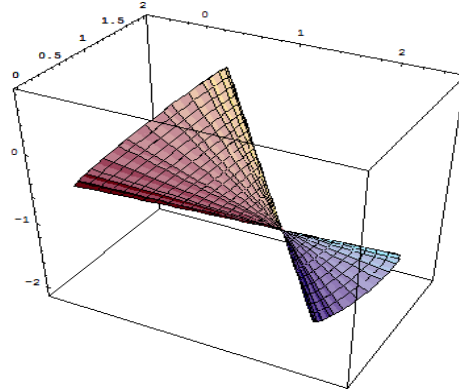
şeklinde bulunur. Eğer, $\theta = \frac{\pi}{6}$ ve $v \in [0, \pi]$ olarak alırsak, α eğrisi tarafından meydana getirilen helis yüzeyin parametrik gösterimi:

$$x(s) = \left(\frac{3}{5} - \frac{3v}{10} \right) \sin(s) + \frac{2\sqrt{3}}{5}v$$

$$y(s) = \left(1 - \frac{v}{2} \right) \cos(s) + 1$$

$$z(s) = \left(\frac{4}{5} - \frac{2v}{5} \right) \sin(s) - \frac{3\sqrt{3}}{10}v$$

olarak bulunur. α eğrisi tarafından meydana getirilen bu helis yüzeyi şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 B doğrultulu helis yüzeyi

3.4 $\mathbb{R}^3$ ’de Helis Hiperyüzey ve Darboux Çatısı

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^3$ ’deki eğrilerin Darboux çatı özellikleri dikkate alınarak, $\mathbb{R}^3$ ’deki helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir.

Teorem 3.4.1. M , $\mathbb{R}^3$ ’deki bir birim d doğrultusuna göre bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α boyunca

$d \in Sp \in \{N, Y\}$ ise, α , M de bir eğrilik çizgisi ve $\frac{k_n}{k_g} = -\tan(\theta) = \text{sabit}$ dir. Burada, N, Y vektör alanları α nın Darboux vektör alanları ve θ , d ile N arasındaki sabit açıdır.

Tersine olarak, α , M de bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde α boyunca $d \in Sp \in \{N, Y\}$.

İspat: M , d doğrultulu bir helis hiperyüzey ve α boyunca $d \in Sp \in \{N, Y\}$ olduğundan, $\langle N, d \rangle = \cos(\theta) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)Y \quad (3.4.1)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4.1) denkleminin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)Y'$$

elde ederiz. Tanım 2.1.2. deki Darboux denklemleri ve en son denklem kullanılarak

$$(-k_n \cos(\theta) - k_g \sin(\theta))T + (-\tau_g \cos(\theta))Y + \tau_g \sin(\theta)N = 0 \quad (3.4.2)$$

bulunur. $\{T, Y, N\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, (3.4.2) den

$$k_n \cos(\theta) + k_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.4.3)$$

$$\tau_g \cos(\theta) = 0 \quad (3.4.4)$$

$$\tau_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.4.5)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (3.4.4) ve (3.4.5) eşitliklerinden, $\tau_g = 0$ ($\theta \neq \frac{\pi}{4}$) elde ederiz. Bu da, α nın M de bir eğrilik çizgisi olduğunu gösterir. Ayrıca, (3.4.3) eşitliğinden, $\frac{k_n}{k_g} = -\tan(\theta) = \text{sabit}$ dir.

Tersine olarak, α nın M de bir eğrilik çizgisi olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$\tau_g = 0$ dir. Öte yandan,

$$\langle N, d \rangle = \text{sabit} \quad (3.4.6)$$

yazabiliriz. (3.4.6) eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak

$$\langle N', d \rangle = 0 \quad (3.4.7)$$

elde ederiz. Öte yandan, Darboux denklemlerinden $N' = -k_n T - \tau_g Y$ olduğundan, $\tau_g = 0$ olmasını kullanırsak, $N' = -k_n T$ ($k_n \neq 0$) elde ederiz. Ve, (3.4.7) eşitliğini de kullanarak $\langle T, d \rangle = 0$ bulunur. Buda, $d \in Sp\{N, Y\}$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.4.2. $M, \mathbb{R}^3$ deki bir birim d doğrultusuna göre bir helis hiperyüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α boyunca $d \in Sp \in \{N, T\}$ ise, α , M de bir asimptotik eğri ve $\frac{\tau_g}{k_g} = \tan(\theta) = \text{sabit}$ dir. Burada, N, T vektör alanları α nın Darboux vektör alanları ve θ , d ile N arasındaki sabit açıdır.

Tersine olarak, α , M de bir asimptotik eğri ise, bu taktirde α boyunca $d \in Sp \in \{N, T\}$.

İspat: M , d doğrultulu bir helis hiperyüzey ve α boyunca $d \in Sp \in \{N, T\}$ olduğundan, $\langle N, d \rangle = \cos(\theta) = \text{sabit}$ olmak üzere

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4.8) denkleminin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)T'$$

elde ederiz. Tanım 2.1.2. deki Darboux denklemleri ve en son denklem kullanılarak

$$(-k_n \cos(\theta))T + (-\tau_g \cos(\theta) + k_g \sin(\theta))Y + k_n \sin(\theta)N = 0 \quad (3.4.9)$$

bulunur. $\{T, Y, N\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, (3.4.9) dan

$$-\tau_g \cos(\theta) + k_g \sin(\theta) = 0 \quad (3.4.10)$$

$$k_n \cos(\theta) = 0 \quad (3.4.11)$$

$$k_n \sin(\theta) = 0 \quad (3.4.12)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (3.4.11) ve (3.4.12) eşitliklerinden, $k_n = 0$ ($\theta \neq \frac{\pi}{4}$) elde ederiz. Bu da, α nın M de bir asimptotik eğri olduğunu gösterir. Ayrıca, (3.4.10) eşitliğinden, $\frac{\tau_g}{k_g} = \tan(\theta) = \text{sabit}$ dir.

Tersine olarak, α nın M de bir asimptotik eğri olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $k_n = 0$ dir. Öte yandan,

$$\langle N, d \rangle = \text{sabit} \quad (3.4.13)$$

yazabiliriz. (3.4.13) eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak

$$\langle N', d \rangle = 0 \quad (3.4.14)$$

elde ederiz. Öte yandan, Darboux denklemlerinden $N' = -k_n T - \tau_g Y$ olduğundan, $k_n = 0$ olmasını kullanırsak, $N' = -\tau_g Y$ ($\tau_g \neq 0$) elde ederiz. Ve, (3.4.14) eşitliğini de kullanarak $\langle Y, d \rangle = 0$ bulunur. Buda, $d \in Sp\{N, T\}$ olmasını gerektirir.

3.5 $\mathbb{R}^n$ de Helis Hiperyüzey ve Gauss Dönüşümü

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki helis hiperyüzeylerin Gauss dönüşümü bulunmuş ve koni helis hiperyüzeyinin Gauss dönüşümünün helis alt manifold olan bir çember olduğu örnekle verilmiştir.

Teorem 3.5.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir helis hiperyüzey ve N , M nin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde,

$$\eta(M) = \{X \in S^{n-1} | X = N(P), P \in M\}$$

yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\mathbb{R}^n$ deki sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Burada,

$$\eta : M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

$$P \rightarrow \eta(P) = \vec{N}(P)$$

dönüşümü M nin Gauss dönüşümü ve S^{n-1} , $\mathbb{R}^n$ de birim hiperküredir.

İspat: $d \in \mathbb{R}^n$, M nin helis doğrultusu olsun. M , bir helis hiperyüzey olduğundan, her $P \in M$ noktasında

$$\langle N(P), d \rangle = \text{sabit}$$

dir. Böylece, her $X = \vec{N}(P) \in \eta(M)$ için

$$\langle X, d \rangle = \text{sabit}$$

olarak yazabiliriz. Aynı zamanda, $X = \vec{N}(P)$, S^{n-1} birim hiperküresi üzerindeki $\eta(M)$ nin yer vektörü olduğundan, $\eta(M)$ yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\mathbb{R}^n$ deki sabit d doğrultusu ile sabit açı yapar.

Örnek 3.5.1.

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \left(\cos(u) - \left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right) \cos(u), \sin(u) - \left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right) \sin(u), \frac{v\sqrt{2}}{2} \right)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^3$ deki M hiperyüzeyini gözönüne alalım. Bu yüzeyin bir birim normal vektör alanını bulalım. Bunun için, ϕ nin u ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \phi_u &= \left(-\sin(u) + \left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right) \sin(u), \cos(u) + \left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right) \sin(u), 0 \right) \\ \phi_v &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, ϕ_u ve ϕ_v yi kullanarak, M nin bir birim normal vektör

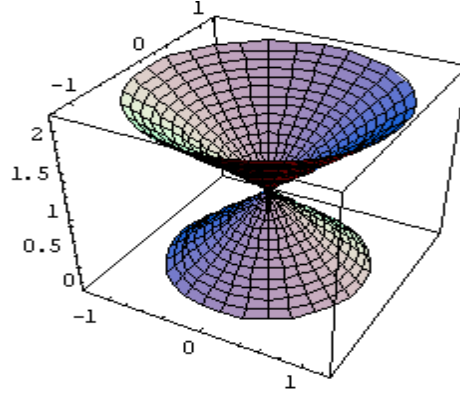
alanı N

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

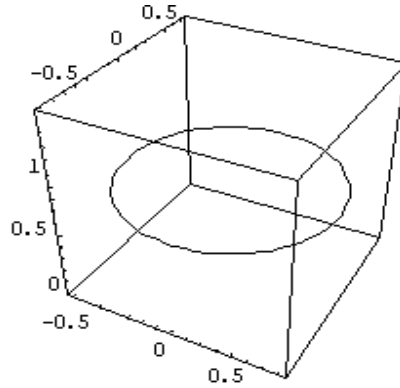
şeklinde elde edilir. Gerçekten, $d = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $\langle N, d \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sabit}$ dir. Yani M, d doğrultulu bir helis hiperyüzeydir. Öte yandan, M nin $\eta : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ Gauss dönüşümünün görüntü kümesi

$$\eta(M) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(u), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

dir. Kolaylıkla görülmektedir ki, $\eta(M)$ yüzeyinin her bir noktasındaki yer vektörü d ile sabit açı yapmaktadır. Ayrıca, M helis hiperyüzeyi ve $\eta(M)$ yüzeyi (d doğrultulu bir helis hiperyüzey) nin şekilleri sırasıyla aşağıdaki şekil 3.2-3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 M helis hiperyüzeyi



Şekil 3.3 $\eta(M)$ yüzeyi

4. r -HELİS HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde, genel olarak r -helis hiperyüzeyler ve özel eğriler arasındaki bağlantılar verilmiştir.

4.1 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Hiperyüzeyler ve Bazı Özel Eğriler

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki r -helis hiperyüzeyler ve bazı özel eğriler arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M de birim hızlı bir geodezik eğri ise, bu taktirde, α eğrisi $\hat{H}$ uzayındaki her doğrultuya göre $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir.

İspat: ξ , M üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. M , bir r -helis hiperyüzey olduğundan, keyfi bir $d \in \hat{H}$ için $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan α , M de geodezik olduğundan, α eğrisi boyunca $\alpha'' = \lambda \xi$ yazabiliriz. Ayrıca, Frenet denklemlerini de kullanırsak $\alpha'' = V_1' = k_1 V_2$ yazabiliriz. Böylece son iki eşitlikten, α boyunca, $\lambda \xi = k_1 V_2$ elde edilir. Böylelikle, son denklemden her iki tarafın normunu alarak, α boyunca $\xi = V_2$ yada $\xi = -V_2$ bulunur. Buradanda, α boyunca $\langle d, V_2 \rangle = \text{sabit}$ olduğunu görebiliriz. Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_2 arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, $d \in \hat{H}$ keyfi olduğundan, α eğrisi $\hat{H}$ uzayındaki her doğrultuya göre $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir.

Sonuç 4.1.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M de birim hızlı bir geodezik eğri ise, bu taktirde her $d \in \hat{H}$ için $d \in Sp\{V_2'\}^\perp$ dir.

İspat: Teorem 4.1.1. den α boyunca $\langle d, V_2 \rangle = \text{sabit}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin α boyunca her iki tarafının türevini alırsak, $\langle d, V_2' \rangle = 0$ elde edilir. Yani, her $d \in \hat{H}$

için $d \in Sp\{V_2'\}^\perp$ dir.

Teorem 4.1.2. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M de birim hızlı bir eğri ve α nın n .birim vektör alanı V_n , ξ veya $-\xi$ ye eşit ise, bu taktirde, α eğrisi $\hat{H}$ uzayındaki her doğrultuya göre $\mathbb{R}^n$ de bir V_n -slant helisdir. Burada ξ , M üzerinde bir birim normal vektör alanıdır.

İspat: M , bir r -helis hiperyüzey olduğundan, keyfi bir $d \in \hat{H}$ için $\langle d, \xi \rangle = \text{sabittir}$. Yani, d ve ξ arasındaki açı, M yüzeyinin her noktasında sabittir. Öte yandan, α nın n .birim vektör alanı V_n , ξ veya $-\xi$ ye eşit olduğundan, α boyunca $\langle d, V_n \rangle = \text{sabit}$ elde edilir. Bir başka ifadeyle, α boyunca d ile V_n arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, $d \in \hat{H}$ keyfi olduğundan, α eğrisi $\hat{H}$ uzayındaki her doğrultuya göre $\mathbb{R}^n$ de bir V_n -slant helisdir.

Teorem 4.1.3. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde bir eğri ve α , M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise, bu taktirde α eğrisi boyunca keyfi $d \in \hat{H}$ için $d \in Sp\{T\}^\perp$ dir. Burada, T , α nın birim teğet vektör alanıdır.

İspat: M nin bir birim normal vektör alanı ξ olsun. M , bir r -helis yüzey olduğundan, keyfi $d \in \hat{H}$ için α eğrisi boyunca $\langle d, \xi \rangle$ sabittir. $\langle d, \xi \rangle = \text{sabit}$ eşitliğinin her iki tarafının α eğrisi boyunca türevini alırsak,

$$\langle \xi', d \rangle = 0 \quad (4.1.1)$$

elde edilir. Öte yandan, bu Teoreme göre α , M üzerinde bir eğrilik çizgisi olduğundan, α boyunca

$$\xi' = S(T) = \lambda T \quad (S: M \text{ nin şekil operatörü}) \quad (4.1.2)$$

yazabiliriz. Böylece, (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerinden,

$$\langle T, d \rangle = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, keyfi $d \in \hat{H}$ için α eğrisi boyunca $d \in Sp\{T\}^\perp$ dir.

Teorem 4.1.4. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde bir eğri ve en az bir $d \in \hat{H}$ için $\{T^*, T\}$ sistemi α boyunca lineer bağımlı ise, bu takdirde α eğrisi M de bir asimptotik eğridir. Burada T, d nin teğet bileşeni ve T^*, α nın teğeti dir.

İspat: $d \in \hat{H}$, $\{T^*, T\}$ sistemi α boyunca lineer bağımlı olacak şekilde bir helis doğrultusu olsun. M nin bir birim normal vektör alanı N olsun. M bir r -helis hiperyüzey olduğundan α boyunca $\langle N, d \rangle = \cos(\theta)$ =sabitir. Öte yandan, d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimi

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T \quad (4.1.3)$$

şeklindedir. $\langle N, d \rangle$ =sabit eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak, $\langle N', d \rangle = 0$ elde ederiz. Böylece bu son denklemi ve (4.1.3) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N', d \rangle \\ &= \langle N', \cos(\theta)N + \sin(\theta)T \rangle \\ &= \cos(\theta) \langle N', N \rangle + \sin(\theta) \langle N', T \rangle \end{aligned}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan, N birim normal olduğundan, $\langle N', N \rangle = 0$ dir. Böylelikle, $\langle N', T \rangle = 0$ ($\theta \neq 0$) bulunur. $\{T^*, T\}$ sistemi α boyunca lineer bağımlı olduğundan, α boyunca $T = kT^*$ yazabiliriz. Sonuç olarak,

$$\langle N', T^* \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece, α eğrisi M de bir asimptotik eğridir.

Teorem 4.1.5. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde bir eğri ve en az bir $d \in \hat{H}$ için $\{T^*, T'\}$ sistemi α boyunca lineer bağımlı ise, bu taktirde α eğrisi M de bir eğrilik çizgisidir. Burada T, d nin teğet bileşeni ve T^*, α nın teğeti dir.

İspat: $d \in \hat{H}$, $\{T^*, T'\}$ sistemi α boyunca lineer bağımlı olacak şekilde bir helis doğrultusu olsun. M nin bir birim normal vektör alanı N olsun. M bir r -helis hiperyüzey olduğundan α boyunca $\langle N, d \rangle = \cos(\theta)$ = sabittir. Öte yandan, d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimi

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T \quad (4.1.4)$$

şeklindedir. (4.1.4) eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)T' \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\{T^*, T'\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan, α boyunca $T' = kT^*$ yazabiliriz. Ve (4.1.5) denklemini kullanarak $\{N', T^*\}$ sisteminin lineer bağımlı olduğu bulunur. Bu da, α nın bir eğrilik çizgisi olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.6. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Ayrıca $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir geodezik eğri olsun. Bu taktirde, α nın α' teğetler göstergesi, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ birim hiper küresi üzerinde, $\hat{H}$ deki her doğrultuya göre bir küresel helis (genel helis) dir.

İspat: α, M de bir geodezik eğri olduğundan, Teorem 4.1.1. e göre α eğrisi $\hat{H}$ uzayındaki her d doğrultusuna göre $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir. Öte yandan, Teorem 2.1 (Yaylı ve Zıplar 2011) den d doğrultulu α nın α' teğetler göstergesi, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ birim hiperküresi üzerinde yine aynı d doğrultusuna göre bir küresel helisdir. Sonuç olarak, α' teğetler göstergesi, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ birim hiper küresi üzerinde, $\hat{H}$ deki her d doğrultusuna göre bir küresel helis (genel helis) dir.

Teorem 4.1.7. $M, \mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Ayrıca $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, M üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde, herhangi bir $d \in \hat{H}$ için, α boyunca $d \in Sp\{V_1, N\}$ oluyorsa, α eğrisi M üzerinde bir asimptotik eğridir. Burada, V_1 , α nın $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ Frenet çatısının elemanı ve N , M nin bir birim normal vektör alanıdır.

İspat: M bir r -helis hiperyüzey ve herhangi bir $d \in \hat{H}$ için, α boyunca $d \in Sp\{V_1, N\}$ olduğundan,

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)V_1 \quad (4.1.6)$$

yazabiliriz. (4.1.6) un her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)V_1' \quad (4.1.7)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.1.7) eşitliğinin her iki tarafını V_1 ile iç çarparsak,

$$0 = \cos(\theta) \langle N', V_1 \rangle + \sin(\theta) \langle V_1', V_1 \rangle \quad (4.1.8)$$

bulunur. V_1 birim olduğundan, $\langle V_1', V_1 \rangle = 0$ dır. Böylelikle (4.1.8) denkleminde $\langle N', V_1 \rangle = 0$ ($\theta \neq 0$) bulunur. Bu eşitlikte, α eğrisinin M üzerinde bir asimptotik eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.7 de özel olarak α eğrisi geodezik bir eğri ise, özel olarak α eğrisi M üzerinde bir doğrudur.

İspat: Teorem 4.1.7 den α asimptotik bir eğridir. Öte yandan, α bir geodezik eğridir. Böylece, α hem asimptotik hemde geodezik olduğundan α özel olarak bir doğrudur.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.7 de özel olarak α eğrisi bir eğrilik çizgisi ise, özel olarak α eğrisi M üzerinde bir doğrudur.

İspat: Teorem 4.1.7 den α asimptotik bir eğridir. Öte yandan, α bir eğrilik çizgisidir. Böylece, α hem asimptotik hemde eğrilik çizgisi olduğundan α özel olarak bir doğrudur.

4.2 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Hiperyüzey ve Gauss Dönüşümü

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki r -helis hiperyüzeylerinin ve bu yüzeyler üzerindeki eğrilerin Gauss dönüşümleri incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M yüzeyi üzerinde bir eğri ve her $p = \alpha(t)$ noktası için $d \notin TpM$ olacak şekilde bir $d \in \hat{H}$ doğrultusu varsa, bu taktirde

$$\eta(\alpha(t)) = \{X \in S^{n-1} | X = N(\alpha(t)), \alpha(t) \in M\}$$

eğrisi, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ birim hiperküresi üzerinde bir geodezik eğri olamaz. Burada, $N(\alpha(t))$, α boyunca M nin bir birim normal vektör alanı ve

$$\eta : M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\alpha(t) \rightarrow \eta(\alpha(t)) = \vec{N}(\alpha(t))$$

dönüşümü, α boyunca M nin Gauss dönüşümüdür.

İspat: Her $p = \alpha(t)$ noktası için $d \notin TpM$ olacak şekilde bir $d \in \hat{H}$ doğrultusunu gözönüne alalım. M bir r -helis yüzey olduğundan,

$$\langle N(\alpha(t)), d \rangle = \text{sabit} \quad (4.2.1)$$

dir. η , M nin Gauss dönüşümü olmak üzere, $\beta = \eta(\alpha(t))$ gösterge eğrisini dikkate alalım. Bu taktirde, α boyunca $\eta(\alpha(t)) = N(\alpha(t))$ olduğunu kullanarak, α boyunca

$\beta = N(\alpha(t))$ yazabiliriz. Böylelikle (4.2.1) den, β boyunca

$$\langle \beta, d \rangle = \text{sabit} \quad (4.2.2)$$

elde edilir. (4.2.2) eşitliğinin β boyunca her iki tarafının iki defa türevini alırsak

$$\langle \beta'', d \rangle = 0 \quad (4.2.3)$$

buluruz. Şimdi, β eğrisinin S^{n-1} üzerinde geodezik bir eğri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $\beta'' = kN(\alpha(t))$ ($N(\alpha(t))$, S^{n-1} in bir normal vektör alanı) yazabiliriz. Böylece, (4.2.3) den

$$\langle N(\alpha(t)), d \rangle = 0$$

bulunur. Bu son denklemden de, α boyunca $d \in T_p M$ sonucuna vardık. Ama bizim kabulümüze göre her $p = \alpha(t)$ noktası için $d \notin T_p M$ dir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $\beta = \eta(\alpha(t))$ eğrisi, S^{n-1} birim hiper küresi üzerinde bir geodezik eğri olamaz.

Teorem 4.2.2. M , $\mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Ayrıca N , M nin bir birim normal vektör alanı olsun. Bu takdirde,

$$\eta(M) = \{X \in S^{n-1} | X = N(P), P \in M\}$$

yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\hat{H}$ uzayı ile sabit açı yapar. Burada,

$$\eta : M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

$$P \rightarrow \eta(P) = \vec{N}(P)$$

dönüşümü M nin Gauss dönüşümü ve S^{n-1} , $\mathbb{R}^n$ de birim hiperküredir.

İspat: $d \in \hat{H}$, M nin herhangi bir helis doğrultusu olsun. M , bir helis r -helis hiperyüzey olduğundan, her $P \in M$ noktasında

$$\langle N(P), d \rangle = \text{sabit}$$

dir.Böylece, her $X = \vec{N}(P) \in \eta(M)$ için

$$\langle X, d \rangle = \text{sabit}$$

olarak yazabiliriz. Aynı zamanda, $X = \vec{N}(P)$, S^{n-1} birim hiperküresi üzerindeki $\eta(M)$ nin yer vektörü olduğundan, $\eta(M)$ yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\hat{H}$ deki her d doğrultusu ile sabit açı yapar.Sonuç olarak, $\eta(M)$ yüzeyinin bütün noktalarındaki yer vektörleri, $\hat{H}$ uzayı ile sabit açı yapar.

Teorem 4.2.3. M , $\mathbb{R}^n$ de bir r -helis hiperyüzey ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Ayrıca $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, M üzerinde bir eğri olsun.Bu taktirde, her $d \in \hat{H}$ için, β eğrisi boyunca $d \in Sp\{\beta'\}^\perp$ dir. Burada,

$$\beta = \eta(\alpha(t)) = \{X \in S^{n-1} | X = N(\alpha(t)), \alpha(t) \in M\}$$

ve

$$\eta : M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\alpha(t) \rightarrow \eta(\alpha(t)) = \vec{N}(\alpha(t))$$

dönüşümü α boyunca M nin Gauss dönüşümü ve S^{n-1} , $\mathbb{R}^n$ de birim hiperküredir.Ayrıca $N(\alpha(t))$, α boyunca M nin bir birim normal vektör alanıdır.

İspat: M bir r -helis hiper yüzey olduğundan, her $d \in \hat{H}$ için α boyunca,

$$\langle N, d \rangle = \text{sabit}$$

dir.Bu son eşitliğin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$\langle N', d \rangle = 0$$

elde edilir.Öte yandan, $\beta = N(\alpha(t))$ olduğundan, $\beta' = N'(\alpha(t))$ dir.Böylelikle,

$$\langle \beta', d \rangle = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, her $d \in \hat{H}$ için, β eğrisi boyunca $d \in Sp\{\beta'\}^\perp$ dir.

5. r -HELİS ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, genel olarak $\mathbb{R}^n$ deki r -helis alt manifoldlar ve r -helis alt manifoldlarda bazı özel eğriler incelenmiştir.

5.1 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve Bazı Özel Eğriler

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ de r -helis alt manifoldlar ve bazı özel eğriler arasındaki bağlan-tılar verilmiştir.

Teorem 5.1.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. D , $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Eğer, M manifoldu üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir geodezik eğri ve α boyunca herhangi bir $d \in \hat{H}$ için $\langle V_2, \xi \rangle$ çarpımı bir sabit fonksiyon ise, bu taktirde α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir. Burada ξ , $d \in \hat{H}$ doğrultusunun normal bileşeni ve V_2 , α nın $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ Frenet çatısının elemanıdır.

İspat: T , α nın birim teğet vektör alanı olsun. Bu taktirde, Tanım 2.2.3. deki Gauss formülünden,

$$D_T T = \nabla_T T + V(T, T) \quad (5.1.1)$$

dir. Teoreme göre, α , M de geodezik olduğundan,

$$\nabla_T T = 0 \quad (5.1.2)$$

yazabiliriz. Böylece (5.1.1), (5.1.2) ve Frenet formüllerinden,

$$D_T T = k_1 V_2 = V(T, T)$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle, $V_2 \in \vartheta(M)$ (normal uzay) dir. Şimdi $d \in \hat{H}$, $\langle V_2, \xi \rangle$ çarpımı sabit olacak şekildeki helis doğrultusu olsun. Öte yandan d nin teğet ve

normal bileşenler cinsinden gösterimini

$$d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.1.3) eşitliğinin her iki tarafını α boyunca V_2 ile iç çarpım yaparsak,

$$\langle V_2, d \rangle = \cos(\theta) \langle V_2, \xi \rangle + \sin(\theta) \langle V_2, T^* \rangle \quad (5.1.4)$$

eşitliğini elde ederiz. α boyunca $\cos(\theta) \langle V_2, \xi \rangle = \text{sabit}$ ve $\langle V_2, T^* \rangle = 0$ ($V_2 \in \vartheta(M)$) olduğundan α boyunca

$$\langle V_2, d \rangle = \text{sabit}$$

bulunur. Buda gösterir ki, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir.

Teorem 5.1.2. M , $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. D , $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Eğer, M manifoldu üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, Tanım 2.2.6 da tanımlanan normal eğrilik fonksiyonu sıfır olan birim hızlı bir eğri ve α boyunca herhangi bir $d \in \hat{H}$ için $\langle V_2, T^* \rangle$ çarpımı bir sabit fonksiyon ise, bu taktirde α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir. Burada, T^* , $d \in \hat{H}$ doğrultusunun teğet bileşeni ve V_2 , α nın $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ Frenet çatısının elemanıdır.

İspat: T , α nın birim teğet vektör alanı olsun. Bu taktirde, Tanım 2.2.3. deki Gauss formülünden,

$$D_T T = \nabla_T T + V(T, T) \quad (5.1.5)$$

dir. Teoreme göre, α nın normal eğriliği $k_T = 0$ (Tanım 2.2.6 ya bakınız) olduğundan

$$V(T, T) = 0 \quad (5.1.6)$$

yazabiliriz. Böylece (5.1.5), (5.1.6) ve Frenet formüllerinden,

$$D_T T = k_1 V_2 = \nabla_T T$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle, $V_2 \in TM$ (teğet uzay) dir. Şimdi $d \in \hat{H}$, $\langle V_2, T^* \rangle$ çarpımı sabit olacak şekildeki helis doğrultusu olsun. Öte yandan d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimini

$$d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \quad (5.1.7)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.1.7) eşitliğinin her iki tarafını α boyunca V_2 ile iç çarpım yaparsak,

$$\langle V_2, d \rangle = \cos(\theta) \langle V_2, \xi \rangle + \sin(\theta) \langle V_2, T^* \rangle \quad (5.1.8)$$

eşitliğini elde ederiz. α boyunca $\sin(\theta) \langle V_2, T^* \rangle = \text{sabit}$ ve $\langle V_2, \xi \rangle = 0$ ($V_2 \in TM$) olduğundan α boyunca

$$\langle V_2, d \rangle = \text{sabit}$$

bulunur. Buda gösterir ki, α eğrisi $\mathbb{R}^n$ de bir V_2 -slant helisdir.

Teorem 5.1.3. M , $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. D , $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Eğer, M manifoldu üzerinde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi, herhangi bir $d \in \hat{H}$ doğrultusunun $N \in \vartheta(M)$ normal bileşenine göre bir eğrilik çizgisi ve α boyunca $N' \in TM$ ise, bu taktirde α boyunca $d \in Sp\{T\}^\perp$. Burada, T , α nın birim teğet vektör alanıdır.

İspat: Kabul edelim ki, α herhangi bir $d \in \hat{H}$ doğrultusunun $N \in \vartheta(M)$ normal bileşenine göre bir eğrilik çizgisi olsun. Bu taktirde, d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimini

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T^*$$

şeklinde yazabiliriz. $\langle N, d \rangle = \text{sabit}$ olduğundan, her iki tarafın α boyunca türevini alırsak, α boyunca $\langle N', d \rangle = 0$ bulunur. Öte yandan, α , $d \in \hat{H}$ doğrultusunun $N \in \vartheta(M)$ normal bileşenine göre bir eğrilik çizgisi olduğundan, α boyunca

$$A^N(T) = \tan(-D_T N) = \tan(-N') = \lambda T$$

bulunur. Bu Teoreme göre, α boyunca $N' \in TM$ olduğundan,

$$\tan(-N') = -N' = \lambda T \quad (5.1.9)$$

elde edilir. Diğer taraftan α boyunca $\langle N', d \rangle = 0$ olmasını ve (5.1.9) eşitliğini kullanarak α boyunca

$$\langle T, d \rangle = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.4. $M, \mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Eğer, M de bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ ve herhangi bir $d \in \hat{H}$ doğrultusunun T^* teğet bileşeni için $\{(T^*)', T\}$ sistemi lineer bağımlı ise, bu taktirde α, M de bir eğrilik çizgisidir. Burada, T, α nın birim teğet vektör alanıdır.

İspat: M bir r -helis alt manifold olduğundan, d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimini

$$d = \cos(\theta)N + \sin(\theta)T^* \quad (5.1.10)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.1.10) eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta)N' + \sin(\theta)(T^*)' \quad (5.1.11)$$

elde ederiz. Açıkça (5.1.11) denkleminde,

$$N' = -\tan(\theta)(T^*)' \quad (5.1.12)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan N' nün teğet bileşeni için, α boyunca

$$A^N(T) = \tan(-D_T N) = \tan(-N') = \tan(\tan(\theta)(T^*)') \quad (5.1.13)$$

yazabiliriz. Bu Teoreme göre $\{(T^*)', T\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan, $(T^*)' = \lambda T$ elde edilir. Böylece (5.1.13) denklemini kullanarak,

$$A^N(T) = \tan(\tan(\theta)(T^*)') = \tan(\tan(\theta)\lambda T)$$

ve burdan

$$A^N(T) = \tan(\tan(\theta)\lambda T) \quad (5.1.14)$$

bulunur. Öte yandan $T \in TM$ olduğundan,

$$\tan(\tan(\theta)\lambda T) = (\tan(\theta)\lambda) T = kT \quad (5.1.15)$$

bulunur. Böylelikle (5.1.14) ve (5.1.15) den,

$$A^N(T) = kT$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle, α eğrisi N ye göre bir eğrilik çizgisidir.

Teorem 5.1.5. $M, \mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) olsun. Kabul edelim ki, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, α boyunca $\xi' \in TM$ olacak şekilde bir $\xi \in \vartheta(M)$ normal vektör alanına göre bir eğrilik çizgisi olsun. Bu taktirde her $d \in \hat{H}$ doğrultusu için, α boyunca $d \notin Sp\{\xi, T\}$ dir. Burada, T, α nın birim teğet vektör alanıdır.

İspat: Kabul edelim ki α boyunca, herhangi bir $d \in \hat{H}$ doğrultusu için $d \in Sp\{\xi, T\}$ olsun. Bu taktirde, α boyunca, d nin teğet ve normal bileşenler cinsinden gösterimini

$$d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T \quad (5.1.16)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.1.16) eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak

$$0 = \cos(\theta)\xi' + \sin(\theta)T' \quad (5.1.17)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\alpha, \xi \in \vartheta(M)$ vektör alanına göre bir eğrilik çizgisi olduğundan, α boyunca

$$A^\xi(T) = \tan(-D_T\xi) = \tan(-\xi') = \lambda T$$

bulunur. Ayrıca, bu Teoreme göre, α boyunca $\xi' \in TM$ olduğundan, α boyunca

$$\tan(-\xi') = -\xi' = \lambda T \quad (5.1.18)$$

elde edilir. (5.1.17) ve (5.1.18) denklemlerini kullanarak, $\{T', T\}$ sisteminin lineer bağımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Ama, hiç bir zaman $\{T', T\}$ sistemi lineer bağımlı olamayacağından bu bir çelişkidir. Buda ispatı tamamlar.

Yukarıdaki Teorem 5.1.5. aşağıdaki sonuca sahiptir.

Sonuç 5.1.1. Herhangi bir $d \in \hat{H}$ doğrultusu için, α boyunca $d \in Sp\{\xi, T\}$ ve $\xi' \in TM$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, α eğrisi $\xi \in \vartheta(M)$ vektör alanına göre bir eğrilik çizgisi olamaz.

5.2 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlarda Teğet ve Normal Bileşenler

Bu alt bölümde, kısa olarak, r -helis alt manifoldların teğet ve normal bileşenleri arasındaki önemli bir bağıntı verilmiştir.

Teorem 5.2.1. $M, \mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Ve α eğrisinin de M üzerinde T teğet vektör alanlı birim hızlı bir eğri olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, ξ, T doğrultusunda paralel normaldir gerek ve yeter şart α eğrisi boyunca $(T^*)' \in TM$ dir.

İspat: İlk olarak ξ, T doğrultusunda paralel normal olsun. T ve $T^* \in TM$ olduğun-

dan, Tanım 2.2.3. deki Gauss formülünden,

$$D_T T^* = \nabla_T T^* + V(T, T^*) \quad (5.2.1)$$

dir. Diğer taraftan, ξ , T doğrultusunda paralel normal olduğundan $\nabla_T^\perp \xi = 0$ dir. Ve hatırlatma 2.3.1. deki sistemin ikinci denkleminde,

$$V(T, T^*) = 0 \quad (5.2.2)$$

bulunur. Böylelikle, (5.2.1), (5.2.2) ve Frenet denklemlerinden, α boyunca

$$D_T T^* = (T^*)' = \nabla_T T^*$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle α boyunca $(T^*)' \in TM$ elde edilir.

Tersine olarak, α eğrisi boyunca $(T^*)' \in TM$ olsun. Bu taktirde, Gauss formülünden, $V(T, T^*) = 0$ dır. Böylece, hatırlatma 2.3.1. deki sistemin ikinci denkleminde, $\nabla_T^\perp \xi = 0$ bulunur. Yani, ξ , T doğrultusunda paralel normaldir. Bu da ispatı tamamlar.

5.3 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve İntegral Eğrileri

Bu alt bölümde, r -helis alt manifoldların doğrultularının integral eğrileri incelenmiştir.

Teorem 5.3.1. M , $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. D , $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Bu taktirde, herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, T^* ın birim $\alpha_j(s)$ integral eğrilerinin normal eğriliği $|k_j|$ ye eşittir. Burada, k_j , $\alpha_j(s)$ integral eğrilerinin birinci eğriliklerini göstermektedir.

İspat: $T^* \in TM$ nin integral eğrileri $\alpha_j(s)$ ler olduğundan, α_j ler boyunca

$$\frac{d\alpha_j}{ds} = T^*$$

yazabiliriz. Öte yandan $T^* \in TM$ olduğundan, Gauss denkleminde,

$$D_{T^*}T^* = \nabla_{T^*}T^* + V(T^*, T^*) \quad (5.3.1)$$

bulunur. Ve Önerme 2.3.1. den, T^* ın integral eğrileri M de geodezikler olduğundan, α_j ler boyunca

$$\nabla_{T^*}T^* = 0 \quad (5.3.2)$$

elde edilir. Böylelikle (5.3.1), (5.3.2) ve Frenet formüllerinden, α_j ler boyunca

$$\begin{aligned} D_{T^*}T^* &= (T^*)' \\ &= k_j V_{2_j} \quad (V_{2_j} : \alpha_j \text{ lerin birim asli normalı}) \\ &= V(T^*, T^*) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, α_j ler boyunca, $\|V(T^*, T^*)\| = \|k_j V_{2_j}\| = |k_j|$ bulunur.

Lemma 5.3.1. $M, \mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Eğer, α_j eğrileri M üzerinde, herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, T^* ın birim hızlı integral eğrileri ise, bu taktirde $V_{2_j} \in \vartheta(M)$ dir. Burada V_{2_j} ler α_j eğrilerinin birim asli normalleridir.

İspat: $T^* \in TM$ olduğundan, Gauss denkleminde,

$$D_{T^*}T^* = \nabla_{T^*}T^* + V(T^*, T^*) \quad (5.3.3)$$

yazabiliriz. Önerme 2.3.1 den, T^* ın integral eğrileri M de geodezikler olduğundan,

α_j ler boyunca

$$\nabla_{T^*} T^* = 0 \quad (5.3.4)$$

Böylece, (5.3.3), (5.3.4) ve Frenet denklemlerinden,

$$D_{T^*} T^* = k_j V_{2_j} = V(T^*, T^*) \quad (k_j : \alpha_j \text{ lerin birinci eğriliği})$$

dir. Bu da, α boyunca $V_{2_j} \in \vartheta(M)$ olduğunu gösterir.

5.4 $\mathbb{R}^n$ de r -Helis Alt Manifoldlar ve Asimptotiklik

Bu alt bölümde, bir Riemann manifoldunda, bir teğet vektör alanının ve bir eğrinin bir normal doğrultuda asimptotik olması tanımlanmıştır. Ve bu kavramlar r -helis alt manifoldlarda incelenmiştir.

Tanım 5.4.1. $M, \mathbb{R}^n$ nin Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve A^ξ de $\xi \in \vartheta(M)$ doğrultusundaki şekil operatörü olsun. Bir $X \in TM$ vektör alanı için, eğer $\langle A^\xi(X), X \rangle = 0$ ise, bu taktirde X, ξ doğrultusunda asimptotik olarak adlandırılacak.

Tanım 5.4.2. $M, \mathbb{R}^n$ nin Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve α eğrisi, M de T teğetli birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\langle A^\xi(T), T \rangle = 0$ ise, bu taktirde α eğrisi $\xi \in \vartheta(M)$ doğrultusunda bir asimptotik eğri olarak adlandırılır.

Teorem 5.4.1. $M, \mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. $D, \mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, T^*, M de paralel (her $X \in TM$ için $\nabla_X T^* = 0$) ise, bu taktirde her $X \in TM, \xi$ doğrultusunda asimptotiktir. Tersine olarak, her $X \in TM, \xi$ doğrultusunda asimptotik ise, T^*, M de paraleldir.

İspat: Kabul edelim ki T^*, M de paralel olsun. Yani, her $X \in TM$ için $\nabla_X T^* = 0$

olsun. Hatırlatma 2.3.1. deki birinci denklemden, her $X \in TM$ için $A^\xi(X) = 0$ olması sonucu çıkar. Bu gerçekten dolayı, her $X \in TM$ için $\langle A^\xi(X), X \rangle = 0$ elde edilir. Yani, Tanım 5.4.1. gereği, her $X \in TM$, ξ doğrultusunda asimptotiktir.

Tersine olarak, kabul edelim ki her $X \in TM$, ξ doğrultusunda asimptotik olsun. Bu taktirde $\langle A^\xi(X), X \rangle = 0$ dır. Ayrıca, Hatırlatma 2.3.1. deki birinci denklemi kullanarak, her $X \in TM$ için, $\langle \nabla_X T^*, X \rangle = 0$ bulunur. Bir başka ifadeyle, her $X \in TM$ için $\nabla_X T^* = 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4.2. M , $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann r -helis alt manifold ve $\hat{H} \subset \mathbb{R}^n$ de helis doğrultularının alt uzayı olsun. Ayrıca D , $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Riemann konneksiyonu (standart kovaryant türev) olsun. Herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi T^* ın birim hızlı bir integral eğrisi ise, bu taktirde α eğrisi ξ doğrultusunda asimptotiktir.

İspat: Herhangi bir $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^* \in \hat{H}$ doğrultusu için, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi T^* ın birim hızlı bir integral eğrisi olsun. $d = \cos(\theta)\xi + \sin(\theta)T^*$ eşitliğinin her iki tarafının α boyunca türevini alırsak,

$$0 = \cos(\theta) (\xi)' + \sin(\theta) (T^*)' \quad (5.4.1)$$

elde ederiz. $T^* = \frac{d\alpha}{ds}$ olup, (5.4.1) denklemini ve Frenet formüllerini kullanarak, α boyunca

$$0 = \cos(\theta) (\xi)' + (\sin(\theta))' V_2 \quad (5.4.2)$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 5.3.1. e göre, α boyunca $V_2 \in \vartheta(M)$ olduğundan, (5.4.2) den α boyunca $(\xi)' \in \vartheta(M)$ sonucu çıkar. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} A^\xi(T^*) &= \tan(-D_{T^*}\xi) \\ &= \tan(-\xi') \end{aligned}$$

bulunur ki, $(\xi)' \in \vartheta(M)$ olduğundan, $A^\xi(T^*) = 0$ bulunur. Sonuç olarak, $\langle A^\xi(T^*), T^* \rangle =$

0 olup, α eğrisi ξ doğrultusunda asimptotiktir.

5.5 $\mathbb{R}^n$ de Helis Alt Manifoldlarda Çizgili Helis ve Helis Çizgileri

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ deki helis alt manifoldlarda, çizgili helisler ile helis çizgileri arasındaki bir özel bağıntı verilmiş ve hiperyüzey durumunda önemli bir sonuç verilmiştir.

Teorem 5.5.1. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir $d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$ doğrultusuna göre helis olan bir full ($\mathbb{R}^n$ nin bir hiper düzlemi tarafından kapsanmayacak) alt manifold ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. Bu taktirde, M bir çizgili helisdir gerek ve yeter şart d ye göre M nin helis çizgilerinin normal eğriliği sıfıra eşittir.

İspat: M bir çizgili helis olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, Teorem 2.3.2. den dolayı $\nabla_T^\perp \xi = 0$ yazabiliriz. Böylece, hatırlatma 2.3.1. deki sistemin ikinci denkleminde, $T = \frac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere, α helis çizgisi boyunca $V(T, T) = 0$ (M full veya $\theta \neq \frac{\pi}{2}$) elde edilir. Bu da, M nin helis çizgilerinin normal eğriliğinin sıfıra eşit olduğunu gösterir.

Tersine olarak, d ye göre M nin helis çizgilerinin normal eğriliği sıfıra eşit olsun. Bir başka ifadeyle $T = \frac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere, α helis çizgisi boyunca $V(T, T) = 0$ dır. Böylelikle, hatırlatma 2.3.1. deki sistemin ikinci denkleminde $\nabla_T^\perp \xi = 0$ elde edilir ki, Teorem 2.3.2. den dolayı M bir çizgili helisdir.

Yukarıdaki Teorem aşağıdaki sonuca sahiptir.

Sonuç 5.5.1. Teorem 5.5.1. de, özel olarak, $M \subset \mathbb{R}^n$ bir hiperyüzey olsun. Bu taktirde, M nin helis çizgileri $\mathbb{R}^n$ nin düz doğruları (Di Scala ve Ruiz-Hernández 2009 daki Lemma 2.5 e bak) olduğundan, M her zaman bir çizgili helisdir. Sonuç olarak, d ye göre M nin helis çizgilerinin normal eğriliği her zaman sıfıra eşittir.

6. f -EİKONAL HELİS ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde genel olarak ilk kez, f -eikonal helis alt manifold ve f -eikonal helis eğrisi kavramları verilmiştir.

6.1 f -Eikonal Helis Eğrileri ve Helis Alt Manifoldlar

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}^n$ de bir Riemann alt manifoldunun f -eikonal helis alt manifold olması ve bir Riemann alt manifold üzerindeki bir eğrinin f -eikonal helis eğrisi olması tanımları verilmiştir. Daha sonra, f -eikonal helis eğrilerinin geodezik eğrilerle, genel helislerle ve f -eikonal helis alt manifoldlarla olan bağlantıları verilmiştir.

Tanım 6.1.1. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir birim $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultusuna göre bir Riemann helis alt manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir eikonal fonksiyon olsun. Eğer her bir $q \in M$ için, ∇f ve d arasındaki açı sabit ise, bu taktirde M nin bir f -eikonal helis alt manifold olduğunu söyleriz.

Belirtelim ki bu tanım için $\|\nabla f\| = \text{sabit}$ ve d birim olduğundan, ∇f ve d arasındaki açının sabit olması, $\langle \nabla f, d \rangle$ çarpımının sabit olmasına denktir.

Örnek 6.1.1. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir birim $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultusuna göre bir Riemann helis alt manifold olsun. Kabul edelim ki, bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir eikonal fonksiyonu için d nin teğet bileşeni ∇f e eşit olsun. Bu taktirde, bir helis alt manifoldda d ile teğet bileşen arasındaki açı sabit olduğundan, $\langle \nabla f, d \rangle$ çarpımı M boyunca sabittir. Yani, ∇f ve d arasındaki açı sabittir. Sonuç olarak, M bir f -eikonal helis alt manifolddur.

Tanım 6.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir Riemann alt manifold ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim T teğetli bir eğri olsun. Bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da α boyunca eikonal (α boyunca $\|\nabla f\| = \text{sabit}$) olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, α boyunca ∇f ve T arasındaki açı sabit ise, α nın bir f -eikonal helis eğrisi olduğunu söyleriz. Ve ∇f , α nın eksenini olarak adlandırılacak.

Örnek 6.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir Riemann alt manifold ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim T teğetli bir eğri olsun. Ayrıca $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, α boyunca bir eikonal fonksiyon olsun. Eğer ∇f , α nın teğeti olan T ye eşit ise, bu taktirde $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \text{sabit}$ olacağından, α bir f -eikonal helis eğrisidir.

Örnek 6.1.3. $M = \mathbb{R}^3$ Riemann manifoldunu göz önüne alalım. M üzerinde,

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$$

fonksiyonu tanımlanmış olsun. Bu taktirde, M üzerinde

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde tanımlı α eğrisi bir f -eikonal helis eğrisidir.

İlk olarak, f in α boyunca eikonal olduğunu göstereceğiz. Bunun için ∇f i hesaplırsak,

$$\nabla f = (2x, 2y, 1)$$

olarak bulunur. Böylelikle,

$$\|\nabla f\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$$

şeklinde elde edilir. Eğer α boyunca ∇f in normunu hesaplırsak,

$$\|\nabla f\|_{\alpha} = \sqrt{5} = \text{sabit}$$

bulunur. Yani, f , α boyunca bir eikonal fonksiyondur.

Şimdi, α eğrisi boyunca, ∇f ile T (α nın birim teğeti) arasındaki açının sabit

olduğunu göstereceğiz. Bunun için, α boyunca

$$\nabla f|_{\alpha} = (2 \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 2 \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 1)$$

ve α nın teğeti

$$T = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

olduğundan

$$\langle \nabla f|_{\alpha}, T \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\theta)$$

elde edilir. Burada, θ , ∇f ile T arasındaki açıdır. Sonuç olarak, α , M üzerinde bir f -eikonal helis eğrisidir.

Örnek 6.1.4. $M = \mathbb{R}^n$ Riemann manifoldunu gözönüne alalım. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve c sabitler olmak üzere, M üzerinde tanımlı

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu taktirde, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ eksenli bütün genel helisler f -eikonal helislerdir.

α , $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ eksenli herhangi bir genel helis olsun. Bu taktirde, α nın birim teğeti ile X arasındaki açı, α boyunca sabittir. Öte yandan, $\nabla f = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olduğundan, $X = \nabla f$ eşitliğine sahibiz. Böylelikle kolayca söyleyebiliriz ki, ∇f ile α nın birim teğeti arasındaki açı α boyunca sabittir. Ayrıca $\|\nabla f\| = \text{sabittir}$. Sonuç olarak, α , bir f -eikonal helisdir. α keyfi olduğundan, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ eksenli bütün genel helisler f -eikonal helislerdir.

Teorem 6.1.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir Riemann alt manifold ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim T teğetli bir eğri olsun. Bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da α boyunca eikonal olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, α bir f -eikonal helis eğrisidir gerek ve yeter

şart f fonksiyonu α eğrisi boyunca lineerdir.

İspat: İlk olarak, α nın bir f -eikonal helis eğrisi olduğunu kabul edelim. f , α boyunca bir eikonal fonksiyon olduğundan, $\|\nabla f\|_{\alpha} = \text{sabittir}$. Öte yandan, her bir $X \in TM$ için, $X[f] = \langle \nabla f, X \rangle$ olduğunu biliyoruz (Tanım 2.2.8. e bak). Özel olarak, $X = T$ için,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f|_{\alpha}, T \rangle &= T[f] \\ &= \frac{d}{ds} (f \circ \alpha) . \end{aligned}$$

Ve, $\|\nabla f\|_{\alpha} = \text{sabit}$ ve α eğrisi f -eikonal olduğundan, $\langle \nabla f|_{\alpha}, T \rangle = \text{sabittir}$. Böylece,

$$\frac{d}{ds} (f \circ \alpha) = \text{sabit}$$

eşitliği elde edilir. Bir başka ifadeyle, f fonksiyonu α eğrisi boyunca lineerdir.

Tersine olarak, f fonksiyonunun α eğrisi boyunca lineer olduğunu kabul edelim. Açıkça,

$$\frac{d}{ds} (f \circ \alpha) = \text{sabit}$$

eşitliği vardır. Böylelikle,

$$\langle \nabla f|_{\alpha}, T \rangle = \text{sabit}$$

eşitliği elde edilir. Ve, $\|\nabla f\|_{\alpha} = \text{sabit}$ ve T birim olduğundan, ∇f ve T arasındaki açı, α boyunca sabittir. Yani, α bir f -eikonal helis eğrisidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$, tam bağlantılı C^{∞} sınıfından sınırsız bir Riemann alt manifold ve $M, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Ayrıca, kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sabit olmayan bir afin fonksiyon olsun (Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız). Bu takdirde, M deki bütün geodezik eğriler f -eikonal helis eğrileridir.

İspat: $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir afin fonksiyon olduğundan, her bir birim geodezik $\alpha :$

$(-\infty, \infty) \rightarrow M$ eğrileri ve bütün $s \in (-\infty, \infty)$ için,

$$f(\alpha(s)) = as + b$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sabitleri vardır (Innami 1982, Hitzelberger ve Lytchak 2007).Öte yandan, her bir $X \in TM$ için, $X[f] = \langle \nabla f, X \rangle$ olduğunu biliyoruz (Tanım 2.2.8. e bak).Özel olarak, $X = T$ (T : α nın birim teğeti) için,

$$T[f] = \langle \nabla f, T \rangle$$

$$\frac{d\alpha}{ds}[f] = \langle \nabla f, T \rangle$$

ve böylece,

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = \langle \nabla f, T \rangle. \quad (6.1.1)$$

Ayrıca, $f(\alpha(s)) = as + b$ olduğundan, $\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = \text{sabittir}$. Böylece, (6.1.1) den α boyunca

$$\langle \nabla f, T \rangle = \text{sabit}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 2.3 den (Sakai 1996) $\|\nabla f\| = \text{sabittir}$. Sonuç olarak, M deki bütün geodezik eğriler f -eikonal helis eğrileridir.

Örnek 6.1.5. Teorem 6.1.2. de, M yi $S^1 \times \mathbb{R}$ silindirik yüzeyi alalım. Ve, f fonksiyonunu

$$f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \rightarrow f(x, t) = t$$

şeklinde alalım. Bu taktirde,

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(c \frac{s}{\sqrt{c^2 + a^2}} + d\right), \sin\left(c \frac{s}{\sqrt{c^2 + a^2}} + d\right), a \frac{s}{\sqrt{c^2 + a^2}} + b \right)$$

formundaki eğriler f -eikonal helislerdir ($c^2 + a^2 \neq 0$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Çünkü, M deki bütün geodezik eğriler, birim T teğetli α eğrileridir.

Gerçekten, $f(\alpha(s)) = a \frac{s}{\sqrt{c^2 + a^2}} + b$ ve $\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = \text{sabittir}$. Böylece, $\langle \nabla f, T \rangle = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = \text{sabittir}$. Öte yandan, f afin olduğundan $\|\nabla f\| = \text{sabittir}$. Sonuç olarak, $\|\nabla f\| = \text{sabit}$, $\|T\| = 1$ ve $\langle \nabla f, T \rangle = \text{sabit}$ olduğundan, ∇f ile T arasındaki açı α boyunca sabittir. Bir başka ifadeyle, α eğrileri f -eikonal helis eğrileridir.

Teorem 6.1.3. $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir alt manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir eikonal fonksiyon olsun. Ayrıca, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M üzerinde birim T teğetli bir eğri olsun. Bu takdirde, α bir f -eikonal helis eğrisidir ancak ve ancak

$$\beta(s) = \phi(\alpha(s)) = (i(\alpha(s)), f(\alpha(s))) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

eğrisi $d = (0, 1)$ eksenli bir genel helisdir. Burada, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dönüşümü $\phi(p) = (i(p), f(p))$ ile verilir. Ve, $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü $i(p) = p$ ($p \in M$) ile verilir.

İspat: $\beta(s) = (i(\alpha(s)), f(\alpha(s))) = (\alpha(s), f(\alpha(s)))$ eğrisini gözönüne alalım. Bu takdirde, β nın teğeti,

$$\beta'(s) = \left(T, \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \right). \quad (6.1.2)$$

Öte yandan, her bir $X \in TM$ için, $X[f] = \langle \nabla f, X \rangle$ olduğunu biliyoruz (Tanım 2.2.8. e bak). Özel olarak, $X = T$ (T : α nın birim teğeti) için,

$$T[f] = \langle \nabla f, T \rangle$$

$$\frac{d\alpha}{ds}[f] = \langle \nabla f, T \rangle$$

ve böylece

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = \langle \nabla f, T \rangle$$

eşitliğine sahibiz. Ve, (6.1.2) eşitliğinde kullanarak,

$$\beta'(s) = (T, \langle \nabla f, T \rangle) \quad (6.1.3)$$

elde edilir. Şimdi, (6.1.3) ün her iki tarafını d ile iç çarpım yaparsak,

$$\langle \beta'(s), d \rangle = \langle \nabla f, T \rangle \quad (6.1.4)$$

bulunur. Böylelikle, (6.1.4) ten

$$\|\beta'(s)\| \cdot \cos(\theta) = \langle \nabla f, T \rangle$$

yazabiliriz. Burada θ , d ile $\beta'(s)$ arasındaki açıdır. Bu son eşitlikte,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \nabla f, T \rangle}{\sqrt{1 + \langle \nabla f, T \rangle^2}} \quad (6.1.5)$$

olmasını gerektirir.

Eğer α eğrisi f -eikonal ise, yani $\langle \nabla f, T \rangle = \text{sabit}$, bu taktirde (6.1.5) den kolaylıkla görülebilir ki, $\cos(\theta) = \text{sabittir}$. Yani, β eğrisi $d = (0, 1)$ eksenli bir genel helisdir. Tersine olarak, β eğrisi $d = (0, 1)$ eksenli bir genel helis, yani $\cos(\theta) = \text{sabit}$ olsun. Böylece, (6.1.5) i kullanarak

$$\langle \nabla f, T \rangle^2 = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \text{sabit} \quad (\theta \neq 0) \quad (6.1.6)$$

yazabiliriz. Ve böylelikle, (6.1.6) dan $\langle \nabla f, T \rangle = \text{sabit}$ sonucuna ulaşılır. Bir başka ifadeyle, α bir f -eikonal helis eğrisidir.

Teorem 6.1.4. $M \subset \mathbb{R}^n$ bir f -eikonal helis alt manifold olsun. Bu taktirde, M nin helis çizgileri f -eikonal helis eğrileridir.

İspat: Hatırlatalım ki, d yi teğet ve normal bileşenler cinsinden

$$d = \cos(\theta)T + \sin(\theta)\xi$$

şeklinde yazabiliriz. α , M nin herhangi bir birim hızlı helis çizgisi olsun. Yani, $\frac{d\alpha}{ds} = T$

dir. Böylelikle, M nin helis çizgileri boyunca, d nin her iki tarafını ∇f ile iç çarpım yaparsak

$$\langle \nabla f, d \rangle = \cos(\theta) \left\langle \nabla f, \frac{d\alpha}{ds} \right\rangle + \sin(\theta) \langle \nabla f, \xi \rangle$$

elde edilir. M nin f -eikonal helis alt manifold olması gerçeğinden, M nin helis çizgileri boyunca $\langle \nabla f, d \rangle = \text{sabittir}$. Öte yandan, $\nabla f \in TM$ olduğundan $\langle \nabla f, \xi \rangle = 0$ dır. Böylece, M nin helis çizgileri boyunca $\left\langle \nabla f, \frac{d\alpha}{ds} \right\rangle$ çarpımı sabittir. Bu da gerektirir ki, M nin helis çizgileri f -eikonal helis eğrileridir.

6.2. f -Eikonal Helis Eğrilerinin Ekseni ve Helis Alt Manifoldlar

Bu alt bölümde, 3-boyutlu Riemann manifoldlarda, f -eikonal helis eğrisinin ekseni ve f -eikonal helis eğrileri için karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, f -eikonal helis eğrilerinin genel helislerle ve Riemann helis alt manifoldlarla bağlantıları verilmiştir.

Teorem 6.2.1. $M \subset \mathbb{R}^4$ bir 3-boyutlu Riemann manifold ve M , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda M , $N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana teoreme bakınız) ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir f -eikonal helis eğrisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) α nın ekseni:

$$\nabla f = \|\nabla f\| (\cos(\theta)T + \sin(\theta)B).$$

(2) $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ (κ ve τ Tanım 2.2.7. de tanımlandı).

İspat: (1): α eğrisi f -eikonal helis eğrisi olduğundan,

$$\langle \nabla f, T \rangle = \text{sabit.} \quad (6.2.1)$$

yazabiliriz. M üzerinde T doğrultusunda (6.2.1) in her iki tarafının türevini alırsak

$$\langle \nabla_T \nabla f, T \rangle + \langle \nabla f, \nabla_T T \rangle = 0. \quad (6.2.2)$$

bulunur. Diğer taraftan, Lemma 2.3 den (Sakai 1996) ∇f , M de paralel, yani keyfi $X \in TM$ için $\nabla_X \nabla f = 0$ dır. Böylece, $X = T$ için $\nabla_T \nabla f = 0$ elde edilir. Bu taktirde, (6.2.2) eşitliğini ve Frenet formüllerini kullanarak,

$$\kappa \langle \nabla f, N \rangle = 0. \quad (6.2.3)$$

bulunur. κ pozitif olduğundan, (6.2.3) eşitliği $\langle \nabla f, N \rangle = 0$ olmasını gerektirir. Böylelikle, α nın eksenini

$$\nabla f = \lambda_1 T + \lambda_2 B \quad (6.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. (6.2.4) ün her iki tarafını T ile iç çarpım yaparsak,

$$\langle \nabla f, T \rangle = \lambda_1 = \|\nabla f\| \cos(\theta) \quad (6.2.5)$$

elde edilir. Burada θ , ∇f ile T arasındaki açıdır. Ve, $\|\nabla f\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ olduğundan, (6.2.5) kullanılarak

$$\lambda_2 = \|\nabla f\| \sin(\theta)$$

bulunur. Sonuç olarak α nın eksenini

$$\nabla f = \|\nabla f\| (\cos(\theta)T + \sin(\theta)B)$$

olarak elde edilmiş olunur.

(2): (1) in ispatından,

$$\langle \nabla f, N \rangle = 0 \quad (6.2.6)$$

olduğunu biliyoruz. M üzerinde T doğrultusunda (6.2.6) nın her iki tarafının türevini alırsak

$$\langle \nabla_T \nabla f, N \rangle + \langle \nabla f, \nabla_T N \rangle = 0 \quad (6.2.7)$$

elde edilir. Ve, (1) in ispatından $\nabla_T \nabla f = 0$ dır. Böylelikle, (6.2.7) den

$$\langle \nabla f, \nabla_T N \rangle = 0 \quad (6.2.8)$$

yazılabilir. Frenet formüllerini kullanarak (6.2.8) eşitliğinden

$$-\kappa \langle \nabla f, T \rangle + \tau \langle \nabla f, B \rangle = 0 \quad (6.2.9)$$

bulunur. Öte yandan, (6.2.4) ten $\langle \nabla f, T \rangle = \lambda_1$ ve $\langle \nabla f, B \rangle = \lambda_2$ yazabiliriz. (1) in ispatından $\lambda_1 = \|\nabla f\| \cos(\theta)$ ve $\lambda_2 = \|\nabla f\| \sin(\theta)$ olduğundan,

$$\langle \nabla f, T \rangle = \|\nabla f\| \cos(\theta) \text{ and } \langle \nabla f, B \rangle = \|\nabla f\| \sin(\theta) \quad (6.2.10)$$

elde edilir. Böylece, (6.2.9) ve (6.2.10) daki eşitlikler kullanılarak,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot(\theta) = \text{sabit}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki Teorem 6.2.1. aşağıdaki sonucılara sahiptir.

Sonuç 6.2.1. $M \subset \mathbb{R}^4$ bir 3-boyutlu Riemann f -eikonal helis alt manifold ve M , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda $M, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana teoreme bakınız) olsun. Bu taktirde, $\frac{\tau}{\kappa}$ ifadesi M nin helis çizgileri boyunca sabittir.

İspat: Teorem 6.1.4 ve Teorem 6.2.1 den açıktır.

Sonuç 6.2.2 $M \subset \mathbb{R}^4$ bir 3-boyutlu Riemann f -eikonal helis alt manifold ve M , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda $M, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon

(Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız) olsun. Bu taktirde, M nin helis çizgileri boyunca

$$\nabla f = \|\nabla f\| (\cos(\theta)T + \sin(\theta)B).$$

dir. Yani helis çizgisinin eksenidir.

İspat: Teorem 6.1.4 ve Teorem 6.2.1 den açıktır.

Lemma 6.2.1. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir birim $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultusuna göre Riemann helis alt manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M üzerinde birim T teğetli bir eğri olsun. Bu taktirde, d nin ξ normal bileşeni, T doğrultusunda paralel normaldir ancak ve ancak α boyunca $(\nabla f)' \in TM$ dir. Burada, ∇f , d nin birim teğet bileşenidir.

İspat: Kabul edelim ki, d nin ξ normal bileşeni, T doğrultusunda paralel normal olsun. T ve $\nabla f \in TM$ olduğundan, Tanım 2.2.3. deki Gauss denkleminden

$$D_T \nabla f = \nabla_T \nabla f + V(T, \nabla f) \quad (6.2.11)$$

dir. Öte yandan, d nin ξ normal bileşeni, T doğrultusunda paralel normal, yani $\nabla_T^\perp \xi = 0$ olduğundan, Hatırlatma 2.3.1. deki ikinci eşitlikten,

$$V(T, \nabla f) = 0 \quad (6.2.12)$$

dır. Böylece, (6.2.11), (6.2.12) eşitliklerinden ve Frenet formüllerinden,

$$D_T \nabla f = \frac{d\nabla f}{ds} = (\nabla f)' = \nabla_T \nabla f$$

yazabiliriz. Yani, α boyunca $(\nabla f)' \in TM$ dir.

Tersine olarak, kabul edelim ki α boyunca $(\nabla f)' \in TM$ olsun. Bu taktirde, Gauss denkleminden $V(T, \nabla f) = 0$ dır. Böylece, Hatırlatma 2.3.1. deki ikinci eşitlikten $\nabla_T^\perp \xi = 0$ elde edilir. Bir başka ifadeyle, d nin ξ normal bileşeni, T doğrultusunda

paralel normaldir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 6.2.2. Sabit ∇f eksenli bütün f -eikonal helis eğrileri genel helislerdir.

İspat: Bütün f -eikonal helis eğrileri için, bu eğrilerin teğet vektör alanları T ve ∇f arasındaki açının, bu eğriler boyunca sabit olduğunu biliyoruz. Ayrıca, bu Lemma dan, ∇f sabittir. Bir başka ifadeyle, bu eğrilerin teğet vektör alanları, sabit ∇f eksenleriyle sabit açı yapar. Bu da, sabit ∇f eksenli bütün f -eikonal helis eğrilerinin genel helisler olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.2.2. $M \subset \mathbb{R}^n$, bir birim $d \in \mathbb{R}^n$ doğrultulu, tam bağlantılı C^∞ sınıfından bir Riemann helis alt manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir afin fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, M üzerinde birim T teğetli bir f -eikonal helis eğrisi olsun. Bu taktirde, d nin ξ normal bileşeni, T doğrultusunda paralel normal ise, α eğrisi bir genel helisdir.. Burada ∇f , d nin birim teğet bileşenidir.

İspat: T ve $\nabla f \in TM$ olduğundan, Tanım 2.2.3. deki Gauss denkleminde

$$D_T \nabla f = \nabla_T \nabla f + V(T, \nabla f) \quad (6.2.13)$$

yazabiliriz. f afin olduğundan ∇f , M de paralel yani keyfi $X \in TM$ için $\nabla_X \nabla f = 0$ (Sakai 1996 daki Lemma 2.3 e bak) dır. Özel olarak $X = T$ için $\nabla_T \nabla f = 0$ dır. Diğer taraftan, Lemma 6.2.1 e göre, $(\nabla f)' \in TM$. Böylelikle, (6.2.13) denkleminde $V(T, \nabla f) = 0$ dır. Ve, (6.2.13) dan, α boyunca

$$D_T \nabla f = \frac{d\nabla f}{ds} = (\nabla f)' = 0$$

elde edilir. Yani, α nın ∇f eksenli sabittir. Böylece, yukarıdaki Lemma 6.2.2 den, α eğrisinin bir genel helis olması sonucu çıkar. Bu da ispatı tamamlar.

6.3 f -Eikonal Helis Alt Manifoldlar ve Harmonik Eğrilik Fonksiyonları

Bu alt bölümde, n -boyutlu Riemann manifoldlarda, f -eikonal helis eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları ile Frenet çatısı arasında bir bağıntı ve bu eğrinin eksenini verilmiştir. Ayrıca, f -eikonal helis alt manifoldlarla ilgili önemli sonuçlar verilmiştir.

Tanım 6.3.1. $\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$ eğrisi, n -boyutlu bir Riemann manifoldu M^n de bir Frenet eğrisi ve $k_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) fonksiyonları α nın eğrilikleri olsun. α eğrisinin harmonik eğrilikleri, M^n üzerinde α boyunca $H_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$) fonksiyonlarıyla tanımlanır. Bu fonksiyonlar,

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad H_i = \{V_1[H_{i-1}] + k_i H_{i-2}\} \frac{1}{k_{i+1}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $i = 2, \dots, n-2$ ve V_1 de α nın birim teğet vektör alanıdır.

Tanım 6.3.2. $M^n, \langle, \rangle$ metriğiyle tanımlı n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\alpha(s)$, birim teğet vektör alanı V_1 olan M^n de bir Frenet eğrisi olsun. $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu α boyunca eikonal bir fonksiyon, yani α boyunca $\|\nabla f\| = \text{sabit}$ olsun. Eğer, α boyunca $\langle \nabla f, V_1 \rangle$ fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit ise, bu taktirde α eğrisi bir f -eikonal helis eğrisi olarak adlandırılır. Ve, ∇f de bu eğrinin eksenini olarak adlandırılır.

Teorem 6.3.1. $M^n, \langle, \rangle$ metriğiyle tanımlı n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M^n , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda $M^n, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız) ve $\alpha(s)$, M^n de bir Frenet eğrisi olsun. Eğer, α eğrisi ∇f eksenli bir f -eikonal helis eğrisi ise, bu taktirde

$$\langle V_{i+2}, \nabla f \rangle = H_i \langle V_1, \nabla f \rangle, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (6.3.1)$$

sistemi sağlanır. Burada, $\{V_1, \dots, V_n\}$ ve $\{H_1, \dots, H_{n-2}\}$, sırasıyla α nın Frenet çatısı

ve harmonik eğrileridir.

İspat: $\{V_1, \dots, V_n\}$, M^n de α eğrisinin ortonormal çatısı olduğundan, ∇f vektör alanı

$$\nabla f = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n. \quad (6.3.2)$$

şeklinde belirtilebilir. (6.3.2) nin her iki tarafını V_1 ile iç çarpım yaparak ve α nın bir f -eikonal helis eğrisi olduğunu dikkate alarak

$$\langle \nabla f, V_1 \rangle = \lambda_1 = \|\nabla f\| \cos(\theta) = \text{sabit} \quad (6.3.3)$$

elde edilir. (6.3.3) ün her iki tarafının M^n de V_1 doğrultusunda türevini alırsak,

$$\langle \nabla_{V_1} \nabla f, V_1 \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{V_1} V_1 \rangle = 0. \quad (6.3.4)$$

eşitliğine sahibiz. Öte yandan, Lemma 2.3 den (Sakai 1996), ∇f vektör alanı M^n de paraleldir. Yani, $\nabla_{V_1} \nabla f = 0$ dir. Böylece, (6.3.4) ve Frenet formülleri yardımıyla,

$$k_1 \langle \nabla f, V_2 \rangle = 0. \quad (6.3.5)$$

eşitliği elde edilir. Ve, k_1 pozitif bir fonksiyon olduğundan, (6.3.5) den,

$$\langle \nabla f, V_2 \rangle = 0. \quad (6.3.6)$$

bulunur. (6.3.6) ün her iki tarafının M^n de V_1 doğrultusunda türevini alırsak,

$$\langle \nabla_{V_1} \nabla f, V_2 \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{V_1} V_2 \rangle = 0. \quad (6.3.7)$$

eşitliğini yazarız. Ve, $\nabla_{V_1} \nabla f = 0$ olduğundan, (6.3.7) ve Frenet formüllerini kullanarak,

$$-k_1 \langle \nabla f, V_1 \rangle + k_2 \langle \nabla f, V_3 \rangle = 0. \quad (6.3.8)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, (6.3.8) den

$$\langle \nabla f, V_3 \rangle = \lambda_3 = \frac{k_1}{k_2} \langle \nabla f, V_1 \rangle. \quad (6.3.9)$$

yazabiliriz. Ayrıca, $H_1 = \frac{k_1}{k_2}$ olduğundan, (6.3.9) dan

$$\langle \nabla f, V_3 \rangle = H_1 \langle \nabla f, V_1 \rangle.$$

yazarız. Bu son eşitlikte, $i = 1$ için (6.3.1) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Tümevarım teorisine göre, (6.3.1) eşitliğinin bütün k lar için doğru olduğunu kabul edelim. Burada, bazı pozitif i tamsayıları için, $1 \leq k \leq i$ dir. Bu taktirde, (6.3.1) eşitliğinin $i + 1$ için doğru olduğunu ispatlayacağız. (6.3.1) eşitliği bazı pozitif i tamsayıları için doğru olduğundan, bazı pozitif i tamsayıları için

$$\langle V_{i+2}, \nabla f \rangle = H_i \langle V_1, \nabla f \rangle \quad (6.3.10)$$

yazabiliriz. (6.3.10) nun her iki tarafının M^n de V_1 doğrultusunda türevini alırsak,

$$\langle \nabla_{V_1} V_{i+2}, \nabla f \rangle + \langle V_{i+2}, \nabla_{V_1} \nabla f \rangle = V_1 [H_i \langle V_1, \nabla f \rangle]. \quad (6.3.11)$$

eşitliğine sahibiz. Ve, (6.3.11) ile Frenet formüllerini kullanarak,

$$-k_{i+1} \langle V_{i+1}, \nabla f \rangle + k_{i+2} \langle V_{i+3}, \nabla f \rangle + \langle V_{i+2}, \nabla_{V_1} \nabla f \rangle = V_1 [H_i \langle V_1, \nabla f \rangle]. \quad (6.3.12)$$

elde edilir. Bundan başka, $\nabla_{V_1} \nabla f = 0$ dır. Böylelikle, (6.3.12) den,

$$-k_{i+1} \langle V_{i+1}, \nabla f \rangle + k_{i+2} \langle V_{i+3}, \nabla f \rangle = V_1 [H_i \langle V_1, \nabla f \rangle]. \quad (6.3.13)$$

yazabiliriz. Ve böylece (6.3.13) den,

$$\langle V_{i+3}, \nabla f \rangle = \{V_1 [H_i \langle V_1, \nabla f \rangle] + k_{i+1} \langle V_{i+1}, \nabla f \rangle\} \frac{1}{k_{i+2}}. \quad (6.3.14)$$

elde edilir. Diğer taraftan, tümevarım hipotezine göre, (6.3.1) eşitliği $i - 1$ için doğru

olduğundan,

$$\langle V_{i+1}, \nabla f \rangle = H_{i-1} \langle V_1, \nabla f \rangle. \quad (6.3.15)$$

eşitliğine sahibiz. Böylece, (6.3.14) ve (6.3.15) yardımıyla

$$\langle V_{i+3}, \nabla f \rangle = \{V_1 [H_i] + k_{i+1} H_{i-1}\} \cdot \frac{1}{k_{i+2}} \cdot \langle V_1, \nabla f \rangle. \quad (6.3.16)$$

bulunur. Ayrıca, Tanım 6.3.1 de $i + 1$ için

$$H_{i+1} = \{V_1 [H_i] + k_{i+1} H_{i-1}\} \frac{1}{k_{i+2}}. \quad (6.3.17)$$

elde ederiz. Böylelikle, (6.3.16) ve (6.3.17) yardımıyla,

$$\langle V_{i+3}, \nabla f \rangle = H_{i+1} \langle V_1, \nabla f \rangle$$

eşitliğine sahibiz. Bu da, (6.3.1) eşitliğinin $i + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Sonuç olarak, tümevarım teorisine göre, bütün i ler için

$$\langle V_{i+2}, \nabla f \rangle = H_i \langle V_1, \nabla f \rangle.$$

Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç, yukarıdaki Teorem 6.3.1 in sonucudur.

Sonuç 6.3.1 $M^n \subset \mathbb{R}^k$ ($n < k$), $\langle, \rangle$ metriğiyle tanımlı n -boyutlu bir Riemann f -eikonal helis alt manifoldu ve M^n , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda $M, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız) olsun. Bu taktirde, M^n nin herhangi bir helis çizgisi boyunca

$$\langle V_{i+2}, \nabla f \rangle = H_i \langle V_1, \nabla f \rangle$$

eşitliği geçerlidir. Burada, $\{V_1, \dots, V_n\}$ ve $\{H_1, \dots, H_{n-2}\}$, sırasıyla M^n nin helis

çizgisinin Frenet çatısı ve harmonik eğrilikleridir.

İspat: Teorem 6.1.4 ve Teorem 6.3.1 den açıktır.

Teorem 6.3.2 M^n , $\langle, \rangle$ metriğiyle tanımlı n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M^n , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda M^n , $N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız) ve $\alpha(s)$, M^n de bir Frenet eğrisi olsun. Eğer, α eğrisi ∇f eksenli bir f -eikonal helis eğrisi ise, bu taktirde

$$\nabla f = \|\nabla f\| \cos(\theta) (V_1 + H_1 V_3 + \dots + H_{n-2} V_n).$$

Burada, $\{V_1, \dots, V_n\}$ ve $\{H_1, \dots, H_{n-2}\}$, sırasıyla α nın Frenet çatısı ve harmonik eğrilikleridir.

İspat: α bir f -eikonal helis eğrisi olduğundan,

$$\langle \nabla f, V_1 \rangle = \text{sabit.} \quad (6.3.18)$$

yazabiliriz. (6.3.18) in her iki tarafının M^n de V_1 doğrultusunda türevini alırsak,

$$\langle \nabla_{V_1} \nabla f, V_1 \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{V_1} V_1 \rangle = 0 \quad (6.3.19)$$

eşitliğine sahibiz. Öte yandan, Lemma 2.3 den (Sakai 1996), ∇f vektör alanı M^n de paraleldir. Yani, $\nabla_{V_1} \nabla f = 0$ dır. Böylece, (6.3.19) ve Frenet formülleri yardımıyla,

$$k_1 \langle \nabla f, V_2 \rangle = 0 \quad (6.3.20)$$

elde ederiz. k_1 pozitif bir fonksiyon olduğundan, (6.3.20) eşitliği

$$\langle \nabla f, V_2 \rangle = 0$$

olmasını gerektirir. Böylelikle, α nın ekseni

$$\nabla f = \lambda_1 V_1 + \lambda_3 V_3 + \dots + \lambda_n V_n \quad (6.3.21)$$

şeklindedir. Ayrıca, (6.3.21) den, iç çarpım yardımıyla

$$\lambda_1 = \langle \nabla f, V_1 \rangle$$

$$\lambda_3 = \langle \nabla f, V_3 \rangle$$

.

.

.

$$\lambda_n = \langle \nabla f, V_n \rangle$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 6.3.1 den,

$$\lambda_1 = \langle \nabla f, V_1 \rangle = \|\nabla f\| \cos(\theta) \quad (6.3.22)$$

$$\lambda_3 = \langle \nabla f, V_3 \rangle = \|\nabla f\| \cos(\theta) H_1$$

.

.

.

$$\lambda_n = \langle \nabla f, V_n \rangle = \|\nabla f\| \cos(\theta) H_{n-2}.$$

olduğunu biliyoruz. Böylelikle, (6.3.21) eşitliği ve (6.3.22) sistemi kullanılarak, α nın ekseni kolaylıkla

$$\nabla f = \|\nabla f\| \cos(\theta) (V_1 + H_1 V_3 + \dots + H_{n-2} V_n)$$

şeklinde bulunur. Bu da, ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç, yukarıdaki Teorem 6.3.2 nin sonucudur.

Sonuç 6.3.2 $M^n \subset \mathbb{R}^k$ ($n < k$), $\langle, \rangle$ metriğiyle tanımlı n -boyutlu bir Riemann f -eikonal helis alt manifoldu ve M^n , tam bağlantılı C^∞ sınıfından sınırsız olsun. Aynı zamanda $M, N \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımına izometrik olsun. Kabul edelim ki $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sabit olmayan bir afin fonksiyon (Innami 1982 deki ana Teoreme bakınız) olsun. Bu takdirde, M^n nin herhangi bir helis çizgisi boyunca

$$\nabla f = \|\nabla f\| \cos(\theta) (V_1 + H_1 V_3 + \dots + H_{n-2} V_n)$$

dir. Yani, helis çizgisinin eksenidir. Burada, $\{V_1, \dots, V_n\}$ ve $\{H_1, \dots, H_{n-2}\}$, sırasıyla M^n nin helis çizgisinin Frenet çatısı ve harmonik eğrilikleridir.

İspat: Teorem 6.1.4 ve Teorem 6.3.2 den açıktır.

KAYNAKLAR

- Barros, M.1997. General Helices and A Theorem of Lancret. Proceedings of The American Mathematical Society, Vol. 125; Num. 5, pp.1503-1509.
- Cartan, E. 1983. Geometry of Riemannian Spaces. Brookline Mass. Math. Sci. Press. pp. 75.
- Cermelli, P. and Di Scala, A.J. 2007. Constant-angle surfaces in liquid crystals. Philos. Mag. Vol. 87, pp. 1871-1888.
- Di Scala, A.J. 2009. Weak Helix submanifolds of Euclidean spaces. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 79, pp. 37-46
- Di Scala, A.J. and Ruiz-Hernández, G. 2009. Helix submanifolds of Euclidean spaces. Monatsh Math 157, 205-215.
- Di Scala, A.J. and Ruiz-Hernández, G. 2010. Higher codimensional euclidean helix submanifolds. Kodai Math. J. 33, 192-210.
- Dillen, F. and Munteanu, M.I. 2009. Constant angle surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$. Bull. Braz. Math. Soc. (40) 1, 85-97.
- Ghomi, M. 2002. Shadows and convexity of surfaces. Ann. Math. (2) 155 (1), 281-293.
- Gök, I., Camcı, Ç. and Hacısalıhoğlu, H.H. 2009. V_n -slant helices in Euclidean n -space. Math. Commun., Vol. 14, Num. 2, 317-329.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. Diferensiyel Geometri. Cilt 2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

- Hicks, N.J. 1974. Notes on differential geometry. Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Hitzelberger, P. and Lytchak, A. 2007. Spaces with many affine functions. Proceedings of The American Mathematical Society, Vol. 135, Num. 7, 2263-2271.
- Innami, N. 1982. Splitting Theorems Of Riemannian Manifolds. Compositio Mathematica, Vol. 47, Fasc. 3, pp. 237-247.
- Lopez, R. and Munteanu, M.I. 2011. Constant angle surfaces in Minkowski space. Bull. Belg. Math. Soc.-Simon Stevin, 18, 2, pp. 271-286.
- Maeda, S. and Adachi, T. 2000. Geometry of a complex projective space from the viewpoint of its curves and real hypersurfaces. Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B: Mathematical Science 33, pp. 31-46.
- Munteanu, M.I. 2010. From golden spirals to constant slope surfaces. Journal of Mathematical Physics, 51,7, 073507: 1-9.
- Özkaldı, S. and Yaylı, Y. 2011. Constant angle surfaces and curves in E^3 . International electronic journal of geometry, Vol. 4, Num. 1, pp.70-78.
- Ruiz-Hernández, G. 2008. Helix, shadow boundary and minimal submanifolds. Ill.J. Math. 52 (4), pp.1385-1397.
- Ruiz-Hernández, G. 2011. Minimal helix surfaces in $N^n \times \mathbb{R}$. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81, pp. 55-67.
- Sakai, T. 1996. On Riemannian Manifolds Admitting A Function Whose Gradient Is of Constant Norm. Kodai Math. J., Vol 19, pp. 39-51.

Yaylı, Y. and Zıplar, E. 2011. On slant helices and general helices in Euclidean n -space. *Mathematica Aeterna*, Vol. 1, Num. 8, pp. 599-610.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Evren ZİPLAR

Doğum Yeri : İZMİR

Doğum Tarihi : 01.06.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002)

Yüksek Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik (İngilizce) Anabilim Dalı (2006)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2010 – Ocak 2013)

Yayınları (SCI ve diğer)

- Şenol, A., **Zıplar, E.**, Yaylı, Y. and Ghadami, R. 2012. On darboux helices in Minkowski Spaces $\mathbb{R}_1^3$, Life Science Journal, Vol. 9, No.4, 5905-5910. (SCIE).
- Yaylı, Y. and **Zıplar, E.** 2011a. Frenet-Serret motion and ruled surfaces with constant slope. International Journal of the Physical Science, volume 6 (29), pp.6727-6734.
- Yaylı, Y. and **Zıplar, E.** 2011b. On slant helices and general helices in Euclidean n-space. MathematicaÆterna, Vol 1, No: 08, pp.599-610.
- Şenol, A., **Zıplar, E.** and Yaylı, Y. 2012. General helices and Bertrand curves in Riemannian space form. MathematicaÆterna, Vol 2, No: 02, pp.155-161.
- Zıplar, E.**, Şenol, A. and Yaylı, Y. 2012a. On weak r-helix submanifolds, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, Vol 10, No.2, 139-148.
- Zıplar, E.**, Şenol, A. and Yaylı, Y. 2012b. Helix Hypersurfaces and Special Curves, Int.J.Contemp.Math.Sciences, Vol.7, no.25, 1233-1245.
- Zıplar, E.**, Şenol, A. and Yaylı, Y. 2012c. On r-Helix Hypersurfaces. International Mathematical Forum, Vol.7, no.34, 1689-1698.
- Zıplar, E.**, Şenol, A. and Yaylı, Y. 2012d. On Darboux Helix in Euclidean 3-space. Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, Vol.12, Issue13, Version 1.0.
- Zıplar, E.**, Şenol, A. and Yaylı, Y. 2013. On strong r-helix submanifolds and special curves. International Journal of Geometry, Vol.2, No.2, pp.5-10. (accepted).