

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PERTURBASYON METOTLAR VE BU METOTLARIN
DİFERANSİYEL DEKLEMLERE UYGULANMASI**

Mehmet Afşin ÖZEK

**Danışman
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2013**

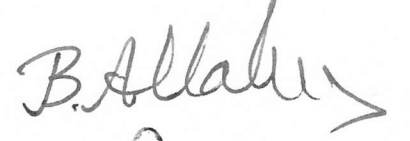
© 2013 [Mehmet Afşin ÖZEK]

TEZ ONAYI

Mehmet Afşin ÖZEK tarafından hazırlanan "Perturbasyon Metotlar ve Bu Metotların Diferansiyel Denklemlere Uygulanması" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin TUNA
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.


Mehmet Afşin ÖZEK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Analitik Fonksiyon	1
1.2. Regüler Nokta ve Singüler Nokta	2
1.3. Regüler Singüler Nokta ve İrregüler Singüler Nokta	3
1.4. Mertebe (Order ya da Landau) Sembolleri	3
1.4.1. Tanımlar:	3
1.4.2. Örnekler	4
1.5. Asimptotik Yaklaşım	5
1.6. Asimptotik Açılım	7
1.6.1. Tanımlar	7
1.6.2. Örnekler	8
1.7. Düzgünlük(Uniformity)	10
1.7.1. Teorem	13
1.7.2. Örnekler	13
1.8. Seküler Terim	15
1.8.1. Örnekler	17
2. KAYNAK ÖZETLERİ	18
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
3.1. Parametre ve Koordinat Perturbasyon	20
3.1.1. Parametre Perturbasyon	20
3.1.2. Koordinat Perturbasyon	23
3.2. Zorlanmış Koordinatlar Metodu	28
3.2.1 Lindstedt-Poincaré metodu	29
3.2.2. Mathieu denklemleri için değişim eğrileri	33
3.2.3. Basit bir lineer özdeğer problemi	37
3.2.4. Lighthill tekniği	42
3.2.5. Temple tekniği	48
3.2.6. Zorlanmış koordinatlar metodunun sınırları	50
3.3. Eşleme Metodu ve Bileşik Asimptotik Açılımlar Metodu	50
3.3.1. Eşleme metodu	51
3.3.2. Van Dyke'in eşleme prensibi	60
3.3.3. Bileşik açılım	64
3.4. Parametrelerin Değişimi ve Ortalama Metodu	65
3.4.1. Parametrelerin değişimi	65
3.4.2. Ortalama Metodu	70
3.4.3. Krylov-Bogoliubov tekniği	71
3.4.4. Genelleştirilmiş ortalama metodu	75
3.5. Çoklu Ölçek Analizi Metodu	79
3.6. WKB Teorisi	84

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	89
KAYNAKLAR.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	91

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PERTURBASYON METOTLAR VE BU METOTLARIN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Mehmet Afşin ÖZEK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Perturbasyon metot cebirsel denklemlerin çözülmesinde kullanılabilirdiği gibi uygulama alanı daha çok diferansiyel denklemlerdir. Perturbasyon metodu nümerik yöntemlerden farklı olarak diferansiyel denklemde var olan ya da bizim yerleştirdiğimiz çok küçük pozitif ε katsayısını kullanarak yaklaşık çözüm elde eder. Perturbasyon metodu perturbasyon kelimesinin Türkçe karşılığı olan rahatsız etme, titretme kelimelerinin anlamıyla örtüşen bir metottur. Perturbasyon metodunda diferansiyel denklemi yerinden birazcık oynatarak kesin çözüme yakın çözümler elde etmeye çalışıyoruz. Yukarıda bahsettiğimiz çok küçük pozitif ε katsayısını diferansiyel denklemini rahatsız etme işleminde kullanıyoruz.

Bu tezin giriş bölümünde perturbasyon metodu için önemli terimlerin tanımlarına yer verildi. Yer verilen terimler arasında analitik fonksiyon, regüler nokta ve singüler nokta, regüler singüler ve irregüler singüler nokta, mertebe, asimptotik yaklaşım, asimptotik açılım, düzgünlük vardır. Tezin ikinci bölümünde daha önceden yapılmış çalışmalar özet halinde sunulmuştur. Tezin üçüncü bölümünde ise parametre ve koordinat perturbasyon metodu, zorlanmış koordinatlar metodu, eşleme ve bileşik asimptotik açılımlar metodu, parametrelerin değişimi ve ortalama metodu, çoklu ölçek analizi metodu ve WKB analiz metodu anlatılmıştır. Zorlanmış koordinatlar metodu başlığı altında Lindstedt-Poincaré metodu ve Lighthill tekniğine değinilmiştir. Eşleme ve bileşik asimptotik açılımlar metodunda ise Van-Dyke eşleme prensibi anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise bu tezde değinilen perturbasyon metotlarının çözüm için ne kadar verimli olduğu tartışılmış farklı diferansiyel denklem tiplerine farklı perturbasyon metodu uygulanması gerektiği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Perturbasyon Metodu, Parametre Perturbasyonu, Koordinat Perturbasyonu, Eşleme Metodu, Bileşik Asimptotik Açılımlar Metodu, Çoklu Ölçek Analizi Metodu, WKB Analiz Metodu

2013, 91 Sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

PERTURBATION METHODS AND ITS APPLICATIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet Afşin ÖZEK

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Application area of perturbation method as it can be used solution of algebraic equations is most on differential equation. Using very small positive coefficient ε being in differential equation or put by us, perturbation method is different from numerical methods obtain approximate solution. Perturbation method matches the word of perturbation meaning in Turkish disturbing and shaking. We try to obtain approximate solution with changing different equation, a bit for the exact solution in perturbation method. We use for disturbing process to differential equation very small positive coefficient ε mentioned above.

In the prologue of the thesis, the definitions of important terms for perturbation methods are explained. There are analytic function, regular point and singular point, regular singular and irregular singular point, order, asymptotic approximation, asymptotic expansion, uniformity in the explained terms. In the second section of thesis earlier studies are presented as summary. In the third section of thesis parameter perturbation, coordinate perturbation, the method of strained coordinates, the methods of matched and composite asymptotic expansions, variation of parameters and methods of averaging, the method of multiple-scales, the method of WKB are explained. The method of Lindstedt-Poincaré and the technic of Lighthill are referred below the method of strained coordinates title. Van-Dyke's matching principle are expressed in the methods of matched and composite asymptotic expansions. In the fourth section perturbation methods referred in this thesis are discussed how to be efficient for solution and made inferences that different perturbation method must be applied to different differential equation types.

Keywords: Perturbation Method, Parameter Perturbation, Coordinate Perturbation, Method of Matching, Method of Composite Asymptotic Expansions, Method of Multiple-Scale Analysis, Method of WKB Analysis

2013, 91 Sayfa

TEŐEKKÖR

Uygulamalı matematiğin en önemli konularından birisi olan diferansiyel denklemler için ilginç bir yaklaşık çözüm yöntemi olan perturbasyon metotları benim için de güzel bir uğraşı alanı oldu. Bu tezi hazırlarken akademik çalışmalarda küçük bir bilginin büyük sonuçlar doğurabileceğini daha yakından görmüş oldum.

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na ve akademik çalışmalarımda desteğini sürekli arkamda hissettiğim eşim Selda, kızım Zeynep Dilara ve oğlum Ahmet Kaan'a teşekkür ederim.

Mehmet Afşin ÖZEK
ISPARTA, 2013

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. $f = x + e - x\varepsilon$ fonksiyonunu ile bu fonksiyonun asimptotik yaklaşımı olan $f \sim x$ 'in karşılaştırılması..	12
Şekil 1.2. $f = \sin(x + \varepsilon)$ ile $f \sim \sin(x)$ 'nın $0 < x < \pi/2$ aralığında karşılaştırılması..	14
Şekil 1.3. (1.7.5) kesin çözümü, (1.7.8) düzgün olmayan yaklaşım ve (1.7.7) düzgün yaklaşımın karşılaştırılması..	15
Şekil 3.1. $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ özel durumu	57

1. GİRİŞ

Günümüzde mühendisler, fizikçiler ve uygulamalı matematikçiler karşılaştıkları fiziksel problemlerin çoğunun problemin kesin analitik çözümünü engelleyen belli temel özelliklerini ortaya çıkarmışlardır. Bu özelliklerden bazıları arasında problemin lineer olmaması, değişken katsayılara sahip olması, kompleks sınır şekillerinin varlığı ve lineer olmayan sınır koşullarının verilmesi sayılabilir. Bir problemin kesin sonucu açık bir şekilde bulunabilse bile matematiksel ve fiziksel yorumlar ya da nümerik hesaplamalar o problemin çözümünde çok kullanışlıdır. Böylece denklemlerin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak için yaklaşımlara, nümerik çözümlere ya da her ikisine başvurmaya doğru itiliriz. Yaklaşım metotları arasında başta gelen metot perturbasyon (asimptotik) metottur. Bu tekniklerin anlattığına göre çözüm bir asimptotik açılımın ilk birkaç terimi tarafından sunulur. Bu açılımlar denklemlerde doğal bir şekilde ya da denklemin uygunluğu için suni bir şekilde bulunan küçük ya da büyük bir parametrenin terimlerinde uygulanır (Nayfeh, 2004). Böyle açılımlar parametre perturbasyonu şeklinde isimlendirilir. Bundan farklı bir şekilde açılımlar bir koordinatın (her ikisi de küçük yada her ikisi de büyük) terimlerinde uygulanır. Bu tarz açılımlara da koordinat açılımı denir. Parametre ve koordinat açılımları ve bunlarla ilgili temel özellikleri Bölüm 3 de sunacağız. Ama öncelikle ilerleyen bölümlerde sık sık karşılaştığımız bazı temel tanım ve teoremleri göreceğiz.

1.1. Analitik Fonksiyon

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu, $x = x_0$ noktası yakınında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

şeklinde yazılan Taylor serisine açılabilirse ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x 'in bütün değerleri için bu Taylor açılımı, $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa o zaman adı geçen fonksiyona $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyon denir. Bu durumda verilen Taylor açılımı

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

olur.

Analitik fonksiyonlar için yukarıdaki tarif göz önüne alınırsa hemen söyleyebiliriz ki bütün polinom fonksiyonlar her yerde analitiktirler. Ayrıca e^x , $\cos x$, $\sin x$ fonksiyonları da her yerde analitiktirler. $f(x)/g(x)$ şeklindeki fonksiyonlar $f(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlar olmak üzere $g(x)$ 'i sıfır yapmayan her x değeri için analitiktir (Çağlayan vd., 2008).

1.2. Regüler Nokta ve Singüler Nokta

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \quad (1.2.1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemdeki $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de bir $x = x_0$ noktasında analitik ise $x = x_0$ noktasına regüler nokta denir.

Eğer bu fonksiyonların her ikisi de ya da yalnız biri $x = x_0$ noktasında analitik değilse, o zaman $x = x_0$ noktasına (1.2.1) diferansiyel denkleminin bir singüler noktası denir.

Örneğin;

$$(1 - x^2)y'' + xy' + 2y = 0 \quad (1.2.2)$$

diferansiyel denkleminde $x = 1$ ve $x = -1$ noktaları singüler, bu iki nokta dışındaki her nokta regüler noktalardır (Çağlayan vd.,2008).

1.3. Regüler Singüler Nokta ve İrregüler Singüler Nokta

Eğer (1.2.1) denkleminde $P_1(x)$ in paydası $(x - x_0)$ çarpanını en fazla birinci dereceden ve $P_2(x)$ in paydası da $(x - x_0)$ çarpanını en fazla ikinci dereceden içeriyorsa o zaman $x = x_0$ noktasına (1.2.1) diferansiyel denkleminin bir regüler singüler noktasıdır denir.

Örneğin;

$$x(x - 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x - 2) \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = 0 \quad (1.3.1)$$

diferansiyel denkleminde $P_1(x) = \frac{x-2}{x.(x-1)^2}$ ve $P_2(x) = \frac{x+1}{x.(x-1)^2}$ dir. $x=0$ ve $x=1$ noktaları singüler noktalardır. $x=0$ noktası yukarıdaki tanıma göre regüler singüler nokta, $x=1$ noktası ise irregüler singüler noktadır (Çağlayan vd., 2008).

1.4. Mertebe (Order ya da Landau) Sembolleri

Bir asimptotik yaklaşımı tanımlamak için ilk olarak mertebe sembollerini bilmek gerekir. Bunun sebebi ise ε parametresinin küçük olduğu durumlarda fonksiyonun davranış tarzıyla ilgilenecek olmamızdır. Örneğin $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$ fonksiyonu $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$ fonksiyonu kadar hızlı sifira yakınsamaz. İşte bu gerçeği belirtmek için bir notasyona ihtiyaç duyarız (Holmes, 1995).

1.4.1. Tanımlar:

1. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f = O(\phi)$ gösteriminin anlamı $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ için

$$|f(\varepsilon)| \leq k_0 |\phi(\varepsilon)|$$

olacak şekilde k_0 ve ε_1 (ε dan bağımsız) sabitleri vardır demektir. Bu durumda $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken f, ϕ 'den büyüktür deriz (Holmes, 1995).

2. $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f = o(\phi)$ gösteriminin anlamı her pozitif δ için $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ aralığında

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\phi(\varepsilon)|$$

olacak şekilde ε_2 (ε dan bağımsız) sabiti vardır demektir. Bu durumda $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken f , ϕ 'den küçüktür deriz.

Bu tanımlar ağır ve hantal görünebilir ama genellikle uygulaması zor değildir. Ancak doğru sıralamayı belirlemek için başka yollar da vardır. Özellikle ilginç ε_0 'a yakın ama sıfır olmayan ϕ olduğu durumda olur. Mesela eğer bazı $\varepsilon_b > \varepsilon_0$ için $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_b$ ise $\phi \neq 0$ 'dır. Bu durumda eğer ε_0 'a yakın ε için $|f/\phi|$ oranı sınırlı ise $f = O(\phi)$ 'dir. Belki de daha kullanışlı olan bir diğer yol

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} \quad (1.4.1)$$

limitini içeren yoldur. Eğer bu limit var ve sonlu ise $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f = O(\phi)$ dir. Benzer bir şekilde eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0 \quad (1.4.2)$$

ise $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f = o(\phi)$ dir (Holmes, 1995).

1.4.2. Örnekler ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ için)

1. Varsayalım ki $f = \varepsilon^2$ olsun. Aynı zamanda $\phi_1 = \varepsilon$ ve $\phi_2 = -3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^6$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} \frac{f}{\phi_1} = 0 \Rightarrow f = o(\phi_1)$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} \frac{f}{\phi_2} = -\frac{1}{3} \implies f = O(\phi_2)$$

2. Eğer $f = \varepsilon \sin(1 + 1/\varepsilon)$ ve $\phi = \varepsilon$ ise $\varepsilon > 0$ için $|f/\phi| \leq 1$ 'dir. bu yüzden $f = O(\phi)$ dir.
3. Eğer $f(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu Taylor serisine açarsak $f = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(\xi)$ ifadesini elde ederiz. Buradan $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} (f/\varepsilon) = 1$ elde edilir ki bu da bize $f = O(\varepsilon)$ olduğunu gösterir.
4. Eğer $f(\varepsilon) = e^{-1/\varepsilon}$ ise l'Hospital kuralını uygulayarak α 'nın bütün değerleri için $f = o(\varepsilon^\alpha)$ 'dır.

Ayrıca bazen iki sembol daha kullanacağız. Bu semboller \ll ve \approx dir. $f(\varepsilon) \ll \phi(\varepsilon)$ dediğimiz zaman $f = o(\phi)$ olduğunu anlayacağız. $\varepsilon \ll 1$ ya da ε , küçüktür dediğimiz zaman ise $\varepsilon \downarrow 0$ anlamını anlayacağız. \approx sembolü ise tam bir tanıma sahip olmamakla beraber bir nümerik değer yaklaşımını kurgulamak için kullanılır. $\pi \approx 3,14$ ifadesi buna bir örnektir (Holmes, 1995).

1.5. Asimptotik Yaklaşım

Bizim amacımız diferansiyel denklemin çözümüne yaklaşım kurmaktır. Bu nedenle bir yaklaşımın ne demek olduğunu saptamak önemlidir. Bu düşünceyi açıklamak için sifıra yakın ε için $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon^5$ fonksiyonuna bir yaklaşım bulma ile ilgilenelim. Çünkü $\varepsilon^5 \ll \varepsilon^2$ ve makul bir yaklaşım $f(\varepsilon) \approx \varepsilon^2$ 'dir. Diğer taraftan kötü bir yaklaşım $f(\varepsilon) \approx \frac{2}{3}\varepsilon^2$ 'tir. Bu kötü bir yaklaşım olmasına rağmen $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f(\varepsilon) - \frac{2}{3}\varepsilon^2$ hatası sifıra gider. Bu yaklaşımın kötü yaklaşım olmasının sebebi hatanın $f(\varepsilon)$ 'a yaklaşımda kullandığımız fonksiyon ile aynı mertebeye sahip olmasıdır. Bu gözlem bize aşağıdaki tanımı verir.

$f(\varepsilon)$ ve $\phi(\varepsilon)$ fonksiyonları verilsin. Eğer $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f = \phi + o(\phi)$ oluyorsa $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $\phi(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ 'a bir asimptotik yaklaşımdır denir. Bu durumda $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f \sim \phi$ deriz.

Yukarıdaki örnekte gösterildiği gibi bu tanımın altında yatan düşünce hatanın yaklaşım fonksiyonundan daha yüksek mertebeden olması durumunda ε_0 'a yakın ε için $\phi(\varepsilon)$ 'nin $f(\varepsilon)$ 'a bir yaklaşım olarak sunulmasıdır. Bu durumda $\phi(\varepsilon)$ 'nin sıfırdan farklı ve ε_0 'a yakın olduğu yerde (1.4.1) kullanılabilir. Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 1 \quad (1.5.1)$$

ise $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f \sim \phi$ 'dir.

Örneğin $f = \sin(\varepsilon)$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olsun. $f(\varepsilon)$ 'nin $\varepsilon = 0$ dolaylarında Taylor serisi açılımını kullanarak f 'in bir yaklaşımını elde edebiliriz.

$$f = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 \cos(\xi)$$

Buradan aşağıdaki asimptotik yaklaşımlar elde edilebilir.

- i. $f \sim \varepsilon$,
- ii. $f \sim \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3$,
- iii. $f \sim \varepsilon + 2\varepsilon^2$.

Taylor serisi açılımı ile bu yaklaşımları karşılaştıracak olursak küçük ε için (ii) en doğru ve (iii) en az doğru yaklaşımlardır (Holmes, 1995).

1.6. Asimptotik Açılım

Yukarıda verdiğimiz örnekten de anlaşılacağı üzere asimptotik yaklaşım tek değildir ve yaklaşımın doğruluğu hakkında fazla bir şey söyleyemiyoruz. Bu eksiklikleri açıklamak için formülasyonda daha yapısal girişe ihtiyacımız var (Holmes, 1995).

1.6.1. Tanımlar

1) ϕ_1, ϕ_2, \dots fonksiyonları verilsin. Eğer sadece ve sadece $m < n$ koşulunu sağlayan bütün m ve n 'ler için $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $\phi_n = o\phi_m$ oluyorsa bu fonksiyonlara $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken bir asimptotik dizi ya da iyi sıralanmış denir (Holmes, 1995).

2) Eğer ϕ_1, ϕ_2, \dots bir asimptotik dizi ise sadece ve sadece $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k(\varepsilon) + o(\phi_m) \quad (m = 1, \dots, n) \quad (1.6.1)$$

olacak şekilde bir $f(\varepsilon)$ bir asimptotik açılıma sahiptir denir. Burada a_k 'lar ε 'dan bağımsızdır. Bu durumda $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken

$$f \sim a_1 \phi_1(\varepsilon) + a_2 \phi_2(\varepsilon) + \dots + a_n \phi_n(\varepsilon) \quad (1.6.2)$$

yazılır. ϕ_k 'lara ölçek ya da gague ya da temel fonksiyonlar denir.

Bu tanımdan hareketle hangi ölçek fonksiyonların kullanılabilir olduğuna bakalım. Bunlardan en çok karşılaştıklarımız aşağıdadır.

1) $\phi_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^\alpha, \phi_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^\beta, \phi_3 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^\gamma, \dots$ ($\alpha < \beta < \gamma < \dots$) ve $(\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+)$ için

2) $\phi_1 = 1, \phi_2 = e^{-1/\varepsilon}, \phi_3 = e^{-2/\varepsilon}, \dots$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ için)

Bunlardan birincisi kuvvet serisinin basit bir genellemesidir. İkinci dizi ise üstel bir şekilde bulunan küçük fonksiyonları tanımlamak zorunda kaldığımız zaman kullanışlıdır.

Şimdi ise sıkı bir soruyla karşı karşıya kalırız. Verilen bir $f(\varepsilon)$ fonksiyonuna bir asimptotik açılımı nasıl bulacağız? En yaygın kullanılan metotlar takip eden yolları içerir. 1) Taylor teoremi 2) l'Hospital kuralı 3) Tahmin. Sonuncusu genellikle problemin sezgisel anlaşılmasına dayanır ve bir çok kez de şansa bağlıdır. Diğer iki metot daha rutin ve örneklerle gösterilebilirdir (Holmes, 1995).

1.6.2. Örnekler

1. e^ε 'nin ilk üç açılımını bulalım. İfade Taylor serisine açılırsa

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 + \dots$$

$$e^\varepsilon \sim 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

2. $\sin(e^\varepsilon)$ 'nin ilk üç terim açılımını bulalım. Önce $\alpha=0$ dolaylarında $\sin(1+\alpha)$ ifadesini Taylor serisine açalım.

$$\sin(1+\alpha) = \sin(1) + \alpha \cos(1) - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin(1) + \dots$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sin(e^\varepsilon) &= \sin\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 + \dots\right) \\ &= \sin(1) + \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots\right) \cos(1) - \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \dots\right)^2 \sin(1) + \dots \\ &\sim \sin(1) + \varepsilon \cos(1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\cos(1) - \sin(1)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir asimptotik açılımı kurmakta kullanacağımız ikinci prosedürü tanımlamak için ϕ_1, ϕ_2, \dots ölçek fonksiyonları verilmiş ve fonksiyonun açılımı $f \sim a_1\phi_1(\varepsilon) + a_2\phi_2(\varepsilon) + \dots$ şeklinde olmuş olsun. Yukarıdaki tanımdan $f = a_1\phi_1 + o(\phi_1)$ 'dir. Varsayalım ki ϕ_1 ile bölebilelim ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} (f/\phi_1) = a_1$ olsun. Bu bize a_1 'in değerini verir ve bu bilgi ile $f \sim a_1\phi_1(\varepsilon) + a_2\phi_2(\varepsilon) + o(\phi_2)$ eşitliği tarafından a_2 'yi belirleyebiliriz. Buradan $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} [(f - a_1\phi_1)/\phi_2] = a_2$ 'tir. Bu düşünce açılımın diğer katsayılarının hesaplanması için kullanılabilir. Böylelikle aşağıdaki formüller elde edilir.

$$a_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} (f/\phi_1) \quad (1.6.3)$$

$$a_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} [(f - a_1\phi_1)/\phi_2] \quad (1.6.4)$$

$$a_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+} [(f - a_1\phi_1 - a_2\phi_2)/\phi_3] \quad (1.6.5)$$

Bu varsayımlar ε_0 'a yakın ε için ölçek fonksiyonların sıfırdan farklı olduğunu ve her bir limitin var olduğunu gösterir. Ayrıca formüllerdeki a_k 'lar asimptotik açılımın tek olduğunu gösterir.

$\phi_1 = 1, \phi_2 = \varepsilon, \phi_3 = \varepsilon^2, \dots$ ve $f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} + e^{-1/\varepsilon}$ olsun.

$$a_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f}{1} = 1,$$

$$a_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-1/\varepsilon} \right) = -1,$$

$$a_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f - 1 + \varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-1/\varepsilon} \right) = 1, \dots$$

Buradan $f \sim 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$ elde edilir (Holmes, 1995).

1.7. Düzgünlük(Uniformity)

Genellikle bir asimptotik açılıma açılan fonksiyonlar açılım parametresinden daha fazlasına dayanır. Bu bir asimptotik açılımın doğruluğunu hatta varlığını engelleyebilir. Bu durumu göstermek için

$$(y - 1)(y - x) + \varepsilon y = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $0 < x < 1$ aralığındaki x 'in değerleri ile ilgilenelim. Küçük ε için çözümün uygun açılımı $y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$ şeklindedir. Bu denklemden yerine konur ve hesaplamalar yapılırsa

$$y \sim 1 - \frac{\varepsilon}{1 - x}$$

açılımı bulunur. Şüphe yoktur ki bu, çözümün bir asimptotik açılımıdır. Fakat burada “ $x = 1$ 'e yakın x değerleri için açılımın doğruluğu ne durumdadır?” sorusuyla karşılaşırız. Açılımda $O(\varepsilon)$ teriminin yapısı verilsin. Eğer bu tür x 'ler kullanılırsa yapıda çok küçük ε 'ların olması gerekecek. Hafifçe farklı bir yoldan giderek sadece ilk terim yaklaşımı $y \sim 1$ 'i kullanacağız. Bütün x 'ler için bu yaklaşımdaki hatanın 10^{-4} 'ten daha az olması için ε 'nın ne kadar küçük olması gerektiğini belirlemek istiyoruz. Hatanın miktarı olan ikinci terimi kullanarak $0 < x < 1$ için $\varepsilon/(1 - x) < 10^{-4}$ eşitsizliğini sağlayan bir $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ aralığının bulunma ihtimalini araştırırsak açık bir şekilde bunun mümkün olmadığını görürüz. Çünkü $\varepsilon/(1 - x)$ ifadesi sınırlı değildir. Bu sebepten açılım $0 < x < 1$ için düzgün değerli değildir. Eğer $0 < x < 3/4$ ise açılım düzgün geçerli olurdu (Holmes, 1995).

Aşağıda yapacağımız düzgün yaklaşım tanımıyla durum daha da açıklık kazanacak.

I bir küme, $x \in I$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ve $f(x, \varepsilon)$ ve $\phi(x, \varepsilon)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer herhangi bir pozitif δ sabiti için

$$|f - \phi| \leq \delta |\phi|$$

olacak şekilde x ve ε 'dan bağımsız, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ eşitsizliğini sağlayan bir ε_2 varsa $\phi(x, \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ iken $f(x, \varepsilon)$ fonksiyonuna düzgün geçerli asimptotik yaklaşımdır denir.

Bu tanımda kritik nokta olan x 'in bütün değerleri için eşitsizliği muhafaza edecek $\varepsilon = 0$ yakınında bir aralık(özellikle $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$) bulma ihtimal dahilindedir. Esasen bu düşünce düzgün yakınsaklığın tanımında kullanılan düşüncedir. Aynı zamanda bu, bize birkaç kullanışlı yorum yapmamızı sağlar (Holmes, 1995).

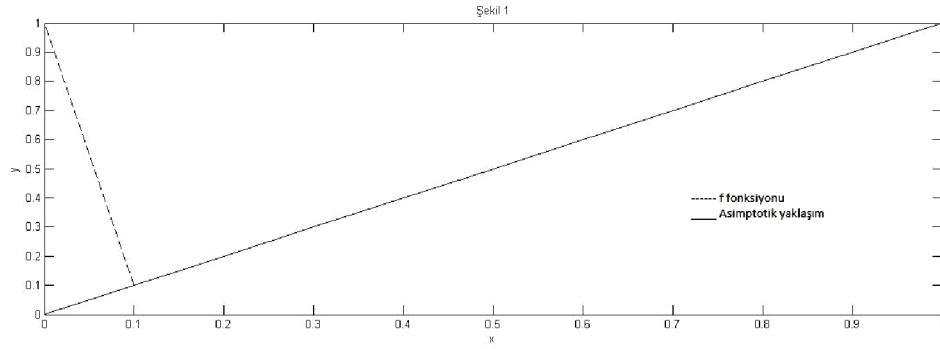
İlk olarak, I kümesinden bir x_0 noktası ya da I 'nin sınırından bir x_0 noktası alalım. ϕ_0 ve f_0 fonksiyonlarını aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$\phi_0(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x, \varepsilon) \text{ ve } f_0(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, \varepsilon) \quad (1.7.1)$$

Burada yakınsamanın düzgün olduğu varsayılır. Aynı zamanda bu limitlerde kullanılan x 'lerin I kümesine kısıtlanmış olduğunu göstermemiz gerekir. Eğer $f \sim \phi$ ifadesi I kümesi üzerinde düzgün geçerli ve $\phi(x, \varepsilon)$ sınırlı ise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, \varepsilon) \quad (1.7.2)$$

olmalıdır. Bu sonucun nasıl kullanılabileceğini göstermek için küçük ε için $f = x + e^{-x/\varepsilon}$ fonksiyonunu $0 < x < 1$ aralığında inceleyelim. f fonksiyonunun asimptotik yaklaşımı $f \sim x$ şeklinde bulunur (Holmes, 1995).



Şekil 1.1. $f = x + e^{-x/\varepsilon}$ fonksiyonunu ile bu fonksiyonun asimptotik yaklaşımı olan $f \sim x$ 'in karşılaştırılması. Grafikte $\varepsilon = 10^{-2}$ alınmıştır.

Yukarıdaki şekil 1.1.'den de görüleceği üzere $x = 0$ yakınlarında problem var. $f(x, \varepsilon) = x + e^{-x/\varepsilon}$ ve $\phi(x, \varepsilon) = x$ olduğuna göre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x, \varepsilon) = 0$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \varepsilon) = 1$$

bulunur. Bu da bize asimptotik yaklaşımın düzgün olmadığını kolaylıkla gösterir.

Burada bir asimptotik yaklaşım ile ilişkili bazı düşüncelerin birleştirilmiş olan 1.7.2 deki sonucu açıklamanın bir başka yolu vardır. x_0 , I 'ya ait ya da I 'nın sınırına ait bir nokta olsun. I 'ya ait x için $f(x, \varepsilon) \sim \phi(x, \varepsilon)$ alalım ve $f(x_0, \varepsilon) \sim \phi_0(\varepsilon)$ olsun. Eğer yaklaşım düzgün ise $\phi(x_0, \varepsilon)$ ve $\phi_0(\varepsilon)$ birbiriyle bir şekilde ilişkili olmasının beklenmesi doğaldır. Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x_0, \varepsilon)}{\phi_0(\varepsilon)} \neq 1 \quad (1.7.3)$$

ise $f(x, \varepsilon) \sim \phi(x, \varepsilon)$, I üzerinde düzgün değildir. Burada ϕ_0 'ın sıfırdan farklı olduğu farzedilir. Şunu belirtmemiz gerekir ki eğer yaklaşım düzgün ise $\phi(x_0, \varepsilon) = \phi_0(\varepsilon)$ olmalıdır manası çıkmamalıdır. Bu sonuçları özetlemek için aşağıdaki teoremi verebiliriz (Holmes, 1995).

1.7.1. Teorem

$x \in \bar{I}$ ve $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ için f, ϕ ve ϕ_0 sürekli fonksiyonlar olsunlar. Aynı zamanda I boş kümeden farklı, sınırlı bir küme ve $x_0 \in \bar{I}$ alalım.

(a) Eğer $x \in \bar{I}$ için $f \sim \phi$ ve eğer $|\phi(x, \varepsilon)|$ monoton azalan ($x \in I$ ve $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ için) ise bu yaklaşım I da düzgün geçerlidir (hem de \bar{I} üzerinde).

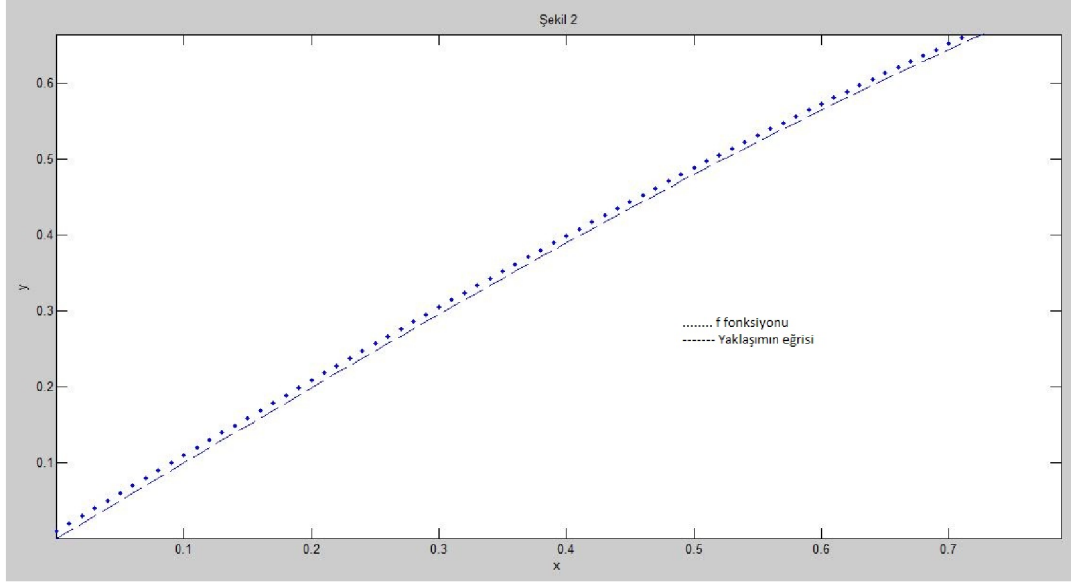
(b) $x \in I$ için $f \sim \phi$ ve $x = x_0$ için $f \sim \phi_0(\varepsilon)$ olsun. Eğer $\phi_0(\varepsilon)$ sıfırdan farklı ve (1.7.3)'ü sağlıyorsa $f \sim \phi$, I üzerinde düzgün geçerli değildir (Holmes, 1995).

1.7.2. Örnekler

1. Eğer $f = \sin(x + \varepsilon)$ ise $f \sim \sin(x)$ yaklaşımı $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ aralığında düzgün geçerlidir. Bu $\varepsilon = 0$ yakınlarında Taylor teoremi kullanılarak gösterilebilir.

$$f = \sin(x) + \varepsilon \cos(x + \xi)$$

olduğundan $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f - \sin(x)| = 0$ ve buradan $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ için $f \sim \sin(x)$ bulunur. Aynı zamanda $\phi = \sin(x)$, ε 'dan bağımsız olduğundan teorem 1.7.1 gereği yaklaşım $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ aralığında düzgün geçerli olur. (1.7.2)'yi sağlamasına rağmen yaklaşım $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında düzgün değildir. Bu olayı görmenin en kolay yolu $x = 0$ 'da $f \sim \varepsilon$ olduğunu ve dolayısıyla $\phi_0(\varepsilon) = \varepsilon$ ile $\phi(0, \varepsilon) = 0$ eşitliklerini bulmakla olur. Bu yüzden (1.7.3) limiti 1'e eşit değildir. Bunun anlamı yaklaşımımız bu aralıkta düzgün değildir. Şekil 1.2. bu durumu bize daha iyi anlatmaktadır (Holmes, 1995).



Şekil 1.2. $f = \sin(x + \varepsilon)$ ile $f \sim \sin(x)$ 'nin $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında karşılaştırılması. x değerleri 0'a yaklaştıkça yaklaşım eğrisi f eğrisinden uzaklaşıyor. $\varepsilon = 0,01$ alınmıştır.

2. Şimdi de $0 < x < 1$ için

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad (1.7.4)$$

diferansiyel denkleminin çözümü olan

$$y(x) = e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + e^{\frac{\beta x}{\varepsilon}} \quad (1.7.5)$$

fonksiyonunu inceleyelim. Burada $\alpha = -1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}$ ve

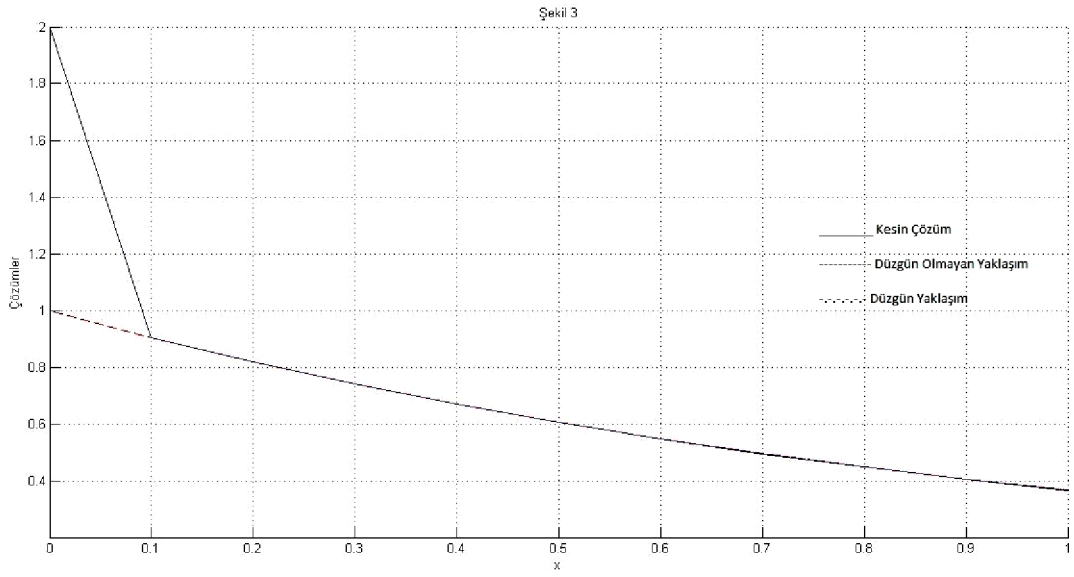
$\beta = -1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}$ 'dur. Küçük ε için bu çözüme asimptotik yaklaşım elde etmek için $\alpha \sim -\varepsilon - \varepsilon^2$ ve $\beta \sim -2 + \varepsilon$ şeklinde belirleriz. Buradan $0 < x < 1$ için

$$y(x) \sim e^{\frac{-\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon}x} + e^{\frac{-2 + \varepsilon}{\varepsilon}x} \quad (1.7.6)$$

$$y(x) \sim e^{-x} + e^{-2x/\varepsilon} \quad (1.7.7)$$

$$y(x) \sim e^{-x} \quad (1.7.8)$$

yaklaşımları elde edilebilir. Ancak son yaklaşım $0 < x < 1$ için düzgün değildir. Çünkü $x = 0$ olduğu zaman (1.7.8) ile (1.7.7) aynı sıralamaya sahip olur. Aynı zamanda düzgün olmadığı (1.7.2) kullanılarak da görülebilir. (1.7.7) yaklaşımı kullanılarak $0 < x < 1$ aralığında düzgün geçerli bir yaklaşıma sahip oluruz. Bu yaklaşımlar arasındaki farklılıkları aşağıdaki Şekil 1.3.'te rahatlıkla görebilirsiniz (Holmes, 1995).



Şekil 1.3. (1.7.5) kesin çözümü, (1.7.8) düzgün olmayan yaklaşım ve (1.7.7) düzgün yaklaşımın karşılaştırılması. Düzgün yaklaşım, kesin çözüme çok yakın olduğundan iki eğri hemen hemen birbirinin aynıdır. Grafik $\epsilon = 0,01$ için çizilmiştir.

1.8. Seküler Terim

Seküler terimi anlamak için

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) = \cos(wt) \quad (1.8.1)$$

diferansiyel denklemini inceleyeceğiz. Bu denklem bize w frekanslı bir dış kuvvet tarafından hareket ettirilen 1 doğal frekanslı bir harmonik salınımı anlatır. $|w| \neq 1$ için bu denklemin genel çözümü

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{\cos(wt)}{1-w^2}, \quad |w| \neq 1 \quad (1.8.2)$$

şeklindedir. Görülüyor ki $|w| \neq 1$ için çözüm bütün t 'ler için sınırlı kalıyor. Eğer $|w|$ 1'e yakın ise salınımın genliği büyük hale gelir. Çünkü dış kuvvetten gelen enerjinin büyük bir kısmı sistem tarafından emilir. Buna rağmen $|w| \neq 1$ olduğu müddetçe sistemin genliği hala sınırlıdır. Çünkü sistem itici kuvvet ile faz dışına salınıyor.

(1.8.2) çözümü $|w| = 1$ olduğu zaman doğru değildir. Doğru çözüm t ile büyüyen bir genliğe sahiptir. O çözüm de

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2} t \sin t, \quad |w| = 1 \quad (1.8.9)$$

şeklindedir. Bu çözümde salınımın genliği $t \rightarrow \infty$ iken sınırlı değildir. Çünkü salınım sürekli bir şekilde periyodik dış kuvvetten gelen enerjiyi emer. Bu sistem dış kuvvet ile rezonanstadır denir.

t 'den dolayı genliği büyüten $\frac{1}{2} t \sin t$ terimi bir seküler terim olarak adlandırılır. $\frac{1}{2} t \sin t$ seküler terimi belirlemektedir çünkü $|w| = 1$ için (1.8.1) denklemindeki homojen olmayan $\cos t$ teriminin kendisi $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$ homojen denkleminin bir çözümüdür. Genelde homojen olmayan terimin kendisinin verilen homojen sabit katsayılı diferansiyel denklemin çözümü olduğunda ortaya çıkar. Bir seküler terim daima homojen denkleme karşılık gelen çözümünden daha hızlı bir şekilde büyür (Bender ve Orszag, 2007).

1.8.1. Örnekler

1. $d^2y/dt^2 - y = e^{-t}$ diferansiyel denklemin çözümü bir seküler terime sahiptir. Çünkü e^{-t} verilen homojen denklemin sağlarıdır. Genel çözüm $y(t) = Ae^{-t} + Be^t - \frac{1}{2}te^{-t}$ 'dir. $-\frac{1}{2}te^{-t}$ özel çözümü, Ae^{-t} homojen çözümüne bağlı seküler terimdir. $t \rightarrow \infty$ iken Be^t homojen çözümü ile karşılaştırıldığında ihmal edilse bile seküler olan $-\frac{1}{2}te^{-t}$ terimine dikkat etmemiz gerekir.
2. $d^2y/dt^2 - 2dy/dt + y = e^t$ diferansiyel denkleminin çözümü bir seküler terime sahiptir. Çünkü e^t homojen kısmı sağlarıdır. Genel çözüm $y(t) = Ae^t + Bte^t + \frac{1}{2}t^2e^t$ şeklindedir. Bu durumda özel çözüm $\frac{1}{2}t^2e^t$ ifadesi homojen denklemin bütün çözümleri ile ilgili sekülerdir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Perturbasyon teorisi bir sistemin yaklaşık olarak tanınmasını sağlamak için kurulmuştur. Perturbasyon teorisi bu iş için bir ya da daha fazla küçük parametre içeren doğadaki problemlerin denklemlerine dayanır. Bu denklemlerdeki küçük parametre ya da parametreleri kullanarak kesin çözüme en iyi yaklaşık çözümü elde etmeye çalışırız.

Perturbasyon teorisi ilk olarak güneş sistemindeki gezegenlerin hareketleri konusunda gök mekaniğinin problemlerini çözmek için önerildi. Gezegenler birbirlerinden çok uzak ve bu gezegenlerin kütleleri güneşin kütlesiyle karşılaştırıldığında küçük olduğundan gezegenler arasındaki çekim kuvveti ihmal edilebilir ve iki cisim(iki cisim, gezegen ve güneş olarak kabul edilir) probleminin denklemleri tarafından tanımlanan Kepler'in yörüngeleri boyunca yer alması gibi gezegensel hareketler dikkate alınır. Astronomik veriler çok büyük doğrulukla bilinir hale geldiğinden bu yana Güneşin etrafındaki bir gezegenin hareketinin diğer gezegenler tarafından nasıl etkilendiğini dikkate almak gerekti. Bu üç cisim probleminin özüyü. Dolayısıyla Ay-Dünya-Güneş sistemi çalışmalarında Ay ve Dünya arasındaki kütle oranı küçük parametre olarak seçildi. Perturbasyon teorisi ilk olarak Laplace, Poisson, Gauss gibi klasik bilim adamları tarafından araştırıldı. Hesaplamaların sonucunda çok yüksek doğrulukla performanslar gözlemlendi. J. Adams ve U. le Verrier tarafından 1848'de Neptün gezegeninin keşfi Uranüs gezegeninin hareketindeki sapmalar temel alınarak gerçekleştirildi. Bu ise perturbasyon teorisinin zaferi olarak sunuldu. Başlangıçta bu özel teorisinin gelişmesindeki zorluk elde edilen açılımların terimlerinin sine ve cosine dışında zamanı içermesiydi. Gezegensel hareketlere elde edilen sadece birinci yaklaşım doğru olsa bile perturbasyon teorisi serilerine böyle terimlerin katkısı sadece zamanın uzun periyotları(yüzyıllarca yıl) için önemli hale gelebilir. Seküler terimlerin ortaya çıkışı gezegenin hareketinin(dönme hareketi) frekansının bağımlı olmasından kaynaklanır. Perturbasyon teorisinde seküler terimlerin yok edildiği özel metotların gelişimi Lindstedt, Guldin, Delaunay, Bohlin, ve Newcomb adlı bilim adamlarının çalışmaları sayesinde olmuştur. Poincaré ve Lyapunov sadece gök mekaniği problemlerinde değil aynı zamanda genel diferansiyel denklem teorisinde de etkili periyodik

çözümlerin özel bir çeşidini öne sürdüler. Küçük paydalar problemine çözüm için toplamsal eklemeler yaptılar. Değişkenlerin kanonik değişimi metodu küçük paydaların ortaya çıkışıyla meydana gelen perturbasyon teorisi serilerindeki ıraksaklığın üstesinden gelebilmek için daha yakınsak (süper yakınsak) ve daha düşük mertebeli perturbasyonu mümkün kılmaktadır.

Gök mekaniğinin perturbasyon teorisinde diferansiyel denklemlerin asimptotik integrasyonu sadece kapalı sistemler için gelişti. Perturbasyon teorisinin sonraki faydaları osilasyonlar teorisinin gelişimi özellikle lineer olmayan osilasyonlar teorisinin gelişimi ile ilişkilendirildi. Lagrange'ın çalışmalarının bir devamı olarak uygulanan küçük ε parametrelili Rayleigh tip denklemler üzerinde B. van der Pol'un çalışmaları önemli rol oynamıştır. Lineer olmayan osilasyonların genel teorisi ise Krylov ve Bogolyubov tarafından geliştirilmiştir. Bu ikili basit matematiksel zorlukların üstesinden geldiler ve perturbasyon teorisini genel kapalı olmayan sistemlere genişlettiler. Lineer olmayan mekaniğin yeni asimptotik metotları bu çalışmalar sayesinde gelişti ve perturbasyon teorisinin metotlarıyla çözümlere daha iyi yaklaşımlar elde etmek mümkün oldu. Dahası sadece periyodik çözümlerin iyileştirilmesi için değil aynı zamanda quasi-periyodik çözümlerin elde edilmesinde de perturbasyon teorisi önemli rol oynamıştır (Encyclopedia of Mathematics, 2011).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde diferansiyel denklemlerin perturbasyon teorisi ile çözümünde kullanılan metotlar örnekleriyle ayrıntılı bir şekilde verilecek. Fakat diferansiyel denklemlerin çok çeşitli olması tezimizin çapını genişletmektedir. Buna rağmen araştırmalarımızın sonucunda ulaşabildiğimiz metotlara sırasıyla yer vereceğiz.

3.1. Parametre ve Koordinat Perturbasyon

Bu bölümde parametre perturbasyon ve koordinat perturbasyon metotlarını göreceğiz. Bu metotların kullanıldığı birçok örneği inceleyeceğiz.

3.1.1. Parametre Perturbasyon

$u(x, \varepsilon)$ fonksiyonunu içeren birçok fiziksel problem x bir skaler veya vektör şeklinde bağımsız değişken ve ε bir parametre olmak üzere $L(u, x, \varepsilon) = 0$ diferansiyel denklemi ve $B(u, \varepsilon) = 0$ sınır koşulları ile sunulabilir. Genelde bu problem kesin bir şekilde çözülemeyebilir. Ancak yukarıdaki problemin kesin ya da daha kolay bir şekilde çözülebilmesi için bir $\varepsilon = \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = 0$ ise ε ayarlanabilir) bulunursa u_n 'ler ε 'dan bağımsız ve $u_0(x)$, $\varepsilon = 0$ durumunda problemin çözümü olmak kaydıyla

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (3.1.1)$$

şeklinde çözüm araştırırız. Bunun için (3.1.1) açılımı $L(u, x, \varepsilon) = 0$ ve $B(u, \varepsilon) = 0$ eşitliklerinde yerlerine yazılır, küçük ε için genişletilir ve ε 'nın her bir kuvveti katsayıları bir araya getirilir. Bu denklemler ε 'nın bütün değerleri için geçerli olacağından ε 'nın her bir katsayısı sıfırlanmalıdır. Çünkü ε 'nın dizisi lineer bağımsızdır. Bu işlem u_n başarılı bir şekilde bulunana kadar devam ettirilir (Nayfeh, 2004).

Örnek: Van Der Pol Denklemi

Küçük ε için

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (3.1.2)$$

Van der Pol'un (1922) denklemini göz önüne alalım. Eğer $\varepsilon = 0$ ise bu denklem genel çözümü

$$u = a \cos(t + \varphi) \quad (3.1.3)$$

olan

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \quad (3.1.4)$$

haline gelir. Burada a ve φ birer sabitlerdir. (3.1.2) denkleminin çözümüne gelişmiş bir yaklaşım belirlemek için

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (3.1.5)$$

biçiminde bir perturbasyon açılımı araştıralım. Bu açılımın birinci ve ikinci türevlerini de hesaplayıp (3.1.2)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots \\ & = \varepsilon [1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2] \left[\frac{du_0}{dt} + \varepsilon \frac{du_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{du_2}{dt} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 \right) + \dots \\ = \varepsilon(1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} + \varepsilon^2 \left[(1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

bulunur.

u_n , ε 'dan bağımsız ve (3.1.7) ε 'nın bütün küçük değerleri için geçerli olduğundan (3.1.7) denkleminin her iki tarafındaki ε 'nın aynı kuvvetli terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır.

ε^0 'ın katsayısı

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0 \quad (3.1.8)$$

ε^1 'nin katsayısı

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = (1 - u_0^2) \frac{du_0}{dt} \quad (3.1.9)$$

ε^2 'nin katsayısı

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = (1 - u_0^2) \frac{du_1}{dt} - 2u_0 u_1 \frac{du_0}{dt} \quad (3.1.10)$$

eşitlikleri bulunur.

(3.1.8) ile (3.1.4)'ün aynı olduğunu ve çözümünün (3.1.3) olduğunu bu örnekte açıkça görmekteyiz.

$$u_0 = a \cos(t + \varphi) \quad (3.1.11)$$

(3.1.11)'deki u_0 değeri (3.1.9)'da yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = -[1 - a^2 \cos^2(t + \varphi)]a \sin(t + \varphi)$$

bulunur.

$$\cos^2(t + \varphi) \sin(t + \varphi) = \frac{\sin(t + \varphi) + \sin 3(t + \varphi)}{4}$$

trigonometrik özdeşliğini kullanarak son denklemi

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = \frac{a^3 - 4a}{4} \sin(t + \varphi) + \frac{1}{4} a^3 \sin 3(t + \varphi) \quad (3.1.12)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Buradan da

$$u_1 = -\frac{a^3 - 4a}{8} t \cos(t + \varphi) - \frac{1}{32} a^3 \sin 3(t + \varphi) \quad (3.1.13)$$

çözümü bulunur.

u_0 ve u_1 'in bulunması ile (3.1.10)'un sağ tarafı bulunmuş olur. Yukarıda bahsi geçen yöntemle u_2 bulunabilir (Nayfeh, 2004).

3.1.2. Koordinat Perturbasyon

Eğer bir fiziksel problem x 'in skaler olduğu $B(u) = 0$ sınır koşullarına tabi olan $L(u, x) = 0$ diferansiyel denklemi ile gösteriliyorsa ve eğer $x \rightarrow x_0$ ($x_0, 0$ 'a ya da ∞ 'a eşit) iken $u(x)$, bilinen bir u_0 formunda alınırsa $x_0 = 0$ olduğunda x 'in kuvvetlerinin terimlerinde ya da $x_0 = \infty$ olduğunda x^{-1} 'in kuvvetlerinin terimlerinde x_0 yakınındaki x için u 'nun u_0 'dan sapmasını belirlemeye girişilir. Bu tekniği iki örnekle gösterelim (Nayfeh, 2004).

Örnek: Sıfırıncı Mertebeden Bessel Denklemi

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (3.1.14)$$

Diferansiyel denkleminin çözümünü inceleyelim. Bu denklem $x = 0$ 'da bir regüler singüler noktaya sahiptir. Dolayısıyla y 'nin Frobenius metodunu kullanarak elde edebileceğimiz bir kuvvet serisi çözümünü öne sürelim. O halde Frobenius metoduna göre

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m} \quad (3.1.15)$$

şeklindedir. (3.2.2) ifadesindeki μ sayısı ve a_m katsayıları (3.1.15), (3.1.14)'in bir çözümü olmasından hareketle belirlenmelidir.

(3.1.15) ve (3.1.15)'nin türevleri (3.1.14)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} [(\mu + m)(\mu + m - 1)a_m x^{\mu+m-1}] \\ + \sum_{m=0}^{\infty} [(\mu + m)a_m x^{\mu+m-1}] + \sum_{m=0}^{\infty} [a_m x^{\mu+m+1}] = 0 \end{aligned}$$

olur ki bu da

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\mu + m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0 \quad (3.1.16)$$

sonucunu doğurur. Buradan

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu + 1)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{m=2}^{\infty} (\mu + m)^2 a_m x^{\mu+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m+1} = 0$$

bulunur ki, ilk toplamda m indisi m+2 ile değiştirilirse

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + (\mu + 1)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{m=0}^{\infty} [(\mu + m + 2)^2 a_{m+2} + a_m] x^{\mu+m+1} = 0 \quad (3.1.17)$$

(3.1.17), x'de bir özdeşlik olduğundan x'in her bir kuvvetinin katsayısı x'den bağımsız bir şekilde 0'a eşit olmalıdır. Bu da

$$\mu^2 a_0 = 0 \quad (3.1.18)$$

$$(\mu + 1)^2 a_1 = 0 \quad (3.1.19)$$

$$(\mu + m + 2)^2 a_{m+2} + a_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.20)$$

eşitliklerini verir bize. İlk denklemde $a_0 \neq 0$ ise $\mu = 0$ olmasını gerektirir. Böylelikle $a_1 = 0$ ve

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\mu+m+2)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.21)$$

olur. Buradan da tek indisli katsayılar için

$$a_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$$

olur ki çift indisli katsayılar için

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} \quad (3.1.22)$$

bulunur.

$a_0 = 1$ için elde edilen çözüme birinci mertebeden Bessel fonksiyonu denir ve J_0 ile gösterilir. Öyleyse

$$J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} + \dots \quad (3.1.23)$$

n. terimin (n-1). terime oranı $-x^2/(2n)^2$ olur ki bu ifade x'in değeri ve işaretine bakmaksızın $n \rightarrow \infty$ iken 0'a gitme eğilimindedir. (3.1.23) serisi J_0 , x'in bütün değerleri için kesin bir şekilde düzgün yakınsaktır (Nayfeh, 2004).

Örnek

Büyük x'ler için

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} \quad (3.1.24)$$

denkleminin çözümünü

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m} \quad (3.1.25)$$

formunda araştıralım. (3.1.25) denklemini ve bu denklemin türevini (3.1.24) denkleminde yerlerine yazacak olursak

$$\sum_{m=1}^{\infty} -m a_m x^{-m-1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{-m} + (a_1 - 1)x^{-1} = 0 \quad (3.1.26)$$

buluruz. İkinci seri toplamında m indisi, m+1 indisi ile değiştirilirse denklem

$$(a_1 - 1)x^{-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m+1} - m a_m) x^{-m-1} = 0 \quad (3.1.27)$$

haline gelir. Bu son denklem x için bir özdeşlik olduğundan her bir x^{-m} 'in katsayısı 0'a eşit olur. Buradan da

$$a_1 = 1, \quad a_{m+1} = m a_m \quad (m \geq 1 \text{ için}) \quad (3.1.28)$$

elde edilir ki

$$a_1 = 1, \quad a_3 = 2!, \quad a_4 = 3!, \quad a_n = (n-1)!$$

bulunur. Böylelikle (3.2.12)

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots \quad (3.1.29)$$

haline gelir. n . terimin $(n-1)$. terime oranı $(n-1)x^{-1}$ olur ve bu ifade $n \rightarrow \infty$ iken x 'in değerine bakılmaksızın sonsuza gider. İfade ıraksak olmasına rağmen bu seri nümerik hesaplama için kullanışlı olacak ve biz bu seriye asimptotik seri diyeceğiz. (3.1.24) denklemimizin özel çözümünü hesaplamak için bu serinin herhangi bir değerde olup olmadığını araştırmak için serinin n terimden sonrasını keserek kalanı belirleriz. Bunun için bizim diferansiyel denklemin özel integrali negatif x 'e yakınsayan

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-1} e^x dx \quad (3.1.30)$$

ile verilir. (3.1.30) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} + e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-2} e^x dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-3} e^x dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + 3! e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-4} e^x dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} \\ &\quad + n! e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

n terimden sonra seri kesilirse kalan n ve x 'in bir fonksiyonu olan

$$R_n = n! e^{-x} \int_{-\infty}^x x^{-n-1} e^x dx \quad (3.1.32)$$

olur.

Serinin yakınsak olması için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ olmalıdır. Bizim örneğimizde bu doğru değildir. $n \rightarrow \infty$ iken $R_n \rightarrow \infty$ 'dur. Bu yüzden serinin tüm x 'ler için ıraksak olması oran testiyle elde ettiğimiz sonuç ile uyumludur. (3.1.29) serisinin kullanışlı olması için n 'i sabit tutmak gerekir. Negatif x için

$$|R_n| \leq n! |x^{-n-1}| e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{n!}{|x^{n+1}|} \quad (3.1.33)$$

olur. Bu yüzden n terimden sonra serinin kesilmesinde yapılan hata nümerik bir şekilde ilk ihmal edilen $(n+1)$. terimden daha azdır. Dahası $|x| \rightarrow \infty$ iken sabit n 'li $R_n \rightarrow 0$ 'dır. Seri ıraksak olsa da sabit bir n için serinin ilk n terimi $|x|$ yeterli miktarda büyük almakla keyfi bir şekilde küçük yapılan hataya sahip y 'yi temsil eder. Böyle bir seriye Poincaré tip asimptotik seri(Poincaré, 1982) denir ve

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (|x| \rightarrow \infty \text{ iken}) \quad (3.1.34)$$

ile gösterilir (Nayfeh, 2004).

3.2. Zorlanmış Koordinatlar Metodu

Bu bölümde bazı diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulma tekniklerini göreceğiz. Zorlanmış koordinatlar metodunun geçmişi 19. yüzyıla dayanır. Lindstedt (1882), Bohlin (1889) ve Gylden (1893) gibi dönemin astronomları

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}), \quad \varepsilon \ll 1$$

gibi denklemlerin perturbasyon çözümlerinde seküler terimlerin ortaya çıkmasından kaçınmak için bu metodu tasarlamışlardır.

Lindstedt'in tekniğinde ana düşünce lineer olmamaklığın sistemin frekansını lineer ω_0 'dan $\omega(\varepsilon)$ 'a değiştirmesi gözlemi üzerine temellendirmiştir. Frekanstaki bu değişikliği açıklamak için $\tau = \omega t$ biçiminde yeni bir değişken tanımlandı ve

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

şeklinde ε 'nin kuvvetlerine göre u ve ω açılımı yapıldı. Lindstedt sonra seküler terimin ortaya çıkmasını önlemek için ω_i ($i \geq 1$) parametrelerini seçti. Poincaré (1892), Lindstedt'in tekniği ile elde edilen açılımın asimptotik olduğunu ispatladı.

Fizikte ve mühendislikteki problemlere yaklaşık çözümlerini elde etmek için bu fikrin çeşitli biçimleri kullanılmaktadır. Fikir, problemlerde frekans, dalga sayısı, dalga hızı, özdeğer ya da enerji seviyesi gibi perturbasyonlar ile değiştirilen bir parametre bulma ve sonra bu parametre kadar iyi iki bağımlı değişkene genişletmedir. Parametredeki perturbasyonlar açılımı düzgün geçerli yapmak için seçilir. Bundan dolayı bu tekniğe zorlanmış parametreler metodu denir.

Birazdan bahsi geçecek bölümde bulunacak parametrenin zayıf lineer olmayan sistemin frekansı, bir kuantum mekaniği probleminde enerji seviyesi, periyodik katsayılı lineer bir problemin normal çözümündeki karakteristik üs, plazma salınımında dalga sayısı ya da frekansı ve sonlu genlikli yüzey dalgalarında dalga hızı ya da frekansı olabileceği verilecek (Nayfeh, 2004).

3.2.1 Lindstedt-Poincaré metodu

Metodu açıklamak için ε 'nin küçük pozitif bir sayı olduğu Duffing denklemi olarak bilinen

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (3.2.1)$$

denklemini inceleyeceğiz.

Bu denkleme

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(t) \quad (3.2.2)$$

şeklindeki Poincaré tip asimptotik genişleme biçiminde yaklaşık çözüm araştıralım. (3.2.2), (3.2.1)'de yerlerine yazılır ve ε 'un aynı kuvvetli katsayıları eşitlenirse

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = a, \quad \dot{u}_0(0) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \quad (3.2.4)$$

denklemleri elde edilir. (3.2.3) denkleminin çözümü başlangıç koşulları sağlayan

$$u_0 = a \cos t \quad (3.2.5)$$

dir. (3.2.5), (3.2.4)'te yerine yazılacak olur ve

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

trigonometrik özdeşliği kullanılırsa

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} \quad (3.2.6)$$

bulunur. (3.2.6)'nın çözümü (3.2.4)'teki başlangıç koşullarını sağlayan

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8} t \sin t + \frac{a^3}{32} (\cos 3t - \cos t) \quad (3.2.7)$$

çözümüdür. Böylelikle

$$u = a \cos t + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.8)$$

çözümü elde edilir. Fakat bu iki terim açılım $t \rightarrow \infty$ iken yaklaşık çözüm değildir. Çünkü $t \rightarrow \infty$ iken $t \sin t$ terimi $u_1/u_0 \rightarrow \infty$ sonucunu doğurur. Bu da bize $t \sin t$ teriminin seküler terim olduğunu gösterir. İşte bu ve bunun gibi seküler terimlerin oluşmasını engellemek için Lindstedt-Poincaré metodu şöyle uygulanır:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (3.2.9)$$

biçiminde verilen diferansiyel denklemlerde

$$t = s(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) \quad (3.2.10)$$

biçiminde yeni bir değişken tanımlanır. Bu yeni değişken tanımlamasıyla (3.2.9) denklemini

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^{-2} \frac{d^2 u}{ds^2} + \omega_0^2 u \\ = \varepsilon f \left[u, (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^{-1} \frac{du}{ds} \right] \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

halini alır.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(s) \quad (3.2.12)$$

açılımı (3.2.11)'de yazılır ve ε 'nin aynı kuvvetli katsayıları eşitlenirse u_m 'leri belirlemek için denklemler elde edilir.

Biz de şimdi (3.2.1) Duffing denklemini Lindstedt-Poincaré metodu ile çözelim. (3.2.10) dönüşümlerini (3.2.1)'de yerine yazarsak (3.2.1) denklemini

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2 (u + \varepsilon u^3) = 0 \quad (3.2.13)$$

haline gelir. (3.2.12), (3.2.13)'te yazıldığında ise ε 'nun aynı kuvvetli katsayılarının eşitlenmesiyle

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} + u_0 = 0 \quad (3.2.14)$$

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0 \quad (3.2.15)$$

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = -3u_0^2 u_1 - 2\omega_1(u_1 + u_0^3) - (\omega_1^2 + 2\omega_2)u_0 \quad (3.2.16)$$

denklemleri elde edilir.

a ve ϕ integrasyon sabiti olmak üzere (3.2.14)'nın genel çözümü

$$u_0 = a \cos(s + \phi) \quad (3.2.17)$$

dir. (3.2.17), (3.2.15)'de yazılacak olursa

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 = -\frac{1}{4}a^3 \cos 3(s + \phi) - \left(\frac{3}{4}a^2 + 2\omega_1\right)a \cos(s + \phi) \quad (3.2.18)$$

denklemini bulunur. $\omega_n \equiv 0$ alınacak olursa (3.2.18), (3.2.6) haline kısalır. Fakat (3.2.6) ifadesi seküler terime sahip idi. Bu seküler terimden kaçınmak için (3.2.18)'nin sağ tarafındaki $\cos(s + \phi)$ 'nin katsayısını yok etmemiz gerekir. Bundan dolayı

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2 \quad (3.2.19)$$

olarak belirlenir. Böylelikle (3.2.18)'nin çözümü

$$u_1 = \frac{1}{32}a^3 \cos 3(s + \phi) \quad (3.2.20)$$

olur. u_0, u_1 ve ω_1 (3.2.16)'de yerlerine yazılarak

$$\frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 = \left(\frac{51}{128} a^4 - 2\omega_2 \right) a \cos(s + \phi) + NST \quad (3.2.21)$$

denklemini elde edilir ki denklemdaki NST(nonsecular terms) seküler terim üretmeyen terimleri temsil eder. Bu denklemden de seküler terimden kurtulmak için

$$\omega_2 = \frac{51}{256} a^4 \quad (3.2.22)$$

alınır. O halde

$$u = a \cos(\omega t + \phi) + \frac{\varepsilon}{32} a^3 \cos 3(\omega t + \phi) + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.23)$$

çözümü bulunmuş olur. Bu çözümde a ve ϕ integrasyon sabiti ve

$$\omega = \left(1 - \frac{3}{8} a^2 \varepsilon + \frac{51}{256} a^4 \varepsilon^2 + \dots \right)^{-1} = 1 + \frac{3}{8} a^2 \varepsilon - \frac{15}{256} a^4 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.24)$$

dır (Nayfeh, 2004).

3.2.2. Mathieu denklemini için değişim eğrileri

Şimdi de üzerinde kapsamlı çalışmalar yapılmış

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos 2t)u = 0 \quad (3.2.25)$$

şeklinde bilinen Mathieu denklemini inceleyeceğiz. Bu denklemin kararsız çözümlerinden ayrılmış kararlı değişim eğrilerini tanımlayacağız.

Bu denklemin aslında periyodik katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin çeşidi olan Hill denkleminin özel bir durumudur. Mathieu denklemini ϕ , π ya da 2π periyoduna sahip, t 'nin bir fonksiyonu ve γ , ε ve δ parametrelerinin değerlerine bağlı reel ya da kompleks değerli olmak üzere

$$u = e^{\gamma t} \phi(t) \quad (3.2.26)$$

formundaki normal çözümlere sahiptir. Floquet teorisi (3.2.25)'in periyodik çözümlerine uyan kararsız çözümlerden kararlıları ayıran $\delta - \varepsilon$ düzlemindeki değişim eğrilerini gösterir. Bu eğrilerin bazıları aşağıda verilen ε 'nin fonksiyonları olan δ ve u 'nun açılımları ile belirlenir.

$$\delta = n^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots \quad (3.2.27)$$

$$u(t) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.2.28)$$

Burada n , 0'a da eşit olabilen bir tamsayıdır ve u_m/u_0 , (3.2.28)'ün düzgün geçerli bir asimptotik açılım olması için bütün m 'ler için sınırlıdır.

(3.2.27) ve (3.2.28), (3.2.25)'de yerlerine yazılırsa, ε 'nin aynı kuvvetli katsayıları eşitlenirse

$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 = 0 \quad (3.2.29)$$

$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -(\delta_1 + \cos 2t)u_0 \quad (3.2.30)$$

$$\ddot{u}_2 + n^2 u_2 = -(\delta_1 + \cos 2t)u_1 - \delta_2 u_0 \quad (3.2.31)$$

denklemleri elde edilir.

u_0 'ın çözümü

$$u_0 = \begin{cases} \cos nt \\ \sin nt \end{cases} \quad n = 0,1,2, \dots \quad (3.2.32)$$

olarak bulunur. Bundan sonra $n = 0,1,2$ için u_1 ve u_2 belirlenir (Nayfeh, 2004).

$n = 0$ durumu:

Bu durumda $u_0 = 1$ olur ve (3.2.30)

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 - \cos 2t \quad (3.2.33)$$

haline gelir. (3.2.28)'ün düzgün geçerli olması için δ_1 , 0'a eşit olmalıdır. Dolayısıyla

$$u_1 = \frac{1}{4} \cos 2t + c \quad (3.2.34)$$

olur. Burada c bir sabittir. u_0 ve u_1 bilindiğinden (3.2.31)

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 - \frac{1}{8} - c \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 4t \quad (3.2.35)$$

haline gelir. u_2/u_0 'ın sınırlı olması için δ_2 'nin $-1/8$ 'e eşit olması gerekir. Buradan da

$$\delta = -\frac{1}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.36)$$

olduğu görülür.

$n = 1$ durumu:

Bu durumda $u_0 = \cos t$ ya da $u_0 = \sin t$ olur. $u_0 = \cos t$ alırsak (3.2.30)

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \quad (3.2.37)$$

olur. u_1/u_0 'ın sınırlı olması için $\delta_1 = -1/2$ olmalıdır. Böylelikle

$$u_1 = \frac{1}{16} \cos 3t \quad (3.2.38)$$

bulunur. (3.2.31) denklemini ise

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\frac{1}{32} + \delta_2\right) \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos 5t \quad (3.2.39)$$

haline gelir. u_2/u_0 'in sınırlı olması koşulu $\delta_2 = -1/32$ olmasına bağlıdır. Bu yüzden

$$\delta = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{32}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.40)$$

olur. $u_0 = \sin t$ alınacak olursa

$$\delta = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{32}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.41)$$

şeklinde değişim eğrileri bulunur.

$n = 2$ durumu:

Bu durumda $u_0 = \cos 2t$ ya da $u_0 = \sin 2t$ olur ve ilk eşitlikten (3.2.30) denklemi

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = -\frac{1}{2} - \delta_1 \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t \quad (3.2.42)$$

haline gelir. u_1/u_0 'in sınırlı olması gerektiğinden $\delta_1 = 0$ olmalıdır. O halde

$$u_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cos 4t \quad (3.2.43)$$

olur. u_0 ve u_1 (3.2.31)'de yazılırsa

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\left(\delta_2 - \frac{5}{48}\right) \cos 2t - \frac{1}{48} \cos 6t \quad (3.2.44)$$

denklemi elde edilir. u_2/u_0 'in sınırlı olması için $\delta_2 = \frac{5}{48}$ almamız gerekir. Bu nedenle

$$\delta = 4 + \frac{5}{48}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.45)$$

olduğu görülür. $u_0 = \sin 2t$ alınması halinde ise

$$\delta = 4 - \frac{1}{48} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

bulunur (Nayfeh, 2004).

3.2.3. Basit bir lineer özdeğer problemi

λ özdeğeri ve u özfonksiyonu göstermek üzere

$$u'' + [\lambda + \varepsilon f(x)]u = 0, \quad f(x) = f(-x) \quad (3.2.46)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.2.47)$$

problemini göz önüne alalım. Burada ε küçük bir değerdedir. Eğer $\varepsilon = 0$ ise özfonksiyonlar ve özdeğerler aşağıdaki gibidir.

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.48)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \quad (3.2.49)$$

Yukarıdaki özfonksiyonlar ortonormaldir. O halde

$$\int_0^1 u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (3.2.50)$$

dir. Buradaki δ_{mn} , Kronecker delta fonksiyonunu temsil etmekte ve bu fonksiyon

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktaydı.

Sıfırdan farklı ama sıfıra yakın ε için u_n ve λ_n 'e bir yaklaşık çözümü

$$u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x + \varepsilon u_{n1} + \varepsilon^2 u_{n2} + \dots \quad (3.2.51)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots \quad (3.2.52)$$

biçiminde alınarak elde edilir. (3.2.51) ve (3.2.52), (3.2.46) ve (3.2.47)'de yerlerine yazılır ε 'nin aynı kuvvetli katsayıları eşitlenirse

$$u_{n1}'' + n^2 \pi^2 u_{n1} = -f(x)u_{n0} - \lambda_{n1} u_{n0}$$

$$u_{n1}(0) = u_{n1}(1) = 0 \quad (3.2.53)$$

$$u_{n2}'' + n^2 \pi^2 u_{n2} = -f(x)u_{n1} - \lambda_{n1} u_{n1} - \lambda_{n2} u_{n0}$$

$$u_{n2}(0) = u_{n2}(1) = 0 \quad (3.2.54)$$

elde edilir. u_{n0} , sıfırıncı indisli olduğundan yaklaşık çözümün ilk terimine eşit olacaktır. O halde

$$u_{n0} = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (3.2.55)$$

tir. Farz edelim ki u_{n1} , u_{n0} 'ın bir lineer kombinasyonu olsun. O halde

$$u_{n1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sqrt{2} \sin m\pi x \quad (3.2.56)$$

olur. Bu çözüm sınır koşullarını sağlar. (3.2.55) ve (3.2.56), (3.2.53)'de yazılacak olursa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} \pi^2 (n^2 - m^2) a_{nm} \sin m\pi x = -\sqrt{2} f(x) \sin n\pi x - \sqrt{2} \lambda_{n1} \sin n\pi x \quad (3.2.57)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de (3.2.57)'yi $\sqrt{2} \sin k\pi x$ ile çarpıp, 0'dan 1'e integralini alıp (3.2.48) özfonksiyonlarının (3.2.50) ortonormallik özelliğini kullanırsak

$$\pi^2(n^2 - k^2)a_{nk} = -F_{nk} - \lambda_{n1}\delta_{nk} \quad (3.2.58)$$

elde edilir. Eşitlikteki

$$F_{nk} = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \sin k\pi x dx \quad (3.2.59)$$

dir.

Eğer $k = n$ ise (3.2.58)'ün sol tarafı sıfırlanır. Bu yüzden

$$\lambda_{n1} = -F_{nn} = -2 \int_0^1 f(x) \sin^2 n\pi x dx \quad (3.2.60)$$

olur.

Ancak eğer $k \neq n$ ise

$$a_{nk} = -\frac{F_{nk}}{\pi^2(n^2 - k^2)} \quad (3.2.61)$$

olur.

(3.2.60) durumu seküler terimlerin kaldırılmasına eşit olacaktır. u_{n1} fonksiyonu ise

$$u_{n1} = -\sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2(n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x + a_{nn} \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (3.2.62)$$

olur. a_{nn} 'in hala belirlenmediğine dikkat ediniz. a_{nn} , son çözümde u_n 'in normalleştirilmesi ile belirlenecek.

İşlemin devamında

$$u_{n2} = \sum_{r=1}^{\infty} b_{nr} \sqrt{2} \sin r\pi x \quad (3.2.63)$$

olduğunu varsayalım. u_{n2} , u_{n1} ve u_{n0} , (3.2.54)'da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} (n^2 - r^2) \sqrt{2} b_{nr} \sin r\pi x \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sqrt{2} f(x) \sin k\pi x - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \lambda_{n1} \sqrt{2} \sin k\pi x \\ - \lambda_{n2} \sqrt{2} \sin n\pi x \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

elde edilir. (3.2.64), $\sqrt{2} \sin s\pi x$ ile çarpılıp 0'dan 1'e integrali alınır ve (3.2.50) normallik özelliği kullanılırsa

$$\pi^2 (n^2 - s^2) b_{ns} = - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F_{ks} - a_{ns} \lambda_{n1} - \lambda_{n2} \delta_{ns} \quad (3.2.65)$$

elde edilir.

Eğer $s = n$ ise (3.2.65)'nin sol tarafı 0'a eşit olur. Buradan

$$\lambda_{n2} = - \sum_{k \neq n} a_{nk} F_{kn} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2 (n^2 - k^2)} \quad (3.2.66)$$

Eğer $s \neq n$ ise (3.2.65)'den

$$b_{ns} = \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk} F_{ks}}{\pi^4 (n^2 - k^2) (n^2 - s^2)} - \frac{a_{nn} F_{ns}}{\pi^2 (n^2 - s^2)} - \frac{F_{nn} F_{ns}}{\pi^4 (n^2 - s^2)^2} \quad (3.2.67)$$

Burada görüldüğü gibi hala b_{nn} belirlenmedi. u_n 'in normalleştirilmesi ile belirlenecek.

u_n 'i normalleştirmek için

$$\int_0^1 (u_{n0} + \varepsilon u_{n1} + \varepsilon^2 u_{n2})^2 dx = 1 \quad (3.2.68)$$

olması gerekir. u_{n0} normalleştirildiğinden

$$\int_0^1 u_{n0} u_{n1} dx = 0 \quad (3.2.69)$$

$$\int_0^1 (2u_{n0} u_{n2} + u_{n1}^2) dx = 0 \quad (3.2.70)$$

eşitliklerini elde ederiz. (3.2.69) durumu $a_{nn} = 0$ olduğunu gösterir iken (3.2.70) durumu

$$b_{nn} = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq n} a_{nk}^2 \quad (3.2.71)$$

sonucunu verir. Böylelikle

$$\begin{aligned} u_n = & \sqrt{2} \sin n\pi x - \varepsilon \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}}{\pi^2(n^2 - k^2)} \sqrt{2} \sin k\pi x \\ & + \varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \left\{ \left[\sum_{s \neq n} \frac{F_{ns} F_{ks}}{\pi^4(n^2 - s^2)(n^2 - k^2)} - \frac{F_{nn} F_{nk}}{\pi^4(n^2 - k^2)^2} \right] \sqrt{2} \sin k\pi x \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{F_{nk}^2}{\pi^4(n^2 - k^2)^2} \sqrt{2} \sin n\pi x \right\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \varepsilon F_{nn} + \varepsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{F_{nk}^2}{\pi^2(n^2 - k^2)} + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.73)$$

sonucu elde edilmiş olur.

Bu bölümde açıklanan açılım metoduna Rayleigh-Schrödinger metodu denir. Metod Schrödinger denkleminin çalışmayan çözümünü iyileştirmek için Schrödinger tarafından geliştirilmiştir (Nayfeh, 2004).

3.2.4. Lighthill tekniği

Lighthill tekniğinin esası sadece küçük ε parametresinin kuvvetlerinde $u(x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon)$ bağımlı değişkenine açılım yapmak değil aynı zamanda ε 'nin kuvvetlerinde bağımsız değişkenlerin birisinin örneğin x_1 'in de açılımını yapmaya dayanır. Lighthill yeni bir bağımsız değişken tanımladı ve ardından s 'e bağlı katsayılı ε 'nin kuvvetlerinde u ve x_1 'in her ikisinin açılımını yaptı. İlk yaklaşım için x_1 ve s 'in aynı olduğunu varsaydı. Aşağıdaki açılımları öne sürdü.

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2.74)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (3.2.75)$$

Açıkça görülüyor ki (3.2.74) açılımı Poincaré tip açılımdır. Sadece s ile x_1 yer değiştirmiş. Bu yüzden bu açılım düzgün geçerli değildir. Bu nedenle Lighthill (3.2.75)'yi tanımlamış ve yukarıdaki her iki genişlemenin düzgün geçerli olması için ξ_m (zorlayan fonksiyonlar)'leri seçmiştir. Bu seçim sayesinde

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} \text{ ve } \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \quad (3.2.76)$$

oranlarının sınırlı olması şartı sağlanarak yaklaşımların düzgün geçerli olması başarılmıştır.

(3.2.74) ve (3.2.75), Lindstedt-Poincaré metodunda kullandığımız (3.2.10) ve (3.2.12) ile karşılaştırıldıklarında Lighthill tekniğinin zorlanmış parametreler metodunun uzatılmış hali olduğu görülür.

Bu teknik Kuo(1953, 1956) tarafından yeniden tasarlandı. Bu yüzden bu teknik PLK (Poincaré-Lighthill-Kuo) metodu olarak da bilinir (Nayfeh, 2004).

Örnek

Tüm x 'ler için $q(x)$ ve $r(x)$ regüler fonksiyonlar olmak üzere

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad y(1) = b > 0 \quad (3.2.77)$$

Birinci mertebeden diferansiyel denkleminin Lighthill tekniği ile çözümüne bakalım.

Öncelikle

$$a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denkleminin denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

haline getirildikten sonraki çözümünün

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c \right]$$

olduğunu hatırlayalım.

(3.2.77)'te $\varepsilon = 0$ alınırsa yeni denklemin çözümü

$$y = \left[e^{\int^x \frac{-q(t)}{t} dt} \right] \left[\int^x \frac{r(t)}{t} \left(e^{\int^t \frac{q(\tau)}{\tau} d\tau} \right) dt + c \right] \quad (3.2.78)$$

$q(0) = q_0$ alalım ve sonra $R(x)$, $x = 0$ 'da regüler olan bir fonksiyon olmak üzere

$$e^{\int \frac{xq(t)}{t} dt} = x^{q_0} R(x) \quad (3.2.79)$$

biçiminde simgeleyelim. $r(x)$ $x = 0$ 'da regüler olduğundan q_0 'ın negatif tamsayı olduğu zamanlar dışında

$$y = R(x) + O(x^{-q_0}) \quad (x \rightarrow 0 \text{ iken}) \quad (3.2.80)$$

q_0 'ın negatif tamsayı olduğu durumda

$$y = R(x) + O(x^{-q_0} \ln x) \quad (x \rightarrow 0 \text{ iken}) \quad (3.2.81)$$

olur.

(3.2.80) ve (3.2.81) denklemleri (3.2.77) denkleminin $x \rightarrow 0$ iken sıfıncı mertebe çözümünün sınırlı olup olmamasının $q_0 < 0$ ya da $q_0 \geq 0$ olmasına bağlı olduğunu gösterir. Metodun detaylarını göstermek için metodu $q_0 = 2$ için özel bir örneğe uygulayalım.

Aşağıdaki problem Lighthill(1949) ve Tsien(1956) tarafından iyileştirilen problemdir.

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = Ae^{-1} \quad (3.2.82)$$

Burada A bir sabittir. Lighthill problemin çözümü için

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m(s) \quad (3.2.83)$$

$$x = s + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(s) \quad (3.2.84)$$

açılımlarını varsaymış ve sonrasında

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m'(s)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m'(s)} \quad (3.2.85)$$

eşitliğini elde etmiş. Sınır koşullarını uygulamak için s 'in değerini belirlemeye gerek duyarız. $x = 1$ 'e karşılık olan s 'i \bar{s} ile gösterelim. Bu işlem için (3.2.84)'de x yerine 1 yazmamız yeterlidir.

$$\bar{s} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(\bar{s}) \quad (3.2.86)$$

eşitliğini çözmeliyiz. ε 'nun kuvvetlerinde \bar{s} 'yi açalım.

$$\bar{s} = 1 + \varepsilon \bar{s}_1 + \varepsilon^2 \bar{s}_2 + \dots \quad (3.2.87)$$

(3.2.87)'ü (3.2.86)'te yazar, açılımı yapar ve ε 'nun aynı kuvvetlerinde katsayıları eşitlersek

$$\bar{s} = 1 - \varepsilon x_1(1) - \varepsilon^2 [x_2(1) - x_1(1)x_1'(1)] + \dots \quad (3.2.88)$$

elde ederiz. Şimdi sınır koşulları yazılabilir.

$$Ae^{-1} = y_0(1) + \varepsilon [y_1(1) - y_0'(1)x_1(1)] + \dots \quad (2.2.89)$$

ya da

$$y_0(1) = Ae^{-1} \quad (3.2.90)$$

$$y_1(1) = y_0'(1)x_1(1) \quad (3.2.91)$$

(3.2.83), (3.2.84) ve (3.2.85) ifadeleri (3.2.82)'da yerlerine yazılırsa ve ε^0 ve ε 'in katsayıları 0'a eşitlenirse

$$sy_0' + (2 + s)y_0 = 0 \quad (3.2.92)$$

$$sy_1' + (2 + s)y_1 = -(2 + s)y_0x_1' - (y_0 + y_0')x_1 - y_0y_0' \quad (3.2.93)$$

bulunur. y_0 'ın çözümü

$$y_0 = Ae^{-s}s^{-2} \quad (3.2.94)$$

dir. Bu çözüm ile (3.2.93) ifadesi

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{y_1}{y_0} \right) = \frac{1}{s} \left[-(2 + s)x_1' + \frac{2}{s}x_1 + Ae^{-s}s^{-2} \left(\frac{2}{s} + 1 \right) \right] \quad (3.2.95)$$

haline gelir.

Eğer $x_1 = 0$ ise (3.2.95) ifadesi $x = 0$ 'da y_0 'dan daha fazla singüler olan y_1 'in bulunduğu açılımdaki birinci merteye terimli denkleme kısalır. Gerçekten $x \rightarrow 0$ iken $y_1 = O(x^{-5})$ olduğu zaman $y_0 = O(x^{-2})$ 'dir. Yukarıdaki açılımı düzgün geçerli kılmak için x_1 , (3.2.95)'nin sağ tarafı yok edilerek y_1 'in y_0 'dan daha fazla singüler olmaması için seçilmelidir. Ancak Lighthill en kötü singülerliği yok etmek için bir düzgün geçerli açılımın x_1 'in seçilmesi ile elde edilebileceğini buldu. Bu yüzden

$$x_1' - \frac{x_1}{s} = \frac{A}{s^3} \quad (3.2.96)$$

ya da

$$x_1 = -\frac{A}{3s^2} \quad (3.2.97)$$

olur. Sonrasında (3.2.95)

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{y_1}{y_0} \right] = -\frac{2A}{3s^3} - \frac{2A}{s^4} + Ae^{-s} \left(\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} \right) \quad (3.2.98)$$

haline gelir. Böylelikle

$$y_1 = A^2 e^{-s} s^{-2} \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right] \quad (3.2.99)$$

bulunur. x_2 uzatılmış fonksiyonu en kötü singülerliğin yok edilmesinden elde edilebilir.

$$x_2 = -\frac{3A^2}{10s^4} \quad (3.2.100)$$

O yüzden

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \left\{ 1 + A\varepsilon \left[\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-\xi} \left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3} \right) d\xi \right] \right\} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{s^6}\right) \quad (3.2.101)$$

olur. Burada

$$x = s - \frac{\varepsilon A}{3s^2} - \frac{3\varepsilon^2 A^2}{10s^4} + O\left(\frac{\varepsilon^3}{s^6}\right) \quad (3.2.102)$$

dır.

$$y = Ae^{-s} s^{-2} \quad (3.2.103)$$

çözümü orijin yakınındaki düzgün geçerli en kaba yaklaşımdır. Burada $s, x \geq 0$ ve $\varepsilon \ll 1$ olduğu zaman yaklaşık bir şekilde x 'e eşit olan

$$x = s - \frac{\varepsilon A}{3s^2} \quad (3.2.104)$$

denkleminin köküdür. Bu açılım x 'in bir pozitif değerinden başlamak için varsayılır ve açılım aşağı $x = 0$ 'a doğru devam etmek için gerekir. Fiziksel bir problem için eğer burada orijin öncesi x 'in bir fonksiyonu olan s 'in bir reel dal noktası var ise bu devamlılık durur. Bu dal nokta (3.2.82) orijinal denkleminin bir singülerliği olan ya $dx/ds=0$ ya da $x + \varepsilon y = 0$ tarafından verilir. Bu durumda dal nokta yalnız ve yalnız $A < 0$ olduğu pozitif $s \approx (-\frac{2A\varepsilon}{3})^{1/3}$ tarafından bulunur. Bu yüzden yukarıdaki açılım eğer $A > 0$ ise orijine doğru değerlendirilecektir ve eğer $A < 0$ ise $x \approx (3/2)(-\frac{2A\varepsilon}{3})^{1/3}$, da durur.

Sonra eğer $A = 1$ ise $x = 0$

$$s = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/3} + \frac{9}{10}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{2/3} + O(\varepsilon) \quad (3.2.105)$$

ifadesine karşılık olur. O halde $x = 0$ 'da

$$y = \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2/3} - \frac{3}{10}\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{1/3} + O(1) \quad (3.2.106)$$

olur (Nayfeh, 2004).

3.2.5. Temple tekniği

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \varepsilon) \quad u(x_0) = u_0 \quad (3.2.107)$$

problemine bir düzgün geçerli açılım belirlemek için Temple (1958), Lighthill'in yaptığı gibi bir yeni s bağımsız değişkeni tanımladı ve

$$u = u(s, \varepsilon) \text{ ve } x = x(s, \varepsilon) \quad (3.2.108)$$

olduğunu varsaydı. Lighthill

$$u = u_0(s) + \varepsilon u_1(s) + \varepsilon^2 u_2(s) + \dots \quad (3.2.109)$$

$$x = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \dots \quad (3.2.110)$$

açılımlarını varsaydı ve bu iki açılımın düzgün geçerli olması için x_i seçti. Temple ise (3.2.107) orijinal denklemini aşağıdaki iki yeni denklemle değiştirdi.

$$\frac{du}{ds} = U(x, u, s, \varepsilon), \quad \frac{dx}{ds} = X(x, u, s, \varepsilon) \quad (3.2.111)$$

Buradaki U ve X , ε 'da regülerdir. Sonra u ve x için Poincaré tip bir açılım belirledi. Bu yüzden Temple tekniği x_i 'leri sistematik biçimde belirler.

Tekniği açıklamak için aşağıdaki diferansiyel denkleme göz atalım.

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0, \quad y(1) = e^{-1} \quad (3.2.112)$$

(3.2.112) denklemini Lighthill tekniğinde gördüğümüz (3.2.82) denkleminin özel bir halidir. Temple yukarıdaki denklemini

$$s \frac{dx}{ds} = x + \varepsilon y, \quad s \frac{dy}{ds} = -(2 + x)y \quad (3.2.113)$$

eşitliklerini kullanarak değiştirdi. Bu denklemler ε 'da analitiktirler ve aşağıdaki açılımlara sahiptirler.

$$y = s^{-2} e^{-s} \left[1 - \varepsilon \int_1^s \phi(t) dt \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.114)$$

$$x = s[1 + \varepsilon \phi(s)] + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.115)$$

Bu açılımlarda

$$\phi(s) = \int_1^s s^{-4} e^{-s} ds \quad (3.2.116)$$

dır. $s \rightarrow 0$ iken

$$x = s - \frac{1}{3}\varepsilon s^{-2} + O(\varepsilon^2 s^{-4}) \quad (3.2.117)$$

$$y = s^{-2} - \frac{1}{6}\varepsilon s^{-4} + O(\varepsilon^2 s^{-6}) \quad (3.2.118)$$

O halde $x = 0$ 'da

$$y = \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2/3} + O(\varepsilon^{-1/3}) \quad (3.2.119)$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm Lighthill tekniği ile elde edilmiş (3.2.106) çözümüyle uyumludur (Nayfeh, 2004).

3.2.6. Zorlanmış koordinatlar metodunun sınırları

Çok çeşitli fiziksel problemlere çözüm olacak düzgün geçerli bir açılım elde etmek için zorlanmış koordinatlar metodu oldukça kullanışlıdır. Ancak bu yöntem bir ya da iki yönde hareket eden dalgaların hiperbolik diferansiyel denklemlerinde başarılı olmasına rağmen eliptik diferansiyel denklemlerde düzgün geçerli açılım vermemektedir. Lighthill (1951) yuvarlak ince hava folyosundan geçen basınç altındaki akışkan için ikinci mertebeden düzgün geçerli açılım elde etmesine rağmen Fox (1953) daha yüksek mertebeden açılımların düzgün geçerli olmadıklarını buldu. Aynı zamanda Fox ikinci mertebeden bir düzgün geçerli açılımın yukarıda bahsi geçen akışkanlar olayında bile elde edilemeyeceğini buldu. Bu yüzden Lighthill daha sonraki makalelerinde metodunun sadece hiperbolik diferansiyel denklemlerinde kullanılmasını tavsiye etti. Bu tavsiyeye rağmen pek çok bilim adamı bu metottan hareketle bir çok problemi başarılı bir şekilde yaklaşık çözümüne kavuşturmuştur (Nayfeh, 2004).

3.3. Eşleme Metodu ve Bileşik Asimptotik Açılımlar Metodu

Zorlanmış koordinatlar metodu bağımsız değişkenlerin tanım bölgesinin bazı yerlerinde bağımlı değişkenin keskin değişim yaptığı durumlarda düzgün geçerli açılımı vermediği görülmüştür. Düzgün geçerli açılımlar elde etmek için keskin

değişikliklerin büyük ölçekler tarafından nitelendiği gerçeğini görmeli ve bu gerçekten yararlanmalıyız. Büyük ölçekler keskin değişim yerlerinin dışında bağımlı değişkenlerin davranışını nitelendiren ölçekten farklıdır.

Eşleme metodunda öncelikle orijinal değişkenleri kullanarak bildiğimiz açılımı(biz bu açılıma dış açılım diyeceğiz) ve büyütülmüş ölçekler kullanarak keskin değişimleri anlatan açılımı(bu açılıma da iç açılım diyeceğiz) belirleyeceğiz. İç açılımlar keskin değişim bölgelerinden uzaklaşırken bozular. Dış açılımlar ise keskin değişim bölgelerine doğru bozular. Bu iç ve dış açılımlar arasında bağlantı kurmak için eşleme prosedürü kullanılır. Bu tekniğe iç ve dış açılımlar metodu ya da Bretherton'dan (1962) sonra eşleme metodu denir.

Bir düzgün geçerli asimptotik açılım belirlemek için ikinci tekniğimiz her bir bağımlı değişken orijinal bağımsız değişkenler tarafından nitelenen bir parçası ile büyütülmüş bağımsız değişkenler tarafından nitelenen parçaların toplamıdır varsayımına dayanmaktadır. Bu metoda bileşik açılımlar metodu diyeceğiz (Nayfeh, 2004).

3.3.1. Eşleme metodu

Eşleme metodunu açıklamak için aşağıdaki sınır değer problemini kullanacağız.

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0 \quad (3.3.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (3.3.2)$$

Önce bu problem için Poincaré tip açılımı inceleyelim.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y^n(x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.3.3)$$

açılımını (3.3.1)'de yerine yazar ve ε 'nun aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek

$$\begin{aligned} &\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \dots) + (y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \dots) \\ &\qquad\qquad\qquad + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

$$(y_0' + y_0) + \varepsilon(y_0'' + y_1' + y_1) + \varepsilon^2(y_1'' + y_2' + y_2) + \dots = 0$$

$$y_0' + y_0 = 0 \tag{3.3.4}$$

$$y_n' + y_n = -y_{n-1}'' \tag{3.3.5}$$

denklemleri elde edilir. Rahatlıkla görülebilir ki n. seviyedeki yaklaşımı bulmak için y_{n-1} 'in bilinmesi gerekir. (3.3.4)'ü çözecek olursak

$$y_0 = e^{-x} \cdot c$$

sonucu elde edilir. (3.3.2) sınır koşullarını sağlamaya çalışalım.

$$y_0(0) = c = \alpha$$

$$y_0(1) = \frac{c}{e} = \beta$$

eşitlikleri $e = \frac{\alpha}{\beta}$ sonucuna götürür ki bu da e'nin irrasyonel olması gerçeğine aykırıdır. Dolayısıyla (3.3.2) sınır koşullarının her ikisi (3.3.4) ve (3.3.5)'in çözümlerini sağlamaz.

Eğer ε 'u sıfıra eşitlersek

$$y' + y = 0 \tag{3.3.6}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz ki bu kısaltılmış birinci mertebeden diferansiyel denklem (3.3.2) sınır koşullarının da her ikisini sağlamaz. Sonuç olarak iki sınır

koşulundan birisi bırakılmalıdır. Sınır koşulunun vazgeçildiği yerde y , kısaltılmış denklemin çözümünden daha çok hızlı bir şekilde değişir. Bu hızlı değişimin olduğu çok küçük aralığa sınır tabaka denir.

Şimdi (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerini ilk iki terim için çözerek ve $y(1) = \beta$ sınır koşuluna tabi olarak önce

$$y_0 = e^{-x} \cdot e \cdot \beta = \beta e^{1-x}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin ikinci türevini bulalım.

$$y_0' = -\beta e^{1-x}$$

$$y_0'' = \beta e^{1-x}$$

Bulduğumuz ikinci türevi $n=1$ için (3.3.5)'te yazalım.

$$y_1' + y_1 = -y_0'' = -\beta e^{1-x}$$

Yukarıda elde ettiğimiz homojen olmayan diferansiyel denklemini çözelim. Dolayısıyla çözümümüz $y = y_c + y_p$ formunda olacaktır. Homojen kısmın çözümü $y_c = e^{-x} \cdot c$ olduğundan $y(1) = \beta$ koşulu sağlatılarak $y_1 = \beta e^{1-x} - x\beta e^{1-x}$

bulunur. O halde yaklaşık çözümümüz

$$y = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta e^{1-x}(1-x) + O(\varepsilon^2) \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Orijinde $y = \beta e(1 + \varepsilon)$ olduğu görülür ki genellikle bu sonuç (3.3.2)'deki α 'dan farklıdır. Dolayısıyla (3.3.3)'de hata $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün değildir ve (3.3.3) açılımı orijinde kırılır.

Düzgün olmamasının doğasını daha ileri seviyede anlamak için (3.3.1) ve (3.3.2)'nin kesin çözümüne bakalım. (3.3.1)'in karakteristik denklemi

$$\varepsilon r^2 + r + 1 = 0 \quad (3.3.8)$$

dir. Bu denklemden

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad (3.3.9)$$

elde edilir ki çözümümüz $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ formunda olmalıdır. (3.3.2) sınır koşulları denkleme sağlatılırsa

$$\alpha = c_1 + c_2$$

$$\beta = c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} \quad (3.3.10)$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu sistemden

$$c_1 = \frac{\beta - \alpha e^{r_2}}{e^{r_1} - e^{r_2}}$$

$$c_2 = \frac{\beta - \alpha e^{r_1}}{e^{r_2} - e^{r_1}}$$

elde edilir. O halde kesin çözümümüz

$$y = \frac{(\alpha e^{r_2} - \beta) e^{r_1 x} + (\beta - \alpha e^{r_1}) e^{r_2 x}}{e^{r_2} - e^{r_1}} \quad (3.3.11)$$

şeklindedir. x sabit tutulduğunda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \beta e^{1-x}$$

sonucu ile (3.3.7)'deki ilk terim uyum içindedir ve bu sonuç $y(1) = \beta$ sınır koşulunu sağlar. $x=0$ 'da neler olduğunu anlamak için y 'yi kesin çözümden ε mertebesine tahmin edelim ve bunu \tilde{y} ile gösterelim. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$r_1 = a_{-1}\varepsilon^{-1} + a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + \dots = \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

açılımında ε 'nin eşit kuvvetlerinin katsayılarını bulalım.

$$[2\varepsilon(a_{-1}\varepsilon^{-1} + a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + \dots) + 1]^2 = (\sqrt{1-4\varepsilon})^2$$

$$[(2a_{-1} + 1) + 2a_0\varepsilon + 2a_1\varepsilon^2 + \dots]^2 = 1 - 4\varepsilon$$

$$(2a_{-1} + 1)^2 = 1, \quad 4a_0(2a_{-1} + 1) = -4\varepsilon$$

Üstteki eşitlikler kullanılarak

$$a_{-1} = 0, \quad a_0 = -1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$r_1 = -1 + O(\varepsilon) \tag{3.3.12}$$

sonucu elde edilir. Benzer yöntemle

$$[2\varepsilon(a_{-1}\varepsilon^{-1} + a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + \dots) + 1]^2 = (-\sqrt{1-4\varepsilon})^2$$

$$[(2a_{-1} + 1) + 2a_0\varepsilon + 2a_1\varepsilon^2 + \dots]^2 = 1 - 4\varepsilon$$

$$(2a_{-1} + 1)^2 = 1, \quad 4a_0(2a_{-1} + 1) = -4\varepsilon$$

Üstteki eşitlikler kullanılarak

$$a_{-1} = -1, \quad a_0 = 1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$r_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon) \quad (3.3.13)$$

olur. O halde (3.3.12) ve (3.3.13) ifadeleri (3.3.11)'de yazılırsa

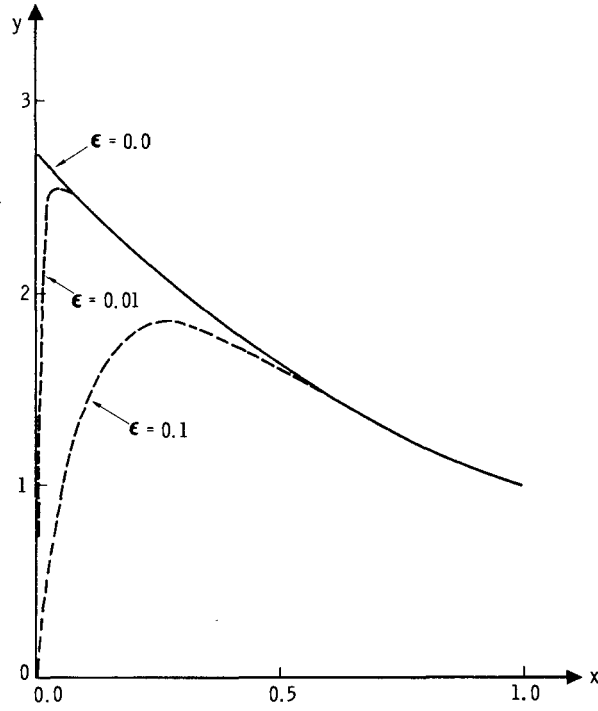
$$\tilde{y} = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+x} + O(\varepsilon) \quad (3.3.14)$$

bulunur. Bu tahminde bulunan $\frac{e^x}{e^{x/\varepsilon}}$ orantılı terimi ihmal edilmedi. Çünkü tahmin sadece $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğu zaman değil aynı zamanda $x \rightarrow 0$ olduğu zamanda da yapılıyor. \tilde{y} 'nin davranışı, \hat{y} ile gösterilen (3.3.7)'nin ilk terimi ile birlikte şekil 3.1.'te gösteriliyor. Şekil 3.1.'ten görülebileceği gibi küçük ε için \tilde{y} sınır koşullarını sağlamak için hızlı bir şekilde değiştiği orijin yakınındaki küçük bir bölge dışında \hat{y} ile uyumludur. Gerçektende

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \alpha \quad (3.3.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \beta e \quad (3.3.16)$$

limit değerleri $y(x; \varepsilon)$ kesin çözümünün \hat{y} (3.3.7'nin ilk terimi)'a düzgün olmayan yakınsaklığını gösterir.



Şekil 3.1. $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ özel durumu

Yukarıda bahsettiğimiz ve önceden de kısaca ismini zikrettiğimiz y 'nin hızlı bir şekilde değiştiği bu küçük aralığa akışkanlar mekaniğinde sınır tabaka, katı mekaniğinde keskin tabaka ve elektrodinamikte kabuk tabaka ismi verilir.

Sınır tabakada geçerli bir açılım tanımlamak için bu tabakayı $\zeta = \frac{x}{\epsilon}$ germe dönüşümünü kullanarak büyütürüz. Bu dönüşüm ile (3.3.1)

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} + \epsilon y = 0 \quad (3.3.17)$$

haline gelir. $\epsilon \rightarrow 0$ iken

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad (3.3.18)$$

haline kısalır. (3.3.18)'in genel çözümü A ve B sabit olmak üzere

$$y = A + Be^{-\zeta} \quad (3.3.19)$$

şeklindedir. Bu çözüm sınır tabakada geçerli olduğundan orijinde de geçerlidir. Bu yüzden çözüm $y(x=0) = \alpha$ sınır koşulunu sağlamalıdır. $x=0$ 'a karşılık olan $\zeta=0$ olduğundan $y(\zeta=0) = \alpha$ olur ki dolayısıyla $B = \alpha - A$ olur ve (3.3.19)

$$y = A + (\alpha - A)e^{-\zeta} \quad (3.3.20)$$

haline gelir. Biz bu çözümü y^i ile göstereceğiz ve iç çözüm ya da iç açılım diye isimlendireceğiz.

$\varepsilon \rightarrow 0$ iken sabit $x \neq 0$ için $y(1) = \beta$ sınır koşuluna tabi (3.3.6) kısaltılmış denklemin çözümü olan

$$y = \beta e^{1-x} \quad (3.3.21)$$

ifadesine ise dış çözüm diyeceğiz ve y^o ile göstereceğiz.

A keyfi sabitini bulmak için

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o = \beta e \quad (3.3.22)$$

limitini dikkate alacağız. Bir de $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\zeta = \frac{x}{\varepsilon}$ germe dönüşümünden $\zeta \rightarrow \infty$ 'a karşılık olan herhangi sabit küçük x_0 değeri ve

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i = A \quad (3.3.23)$$

limiti dikkate alınacak. Bu limitler $x = x_0 \neq 0$ 'ın çok küçük bir değerinde y 'nin aynı değerini vereceğinden

$$A = \beta e \quad (3.3.24)$$

dır. O halde

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} \quad (3.3.25)$$

olur.

İç ve dış açılımların belirlenmesinde iki farklı limit işlemi kullanırız. Bunlar

$$y^o = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \text{ sabit}}} y(x; \varepsilon) \quad (3.3.26)$$

şeklinde tanımlanan dış limit ve

$$y^i = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \zeta \text{ sabit}}} y(\varepsilon \zeta; \varepsilon) \quad (3.3.27)$$

şeklinde tanımlanan iç limitdir.

A'nın belirlenmesi işlemine eşleme deriz ve eşleme prensibi diye isimlendirdiğimiz

$$\lim_{x \rightarrow 0} y^o(x; \varepsilon) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} y^i(x; \varepsilon) \quad (3.3.28)$$

eşitliğini kullanırız. Dış çözümün iç limitini $(y^o)^i$ ile, iç çözümün dış limitini ise $(y^i)^o$ ile gösteririz.

Bizim orijinal denkleminize bir yaklaşık çözüm sifıra yakın olmayan x değeri için 3.3.21 ile ve x=0 yakınlarında 3.3.23 ile verilir. Bütün x'lerin bir fonksiyonu olarak y'yi hesaplamak için x'in bazı küçük değerlerinde (örneğin çözümlerin kesiştikleri yerdeki değerler) x artarken bir çözümden öteki çözüme geçiş yapmalıyız. Bu geçiş elverişli değildir. Ve biz bu çözümlerden bileşik çözüm şeklinde isimlendirdiğimiz, y^c ile gösterdiğimiz tek bir düzgün geçerli çözüm oluştururuz. Erdélyi'nin ačíklamalarından

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \quad (3.3.29)$$

elde edilir.

Madem

$$((y^o)^i)^o = (y^o)^i = (y^i)^o = ((y^o)^i)^i$$

dir, o halde

$$\begin{aligned}(y^c)^o &= y^o + (y^i)^o - (y^o)^i = y^o \\ (y^c)^i &= (y^o)^i + y^i - (y^o)^i = y^i\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

olur. Bu yüzden bileşik çözüm dış bölgede dış çözüm kadar iyi bir yaklaşımdır. Benzer şekilde bileşik çözüm iç bölgede iç çözüm kadar iyi bir yaklaşımdır. Bu ise bize bileşik çözümün iç ve dış bölge arasındaki farkı içeren x 'in bütün aralığı üzerinde düzgün bir yaklaşım olduğu fikrini verir. Eşlemenin başarısı iç ve dış çözümlerin geçerliliğinde üst üste gelen bölgenin varlığından dolayı olmuş olabilir. Bu yüzden burada iki bölge arasında fark yoktur.

3.3.21 ve 3.3.23'ü ekler $(y^o)^i = (y^i)^o$ eşitliğinden elde ettiğimiz βe 'u çıkartırsak

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon)\tag{3.3.31}$$

bileşik çözümünü elde ederiz (Nayfeh, 2004).

3.3.2. Van Dyke'in eşleme prensibi

Bölüm 3.3.1'de (3.3.2) koşulları altındaki (3.3.1) denkleminin ε mertebesine kadar iç ve dış çözümlerini araştırdığımızda

$$y^o = \beta[1 + \varepsilon(1-x)]e^{1-x} + O(\varepsilon^2)\tag{3.3.32}$$

$$y^i = \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \varepsilon\{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})\zeta]\} + O(\varepsilon^2)\tag{3.3.33}$$

sonuçlarını elde ederiz. Son eşitlikte A_0 ve A_1 keyfi sabitlerdir.

Şimdi bir terim dış açılım ile bir terim iç açılım eşlemesi yapmak için sistematik bir şekilde aşağıdaki işlemler yürütülür.

$$\text{Bir terim dış açılım: } y \sim \beta e^{1-x} \quad (3.3.34a)$$

$$\text{İç değişken yazılırsa: } = \beta e^{1-\varepsilon\zeta} \quad (3.3.34b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = \beta e(1 - \varepsilon\zeta + \dots) \quad (3.3.34c)$$

$$\text{Bir terim iç açılım: } = \beta e \quad (3.3.34d)$$

$$\text{Bir terim iç açılım: } y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta}) \quad (3.3.35a)$$

$$\text{Dış değişken yazılırsa: } = \alpha - A_0(1 - e^{-x/\varepsilon}) \quad (3.3.35b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = \alpha - A_0 \quad (3.3.35c)$$

$$\text{Bir terim dış açılım: } = \alpha - A_0 \quad (3.3.35d)$$

(3.3.34d) ve (3.3.35d) birbirine eşitlenirse

$$\beta e = \alpha - A_0 \text{ yada } A_0 = \alpha - \beta e \quad (3.3.36)$$

Şimdi de bir terim dış açılım ile iki terim iç açılımı eşleyelim.

$$\text{Bir terim dış açılım: } y \sim \beta e^{1-x} \quad (3.3.37a)$$

$$\text{İç değişken yazılırsa: } = \beta e^{1-\varepsilon\zeta} \quad (3.3.37b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = \beta e \left(1 - \varepsilon \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta^2 + \dots \right) \quad (3.3.37c)$$

$$\text{İki terim iç açılım: } = \beta e (1 - \varepsilon \zeta) \quad (3.3.37d)$$

$$\text{İki terim iç açılım: } y \sim \alpha - A_0 (1 - e^{-\zeta})$$

$$+ \varepsilon \{ A_1 (1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0 (1 + e^{-\zeta}) \zeta] \} \quad (3.3.38a)$$

$$\text{Dış değişken yazılırsa: } = \alpha - A_0 \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right)$$

$$+ \varepsilon \left\{ A_1 \left(1 - e^{-x/\varepsilon} \right) - \left[\alpha - A_0 \left(1 + e^{-x/\varepsilon} \right) \frac{x}{\varepsilon} \right] \right\} \quad (3.3.38b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = (\alpha - A_0)(1 - x) + \varepsilon A_1 \quad (3.3.38c)$$

$$\text{Bir terim dış açılım: } = (\alpha - A_0)(1 - x) \quad (3.3.38d)$$

(3.3.37d) ve (3.3.38d) birbirine eşitlenirse

$$\beta e (1 - \varepsilon \zeta) = (\alpha - A_0)(1 - x) \quad (3.3.39)$$

$x = \varepsilon \zeta$ olduğundan daha önce bulduğumuz $A_0 = \alpha - \beta e$ sonucunu buluruz. A_1 hakkında ise hiçbir bilgi bulamayız.

Şimdi ise iki terim dış açılım ile iki terim iç açılımı eşleyelim.

$$\text{İki terim dış açılım: } y \sim \beta [1 + \varepsilon(1 - x)] e^{1-x} \quad (3.3.40a)$$

$$\text{İç değişken yazılırsa: } = \beta [1 + \varepsilon(1 - \varepsilon \zeta)] e^{1-\varepsilon \zeta} \quad (3.3.40b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = \beta e (1 + \varepsilon - \varepsilon \zeta + \dots) \quad (3.3.40c)$$

$$\text{İki terim iç açılım: } = \beta e(1 + \varepsilon - \varepsilon \zeta) \quad (3.3.40d)$$

$$\text{İki terim iç açılım: } y \sim \alpha - A_0(1 - e^{-\zeta})$$

$$+ \varepsilon \{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})\zeta]\} \quad (3.3.41a)$$

$$\text{Dış değişken yazılırsa: } = \alpha - A_0 \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)$$

$$+ \varepsilon \left\{A_1 \left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right) - \left[\alpha - A_0 \left(1 + e^{-x/\varepsilon}\right) \frac{x}{\varepsilon}\right]\right\} \quad (3.3.41b)$$

$$\text{Küçük } \varepsilon \text{ için açılırsa: } = (\alpha - A_0)(1 - x) + \varepsilon A_1 \quad (3.3.41c)$$

$$\text{İki terim dış açılım: } = (\alpha - A_0)(1 - x) + \varepsilon A_1 \quad (3.3.41d)$$

(3.3.40d) ve (3.3.41d) birbirine eşitlenirse

$$A_1 = \beta e \quad (3.3.42)$$

bulunur. O halde iç çözümümüz

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta} + \varepsilon \{\beta e(1 - e^{-\zeta}) - [\beta e - (\alpha - \beta e)e^{-\zeta}]\zeta\} + O(\varepsilon^2) \quad (3.3.43)$$

şeklindedir.

Bileşik açılım ise (3.3.29)'dan hareketle

$$y^c = \beta [1 + \varepsilon(1 - x)]e^{1-x} + [(\alpha - \beta e)(1 + x) - \varepsilon \beta e]e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (3.3.44)$$

bulunur (Nayfeh, 2004).

3.3.3. Bileşik açılım

Önceki tartışmalarda olduğu gibi iç açılım genelde $x = O(\varepsilon)$ bölgesinden buraya geçerli olmaz iken dış açılım orijin yakınında geçerli olmaz. Bütün aralık boyunca bir geçerli açılım tanımlamak için 1959'da Vasil'eva, 1961'de Erdélyi'nin açıkladığı y^c ile gösterilen bir bileşik açılım oluşturmalıyız. Bu bileşik açılım

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \quad (3.3.45)$$

şeklinde olacak.

Eşleme prensibi

$$(y^o)^i = (y^i)^o \quad (3.3.46)$$

eşitliğini gerektireceğinden bu iki form birbirine eşittir. Madem

$$(y^i)^i = y^i, \quad (y^o)^o = y^o \quad (3.3.47)$$

eşitlikleri söz konusu o halde (3.3.1) ifadesi

$$(y^c)^o = y^o \quad \text{ve} \quad (y^c)^i = y^i \quad (3.3.48)$$

eşitliklerini beraberinde getirir. Bu yüzden y^c , dış bölgede y^o kadar y 'ye iyi bir yaklaşımdır. Ve aynı zamanda y^c , iç bölgede de y^i kadar y 'ye iyi bir yaklaşımdır.

$(y^o)^i$ 'yi ne (3.3.40d) ne de (3.3.41d) tarafından elde edilemediğinden bir bileşik açılım dış açılım ile iç açılım toplamından dış açılımın iç açılımını çıkartmakla oluşturulabilir.

Böylelikle

$$y^c = \beta[1 + \varepsilon(1 - x)]e^{1-x} + [(\alpha - \beta\varepsilon)(1 + x) - \varepsilon\beta\varepsilon]e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (3.3.49)$$

sonucu elde edilir (Nayfeh, 2004).

3.4. Parametrelerin Değişimi ve Ortalama Metodu

3.4.1. Parametrelerin değişimi

Aslında bu teknik homojen denklemlere karşılık gelen genel çözümler bilindiği zaman homojen olmayan lineer denklemleri çözmek için geliştirildi. Bir örnek olarak

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \quad (3.4.1)$$

ikinci mertebeden homojen olmayan lineer genel denklemini göz önüne alalım.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ homojen denkleme karşılık gelen lineer bağımsız iki çözüm olsun. Sonrasında A_1 ve A_2 fonksiyonları tanımlanma ihtiyacı olan fonksiyonlar olmak üzere (3.4.1)'in çözümünü

$$y = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x) \quad (3.4.2)$$

formunda varsayalım. Homojen olmama durumunda A_1 ve A_2 'nin değişimine izin verilirken homojen problemde A_1 ve A_2 'nin sabit olduğuna dikkat etmemiz gerekir.

x ile ilgili olan (3.4.2) diferansiyellenmesi

$$y' = A_1y_1' + A_2y_2' + A_1'y_1 + A_2'y_2 \quad (3.4.3)$$

sonucunu verir. A_1, A_2 ve y bilinmeyen fonksiyonlarına sahip olduğumuzdan sadece (3.4.1) ve (3.4.2) denklemleri elimizde iken A_1, A_2 ve y üzerinde birden fazla koşulu zorlamakta özgürüz.

$$A_1'y_1 + A_2'y_2 = 0 \quad (3.4.4)$$

koşulunu varsayalım. Sonrasında (3.4.3) ifadesi

$$y' = A_1 y_1' + A_2 y_2' \quad (3.4.5)$$

haline gelir. (3.4.5), x 'e göre diferansiyellenirse

$$y'' = A_1 y_1'' + A_2 y_2'' + A_1' y_1' + A_2' y_2' \quad (3.4.6)$$

ifadesi elde edilir. (3.4.1)'de bulunan y, y' ve y'' yerlerine yazılır ve y_1 ve y_2 'nin homojen denkleme karşılık gelen çözümler olduğu bilgisini kullanırsak

$$A_1' y_1' + A_2' y_2' = R \quad (3.4.7)$$

ifadesini elde ederiz. A_1' ve A_2' için (3.4.4) ve (3.4.7) denklemleri çözüldüğünde

$$A_1' = \frac{-R(x)y_2(x)}{w(x)} \quad (3.4.8)$$

$$A_2' = \frac{R(x)y_1(x)}{w(x)} \quad (3.4.9)$$

sonuçları elde edilir ki bu eşitliklerde geçen $W(x)$, Wronskian diye adlandırılır ve

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (3.4.10)$$

formülüyle bulunur. O halde (3.4.1)'in genel çözümü

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \quad (3.4.11)$$

tir. Burada c_1 ve c_2 sabitleri,

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w(t)} R(t) dt \quad (3.4.12)$$

eşitliği ile bulunabilen y_p ise özel çözümü anlatmaktadır.

Bu teknik bağımlı ve bağımsız değişkenlerin her ikisinin de bir fonksiyonu olan homojen olmayan problemlerin çözümlerinin tanımlanması için geliştirilmiştir.

Homojen sınır koşullarına bağlı olan

$$H_0\psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -H_1\psi \quad (3.4.13)$$

Schrödinger denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde H_0 ve H_1 , zamandan bağımsız ve zamana bağlı lineer operatörlerdir. Varsayalım ki aynı homojen sınır koşullarına bağlı

$$H_0\psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (3.4.14)$$

olsun ve (3.4.14) denklemi

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\hbar} E_n \quad (3.4.15)$$

çözümüne sahip olsun. Burada a_n , bir sabit ve u_n ve E_n , aynı homojen koşullar ile

$$H_0 u = E u \quad (3.4.16)$$

eşitliğinin özfonksiyon ve özdeğerleridir. u_n özfonksiyonları D bölgesi üzerinde ortonormal oldukları varsayılır.

Varsayalım ki pertürbe edilmiş problemin çözümleri (3.4.15) ile verilsin ama a_n zaman değişkenli olsun. (3.4.15), (3.4.13)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [H_0 u_n(x) - E_n u_n(x)] e^{-i\omega_n t} + \frac{h}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Denklemin sol tarafındaki ilk terim (3.4.16)'dan dolayı sıfıra eşit olur. (3.4.17) ifadesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} u_n(x) e^{-i\omega_n t} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] \quad (3.4.18)$$

haline gelir. (3.4.18) ifadesi $\bar{u}_m(x)$ ile çarpılır, D bölgesi üzerinde integrali alınır ve u_n 'lerin ortonormalliği kullanılırsa

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_m t} H_{1mn} \quad (3.4.19)$$

elde edilir. Burada

$$H_{1mn} = \int_D \bar{u}_m(x) H_1 [a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}] dx \quad (3.4.20)$$

dir. Eğer H_1 t ile ilgili olan herhangi bir türev içermezse (3.4.19)

$$\frac{da_m}{dt} = - \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_{mn} t} \tilde{H}_{1mn} \quad (3.4.21)$$

haline gelir. Burada

$$\omega_{mn} = \frac{2\pi}{h} (E_m - E_n), \quad \tilde{H}_{1mn} = \int_D \bar{u}_m(x) H_1 [u_n(x)] dx \quad (3.4.22)$$

dir. (3.4.21) denklemini (3.4.13)'te verilen tüm probleme eşittir. Eğer H_1 küçük bir pertürbasyon ise biz

$$a_m = a_{m0} + a_{m1} + a_{m2} + \dots \quad (3.4.23)$$

gibi bir a_m açılımı yapabiliriz. Burada a_{m0} bir sabit ve $a_m'e(t=0)$ eşittir ve $a_{mn} \ll a_{m(n-1)}$ 'dir. a_m 'e ilk yaklaşım

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} e^{i\omega_{mn}t} \tilde{H}_{1mn} \quad (3.4.24)$$

tarafından verilir. Eğer toplamda $a_{n0} = \delta_{nk}$ ise (3.4.24) ifadesi

$$\frac{da_{m1}}{dt} = -\frac{2\pi i}{h} e^{i\omega_{mk}t} \tilde{H}_{1mk} \quad (3.4.25)$$

haline gelir. Örnek olarak

$$H_1 \psi = \psi f(x) \sin \omega t \quad (3.4.26)$$

şeklinde alalım. Sonrasında

$$\tilde{H}_{1mk} = f_{mk} \sin \omega t = -\frac{1}{2} i f_{mk} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \quad (3.4.27)$$

dır ki burada

$f_{mk} = \int_D \bar{u}_m(x) f(x) u_k(x) dx$ 'dir. (3.4.25)'de yerine yazılır ve a_{m1} için çözümlerse

$$a_{m1} = i \frac{\pi f_{mk}}{h} \left[\frac{e^{i(\omega_{mk}+\omega)t-1}}{\omega_{mk}+\omega} - \frac{e^{i(\omega_{mk}-\omega)t-1}}{\omega_{mk}-\omega} \right], \quad m \neq k \quad (3.4.28)$$

ifadesini elde ederiz (Nayfeh, 2004).

3.4.2. Ortalama Metodu

Van der Pol 1926'da birazdan aşağıda tanıtacağımız kendi adıyla anılan

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} + \varepsilon k \lambda \cos \lambda t \quad (3.4.29)$$

denkleminin periyodik çözümünü araştırırken bir teknik düzenledi. Bu denklemdaki ε 'nin çok küçük olduğu varsayılır. Ayrıca kuantum hali frekansı olan λ 'nın ε mertebesinde küçük bir değer ile doğal frekans olan ω_0 'dan farklı olduğu varsayılır. Bu varsayımlar altında (3.4.29)'in çözümü

$$u(t) = a_1(t) \cos \lambda t + a_2(t) \sin \lambda t \quad (3.4.30)$$

formunda olduğu düşünülür. Burada $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ zamanın çok yavaş değişen fonksiyonları olarak farzedilir. Öyle ki $da_i/dt = O(\varepsilon)$ ve $d^2a_i/dt^2 = O(\varepsilon^2)$ 'dir.

(3.4.30) ifadesi iki kere diferansiyellendiğinde

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & -\lambda^2 a_1 \cos \lambda t - \lambda^2 a_2 \sin \lambda t - 2\dot{a}_1 \lambda \sin \lambda t + 2\dot{a}_2 \lambda \cos \lambda t + \ddot{a}_1 \cos \lambda t \\ & + \ddot{a}_2 \sin \lambda t \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

sonucu bulunur. (3.4.30) ve (3.4.31), (3.4.29)'de yerlerine yazılır, ε 'dan daha yüksek mertebeli terimler ihmal edilir, $\ddot{a}_i = O(\varepsilon^2)$ iken $\dot{a}_i = O(\varepsilon)$ olduğu hatırd tutulur ve $\cos \lambda t$ ile $\sin \lambda t$ 'nin her iki taraf için katsayıları eşitlenirse

$$2\dot{a}_1 + \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_2 - \varepsilon a_1(1 - \rho) = 0 \quad (3.4.32)$$

$$2\dot{a}_2 + \frac{\lambda^2 - \omega_0^2}{\lambda} a_1 - \varepsilon a_2(1 - \rho) = \varepsilon k \quad (3.4.33)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde

$$\rho = \frac{a^2}{4} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4} \quad (3.4.34)$$

olduğu görülebilir.

(3.4.29)'in periyodik çözümünü analiz etmek için bu çözümlerin (3.4.32) ve (3.4.33)'in sabit çözümlerine uymasına dikkat ederiz ki bu sabit çözümler de

$$2\sigma a_{20} - a_{10}(1 - \rho_0) = 0 \quad (3.4.35)$$

$$-2\sigma a_{10} - a_{20}(1 - \rho_0) = k \quad (3.4.36)$$

denklemlerinin çözümlerine uyar. Burada σ ayarlama faktörüdür ve

$$\sigma = \frac{\lambda - \omega_0}{\varepsilon} \quad (3.4.37)$$

ile verilir.

(3.4.32) ve (3.4.33)'deki $O(\varepsilon^2)$ 'nin terimleri ihmal edilmektedir. (3.4.35) ve (3.4.36)'in kareleri toplanması ve (3.4.34)'nin kullanılması ile

$$\rho_0[4\sigma^2 + (1 - \rho_0)^2] = \frac{k^2}{4} \quad (3.4.38)$$

tepki denkleminin frekansı elde edilir (Nayfeh, 2004).

3.4.3. Krylov-Bogoliubov tekniği

Bu tekniği

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) \quad (3.4.39)$$

şeklindeki ikinci mertebeden genel lineer olmayan diferansiyel denklem üzerinde tartışacağız. $\varepsilon = 0$ durumunda (3.4.39)'in çözümü a ve θ birer sabit olmak üzere

$$u = a \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (3.4.40)$$

şeklinde olacaktır. ε küçük ama sıfırdan farklı olmak üzere (3.4.39)'e yaklaşık çözümü tanımlamak için Krylov ve Bogoliubov 1947'de denklemin çözümünün a ve θ zaman değişkeni olmak üzere (3.4.40) ile verildiğini ve

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \phi, \quad \phi = \omega_0 t + \theta \quad (3.4.41)$$

koşullarına bağlı olacağını varsaymışlardı.

Bu yüzden bu teknik bir önceki bölümde gördüğümüz Van Der Pol tekniğine benzerdir. Sadece ilk terimin biçiminde farklılık vardır.

(3.4.40) t'ye göre diferansiyellendiğinde

$$\frac{du}{dt} = -a\omega_0 \sin \phi + \frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi \quad (3.4.42)$$

sonucunu verir. (3.4.41) açıklamasına göre

$$\frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi = 0 \text{ olur. (3.4.41) ifadesi } t' \text{ ye göre diferansiyellenirse}$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -a\omega_0^2 \cos \phi - \omega_0 \frac{da}{dt} \sin \phi - a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi \text{ sonucunu verir. Bu ifade}$$

(3.4.39)'de yerine yazılır ve (3.4.40) kullanılırsa

$$\omega_0 \frac{da}{dt} \sin \phi + a\omega_0 \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = -\varepsilon f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (3.4.43)$$

elde edilir. da/dt ve $d\theta/dt$ için (3.4.42) ve (3.4.43) çözümlerse

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (3.4.44)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (3.4.45)$$

sonuçları elde edilir. Dolayısıyla u için orijinal ikinci mertebeden (3.4.39) diferansiyel denklemi a genliği ve θ fazı için iki adet (3.4.44) ve (3.4.45) birinci mertebeden diferansiyel denklemleri ile yer değiştirilir.

(3.4.44) ve (3.4.45) diferansiyel denklemlerini çözmek için bu denklemlerin sağ taraflarının ϕ değişkenine bağlı olarak periyodik olduklarına dikkat etmek gerekir. Dolayısıyla $da/dt = O(\varepsilon)$ ve $d\theta/dt = O(\varepsilon)$ 'dir. Bu yüzden a ve θ zamanın yavaş bir şekilde değişen fonksiyonlarıdır. Çünkü ε küçüktür. O halde bu fonksiyonlar $T = 2\pi/\omega_0$ (yukarıdaki iki denklemin sağ taraflarındaki terimlerin periyodu) zamanı süresince çok küçük değişirler. $[t, t+T]$ aralığı üzerinde (3.4.44) ve (3.4.45)'nin ortalaması alınarak bu denklemlerin sağ tarafında a ve θ 'nın sabit olarak alınabildiği sürece

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} f_1(a) \quad (3.4.46)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} g_1(a) \quad (3.4.47)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] d\phi \end{aligned} \quad (3.4.48)$$

$$g_1(a) == \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] d\phi \quad (3.4.49)$$

f_1 ve g_1 'in f 'in Fourier serisi açılımının basit iki katsayısı olduğuna dikkat ediniz.

Bir örnek olarak Duffing denklemini göz önüne alalım. Tekniğimizdeki forma uygun olarak

$$f(u, \dot{u}) = -u^3 \quad (3.4.50)$$

olacaktır. Ayrıca

$$f_1(a) = 0, \quad g_1(a) = -\frac{3}{4}a^3 \quad (3.4.51)$$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.4.46)'den $a =$ bir sabit ve (3.4.47)'den

$$\theta = \frac{3}{8}\varepsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0 \quad (3.4.52)$$

olur. O yüzden ilk yaklaşım

$$u = a \cos \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8}\varepsilon \frac{a^2}{\omega_0^2} \right] t + O(\varepsilon) \quad (3.4.53)$$

biçimindedir.

İkinci örnek olarak Van Der Pol osilatörünü alabiliriz. Burada ise

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (3.4.54)$$

olur. Bu durumda

$$f_1 = -\omega_0 a \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right), \quad g_1 = 0 \quad (3.4.55)$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{1}{4}a^2 \right) \quad (3.4.56)$$

iken (3.4.47)'den $\theta = \theta_0 =$ bir sabit olur. (3.4.56) integrallenirse

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\varepsilon t}} \quad (3.4.57)$$

sonucuna ulaşılır (Nayfeh, 2004).

3.4.4. Genelleştirilmiş ortalama metodu

Bu teknikte (3.4.40) ve (3.4.41)'i u ve du/dt 'den a ve ϕ 'ye bir dönüşüm olarak düşüneceğiz. Bu yüzden

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi] \quad (3.4.58)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{a\omega_0} \cos \phi f[a \cos \phi, -a\omega_0 \sin \phi]$$

olur. Burada ϕ değişkeni hızlı dönen faz olarak anılır. Bir önceki bölümdeki gibi bu denklemleri integrallemektense bir yakın özdeş dönüşüm tanımlarız. Tanımlayacağımız dönüşüm

$$a = \bar{a} + \varepsilon a_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \varepsilon^2 a_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots \quad (3.4.59)$$

$$\phi = \bar{\phi} + \varepsilon \phi_1(\bar{a}, \bar{\phi}) + \varepsilon^2 \phi_2(\bar{a}, \bar{\phi}) + \dots$$

şeklinde (a, ϕ) 'dan $(\bar{a}, \bar{\phi})$ 'ya olacaktır. Burada $\bar{\phi}$, 2π periyoduna sahiptir. Ayrıca (3.4.58) sisteminin dönüşümü A_i ve B_i , $\bar{\phi}$ 'den bağımsız olmak üzere

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \varepsilon A_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{a}) + \dots \quad (3.4.60)$$

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{a}) + \dots$$

formuna sahiptir. Bu işlemde a ve ϕ 'nin skaler fonksiyonlara sınırlanmış olmasına gerek yoktur.

(3.4.59) ve (3.4.60) ifadeleri (3.4.58)'da yerlerine yazılır, açılır ve ε 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} + A_n = F_n(\bar{a}, \bar{\phi}) \quad (3.4.61)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} + B_n = G_n(\bar{a}, \bar{\phi})$$

şeklinde sağ tarafları (3.4.59) ve (3.4.60)'daki daha düşük mertebeli terimlerin bilinen fonksiyonları olan denklemler elde ederiz. Genelde F_n ve G_n kısa periyodlu terimler(s ile gösterilen) ve uzun periyodlu terimler(l ile gösterilen) içerir. Uzun periyodlu terimleri eşitlemek için A_n ve B_n 'i seçeriz. Öyle ki

$$A_n = F_n^l, \quad B_n = G_n^l \quad (3.4.62)$$

dir. Ayrıca a_n ve ϕ_n için başarılı bir şekilde çözülebilen

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\phi}} = F_n^s, \quad \omega_0 \frac{\partial \phi_n}{\partial \bar{\phi}} = G_n^s \quad (3.4.63)$$

eşitlikleri yazılabilir. Örnek olarak

$$f(u, \dot{u}) = (1 - u^2)\dot{u}, \quad \omega_0 = 1$$

şeklinde tanımlanan van der Pol osilatörünü göz önüne alalım. Bu durumda (3.4.58) ifadesi

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{8} \varepsilon [a(4 - a^2) - 4a \cos 2\phi + a^3 \cos 4\phi] \quad (3.4.64)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 + \frac{1}{8}\varepsilon[2(2 - a^2) \sin 2\phi - a^2 \sin 4\phi]$$

haline gelir. (3.4.59) ve (3.4.60), (3.4.64)'da yerlerine yazılır ve ε 'nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse

ε mertebesi için

$$\frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} + A_1 = \frac{1}{8}\bar{a}(4 - a^{-2}) - \frac{1}{2}\bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8}a^{-3} \cos 4\bar{\phi} \quad (3.4.65)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} + B_1 = \frac{1}{4}(2 - a^{-2}) \sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}a^{-2} \sin 4\bar{\phi}$$

ε^2 mertebesi için

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 &= -\frac{\partial a_1}{\partial \bar{a}} A_1 - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} B_1 \\ &+ \frac{1}{8}a_1[4 - 3a^{-2} - 4 \cos 2\bar{\phi} + 3a^{-2} \cos 4\bar{\phi}] \\ &+ \frac{1}{2}\bar{a}\phi_1[2 \sin 2\bar{\phi} - a^{-2} \sin 4\bar{\phi}] \end{aligned} \quad (3.4.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{a}} A_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} B_1 \\ &- \frac{1}{4}\bar{a}a_1(2 \sin 2\bar{\phi} + \sin 4\bar{\phi}) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_1[(2 - a^{-2}) \cos 2\bar{\phi} - a^{-2} \cos 4\bar{\phi}] \end{aligned} \quad (3.4.67)$$

A_1 ve B_1 (3.4.65) ifadesinin sağ tarafındaki uzun periyodlu terimlere eşitlenirse

$$A_1 = \frac{1}{8}\bar{a}(4 - a^{-2}), \quad B_1 = 0 \quad (3.4.68)$$

sonuçlarına ulaşırız. En sonunda (3.4.65) ifadesi

$$\frac{\partial a_1}{\partial \bar{\phi}} = -\frac{1}{2}\bar{a} \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{8}a^{-3} \cos 4\bar{\phi} \quad (3.4.69)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\phi}} = \frac{1}{4}(2 - a^{-2}) \sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}a^{-2} \sin 4\bar{\phi}$$

haline gelir. Bu denklemlerin çözümleri

$$a_1 = -\frac{1}{4}\bar{a} \sin 2\bar{\phi} + \frac{1}{32}a^{-3} \sin 4\bar{\phi} \quad (3.4.70)$$

$$\phi_1 = -\frac{1}{8}(2 - a^{-2}) \cos 2\bar{\phi} + \frac{1}{32}a^{-2} \cos 4\bar{\phi}$$

(3.4.68) ve (3.4.70) ile (3.4.66) ve (3.4.67) aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\phi}} + A_2 = \text{kısa periyot terimler} \quad (3.4.71)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\phi}} + B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}a^{-2} - \frac{11}{256}a^{-4} + \text{kısa periyot terimler}$$

A_2 ve B_2 'yi, (3.4.71)'ün sağ tarafındaki uzun periyot terimlere eşitleyerek

$$A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}a^{-2} - \frac{11}{256}a^{-4} \quad (3.4.72)$$

sonuçlarını elde ederiz. Bundan dolayı ikinci mertebeye kadarki çözüm

$u = a \cos \phi$ olur ve bu çözümde

$$a = \bar{a} - \frac{1}{4}\varepsilon\bar{a} \left[\sin 2\bar{\phi} - \frac{1}{8}a^{-2} \sin 4\bar{\phi} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.4.73)$$

$$\phi = \bar{\phi} - \frac{1}{8}\varepsilon \left[(2 - a^{-2}) \cos 2\bar{\phi} - \frac{1}{4}a^{-2} \cos 4\bar{\phi} \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{1}{8} \varepsilon \bar{a} (4 - a^{-2}) + O(\varepsilon^3) \quad (3.4.74)$$

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \left[1 - \frac{3}{2} a^{-2} + \frac{11}{32} a^{-4} \right] + O(\varepsilon^3) \text{ 'dir (Nayfeh, 2004).}$$

3.5. Çoklu Ölçek Analizi Metodu

Bu metodu daha iyi anlamak için lineer olmayan

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (3.5.1)$$

osilatör problemini dikkate alalım.

Bazı denklemlerin perturbasyon teorisiyle çözümünü araştırdığımızda 0. mertebe hariç bütün mertebelerde seküler terimler ortaya çıkar ve bu durum $y(t)$ çözümünün sınırlılığını bozar. Bu bahsettiğimiz durum ile genellikle t 'nin $1/\varepsilon$ mertebesinde olduğu zamanlarda karşılaşılır. Bütün mertebelerde seküler terimleri yok etmek için en kolay yol $\tau = \varepsilon t$ şeklinde yeni bir değişken tanımlama ile başlar. τ uzun bir zaman ölçeğini tanımlar. Çünkü τ ihmal edilebilir değildir. t , $1/\varepsilon$ ya da daha büyük mertebede olduğu zaman $y(t)$ kesin çözümü sadece t 'nin bir fonksiyonu olmasına rağmen multiple-scale analiz bağımsız değişkenler olarak kullanılabilen t ve τ değişkenlerinin her ikisinin de fonksiyonları olan çözümleri araştırır. Seküler etkileri ortadan kaldırmak için iki değişkene sahip bir fonksiyon olan y ifadesinin hile olduğunu açıkça söyleyebiliriz. Gerçek çözüm $\tau = \varepsilon t$ eşitliği ile birbirine bağlı t ve τ 'ya sahiptir ve bu yüzden t ve τ eninde sonunda bağımsız değildir.

Biçimsel yöntem

$$y(t) = Y_0(t, \tau) + \varepsilon Y_1(t, \tau) + \dots \quad (3.5.2)$$

şeklinde bir perturbasyon genişlemesi varsayımından ibarettir. $y(t)$ 'nin türevlerini hesaplamak için parçalı diferansiyelin zincir kuralını kullanırız.

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial Y_0}{\partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\partial Y_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \dots$$

$$\tau = \varepsilon t, \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \text{ olduğundan}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial Y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1}{\partial t} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.5.3)$$

Aynı zamanda tekrar t ile ilgili olarak diferansiyel almamız

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.5.4)$$

ifadesini verir.

(3.5.4), (3.5.1)'e yerleştirilir ve ε 'nin kuvvetlerine göre toplanırsa

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0 \quad (3.5.5)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -Y_0^3 - 2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} \quad (3.5.6)$$

elde edilir.(3.5.5)'in gerçek çözümü

$$Y_0(t, \tau) = A(\tau) \cdot e^{it} + A^*(\tau) \cdot e^{-it} \quad (3.5.7)$$

bulunur ki burada $A(\tau)$, τ 'nin keyfi kompleks fonksiyonudur. $A(\tau)$, (3.5.6)'nın çözümünde ortaya çıkmayan seküler terimlerin koşulları tarafından belirlenecek. (3.5.7)'den (3.5.6)'nın sağ tarafı

$$e^{it} \left[-3A^2 A^* - 2i \frac{dA}{d\tau} \right] + e^{-it} \left[-3A(A^*)^2 + 2i \frac{dA^*}{d\tau} \right] - e^{3it} \cdot A^3 - e^{-3it} \cdot (A^*)^3 \text{ olur.}$$

e^{it} ve e^{-it} , $\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = 0$ homojen denkleminin çözümleri olduğuna dikkat edersek (3.5.6)'nın sağ tarafındaki e^{it} ve e^{-it} 'nin katsayıları sıfırdan farklıysa $Y_1(t, \tau)$ çözümü t 'de seküler olmuş olacak. Sekülerliğin ortaya çıkışını engellemek için $A(\tau)$ fonksiyonuna

$$-3A^2 A^* - 2i \frac{dA}{d\tau} = 0 \quad (3.5.8)$$

$$-3A(A^*)^2 + 2i \frac{dA^*}{d\tau} = 0 \quad (3.5.9)$$

eşitliklerini sağlatmamız gerekir. Bu iki kompleks denklem $A(\tau)$ 'yı belirlemez. Çünkü bunlar ihtiyaç fazlasıdır. Biri diğerinin kompleks eşleniğidir. Eğer (3.5.8) ve (3.5.9) sağlatılırsa (3.5.2)'de en azından ε mertebeli terimler içinde sekülerlik ortaya çıkmaz. $A(\tau)$ için (3.5.8)'i çözmek amacıyla $A(\tau)$ 'yu kutupsal formda göstereyim.

$$A(\tau) = R(\tau) \cdot e^{i\theta(\tau)} \quad (3.5.10)$$

Burada R ve θ reeldir. (3.5.10)'u (3.5.8)'de yerine koyacak ve reel ve imajiner kısımlarını eşitleyecek olursak

$$\frac{dR}{d\tau} = 0 \quad (3.5.11a)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{3}{2} R^2 \quad (3.5.11b)$$

bulunur. Buradan

$$A(\tau) = R(0) \cdot e^{i\theta(0) + 3iR^2(0)\frac{\tau}{2}} \quad (3.5.12)$$

ve (3.5.7)'nin sıfıncı mertebeden çözümü

$$Y_0(t, \tau) = 2R(0) \cdot \cos \left[\theta(0) + \frac{3}{2} R^2(0)\tau + t \right] \quad (3.5.13)$$

bulunur.

$y(0) = 1, y'(0) = 0$ başlangıç koşulları $R(0)$ ve $\theta(0)$ ifadelerini belirler. $y(0) = 1$ koşulu

$$Y_0(0,0) = 1, \quad Y_1(0,0) = 0, \dots$$

haline gelir. (3.5.3)'den $y'(0) = 0$ koşulu

$$\left(\frac{\partial Y_0}{\partial t}\right)_{(0,0)} = 0, \left(\frac{\partial Y_1}{\partial t}\right)_{(0,0)} = -\left(\frac{\partial Y_0}{\partial \tau}\right)_{(0,0)} \dots$$

haline gelir. Bu koşulları sağlamak için $R(0)=1/2$ ve $\theta(0) = 0$ şeklinde seçmek zorundayız. Bu yüzden sıfıncı mertebeden $Y_0(t, \tau)$ çözümü

$$Y_0(t, \tau) = \cos \left[t \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon \right) \right] + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+, \quad \varepsilon t = O(1) \quad (3.5.14)$$

olur ve (3.5.11) yeniden üretilmiş olur.

Çoklu ölçek analiz metodunu anlamak için bir örnek daha görelim. Bu sefer yavaşlayan harmonik bir osilatörü inceleyelim.

$$y'' + y + \varepsilon(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.5.15)$$

Eğer $\varepsilon > 0$ ise $t \rightarrow \infty$ iken $y(t)$ çözümü 0'a azalmalı. Bu iddiayı ispat etmek için (3.5.15)'i y' ile çarpalım ve diferansiyel denklemdeki her bir terimi gerçek türeve dönüştürelim.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (y')^2 + \frac{1}{2} y^2 \right] = -\varepsilon (y')^4 \leq 0 \quad (3.5.16)$$

Bu sonuç gösterir ki $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}y^2$ ifadesi bütün t 'ler için $y'(t) = 0$ olmadıkça t 'nin azalan bir fonksiyonudur. Çoklu ölçek analizi büyük t değerleri için $y(t)$ 'nin davranışını incelemek için kullanılabilir.

$$y(t) = Y_0(t, \tau) + \varepsilon Y_1(t, \tau) + \dots \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (\tau = \varepsilon t)$$

formunu kullanalım.(3.5.3) ve (3.5.4)'ü yerlerine yazdığımızda ε^0 ve ε^1 'un katsayılarını eşitlersek

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0 \tag{3.5.17}$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} - \left(\frac{\partial Y_0}{\partial t} \right)^2 \tag{3.5.18}$$

eşitlikleri bulunur. (3.5.17)'nin genel çözümü

$$Y_0(t, \tau) = A(\tau) \cdot e^{it} + A^*(\tau) \cdot e^{-it} \tag{3.5.19}$$

şeklinde. Bu çözümü (3.5.18)'in sağında yerine yazacak olursak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = & -e^{it} \left[2i \frac{dA}{d\tau} + 3iA^2 A^* \right] - e^{-it} \left[-2i \frac{dA^*}{d\tau} - 3i(A^*)^2 A \right] \\ & + ie^{3it} A^3 - ie^{-3it} (A^*)^3 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

bulunur. Homojen (3.5.17) denkleminin çözümleri $e^{\pm it}$ olduğu için köşeli parantezler içindeki ifadeler yok olmadıkça (3.5.20)'nin çözümü sekülerdir. Y_1 'in seküler olmaması için $A(\tau)$ 'nin aşağıdaki denklemleri sağlaması gerekir.

$$2i \frac{dA}{d\tau} + 3iA^2 A^* = 0 \tag{3.5.21a}$$

$$-2i \frac{dA^*}{d\tau} - 3i(A^*)^2 A = 0 \tag{3.5.21b}$$

(3.5.21)'i çözmek için $A(\tau) = R(\tau)e^{i\theta(\tau)}$ haline getiririz. Burada $R(\tau)$ ve $\theta(\tau)$ reeldir. Bu ifade (3.5.21)'de yerine yazıldığında

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{3}{2}R^3, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

elde edilir.

$$R(\tau) = \frac{R(0)}{\sqrt{3\tau R^2(0)+1}} \quad (3.5.22a)$$

$$\theta(\tau) = \theta(0) \quad (3.5.22b)$$

$R(0)$ ve $\theta(0)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları tarafından belirlenir. Bu koşullar altında

$$Y_0(0,0) = 1, \quad \left(\frac{\partial Y_0}{\partial t}\right)_{(0,0)} = 0 \text{ yazılır ve } R(0) = \frac{1}{2} \text{ ve } \theta(0) = 0 \text{ bulunur. O halde}$$

$$y(t) \sim \frac{\cos t}{\sqrt{1+3\varepsilon\frac{t}{4}}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+, \quad \varepsilon t = O(1) \quad (3.5.23)$$

olur (Bender ve Orszag, 2007).

3.6. WKB Teorisi

WKB teorisi, küçük bir ε parametresi ile çarpılmış yüksek mertebeden türevlere sahip lineer bir diferansiyel denkleme yaklaşık çözümü elde etmek için çok güçlü bir araçtır. Bir diferansiyel denklemin çözümüne WKB yaklaşımı basit bir yapıya sahiptir. Bu yapıyı görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$\varepsilon^2 y'' = Q(x).y, \quad Q(x) \neq 0 \quad (3.6.1)$$

Schrödinger denkleminin çözümünü WKB teorisi ile bulalım. Teori bize çözümü

$$y \sim e^{\left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right]}, \quad \delta \rightarrow 0$$

$$y \sim e^{\left[\frac{1}{\delta}(S_0(x) + \delta S_1(x) + \delta^2 S_2(x) + \dots)\right]}, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (3.6.2)$$

biçiminde öngörür. (3.6.2)'nin türevleri

$$y' \sim \left(\frac{1}{\delta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S'_n(x)\right) \cdot e^{\left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right]}, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (3.6.3)$$

$$y'' \sim \left[\frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S'_n(x)\right)^2 + \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S''_n(x)\right] \cdot e^{\left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right]}, \quad \delta \rightarrow 0$$

şeklinde bulunur. (3.6.3)'ü (3.6.1)'de yazacak olursak

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S'_n(x)\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S''_n(x)\right] \cdot e^{\left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right)} = Q(x) \cdot e^{\left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right)}$$

sonucunu buluruz. Bu denklemde her iki tarafı $e^{\left(\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot S_n(x)\right)}$ e bölelim.

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'^2(x) + \frac{2\varepsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_0'' + \dots = Q(x) \quad (3.6.4)$$

bulunur. Denklemde solundaki $\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'^2(x)$ ifadesi en büyük terimdir. O halde $Q(x) \neq 0$ ifadesine yaklaşık eşit olmalıdır.

$\delta = \varepsilon$ alır ve ε 'nin kuvvetlerine göre katsayıları eşitlersek

$$S_0'^2(x) = Q(x) \quad (3.6.5)$$

$$2S_0' S_1' + S_0'' = 0 \quad (3.6.6)$$

$$2S_0' S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{n-1} S_j' S_{n-j}' = 0, \quad n \geq 2 \quad (3.6.7)$$

elde edilir. (3.6.5) denkleminin sonucu

$$S_0(x) = \pm \int^x \sqrt{Q(t)}. dt \quad (3.6.8)$$

(3.6.6) denkleminin sonucu

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \ln Q(x) \quad (3.6.9)$$

olur. (3.6.1)'in genel çözümü ise

$$y(x) \sim c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)} + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) e^{\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad a: \text{keyfi} \quad (3.6.10)$$

bulunur. S_2, S_3, S_4, S_5 terimleri aşağıdaki gibi (3.6.7)'ye göre hesaplanır.

$$S_2 = \pm \int^x \left[\frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{5(Q')^2}{32Q^{5/2}} \right] dt$$

$$S_3 = -\frac{Q''}{16Q^2} + \frac{5Q'^2}{64Q^3}$$

$$S_4 = \pm \int^x \left[\frac{\frac{d^4 Q}{dx^4}}{32Q^{5/2}} - \frac{7Q'Q'''}{32Q^{7/2}} - \frac{19(Q''')^2}{128Q^{7/2}} + \frac{221Q''(Q')^2}{256Q^{9/2}} - \frac{1105(Q')^4}{2048Q^{11/2}} \right] dt$$

$$S_5 = -\frac{d^4 Q/dx^4}{64Q^3} + \frac{7Q'Q'''}{64Q^4} + \frac{5(Q'')^2}{64Q^4} - \frac{113(Q')^2 Q''}{256Q^5} + \frac{565(Q')^4}{2048Q^6}$$

bulunur.

WKB metodu için bir uygulamayı Sturm-Liouville problemi üzerinde görelim.

$$y''(x) + E \cdot Q(x) \cdot y(x) = 0, \quad Q(x) > 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.6.11)$$

denklemini sonsuz sayıda E_1, E_2, E_3, \dots şeklinde öz değerlere sahiptir. Ve bu özdeğerlere karşılık birbirinden farklı öz fonksiyonlara sahiptir. E_n öz değerine karşılık öz fonksiyonumuzu $y_n(x)$ biçiminde gösterecek olursak bu öz fonksiyonlarımız $Q(x)$ fonksiyonuna ortogonaldır.

$$\int_0^\pi dx \cdot y_n(x) \cdot y_m(x) \cdot Q(x) = 0, \quad n \neq m \quad (3.6.12)$$

(3.6.11)'deki sınır koşulları ve diferansiyel denklem homojen oldukları için $\{y_n\}$ öz fonksiyonları keyfi çarpımsal sabit olarak belirleriz. y_n 'lerin normlarını geleneksel seçersek

$$\int_0^\pi [y_n(x)]^2 Q(x) dx = 1 \quad (3.6.13)$$

olur.

WKB teorisinin büyük değerlerinde E_n ve $y_n(x)$ 'ler için yaklaşık formüller bulmak için kullanılabilir. $n \rightarrow \infty$ iken E_n , n^2 ile yaklaşık orantılıdır. Bu yüzden $\varepsilon = \frac{1}{E_n}$ aldığımız $\varepsilon y''(x) + Q(x)y(x) = 0$ denkleminin 1.mertebe yaklaşık WKB çözümü n 'nin büyük değerleri için doğrudur. Çünkü $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon \rightarrow 0$ 'dır.

$y''(x) + EQ(x)y(x) = 0$ denkleminin (3.6.10)'daki gibi

$$y(x) \sim c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) e^{\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)} + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) e^{\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt\right)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

1.mertebe WKB yaklaşımı

$Q^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \sin\left[\sqrt{E} \int_0^x \sqrt{Q(t)} dt\right]$ ve $Q^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \cos\left[\sqrt{E} \int_0^x \sqrt{Q(t)} dt\right]$ 'nin bir lineer birleşimidir. Burada E_n öz değerlerimiz pozitif reel sayı ve \sqrt{E} 'nin pozitifdir. Sınır koşulu $y(0) = 0$ uygulanırsa

$$y(x) \sim cQ^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \sin\left[\sqrt{E} \int_0^x \sqrt{Q(t)} dt\right], \quad E \rightarrow \infty \quad (3.6.14)$$

bulunur. $y(\pi) = 0$ sınır koşulu öz değerleri belirler.

$$E_n \sim \left[\frac{n\pi}{\int_0^\pi \sqrt{Q(t)} dt} \right]^2, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6.15)$$

Öz fonksiyonları belirleyelim. (3.6.13)'deki normalleştirilmiş integral (3.6.14)'deki c 'yi sabitler. (3.6.14), (3.6.13)'de yerine yazılırsa

$$1 \sim \int_0^\pi dx Q(x) c_n^2 \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \sin^2\left[\sqrt{E_n} \int_0^x dt \sqrt{Q(t)}\right], \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir. $u = \sqrt{E_n} \int_0^x dt \sqrt{Q(t)}$ dönüşümü yapılırsa

$$1 \sim (c_n^2 / \sqrt{E_n}) \int_0^{n\pi} du \sin^2 u, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6.16)$$

elde edilir. Öz fonksiyonlarımız

$$y_n(x) \sim \left(\int_0^\pi \frac{\sqrt{Q(t)}}{2} dt \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot Q^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \sin \left[n\pi \frac{\int_0^x \sqrt{Q(t)} dt}{\int_0^\pi \sqrt{Q(t)} dt} \right], \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6.17)$$

şeklindedir. Eğer $Q(x)=1$ ise (3.6.17)'nin sağ tarafı kısılır ve $\sqrt{2/\pi} \sin(nx)$ olur. Bu ise $y'' + y = 0$, $(y(0) = y(\pi) = 0)$ 'ın kesin çözümüdür.

Sonuçlarımızın doğruluğunu göstermek için $Q(x) = (x + \pi)^4$ seçelim. Öz değerlere ve öz vektörlere yaklaşım yapalım.

$$E_n \sim \frac{9n^2}{49\pi^4}, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6.18)$$

$$y_n(x) \sim \sqrt{\frac{6}{7\pi^3}} \frac{\sin \left[n \frac{x^3 + 3x^2\pi + 3\pi^2x}{7\pi^2} \right]}{(\pi+x)}, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.6.19)$$

bulunur (Bender ve Orszag, 2007).

4.TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Mühendislik ve uygulamalı matematikte yüz yüze kalınan diferansiyel denklemlere kesin çözümleri elde etmede birçok zorluklar ile karşılaşmaktadır. Bu zorluklar arasında problemin lineer olmaması, değişken katsayılara sahip olması, kompleks sınır şekillerinin varlığı ve lineer olmayan sınır koşullarının verilmesi sayılabilir. Peki bu zorluklar bize diferansiyel denklemin çözümünde uygulayacağımız metot hakkında fikir verebilir mi? Cevabımız evet. Nümerik yöntemler diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili olmasına rağmen her diferansiyel denklemde aynı etkiyi bulmak zordur. Bu yüzden bir önceki bölümde son zamanlarda popüler olan ve her geçen zaman yeni alt yöntemleri bulunan ve çapı zamanla genişleyen perturbasyon metotlarına kısaca değindik. Araştırmalarımız sonucunda öyle perturbasyon metotlarının varlığını gördük ki bize nümerik çözümden çok daha iyi yaklaşık çözüm vermektedir. Ama bu bile bize perturbasyon metotlarının tek başına tüm diferansiyel denklemlerin çözümünü vereceğini göstermez.

KAYNAKLAR

- Bender, C.M., Orszag, S.A., 2007. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Company, 593p. New York.
- Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., 2008. Adi Diferansiyel Denklemler. Dora, 312s. Bursa.
- Encyclopedia of Mathematics, 2011. Perturbation Theory. Erişim Tarihi: 09.01.2013. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Perturbation_theory
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2000. Matematik Terimleri Sözlüğü. Türk Dil Kurumu Yayınları, 686s. Ankara.
- Henry, D., 2005. Perturbation of the Boundry in Boundry-Value Problems of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 216p. New York.
- Hinch, E.J., 1995. Perturbation Methods. Cambridge University Press, 160p. New York.
- Holmes, M.H., 1995. Introduction to Perturbation Methods. Springer-Verlag, 337p. New York.
- Kato, T., 1980. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, 619p. New York.
- Kevorkian, J., Cole, J.D., 1996. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. Springer-Verlag, 642p. New York.
- Kristensson, G., 2010. Second Order Differential Equations. Springer, 381p. New York.
- Nayfeh, A.H., 2004. Perturbation Methods. Wiley-Vch Verlag GmbH & Co. KGaA, 425p. Mörlenbach.
- Sezer, M., 1991. Diferansiyel Denklemler II ve Çözümlü Problemler. Göksu Fotokopi Ofset, 220s. İzmir.
- Simmonds, J.G., Mann, J.E., 1997. A First Look at Perturbation Theory. Dover Publications, 148p. New York.
- Wikipedia, 2012. Perturbation Theory. Erişim Tarihi: 10.01.2013. http://en.wikipedia.org/wiki/Perturbation_theory

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Afşin ÖZEK

Doğum Yeri ve Yılı : Ankara, 1976

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mafsino@hotmail.com



Eğitim Durumu

Lise : İzmir Vali Vecdi Gönül Lisesi, 1998

Lisans : DEÜ, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği

Mesleki Deneyim

Özel İzmir Fatih Koleji	1998-2001
Bademli Şükrü Saraçoğlu İÖO	2001-2004
Ödemiş Prof. Dr. Muzaffer Kula Lisesi	2004-2007
Akhisar Adnan Menderes Lisesi	2007-2008
Akhisar Anadolu Lisesi	2008-2010
Isparta Teknik ve Endüstri Mes. Lisesi	2010-.....(halen)