T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMALLEŞTİRİLMİŞ LAPLACIAN İLE İŞARETSİZ LAPLACIAN MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ İÇİN SINIRLAR

Şehri Gülçiçek ESKİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
HAZİRAN - 2013

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMALLEŞTİRİLMİŞ LAPLACIAN İLE İŞARETSİZ LAPLACIAN MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ İÇİN SINIRLAR

Şehri Gülçiçek ESKİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

KIRŞEHİR
HAZİRAN - 2013

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Doç. Dr. Naim TUĞLU
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Baki YAĞBASAN
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

SİMGELER VE KISALTMALAR

x^* : x vektörünün eşlenik transpozu
e : tüm elemanları 1 olan $n \times 1$ sütun vektörü
e_j : j. elemanı 1 diğerleri 0 olan $n \times 1$ sütun vektörü
I_n : n kare birim matris
" $\sim$ " : komşuluk
d_i : i noktasının derecesi
δ : G grafında en küçük derece
Δ : G grafında en büyük derece
N_i : v_i ye komşu olan noktaların kümesi
m_i : v_i ye komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması
$c_{ij} = |N_i \cap N_j|$: v_i ile v_j noktalarının ortak komşuluklarının sayısı
$\lambda(G)$: G grafının spectral yarıçapı
$\mu(G)$: G grafının Laplacian spectral yarıçapı

ÖZET

Bu çalışmada grafın komşuluk matrisi $A(G)$, derece matrisi $D(G)$ ve Laplacian matris $L(G)$ yardımıyla tanımlanan işaretsiz(signless) Laplacian matris $Q(G) = A(G) + D(G)$ ile normalleştirilmiş Laplacian matris $\mathscr{L}(G) = D^{-1/2}(G)L(G)D^{-1/2}(G)$ nin özdeğerleri için sınırlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: İşaretsiz Laplacian matris, normalleştirilmiş Laplacian matris, özdeğer, özvektör

ABSTRACT

We found the bounds of eigenvalues of signless Laplacian matrice and normalized Laplacian matrice using by adjacency matrice $A(G)$, Laplacian matrice $L(G)$ and degree matrice $D(G)$.

Keywords: Signless Laplacian matrice, normalized Laplacian matrice, eigenvalue, eigenvector.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında ilgisini, desteğini ve emeğini esirgemeyen saygıdeğer hocam; Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye, benim bu günlere gelmemi sağlayan aileme, öğrenim hayatım boyunca yanımda olan değerli öğretmenlerime teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Grafların özdeğerlerinin çalışılması, matematiğin diğer alanları ile bağlantılar oluşturur. Özellikle spekral graf teorisi ve diferensiyel geometri arasında ilişki vardır. Kimyada; özdeğerler moleküllerin kararlılığı ile birleştirilebilir. Bunun yanı sıra graf, teorik olarak fizik ve quantum mekaniğinin çeşitli problemini de oraya çıkarır.

Bir $n \times n$ kare matrisin özdeğerini hesaplarken n. dereceden polinomla karşılaşılız. Bu polinomların köklerini belirlemek her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda özdeğerler için sınır belirlemek işimizi kolaylaştıracaktır.

Bizim amacımız basit bir grafın İşaretsiz Laplacian matris ve normalleştirilmiş Laplacian matrislerinin en büyük özdeğerleri için sınırlar bulmaktır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanımları vereceğiz.

2.1 Matrisler ile İlgili Bazı Tanımlar

Tanım 2.1 [11] Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisinin izi A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı olarak tanımlanır ve $iz(A)$ ya da $tr(A)$ ile gösterilir. Yani

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

dir.

Tanım 2.2 [11] F bir cisim olmak üzere $A \in M_n(F)$ ve $X \neq 0$ $n\times 1$ tipinde bir vektör olsun.

$$AX = \lambda X \tag{2.1}$$

olacak şekilde $\lambda \in F$ skalerine A matrisinin özdeğeri, X e de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. (2.1) kullanılarak

$$(A - \lambda I)X = 0$$

elde edilir. $(A - \lambda I)$ matrisine A matrisinin karakteristik matrisi denir. Bu matrisin determinantının hesaplanması sonucunda ise λ ya bağlı n-inci dereceden monik polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani,
$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dır. Ayrıca $K_A(\lambda) = 0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu karakteristik denklemin köklerine A matrisinin özdeğerleri (ya da karakteristik değerleri) denir. Hemen hatırlatalım ki; $K_A(\lambda) = 0$ n-inci dereceden bir denklem

olduğundan tam olarak n tane köke sahipir ve bunların hepsinin farklı olması gerekmez.

$$AX = \lambda X \quad veya \quad (A - \lambda I)X = 0$$

denkleminde sıfır olmayan X çözümlerine A nın λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir. Özdeğer ve özvektörlerin bu tanımından doğrudan

$$Ax_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

temel formülünü elde ederiz.

Tanım 2.3 M $n \times n$ kompleks matris ve her $x \in \mathbb{C}^n$ için x^*, x in eşlenik transpozu olsun. Eğer

$$x^* M x \geq 0$$

oluyorsa M matrisine pozitif semidefinite ya da yarı pozitif tanımlıdır denir.

2.2 Graf Kavramı

Tanım 2.4 [4] $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ noktalar kümesi ve E kenarlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ yapısına ***graf*** denir.

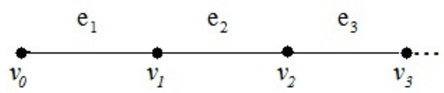
Bir grafta $v_i \in V$ noktasından çıkan kenar sayısına $\boldsymbol{v_i}$ **noktasının derecesi** denir ve $\boldsymbol{d_i}$ ile gösterilir.

$G = (V, E)$ grafında iki noktayı bağlayan bir kenar varsa bu iki noktaya ***komşu*** denir $\boldsymbol{v_i \sim v_j}$ veya kısaca $\boldsymbol{i \sim j}$ ile gösterilir.

G grafındaki bir yürüme(walk) W ile gösterilir.

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$$

sonlu sayıda elemanları noktalar ve kenarlar olan bir dizidir. Burada e_i kenarı, v_{i-1} ile v_i noktalarını birleştiren kenardır.



k uzunluğundaki bu yürümeyi kısaca

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k = (v_0, v_k)$$

şeklinde gösterebiliriz.

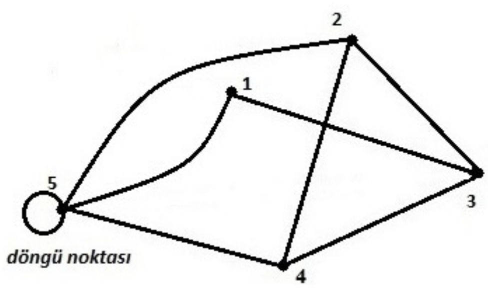
$j < k$ olmak üzere $v_0 e_1 v_1 \ldots e_j v_j$ yürümesine W nin bir alt yürümesi denir.

Eğer bir W yürüyüşünde $e_1, e_2, \ldots, e_k$ farklı kenarlar ise bu yürümeye trail (patika, iz, yol) denir. Buna ek olarak W yürümesinde noktalar da farklı ise bu yürümeye path (yol) adı verilir.

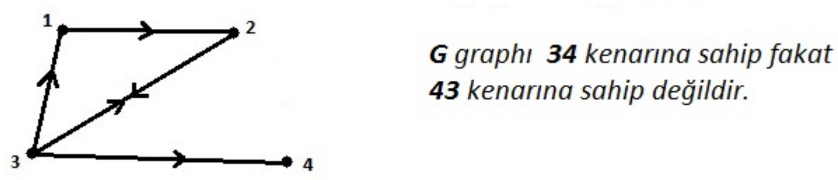
G grafının u ve v noktaları arasında bir (u, v) yolu varsa u ve v noktalarına bağlantılıdır denir.

V nin bir boş olmayan alt kümelerini $V_1, V_2, \ldots, V_w$ parçalanışı vardır ki; u ile v gibi iki noktanın bağlantılı olması için gerek ve yeter şart u ile v nin her ikisinin de aynı V_i kümesine ait olmasıdır. $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_w]$ alt grafları G nin komponentleri olarak adlandırılır. Eğer G tam olarak bir tek komponenti varsa bağlantılıdır, diğer durumda G bağlantılı değildir.

Tanım 2.5 Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan kenarlara ***döngü*** denir.

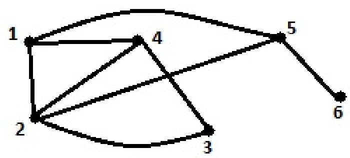


Tanım 2.6 Herbir kenarı yönle belirtilen grafa **yönlü (directed) graf** denir.



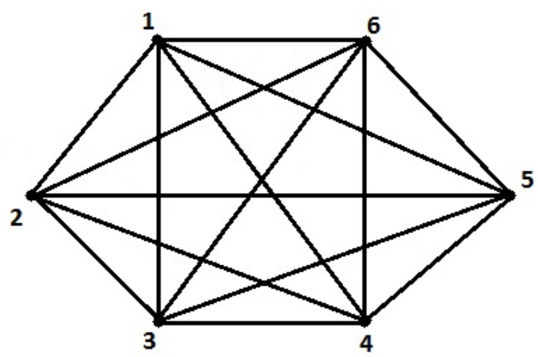
Şekil 2.1: Yönlü Graf

Tanım 2.7 Yönsüz ve döngü içermeyen graflara ***basit graf*** denir.



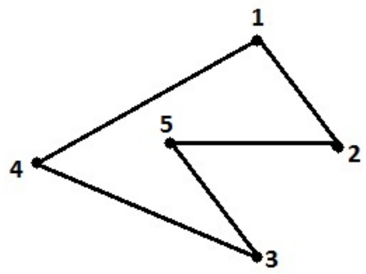
Şekil 2.2: Basit Graf

Tanım 2.8 Her noktası diğer noktalara bir kenar ile bağlı olan graflara ***tam graf*** denir ve n noktalı bir tam graf K_n şeklinde gösterilir.



Şekil 2.3: K_6 Tam Grafı

Tanım 2.9 Bütün noktalarının dereceleri aynı olan graflara ***regüler (düzenli) graf*** denir.



Şekil 2.4: Regüler(düzenli) Graf

2.2.1 Graf İle İlgili Bazı Matrisler

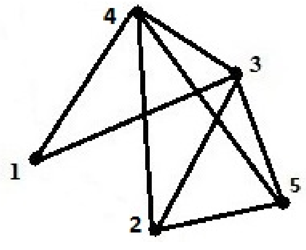
Tanım 2.10 [3] (Komşuluk Matrisi) Bir grafın komşuluk matrisi ise $A(G)$ ile gösterilir ve $A(G) = [a_{ij}]_{n\times n}$ olmak üzere

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; ; \; i \sim j \;\; ise \\ 0 \; ; \; diğer \; durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisinde herbir satırın toplamı o noktanın derecesini verir. Ayrıca komşuluk matrisi simetriktir. $A(G)$ komşuluk matrisinin en büyük özdeğerine ***spektral yarıçap*** denir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir.

Örneğin;
$G = (V, E)$ grafı aşağıdaki gibidir.



Bu grafın komşuluk matrisi ise,

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve spectral yarıçapı $\lambda(G) = 3.3234$ olarak elde edilir.

Tanım 2.11 [3] (Derece Matrisi) G grafında herbir noktanın derecelerinin,

$$D = k\ddot{o}\c{s}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

şeklinde yazılmasıyla oluşan bir köşegen matristir.

$$D(G) = d_{ij} = \begin{cases} d_i & ; \; i = j \;\; ise \\ 0 & ; \; di\breve{g}er \;\; durumlarda \end{cases}$$

Tanım 2.12 [3] (Laplacian Matris) $G = (V, E)$ grafının Laplacian matrisi $L(G) = [l_{ij}]_{n \times n}$ olmak üzere

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i & ; \; i = j \;\; ise \\ -1 & ; \; i \sim j \; ise \\ 0 & ; \; di\breve{g}er \;\; durumlarda \end{cases}$$

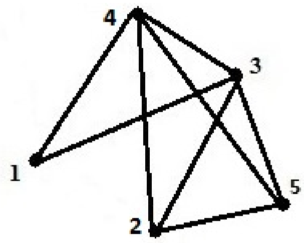
şeklinde tanımlanır.

Laplacian matrisin satır ve sütun toplamı 0 dır. Laplacian matrisi simetrik bir matristir. Laplacian matris

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

dir. $L(G)$ Laplacian matrisin en büyük özdeğerine ***Laplacian spektral yarıçap*** denir ve $\mu(G)$ ile gösterilir.

Örneğin;
$G = (V, E)$ grafını gözönüne alalım.



$G = (V, E)$ grafının Laplacian matrisi,

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

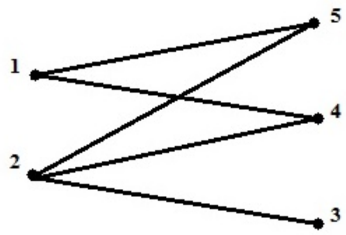
olarak bulunur ve Laplacian spectral yarıçap $\mu(G) = 5$ olarak elde edilir.

3 İŞARETSİZ(SIGNLESS) LAPLACIAN MATRİS

Bu bölümde işaretsiz Laplacian matris ile ilgili bazı tanım ve teoremler vereceğiz.

Tanım 3.1 (İşaretsiz(signless) Laplacian Matris) $G = (V, E)$ grafının işaretsiz Laplacian matrisi $Q(G) = D(G) + A(G)$ şeklinde tanımlanır.

Örneğin;
Şekildeki $G = (V, E)$ grafını ele alırsak,



$G = (V, E)$ grafının işaretsiz(signless) Laplacian matrisi

$$Q(G) = D(G) + A(G)$$

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$Q(G)$ non-negatif, simetrik matristir. Aynı zamanda $Q(G)$ nin herbir satır toplamı o noktanın derecesinin iki katını verir. $Q(G)$ nin özdeğerlerine , G nin signless Laplacian spectral yarıçapı veya Q-spectral yarıçapı denir[14]. İşaretsiz Laplacian matris pozitif semi-definite olduğu için tüm özdeğerleri non-negatiftir [1]. $Q(G)$ nin özdeğerlerini

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \lambda_2(Q(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(Q(G))$$

olarak sıralayabiliriz. Spectral yarıçap ve Laplacian spectral yarıçap, Q-spectral yarıçap için sınır oluşturur [7,10,13]. Bu sınırlar;

$$\mu(G) \leq \lambda_1(Q(G))$$

ve

$$2\lambda(G) \leq \lambda_1(Q(G))$$

şeklindedir.

Lemma 3.2 [2] G basit bağlantılı graf olsun. G nin noktalarının minimum derecesi δ, maksimum derecesi Δ ile gösterilsin. O halde;

$$2\delta \leq \lambda_1(Q(G)) \leq 2\Delta \tag{3.1}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G regüler olması durumunda mümkündür.

Teorem 3.3 [8] G n noktalı, m kenarlı, basit bağlantılı graf olsun ve G nin noktalarının dereceleri $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$ olarak sıralansın. O halde;

$$\lambda_1(Q(G)) \leq \max_i \left\{ \frac{d_i + \sqrt{d_i^2 + 8d_i m_i}}{2} \right\} \tag{3.2}$$

ve

$$\lambda_1(Q(G)) \leq \max_i \left\{ d_i + \sqrt{d_i m_i} \right\} \tag{3.3}$$

burada $m_i = \frac{1}{d_i} \sum_{i \sim j} d_j$ dir.

Teorem 3.4 [5,6] G n noktalı, m kenarlı, basit bağlantılı graf olsun. G nin noktalarının minimum derecesi δ, maksimum derecesi Δ ile gösterilecek olursa,

$$\lambda_1(Q(G)) \leq \frac{\Delta + \delta - 1\sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2m - (n-1)\delta)}}{2} \tag{3.4}$$

dır.

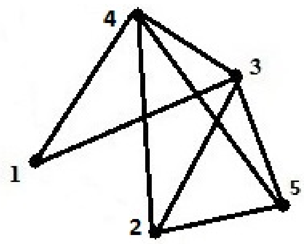
4 NORMALLEŞTİRİLMİŞ LAPLACIAN MATRİS

Bu bölümde normalleştirilmiş Laplacian matris ile ilgili bazı tanım ve teoremler vereceğiz.

Tanım 4.1 (Normalleştirilmiş Laplacian Matris) $G = (V, E)$ grafının normalleştirilmiş Laplacian matrisini $\mathscr{L}(G) = [\ell_{ij}]_{n \times n}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \ i = j \ \ ise \\ \frac{-1}{\sqrt{d_i d_j}} & ; \ i \sim j \ \ ise \\ 0 & ; \ diğer \ durumlarda \end{cases}$$

Aşağıdaki $G = (V, E)$ grafını göz önüne alalım.



$G = (V, E)$ grafının normalleştirilmiş Laplacian matrisi

$$\mathscr{L}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Normalleştirilmiş Laplacian matris

$$\mathscr{L}(G) = D^{-1/2}(G)L(G)D^{-1/2}(G)$$

şeklinde de ifade edilir. $\mathscr{L}(G)$ nin özdeğerleri, G nin normalleştirilmiş Laplacian özdeğerleri olarak adlandırılır. Normalleştirilmiş Laplacian matris pozitif semi-definite olduğu için tüm özdeğerleri non-negatiftir [2]. $\mathscr{L}(G)$ nin özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathscr{L}(G)) \geq \lambda_2(\mathscr{L}(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(\mathscr{L}(G))$$

olarak sıralanacak olursa bu özdeğerler için aşağıdakiler söylenebilir $[2, 9]$.
$*$ $\mathscr{L}(G)$ nin özdeğerleri $[0, 2]$ aralığındadır.
$*$ 0, $\mathscr{L}(G)$ nin bir basit özdeğeridir $\Longleftrightarrow$ G bağlantılıdır.
$*$ G grafı tam olmayan bir graf ise $\lambda_{n-1} \leq 1$ dir.

Teorem 4.2 [9] G , basit bağlantılı graf olsun. λ_1, $\mathscr{L}$ nin en büyük özdeğeri ise; o halde,

$$|\lambda_1| \leq 2 - \min_{i<j} \left(\frac{|N_i \cap N_j|}{\max\{d_i, d_j\}} \right) \tag{4.1}$$

Burada minimum tüm (i, j) ikilileri üzerinden alınır $(1 \leq i < j \leq n)$.

5 YARDIMCI LEMMALAR

Bu bölümde 6. ve 7. bölümlerde yararlanacağımız bazı teorem ve lemmalar vereceğiz. Ayrıca aksi belirtilmedikçe I_n birim matris ve $e = (1, 1, \ldots, 1)$ şeklinde tanımlanacaktır.

Lemma 5.1 [12] W ve $\lambda = (\lambda_j)$ sıfırdan farklı sütun vektörü olsun. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ olarak verilsin. O halde

$$-s\sqrt{nW^TCW} \leq W^T\lambda - mW^Te = W^TC\lambda \leq s\sqrt{nW^TCW}$$

$$\sum_j (\lambda_j - \lambda_n)^2 = n[s^2 + (m - \lambda_n)^2]$$

$$\sum_j (\lambda_1 - \lambda_j)^2 = n[s^2 + (\lambda_1 - m)^2]$$

$$\lambda_n \leq m - \frac{s}{\sqrt{n-1}} \leq m + \frac{s}{\sqrt{n-1}} \leq \lambda_1$$

dir. Burada $m = \frac{\lambda^T e}{n}$, $s^2 = \frac{\lambda^T C \lambda}{n}$ ve $C = I_n - \frac{ee^T}{n}$ olarak tanımlanır.

Teorem 5.2 [12] A, $n \times n$ tipinde bir komplex matris ve A^*, A nın eşlenik transpozu olarak tanımlansın. $B = AA^*$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ olsun. O halde,

$$m - s\sqrt{n-1} \leq \lambda_n^2(B) \leq m - \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

ve

$$m + \frac{s}{\sqrt{n-1}} \leq \lambda_1^2(B) \leq m + s\sqrt{n-1}$$

Burada $m = \frac{trB}{n}$ ve $s^2 = \frac{trB^2}{n} - m$ dir.

6 GRAFIN NORMALLEŞTİRİLMİŞ LAPLACIAN MATRİSİNİN ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölüm tezin esas bölümlerinden olup normalleştirilmiş Laplacian matrisinin özdeğerleri için alt ve üst sınır verilecektir.

Teorem 6.1 G bir basit graf, $\mathscr{L}(G)$, G nin normalleştirilmiş Laplacian matrisi olsun. Eğer $\mathscr{L}(G)$ nin özdeğerleri,

$$\lambda_1(\mathscr{L}(G)) \geq \lambda_2(\mathscr{L}(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(\mathscr{L}(G))$$

ise,

$$\lambda_n \leq \sqrt{m - \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\sqrt{m + \frac{s}{\sqrt{n-1}}} \leq \lambda_1 \leq \sqrt{m + s\sqrt{n-1}} \tag{6.1}$$

dir. Burada,

$$m = \frac{tr[\mathscr{L}(G)]^2}{n} = \frac{n + 2\sum_{i\sim j, i<j} \frac{1}{d_i d_j}}{n} = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i\sim j, i<j} \frac{1}{d_i d_j}$$

$$s^2 = \frac{tr[\mathscr{L}(G)]^4}{n} - \left(\frac{tr[\mathscr{L}(G)]^2}{n}\right)^2 = \frac{tr[\mathscr{L}(G)]^4}{n} - m^2$$

olarak tanımlanır.

İspat. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

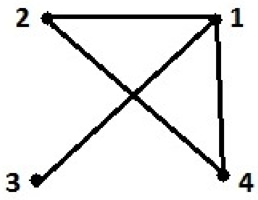
$$tr[\mathscr{L}(G)]^2 = n + 2 \sum_{i\sim j, i<j} \frac{1}{d_i d_j}$$

ve

$$tr[\mathscr{L}(G)]^4 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{i\sim j} \frac{1}{d_i d_j}\right)^2 + 2 \sum_{i<j} \left(\sum_{k \in N_i \cap N_j} \frac{1}{d_k \sqrt{d_i d_j}} - \sum_{i\sim j} \frac{2}{\sqrt{d_i d_j}} \right)^2$$

şeklinde bulunur. $\mathscr{L}(G)$ reel simetrik matris olduğundan, Teorem 5.2 den dolayı (6.1) sınırı elde edilir. ■

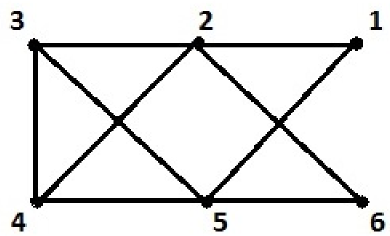
Örnek 1



$G = (V, E)$ grafı için $tr\mathscr{L}(G)^2 = 5.83$, $tr\mathscr{L}(G)^4 = 14.35$, $m = 1.46$ ve $s = 1.2$ olarak bulunur.

$\boldsymbol{\lambda}(\mathscr{L}(\boldsymbol{G}))$	**(4.1)(üst sınır)**	**(6.1)(üst sınır)**	**(6.1)(alt sınır)**
1.728	2	1.88	1.46

Örnek 2



$G = (V, E)$ grafı için $tr\mathscr{L}(G)^2 = 7.89$, $tr\mathscr{L}(G)^4 = 17.56$, $m = 1.31$ ve $s = 1.9$ olarak bulunur.

$\boldsymbol{\lambda}(\mathscr{L}(\boldsymbol{G}))$	**(4.1)(üst sınır)**	**(6.1)(üst sınır)**	**(6.1)(alt sınır)**
1.86	2	1.93	1.34

NOT: Örneklerde iki basamaklı yaklaşık değeri hesaplanmaktadır.

7 GRAFIN İŞARETSİZ(SIGNLESS) LAPLACIAN MATRİSİNİN ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölüm tezin esas bölümlerinden olup işaretsiz Laplacian matrisin özdeğerleri için alt ve üst sınırlar verilecektir.

Teorem 7.1 G, $V = \{1, 2, ..., n\}$ noktalar kümesi üzerinde tanımlı bir graf olmak üzere

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \max\{d_i - d_j + c_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n, i \sim j\} \qquad (7.1)$$

dır.

İspat. x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ Q işaretsiz Laplacian matrisinin λ_1 özdeğerine karşılık gelen $X = (x_1, \ldots, x_n)$ özvektörünün bileşenleri olsun.

Genelliği bozmaksızın özvektörün en büyük bileşenini mesela x_i yi 1 ve diğer bileşenlerin de mutlak değerce 1 den küçük veya eşit olduğunu kabul edelim. Yani $x_i = 1$ ve her k için $|x_k| \leq 1$ olsun. Ayrıca $x_j = \min\{x_k, i \sim k\}$ ve c_{ij} de i ve j nin ortak komşuluklarının sayısını göstersin. $c_{ij} = |N_i \cap N_j|$, $x_j \leq x_k$ olduğundan

$$\sum_k \{x_k : \ k \sim i, k \nsim j\} \geq (d_i - c_{ij})x_j$$

$$\sum_k \{x_k : \ k \sim j, k \nsim i\} \leq (d_j - c_{ij})$$

olur. Özdeğer denkleminden

$$QX = \lambda_1 X$$

yazabiliriz. i. satır için

$$\lambda_1 x_i = d_i x_i + \sum_k \{x_k : \ k \sim i\}$$

$$\lambda_1 x_i = d_i x_i + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \sim j\} + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \nsim j\} \quad (7.2)$$

j. satır için

$$\lambda_1 x_j = d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim j\}$$

$$\lambda_1 x_j = d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim j, k \sim i\} + \sum_k \{x_k : k \sim j, k \nsim i\} \quad (7.3)$$

yazabiliriz. Böylece

$$\lambda_1 = d_i + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \sim j\} + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \nsim j\}$$

$$\lambda_1 x_j = d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim j, k \sim i\} + \sum_k \{x_k : k \sim j,\ k \nsim i\}$$

denklemlerini elde ederiz. Taraf tarafa çıkartarak

$$\lambda_1 - \lambda_1 x_j \ = \ d_i - d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \nsim j\} - \sum_k \{x_k : k \sim j, k \nsim i\}$$

$$\lambda_1(1 - x_j) \ \geq \ d_i - d_j x_j + (d_i - c_{ij})x_j - (d_j - c_{ij})$$

Böylece

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \max\{d_i - d_j + c_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n, i \sim j\}$$

ifadesini elde ederiz. ■

Teorem 7.2 G, $V = \{1, 2, ..., n\}$ noktalar kümesi üzerinde tanımlı bir graf olmak üzere

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \max\{\sqrt{2d_i d_j}\} \quad (7.4)$$

dır.

İspat. c_{ij}, x_i, x_j, ve x_k lar Teorem 7.1 deki gibi tanımlansın.

$$QX = \lambda_1 X$$

ifadesinin i. satırı

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_i &= d_i x_i + \sum_k \{x_k : k \sim i\} \\
\lambda_1 &= d_i + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \sim j\} + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \nsim j\} \\
\lambda_1 &\geq d_i + c_{ij} x_j + (d_i - c_{ij}) x_j \\
\lambda_1 &\geq d_i (1 + x_j)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. j. satırı ise

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_j &= d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim j\} \\
\lambda_1 x_j &= d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim j, k \sim i\} + \sum_k \{x_k : k \sim j, k \nsim i\} \\
\lambda_1 x_j &\geq d_j x_j + c_{ij} x_j + (d_j - c_{ij}) x_j \\
\lambda_1 x_j &\geq 2 d_j x_j
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadelerin taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 x_j &\geq 2 d_i d_j x_j (1 + x_j) \\
\lambda_1^2 &\geq 2 d_i d_j (1 + x_j) \geq 2 d_i d_j \\
\lambda_1 &\geq \max\{\sqrt{2 d_i d_j}\}
\end{aligned}$$

şeklinde alt sınırı elde ederiz. ■

Sonuç 7.3 G, $V = \{1, 2, ..., n\}$ noktalar kümesi üzerinde tanımlı bir graf olmak üzere

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \max\{c_{ij}\} \tag{7.5}$$

dır.

İspat. c_{ij}, x_i, x_j, ve x_k lar Teorem7.1 deki gibi tanımlandığını kabul edelim.

$$QX = \lambda_1 X$$

ifadesinin i. satırı olan (7.2) ile j. satırı olan (7.3) taraf tarafa çıkartılırsa

$$\lambda_1 - \lambda_1 x_j = d_i - d_j x_j + \sum_k \{x_k : k \sim i, k \nsim j\} - \sum_k \{x_k : k \sim j, k \nsim i\}$$

$$\lambda_1(1 - x_j) \geq d_i - d_j x_j + (d_i - c_{ij})x_j - (d_j - c_{ij})$$

elde edilir. Burada $d_i \geq d_j$ olduğunu gözönüne alıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\lambda_1 \geq \max\{c_{ij}\}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 7.4 G bir basit graf, $Q(G)$, G nin işeretsiz Laplacian matrisi olsun. Eğer $Q(G)$ nin özdeğerleri,

$$\lambda_1(Q(G)) \geq \lambda_2(Q(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(Q(G))$$

ise,

$$\lambda_n \leq \sqrt{m - \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\sqrt{m + \frac{s}{\sqrt{n-1}}} \leq \lambda_1 \leq \sqrt{m + s\sqrt{n-1}} \tag{7.6}$$

dir. Burada,

$$m = \frac{tr[Q(G)]^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i(d_i+1)}{n}$$

$$s^2 = \frac{tr[Q(G)]^4}{n} - \left(\frac{tr[Q(G)]^2}{n}\right)^2 = \frac{tr[Q(G)]^4}{n} - m^2$$

olarak tanımlanır.

İspat. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

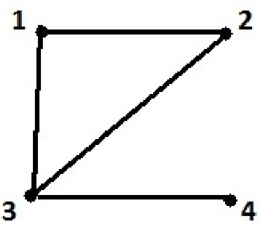
$$tr[Q(G)]^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i + 1)$$

ve

$$tr[Q(G)]^4 = \sum_{i=1}^{n}(d_i^2+d_i)^2+2\sum_{i\nsim j}|N_i\cap N_j|^2+\sum_{i\sim j}(d_i + d_j + |N_i \cap N_j|)^2$$

şeklinde bulunur. $Q(G)$ reel simetrik matris olduğundan, Teorem 5.2 den dolayı (7.6) sınırı elde edilir. ■

Örnek 1

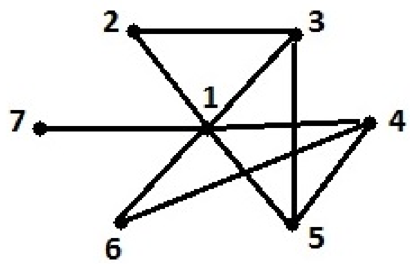


$G = (V, E)$ grafı için $trQ(G)^2 = 26$, $trQ(G)^4 = 450$, $m = 6.5$ ve $s = 8.38$ olarak bulunur.

$\boldsymbol{\lambda(Q(G))}$	**(3.1)**	**(3.2)**	**(3.3)**	**(3.4)**	**(7.6)**
4.56	6	5	5.23	5	4.58

$\boldsymbol{\lambda(Q(G))}$	**(3.1)**	**(7.1)**	**(7.4)**	**(7.6)**
4.56	2	2	3.46	3.36

Örnek 2



$G = (V, E)$ grafı için $trQ(G)^2 = 92$, $trQ(G)^4 = 3800$, $m = 13.14$ ve $s = 19.24$ olarak bulunur.

$\boldsymbol{\lambda(Q(G))}$	**(3.1)**	**(3.2)**	**(3.3)**	**(3.4)**	**(7.6)**
7.67	12	9.08	9.74	9.34	7.76

$\boldsymbol{\lambda(Q(G))}$	**(3.1)**	**(7.1)**	**(7.4)**	**(7.6)**
7.67	2	5	6	4.58

NOT: Örneklerde iki basamaklı yaklaşık değeri hesaplanmaktadır.

Bu tezde normalleştirilmiş Laplacian matris ve işaretsiz Laplacian matris ile ilgili verilen sınırlar araştırılmıştır. Daha önceki bağlantılardan yararlanarak yeni birkaç sınır elde edilmiştir. Örnekler bazında incelediğimizde bulduğumuz sınırların çok daha yakın olduğu görülmektedir. Fakat teoride karşılaştırmalar henüz yapılmamıştır. Konuyla ilgili çalışmalarımız devam etmektedir...

KAYNAKLAR

[1] Chung F., *Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 92, AMS, Providens*, **1997**

[2] Cvetković D.; Rowlinson P.; Simić S., *An Introduction to the Theory of Graph Spectra, Cambridge University Press, New York*, **2010**

[3] Das, K.C; *An Improved Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues, Linear Algebra and its Applications,* **2003**, *368*, 269-278

[4] Diestel, R.; *Graph Theory, Springer*, **2006**

[5] Li J.; Pan Y.; *Upper Bounds for the Laplacian Graph Eigenvalues, Acta Math. Sin. Engl. ser. 20(5)*, **2004**, 803-806

[6] Liu H.; Lu M.; Tian F., *On the Laplacian Spectral Radius of a Graph, Linear Algebra Appl.*, **2004** *376* 135-141

[7] Maden A.D.; Das, K.C; Çevik A.S., *Sharp Upper Bounds on the Spectral Radius of the Signless Laplacian Matrix of Graph, Applied Mathematics and Computation,* **2013**, *219*, 5025-5032

[8] Oliveira C.S.; De Lima L.S.; De Abreu N.M.M.; Hansen P., *Bound on the Index of the Signless Laplacian of a graph, Discrete Appl. Math. 158,* **2010**, 355-360

[9] Rojo O.; Soto R.L., *A New Upper Bound On The Largest Normalized Laplacian Eigenvals, Operators and Matrices*, **2013** number2, volume7, 323-332

[10] Shu J.L.; Hong Y.; Wen R.K., *A Sharp Upper Bound on the Largest Eigenvalues of the Laplacian Matrix of a Graph, Linear Algebra Appl. Math.*, **2002**, *347*, 123-129

[11] Taşçı D., *Lineer Cebir*, Ankara, **2011**

[12] Wolkowich H.; Styan G.P.H., *Bounds for Eigenvalues Using Traces of Matrice, Linear Algebra and its Applications*, **1980**, *29*, 471-506

[13] Yan C., *Properties of Spectra of Graphs and Line Graphs,* Appl. Math. J. Chin. Uni. Ser. B 3, **2002** 109-119.

[14] Yu G.; Wu Y.; Shu J., *Sharp Bounds on the Signless Laplacian Spectral Radii of Graphs* **2011**, *434* 683-687

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Şehri Gülçiçek ESKİ
Doğum Tarihi	:	08.02.1989
Doğum Yeri	:	Samsun
Ünvanı	:	Yüksek Lisans Öğrencisi
Anabilim Dalı	:	Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi

Eğitim

İlk Öğrenimi	:	Samsun Mustafa Kemal İlköğretim Okulu
Orta Öğrenimi	:	Samsun Cumhuriyet Lisesi
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2007