

**MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ CEBİR
ÖĞRENME ALANINDAKİ İSPAT SÜREÇLERİNİN
İNCELENMESİ**

Gürsel GÜLER

Doktora Tezi

**Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi
Anabilim Dalı**

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

2013

(Her hakkı saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ CEBİR ÖĞRENME
ALANINDAKİ İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

(Investigation of Pre-Service Mathematics Teachers' Proof Processes In The
Learning Domain of Algebra)

DOKTORA TEZİ

Gürsel GÜLER

Danışman: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

ERZURUM
Mayıs, 2013

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ danışmanlığında, Gürsel Güler tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Öğrenme Alanındaki İspat Süreçlerinin İncelenmesi” başlıklı çalışma 31 / 05 /2013 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından. Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

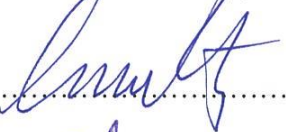
Başkan : Prof. Dr. Behiye UBUZ

İmza: 

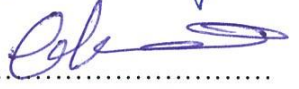
Danışman : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

İmza: 

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Cemalettin IŞIK

İmza: 

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

İmza: 

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Tefvik İŞLEYEN

İmza: 

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.. / .. / ..


Prof. Dr. H. Ahmet KIRKKILIÇ

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU

Doktora Tezi olarak sunduğum “Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Öğrenme Alanındaki İspat Süreçlerinin İncelenmesi” başlıklı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

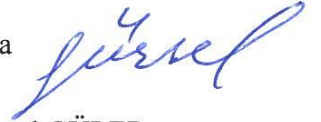
Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Atatürk Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☒ Tezimin 2 yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

31/05/2013

İmza



Ad Soyad: Gürsel GÜLER

ÖNSÖZ

Bu araştırmaya beni yönlendiren ve her aşamasında değerli fikirleriyle bana yol göstererek desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ' ye en içten şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmamın her aşamasında bana zaman ayırıp görüş ve katkılarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Cemalettin IŞIK ve Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN' e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek öğrenim hayatım boyunca yardımlarını esirgemeyen İlköğretim ve Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde görev yapan hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Gönüllü olarak araştırmaya katılan orta öğretim matematik bölümünde öğrenim gören öğretmen adaylarına teşekkürlerimi sunarım. Beni her zaman destekleyen ve beni cesaretlendiren kıymetli arkadaşlarım Araş. Gör. Ercan ÖZDEMİR ve Araş. Gör. Tuğrul KAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca aldığım kararların her zaman arkasında duran, benden dualarını eksik etmeyen ve beni bütün öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Erzurum – 2013

Gürsel GÜLER

ÖZET
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ CEBİR ÖĞRENME
ALANINDAKİ İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Gürsel GÜLER

2013, 398 sayfa

Bu araştırmada, matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenirliklerini sağlamak için 2010-2011 eğitim öğretim yılı bahar döneminde 12 öğretmen adayı ile pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışmada elde edilen veriler ve literatürden yararlanılarak asıl uygulamada kullanılacak olan etkinlik temelli mülakatlara son şekli verilmiştir. Araştırmada nitel durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın verileri pilot çalışma sonucunda son şeklini alan Matematiksel İspata Yönelik Görüş Mülakat Formu (MİYGMF) ve etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla elde edilmiştir.

Araştırmanın çalışma grubunu amaçlı örnekleme yöntemine göre belirlenen ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 10 orta öğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Çalışmada her bir öğretmen adayı ile 2011-2012 eğitim öğretim yılı güz döneminde 6 klinik mülakat yapılmıştır. Bu mülakatlardan birincisi öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek için diğer 5 klinik mülakat ise cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerini belirlemeye yönelik olarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada kullanılan her bir etkinlik temelli mülakat cebir kavramlarına yönelik problem çözme, ispat yapma ve başkası tarafından yapılan ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinden oluşmaktadır. Araştırmada elde edilen verilerin analizinde nitel betimsel analiz ve nitel içerik analizi kullanılmıştır.

Araştırmada elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik genellikle olumlu görüşlere sahip olduklarını göstermiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde; kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde sahip oldukları güçlüklerin literatürde yer alan güçlüklerle paralel olduğu görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yapma süreci içerisinde değerlendirilen problem çözme süreci içerisinde problemi anlama ve kümeden eleman seçme, ispat yapma süreci içerisinde ispata nasıl başlayacağını belirleme ve ispatın doğruluğunu değerlendirme süreci içerisinde ise kavram kullanımını inceleme kategorilerinin ispat sürecinde kilit rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel İspat, Matematiksel İspat Süreci, Matematik Eğitimi, Cebir Öğretimi, Matematik Öğretmeni Adayı

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INVESTIGATION OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' PROOF PROCESSES IN THE LEARNING DOMAIN OF ALGEBRA

Gürsel GÜLER

2013, 398 pages

In this study, it is aimed to investigate of pre-service mathematics teachers proof processes in the learning domain of algebra. For this purpose, a pilot study with 12 pre-service teachers was conducted to satisfy the validity and reliability of the data collection tools. By considering the findings of the pilot study and by using literature, the last version of the task based interviews was prepared. In the study, qualitative multiple case study method was used. The data of the study was gathered from The Interview Form of Opinions for Mathematical Proof (IFOMP) which took the last version in the light of the findings from pilot study and task based clinical interviews with pre-service mathematics teachers.

In the determination of participants of the study, the purposive sampling method was used and the participants of this study was composed of 10 secondary school pre-service mathematics teachers who were volunteer to participate to this study. In the study, six clinical interviews were conducted with each of these pre-service mathematics teachers in the fall semester in 2011-2012 academic years. The first interview aimed to determine pre-service mathematics teachers' opinions about mathematical proof, while the other five clinical interviews were conducted to determine their proof processes in the learning domain of algebra. Each task based interviews in this study was composed of the activities for solving problem, proving and evaluating the proof done by others, which are related to algebra concepts. The data gathered in this study was analyzed with qualitative descriptive analysis and qualitative content analysis methods.

The findings of the study revealed that pre-service teachers generally had positive opinions towards mathematical proof. In addition, pre-service teachers' difficulties in proof processes in the activities of constructing concept image, solving problem, doing proof and correctly evaluating the proof were found to be parallel to the difficulties found in the literature. Moreover, in pre-service teachers' proving processes, it was found that the categories of understanding the problem and choosing elements from the set in problem solving process, of determining how to begin to the proof in doing proof process, and of investigating the concept usage in the evaluation of correctness of the proof were considered to play key role in proof process.

Key Words: Mathematical Proof, Mathematical Proof Process, Mathematics Education, Teaching Algebra, Pre-service Mathematics Teachers

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU	ii
ÖNSÖZ	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xvi
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	xix

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	2
1.2. Problem Cümlesi.....	5
1.3. Alt problemler	5
1.4. Çalışmanın Amaç ve Önemi	6
1.5. Varsayımlar	7
1.6. Sınırlılıklar	7
1.7. Tanımlar	7

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	9
2.1. Kuramsal Çerçeve	9
2.1.2. Matematiksel İspat Yöntemleri.....	12
2.1.3. Matematiksel İspat ve Problem Çözme İlişkisi	15
2.2. İlgili Araştırmalar.....	18
2.2.1. İspat Sınıflama Çalışmaları.....	18
2.2.2. Matematiksel İspat Hakkındaki Görüş, Tutum, İnanç Çalışmaları	23
2.2.3. İspatın Matematik Eğitimindeki Rolü	28
2.2.4. Matematiksel İspat Becerisi ve İspatta Yaşanan Güçlükler	37

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM.....	43
3.1. Araştırmanın Modeli	43
3.2. Katılımcılar	44
3.3. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması	44
3.3.1. Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu	44
3.3.2. Etkinlik Temelli Klinik Mülakatlar	45
3.3.3. Pilot Çalışma.....	46
3.3.4. Klinik Mülakatlardaki Etkinliklerin Hazırlanma Süreci.....	46
3.4. Verilerin Analizi.....	52
3.4.1. Matematiksel İspata Yönelik Görüşlerin Analizi	52
3.4.2. Etkinlik Temelli Klinik Mülakatların Analizi	53
3.4.2.1. Problem çözme analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler	54
3.4.2.2. İspat yapma analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler	56
3.4.2.3. Başkası tarafından yapılan ispatların doğruluklarının değerlendirilmesinin analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler	58

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR ve YORUM.....	61
4.1. Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Görüşlerine Yönelik Bulgular	61
4.1.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Ne Olduğu İle İlgili Görüşlerine Yönelik Bulgular	61
4.1.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yükladıkları Anlamlar İle İlgili Bulgular	63
4.1.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Amacına İlişkin Görüşleri İle İlgili Bulgular	65
4.1.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Önemine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	67
4.1.5. Öğretmen Adaylarının İspatlanması Gereken Önermelere Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	69
4.1.6. Öğretmen Adaylarının İspat Yaparken İzledikleri Yaklaşımlara Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	71

4.1.7. Öğretmen Adaylarının Yaptıkları Bir İspatı Tamamladıklarını Nasıl Anladıklarına Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	74
4.1.8. Öğretmen Adaylarının Yapılmış Bir İspatın Doğruluğunu Değerlendirirken Dikkat Edilmesi Gereken Hususlara Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	75
4.1.9. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımlara Yükledikleri Anlamlar İle İlgili Bulgular	78
4.1.10. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların İspatlardaki Rollerine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	80
4.1.11. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki Farklara/Benzerliklere Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	82
4.1.12. Öğretmen Adaylarının “ <i>Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır</i> ” Düşüncesine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	85
4.1.13. Öğretmen Adaylarının “ <i>Matematikte yapılan her ispat aslında problem çözme aktivitesidir</i> ” Düşüncesine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular	87
4.2. Kavram Anlamı ve Kavram İmajı ile İlgili Bulgular	89
4.2.1. Ayhan’ın Durumu	90
4.2.1.1. İkili işlem kavramı	90
4.2.1.2. Grup kavramı	91
4.2.1.3. Alt grup kavramı	93
4.2.1.4. Grup homomorfizmi kavramı	94
4.2.1.5. Vektör kavramı	96
4.2.2. Hüseyin’in Durumu	97
4.2.2.1. İkili işlem kavramı	97
4.2.2.2. Grup kavramı	98
4.2.2.3. Alt grup kavramı	100
4.2.2.4. Grup homomorfizmi kavramı	101
4.2.2.5. Vektör kavramı	103
4.2.3. İbrahim’in Durumu	104

4.2.3.1. İkili işlem kavramı	104
4.2.3.2. Grup kavramı	105
4.2.3.3. Alt grup kavramı	108
4.2.3.4. Grup homomorfizmi kavramı	109
4.2.3.5. Vektör kavramı	111
4.2.4. Nermin'in Durumu	112
4.2.4.1. İkili işlem kavramı	112
4.2.4.2. Grup kavramı	113
4.2.4.3. Alt grup kavramı	115
4.2.4.4. Grup homomorfizmi kavramı	116
4.2.4.5. Vektör kavramı	118
4.2.5. Büşra'nın Durumu	119
4.2.5.1. İkili işlem kavramı	119
4.2.5.2. Grup kavramı	120
4.2.5.3. Alt grup kavramı	123
4.2.5.4. Grup homomorfizmi kavramı	124
4.2.5.5. Vektör kavramı	126
4.2.6. Aykut'un Durumu	127
4.2.6.1. İkili işlem kavramı	127
4.2.6.2. Grup kavramı	129
4.2.6.3. Alt grup kavramı	131
4.2.6.4. Grup homomorfizmi kavramı	132
4.2.6.5. Vektör kavramı	134
4.2.7. Hatice'nin Durumu	135
4.2.7.1. İkili işlem kavramı	135
4.2.7.2. Grup kavramı	136
4.2.7.3. Alt grup kavramı	139
4.2.7.4. Grup homomorfizmi kavramı	140
4.2.7.5. Vektör kavramı	142
4.2.8. Ayfer'in Durumu	144
4.2.8.1. İkili işlem kavramı	144
4.2.8.2. Grup kavramı	145

4.2.8.3. Alt grup kavramı.....	147
4.2.8.4. Grup homomorfizmi kavramı	148
4.2.8.5. Vektör kavramı	149
4.2.9. Aysel'in Durumu	150
4.2.9.1. İkili işlem kavramı.....	150
4.2.9.2. Grup kavramı	152
4.2.9.3. Alt grup kavramı.....	154
4.2.9.4. Grup homomorfizmi kavramı	155
4.2.10. Nazlı'nın Durumu.....	158
4.2.10.1. İkili işlem kavramı.....	158
4.2.10.2. Grup kavramı	160
4.2.10.3. Alt grup kavramı.....	160
4.2.10.4. Grup homomorfizmi kavramı	161
4.2.10.5. Vektör kavramı	162
4.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme Süreçlerine Ait Bulgular..	163
4.3.1. İkili İşlem Kavramı.....	164
4.3.2. Grup Kavramı	174
4.3.3. Alt Grup Kavramı	183
4.3.4. Grup Homomorfizmi Kavramı	191
4.3.5. Vektör Kavramı	198
4.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yapma Süreçlerine Ait Bulgular	202
4.4.1. İkili İşlem Kavramı.....	202
4.4.3. Alt Grup Kavramı	219
4.4.4. Grup Homomorfizmi Kavramı	231
4.4.5. Vektör Kavramı	240
4.5. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Süreçlerine Ait Bulgular	250
4.5.1. İkili İşlem Kavramı.....	250
4.5.2. Grup Kavramı	257
4.5.3. Alt Grup Kavramı	265
4.5.4. Grup Homomorfizmi Kavramı	274

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER	290
5.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler	290
5.2. Öğretmen Adaylarının Kavramları Anlama ve Kavram İmajlarına Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler	297
5.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler	302
5.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yapma Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler	308
5.5. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler	316
KAYNAKÇA	323
EKLER.....	336
EK 1. Öğretmen Adaylarının Etkinlik Temelli Mülakatlara Verdikleri Yanıtlar	336
EK 2. Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu.....	386
EK 3. İkili İşlem Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu.....	387
EK 4. Grup Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu.....	389
EK 5. Alt Grup Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu.....	391
EK 6. Grup Homomorfizmi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu	393
EK 7. Vektör Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu	395
EK 8. Gönüllülük Sözleşmesi.....	397
ÖZGEÇMİŞ	398

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Öğretmen Adaylarının Pilot Çalışma Programları	47
Çizelge 3.2. Matematiksel Problem Çözme Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler	55
Çizelge 3.3. Matematiksel İspat Yapma Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler	57
Çizelge 3.4. İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler	59
Çizelge 4.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Ne Olduğu ile İlgili Görüşleri	62
Çizelge 4.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Anlamına Yönelik Görüşleri	63
Çizelge 4.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Amacına Yönelik Görüşleri	65
Çizelge 4.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Önemine Yönelik Görüşleri	67
Çizelge 4.5. Öğretmen Adaylarının İspatlanması Gereken Önermelere Yönelik Görüşleri	69
Çizelge 4.6. Öğretmen Adaylarının İspat Yaparken İzledikleri Yaklaşımlara Yönelik Görüşleri	72
Çizelge 4.7. Öğretmen Adaylarının Yaptıkları Bir İspatı Tamamladıklarını Anlamalarına Yönelik Görüşleri	74
Çizelge 4.8. Öğretmen Adaylarının Yapılmış Bir İspatın Doğruluğunu Değerlendirirken Dikkat Ettikleri Hususlara Yönelik Görüşleri	76
Çizelge 4.9. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların Anlamına Yönelik Görüşleri	78
Çizelge 4.10. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların İspatlardaki Rolüne Yönelik Görüşleri	80
Çizelge 4.11. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki Farklara/Benzerliklere Yönelik Görüşleri	83
Çizelge 4.12. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme İle Matematiksel İspat Arasındaki İlişkiye Yönelik Görüşleri	86
Çizelge 4.13. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki İlişkiye Yönelik Görüşleri	88
Çizelge 4.14. Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması	164
Çizelge 4.15. Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	166
Çizelge 4.16. Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	168
Çizelge 4.17. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması	173

Çizelge 4.18. Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması	175
Çizelge 4.19. Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	176
Çizelge 4.20. Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	177
Çizelge 4.21. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	182
Çizelge 4.22. Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması	183
Çizelge 4.23. Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	184
Çizelge 4.24. Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	185
Çizelge 4.25. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	190
Çizelge 4.26. Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması	192
Çizelge 4.27. Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	192
Çizelge 4.28. Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	193
Çizelge 4.29. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	197
Çizelge 4.30. Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması	198
Çizelge 4.31. Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	198
Çizelge 4.32. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	201
Çizelge 4.33. Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	202
Çizelge 4.34. Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	203
Çizelge 4.35. Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	204
Çizelge 4.36. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	209
Çizelge 4.37. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	210
Çizelge 4.38. Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	211
Çizelge 4.39. Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	213

Çizelge 4.40. Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	214
Çizelge 4.41. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	217
Çizelge 4.42. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	218
Çizelge 4.43. Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	220
Çizelge 4.44. Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	223
Çizelge 4.45. Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	223
Çizelge 4.46. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	229
Çizelge 4.47. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	230
Çizelge 4.48. Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	232
Çizelge 4.49. Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	233
Çizelge 4.50. Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	234
Çizelge 4.51. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	237
Çizelge 4.52. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	238
Çizelge 4.53. Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	240
Çizelge 4.54. Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	242
Çizelge 4.55. Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması	243
Çizelge 4.56. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	248
Çizelge 4.57. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	249
Çizelge 4.58. Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	251
Çizelge 4.59. Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	252
Çizelge 4.60. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	255
Çizelge 4.61. Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması	256

Çizelge 4.62. Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	258
Çizelge 4.63. Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	259
Çizelge 4.64. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	262
Çizelge 4.65. Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması	264
Çizelge 4.66. Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	265
Çizelge 4.67. Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	267
Çizelge 4.68. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	271
Çizelge 4.69. Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması	273
Çizelge 4.70. Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	274
Çizelge 4.71. Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	275
Çizelge 4.72. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	279
Çizelge 4.73. Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması	281
Çizelge 4.74. Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	283
Çizelge 4.75. Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması	284
Çizelge 4.76. Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması.....	286
Çizelge 4.77. Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması	288

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Matematiksel İspat Yöntemleri.....	12
Şekil 2.2. Harel ve Sowder (1998) Tarafından Yapılan İspat Sınıflandırması	19
Şekil 2.3. Öğrencilerin İspat Yaparken Yaşadıkları Güçlük Kaynakları Modeli	38
Şekil. 2.4. Kavram Anlayışı Bileşenleri.....	39
Şekil 4.1. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	90
Şekil 4.2. Ayhan'ın Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	92
Şekil 4.3. Ayhan'ın Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	94
Şekil 4.4. Ayhan'ın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	95
Şekil 4.5. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	96
Şekil 4.6. Hüseyin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	97
Şekil 4.7. Hüseyin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	101
Şekil 4.8. Hüseyin'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	103
Şekil 4.9. İbrahim'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	104
Şekil 4.10. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	110
Şekil 4.11. Nermin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	112
Şekil 4.12. Nermin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	116
Şekil 4.13. Nermin'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	117
Şekil 4.14. Nermin'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	119
Şekil 4.15. Büşra'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	120
Şekil 4.16. Büşra'nın Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	124
Şekil 4.17. Büşra'nın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	125
Şekil 4.18. Büşra'nın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	127
Şekil 4.19. Aykut'un İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	128
Şekil 4.20. Aykut'un Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	133
Şekil 4.21. Aykut'un Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	135
Şekil 4.22. Hatice'nin İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	136
Şekil 4.23. Hatice'nin Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	138
Şekil 4.24. Hatice'nin Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	140
Şekil 4.25. Hatice'nin Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	141
Şekil 4.26. Hatice'nin Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	143
Şekil 4.27. Ayfer'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	144
Şekil 4.28. Ayfer'in Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	147
Şekil 4.29. Ayfer'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	148
Şekil 4.30. Ayfer'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	149
Şekil 4.31. Ayfer'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	150
Şekil 4.32. Aysel'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	151
Şekil 4.33. Aysel'in Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	154
Şekil 4.34. Aysel'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	155
Şekil 4.35. Aysel'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	156

Şekil 4.36. Aysel'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	158
Şekil 4.37. Nazlı'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı.....	159
Şekil 4.38. Nazlı'nın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	162
Şekil 4.39. Nazlı'nın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı	163
Şekil 4.40. Aysel'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	168
Şekil 4.41. Hüseyin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	169
Şekil 4.42. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü.....	170
Şekil 4.43. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü Devamı	171
Şekil 4.44. Nermin'in Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	177
Şekil 4.45. Büşra'nın Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	179
Şekil 4.46. İbrahim'in Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	180
Şekil 4.47. Ayhan'ın Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	185
Şekil 4.48. Hüseyin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	186
Şekil 4.49. İbrahim'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	188
Şekil 4.50. Aykut'un Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü.....	191
Şekil 4.51. Hatice'nin Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	194
Şekil 4.52. Nermin'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü.....	194
Şekil 4.53. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	195
Şekil 4.54. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Problem Çözümü	199
Şekil 4.55. Aykut'un Vektör Kavramı İle İlgili Problem Çözümü.....	200
Şekil 4.56. Nermin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	205
Şekil 4.57. Nazlı'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı.....	206
Şekil 4.58. Hüseyin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	208
Şekil 4.59. Ayhan'ın Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	215
Şekil 4.60. Nazlı'nın Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	216
Şekil 4.61. Aykut'un Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı.....	224
Şekil 4.62. Hatice'nin Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	226
Şekil 4.63. Hüseyin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	227
Şekil 4.64. Aykut'un Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı.....	235
Şekil 4.65. Ayhan'ın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	235
Şekil 4.66. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	236
Şekil 4.67. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	244
Şekil 4.68. Hüseyin'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	245
Şekil 4.69. İbrahim'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	246
Şekil 4.70. Nermin'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı	247
Şekil 4.71. Aykut'un Grup Kavramı İle İlgili İspatı Değerlendirmesi	259
Şekil 5.1. Geçerli Problem Çözme Süreci.....	305
Şekil 5.2. Eksik/Yetersiz Problem Çözme Süreci.....	305
Şekil 5.3. Eksik/Yetersiz Problem Çözme Süreci.....	306
Şekil 5.4. Geçerli İspat Yapma Süreci	311
Şekil 5.5. Eksik İspat Yapma Süreci.....	312

Şekil 5.6. Geçersiz İspat Yapma Süreci	313
Şekil 5.7. Geçerli İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci	319
Şekil 5.8. Eksik İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci	320
Şekil 5.9. Yanlış İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci.....	321

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
MİGMF	Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
TDK	Türk Dil Kurumu

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Matematik yapısı itibariyle bir soyutlama bilimidir (De Corte, 2004; Tall, 2002). Bu yüzden matematiksel önermelerin şüphe götürmez bir şekilde ispatlanması gerekmektedir. Okul matematiğinde, öğrenciler matematiksel ifadelerin ispatlarını yaparken bir yandan da formülleri son haliyle bilmenin yeterli olmadığını, ulaşılan sonuçların nedenleri ile birlikte açıklanması gerektiğini öğrenirler. Bu açıdan matematiksel ispat, hem matematiğin hem de matematik eğitiminin önemli bir elemanıdır (Güven, Çelik ve Karataş, 2005). Matematik için vazgeçilmez olan aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, teoremler ve teoremin ispatları bilimsel bir disiplin olarak matematiğin yapı iskeletini oluşturur (Heinze ve Reis, 2003). Özellikle üniversitelerde okutulan ileri seviyedeki matematik dersleri bu kavramlar üzerine kurulmuş olmasına rağmen, üniversitede yüksek matematik eğitimi alan öğrencilerin matematiksel ispat yapmakta güçlük yaşadıkları bilinmektedir (Almeida, 2000; Bayazıt, 2009; Biehler ve Kempen, 2013; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Recio ve Godino, 2001).

Eğitim sistemlerinin en önemli işlevlerinden biri öğrencilerin muhakeme edebilme becerilerinin gelişmesini sağlamaktır. Öğrencilerin muhakeme edebilme becerileri gelişirken bir yandan da Bloom taksonomisinin üst seviyelerindeki bilişsel becerileri kazanmaları hedeflenir (Fitzgerald, 1996). Bu yüzden öğrencilerin öğrenim hayatlarının ilk yıllarından itibaren matematiksel muhakeme yeteneğini geliştirebilmeleri için matematiksel ispat yapmaya yönelik uygun etkinlikler hazırlanması, matematik eğitiminin merkezine alınmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Schoenfeld, 1994; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007).

Matematik, sıkça değinildiği gibi, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Matematik öğretmeni adaylarının lisans programları incelendiğinde birinci

sınıftan itibaren ders içeriklerinde üst düzeyde ispat yapma becerisi kazanmaları hedeflenmektedir. Alan derslerinin temelinde tarihten günümüze kadar gelen tanımlar ve teoremler bulunmaktadır. Öğretmen adayları lisans öğrenim hayatları boyunca aldıkları alan dersleri sayesinde matematiksel ispat yapma konusunda donanımlı olarak yetiştirilmek istenmektedir. Özellikle birinci sınıfta yer alan Soyut Matematik I, II ve Analiz I, II derslerinde öğretmen adayları ispat yapma ve ispat teknikleri hakkında ayrıntılı olarak bilgilendirilmektedirler. Alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmanın kaçınılmaz olduğu matematikte, bu konuya lisans eğitiminin başlangıcında yer verilmesinin nedenlerinin başında; öğrencilerin diğer derslerde herhangi bir ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemin kullanıldığını ayırt etmelerini ya da hangi yöntemin kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak gelmektedir. Öğretmen adaylarının ispat yapmadaki beceri düzeyleri hem birer matematikçi hem de birer matematik öğretmeni olarak sahip olmaları gereken düzey ile ortaya çıkacaktır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Ayrıca üniversitelere göre farklılık göstermekle birlikte bu araştırmanın yapıldığı ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adayları beş yıllık lisans öğrenimleri süresince alan dersleri kapsamında (Lineer Cebir, Analiz, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Topolojiye Giriş, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Fonksiyonel Analiz vb.) çeşitli ispatlar yapmaktadırlar. Lisans düzeyindeki alan dersleri genel olarak gerekli kavramların öğrenilmesi, öğrenilen bu kavramlar yardımıyla kurulan teoremlerin ispatlanması ve son olarak konuyla ilgili problemlerin çözümü şeklinde yürütülmektedir (Weber, 2004).

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitimi araştırmalarında son yıllarda, akıl yürütme, ispat ve muhakeme etme gibi konular, ön plana çıkmaktadır (Heinze ve Reis, 2003). Öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile ilgili görüşlerini, inançlarını ve ispat yapma süreçlerini belirlemeye yönelik çok sayıda araştırma yapılmıştır (Almeida, 2000; Almeida, 2003; Bayazıt, 2009; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Knuth, 2002; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Baştürk, 2010; Raman, 2002; Raman, 2003; Recio ve Godino, 2001; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Weber, 2001).

Ayrıca lisans öğrenimleri süresince ispat yapma hakkında donanımlı olarak yetiştirilen öğretmen adaylarının öğretmenlik yapacakları yaş gruplarına hangi becerileri kazandıracakları öğretim programları incelendiğinde ortaya çıkmaktadır. Öğrencilerin öğrenim hayatlarının ilk yıllarından itibaren ispat yapmaya başlamaları National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) tarafından önerilmektedir. Ayrıca NCTM (2000) raporunda Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlarda, Beş Süreç Standardı içerisinde “Akıl yürütme ve ispat standardı” yer almaktadır. Bu standart çerçevesinde anaokulu öncesi dönemden 12. sınıfa kadar öğretim programlarının bütün öğrenciler için;

- Akıl yürütme ve ispatı, matematiğin temel bileşenleri olarak görme
- Matematiksel varsayımları oluşturma ve inceleme
- Matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme
- İspat yöntemleri ve akıl yürütmenin çeşitli tiplerini seçme ve kullanma kazanımlarını sağlamalıdır (Dede, 2012).

Ülkemizde ise Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından hazırlanan öğretim programları incelendiğinde; ilköğretim ikinci kademede (6–8. sınıf) matematik öğretiminde teorem, aksiyom gibi kavramların olmaması sebebiyle açıkça ispat yapmaktan bahsetmek güçtür. Mevcut durumdaki ilköğretim matematik öğretim programının genel hedeflerinden birinin, “mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir” olduğu göze çarpmaktadır (MEB, 2005a). Ayrıca MEB tarafından yenilenen ortaokul matematik dersi (5-8. sınıf) öğretim programının genel amaçları içerisinde kazandırılması öngörülen temel beceriler arasında; “Problem çözme ve Matematiksel süreç becerileri (İletişim, Akıl yürütme, İlişkilendirme)” yer almaktadır. Buna göre ilköğretim düzeyinde sistemli bir şekilde ispat yapmak yerine problem çözme becerisi ve akıl yürütme (muhakeme) sonunda eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci üzerinde durulmaktadır (MEB, 2013a).

Ortaöğretim matematik programına bakıldığında ise; “Mantık Öğrenme Alanı” içerisinde, “İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı” nda ispat kavramına yönelik iki kazanıma rastlanmaktadır. Bunlar “tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını

açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir” ve “ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar” ifadeleridir (MEB, 2005b). Bununla birlikte MEB tarafından yenilenen ortaöğretim matematik dersi öğretim programının öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlilik ve beceriler arasında “Matematiksel Süreç Becerileri” içerisinde “matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme” becerilerinin yer aldığı görülmektedir. Ayrıca yenilenen öğretim programında 9. sınıfta “İspatlama, orantısal akıl yürütme ve olasılıklı düşünme becerisi kazanma” ve 11. sınıf düzeyinde “Matematiksel ispat yöntemlerini (aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat, çelişki ve tümevarım) kullanarak ispatlar yapma” şeklinde iki kazanıma rastlanmaktadır (MEB, 2013b).

Öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin dayanaklarını anlamaları öğrenmeyi kalıcı hale getirmelerinde yararlı olacaktır. Ayrıca, kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır. Çünkü matematiksel ispat, öğrencilerin matematikte karşılaştıkları problemleri çözebilmeleri için gerekli olan matematiksel bilgileri ilişkilendirme, strateji geliştirme ve bir araç olarak kullanılabilme özelliklerine sahiptir (Hanna ve Barbeau, 2008; Mariotti ve Balacheff, 2008). Bununla birlikte yapılan araştırmalarda ispatın öğrencilerin matematiksel bilgileri öğrenmeleri üzerindeki fonksiyonları;

- Doğrulama
- Açıklama
- Sistematikleştirme
- Keşfetme
- İletişim
- Deneysel bir teori oluşturma
- Bir tanımın anlamını ya da bir varsayımın sonuçlarını keşfetme
- Bilinen gerçeklerin yeni bir çerçeve içine dâhil edilmesi ve böylece yeni bir bakış açısı oluşturma

şeklinde sınıflandırılmıştır (Hanna, 2000; Hanna ve Jahnke, 1999). Ayrıca matematiksel ispat öğrencilerin kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır.

Literatürde karşılaşılan çalışmaların bütününde ispat, matematiğin ayrılmaz bir parçası olarak karşımıza çıkmaktadır (Hanna, 2000; Jones, 1997; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994). Bu nedenle gerek ilköğretim gerekse ortaöğretim matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin gelişmesi yönünden önemli olacaktır (Moralı, Uğurel, Tümnüklü ve Yeşildere, 2006).

Matematiksel ispat ile ilgili araştırmaların büyük bir bölümü üniversite öğrencilerinin ispat yapmadaki başarılarını ölçmeye (Healy ve Hoyles, 1998, 2000; Thompson, 1991) veya öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları güçlükleri belirlemeye yöneliktir (Furingetti, Olivero ve Paola, 2001; Güven, Çelik ve Karataş, 2005). Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde yaşadıkları güçlüklerin sebeplerini derinlemesine inceleyen bir çalışma bulunmamaktadır. Bu yüzden bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat yapma süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Bu şekilde öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlüklerin kaynağı daha net ortaya çıkacak ve ispat yapma ile ilgili güçlüklerinin giderilmesi yönünde fayda sağlanabilecektir.

1.2. Problem Cümlesi

Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçleri nasıldır?

Bu çalışmanın araştırma probleminin çözümü için, çalışma sürecinde aşağıda belirlenen alt problemlere de yanıt aranmıştır.

1.3. Alt problemler

1. Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri nasıldır?
2. Matematik öğretmeni adaylarının, lineer cebir ve soyut cebir ile ilgili kavramları anlama düzeyleri ve bu kavramlara yönelik kavram imajları nasıldır?
3. Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında matematiksel problem çözme süreci nasıldır?

4. Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında matematiksel ispat yapma süreci nasıldır?

5. Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında verilen bir ispatın doğruluğunu değerlendirme süreci nasıldır?

1.4. Çalışmanın Amaç ve Önemi

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini incelemektir. Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında matematiksel ispat becerilerinin ve ispat süreçlerinin incelenmesi, öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin olası sorunları ortaya çıkarma ve gidermede önemli bilgiler sağlayacaktır.

NCTM (2000) raporuna göre; matematiksel ispat ve matematiksel muhakeme yeteneği, ilköğretimden başlayıp ortaöğretim son sınıfa kadar matematik müfredatının en önemli yapı taşını oluşturmaktadır. Ülkemizdeki Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programına bakıldığında ise Mantık Öğrenme Alanı içerisinde, İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı kapsamında ispat kavramına yönelik iki kazanıma rastlanmaktadır. Bunlar, tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir ve ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar ifadeleridir (MEB, 2005b). Ayrıca ülkemizde öğretim programlarını yeniden yapılandırma çalışmalarının sonucunda oluşturulan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında, Matematiksel Süreç Becerileri içerisinde matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabilme becerilerinin yer aldığı görülmektedir (MEB, 2013b). Bu bağlamda ileride matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının matematiksel ispat ve matematiksel muhakeme becerilerinin belirlenmesi önem taşımaktadır. Çünkü matematikte ve matematik eğitiminde ispatın anlam ve önemi hızla artarken, matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeyleri, matematiksel ispata yönelik kavram anlayışları, ispatın matematik eğitimindeki önemini anlamaları, bu konulardaki algı ve görüşleri önemli olacaktır. Ayrıca yapılan araştırmalar, öğretmenlerin öğrencilerine ispat becerisi kazandırma süreçlerinde, ispata ilişkin algı ve deneyimlerinin etkili olduğunu göstermektedir (Almeida, 2000; Furinghetti ve Morselli, 2009).

Matematik öğretmenlerinin derslerini etkili bir şekilde yapılandırabilmeleri için, kazandıracakları kavramın nereden geldiğini, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine

kurulu olduğunu bilmeleri gerekmektedir. Bunun için de matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı yetiştirilmeleri gerekmektedir. Bu alanda ülkemizde herhangi bir çalışma bulunmadığından bu çalışmanın bulguları önemli olacaktır. Ayrıca bu çalışma, bundan sonra yapılacaklar için önemli bir referans niteliği taşımaktadır. Bu yüzden literatüre önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.5. Varsayımlar

1. Klinik mülakatlara katılan matematik öğretmeni adaylarının mülakatlar boyunca tüm sorulara içtenlikle yanıt verdikleri kabul edilmektedir.
2. Klinik mülakatlarda kullanılan problemlerin uygunluğu konusunda alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Sınırlılıklar

1. Araştırma, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi'nde öğrenimlerine devam eden ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile yürütülmüştür. Bu süreçte 10 öğretmen adayı ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu şekilde daha derinlemesine bilgi elde edileceği düşünülmüştür. Bu yüzden araştırmanın sonuçları başka üniversitelerde öğrenimlerine devam eden öğretmen adaylarına genellenemez.
2. Öğretmen adaylarının problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme süreçleri analizi, klinik mülakatlarda yer alan kavramlarla ilgili problemlerle sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Problem: Problem zor ya da sonucu belirsiz bir sorudur. Araştırma, tartışma ya da bir düşünme meselesidir (Altun, 1997).

Problem Çözme: Belirsizliklerin ortadan kaldırılmasıdır. Bir başka ifadeyle, problem çözme, yeni olay ya da durumlar karşısında var olan ilişkileri ortaya çıkarma, yeni ilişkiler kurma ve güdülen amaca göre belli bir sonuç elde etme işidir. (Pesen, 2008).

İspat: Genellikle matematiğe özgü bir kavram sayılan ispatlama, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2000).

Matematiksel İspat: İddia edilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu, her durumda ve her koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesidir. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesidir (Baki, 2008).

Teorem: Kanıtlanabilen bilimsel önermelerdir. Mantıksal usavurma ile kanıtlanan önermenin ya da özelliğın bildirimidir (Karaçay, 2009).

Kavram: Bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımıdır (Türk Dil Kurumu [TDK], 2012).

Kavram İmajı: Kavram imajı, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlardır (Tall ve Vinner, 1981).

Kavram Tanımı: Kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan ve matematikçiler tarafından kabul gören ifadelerdir (Vinner, 1983).

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde; kuramsal temeller ve kuramsal temellerle ilgili yapılan araştırmalar üzerinde durulmuştur.

2.1. Kuramsal Çerçeve

2.1.1. Matematiksel İspatın Anlamları ve Fonksiyonları

Matematiksel ispat matematiğin merkezinde yer almaktadır (Ko, 2010) ve bugün anlaşıldığı haliyle kaynağını M. Ö. IV. yüzyılda yayınlanan Euclid'in Elemanlar kitabından almaktadır. Euclid ispatı dört aşamada incelemiştir. Bu aşamalar sonucu doğrulama, başkasını ikna etme, sonuç bulma ve sonuçları tümdengelsel bir sistem içerisine yerleştirme şeklindedir (Almeida, 2003). Baki (2008) ise ispatın üç aşamada tamamlandığını ifade etmiştir.

- Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır. Buna doğrulama aşaması denir.
- İkinci aşamada iddianın niçin doğru olduğunun açıklaması yapılır. Bu açıklama aşamasıdır.
- Üçüncü aşamada ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapılır. Bu aşamada ispat için yapılanlar matematiksel dil kullanılarak en kısa yoldan soyutlandırılır.

Buna göre açıklama ve genelleme aşamasının tamamlanamaması, iddianın veya bir önermenin geçerliğini etkilemez. Ancak bu aşamaların tamamlanması ispatın zarıflığını ve estetik yönden yeterliliğini gösterir.

Bu özelliklerinden dolayı birçok çalışmada matematik öğretimi için matematiksel ispatın kullanılması gerektiği vurgulanmıştır (Knuth, 2002). Ayrıca araştırmacılar tarafından ispatın matematik öğretimi açısından anlamı ve fonksiyonları belirlenmiştir. Stylianides ve Stylianides (2009) ispatı matematik toplulukları tarafından kabul edilebilir, genel, geçerli ve doğru bir ifade elde etmek olarak

nitelendirmektedirler. Weber (2005) ise ispatı, ispatı yapan kişi tarafından sunulan bazı varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önemli bilgilerin kullanıldığı matematiksel bir çalışma ve önceki teoremler, kabul edilen gerçekler yoluyla oluşturulan çıkarımsal kuralların uygulanması ile arzu edilen sonuçların çıkarımıdır şeklinde tanımlamıştır.

Reid (2006) ise dördü matematiğe özel ve bir tanesi de günlük yaşamla ilgili olan beş ispat kullanımının olduğunu belirtmiştir. Bu kullanımlardan birincisi olan ispat kavramı kesin ispat fikirleri ile alakalıdır, ikincisi ders kitaplarında ve dergilerde yer alan ispatlardır, üçüncüsü tümdengelimsel akıl yürütme anlamında ispat yapmadır, dördüncüsü çoğunlukla istisnalara odaklanan bir ifadenin doğruluğunu test etmek anlamında kullanılan araştırmalar ve son olarak da günlük hayatta bilgilerin doğrulanmasında kullanılan ispatlar şeklindedir. Bununla birlikte, Knuth (2002) ispatın aslında sonuçların uygunluğu ya da bir ifadenin doğruluğunu göstermek olduğunu ve aynı zamanda ispatın matematik öğretimi için bir araç olarak kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Harel ve Sowder (2007) ise matematiksel ispatı bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüpheleri ortadan kaldırmak için insanlar tarafından yapılan zihinsel bir aktivite olarak tanımlamışlardır. İspat yapmayı da bunları anlama ve başkalarını yaptıklarına ikna etme olarak ifade etmişlerdir. Bir iddia üzerindeki kişinin kendi şüphelerini ortadan kaldırmasını anlama, yine iddia üzerindeki başkalarının şüphelerini kişinin kendi uğraşları ile ortadan kaldırılmasını ise ikna etme olarak açıklamışlardır.

Hanna ve Barbeau (2002) ispatı bilinen bir sonuca ulaşmak için sonlu sayıda mantık adımı kullanarak kabul edilen kurallara ulaşmak şeklinde tanımlamışlardır. Hanna, Bruyn, Sidoli ve Lomas (2004) başka bir çalışmalarında ise ispatı örneğin daha önceden ispatlanan sonuçlar, aksiyomlar ya da kabul edilen kurallar şeklinde açık olarak verilenlerin geçerli tümdengelimsel deliller oluşturacak şekilde mantık kuralları çerçevesinde kullanılması olarak tanımlamışlardır. Araştırmacılar tarafından yapılan ispat tanımlarındaki ortak özelliklerin, tümdengelimsel deliller ve mantıksal süreç olduğu görülmektedir.

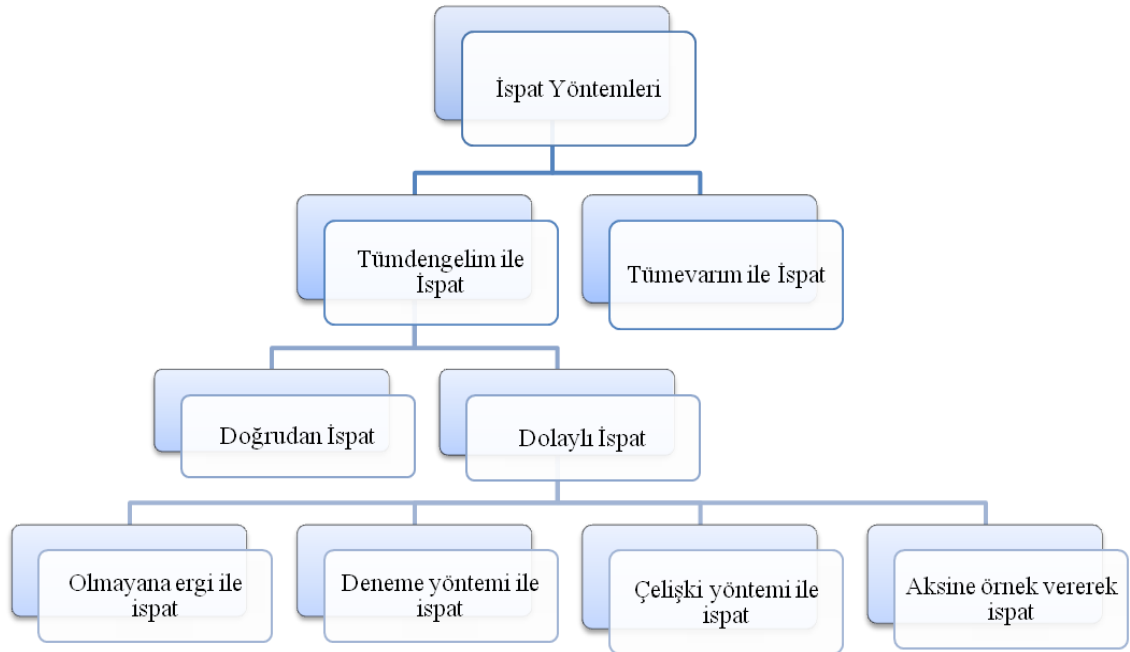
Matematiğin vazgeçilmez bir parçası olarak nitelendirilen matematiksel ispat, matematiğin derinlemesine öğrenilmesini sağladığı için (Hanna, 2000) ve öğrencilerin ispat yeterliklerinin matematik yeterliliğini ilerletebileceğinden dolayı (Genthew, 2005) ilköğretim seviyesinden itibaren, matematik etkinliklerinin merkezine alınmaktadır

(NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Bunun yanı sıra NCTM (2000) standartlarında matematik öğretimindeki yeni yaklaşımlardan biri olarak matematiksel okuryazarlık öne çıkmaktadır. Öğrencilerin matematiksel okuryazarlığının gelişmesi için ise problem çözmenin bir yöntem olarak kullanılması önerilmektedir. Öğrencilerin problem çözme yeteneklerinin gelişmesi için ise öğretim programlarında matematiksel ispatın bir araç olarak kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır. Çünkü ispat öğrencilerin matematiksel kavramları nedenleri ile öğrenmelerine yardımcı olacak biliş ötesi faaliyetler içermektedir. Ayrıca NCTM (2000) raporunda matematiksel ispatın erken dönemlerden itibaren matematik öğretim programlarında yer alması gerektiğini savunmaktadır. Bu açıdan bakıldığında matematiksel ispatın ne anlama geldiği ve hangi fonksiyonlara sahip olduğunun bilinmesi önem kazanmaktadır. Bu yüzden son yıllarda araştırmacılar matematiksel ispatın ne anlama geldiği ve matematik eğitimi için hangi fonksiyonlara sahip olduğu ile alakalı araştırmalar yapmaktadırlar (Hanna, 2000). İspatın matematik eğitimi açısından fonksiyonları araştırmacılar tarafından aşağıdaki gibi belirlenmiştir (Almeida, 2003; Hanna, 2000; Hanna ve Barbeau, 2002).

- Doğrulama ya da gerekçe sunma: Bir ifadenin doğruluğunu değerlendirme
- Açıklama ya da aydınlatma: Bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklama
- İnanma: Şüpheleri ortadan kaldırma
- Sistematikleştirme: Sonuçların temel kavramlar, teoremler ve aksiyomların tündengelim sistemi içerisinde organizasyonu
- İletişim: Matematiksel bilgi ve akıl yürütmenin başkalarına aktarımı
- Keşif ya da inşa etme: Yeni sonuçlar keşfetme
- Haz: Sorunların entelektüel bir bakış açısıyla zarifçe karşılanması

Araştırmacılar, ispatın anlamı ve fonksiyonlarını inceleyerek ve sınıf içi matematik öğretimi etkinliklerine entegre ederek, öğrencilerin matematiksel düşünme yeteneklerini geliştireceğini savunmaktadırlar (Hanna ve Barbeau, 2002; Rav, 1999).

2.1.2. Matematiksel İspat Yöntemleri



Şekil 2.1. Matematiksel İspat Yöntemleri

Matematikte kullanılan birçok ispat tekniği bulunmaktadır. Bu ispat teknikleri; tümdengelim ve tümevarım ile ispat olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Çallıalp, 1999). Ayrıca tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat, dolaylı ispat olmak üzere ikiye ayrılır. Dolaylı ispat ise; olmayana ergi, çelişki bulma, deneme yöntemi ve aksine örnek verme gibi adlarla çeşitli yollara ayrılmaktadır. Bu ispat yöntemleri aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Tümevarım Yöntemiyle İspat: $S \subset \mathbb{N}$ ve $1 \in S$ olsun. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ gerektirmesi doğru ise $S = \mathbb{N}$ dir.

Pozitif tam sayılar hakkında bir $P(n)$ önermesi göz önüne alalım.

1. $n = 1$ için $P(1)$ önermesi doğru ise,
2. Önermenin n için doğruluğu, $n + 1$ için de doğruluğunu gerektiriyorsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Örneğin; “Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $4^n - 1$, 3 ile tam bölünür” önermesi tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir.

Yani, $n = 1$ için $4^1 - 1 = 3$ olduğundan iddia doğrudur.

Şimdi önermemiz, $n = k$ için $3|4^k - 1$ doğru olsun. Yani, $m \in \mathbb{Z}^+$ için $4^k - 1 = 3m$ olsun.

O halde $n = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu yani,

$$3|4^{k+1} - 1$$

olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi, $4^{k+1} - 1 = 4^{k+1} - 1 - 3 + 3 = 4^{k+1} - 4 + 3 = 4(4^k - 1) + 3$ olarak yazılabilir.

Tümevarım hipotezinde, $4^k - 1 = 3m$ olduğunu kabul ettiğimize göre, eşitliği

$$4.3m + 3 = 3(4m + 1)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $l \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $4^{k+1} - 1 = 3l$ olarak yazılabilir.

Bu ise, $3|4^{k+1} - 1$ demektir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Doğrudan ispat yöntemi: Matematikte kullanılan doğrudan ispat $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremin ispatı için, ispat tanımındaki gibi, p önermesi doğru kabul edilir ve diğer bilgileri de kullanarak q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır.

Örneğin; “Bir tek sayının karesi de tektir” önermesini $p \Rightarrow q$ kalıbında yazacak olursak “bir sayı tek ise, karesi de tektir.” önermesi elde edilir. Buna göre;

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x = 2k + 1$ şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2K + 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Olmayana Ergi İspat Yöntemi: Dolaylı ispat yöntemlerinden biri olan olmayana ergi yönteminde $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkleğinden yararlanılır. Başka bir deyişle teoremin kendisi yerine karşıt tersi ispatlanır.

Örneğın; “ m bir doğal sayı olmak üzere m^2 çift ise, m de çifttir.” teoremini olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım.

p : “ m^2 çift sayıdır.” (HİPOTEZ)

q : “ m çift sayıdır.” (HÜKÜM)

Önermeleri için, $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak yerine $q' \Rightarrow p'$ teoremini ispatlamak yeterli olacaktır. Buna göre,

q' : “ m çift sayı değildir.” $\equiv$ “ m tektir.” (HİPOTEZ)

p' : “ m^2 çift değildir” $\equiv$ “ m^2 tektir.” (HÜKÜM)

olduğundan, m tek ise, $m = 2n + 1$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. Bu durumda $m^2 = (2n + 1)(2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ olur. $2(2n^2 + 2n)$ çift ve $2(2n^2 + 2n) + 1$ tek olacağına göre, m^2 de tek olmak zorundadır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Çelişki Yöntemi ile İspat: Bu yöntemde, verilen bir $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q')$ denkleğinden yararlanılır ve $(p \wedge q') \equiv 0$ olduğu gösterilir. Bir başka deyişle, teoremin kendisi yerine, teoremin hipotezi ve hükmünün değılini doğru varsayıp bunun bir çelişki olduğunu göstermeye çalışırız.

Örneğın; “Aynı doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.” teoremi bu yöntemle ispatlanabilir. Doğrular birbirine paralel değıllerse bir noktada kesişirler. Bu durumda düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan birden çok paralel çizilmiş olur. Bu ise daha önceki kabulle “bir doğruya dışındaki bir noktadan ancak bir paralel çizilir” ile çelişir. Bu durumda “bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine de paraleldir.” hükmü doğrulanır.

Aksine Örnek Verme Yöntemi: Bu yöntem iki şekilde uygulanabilir. Verilen bileşik önermenin hipotezini doğru kabul ederek hükmüyle çelişkili bir sonuca varmamıza yarayacak en az bir örnek bulmak ya da aynı mantığı içeren $(p \Rightarrow q)' \equiv (p \wedge q')$ denkleğinden faydalanarak $(p \wedge q') \equiv 1$ olacak şekildeki bir örnek verme şeklindedir.

Örneğın; $k, l \in \mathbb{N}$ olsun. $p: (3|k \wedge 5|l)$ ve $q: (3+5)|(k+l)$ önermeleri için $(p \Rightarrow q) \equiv 1$ olup olmadığını araştıralım. Bunun için $p \equiv 1$ iken $q \equiv 0$ olacak şekilde (en az) birer tane $k, l \in \mathbb{N}$ sayılarını bulmamız yeterli olacaktır. Buna göre, $k = 6$ ve $l = 5$ için p önermesi doğrudur ama $(3+5)|(6+5)$ önermesi ise yanlıştır. O halde $(p \Rightarrow q) \equiv 0$ olur.

2.1.3. Matematiksel İspat ve Problem Çözme İlişkisi

Matematiksel ispat ile problem çözme arasında yakın bir ilişki vardır (Weber, 2004). Öğrencilerin matematiksel problem çözme ve ispat yapma yaklaşımları arasındaki ilişki yapılan çalışmalarla ortaya konulmuştur (Tall, 1991; Weber, 2005). Matematik araştırmacıları için ispat yapma hipotezlerin formüle edildiğı, test edildiğı karmaşık ve sistemli bir problem çözme aktivitesidir (Shipley, 1999). Rutin olmayan problemlerin çözümleri bir ilişki, düzen veya örüntünün açıklanmasını gerektirdiğinden öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen veya örüntü arama eğilimini artırır, ispat fikrini geliştirir (Altun, 2005). Bu bağlamda her tür teoreme, bir sıra dışı problem gözüyle bakılabilir. Teoremin ispatı ise o problemin çözümü anlamına gelir. Matematik ve matematik öğretimi ile ilgilenen araştırmacılar problem çözme ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır.

Matematik eğitimi alanında problem çözme çalışmaları arasında problem çözme süreçlerini açıklayabilmesi açısından en çok kabul gören çalışma, Polya (1957) tarafından yapılmıştır (Akt: Shipley, 1999). Polya' ya göre problem çözme aşamaları şu şekildedir:

1. Problemin anlaşılması: Öğrenciler bu aşamada, problem cümlesindeki ifadeleri kendilerine göre anlamlandırmaya çalışırlar.
2. Çözümle ilgili stratejilerin seçilmesi: Bu aşamada problem cümlesinde verilenler ve istenenler belirlenmeye çalışılır. Daha sonra çözüm için gerekli olan strateji

araştırılır. Bunlar yardımıyla problemin çözümü için gerekli olan materyaller, formüller, algoritmalar belirlenir.

3. Seçilen stratejinin uygulanması: Problemin çözümü için gerekli olan gözlemler, doğrulamalar ve genellemeler yapılmaya çalışılır. Çözüm için kurulan denklemler çözülerek problemin çözümüne ulaşılmaya çalışılır.
4. Çözümün değerlendirilmesi: Bu aşamada problem çözme süreci tekrar gözden geçirilir. Geriye dönülerek çözüm için seçilen stratejiler ve uygulamalar değerlendirilir.

Bu aşamaların bilinmesi ve bunlara uygun çalışma biçimi problem çözmeyi kolaylaştırır ancak doğru çözümü garanti etmez (Altun, 2008).

Problem çözme aşamalarını belirlemeye çalışan diğer bir araştırmada ise Schoenfeld (1985) problem çözme sürecini 5 adımda incelemiştir. Bunlar;

1. Analiz: Problemin anlaşılması, verilerin ve problemin amaçlarının belirlenmesi,
2. Dizayn: Problemin ana hatlarının ve yapısının belirlenmesi
3. Araştırma: Problem cümlesindeki ifadelerin problemi çözecek olan kişi tarafından kendi cümleleriyle ifade edilmesi ve problem cümlesini kendine göre düzenlemesi
4. Uygulama: Bu aşama, problemin adım adım çözümünün yapıldığı bölümdür.
5. Doğrulama: Bu bölümde problemin çözümü baştan sona doğru dikkatli bir şekilde gözden geçirilir.

Problem çözümünde sistemli bir şekilde ilerlemeyi gerektiren bu adımlardan araştırma adımı çok önemlidir. Çünkü bu aşamada öğrenci probleme kendi ifadelerini katamaz ise problemi daha iyi anlayabilmek için sırasıyla dizayn ve analiz bölümlerine dönebilir. Daha sonra tekrar aynı aşamalardan geçerek problemin çözümü yapılabilir.

Mason, Burton ve Stacey (1985) öğretim deneyimlerine dayanarak üç aşamalı bir problem çözme modeli geliştirmişlerdir. Buna göre;

1. Giriş: Polya'nın aşamalarından ilk ikisi olan problemin anlaşılması ve çözümle ilgili stratejilerin seçilmesi aşamalarının birleşimi olarak ifade edilmiştir.

2. Uygulama: Bu aşama Polya'nın üçüncü aşaması olan seçilen stratejinin uygulanması aşaması ile özdeşleştirilmiştir.
3. Gözden Geçirme: Bu aşama, yapılan işlemlerin ve ulaşılan sonuçların kontrol edilmesi sürecidir.

Aslında problem çözme aşamalarından en önemlisinin ulaşılan sonucun doğruluğunu başkalarına kabul ettirebilmek olduğu üzerinde durulmaktadır. Çünkü ulaşılan sonuçların başkaları tarafından kabul edilmesi sürecinde problem çözme aşamasındaki tüm adımlar kritik edilecektir. Bu şekilde kritik edilerek doğruluğu kabul gören bir problem çözümü ise problem çözme gelişimine olumlu katkı sağlayacaktır (Mason, Burton ve Stacey, 1985).

Benzer şekilde Wickelgren (1974) problem çözme sürecini geliştirdiği üç adımda incelemiştir. Buna göre, problem üç tip bilgiden oluşmaktadır. Bunlar:

1. Verilenler: Problem cümlesindeki açıklamalar ve problemi çözmeye başlayabilmek için gerekli bilgilerden oluşmaktadır. Burada verilen bilgiler problemin türüne göre değişmektedir. Günlük yaşam problemlerinde verilenler bir eşya, bilgi veya açıklama olabilecek iken, bir ispat probleminde verilenler bir aksiyom veya bir tanım olabilmektedir.
2. İşlemler: Bu aşamada problemi çözecek olan kişinin eylemlerinden söz edilmektedir. Burada problemi çözmesi beklenen kişinin verilenlerden hareketle işlemlerine başlama süreci ele alınmaktadır. Matematiksel ispat problemlerinde işlemler aşaması sonuç çıkarma kurallarının elde edilmesidir.
3. Amaçlar: Problem ifadesindeki bilgiler ışığında problemin hedeflenen son noktaya ulaştırılması aşamasıdır.

Lucast (2003) ise yüksek lisans tez çalışmasında NCTM standartlarına göre matematik öğretim programlarının nasıl olması gerektiğine yönelik bir derleme yapmıştır. NCTM standartlarına göre matematik öğretiminde yeni yaklaşımın matematiksel okuryazarlık olduğunu belirtmiştir. NCTM standartları arasında matematiksel okuryazarlığın gelişmesinde ve matematik öğretiminde problem çözmenin bir yöntem olarak kullanılması önerilmektedir. Çalışmada ispatın matematik öğretim

programında önemli bir yeri olduğuna vurgu yapılmış ve ispatın problem çözümünde başarılı olmak için zihinsel bir araç olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca matematiksel problem çözme yeteneğinin biliş ötesi bir özellik olduğu ve ispat yapmanın öğrencilerin biliş ötesi düşünme yeteneklerini geliştirdiği ifade edilmiştir. Matematiğin nedenleri ile birlikte öğrenilmesine olanak sağlayan ispatın, öğrencilerin problem çözme yeteneğine katkıda bulunacağı sonucuna ulaşılmıştır.

2.2. İlgili Araştırmalar

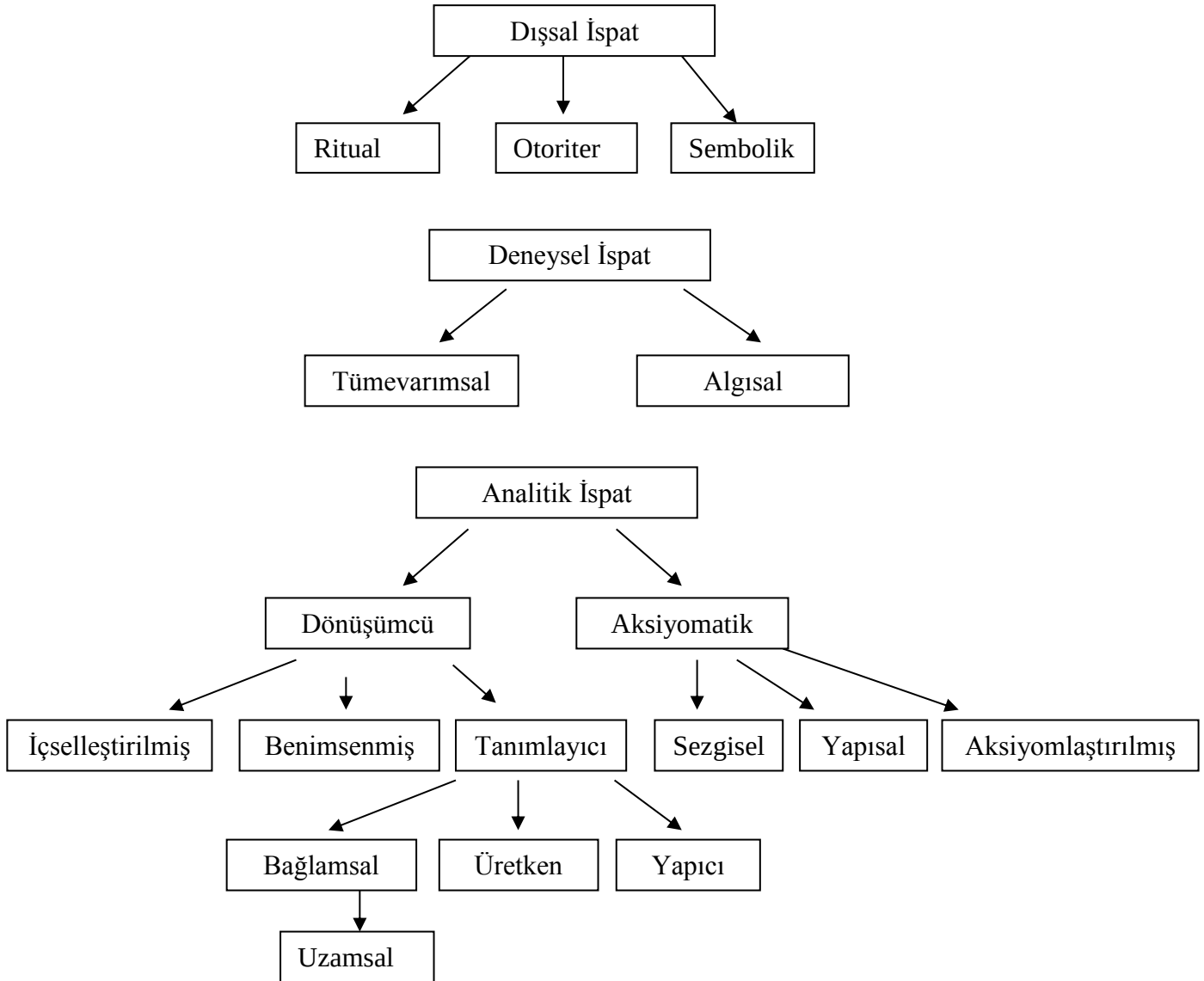
Bu bölümde matematiksel ispat ile ilgili literatürde yer alan çalışmalardan oluşan bir derleme sunulacaktır. Matematiksel ispat ile ilgili son on beş yıl içerisinde özellikle yurt dışında birçok çalışmanın olduğu görülmektedir. Bununla birlikte ülkemizde yurt dışında yapılan çalışmalar kadar olmasa da son on yıl içerisinde matematik eğitimcilerinin bu konu ile ilgili çalışmaları bulunmaktadır.

2.2.1. İspat Sınıflama Çalışmaları

Bu bölümde matematik eğitimi alanında ispat ile ilgili yapılan çalışmalar içerisinde önemli bir yere sahip olan ispatların sınıflandırılması çalışmaları ile ilgili alan yazında yer alan çalışmalar derlenerek sunulmuştur. İspat sınıflandırma çalışmaları hem ülkemizde hem de tüm dünyada araştırmacılar tarafından birçok araştırmada araştırma konusu olarak ilgi görmektedir.

Harel ve Sowder (1998) tarafından yapılan ve kişilerin yaptıkları ispatları başkalarını ikna etme süreci olarak değerlendiren çalışma, araştırmacıların yoğun ilgisini çekmiştir. Öyle ki Harel ve Sowder tarafından yapılan ispat sınıflandırması özellikle ülkemizde makalelerde, yüksek lisans ve doktora tezlerinde araştırma problemi olarak kullanılmıştır. Buna göre ritual (kuralsal) ispatta, tartışma sonucu ulaşılan yargılamalar önemli iken otoriter ispatta ders kitabı, öğretici ya da kişinin kendisinden daha bilgili gördüğü bir arkadaşının doğrulamasına inanma vardır. Sembolik ispat ise sadece semboller yardımıyla yapılan doğrulama eylemidir. Tümevarımsal ispatta kişileri ikna etmek için birden fazla örnek kullanımı söz konusu iken, Algısal ispatta kişinin yaptığı bir çizim ya da bir tek algı etrafında şekillendirdiği doğrulamalar yer almaktadır. Dönüşümcü ispatın yapısı ise kişinin var olan bilgileri kullanarak genellemeye

ulaşabilecek şekilde muhakeme edebilmesidir. Aksiyomatik ispatta ise öğrencinin tanım, teorem ve matematiksel tahminleri rahat bir şekilde kullanabilmesi söz konusudur. Harel ve Sowder yaptıkları çalışmada öğrenciler tarafından yapılan ispatları şekildeki gibi sınıflandırmışlardır.



Şekil 2.2. Harel ve Sowder (1998) Tarafından Yapılan İspat Sınıflandırması

Miyazaki (2000) çalışmasında ispatı dört grupta incelemiş ve orta öğretim öğrencilerinin ispat yaparken kullandıkları göstergelerden yararlanarak ispat çeşitlerini ispat A, ispat B, ispat C ve ispat D şeklinde sınıflandırmıştır. Buna göre ispat A, tümdengelmisel muhakeme içeren ve ispat yapılırken fonksiyonel dilin kullanılmasını

gerektiren ispatlardır. İspat B, tümdengelimsel muhakeme içeren ve ispat yapılırken diğer dil, çizimler yada hareket eden cisimlerin kullanımını gerektiren ispatlardır. İspat C, tümevarımsal muhakeme içeren ve ispat yapılırken diğer dil, çizimler yada hareket eden cisimlerin kullanımını gerektiren ispatlardır. İspat D nin ise tümevarımsal muhakeme gerektiren ve ispat sürecinde fonksiyonel dil kullanılan ispat türü olduğunu ifade etmiştir.

Ören (2007) yaptığı yüksek lisans tezinde 10. sınıf   rencilerinin geometri sorularında kullandıkları ispat  emalarını ve öğrencilerin bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre kullandıkları ispat  emalarındaki farklılıkları ara tırmı tır. Araştırmada Harel ve Sowder (1998) tarafından yapılan ispat sınıflandırması kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre, ispat şemalarının kullanımında bilişsel stil ile cinsiyet arasında anlamlı bir ilişki olmadığı g r lm  tur. İspat  emaları kullanımında cinsiyet ve bilişsel stile göre ortaya çıkan farklılıkların eğitim faaliyetlerinde, geometride ve matematikte ispat kavramını öğretirken birer değişken olarak ele alınması gerektiğini ortaya koymaktadır.

 skendero lu (2010) doktora tez çalışmasında, ilköğretim matematik   retmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşlerini, fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını, farklı sınıf seviyelerinde kullanılan kanıt şemalarının nasıl farklıla tı ını ve matematiksel kanıta yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları arasında bir paralellik olup olmadığını ara tırmı tır. Bu nedenle ilköğretim matematik   retmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları ve matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşleri irdelenmiştir. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt  emalarını ortaya koymak için yazılı sınav ve klinik görüşmeler uygulanmıştır. Ayrıca   retmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerini tespit etmek için “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş  l e i” adı altında geliştirilmiş olan bir ölçek kullanılmıştır. Geli imci araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışmada ölçek farklı sınıf seviyelerinden 187, yazılı sınav 158 ve klinik görüşmelerde 16 ilköğretim matematik   retmeni adayına uygulanmıştır. Çalışmanın sonucunda,   retmen adaylarının kanıta yönelik olumlu bakış açılarının olduğu ve sınıf seviyesi arttı  a da kanıt şemalarında en üst düzey olarak kabul edilen analitik  emaların kullanımında bir artış olduğu ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra

kullanılan kanıt şemalarının sınıflara göre farklılaştığı ve ölçekte yer alan bazı faktörler ile şemalar arasında paralellik olduğu tespit edilmiştir.

Benzer bir ispat sınıflandırma çalışması ise Weber (2005) tarafından yapılmıştır. Weber (2005) çalışmasında, üniversitelerde okutulan matematik derslerinde, matematiksel ispat yapma ile problem çözmenin benzer süreçler olduğundan yola çıkarak bu iki kavram arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Araştırmada, üniversite öğrencilerinin problem çözerken ve ispat yaparken kullandıkları düşünme süreçleri arasındaki benzerlikler ve farklılıklar incelenmiştir. Araştırma sonuçlarına göre üniversite öğrencilerinin ispat süreçleri üç grup altında toplanmıştır. Bunlar, semantik, prosedürel ve syntetik ispat süreçleri olarak adlandırılmıştır. Buna göre prosedürel ispat yapanların bilinen ispat yöntemlerini kullandıkları, syntetik ispat yapanların kurallardan ve teoremlerden mantıklı sonuç çıkararak ve formal ispat yöntemlerini takip ederek ispat yaptıklarını ve semantik ispat yapanların ise matematiksel kavramlardan ve teoremlerden kendi kurallarını oluşturarak matematiksel ispatlarda kullananlar olarak gruplandırılmıştır.

Benzer şekilde Sarı, Altun ve Aşkar (2007) yaptıkları çalışmada, matematik öğretmenliği birinci sınıfında öğrenim gören 3 öğrencinin ispat yapma şemalarını incelemişlerdir. Araştırma sonucuna göre farklı akademik başarıya sahip öğrencilerin ispat şemalarının da farklı olduğu görülmüştür. Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003), 6, 7 ve 8. sınıflardan dörder öğrenci ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında, ilköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerinin doğruluğunu gösterirken hangi ispat şemalarını kullandıklarını araştırmışlar ve öğrencilerin dışsal, deneysel ve analitik şemalardan üçünü de kullandıklarını gözlemişlerdir.

VanSpronsen (2008) doktora tez çalışmasında, üniversite öğrencilerinin ispat yaparken kullandıkları stratejileri inceleyerek bu süreci detaylı bir şekilde araştırmıştır. Araştırma 18 üniversite birinci sınıf öğrencisi ile yapılan mülakatlarla yürütülmüştür. Araştırma sonucunda öğrencilerin ispat yaparken zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ispat yaparken örneklerden faydalanma, görselleştirme ve eşitlik kullanma stratejilerini kullanmaya çalıştıkları tespit edilmiştir.

Haverhals (2011) doktora tez çalışmasında matematik bölümü öğrencilerinin ispat öğrenme süreçlerinin nasıl geliştiğini incelemeyi amaçlamıştır. Katılımcılar,

amaçlı örnekleme yöntemine göre belirlenmiş ve çalışma soyut cebir ve sayılar teorisi dersini alan 9 öğrenci ile yürütülmüştür. Öğrenciler ile akademik dönem boyunca her iki haftada bir mülakatlar yapılmıştır. Bu mülakatlarda öğrencilere tamamlama, değerlendirme ve tartışma şeklinde ispat problemleri sorulmuştur. Araştırmadan elde edilen veriler iki kritere göre analiz edilmiştir. Bu kriterlerden birincisi Weber (2004) tarafından geliştirilen öğrencilerin nasıl ve ne çeşit ispat yaptıklarını gösteren ispat tipi üzerine odaklanmıştır. İkinci kriter ise Harel ve Sowder (1998) tarafından oluşturulan ve öğrencilerin ispatı anlamaları ve yaptıkları ispatla başkalarını ikna etmelerini gerektiren ispat şemalarının her bir öğrenciye göre belirlenmesi üzerine odaklanmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular ispat tipi olarak anlamsal ispat tipine sahip olan öğrencilerin daha başarılı olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte öğrencilerin ispat şemalarında farklılaşma ve gelişmelerin olduğu gözlenmiştir.

Dhayer (2007) doktora tez çalışmasında sayılar ve oyunlar dersini almakta olan öğrencilerin sahip oldukları zihinsel ispat şemalarını belirlemiş ve bu öğrencilere Moore metodu ile öğretim yapıldığında ispat şemalarının gelişimini incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin sahip oldukları ispat şemalarını belirlemek için Harel ve Sowder (1998) tarafından geliştirilen ispat şemaları kullanılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ispat şemalarında gelişim sağlamak için ise Moore (1994) tarafından geliştirilen ispat öğretim modeli uygulanmıştır. Çalışmada öğrenciler Moore modeline göre ispat etkinlikleri yaparak ispatı birinci elden uygulama fırsatı bulmuşlardır. Çalışmada elde edilen bulgulara göre Moore öğretim modeli öğrencilerin matematiksel ispatı kavramsallaştırmalarına, kendi yeteneklerine güvenmelerine, benzer ispat etkinliklerini kavramalarına ve kendi kendilerine düşünmelerine olumlu katkılar sağladığı gözlenmiştir. Ayrıca öğrenciler kendi ispatlarını oluşturarak daha tutarlı bilgi dağarcığı inşa etmişlerdir.

Soto (2010) doktora tez çalışmasında matematik öğretmenlerinin matematik bilgisinin öğretim uygulamalarını temel alan bir köşe taşı olmasına rağmen öğretmenlerin öğretim uygulamalarındaki alan bilgisi değişimini inceleyen sınırlı sayıda çalışma olduğunu ifade etmiştir. Matematik öğretiminin merkezinde ispat yapma yer almaktadır ve bir öğretmenin ispat şemaları matematik öğretim yaklaşımını anlamamıza olanak tanıyan veya sınırlayan etkidir. Öğretmenlerin öğretim uygulamalarındaki ispat şemalarının mesleki gelişimlerdeki etkisini daha iyi anlamak için özel örnek durumlar,

ispat şemalarındaki değişim ve ispatın doğasına olan ilgi, ispat yapmada öğretmenler için mesleki gelişimlerini organize etmede etkili bir yol gösterici olacaktır. Bu yüzden çalışmada iki yıl süresince mesleki gelişim programına devam eden bir lise matematik öğretmenin ispat şemalarındaki ve öğretim uygulamalarındaki gelişim örnek olay çalışması olarak sunulmuştur. Bu amaçla bu öğretmenin ispat şemalarını belirlemek için iki yıl boyunca öğretim uygulamalarında yapmış olduğu ispatlar incelenmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular çalışmaya katılan öğretmenin başlangıçta kendi yaptığı ispatlarda ihmal ettiği ispatın temel ifadelerini fark etmeye başladığı gözlenmiştir. Bununla birlikte katılımcının ispat şemalarında deneysel ispat şemasından tümdengelimli ispat şemasına geçiş yaptığı belirlenmiştir. Öğretmenin öğretim uygulamalarındaki en belirgin gelişme öğrenciler tarafından yapılan ispatların öğrenciler arasında tartışılmasına izin vermek, öğrencilere varsayımların ispatını sorma, doğru çözüme alternatif çözümler olup olmadığını inceleme ve doğru çözümlerin matematiksel detaylarını araştırma şeklinde gözlenmiştir.

2.2.2. Matematiksel İspat Hakkındaki Görüş, Tutum, İnanç Çalışmaları

Bu bölümde farklı çalışma gruplarının matematiksel ispata yönelik görüş, tutum ve inançlarını konu alan çalışmaların derlemesi sunulmuştur. Ayrıca bu bölüm içerisinde araştırmacıların ispat yapabilme becerileri ile ispat hakkındaki görüşleri arasındaki ilişkiyi konu edinen çalışmalara da yer verilmiştir.

İmamoğlu (2010) doktora tez çalışmasında, öğrencilerin matematiksel ispat konusundaki tutum ve inançlarını, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini, ayrıca başkaları tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini araştırmayı hedeflemiştir. Araştırmada kullanılmak üzere üç ölçek geliştirilmiştir: Tutum ve İnanç Ölçeği (TİÖ), İspat Sınavı (İS) ve İspat Değerlendirme Sınavı (İDS). Araştırma sonuçları, birinci sınıf ve son sınıf öğrencilerinin altyapı, tutum, öz yeterlik ve inanç puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğunu ortaya çıkarmıştır. Birinci sınıfların altyapı puanları son sınıflara göre daha yüksekken, diğer alt boyutlarda son sınıflar daha yüksek puanlar elde etmişlerdir. Son sınıf öğrencilerinin İS puanları da birinci sınıflara göre anlamlı derecede yüksek çıkmıştır. Farklı programların birinci sınıfları arasında TİÖ ve İS'na göre anlamlı farklılıklar gözlemlenmemiştir. Son sınıflarda ise İS ve İDS puanlarında ve TİÖ'nün bazı alt

boyutlarında anlamlı farklılıklar ortaya çıkmıştır. Ayrıca birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yaparken tümevarımsal akıl yürütme kullanımına eğilimli oldukları, son sınıf öğrencilerinin ise daha çok genelleme isteği duyduklarından tündengelimsel yöntemler kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Bununla birlikte son sınıf öğrencilerinin ispat yapma ve değerlendirmede zorluklar yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır.

Baştürk (2010) çalışmasında, matematik eğitimi ve matematik açısından öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini araştırmak istemiştir. Araştırma verileri araştırmacı tarafından geliştirilen bir anket ve öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Araştırma öğretmen adaylarının ispatı matematik ve matematik eğitiminin en önemli parçası olarak düşündüklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca öğretmen adayları, ortaöğretim ve üniversite seviyesinde matematik eğitimi arasında önemli bir farklılık olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarına göre, ortaöğretimde matematik eğitiminde ispattan çok örnekler ve algoritmaların kullanılması üniversite seviyesinde yapılan ispatlarda güçlük yaşanmasına sebep olmaktadır. Bu yüzden öğretmen adayları ortaöğretim ve üniversite matematiği arasında bir köprü kurulması gerektiğini vurgulamışlardır.

Varghese (2009a) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini araştırmıştır. Araştırmada öğretmen adaylarının ispatın anlamı, ispat öğretim yöntemleri hakkındaki düşünceleri ve matematik derslerinde ispat etkinliklerinin kullanılması hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerinin sınırlı olduğu, ortaöğretim ve üniversite seviyesinde öğrencilerin ispat becerilerinin sınavlarla belirlenemeyeceği görüşünde oldukları görülmüştür.

Varghese (2009b) bir başka çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat anlayışlarını kavram haritası ile belirlemeye çalışmıştır. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından matematiksel ispat anlayışlarını belirlemek için literatürde var olan matematiksel ispat ile ilgili Jones (1997; 2000) tarafından belirlenen 24 anahtar kelimeyi kavram haritası oluşturarak göstermeleri istenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının ispat kavramına yönelik sınırlı bir anlayışa sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat kavramına yönelik

sorunlarının ileride sınıf içi ispat kullanım sıklığını etkileyeceğini ve matematiksel ispat yapmada kendilerine olan güvenlerini olumsuz etkileyeceği savunulmuştur.

Nyaumwe ve Buzuzi (2007) çalışmalarında 34 matematik öğretmenin, matematiksel sonuçların ispatlanmasına yönelik tutumlarını belirlemeye çalışmışlardır. Bunun için matematik öğretmenlerine 20 maddeden oluşan bir tutum ölçeği uygulanmıştır. Öğretmenlerin tutum ölçeğine verdiği cevapların ardından 6 matematik öğretmeni ile ispatın faydaları, pozitif tutumlar, ispat metotları, negatif tutumlar ve orta öğretim seviyesindeki öğrencilere ispat yaptırmanın uygunluğu konularında öğretmenlerle mülakatlar yapılmıştır. Sonuç olarak matematik öğretmenlerinin genel anlamda matematiksel ispata karşı pozitif, ispat metotlarına yönelik olarak ise iki sütun şeklinde yapılan ispatlar ve sözel ispatlara karşı olumsuz tutuma sahip oldukları ve bilgisayar destekli yapılan ispatların faydalılığı hakkında nötr kaldıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerin sınıf içerisinde ispatları sadece kendilerinin yapması gerektiği fikrine katılmadıkları sonucuna varılmıştır.

Mingus ve Grassl (1999) çalışmalarında, öğretmenlerin ispata yönelik geçmiş deneyimlerini, tutumlarını ve algılarını incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda ileride matematik öğretmeni olacak olan 51 (21 öğretmen adayı ortaöğretim, 30 öğretmen adayı ilköğretim) matematik öğretmeni adayına ispat tutum ölçeği uygulanmıştır. Bununla birlikte 215, 6–12. sınıf öğrencisine ispat başarı testi uygulanmıştır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları matematik öğretim programlarında ispatın mümkün olduğunca erken dönemlerde dahil edilmesi gerektiğine vurgu yapmışlardır. Ayrıca çalışmaya katılan 170 öğrenci verilen sorulara belirli ölçüde cevap verebilmişlerdir. Bu öğrencilerin ispat yapabilme yeteneklerinin daha ileri seviyelere taşınabilmesi için öğretmenler ve öğrenciler arasında sınıf içi diyaloglarda “neden” ve “açıkla” soru kalıplarının daha sık kullanılması gerektiği ifade edilmiştir. Bununla birlikte farklı matematiksel dil kullanımı, yaklaşımlar ve gösterimler kullanılmasının teşvik edilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) çalışmalarında, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini belirlemeye yönelik bir ölçek geliştirmeye çalışmışlardır. Çalışmada farklı sınıf seviyelerinden 187 ilköğretim matematik öğretmeni adayına ait ölçek formu değerlendirmeye alınmıştır. Yapılan analizler

sonucunda ölçekte 29 likert türü ve 3 tanede açık uçlu soru yer almıştır. Bu çalışma sonucunda geliştirilen “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” ile ileride öğretmen olarak karşımıza çıkacak ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının okullarda eğitim-öğretim sırasında kanıta yönelik güven, tutum-inanç, öz değerlendirme ve zihinsel süreçlerinin daha kolay ortaya çıkarılabileceğine vurgu yapılmıştır. Ayrıca ölçeğin sadece ilköğretim matematik eğitimi alanında değil, diğer konu alanlarındaki öğretmen ve öğretmen adaylarına da uygulanabileceği belirtilmiştir.

Kayagil (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini ve bu görüşlerin cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre farklılık gösterip göstermediğini incelemiştir. Araştırma ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 357 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri ispata ilişkin görüş ölçeği yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşlerinin olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu görüşleri arasında cinsiyete ve matematikle ilgili bilimsel etkinliğe katılma durumuna göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık bulunamamıştır. Ayrıca sınıf ve mezun olunan lise türü değişkenlerine göre de gruplar içi ve gruplar arası anlamlı farklılık tespit edilememiştir.

Frasier (2010) doktora tez çalışmasında, lise matematik öğretmenlerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerini ve deneyimlerini araştırmıştır. Çalışmada araştırmacı tarafından geliştirilen online bir anket 374 lise matematik öğretmenine uygulanmıştır. Çalışmada elde edilen bulgular öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerinin dört bileşenden oluştuğunu göstermiştir. Bunlar;

1. Öğretmenlerin matematiksel ispatın önemini anlama, üretme ve kavrama yeteneği
2. Öğretmenlerin matematiksel ispatın önemi hakkındaki görüşleri
3. Öğretmenlerin öğrencilerin ispatı anlamalarına yönelik algıları
4. Öğretmenlerin dünya görüşü, geçmişi, matematik öğrenme ve öğretme standartları hakkında entelektüel farkındalıkları

şeklinde. Bununla birlikte öğretmenlerin sınıf içindeki ispatla ilgili uygulamaları öğrencilerin akademik başarıları ile ilgili olduğu kadar matematiğin

benzer alt disiplinleri ile de alakalı olduğunu göstermiştir. Bu bulguların öğretmenleri, öğretmen eğitimcilerini, ders kitabı yazarlarını, öğrenme ve öğretme standartlarını belirleyen kurumları ilgilendirdiği ifade edilmiştir.

Öçal ve Güler (2010) çalışmalarında, matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini kavram haritası yöntemi ile incelemişlerdir. Bu amaçla 22 öğretmen adayının katılımı ile ispat hakkında yirmi dakika süren beyin fırtınası etkinliği yapılmıştır. Adaylar ispat hakkındaki düşüncelerini sesli bir şekilde belirtmişler ve her bir adayın düşüncesi tahtaya yazılmıştır. Beyin fırtınası etkinliğinde adaylar ispat hakkında toplam 21 farklı anahtar kelime türetmişlerdir. Araştırmanın ikinci aşamasında bu anahtar kelimelerini kavram haritası ile göstermeleri ve anahtar kelimeler arasındaki ilişkileri göstermeleri istenmiştir. Adayların geliştirdikleri kavram haritaları kullandıkları anahtar kelimeler ve aralarındaki ilişkilere göre incelenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının ispat hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ve ispat hakkındaki düşünceleri arasındaki ilişkileri net olarak ortaya koyamadıkları görülmüştür.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve aralarındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Araştırmanın verileri İspat Görüş Anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu saptanmıştır.

Matematik öğretmeni adayları ile yapılan başka bir çalışmada ise öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğu araştırılmıştır. Çünkü ispata ilişkin görüşler öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin varsa sorunları ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacak bilgileri sağlayacaktır. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri sonucuna ulaşılmıştır (Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006).

2.2.3. İspatın Matematik Eğitimindeki Rolü

Bu bölümde matematiksel ispatın matematik eğitimi üzerindeki etkilerini ve uygulamalarını inceleyen çalışmalarla ilgili bir derleme sunulmuştur.

İpek (2010) yüksek lisans tez çalışmasında, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dinamik geometri yazılımları (DGY) kullanarak geometrik ve cebirsel ispat yapma süreçlerini araştırmıştır. Ayrıca araştırmada katılımcıların matematiksel ispat ve DGY hakkındaki görüşleri de incelenmiştir. Araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının DGY kullanarak yaptıkları ispat süreçlerinde farklı ispat yöntemleri kullanabildiklerini ve bunları geometrik ve cebirsel ispata görsel olarak yansıtabildiklerini göstermiştir. Ayrıca öğretmen adayları DGY kullanımının ispat yapmada olduğu kadar diğer matematiksel kavramların öğretiminde faydalı olabileceğini düşündüklerini belirtmişlerdir.

Bahtiyari (2010) yüksek lisans tez çalışmasında, sekizinci sınıf öğrencilerinin mevcut matematik eğitimi ve matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşlerini belirlemeye çalışmıştır. Araştırma sonucunda, okullarımızın hala teknik ve fiziki imkânlar bakımından yetersiz olduğu, teknik ve fiziki imkânları yeterli olan okullarda ise bu imkânların etkili bir şekilde kullanılmadığı gözlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin birçoğunun ispatın anlamından, gerekliliğinden, matematiksel gelişimleri açısından öneminden emin olmadıkları görülmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyime sahip olmadıkları tespit edilmiştir.

Hemmi (2006) doktora tez çalışmasında, matematik bölümündeki öğrencilerin farklı derslerde ispatla nasıl karşılaştıklarını ve öğretim üyelerinin ispat hakkındaki bilgilerini öğrencileriyle nasıl paylaştıklarını incelemiştir. Bu amaçla çalışmada, ispatın matematik uygulamalarındaki önemi, matematikçilerin pedagojik olarak görüşleri ve niyetleri, matematikçilerin deneyim ve bilgilerini öğrencilere nasıl aktardıkları incelenmiştir. Araştırma, 170 üniversite öğrencisi ve 40 matematikçi ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri üniversite öğrencilerinin anket cevapları, öğretmen gözlemleri, kitaplar ve diğer öğretim materyallerinin yanında matematikçilerin ve öğrencilerin mülakatlarından elde edilmiştir. Veri analizinde hem nitel hem de nicel yöntemlerden faydalanılmıştır. Araştırma bulguları, öğrencilerin ispat etkinliklerinin başlangıcında ispata karşı pozitif bir yaklaşımlarının olduğunu göstermiştir. Matematikçiler derslerin

başlangıç aşamasında çok fazla ispatla uğraşmak niyetinde olmamalarına rağmen öğrenciler çalışmaların en başında ispatla karşı karşıya geleceklerini düşünmektedirler. İspat öğrenciler için gizemli bir insan yapıtı olarak görülmektedir. Bu yüzden, öğrencilerin ispatın uygulamalardaki rolünü, ispatın ne anlam ifade ettiğini ve ispatın neden yapıldığını anlamakta zorluk yaşadıkları bir deneyim olarak algıladıkları görülmüştür.

Uğurel (2010) doktora tez çalışmasında, ortaöğretim öğrencilerinin ispat kavramına yönelik bilgilerini sınıf içi iletişime dayalı olarak nasıl düzenlediklerini belirlemeyi amaçlanmıştır. Bu amaçla, öğrencilerin sınıf içi iletişim süreçlerinde var olan söylemlerinden yararlanılmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden özel durum çalışması olarak tasarlanan bu araştırmanın örneklemi bir özel fen lisesinin 11. sınıfında öğrenim görmekte olan 13 öğrenci ve bu sınıfın matematik ve geometri derslerini yürüten 2 öğretmenden oluşmaktadır. Araştırmada sonucunda ortaya çıkan bulgular, öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde ve bilgiyi yapılandırmalarında öğretmenleri ile aralarında var olan sınıf içi söylemlerin önemli etkisi olduğunu göstermiştir. Öğrenci ve öğretmen söylemlerinin analizleri aracılığıyla elde edilen bulgular öğrencilerde, ispatın ne olduğuna, ispata yönelik temel kavramların terimsel ve kavramsal olarak anlamlandırılmasına, ispat yapma yöntemlerine, ispat yapma mekanizmasının neyi içerdiğine ve nasıl uygulandığının algılanmasına ilişkin bazı bilgi eksikliklerinin bulunduğunu göstermiştir. Ayrıca öğrencilerin ispata yönelik yanılgıların bulunduğu ve ispat yapma yaklaşımlarının da sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bayazıt (2009) doktora tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tanımlar, ispat ve matematik hakkındaki fikirlerini araştırmıştır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat yaparken matematiksel tanımları kullanabilme ve başkası tarafından yapılmış olan ispatları değerlendirebilme becerilerini incelemiştir. Araştırma Lineer Cebir dersini almış ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan dört öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırmanın verileri öğretmen adayları ile yapılan etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla elde edilmiştir. Öğretmen adayları ile yapılan mülakatlarda kullanılan etkinlikler, Geometri, Kümeler Kuramı ve Lineer Cebir konularından seçilmiştir. Araştırma sonuçları matematik öğretmeni adaylarının matematik hakkında farklı fikirlere sahip olduklarını ve bu farklılığın matematiksel ispat yapma yaklaşımlarını etkilediğini göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının

kavram tanımı bilgilerinin kavram imajı oluşturma süreçlerine olumlu katkı sağladığı görülmüştür.

Shiple (1999) doktora tez çalışmasında, üniversite öğrencilerinin ispat yapma yaklaşımlarını ve öğrencilerin gerekli ispatları analiz etmeleri için sınavlar ve ev ödevleri belirlemeye çalışmıştır. Bu amaçla Washington D.C. de bulunan bir Amerikan Üniversitesinden 1998 yılının güz döneminde analiz dersini alan 7 öğrenci seçilmiştir. Araştırmacı tarafından, haftada on saat çalışma saatleri düzenlenmiş ve her bir öğrenci ile iki kez birer saatlik görüşme ve iki kez birer saatlik ispat oturumları yapılmıştır. Her bir ispat oturumu kaydedilmiş ve sonradan yazıya dökülmüştür. İspat analizleri yapılırken öğrencilerin yaptıkları hatalardan ve kullandıkları stratejilerden yararlanılmıştır. Veriler “kavram kullanımı”, “kavram imajı” ve “kavram tanımını” içeren “kavram anlama içeriğine” göre tartışılmıştır. İspat sürecindeki görselleştirmenin önemi öğrencilerin yazdıkları ve söyledikleri dikkate alınarak tartışılmıştır. Araştırmacı çalışmadaki öğrencilerin yaptıkları ispat analizlerinin nasıl bir model geliştirdiğini öğrenerek öğrencilerin öğrenme stillerini araştırmıştır. Öğrencilerin büyük bir kısmı ispat yaparken grup içerisinde çalışmanın önemli olduğunu düşünmektedir. Öğrencilerin bir kısmının birebir hocalarıyla ispat yapmayı istemelerine karşın yine öğrencilerin bir kısmı diğer sınıf arkadaşlarıyla ispat yapmayı tercih etmişlerdir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun, ifadenin okuması, problem ifadesinde geçenlerin yazılması, gerekli olan tanımların bulunması ve gösterilmek istenenin anlaşılmasının önemli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Öğrencilerin çoğunluğu ispat yaparken genelde görsel temsilleri kullanmamışlar ve analitik kurallar yardımıyla ispatlarını yapmışlardır.

Weber (2004) çalışmasında, üniversite seviyesinde okutulan matematik derslerinin tanım→teorem→ispat formatında anlatıldığını ancak bu şekilde yapılan eğitimin nedenlerinin ve bu formatta yürütülen derslerin öğrencilerin öğrenmelerini nasıl etkilediği üzerine sınırlı sayıda çalışmanın olduğunu vurgulamıştır. Matematik derslerinin neden bu formatta işlendiğini derinlemesine inceleyebilmek için reel analize giriş dersini anlatan bir öğretim üyesiyle dersinde nasıl bir öğretim yaptığını ve neden bu formatta dersini işlediğini araştırmak istemiştir. Araştırmaya konu olan ders hocasının reel analize giriş dersini tanım→teorem→ispat formatında anlattığı görülmüştür. Ayrıca dersin bu şekilde anlatılmasında ders hocasının ders hakkında bilgi

dağarcığı kadar matematiğe karşı tutumu, öğretim stili, öğrenciler ve eğitim sistemi bileşenlerinin hepsinin etkisinden söz edilmiştir.

Taştepe (2012) yüksek lisans tez çalışmasında üniversitede matematik derslerinde ispat kavramı ve bu kavrama yaklaşımları ele almıştır. Bunun için öncelikle öğretim üyeleri ve öğrenciler için önemli bir kaynak olan ders kitapları analiz edilmiştir. Ders kitapları analizinden ve öğretmen adaylarına uygulanan anketin değerlendirmesinden elde edilen bulgularla ispat kavramının sıklıkla kullanıldığı dersleri yürüten ve farklı üniversitelerde çalışan 5 öğretim üyesiyle görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde özellikle ders kitapları ve öğrencilerin ispat yapabilme becerileri hakkındaki düşünceler ele alınmıştır. Sonuç olarak; ders kitaplarında kullanılan teorem ve ispatlar anlamında belirgin farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca ders kitaplarında en fazla kullanılan ispat türü entelektüel ispat olarak adlandırılan ve bir formülasyona ve bir kalıba dayalı olarak yapılan ispatlardır. İspat yapmada en alt seviye olan ve pragmatik ispat olarak adlandırılan ve örnek vererek yapılan ispat türü zaman zaman kullanılmakla birlikte, en ileri seviye olan ve demonstrasyon ispat olarak adlandırılan ve bir teoriyle organize edilmek zorunda olan ispat türü ise ders kitaplarında çok az sayıda kullanılmıştır. Öğretmen adayları ise matematikte ispatın ve ispat yapmanın önemli olduğunu belirtmiş olmakla birlikte üniversitede bazı dersler kapsamında yapılan ispatları anlamakta zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Öğretim üyeleri ise derslerinde ispat yapmaya önem verdiklerini ifade etmişler, farklı ders kitaplarını kullandıklarını ve bu anlamda ders kitaplarının önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Abramovitz, Berezina, Berman ve Shvartsman (2009) “bir teorem nasıl anlaşılır” adlı çalışmalarında, kişisel öğrenme metodunu teoremler üzerinden uygulamalı olarak geliştirmek istemişlerdir. Bunun için analiz dersi kapsamında Rolle ve Fermat teoremleri ile ilgili kişisel öğrenme etkinlikleri hazırlamışlardır. Hazırlanan etkinliklerde Rolle ve Fermat teoremleri ile ilgili örnekler, genellemeye yardımcı olacak sorular, doğru yanlış soruları ve boşluk doldurma etkinliklerine yer verilmiştir. Ayrıca hazırlanan etkinliklerin başka kavramlar için geliştirilmesi ve uygulanması önerilmiştir.

Powers, Craviotto ve Grassl (2010) soyut cebirdeki ispatların doğruluklarının değerlendirilmesinin ispat yapma üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Bu çalışmada,

matematiksel ispat yapmanın ilerideki matematik öğretmenlerini yetiştirebilmek için çok önemli bir yetenek olmasına rağmen birçok üniversite öğrencisinin ispat yapmakta güçlük yaşadıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca matematik ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirme yeteneklerinin de kısıtlı olduğunu belirtmişlerdir. Bu yüzden matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat değerlendirme yeteneklerinin geliştirilmesinin ispat yapma yeteneklerini geliştireceği ön görüşünde bulunulmuştur. Bu amaç doğrultusunda soyut cebir dersi kapsamında yapılan araştırma, deneysel yöntemlerden yarı deneysel araştırma yöntemine göre yürütülmüştür. Araştırma sonucunda ispat değerlendirme etkinliklerinin yapıldığı deney grubunun kontrol grubuna göre ispat yapmada daha başarılı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Karaoğlu (2010) yüksek lisans tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları ile öğretmen adaylarının bu fikirlere ilişkin görüşlerini ve teoremleri ispatlamada kullanımının etkililiğini incelemiştir. Bu çalışmada veri toplama ve analizi için durum çalışması ve gömülü (grounded) teorisinin teknikleri kullanılmıştır. Araştırmanın uygulaması 2008–2009 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Ankara'daki bir üniversitenin Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğrenim gören 1. , 2. ve 3. yıldan birer matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Uygulamanın ilk kısmında araştırmacı tarafından hazırlanan, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları içeren çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının çalışma kâğıtlarında yer alan soruları yanıtlarken yaşanan süreç gözlemlenerek not tutulmuştur. Gözlem notlarından elde edilen veriler, nitel veri analiz yöntemlerinden olan betimsel analize göre analiz edilmiştir. Uygulamanın ikinci kısmında ise öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle ilgili görüşlerini almak için her biri ile görüşme yapılmış ve bu görüşmelerden elde edilen veriler ise gömülü teorisinin tekniklerine göre analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, matematik öğretmeni adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında; ispat yapma performanslarının arttığı ve teoremleri ispatlamak için daha istekli davrandıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca başarısız olma kaygıları azalmakta, sonuca daha kolay ulaşmakta ve özgüvenleri artmaktadır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ortak

görüşü matematik derslerinin ispatların anahtar nokta ve fikirler üzerine vurgu yapılarak öğretilmesinin, ispat yapma performanslarını arttıracak yönündedir.

Zaimoğlu (2012) yüksek lisans tez çalışmasında, ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat/akıl yürütme süreçlerini ve ispat temsil şekillerine olan eğilimlerini tümevarım ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemiştir. Araştırma iki ilköğretim okulunun 8. sınıfında öğrenim gören 154 öğrenci ile yürütülmüştür. Veriler 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, açık uçlu 8 soru yardımıyla elde edilmiştir. Verilerin analizinde matematiksel ispatın anlamına yönelik doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme boyutları dikkate alınmıştır. Araştırma sonucu genel olarak, bilinen doğrulardan yeni bir doğru çıkarma durumunun sınırlı da olsa gerçekleştiğini gösterirken, doğruya dolaylı yollardan (olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi) ulaşma durumunun neredeyse hiç gerçekleşmediğini, öğrencilerin geçerli bir ifadenin doğrulamasını yapabilmelerine rağmen, geçersiz bir ifadeyi çürütme yollarını (ters örnek bulma, çelişki bulma yöntemi) bilmediklerini, en çok tercih edilen ispat türü sayısal örnekleme ve görsel ispat, en az tercih edilen ispat türünün ise cebirsel ispat olduğunu göstermiştir.

Ceylan (2012) yüksek lisans tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf adaylarının GeoGebra dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik ispat yapma becerilerini ve kullanmış oldukları ispat biçimlerini incelemiştir. Çalışmada, nitel bir araştırma modeli olan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan farklı düzeylerde bulunan ve amaçsal örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiş 6 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Uygulama sürecinde öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşmelerden yararlanılmıştır. Klinik mülakat sürecinde öğretmen adayları verilen ispat problemlerini GeoGebra yazılımını kullanarak çözmüşler ve öğretmen adaylarının yapmış olduğu çözümler kaydedilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adayları verilen bir ispat probleminde GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabilmişler ve çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlanmışlardır. Böylece öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları arama, geometrik özellikleri keşfetme, genelleme ve akıl yürütme becerilerinin desteklendiği görülmüştür. Ayrıca GeoGebra yazılımı birçok özelliği

ve araçları sayesinde öğretmen adaylarının varsayım yapmalarına yardımcı olmuş ve onları ispat yapmaya teşvik etmiştir.

Herbst (1998) doktora tez çalışmasında, matematik sınıflarında ispatın ne işe yaradığını araştırmıştır. Bu amaç doğrultusunda 8 matematik öğretmenin 18 farklı lise sınıfında anlattıkları matematik dersleri kaydedilmiştir. Bu derslerde öğretmenlerin kullandıkları bilgilerin doğruluğunu göstermek için 9 farklı yaklaşım izledikleri tespit edilmiştir. Bunlar; genelleyici örnekler, farklı örnekler, kritik denemeler, doğrudan gösterme, sözde matematiksel gerekçeler sunma, metafor, simetri, sembolik hesaplama ve formal ispat şeklindedir. İkinci etkinlik ise matematiksel bilgilerin öğrenci ve öğretmenler tarafından farklı bir şekilde oluşturulması için uygulanmıştır. Bu etkinliklerde öğretmenler sadece rehber vazifesi görmüş ve öğrencilerle birlikte eğitici oyunlar oynamışlardır. Bu sayede öğretmenlerin öğrencilerin hislerine ortak olmaları hedeflenmiştir. Ayrıca öğretmenler oyun etkinliğinde öğrencilerin matematiksel bilgilerini oluşturmada kültürel transferlerinin farkında olmuşlardır. Bununla birlikte oyun etkinliği öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini kolaylaştırmıştır.

Yoo (2008) doktora tez çalışmasında, içerisinde matematik öğretmeni adaylarının da yer aldığı üniversite öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik algıları ve pedagojik görüşleri üzerinde probleme dayalı öğretim yaklaşımının etkisini incelemiştir. Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerini değerlendirmek için araştırmacı tarafından geliştirilen matematiksel ispat ölçeği kullanılmıştır. Matematiksel ispat ölçeği öğretmen merkezli ve probleme dayalı öğretim yapılan farklı iki sınıfta öğrenim gören toplam 85 öğrenciye uygulanmıştır. Ayrıca matematik öğretmeni adaylarının aldıkları eğitimin matematiği öğrenen öğrenciler olarak matematiksel ispat hakkındaki anlayışları, matematik ve ispat öğrenme-öğretme hakkındaki görüşlerine etkisini incelemek için mülakatlar yapılmıştır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre, ispat uygulamaları ve probleme dayalı öğretim yaklaşımının öğretmen merkezli öğretime göre üniversite öğrencilerinin başarılarında etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Alcock (2004), ispat yapmada örnek kullanımını araştırdığı çalışmasında 5 üniversite matematik hocasıyla, üçer kez mülakat yapmıştır. Yapılan mülakatlarda matematik hocalarından, matematik derslerinde yaptıkları etkinlikleri, onlara göre öğrencilerin öğrenmeleri gerekenleri ve öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri ve kavram yanlışlarını paylaşmaları istenmiştir. Yapılan mülakat sonuçlarına göre, öğrencilerin bir matematiksel ifadenin tanımını anlayabilmek, evrensel bir ifadeye veya doğrudan

genel bir ifadeye ulaşmak, dolaylı olarak bir ifadeye karşı örnek verebilmek ve bir ispatta genel iddialara karşı örnek oluşturabilmek için örnek kullandıkları belirlenmiştir.

Stylianides (2005) doktora tez çalışmasında, ilköğretim seviyesinde ispat ve ispatın uygulaması olan ispat yapma kavramları üzerinde durulmadığını ifade etmiştir. Bu yüzden ilköğretim seviyesinde matematik eğitiminde ciddi kavramsal eksiklikler olduğunu belirtmiştir. Çünkü ispat ve ispat yapma matematik yapmanın ve bilmenin çekirdeğidir. Bu yüzden ispat ve ispat yapmanın mümkün olduğunca erken dönemlerden itibaren matematik öğretim programlarına dahil edilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Ayrıca çalışmasında ispat ve ispat yapmanın ilköğretim matematik öğretim programı içeriğinde nasıl kavramsallaştırılabileceği ve bu kavramsallaşmanın olabilmesi için ilköğretim matematik öğretmenlerinin ispat ve ispat yapmayı sınıflarda daha ileri seviyeye taşımaları için nasıl bilgilere ve çalışmalara ihtiyaçlarının olduğunu araştırmıştır. Çalışmanın verileri birbiri ile bağlantılı olan üç aşamada toplanmıştır. Bu aşamalardan birincisi ilköğretim seviyesinde ispatın doğasını anlamak, ikincisi birinci aşama üzerine oluşturulan matematik eğitiminde ispatın anlamını, öğretmenlerin ispat ve ispat yapmadaki rollerini belirlemektir. Son aşamada ise ilköğretim seviyesinde ispat yapmak için nasıl bir ispat bilgisine ihtiyaç olduğu araştırılmıştır. Araştırma sonuçları ilköğretim öğrencilerinin ispat yaparak öğrendikleri matematiksel bilgilerin ne anlama geldiğini ve bu bilgileri nasıl kullanacaklarını öğrendiklerini göstermiştir. Ayrıca araştırma ile ispat kavramı ve ispat yapmayı öğretmek için öğretmenlerin kullanabilecekleri materyallerin oluşturulabileceği anlaşılmıştır. Bu sayede ispat yapmanın ilköğretim seviyesinden itibaren öğretilebileceği ifade edilmiştir.

Dickerson (2008) doktora tez çalışmasında, lise matematik öğretmenlerinin matematiksel ispatı anlamalarını ve mesleki gelişimleri açısından matematiksel ispatın önemini ve amacını incelemiştir. Çalışma 17 matematik öğretmeni ile yürütülmüş ve öğretmenlerle yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenler dört sebepten dolayı ispatın öğretilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Bunlar;

1. İspatın matematiğin tamamlayıcısı olması
2. Gerçekleri doğrulama ve keşfetme
3. Öğrencilerin düşünme yeteneğini geliştirmesi
4. Matematiğin bir insan yapıtı olduğunu göstermesi

şeklindedir. Öğrencilerin düşünme yeteneklerinin gelişimi sıklıkla ispat öğretiminin sebepleri arasında gösterilmektedir. İspatların özellikle öğrencilerde; daha ileri matematiksel anlama ve düşündüklerini aktarabilme yeteneğinin gelişmesine yardımcı olacağı düşünülmektedir. Matematiksel ispatların, öğrencilerin matematiksel bilgilerinin kalıcılığına, matematiğin daha iyi anlaşılmasına ya da matematiksel düşünmelerinin gelişimine yardımcı olabileceği söylenebilir. Ancak öğretmenler sıklıkla öğrencilerin düşünme yeteneklerini transfer edebilmelerinin gelişmesine yardımcı olacağını belirtmişlerdir. Öğrenciler bu tip becerileri matematik sınıfları dışında günlük hayatta da kullanabilirler. Bu yüzden öğrencilere uzun süreli faydasının olacağı şeklinde bir algı mevcuttur. Katılımcılar bir ispatın anlaşılmasının üç sebebinin olacağını belirtmişlerdir. Birincisi, ispatı okuyanlar için okuyucunun ulaşamayacağı yüksek seviyede matematiksel bilgilerin gerekli olması, ikincisi okuyucunun ispatın mantıksal yapısını kaçırmaması ve son olarak aksine ulaşılabilir bir ispatın okuyucuya çok fazla yük veya çaba gerektirmesidir. Bununla birlikte deneyimi on yıldan kısa olan öğretmenlerin ispatın mantığı ve matematiksel dil ile daha fazla ilgilendikleri, yirmi yıl ve üzerinde deneyime sahip öğretmenlerin ise alternatif ispat yaklaşımlarına daha açık oldukları görülmüştür.

Bieda (2008) doktora tez çalışmasında, her yaş grubundaki öğrencilerin matematiksel ispat yapma ve gerekçe sunma becerilerinin öneminin okul matematiği için tartışılmasına rağmen öğrencilerin bu yeteneklerini geliştirecek sınıf içi etkinliklerin oluşturulmasına yönelik sınırlı sayıda çalışma olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden çalışmada öğrencilerin ispat yapma ve gerekçe sunma becerilerinin gelişmesine yönelik ispatla alakalı matematiksel etkinlikler geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla geliştirilen ispat etkinlikleri 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Çalışma bulguları ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin gerekçe sunma ve ispata yönelik sınıf içi etkinliklerinin matematiksel ispat yapmak için arzu edilen kavramsal düzeyde olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte sınıf içi gözlemler sonucunda hazırlanan etkinliklerin öğrencilerin varsayımları ya da genellemeleri üretmelerine olanak sağladığı görülmüştür.

2.2.4. Matematiksel İspat Becerisi ve İspatta Yaşanan Güçlükler

Bu bölümde farklı çalışma gruplarına göre matematiksel ispat becerisi ve matematiksel ispat yaparken yaşanan güçlükler ile ilgili çalışmalar derlenmiştir. Matematik eğitiminde ispatla ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, ispat yapmanın matematik eğitiminde tamamlayıcı bir role sahip olduğu görülmektedir (Hanna, 2000; Jones, 1997; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994). Bununla beraber, birçok araştırma öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ispatın matematik için çok önemli olduğunu düşünmediklerini göstermektedir (Alibert, 1998; Coe ve Ruthven, 1994; Knuth, 2002; Schoenfeld, 1995). Aslında öğrencilerin pek çoğu matematiksel gerçeklerin yıllar öncesinde ispatlandığını ve ispatın gereksiz bir aktivite olduğunu düşünmektedir (Coe ve Ruthven, 1994). Bu görüşün, öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları sorunun temelini oluşturduğu vurgulanmaktadır (Furingetti, Olivero ve Paola, 2001). Literatürde öğrencilerin matematiksel ispat yaparken yaşadıkları güçlükler aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

- İspatın doğası hakkındaki algılar (Schoenfeld, 1985)
- Mantık ve ispat yöntemleri (Solow, 1990)
- Problem çözme yeteneği (Schoenfeld, 1985)
- Matematiksel dil (Laborde, 1990)
- Kavram anlayışı (Dubinsky ve Lewin, 1986; Tall ve Vinner, 1981; Vinner ve Dreyfus, 1989).

Öğrencilerin ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar yapılan araştırmalarda ortaya konulmuştur (Coe ve Ruthven, 1994; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2003). Moore (1994) çalışmasında, literatürde var olan güçlüklerden de yararlanarak öğrencilerin ispat yaparlarken yaşadıkları güçlükleri yedi başlık altında toplamıştır. Bunlar;

1. Tanımları ifade edememe
2. Kavramların anlamlarını sezgisel olarak anlayamama
3. Kavram imajlarını ispat yaparken kullanamama
4. Genelleme ve örnek kullanımı eksikliği
5. Tanımlardan nasıl bir ispat yapısı kullanacağını bilmeme
6. Matematiksel dil ve notasyonları anlayamama

7. İspata nasıl başlayacağını bilememe

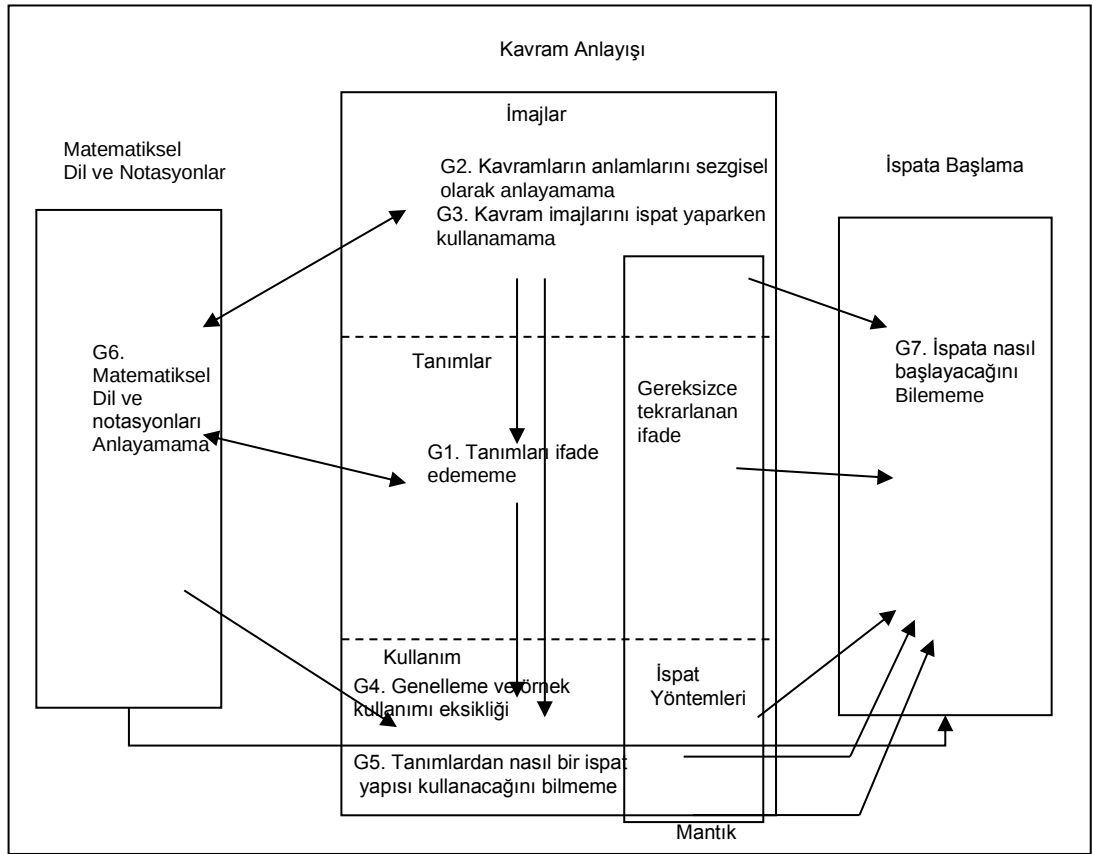
şeklindedir. Ayrıca Moore (1994) öğrencilerin ispat yapma süreçlerinde yaşadıkları güçlüklerin bir modelini de oluşturmuştur.

Formal İspata Geçiş Yapma

- Matematiği hesaplama ve sembol manipülasyonları olarak nitelendiren görüş
- İspatı prosedür olarak nitelendiren görüş
- İspatı açıklama olarak nitelendiren görüş

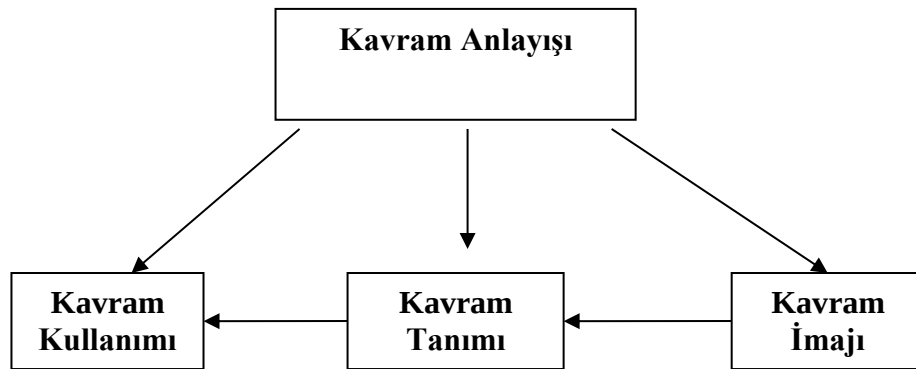


Bireysel İspatlar



Şekil 2.3. Öğrencilerin İspat Yaparken Yaşadıkları Güçlük Kaynakları Modeli

Moore (1994) tarafından literatüre eklenen güçlükler daha çok kavram anlayışı ekseninde incelenmiştir. Kavram anlayışı, öğrencilerin kavram kullanımlarını, kavram tanımlarını ve kavram imajlarını içermektedir.



Şekil. 2.4. Kavram Anlayışı Bileşenleri

Kavram anlayışı bileşenlerinden biri olan kavram tanımı, o kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan, matematikçiler ve ders kitapları tarafından kabul gören ifadeler olarak açıklanmaktadır (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 1983). Kavram imajı, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlar olarak tanımlanmaktadır (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 1983). Kavram kullanımı ise öğrencilerin ilgili kavramları içselleştirerek kendi örneklerini kullanabilmeleri, ispat yaparken tanımları kullanabilme ve tanımlar yardımıyla ispatın yapısını oluşturabilme şeklinde üç aşamada tanımlanmaktadır (Moore, 1994).

Moore (1990) doktora tez çalışmasında, matematik öğrencilerinin düşük seviyedeki algoritmik işlemler ve sembol değişimlerinden, yüksek seviyedeki ispatlara geçişlerindeki yaşadıkları zorlukları incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla araştırmada üniversite öğrencilerinin ispat okurken ve yaparken yaşadıkları zorlukların kaynakları nelerdir? sorusu araştırmanın ana problemini oluşturmuştur. İki pilot çalışma ve ana çalışma Georgia Üniversitesindeki matematik öğrencileri üzerinde 1989 yılında yaz, kış ve güz dönemlerinde yürütülmüştür. Birinci pilot çalışma grup teorisi dersinde yapılmıştır, diğer iki çalışma öğrencilere nasıl ispat yapacakları ve okuyacaklarının öğretildiği geçiş dersinde yapılmıştır. Bu dersin konusu mantık ve ispat teknikleri, kümeler kuramı, bağıntılar ve fonksiyonlar, reel sayılardan oluşmaktadır. Bu ders kapsamındaki ispatlar daha çok tanıma dayalı tümdengelsel ispatlardır. Ana çalışmada durum çalışması modeli esas alınmıştır. Buna göre 16 öğrencinin (8 öğrenci matematik bölümünden, 6 öğrenci matematik eğitimi bölümünden ve 2 kişide

matematik bölümü mezunu) ispat yaparken ve okurken yaşadıkları zihinsel zorluklar incelenmiştir. Veriler ilk olarak katılımcı olmayan gözlemlerle, öğrenci ve hocalarıyla yapılan mülakatlarla ve öğrencilerle sınıf dışında yapılan derslerle toplanmıştır. Analitik kategoriler ve özellikleri öğrencilerin ispatta yaşadıkları zorluklar genellenerek tümevarımsal bir şekilde yapılmıştır. Araştırma bulgularına göre öğrenci zorlukları; (a) kavram anlayışı, (b) matematiksel dil ve notasyonlar, (c) ispata başlarken yaşanan zorluklar şeklinde tespit edilmiştir. Öğrencilerin matematiksel kavramları anlamakta yaşadıkları zorluklar kavram kullanımı, kavram imajı ve kavram tanımı boyutlarını içeren kavram anlayışı çerçevesinde değerlendirilmiştir. Bazı zorluklar mantık ve ispat teknikleri, problem çözme, matematik ve ispata yönelik inanç konularıyla ilgilidir fakat bunlar çok büyük zorluklar olarak değerlendirilmemiştir.

Arslan ve Yıldız (2010) çalışmalarında, 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Matematiksel düşünmenin aşamalarını dikkate alan ve her biri dokuzar sorudan oluşan çalışma yaprakları geliştirilmiş ve pilot çalışmadan sonra 24 lise öğrencisine uygulanmıştır. Çalışmanın sonuçları matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü ortaya koymuştur. Bununla birlikte, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri, ispatlamada ise büyük sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca, genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında öğrencilerin cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel kodları altında toplandıkları belirlenmiştir.

Arslan (2007) doktora tez çalışmasında, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncelerinin gelişimini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma sonuçlarına göre, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejilerden yeterli düzeyde faydalanamadıkları görülmüştür. Özellikle 8. sınıf öğrencileri ile 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ispatı tercih etme düzeyleri arasında anlamlı farklılık bulunmuştur.

Birinci (2010) yüksek lisans tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının ispatlama performanslarını süreç-nesne ilişkisi açısından incelemeyi amaçlamıştır. Bu

amaçla öğretmen adaylarının matematik ve matematik eğitimi ile ilgili bilgisini, öğrenci iken sahip olduğu deneyimler, sınıfta ispat ile ilgili görüş ve deneyimleri ölçmek amacıyla 3 farklı anket uygulanmıştır. Bu uygulamanın ardından belirlenen 6 öğretmen adayının ispat süreçlerini incelemek için yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde genel olarak nesnel bilgilere yöneldikleri, sürece hakim olmadıkları, metotları ezbere kullanmaya çalıştıkları ve bu sebeple düşünmekten kaçtıkları tespit edilmiştir.

Coşkun (2009) yüksek lisans tez çalışmasında, orta öğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma başarıları arasında bir ilişkinin varlığını araştırmıştır. Bu amaçla araştırmada 9 ve 10. sınıflarda öğrenim gören toplam 96 öğrenciye önce Van Hiele geometri anlama testi daha sonraki hafta ise geometri ispat yazma testi uygulanarak öğrenci cevap kâğıtları puanlanmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen verilere göre, öğrencilerin Van Hiele geometri anlama seviyelerinin beklenenden düşük ve buna bağlı olarak ispat yazma başarılarının da düşük olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğrencilerin Van Hiele seviyeleri ile ispat yazma becerileri arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki olduğu tespit edilmiştir.

Knapp (2005) çalışmasında ispat yapmanın matematikçiler açısından temel bir beceri olduğunu fakat bu becerinin bazı öğrenciler için kazanılmasının oldukça zor olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte öğrenciler öğrenim hayatlarının ilk dönemlerinden itibaren geleneksel olarak anlatılan matematik derslerinde ispat yapmayı öğrenmeye başlamaktadırlar. Öğrencilerin ispat yapma ile alakalı güçlüklerini ve ön yargılarını aşmak için birçok üniversitede ispata geçiş dersleri öğretim programlarına eklenmiştir. Bu çalışmada ise ispat ile ilgili yapılan çalışmaların bir derlemesi yapılmıştır. Bu sayede öğrencilerin matematiksel ispat ile ilgili yaşadıkları sorunlar literatürden yararlanarak sınıflandırılmıştır. Çalışma sonucunda matematiksel ispat ile ilgili yapılan çalışmalar; öğrencilerin ispat yetenekleri ve yaşadıkları güçlükler, öğrencilerin ispata yönelik düşünceleri, öğrencilerin yaptıkları ispatların sınıflandırılması ve öğrencilerin ispat yapmak için hangi bilgilere ihtiyaç duyduğu şeklinde sınıflandırılmıştır. Ayrıca çalışmada elde edilen bulgular ışığında öğrencilerin ispat yeteneklerini geliştirmek için daha fazla ispat yapma uygulamaları yapmaları gerektiği vurgulanmıştır. Bu yüzden ispata geçiş derslerinin faydalı olabileceği ifade edilmiştir.

Generazzo (2011) doktora tez çalışmasında muhakeme etme ve ispat yapma üzerine sınıf içi söylemlerin ve tartışmaların öğrencilerin ispat yapma ve muhakeme etme yetenekleri üzerine etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın verileri geometri derslerinde yapılan gözlemler ve öğrenci grupları ile yapılan mülakatlar yardımı ile elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular, literatürde yer alan öğrencilerin ispat yapma yeteneklerinin düşük olduğu gerçeğini desteklemektedir. Bununla birlikte öğrencilerin ispat yapma ve muhakeme etme üzerine sınıf içi öğrenci-öğrenci, öğretmen-öğrenci tartışmalarının ve söylemlerinin onların ispat yapma ve muhakeme etme becerilerini geliştirdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Schabel (2001) doktora tez çalışmasında, ispatın matematiğin kalbi olduğunu ve üniversite öğrencilerinin ispat yaparken oldukça zorlandıklarını belirtmiştir. Bu yüzden çalışmasında üniversite öğrencilerinin ispat yaparken yaşadıkları güçlükleri gidermek için öğretim deneyleri yöntemi ile bir öğretim modeli geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla sayılar teorisi dersini alan 12 öğrenci arasından amaçlı örneklemeye yöntemine göre 4 gönüllü öğrenci ile çalışmasını yürütmüştür. Çalışmaya katılmaya gönüllü olan öğrenciler ile sekiz haftalık ders boyunca etkinlik temelli mülakatlar yapılmıştır. Ayrıca veri çeşitlemesi yapmak için sayılar teorisi dersi 3 doktora öğrencisi tarafından gözlenmiş, sınavlar yapılmış ve öğrencilere ev ödevleri verilmiştir. Elde edilen veriler ilgili alan yazında yer alan kavram anlama basamakları ve ispatta yaşanan güçlüklerle göre kodlanmıştır. Dört öğrencinin detaylı analizleri kavram anlama basamakları ve ispat yapma yeteneklerine göre derlenmiştir. Elde edilen veriler öğrencilerin ispat yeteneklerinin geliştirilmesi gerektiği sonucunu desteklemiştir. Özellikle;

1. Öğrencilerin örnekleri genelleme ve karşı örnekler oluşturabilmesi
2. Öğrencilerin öğretmenlerin yaptıkları ispatları izlemeden ispatlar oluşturabilmesi
3. Öğrencilerin varsayımları genellemeleri ve ispatladıkları varsayımları akranlarına sunmaları

gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Bu üç yeteneğin gelişmesi için doğru ya da yanlış basit problemlerin sınıf içi etkinliklerinde kullanılmasının faydalı olabileceği savunulmuştur.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırmada nitel yöntemler kullanılmıştır. Çünkü nitel araştırma yöntemleri sonuçtan çok sürece ağırlık veren ve derinlemesine inceleme imkânı sunan bir araştırma yöntemidir (Bogdan ve Biklen, 1998; Patton, 2002; Richardson ve Ginsburg, 1999). Nitel araştırma; “birden fazla bakış açısıyla sosyal ya da kişisel bir durumu anlamayı hedefleyen, doğal ortamında yapılan ve hedeflenen olayın karmaşık ve bütüncül bir resmini oluşturmayı amaç edinen” bir araştırma yöntemi olarak tanımlanmaktadır (Richardson ve Ginsburg, 1999). İnsanoğlunun doğası gereği öğrenme özel ilgi gerektiren karmaşık bir süreçtir. Von Glasersfeld’e (1990) göre; öğrencilerin kendilerine düşen görevleri anlamaları onların kişisel bilgi dağarcıklarına ve deneyimlerine bağlıdır. Nitel araştırma yöntemleri araştırma konularının detaylı bir şekilde derinlemesine incelenmesine ve araştırmacıların alan araştırmaları yapmalarına olanak sağladığı (Patton, 2002) için öğretmen adaylarının cebir öğrenme alanında ispat yapma süreçlerinin incelendiği araştırmada nitel araştırma yöntemleri seçilmiştir. Benzer şekilde bu iddialar, nitel araştırmacıların amacının insan davranışlarını ve tecrübelerini en iyi şekilde anlamak olduğunu ifade eden Bogdan ve Biklen (1998) tarafından da desteklenmektedir. Çünkü nitel araştırmacılar, insanların oluşturduğu yapıların anlamlarını tanımlama gayreti içindedirler.

Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden çoklu durum çalışması modeli esas alınmıştır. Nitel durum çalışmasının en temel özelliği bir ya da birkaç durumun derinliğine araştırılmasıdır (Bogdan ve Biklen, 1998; Yıldırım ve Şimşek, 2006). Yani bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır. Ayrıca bir durumda meydana gelen değişimleri ve süreçleri anlamak önemli ise bu durumların uzun dönemli çalışılması söz konusudur.

3.2. Katılımcılar

Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme teknikleri içerisinde yer alan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Patton (2002) amaçlı örnekleme çalışmada cevabı aranan problemleri aydınlatmak açısından zengin bilgi elde edilebilecek durumların seçimidir şeklinde tanımlamaktadır. Lincoln ve Guba (1985) ise amaçlı örnekleme sayesinde genellemeyi kolaylaştırmak değil maksimum düzeyde bilgi edinmenin hedeflendiğini vurgulamaktadırlar. Bu yüzden araştırma, ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören Lineer Cebir I, II ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I, II derslerini alan 10 öğrenci ile yürütülmüştür. Bu kriterlere uygun katılımcıları seçebilmek için Lineer Cebir I, II ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I, II derslerini almış olan orta öğretim matematik öğretmenliği 4. sınıfında öğrenim gören öğretmen adayları belirlenmiştir. Araştırmaya katılacak öğretmen adayları, kendilerini ifade edebilme ve kolay ulaşılabilme özelliklerine sahip öğretmen adayları arasından gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Son olarak araştırmaya katılmaya karar veren öğretmen adayları ile gönüllülük sözleşmesi yapılmıştır.

Fikirlerini paylaşmak isteyen öğrencilere, çalışma ve hakları hakkında bilgi verilmiştir. Katılımcıların altısı kız, dördü erkektir ve yaş ortalamaları yirmi ikidir. Araştırmada kullanılan isimler öğretmen adaylarının kendi isimleri değildir. Kullanılan isimler araştırmacı tarafından belirlenen takma isimlerdir.

3.3. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

3.3.1. Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu

Araştırmada, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini alabilmek için ‘Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu’ (MİGMF) kullanılmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden önce araştırmanın tamamen gönüllük ilkesine göre yürütüleceği, çalışmaya devam etmek istemeyen öğretmen adaylarının istedikleri anda çalışmadan ayrılacakları araştırmacı tarafından açıklanmıştır. Ayrıca, öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerin kamera kaydı altına alınacağı ve bu durumun kendileri için bir sakıncasının olup olmadığı öğretmen adaylarına sorulmuş ve bu konudaki izinleri alınmıştır. Araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının isimlerinin ve bilgilerinin kimseyle paylaşılmayacağı ve araştırma sonucunda kendi isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar 30–

45 dakika sürmüştür. Mülakatların tamamı araştırmacı ile öğretmen adaylarının birebir görüşebilecekleri bir ortamda gerçekleştirilmiştir.

Mülakat formu, araştırmacı tarafından ilgili alan yazından yararlanılarak hazırlanmış ve iki öğretim üyesi tarafından gözden geçirilmiştir. Buna göre mülakat formunun öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ifade edebilecekleri sorulardan oluştuğu uzman görüşleri alınarak sağlanmıştır. Bu sayede mülakat formunun kapsam geçerliliği sağlanmaya çalışılmıştır. Sorular yarı yapılandırılmış tarzda sorulmuş, gerektiğinde katılımcılara sonda sorular da yöneltilmiştir. Ayrıca, araştırmanın geçerliği adına kodların ve kategorilerin elde edildiği öğretmen adaylarının görüşlerine birebir alıntı yapılarak yer verilmiştir.

Klinik mülakatlar veri toplamada birincil yöntemlerdendir. Ernest (1997) klinik mülakatların matematik eğitimindeki rolünü aşağıdaki gibi açıklamaktadır:

Nitel araştırma paradigmasının merkezi bileşenlerinden biri öğrenmede yapılandırmacı yaklaşımdır. İlk olarak Jean Piaget tarafından ortaya atılan yapılandırmacı yaklaşım matematik eğitiminin merkezine alınmıştır. Piaget' in metodunun merkezinde ise klinik mülakatlar yer almaktadır. Bu süreçte, tek bir konu dikkatle tasarlanmış belirli görevleri karşılıklı olarak gerçekleştirmek için gereken ve istendiğinde sondalama için ara verilebilen bir mülakattır. Araştırmacı tarafından tasarlanan ve kişilerin matematik konuları hakkındaki anlayışlarını en ince ayrıntısına kadar incelemek amaçlanmaktadır. Piaget' in klinik mülakat metodu matematik eğitiminde nitel araştırma yöntemlerine yeni ufuklar açan katkılar sağlamıştır. Çünkü klinik mülakatlar sayesinde kişilerin zihinsel süreçleri ve kişisel düşünceleri hakkında derinlemesine bilgi elde edilebilmektedir.

Clement (2000) de açık uçlu mülakatların ve sesli düşünmeyi gerektiren problem çözme testleri içeren klinik mülakatların fen ve matematik eğitiminde kullanılmasını desteklemektedir. Ayrıca açık uçlu mülakatların ve sesli düşünmeyi gerektiren testlerin konu hakkında kişilerin zihinsel süreçlerini takip etmede klinik olmayan mülakatlara oranla daha fazla bilgi sağlayacağını ileri sürmektedir (Akt: Bayazıt, 2009).

3.3.2. Etkinlik Temelli Klinik Mülakatlar

Etkinlik temelli klinik mülakatlar ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramlarına yönelik olarak hazırlanmıştır. Her bir etkinlik temelli mülakatta adayların ilgili kavramlardan ne anladıkları, bu kavramlara yönelik kavram imajları, problem çözme, ispat yapma ve başkası tarafından yapılan ispatın doğruluğunu değerlendirmelerine olanak sağlayacak problemler araştırmacı tarafından

oluşturulmuştur. Bu mülakatlardaki problemlerin oluşturulmasında Bayraktar (2006), Çallıalp (2001), Kaya (1985), Şenkon (1998), Taşçı (2006), Taşçı (2007) kaynak kitaplardan ve ilgili alan yazından yararlanılmıştır. Etkinlik temelli mülakatlardaki problemlere son şekli pilot çalışmadan sonra verilmiştir. Pilot çalışma ve elde edilen bulgular aşağıda ayrıntılı olarak sunulmuştur.

3.3.3. Pilot Çalışma

Araştırmanın bu bölümünde pilot çalışmanın yapılış amacı, klinik mülakatlarda kullanılan etkinliklerin hazırlanması, güvenirlik ve geçerlik çalışmaları, etkinliklerde yapılan değişiklikler ve son olarak pilot çalışmanın araştırmacıya sağladığı faydalardan bahsedilmiştir.

3.3.4. Klinik Mülakatlardaki Etkinliklerin Hazırlanma Süreci

Bu çalışmada orta öğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında ispat yapma süreçlerinin incelenmesi hedeflenmiştir. Bunun için de orta öğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören ve amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenen 12 dördüncü sınıf öğrencisi seçilmiştir. Öğrenci seçiminde, öğrencilere araştırmanın amacından ve öneminden bahsedilerek araştırmanın gönüllük esasına dayalı olduğu açıklanmıştır. Araştırmaya katılan her bir öğretmen adayıyla gönüllük sözleşmesi imzalanmıştır. Ayrıca araştırmada kullanılacak olan problemler belirlenirken öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olacak şekilde Soyut Cebir ve Lineer Cebir konularını içeren etkinlik temelli mülakatlar araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bu etkinlik temelli mülakatların hazırlanmasında dikkat edilen hususlar aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır;

1. Mülakatlarda kullanılan etkinlikler hazırlanırken literatürde yer alan problem durumları ve kaynak kitaplar incelenmiştir.
2. Mülakatlarda kullanılacak olan etkinlikler öğretmen adaylarının seviyelerine ve öğrenim programlarına paralel olarak hazırlanmıştır.
3. Etkinliklerin öğretmen adaylarının sesli düşüncelerine olanak sağlayacak olan açık uçlu sorulardan oluşmasına ve anlaşılır olmalarına dikkat edilmiştir.
4. Etkinlik temelli mülakatlardaki problemlerin soru kalıplarının öğretmen

adaylarının ispat yapmalarını gerektirecek türden olmasına dikkat edilmiştir. Bunun için soru kalıpları “gösteriniz”, “ispatlayınız” şeklinde hazırlanmıştır.

5. Problem durumlarının öğretmen adaylarının mümkün olduğunca alışık olmadıkları türden olmalarına dikkat edilmiştir.

Pilot çalışma, araştırmaya katılmaya gönüllü olan ortaöğretim matematik öğretmenliği 4. sınıfında öğrenim gören 12 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Pilot çalışma hazırlık aşamasında araştırmaya gönüllü olan bütün öğretmen adaylarının araştırmaya dahil edilmesi sağlanmıştır. Bu sayede klinik mülakatlarda kullanılan etkinlikler için daha fazla durum incelemesi yapmak ve etkinliklerin hatalardan arınıklığının artırılması hedeflenmiştir. Pilot çalışma araştırmacı tarafından yaklaşık 1,5 ay olarak planlanmış ve pilot çalışmaya katılan öğretmen adaylarına mülakat saatlerini ve günlerini gösteren bir program hazırlanarak dağıtılmıştır. Bu sayede çalışmanın hedeflenen süre içerisinde planlı bir şekilde yapılması sağlanmıştır. Aşağıdaki tabloda öğretmen adaylarının mülakat tarihleri ve saatleri sunulmuştur. (Öğretmen Adayları=ÖA olarak kodlanmıştır.)

Çizelge 3.1.

Öğretmen Adaylarının Pilot Çalışma Programları

Öğretmen Adayları	Mülakat1 Saat	Mülakat2 Saat	Mülakat3 Saat	Mülakat4 Saat	Mülakat5 Saat	Mülakat6 Saat
ÖA1	14.03.2011 10-11	21.03.2011 10-11	28.03.2011 13-14	04.04.2011 13-14	14.04.2011 10-11	21.04.2011 10-11
ÖA2	14.03.2011 11-12	21.03.2011 11-12	28.03.2011 14-15	04.04.2011 14-15	14.04.2011 11-12	21.04.2011 11-12
ÖA3	16.03.2011 13-14	23.03.2011 13-14	30.03.2011 13-14	06.04.2011 13-14	11.04.2011 13-14	18.04.2011 13-14
ÖA4	16.03.2011 14-15	23.03.2011 14-15	30.03.2011 14-15	06.04.2011 14-15	11.04.2011 14-15	18.04.2011 14-15
ÖA5	18.03.2011 8-9	25.03.2011 8-9	01.04.2011 8-9	08.04.2011 8-9	11.04.2011 10-11	18.04.2011 10-11
ÖA6	18.03.2011 9-10	25.03.2011 9-10	01.04.2011 9-10	08.04.2011 9-10	11.04.2011 11-12	18.04.2011 11-12
ÖA7	22.03.2011 13-14	29.03.2011 13-14	07.04.2011 15-16	14.04.2011 15-16	21.04.2011 15-16	28.04.2011 15-16
ÖA8	23.03.2011 8-9	30.03.2011 8-9	01.04.2011 15-16	08.04.2011 15-16	15.04.2011 15-16	22.04.2011 15-16
ÖA9	23.03.2011 15-16	30.03.2011 15-16	01.04.2011 16-17	08.04.2011 X	15.04.2011 X	22.04.2011 X
AÖ10	25.03.2011 15-16	01.04.2011 15-16	05.04.2011 13-14	12.04.2011 13-14	20.04.2011 10-11	27.04.2011 10-11
ÖA11	25.03.2011 16-17	01.04.2011 16-17	05.04.2011 14-15	12.04.2011 14-15	20.04.2011 11-12	27.04.2011 11-12
ÖA12	22.03.2011 14-15	29.03.2011 14-15	07.04.2011 16-17	14.04.2011 16-17	21.04.2011 16-17	28.04.2011 16-17

Pilot çalışma yukarıdaki tabloda belirtilen saatlerde ve günlerde planlı bir şekilde gerçekleşmiştir. Yapılan mülakatların tamamı araştırmacı ve öğretmen adaylarının birebir çalışabilecekleri bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarından ÖA9 dışındaki bütün öğretmen adayları ile programdaki gün ve saatlerde mülakatlar yapılmıştır. ÖA9 ise ilk üç mülakata katılmış daha sonraki üç mülakata katılmak istemediği için çalışmadan ayrılmıştır. Pilot çalışma kapsamında öğretmen adaylarıyla yapılan her bir mülakat ortalama 30 ile 45 dakika arasında sürmüştür.

Pilot çalışmada yapılan mülakatların tamamı kamera ile kaydedilmiştir. Ayrıca araştırmacı öğretmen adayları ile yaptıkları mülakatlar sırasında öğretmen adaylarının çözüm yöntemleri hakkında gözlem notları almıştır. Ayrıca her mülakat sonunda öğretmen adaylarından etkinliklerdeki problemlerin anlaşılır ve seviyelerine uygunluğu konularında görüş almıştır. Yapılan mülakatlar sırasında alınan gözlem notları ve öğretmen adaylarının görüşleri asıl uygulamadaki klinik mülakatlarda kullanılacak olan etkinliklere son şeklinin verilmesi için kullanılmıştır.

3.3.5. Klinik Mülakatlardaki Etkinliklerin Güvenirlik ve Geçerlik Çalışmaları

Pilot çalışmada elde edilen veriler ışığında klinik mülakatlarda uygulanan etkinlik problemlerinin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. Mülakatlarda kullanılan etkinliklerin güvenirlik ve geçerliklerini kontrol altında tutabilmek için ilk olarak literatürde yapılan çalışmalarda kullanılan problemlerin benzerleri ile Soyut Cebir ve Lineer Cebir derslerinin içerikleri göz önünde bulundurulmuştur. Ders içerikleri ve literatür göz önüne alınarak araştırmacı tarafından “İkili işlem”, “Birebir fonksiyon”, “Örten fonksiyon”, “Grup”, “Alt Grup”, “Grup Homomorfizmi” ve “Vektör” kavramları belirlenmiştir. Araştırmacı tarafından belirlenen kavramlara yönelik etkinlik temelli mülakat problemleri hazırlanmıştır. Daha sonra hazırlanan etkinlik problemleri ve kavramlar üzerinde araştırmacı ile alan uzmanı 3 matematik eğitimcisi birlikte çalışmışlardır. Buna göre “Birebir fonksiyon” ve “Örten fonksiyon” Soyut Cebir dersi içeriğini tam olarak yansıtmadığı için etkinliklerden çıkarılmıştır. Bunun yanında belirlenen kavramlar ile ilgili hazırlanan etkinlik problemleri alan uzmanı 3 matematik eğitimcisinin görüşleri alınarak araştırmacı tarafından üzerinde değişiklikler yapılarak hazırlanmıştır. Çünkü ölçme araçlarının içerik geçerliği öznel ve uzman kanısına

dayanır. Yapılan çalışmalar ve uzman görüşleri doğrultusunda etkinlik problemlerinin içerik geçerliği sağlanmıştır. Son olarak pilot çalışma kapsamında etkinliklerin dil ve seviye geçerliğini tespit etmek amacıyla 12 öğretmen adayının mülakatlar sonunda görüşleri alınarak dil ve seviye geçerliği sağlanmıştır.

Güvenirlilik çalışmaları için araştırma kapsamında mümkün olduğunca çok durum incelenmiştir. Çünkü güvenirlilik kavramı, aynı ölçütlerin ve süreçlerin uygulanması sonucu benzer sonuçların elde edilmesidir. Bu yüzden araştırmanın pilot çalışma bölümünde gönüllük esasına göre geniş sayılabilecek bir örneklem üzerinde çalışılarak güvenirliliği artırmaya çalışılmıştır. Ayrıca araştırmanın yöntemi gereği ortaya çıkan güvenirlilik sorunlarını aşmak için veri ve yöntem çeşitlemesi yapılmıştır. Bu amaçla araştırma kapsamında etkinlik temelli mülakatlar (problem çözme, ispat yapma ve yapılmış olarak verilen ispatın doğruluğunu değerlendirme), gözlemler ve kullanılacak olan kriterlerin tanımlanması yapılmıştır. Bununla birlikte araştırmada kullanılan yöntem, veri toplama araçları ve araştırmada uygulanan prosedürler gerekli olduğunda tekrarlanabilmesi için ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

3.3.6. Mülakatlardaki Etkinliklerde Yapılan Değişiklikler

Pilot çalışmadaki ilk mülakat öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini belirlemeye yönelik olarak hazırlanmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ifade edebilecekleri 17 açık uçlu sorudan oluşan bir mülakat formu hazırlanmıştır. Araştırmacı tarafından alınan gözlem notları doğrultusunda öğretmen adaylarının görüş belirtmekte güçlük yaşadıkları (Matematiksel bir ispatın geçerli olup olmadığına kim karar verir?, Matematiksel bir ispat nasıl geçersiz olabilir?, Son zamanlarda yaptığınız bir matematiksel ispatın hangi aşamasında kendinizi başarılı hissettiniz?, Kendinizi başarılı olarak hissetmediğiniz bir ispat hakkındaki düşünceleriniz nelerdir?, Doğruluğu kanıtlanan bir matematiksel ispatı çürütmek mümkün müdür? Neden?, Matematiksel bir ifadenin ispatını yaparken nelere ihtiyaç duyarsınız?) maddeler çıkarılarak soru sayısı 11'e düşürülmüştür. Öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini belirlemek için yapılan mülakatın son hali EK(2) de sunulmuştur.

Pilot çalışma öncesinde 3 matematik eğitimi uzmanı tarafından Cebir öğrenme alanı ile ilgili olarak belirlenen “İkili işlem”, “Grup”, “Alt grup”, “Homomorfizm” ve

“Vektör” kavramlarına yönelik olarak hazırlanan etkinliklerde, araştırmacının mülakat esnasında aldığı gözlem notları ve öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda bazı değişiklikler ve düzeltmeler yapılmıştır. Aşağıda yapılan değişiklikler ve düzeltmeler gerekçeleriyle birlikte sunulmuştur.

İkili işlem ile ilgili etkinlik içerisinde yer alan ispat doğrulama probleminin eksik çözümü aşağıdaki gibidir.

Kabul edelim ki e ve e' iki etkisiz eleman olsun. e bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e = a$ ve özel olarak $a = e'$ alınır, $e' * e = e'$ bulunur. Aynı şekilde e' bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e' = a$ ve özel olarak $a = e$ alınır, $e * e' = e$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e = e'$ olduğu görülür.

İkili işlem etkinliği içerisinde yer alan ispatın doğruluğunu değerlendirme probleminde ÖA1 ve ÖA3 olarak kodlanan öğretmen adaylarının görüşleri ve araştırmacının gözlem notları doğrultusunda aşağıdaki değişiklik yapılmıştır. ÖA1 ve ÖA3 yapılan ispat içerisinde geçen etkisiz elemanların e ve e' şeklinde olmaması gerektiği yönünde görüş belirtmişlerdir. Burada etkisiz eleman ve etkisiz elemanın tersi ile işlem yapıldığı şeklinde bir düşünce oluşabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca araştırmacının mülakatlar esnasında tuttuğu gözlem notlarında da benzer bir karışıklık olduğu sonucuna ulaşıldığından etkinlik aşağıdaki gibi değiştirilmiştir. İkili işlem ile ilgili mülakat etkinliğinin son hali EK(3) de sunulmuştur.

Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınır, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınır, $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

Grup etkinliği içerisinde iki aşamalı bir problem yöneltilmiştir. Bu problemde öğretmen adaylarına “ $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur?” sorusu sorulmuştur. Bu problem içerisinde her iki sayı kümesinin de toplama işlemine göre bir grup teşkil edip etmediklerinin araştırılması istenmiştir. Fakat öğretmen adaylarından ÖA2, ÖA12 ve ÖA6 sadece $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde çalışmışlar ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin $\mathbb{Q}$ nun alt kümesi olduğundan aynı şartları sağlayacağını belirttikleri görülmüştür. Mülakatlardan elde edilen bu

gözleme göre problem aşağıda gibi değiştirilmiştir. Grup ile ilgili mülakat etkinliğinin son hali EK(4) de sunulmuştur.

Q rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur?

Alt grup etkinliği ile ilgili yapılan mülakatlarda alınan gözlem notları ve öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda bir değişiklik yapılmamış ve asıl uygulama için aynı kalmasına karar verilmiştir. Alt grup ile ilgili mülakat etkinliğinin son hali EK(5) de sunulmuştur.

Grup homomorfizmi ile ilgili etkinlik içerisinde yer alan ispat doğrulama probleminin yanlış çözümü aşağıdaki gibidir.

$\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_H) \text{ (} \varphi \text{ homomorfizm olduğundan) } \dots (1)$$

Ve benzer şekilde,

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_H)\varphi(a) \text{ (} \varphi \text{ homomorfizm olduğundan) } \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden,

$$\varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(e_G)\varphi(a) = \varphi(a)$$

Elde ederiz ki bu da birim eleman tanımından $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğunu gösterir. Halbuki bir grubun birim elemanı daima tektir. Böylece kabulümüzden H ın birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

Bu etkinlik ile ilgili öğretmen adaylarından ÖA1, ÖA3, ÖA5, ÖA7 ve ÖA10 nun görüşleri ve alınan gözlem notları doğrultusunda aşağıdaki değişiklik yapılmıştır. Adı geçen öğretmen adayları yapılan ispatta bir yanlışlık olduğunu fakat ispatın mantığını anlayamadıklarını ifade etmişlerdir. Bu mantık hatasının $\varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(e_G)\varphi(a) = \varphi(a)$ eşitliğinin (1) ve (2) eşitliklerinden elde edilemeyeceği üzerinde yoğunlaştığı için ispattaki bu kısım çıkarılmış ve etkinlik aşağıdaki gibi değiştirilmiştir. Grup homomorfizmi ile ilgili mülakat etkinliğinin son hali EK(6) da sunulmuştur.

$\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H) \text{ (} \varphi \text{ homomorfizm olduğundan) } \dots (1)$$

Ve benzer şekilde,

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G)\varphi(a) = \varphi(e_H)\varphi(a) \text{ (} \varphi \text{ homomorfizm olduğundan) ... (2)}$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğunu elde ederiz. Hâlbuki biliyoruz ki bir grubun birim elemanı daima tektir. Böylece kabulümüzden H ın birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

Vektörler ile ilgili yapılan etkinlikte araştırmacı tarafından alınan gözlem notları ve öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda hiçbir değişiklik yapılmamıştır. Vektörler ile ilgili mülakat etkinliğinin son hali EK(7) de sunulmuştur.

Yapılan pilot çalışmanın araştırma ve araştırmacı açısından faydaları aşağıdaki şekilde özetlenebilir;

1. Araştırmacının pilot çalışma sayesinde mülakatları yönlendirme ve yönetme konusunda deneyim kazanması,
2. Araştırmanın asıl uygulamasında kullanılacak olan etkinliklerin güvenirlik ve geçerlik çalışmalarının yapılarak son halinin verilmesi,
3. Araştırmanın asıl uygulamasında kullanılacak olan etkinliklerin öğretmen adaylarının seviyelerine uygunluğunun belirlenmesi,
4. Araştırmada uygulanan etkinliklerin değerlendirilmesi için araştırmacının kategorileri oluşturmaya yapılan pilot çalışma yardımcı olmuştur.

3.4. Verilerin Analizi

3.4.1. Matematiksel İspata Yönelik Görüşlerin Analizi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi, elde edilen ham verilerin anlamlandırılarak belirli bir çerçeve oluşturulması ve beliren durum netlik kazandıktan sonra düzenlenerek kod ve kategorilerin ortaya çıkarak somutlaşmasını sağlamaktadır (Patton, 2002). İçerik analizi yaklaşımı, nitel mülâkat verilerinin ve açık uçlu soruların analizinde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin analizinde, içerik analizi yöntemlerinden ‘kategorisel analiz’ kullanılmıştır. Kategorisel analiz sürecinde; verilerin kodlanması, kategorilerin oluşturulması, kategorilerin düzenlenmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması aşamaları izlenmiştir (Corbin ve Strauss, 2007).

Çalışmada ilk olarak kamera kayıtları yazıya dökülmüştür. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından araştırmacı ve bir öğretim üyesi birbirlerinden bağımsız olarak çalışmışlardır. Araştırmacıların bağımsız olarak oluşturdukları kod ve kategoriler daha sonra tartışılarak bir araya getirilmiştir. Ham verilerin kodlara ve kategorilere dönüştürülmesi işlemi araştırmacı ve bir öğretim üyesi tarafından gerçekleştirildikten sonra bir başka öğretim üyesinin de incelemesi istenmiştir. Son olarak alınan dönütlerle birlikte kategorilere son hali verilmiştir. Bu sayede araştırma verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir.

Araştırmada oluşturulan kategoriler incelendiğinde; bazı kategorilerde sadece bir öğretmen adayı bulunurken bazı kategorilerde birden fazla öğretmen adayının bulunduğu görülmüştür. Bunun yanında bazı öğretmen adaylarının görüşleri birden fazla kategoride yer almıştır. Bu çalışmada birden fazla veri analizi kullanılarak olaylar için ahenkli bir gerekçe oluşturmak şeklinde tanımlanan (Creswell, 2003) veri çeşitlemesi kullanılmıştır. Elde edilen veriler nitel betimsel analiz ve içerik analizine tabi tutulmuştur.

3.4.2. Etkinlik Temelli Klinik Mülakatların Analizi

Etkinlik temelli klinik mülakatlar matematiksel ispat ile ilgili literatürde yer alan güçlüklerden yararlanılarak analiz edilmiştir. Problem çözme, ispat yapma ve başkası tarafından yapılan ispatın doğruluğunun değerlendirilmesi şeklinde üç aşamadan oluşan her bir etkinlik temelli mülakat için literatürden yararlanarak kategoriler ve alt kategoriler araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Oluşturulan kategorilere ve alt kategorilere göre her bir öğretmen adayının yanıtları incelenmiştir. Bu yüzden öğretmen adaylarının yanıtları nitel araştırma yöntemleri içinde değerlendirilen “içerik analizi” modeli çerçevesinde analiz edilmiştir. Çünkü içerik analizi, elde edilen ham verilerin anlamlandırılarak belirli bir çerçeve oluşturulması ve beliren durum netlik kazandıktan sonra düzenlenerek kod ve kategorilerin ortaya çıkarak somutlaşmasını sağlamaktadır (Patton, 2002). Ayrıca araştırmacı tarafından oluşturulan kategoriler iki uzman tarafından incelenerek kategorilere son şekli verilmiştir.

Öğretmen adaylarının ispat yapmada yaşadıkları güçlükler arasında kavramların anlamlarını anlamama ve kavram imajlarını ispatta kullanamama güçlükleri de yer almaktadır. Bu yüzden araştırmada öğretmen adaylarının cebir kavramlarını anlamaları

ve bu kavramlarla ilgili kavram imajları incelenmiştir. Etkinlik temelli mülakatlar içerisinde yer alan kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının ne anladıklarını öğrenmek için “*İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*” şeklinde sorular yöneltilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adaylarının kavram imajlarını öğrenebilmek için ise adaylara “*İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bu tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*” şeklinde sorular yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının bu sorulara verdikleri yanıtlar nitel betimsel analiz yöntemine göre analiz edilmiştir. Çünkü betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

3.4.2.1. Problem çözme analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler

Öğretmen adaylarının etkinlik temelli mülakatlarda ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili problemlere verdikleri yanıtlar literatürden ve pilot çalışmada elde edilen verilerden yararlanılarak; *problemi anlama*, *kümeden eleman seçme*, *çözümün sunumu*, *matematiksel dil ve notasyon kullanımı* kategorilerine göre analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının yanıtları incelenerek bu kategoriler için alt kategoriler belirlenmiştir. Problem çözme analizinde kullanılan *problemi anlama* ve *matematiksel dil ve notasyon kullanımı* kategorileri problem çözme ile ilgili literatürden yararlanılarak son halini almıştır. *Kümeden eleman seçme* ve *çözümün sunumu* kategorileri ise araştırmacı tarafından pilot çalışma verilerinden yararlanılarak oluşturulmuştur. Çizelge 3.2 de bu kategoriler ve alt kategorilere hangi yanıtların toplandığı sunulmuştur.

Çizelge 3.2.

Matematiksel Problem Çözme Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler

Problemi Anlama	
Kategoriler	Göstergeler
Doğru anlayanlar	Problem cümlesinde verilen ve istenen ifadeleri doğru açıklayan adaylar
Eksik anlayanlar	Problem cümlesinde verilen ve istenen ifadeleri yeterli açıklayamayan adaylar
Yanlış anlayanlar	Problem cümlesinde verilen ve istenen ifadeleri tam olarak anlayamadığı için açıklayamayan adaylar
Kümeden Eleman Seçme	
Kategoriler	Göstergeler
Çalıştığı kümeden doğru eleman seçenler	Problem cümlesinde verilen ve üzerinde işlem yapılması gereken kümeye uygun elemanlar seçebilen adaylar
Çalıştığı kümeden yanlış eleman seçenler	Problem cümlesinde verilen ve üzerinde işlem yapılması gereken kümeye uygun elemanlar seçemeyen adaylar
Çalıştığı kümeyi belirtmeyenler	Problem cümlesinde verilen ve üzerinde işlem yapılması gereken kümeyi belirtmeden uygun/uygun olmayan elemanlar seçen adaylar
Çözümün Sunumu	
Kategoriler	Göstergeler
Tam ve ikna edici açıklama yapanlar	Problemin çözümünü tam olarak yapabilen ve kullandığı matematiksel ifadeleri açıklayabilen adaylar
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	Problemin çözümünü yapabilen fakat kullandığı matematiksel ifadeleri net açıklayamayan adaylar
Hiç açıklama yapmayanlar	Problemin çözümünü yapabilen fakat kullandığı matematiksel ifadeleri açıklamayan adaylar
Yanlış açıklama yapanlar	Problemin çözümünü hatalı yapan ve yanlış matematiksel ifadeler kullanan adaylar

Çizelge 3.2. (Devamı)

Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı	
Kategoriler	Göstergeler
Doğru matematiksel ifadeler kullananlar	Çözüm sürecinde problem ifadesinde verilen kümelere ve işlemlere uygun matematiksel ifadeler kullanan adaylar
Yetersiz matematiksel ifadeler kullananlar	Çözüm sürecinde problem ifadesinde verilen kümelere ve işlemlere yeterince uygun matematiksel ifadeler kullanamayan adaylar
Gereksiz matematiksel ifadeler kullananlar	Çözüm sürecinde problem ifadesinde verilen kümelere ve işlemlere uygun olmayan ya da gereksiz matematiksel ifadeler kullanan adaylar

3.4.2.2. İspat yapma analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler

Öğretmen adaylarının etkinlik temelli mülakatlarda ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili teoremlerin ispatlarına verdikleri yanıtlar literatürden ve pilot çalışmada elde edilen verilerden yararlanılarak; *ispata nasıl başlayacağını ifade etme, tanımları ifade etme, ispatın sunumu, matematiksel dil ve notasyon kullanımı, mantık ve ispat yöntemleri kullanımı* kategorilerine göre analiz edilmiştir. İspat yapma analizinde kullanılan *ispatın sunumu* kategorisi araştırmacı tarafından pilot çalışma verilerinden yararlanılarak oluşturulmuş, diğer kategoriler ise matematiksel ispatta yaşanan güçlükler ile ilgili literatürden yararlanılarak son halini almıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının yanıtları incelenerek bu kategoriler için alt kategoriler belirlenmiştir. Çizelge 3.3’de bu kategoriler ve alt kategorilere hangi yanıtların toplandığı sunulmuştur.

Çizelge 3.3.

Matematiksel İspat Yapma Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler

İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme	
Kategoriler	Göstergeler
Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar	İspata teorem ifadesinde verilenlere göre tam/ikna edici açıklamalar yaparak başlayan adaylar
Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar	İspata teorem ifadesinde verilenlere göre eksik/yetersiz açıklamalar yaparak başlayan adaylar
Yanlış açıklayanlar	İspata teorem ifadesinde verilenlere göre yanlış açıklamalar yaparak başlayan adaylar
Açıklama yapmayanlar	İspata teorem ifadesinde verilenlere göre hiç açıklama yapmadan başlayan adaylar
Tanımları İfade Etme	
Kategoriler	Göstergeler
Kullanılan tanımları belirtenler	İspat içerisinde kullandıkları tanımları tam olarak açıklayan adaylar
Kullanılan tanımları eksik/yetersiz belirtenler	İspat içerisinde kullandıkları tanımları eksik/yetersiz olarak açıklayan adaylar
Kullanılan tanımları belirtmeyenler	İspat içerisinde kullandıkları tanımları belirtmeyen/açıklamayan adaylar
İspatın Sunumu	
Kategoriler	Göstergeler
Tam/ikna edici açıklama yapanlar	İspatı tam olarak yapabilen ve ispat sürecinde kullandığı matematiksel ifadeleri açıklayan adaylar
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	İspatı yapabilen ve ispat sürecinde kullandığı matematiksel ifadeleri belirsiz/yetersiz açıklayan adaylar
Hiç açıklama yapmayanlar	İspatı yapabilen ve ispat sürecinde kullandığı matematiksel ifadeleri açıklamayan adaylar
Yanlış açıklama yapanlar	İspatı yapamayan ya da ispat sürecinde yanlış matematiksel ifadeler kullanan adaylar

Çizelge 3.3. (Devamı)

Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı	
Kategoriler	Göstergeler
Doğru matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullananlar	İspat sürecinde teorem ifadesinde verilen küme ve işlemlere uygun matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullanan adaylar
Yetersiz matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullananlar	İspat sürecinde teorem ifadesinde verilen küme ve işlemlere göre yetersiz matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullanan adaylar
Gereksiz matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullananlar	İspat sürecinde teorem ifadesinde verilen küme ve işlemlere uygun matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullanamayan yada gereksiz matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullanan adaylar
Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı	
Kategoriler	Göstergeler
Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar	Yaptığı ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemi kullandığını tam olarak açıklayan adaylar
Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar	Yaptığı ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemi kullandığını tam olarak açıklayamayan adaylar
Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar	Yaptığı ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemi kullandığını açıklamayan adaylar
Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler	Yaptığı ispatın yöntemini yanlış bir şekilde belirleyen veya belirleyemeyen adaylar

3.4.2.3. Başkası tarafından yapılan ispatların doğruluklarının değerlendirilmesinin analizinde kullanılan kategoriler ve alt kategoriler

Öğretmen adaylarının etkinlik temelli mülakatlarda ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili başkası tarafından yapılan ispatların doğruluklarını değerlendirirken verdikleri yanıtlar literatürden ve pilot çalışmada elde edilen verilerden yararlanılarak; *kavram kullanımını inceleme, ispatın kurgusunu inceleme, mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme, cevabını savunma* kategorilerine göre analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının yanıtları incelenerek bu kategoriler için alt kategoriler belirlenmiştir. Çizelge 3.4 de bu kategoriler ve alt

kategorilere hangi yanıtların toplandığı sunulmuştur.

Çizelge 3.4.

İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Analizinde Kullanılan Kategoriler ve Alt Kategoriler

Kavram Kullanımını İnceleme	
Kategoriler	Göstergeler
Doğru inceleyen ve açıklayanlar	Yapılmış ispatta kullanılan kavramların kullanımını doğru değerlendiren ve açıklayan adaylar
Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar	Yapılmış ispatta kullanılan kavramların kullanımını doğru değerlendiren ve tam olarak açıklayamayan adaylar
Doğru inceleyen ve açıklamayanlar	Yapılmış ispatta kullanılan kavramların kullanımını doğru değerlendiren ve açıklama yapmayan adaylar
Yanlış inceleyen ve açıklayanlar	Yapılmış ispatta kullanılan kavramların kullanımını yanlış değerlendiren ve açıklayan adaylar
İspatın Kurgusunu İnceleme	
Kategoriler	Göstergeler
Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar	Yapılmış olan ispatta kullanılan matematiksel ifadelerin kullanımını tam/ikna edici şekilde değerlendiren ve açıklayan adaylar
Belirsiz/yetersiz açıklayanlar	Yapılmış olan ispatta kullanılan matematiksel ifadelerin kullanımını belirsiz/yetersiz şekilde değerlendiren ve açıklayan adaylar
Açıklama yapmayanlar	Yapılmış olan ispatta kullanılan matematiksel ifadelerin kullanımını açıklama yapmadan değerlendiren adaylar
Yanlış açıklayanlar	Yapılmış olan ispatta kullanılan matematiksel ifadelerin kullanımını yanlış değerlendiren ve açıklayan adaylar

Çizelge 3.4. (Devamı)

Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme	
Kategoriler	Göstergeler
Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini tam olarak açıklayanlar	Yapılmış ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemin kullandığını tam olarak açıklayan adaylar
Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayanlar	Yapılmış ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemin kullandığını yetersiz açıklayan adaylar
Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini açıklamayanlar	Yapılmış ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyen ve neden bu yöntemin kullandığını açıklamayan adaylar
Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler	Yapılmış ispatın yöntemini yanlış bir şekilde belirleyen veya belirleyemeyen adaylar
Cevabını Savunma	
Kategoriler	Göstergeler
Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar	İspatın doğruluğunu değerlendirme sürecindeki ifadelerini tam/ikna edici şekilde açıklayan ve savunan adaylar
Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar	İspatın doğruluğunu değerlendirme sürecindeki ifadelerini yetersiz şekilde açıklayan ve savunan adaylar
Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar	İspatın doğruluğunu değerlendirme sürecindeki ifadelerini yanlış açıklayan ve savunan adaylar veya açıklama yapmayan adaylar

İspatın doğruluğunu değerlendirme analizinde kullanılan *ispatın kurgusunu inceleme* kategorisi araştırmacı tarafından pilot çalışma verilerinden yararlanılarak oluşturulmuş, diğer kategoriler ise matematiksel ispatta yaşanan güçlükler ile ilgili literatürden yararlanılarak son halini almıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR ve YORUM

Bu bölümde, araştırma verilerinin analizleri sonucunda elde edilen bulgu ve yorumlara alt problemlerin sırasına göre yer verilmiştir.

4.1. Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Görüşlerine Yönelik Bulgular

Birinci alt problem “*Matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri nasıldır?*” şeklinde ifade edilmiştir. Birinci alt problem ile ilgili bulgular, öğretmen adaylarının mülakat sorularına verdikleri yanıtlardan oluşturulan kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasını sağlayan yanıtlarla birlikte tablolastırılarak sunulmuştur.

4.1.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Ne Olduğu İle İlgili Görüşlerine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel ispatın ne olduğunu öğrenebilmek için onlara “*Size göre matematiksel ispat nedir?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Matematiksel İfadelerin Doğrulanmasıdır, Matematiğin Rehberidir, Sonuca Ulaşmaktır, Beyin Jimnastiğidir, Bilgilerin Uygulamaya Hazır Hale Getirilmesidir ve Kavramlar Arasındaki İlişkiyi Aramaktır* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.1 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.1.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Ne Olduğu ile İlgili Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Matematiksel İfadelerin Doğrulanmasıdır	Ayhan: Yargıları doğrulama aşamasıdır. Kanıtlama amacıyla ifadelerin doğruluğunu başkalarına gösterme işidir. Yani bir bakıma kişilerin kafalarında soru işareti bırakmamaktır. Kişilerin kafalarında hiç problem kalmayacak şekilde kavramların açıklanmasıdır. İbrahim: İspat benim için matematiksel bilgileri doğrulamak veya doğru bilgiyi aramaktır. Ayfer: Bana göre ispat matematiksel ifadelerin doğruluğunu göstermektir. İfadelerin doğruluğunu kanıtlamaktır.
Matematiğin Rehberidir	Aysel: Ya matematik hani nasıl diğer bilimlerin pusulasıysa, yani diğer bilimlere hizmet eden ve yön gösteren bilim ise matematikte de ispatlar bir pusula gibidir ve yol göstericidir. Matematikte neyin nereden geldiğini gösteriyor. İspatlar olmasaydı matematik herkes için çokta bir anlam ifade etmezdi diye düşünüyorum. Tek bir cümleyle söyleyecek olursam ispatlar matematiğin rehberi gibidir. Büşra: Matematiğin temelini oluşturan bir şeydir... Aslında ispat nedir sorusu neden matematik yaparız sorusuyla eşdeğerdir. Matematiğin ilerleyebilmesi için ispatın yapılması gereklidir. Matematiğin ilerleyişini şöyle düşünebiliriz. Mesela ortaya bir problem atılıyor, bu problemi çözdükten sonra başka bir problem ve onunda çözümü yapılıyor. Matematik bu şekilde sürekli yığılarak ilerliyor. Elimizde sadece 10 tane problem olsaydı ve bunları çözseydik matematik diye bir bilim olmazdı. Dolayısıyla matematik ilerlemesini yapılan ispatlara borçludur diyebiliriz.
Sonuca Ulaşmaktır	Hüseyin: İspat bana göre elde edilen veri, sonuç... Amaca götüren bir sonuç... Doğruluğundan emin olmadığımız bir bilginin doğrulanması sayesinde matematiğe yapılan katkı olarak ta düşünebiliriz.
Beyin Jimnastiğidir	Nermin: Dört yıldır hep teorem ispat teorem ispat gördük ama bu soru için şu an aklıma hiçte mantıklı bir cevap gelmiyor... Yani bu ispatları neden yaptığımı hiç açıklayan olmadı. Şimdi üniversite zor ya hocam o yüzden olabilir. Şimdi hocam lisedeyken belli bir çerçeve vardı ve biz onun içerisinde işlem yapıyorduk. Herhalde bu sınırları aşmak için ispat yapıyor olabiliriz. Zihnimizi farklı düşündürebilmek ya da zihnimizi açmak için yapıyor olabiliriz. Farklı düşünme yeteneği, soyut düşünme yeteneğimizi arttırdığı için olabilir. Bir soruyu çözerken orada formülleri ezberlemek ve ya o formüllerin nasıl çıkarılacağını bilmek gibi... Mesela trigonometrideki ters dönüşüm formüllerini soru çözerken öğrencilere ezberden anlatıyoruz ama bu formüllerin nasıl elde edileceğini gösterirsek öğrenciler için daha anlamlı öğrenme olur ve karıştırmazlar. Öğretmen açısından da derste daha güvenli ders anlatma olanağı sunar. İspat insanların daha iyi bilmesi için önemli olabilir. Bir şeyleri daha iyi kafamıza oturtmak için olabilir. İspat bir şeylerin temelini araştırmak, zihin jimnastiği yapmak olabilir.
Bilgilerin Uygulamaya Hazır Hale Getirilmesidir	Aykut: Bana göre ispat... Bir teoremin bir soru üzerinde kullanılabilmesi için uygulanmaya hazır hale getirilmesidir. Çünkü bir soru çözümünde teoremleri kullanabilmemiz için onların doğrulanması gerekir. Doğrulama işini de ispatlar yardımıyla yaparız. İspatlar yapıldığında teoremlerin hem doğru olduğu anlaşılır hem de nasıl uygulanacağı anlaşılır. Nazlı: Bana göre ispat, daha çok benim bilmediğim kavramları daha net bir şekilde ifade edebilmek için kullanılan bir yöntemdir. İleride kavramları öğrencilere daha net bir şekilde meslek hayatım boyunca kullanacağımı düşündüğüm bir yöntemdir.
Kavramlar Arasındaki İlişkiyi Aramaktır	Hatice: İspat bana göre insanın bildiklerini kâğıda dökmesidir. Yani bir kişi bir konuda ispat yapıbiliyorsa o kişi o konuyu öğrenmiş demektir. Artık o konuda belli bir seviyeye gelmiş demektir. Yani ispat bana göre matematik öğrenmede kilit rol oynamaktadır ve ispat yapan kişi konuyla ilgili birçok kavram arasında ki ilişkileri kurabiliyor demektir. Bu ilişkileri kuramayan birisi zaten ispat yapamaz.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının, matematiksel ispatın onlar için ne olduğu ile ilgili olarak, görüşlerinin altı farklı kategori altında toplandığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu ile ilgili görüşleri birbirinden farklı olmakla birlikte tamamen ispatın olumlu yönleri etrafında birleşmektedir. Buna göre; çalışmaya katılan öğretmen adayları çoğunlukla ispatın matematiksel ifadelerin doğrulanmasıdır (Ayhan, İbrahim, Ayfer) kategorisi altında toplanan görüşlere sahip oldukları görülmektedir. Bununla birlikte öğretmen adayları matematiksel ispat için, matematiğin rehberidir (Aysel, Büşra), sonuca ulaşmaktır (Hüseyin), beyin jimnastiğidir (Nermin), bilgilerin uygulanmaya hazır hale getirilmesidir (Aykut, Nazlı) ve kavramlar arasındaki ilişkiyi aramaktır (Hatice) kategorileri altında toplanan görüşlere sahiptirler.

4.1.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yükladıkları Anlamlar İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel ispatın ne anlam ifade ettiğini öğrenebilmek için onlara “*Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Ezber, Anlamlı/Kalıcı Öğrenme, Doğruluk, Merak, Kullanışlılık ve İlişki* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.2 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.2.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Anlamına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Ezber	Nermin: Mesela aksiyomlar veriliyor bize ve o aksiyomları ezberliyoruz... Çünkü onların ispatı yok mesela bildiğim kadarıyla... Yani aksiyomların nereden çıktığını bilmiyoruz, niye öyle bir kabul oluyor bilmiyoruz. Mesela tam emin değilim ama iki noktadan bir doğru geçer şeklinde ki bir aksiyom olduğunda neden bir doğru geçer bunu çoğu hoca da aslında açıklayamıyor ama biz bunları olduğu şekliyle ezberliyoruz ve bunlara göre de ispat yapıyoruz. Yani bunları mantık olarak kabul ediyoruz ve ona göre ispat yapıyoruz. Ayfer: Hmm... Kanıtlama yoluyla bir şeyin gerçek yönünü ortaya koymaktır. Aslında bana göre ispat sınavlarda derslerden geçmek için ezberlediğimiz bir şey açıkçası... Öğrenci olduğum için şu an öyle... Büşra: Bazı yerlerde çok gereksiz ispatlar yapıp beynimizi boş yere meşgul ettiğimizi ve ezberden öteye geçemediğimizi de düşünüyorum açıkçası...

Çizelge 4.2. (Devamı)

Anlamlı/Kalıcı Öğrenme	Nermin: Hmm... Bir şey anlam ifade etmiyor desem hocam... © Şimdi aslında lisedeyken bir formül bize veriliyordu... Üniversiteye geldiğimizde o formülün nasıl çıktığını, nereden geldiğini... Mesela türevin, limitin... Mesela türev alırken h sıfıra gidiyor neden böyle oluyor. Neden bir sabite, ya da sıfıra götürüyoruz bunların nereden geldiğini öğreniyoruz. Bu şekilde öğrendiğimizde daha anlamlı oluyor. En azından nereden geldiğini ne yaptığını bildiğin için ezber olmuyor. Aslında ispat yaparken bir şeyleri kabul ettiğimiz için yine ezber oluyor ama yine de daha anlamlı öğrenmiş oluyoruz. Büşra: Kimi zaman gerekli olduğunu düşünüyorum hocam... Mesela a kare eksi b karenin iki kare farkı olduğunu ben üniversitede gördüm. Yani görsel olarak bir küpün içerisinde bir kare çıkarıldığını gördüm. Bu şekilde öğrenildiğinde öğrenme daha anlamlı, kalıcı olabilir ve formülleri daha rahat öğrenebiliriz. Aysel: Eee... Bence öğretilen her bilginin açıklamasıdır. Yani nereden geldiğinin anlaşılması... Mesela bunu en iyi anladığım teorem ispatının en çok olduğu soyut cebir dersi oldu. Bana göre bu bölümün en zevkli dersi... Çünkü ilk başta da söylediğim gibi öğretilen her bilginin mutlaka bir açıklaması var. Mesela en basitinden “en küçük pozitif tamsayı 1 dir.” Neden 1 dir bunun çok güzel bir ispatı vardı. Hocamız yapmıştı ve benim çok hoşuma gitmişti. Nazlı: Matematiksel ispat... Belli bir konu üzerinde araştırma yapmak için ya da belli bir konu üzerinde verilmiş olan bilgilerin daha net bir şekilde açıklanabilmesi için gereklidir bence... Daha anlaşılır hale getiriyor... Soyut olan bir kavramın daha da somutlaştırarak anlatılmasını sağlayabiliyor.
Doğruluk	Ayhan: İspat... Yani hocam... Bana göre öne sürülen bir şeyin doğru olduğunu gösterme anlamına geliyor. Yani sonuç olarak bir sınıfta bulunan öğrencilere ya da matematikle uğraşanlara bir şeyin doğru olduğunun gösterilmesidir. Matematikle uğraşan bir ortamda bulunan herkesin herhangi bir ifadenin doğru olduğuna ikna edilmesidir. Hüseyin: Şimdi hocam... [Eee]... Sonuca ulaşmaktır. Matematikte kullandığımız bilgilerin doğruluğunu kanıtlamaktır. Aslında bu bilgilerin doğruluğu çok daha önceden gösterilmiş ama günümüzde de neyin nereden geldiğini ve insanların kafasındaki neden? Sorusunun cevabının aranmasıdır.
Merak	İbrahim: Matematiksel ispat... [eee]... Yani zamanında ortaya değişik hipotezler atılmış bilim adamları tarafından ve bunları ispatlama ihtiyacı hissetmişler... © Yani benim için araştırma, merak anlamına geliyor. Çünkü matematikçiler meraklı ve şüphecidirler bana göre o yüzden her şeyin altında yatan sebepleri araştırmak ihtiyacı hissediliyor. Matematikte şüphelerin ve merakın giderilmesi de ispat sayesinde oluyor.
Kullanışlılık	Aykut: Matematiksel ispat benim için önemlidir. Çünkü bir teorem bize bazı soruların çözümünde yardımcı olur. İspatı olmadığı müddetçe de o teoremi kullanmamız söz konusu olamaz. O yüzden matematiksel ispat benim için önemlidir. Çünkü teoremlerin doğru olduğunu göstermeliyiz. Doğru olduğu ispatlanamazsa teoremlerin soruların çözümünde kullanılamazlar. Özellikle geçen dönem aldığımız soyut cebir dersinde direk teoremin uygulaması şeklinde sorular karşımıza geliyordu. Bu tip sorularda teoremin çözümünde hangi yolları izliyorsak aynen soru çözümlerinde de kullanılıyordu. Yani teoremlerin ispatları olmadan o soruları çözmek söz konusu değildi.
İlişki	Hatice: Hmm... Matematiksel ispat bazen öğrendiklerimi dökmeme yarıyor. Yani hangi kavramı nerede kullanacağım hakkında daha iyi ilişki kurabiliyorum. Mesela ispatlara çalışırken falan aklımda bir şeylerin uyuşmasına yardımcı oluyor. Çünkü bir ispatı yaparken sonuçta başka şeyler de kullanıyoruz yani sadece ispatta teorem ifadesinde ki kavramları değil de başka kavramları da kullanıyoruz ve bu sayede aradaki bağlantıyı da kurmuş oluyoruz. Yani kavramlar daha net zihnimde oturmuş oluyor.

Matematiksel ispatın öğretmen adayları için ne anlam ifade ettiği ile ilgili olarak çoğunluğunun olumlu görüşe sahip oldukları görülmektedir. Özellikle çalışmaya katılan öğretmen adaylarının görüşleri, matematiksel bilgilerin anlamlı/kalıcı öğrenme (Nermin, Büşra, Aysel, Nazlı) kategorisinde yoğunlaşmaktadır. Buna göre öğretmen adayları genelde matematiksel ispatın bilgileri daha kalıcı ve anlamlı öğrenmede etkili olacağı yönünde görüş belirtmektedirler. Bununla birlikte öğretmen adaylarının görüşleri; ezber (Nermin, Ayfer, Büşra), doğruluk (Ayhan, Hüseyin), merak (İbrahim), kullanışlılık (Aykut) ve ilişki (Hatice) kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın anlamına yönelik görüşleri incelendiğinde iki öğretmen adayının (Nermin, Büşra) görüşlerinin birden fazla kategori içerisinde yer aldığı görülmektedir.

4.1.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Amacına İlişkin Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel ispatın amacının ne olduğunu öğrenebilmek için onlara “*Matematiksel ispat yapmanın amacı size göre nedir?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Doğruluk, Mantıklı/Anlamlı Öğrenme, Beklenti, Bütünlük, Merak ve Ezber* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.3 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.3.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Amacına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Doğruluk	Ayhan: Öğrencilerin kafalarında oluşabilecek soru işaretlerini ortadan kaldırmak amaçlı olabilir. [Eee] Bir ifadenin sözde kalmayıp aslında gerçekte doğru olduğunu öğrencilere ya da diğer kişilere göstermek amaçlı olabilir. Bu şekilde hocam, bu kadar... Aklıma gelenler bunlar... İbrahim: Amacı... [Biraz düşünmem lazım]... [Biraz gerildim☺]... İspat yapmaktaki amaç düşünceleri doğrulayabilmektir. Bununla birlikte ortaya atılan problemlerin doğrulanması ve bunları matematikçiler sadece kendisi içinde yapmıyorlar. Yaptıkları ispatları bilim insanlarına açıklıyorlar. Günümüzde ortaya atılan tezlerle yapmaya çalıştıklarını geçmişte bilim insanları birbirlerine gönderdikleri mektuplarla sağlayabiliyorlardı. Her ne şekilde yapılırsa yapılsın matematikte ispat yapmaktaki ortak amacın doğru bilgilere ulaşmak ya da doğruyu aramak olduğunu düşünüyorum. Büşra: Kavramların doğru olduğunu daha kolay kabul etmek olabilir. İspatı yapılan ifadelerin doğruluğu hakkında kafamızda çok fazla soru işareti kalmadığından ifadeler bizim için daha kullanışlı oluyor.

Çizelge 4.3. (Devamı)

Mantıklı/ Anlamlı Öğrenme	Nazlı: Amacı nedir... Eee... Matematiksel kavramların daha net ifade edilme şeklidir bence... Ya da matematiksel kavramların [eee... Nasıl söyleyeyim] uzun uzadıya anlatılmasındansa bunların daha kısa bir şekilde daha net bir şekilde ifade edilmesini sağlar. Öğrencinin daha net, daha kolay bir şekilde anlamasına yardımcı olur. Öğrencilere kavramların altında yatan sebeplerde ispatlar yardımıyla anlatıldığından ve ifade edildiğinden kavramların anlaşılmasının daha iyi olmasına yardım eder. Aysel: Bence ezberciliği... Ezberciliği... [Ne diyeyim bilemedim] Ezberciliğin önüne geçtiğini düşünüyorum. Ezbere dayalı öğrenilecek her bilginin önüne geçiyor. [Ne diyebiliriz başka ispatın amacıyla ilgili] Şöyle düşünersek bana göre bir şeyi kabul etmek daha zordur. Yani bilgilere anlayarak açılımlı bir şekilde ulaşarak öğrenmek bence daha faydalı olacaktır Hatice: Sonuç itibariyle matematik soyut bir bilim... Mesela ispat yaparken bu soyut şeylerin bu özelliğini ortadan kaldırmaya çalışıyoruz. Aslında ispat yaparken kavramları tamamen somutlaştırmıyoruz ama ispatı yapınca kullanılan kavramların nereden geldiğini anlayabiliyorsun. Dolayısıyla mantıklı bir açıklama yapabiliyorsun. Hani bazı bilgiler örneğin aksiyomlar falan ben bunların doğruluğunu kabul etme sebepleri üzerinde çok düşündüm. Yani biz bunları kabul ediyoruz ama neden bu... Neden başka bir şeyi kabul etmemişiz. Bu yüzden hani teoremleri ispatladığımız zaman ifade de geçen kavramın gerçekten var olduğuna inanıyorsunuz ve gerçekten var olduğunu kabul ediyorsunuz. Bu sayede kendi elde ettiğimiz bilgiler oluyor ve aksiyomlara göre daha kabul edilebilir bilgilere ulaşıyoruz.
Beklenti	Hüseyin: Sonuçta matematiksel kavramların doğruluğunu gösteriyoruz... Aslında bu sorunun cevabı bizim matematikten ne beklediğimizle de alakalıdır. Biz matematikten ne bekliyoruz? Böyle düşünüldüğünde matematiğin beklentilerimizi karşılaması gerekli ve bizi bir doyuma ulaştırabilmelidir. Bana göre ispatın amacı matematikten beklentilerimizi karşılamak ve bizi doyuma ulaştırmaktır.
Bütünlük	Hüseyin: Ayrıca ispatın başka bir amacı da matematiğin ileriye yönelik olarak gelişmesini sağlamaktır. Çünkü bir şeyleri bilmeden üzerine başka şeyler koyamayız. Bu yüzden ispat yaparak matematikteki bilgilerin temeli oluşturulur ve onların üzerine yenileri eklenerek bir bütünlük oluşturulur. Aykut: Sonuçta matematik bir bütün... Yani nasıl anlatayım... [Eee]... Her konu birbiriyle bağlantılı... Şimdi ispatı olmayan bir teoremin uygulaması yapıldığı zaman eğer teorem ifadesi yanlışsa yani ispatlanmamışsa matematikteki bütünlük sağlanamaz. Matematikte bu şekilde bir yerde kopukluk başladı mı tamamen bozulur. Matematik bir bütün olduğu için eğer matematiğe bir şey eklemek istiyorsak önceki bilgilerle uyumlu olması gerekir. Eğer yanlışsa uyumlu olması zaten söz konusu değil... O yüzden bilgilerin ispatlanması gerekir. Aysel: Bana göre ispat yaparak ilerlemek matematik yapabilmenin gereğidir. Çünkü matematiği bir bilim yapan şey ispattır. İspat yapmadan matematiksel bilgilerin doğruluğuna ulaşamaz ve bilgilerin güvenilir olduğunu hiç kimseye anlatamayız, aktaramayız. Tamamen kabullerle matematik ilerleyemez ve aktarılamaz. İspat yapmanın asıl amacı bence matematiğin sağlam bir disiplin olmasını sağlamaktır.
Merak	Nermin: Merakı gidermek olabilir... Yani verilen ifadelerin nereden geldiği olabilir... Yani matematik soyut olduğu için, hani somut bir şey olsa... İşte ne bileyim dünyanın yuvarlak olduğu falan gibi somut işlerle uğraşılsa mesela dünyanın şeklinin nasıl olduğunu merak ettiğimiz için ispat yapardık ama bizim alanımız soyut olduğu için biraz mantığımıza uydurmaya çalışıyoruz... Verilen ifadeler hani gerçekten mantıklı mı diye inceliyoruz belki de...
Ezber	Ayfer: Aslında onu da anlamış değilim... © Şimdi bize bir şeyi veriyorlar... Mesela herhangi bir konu için teorem ifadelerinde gerek şartı veriyor ve bunun böyle olduğunu ispatlayınız diyor. Bunu ispatlamaya ne gerek var ki onu zaten vermiş teorem ifadesinde yani... Aslında biz daha önceden bilinen bir şeyi ispatlıyoruz. Bu yüzden saçma olduğunu düşünüyorum fakat dersleri geçmek için ezberliyoruz. Belki ezber yeteneğimizin gelişmesini sağlıyor.

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın amacıyla ilgili genelde doğruluk (Ayhan, İbrahim, Büşra), mantıklı/anlamli öğrenme (Nazlı, Aysel, Hatice) ve bütünlük (Hüseyin, Aykut, Aysel) kategorileri altında toplanan görüşlere sahip oldukları görülmektedir. Bununla birlikte çalışmaya katılan öğretmen adaylarının görüşleri, beklenti (Hüseyin), merak (Nermin) ve ezber (Ayfer) kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adaylarından Aysel ve Hüseyin'in görüşleri birden fazla kategori içerisinde yer almaktadır.

4.1.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Önemine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel ispatın öneminin ne olduğunu öğrenebilmek için onlara “*Matematikte ispat yapmak size göre ne kadar önemlidir? Lütfen açıklayınız.*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İspatın Doğru Bilgilere Ulaştırma Rolü*, *İspatın Farklı Düşünmedeki Rolü*, *İspatın Önemsiz Yönü*, *İspatın Mantıklı/Anlamli Öğrenmeye Katkısı*, *İspatın Mesleklerdeki Rolü* ve *İspatın Günlük Yaşamla İlişki Kurma Rolü* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.4 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.4.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Önemine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İspatın Doğru Bilgilere Ulaştırma Rolü	Ayhan: İspat yapıldığında aslında kafamızdaki düşünceleri bir bakıma onaylamış oluyoruz. Yani kafamızda oluşan problemlerin kesin çözümünü bulmadır. Yani kafamızdaki ifadeleri net bir biçimde izah edebilmedir. Yani kafamızdaki bir şeyin doğru olduğunu kesinlikle onaylarız ve bu bilgileri öğrencilere net bir şekilde aktarabiliriz. İspat, öğrencilerin kavramlarla ilgili kafalarında oluşabilecek bu nedir? Nasıl böyle oldu? vb. sorulara cevap vererek onların zihinlerinde bu soruların cevaplarını somutlaştırmaktır. Bu yüzden yani düşünceleri somutlaştırabilmek için aslında ispat yapmak çok önemlidir. Yani matematikteki soyut ifadelerin somut olmasını sağlayabilmek içindir. İbrahim: Yani... Sonuçta bende bir matematikçiyim ve benim içinde ispat yapmak önemli... Anlatacağım şeyleri öğrencilerim sorguladığında yani bunu yazıyoruz ama neden? Şeklinde düşündüklerinde onlara cevap verebilmeliyim diye düşünüyorum. Bu nedenle öğrencilerin bu tarz soruları karşısında söylediğimiz şeylerin doğruluğunu onlara ispatlayabilmemiz ve gösterebilmemiz gerekir. Bu yüzden ispat önemlidir. Çünkü kavramlar ispat sayesinde bir zemine oturtularak akla ve mantığa uygun bir şekilde açıklanabilir.

Çizelge 4.4. (Devamı)

İspatın Farklı Düşünmedeki Rolü	Aykut: Kendi adıma konuşmam gerekirse... İlk zamanlarda ispatlar biraz sıkıntı gibi gelmişti... Sonuçta daha önce yapılmış, biz neden bunları ispatlıyoruz... Aynı şeyleri tekrar neden ezberliyoruz gibi düşünmüştüm. Ama sonraki yıllarda ispatları yaptıkça daha değişik ve farklı açılardan düşünme yönlerim gelişti. Normal bir soruyu bile ispatlarda uyguladığım yollarla çözüm yapabiliyorum. Olmayana ergi vs. yöntemlerini soru çözümlerinde de kullanabiliyorum. İspat bana farklı düşünme şekilleri ve değişik çözüm yolları düşünmemi sağladığı için önemlidir. Yani bana çok faydalı oldu diyebilirim.
İspatın Önemsiz Yönü	Büşra: Günlük hayatta kullanamayacağım bir ispatın yapılması bana göre çok saçma... Bana göre ispatların kullanım alanlarına önem sırasına göre sıralanması gerektiğini düşünüyorum. Çünkü ispatlar kullanılacaksa önemli, kullanılmayacaksa çok saçma oluyor. Ayfer: Şimdi bazı ispatlar önemlidir ama soyut cebir dersi için konuşursak çokta gerekli olduğunu düşünmüyorum. Çünkü yaptığımız ispatların tamamı daha önceden ispatlanmış. Tekrar aynı şey üzerinde neden yorum yapıyoruz ki... Yanlış olabilir ama öyle düşünüyorum hocam... © Belki de bize yanlış öğretildiği için ben böyle düşünüyorum. İspat bizlere ezbere dayalı öğretildiği için ben mesela bir soru geldiğinde bunu nasıl ispatlamalıyım diye düşünmüyorum. Kalıplara göre yapıyorum. Soru geliyor mesela ben bu soru için tamam şu yöntemden yapıyor diyorum. Bu yöntemler olmayana ergi, tümevarım ve ya tümdengelimdir diyorum ve bu şekilde ispatlıyorum. Bana göre bakış açımız dar...
İspatın Mantıklı/Anlamli Öğrenmeye Katkısı	Aysel: Bence çok önemli... Daha önceden de söylediğim gibi her bilginin nereden geldiğini mutlaka herkes merak eder... İspat yapıldığında bilgilerimiz daha mantıklı ve sağlam temellere oturduğundan daha iyi anlayabileceğimizi düşünüyorum. Belki de matematiğin hayatımızda var olduğunu görmemizi sağlaması olabilir. Hatice: Bence önemlidir. Çünkü ben kavramları çok irdelerim ve en ince ayrıntısına kadar öğrenmek isterim. Bir ifadeyi okuduğumda içerisinde geçen her kavramın nereden geldiğini anlamak isterim. Matematikte de bu söylediklerimi ispat yardımıyla yaptığımız için bence ispatlamak çok güzel... İspat sayesinde kavramların altında yatan sebepleri daha iyi öğrendiğimizi düşünüyorum. Çünkü matematiksel ifadelerin doğrudan aktarılması yerine ispatları verilerek öğretildiğinde daha iyi sahipleneceğimi düşünüyorum.
İspatın Mesleklerdeki Rolü	Hüseyin: İspat önemlidir ama hangi düzeyde... Eğer ileriye dönük eğer akademik anlamda yüksek lisans ve üzerinde yaptığımız ispatları faydalı bir şekilde kullanabiliriz ama bir lise öğretmeni için ne kadar önemlidir ispat bence tartışılması gereken nokta burasıdır. Çünkü lisede görev yapan bir öğretmen ispatı pek fazla kullanamaz. Yani bazı formüllerin nasıl çıktığını gösterebilir ama bizim lisansta yaptığımız birçok ispatı kullanabileceğini sanmıyorum. Bu yüzden şuan ki yaptığımız ispatlar aslında kişilerin hedefleriyle ilgilidir. Eğer akademik devam edecekse önemlidir ancak eğer öğretmen olacaksa çokta önemli değildir. Nermin: Bilmiyorum... Aslında eğitim sistemine bakarsak ispatın pekte bir önemi yok. Şuan öğreniyorum ama benim için önemli değil çünkü lisede öğretmen olduğumda kullanmayacağım. Ama ileride yüksek lisans, doktora gibi düşüncelerim olursa, ispat benim için önem kazanıyor. Yani seçeceğim işe bağlı olarak değişiklik gösterir. Nazlı: Hmm... Yani ilerideki öğretmenlik hayatımı düşündüğümde karşıma gelecek öğrencinin seviyesi muhakkak ki ilkökul öğrencisinin seviyesinden daha farklı olacak... Yani lise düzeyindeki bir öğrenciye de tutup ilkökuldaki gibi ifade edemem. Onlara daha soyut bir şekilde ifade etmem gerekecek... Eğer öğrenciler elle tutulur gözle görülür bir şey isterlerse onlara daha net bir şey söyleyebilmem için ispat yapmam gerekecektir. Bu şekilde onların sorularına cevap verebilmek için ispat yapmak önemli olacaktır.
İspatın Günlük Yaşamla İlişki Kurma Rolü	Büşra: Konusuna göre değişiyor hocam... Eğer günlük hayatta kullanabileceğim gerekli bir konuyla çünkü matematik günlük hayatın her alanında var yani bilen için... Eğer günlük hayatta kullanabileceksem o ispatı çok çok önemli...

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemine ilişkin görüşlerinin genelde matematiksel ispatın mesleklerdeki rolü (Hüseyin, Nermin, Nazlı) üzerine odaklandığı görülmektedir. Bununla birlikte adaylar, ispatın önemine ilişkin; ispatın doğru bilgilere ulaştırma rolü (Ayhan, İbrahim), ispatın farklı düşünmedeki rolü (Aykut), ispatın önemsiz yönü (Büşra, Ayfer), ispatın mantıklı/anlamalı öğrenmeye katkısı (Aysel, Hatice) ve ispatın günlük yaşamla ilişki kurma rolü (Büşra) kategorileri altında toplanan görüşler belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmen adaylarından Büşra'nın görüşleri iki farklı kategori içerisinde yer almıştır.

4.1.5. Öğretmen Adaylarının İspatlanması Gereken Önermelere Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının ispatlanması gereken önermelere yönelik görüşlerini öğrenebilmek için onlara “*Matematiksel bir ifadede ispatı gerektiren nedir?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Matematiksel İfadelerin Doğru/Yanlış Olduğunu Araştırmak*, *Zevk*, *Genellemeye Ulaşma Arzusu*, *Merak Duygusu* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.5 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.5.

Öğretmen Adaylarının İspatlanması Gereken Önermelere Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Matematiksel İfadelerin Doğru/Yanlış Olduğunu Araştırmak	Ayhan: Hocam... Aslında ispat yapmamıza sebep olan şey... Verilen ifadeyle ilgili biraz... Yani verilen ifade acaba doğru mudur? Yoksa yanlış mıdır? Acaba ben bunu doğru biliyor muyum? Bu ifade hakkında bilgim var mı? Şeklinde ki sorulara cevap aramak içindir. Yani kendimizi verilen ifadeyle ilgili bir bakıma ölçmek için ispat yaparız.
	Hüseyin: Bize verilen ifadelerin doğruluğundan tam emin olamadığımız durumlarda ispat yaparız. Eğer verilen ifadeden doğruluğunu anlayabiliyorsak o ifadeleri ispatlamayız. Mesela aksiyomlar bu şekildedir. İfadelerini okuduğumuzda direk aklımızda aksini düşündürecek bir açıkları olmadıkları için kabul edilir ancak teorem ifadelerinin ucu açıktır ve ispatlanmaları gerekir.
	İbrahim: Yani... Karşılaştığımız bir ifadede eğer muallâka kalan bir nokta varsa bu anlaşılmayan noktaların herkes tarafından anlaşılabilir bir hale getirilmesi gerekliliği hissettiğimde ispat yapma gereği duyacağımı düşünüyorum. Ayrıca her ne kadar biz yapmasak da matematikteki her kavramın ispatlanabileceğini düşünüyorum. Tabi bu ispatların yapılmasında bazı kabuller ele alınmalıdır.

Çizelge 4.5. (Devamı)

	Hatice: Yani soruya baktığımda şöyle düşünüyorsam... Eee... Soruya baktığımda daha önce öğrendiklerimle uyuyorsa ve mantığıma yatıyorsa ispat yapma gereği duymuyorum. Özellikle üniversiteye başladığımızdan beri birçok şey öğrendik ve bu öğrendiklerimizi derste hoca söylüyor ama neye dayanarak söylüyor. Sonuçta üniversitedeyiz ve bunun nereden geldiğini söylemesini bekliyorum açıkçası... Bunun dışında bazen direk soru kalıbı da ispat yapma hissi uyandırıyor. Çünkü bazen direk soruda ispatlayınız ve ya gösteriniz kelimeleri olduğunda ispat yapmamız gerekebiliyor. Ayrıca özellikle soyut cebir ve soyut matematik derslerinde soru çözerken çözüm içerisinde daha önceden kabul ettiğimiz bazı kavramların doğru olup olmadıkları hakkında şüphelendiğim oluyor ve bunları doğrulamaya çalışıyorum. En basit anlamda bazen bunları örneklerle doğrulamaya çalışıyorum.
	Aysel: İspatlamadığımız ifadeler genelde ilk bakışta aşık olan ifadelerdir. Bana göre doğru olduğunu tam olarak herkesin göremediği ifadeleri genelde ispatlarız. Ayrıca doğru olup olmadığını merak ettiğimiz ifadeleri ispatlarız. Mesela üniversiteye başlamadan önce $2 \times 2 = 4$ ifadesini ispatlama gereği hiç duymadım ama 1. Sınıfta bir hocamız bize bunu sorduğunda neden sorduğunu bile anlamamıştım. Üçüncü sınıfta bu ifadenin de bir ispatı olduğunu öğrendim ve aslında daha kalıcı bir şekilde neden böyle olduğunu öğrendim. Ayrıca öğrenilen bilgilerin daha zevkli öğrenilmesine yardımcı oluyor. Bu düşünceden yola çıktığımda aslında matematikteki her bilgi aslında ispatlanabilir.
Zevk	Nermin: Biraz şey olabilir hocam, zevk hani... Matematiğe ilgi duymak olabilir... Bazı insanlar mesela sayılarla uğraşmayı seviyor, birşeyler ortaya koymaktan hoşlanan insanlar olabiliyor. $2+2=4$ yapıyoruz ama neden 4 hani... Herhalde bazı insanların yaradılışından dolayı merak duygusu olabiliyor... © Ayrıca bir de tabi aldığım eğitimle de alakalı... Mesela biz üniversiteye gelirken ben açıkçası televizyonlardaki gibi olur diye hayal ediyordum. Mesela John Nejh in hayatını her matematikçi bilir... Ya da buna benzer çok film var. Yani bu filmleri izledikçe oradaki karakterler hep bir mantık arıyorlar... Niye böyle olmuş, niye şöyle olmuş diye... Ama üniversitede biz onu göremedik... Biraz körelttiğini düşünüyorum. Yani senin ilgi alanın varsa nedenini araştırıyorsun yoksa zaten pek umursamıyor insan... Sadece dersi geçecek kadar öğreniyoruz o kadar işte...
Genellemeye Ulaşma Arzusu	Büşra: Karşı tarafı tatmin edebilme duygusu mu acaba... Yani aslına bakarsanız verilen bir ifade de ispatı gerektiren şeyin ne olduğunu hiç düşünmemiştim. Bizlere ifadeler verilir ve sınavlarda ispatlayın denir bizlerde ispatı yaparız. Mesela aksiyomları düşündüğümüzde onların doğru olduklarını kabul ediyoruz... Ama teorem ifadelerini neden ispatlarız hiç düşünmedim... Şuan düşündüğümde de oldukça karmaşık geldi açıkçası... Yani aksiyom ve teorem ifadelerinin başında bunların aksiyom mu yoksa teorem mi olduklarını anlamakta oldukça zorlanabiliriz. Yani başında isimleri yazmasa hangisini ispatlarız hangisini ispatlamayız bunu anlamakta oldukça zorlanabiliriz. Ama bunlardan birinin doğru olduğunu kabul edip diğerinin doğru olduğunu göstermeye çalışıyorsak bunu göstermek gerekiyor zaten... Çünkü birinci için doğru, ikinci için doğru ama üçüncü için doğru olmayan şeyler de olabiliyor. Yani bu tip ifadelerde genellemeye ulaşabilmek için ispat etmemiz gerekiyor. Yani bunun için ispat ediyoruz, genellemeye ulaşabilmek için...
	Aykut: Matematik eğitimi-öğretimi sürecinde dikkatimi çeken genellikle zor ifadelerden ziyade en basit, en göz önündeki şeylerin ispatlandığını gördüm. Örneğin özel öğretim yöntemleri dersinde boş küme her kümenin alt kümesidir şeklinde bir ifade verildi. Aslında şöyle bir bakıldığında bu ifadenin ispatlanması gereksiz diye düşünebiliyorsun... Çünkü herkes bunu biliyor zaten daha neden ispatlıyoruz diye düşünebiliyorsun... Şimdi baktığımızda eğer bu tür ispatları yapabilirsek yani en basitlerini yapabilirsek zaten zor olanları da yapabiliriz. O yüzden bence yani bir teoremin ispatlanması noktasında en basitlerinin ispatlanması gereklidir. Ayrıca bir ifadenin ispatlanması için çok genel olması gerekir. Çünkü boş küme sadece bir kümenin değil her kümenin alt kümesidir şeklinde olduğunda ispat yapılmalıdır.

Çizelge 4.5. (Devamı)

Merak Duygusu	Ayfer: Hocam şimdi bana göre belli bir kural belli bir kalıp var o kalıba göre hareket ediyorum. Mesela bir cümle veriyor... Hani problem üzerinde olsa yaparım onu... Öyle olsa kendimde severim zaten uğraşmayı... Yani matematiksel bir ifade olsa ispatlamaya çalışırım hoşuma da gider. Mesela nasıl anlatayım onu... Mesela $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ olsun ve bunu ispatlayınız denilse... Bu ispatı yapmak hoşuma gider ve yaparım onu ama mesela düz bir cümle veriliyor ve bunu ispatlayınız deniliyor. Bunu neden ispatlarız bilemiyorum... Merak duygusu olabilir belki... Mesela buna örnek olarak en küçük asal sayı 2 dir denildiğinde bu ifadenin ispatını merak ettiğimiz için yapabiliriz. Acaba neden böyledir diye merak edebiliriz. Nazlı: Biraz da benim merakımdan kaynaklanan bir şeyden dolayı ispat... Mesela önceki yıl soyut cebir dersimizde ispatlarda önce teoremi anladığımda onu daha farklı bir şekilde anlamamı sağladı yani ispatı yaparken o yüzden ispat biraz da benim dürtülerimden kaynaklanıyor... İfadeleri ispat etmek benim merakımdan kaynaklanıyor diyebilirim.

Öğretmen adaylarının ispatlanması gereken önermelere yönelik görüşleri genel olarak, matematiksel ifadelerin doğru/yanlış olduğunu araştırmak (Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Hatice, Aysel) kategorisi altında toplanmıştır. Buna göre çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğu açısından ispatlar, matematiksel ifadelerin doğru ya da yanlış olduklarını göstermek için yapılmaktadır. Bununla birlikte, zevk (Nermin), genellemeye ulaşma arzusu (Büşra, Aykut) ve merak duygusu (Ayfer, Nazlı) kategorileri ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır.

4.1.6. Öğretmen Adaylarının İspat Yaparken İzledikleri Yaklaşımlara Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının ispat yaparken izledikleri yaklaşımları öğrenebilmek için onlara “Bir ispatı yaparken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İspatın Mantığı*, *İspat Yöntemi*, *Tatmin* ve *Önbilgi* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.6 da kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.6.

Öğretmen Adaylarının İspat Yaparken İzledikleri Yaklaşımlara Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İspatın Mantığı	Büşra: Eğer ispatın mantığını anlayamadıysam ben ispatı ezberleyemiyorum. İspatı anlayabildiysem yapabiliyorum. Anlayamadığımda o ispatı öyle kalıyor yapamıyorum zaten... O yüzden anlamam gerekiyor. Karşı tarafın beni o ispatı yaparken sebepleriyle beraber tatmin etmesi gerekiyor. Mesela ispat yaparken parantez içinde söylüyoruz x küçük eşit 2 diyoruz... İşte o x in 2 den küçük ya da eşit olduğu nereden geliyor... Bunları parantez içinde belirtiyorsa ben daha iyi anlıyorum. İspatlar bize öğretilirken bütün adımların bizlere anlatılarak yapılması gerekiyor. Aykut: Genelde en kısa yoldan ispatlamayı tercih ederim. Mesela bir teorem verilmiş değişik kaynaklardan bunun en kısa ispatı... Aslında kısıdan ziyade en mantıklısını diyeyim. Bazı kaynaklar 3, 4 tane öneri veriyor... Nasıl diyeyim... Aksiyom gibi düşünelim, öneri veriyor ve onlara dayandırarak ispat yapıyor. Bazıları ise direkt doğrudan yani çok fazla öneri sunmadan direkt teoremi ispatlayabiliyor. Ben bu ikinci söylediğimdeki gibi daha kısa ve anlamlı olanları tercih ediyorum. Nazlı: İspatı yaparken... Önce temelde bana verilen ifade ney onu anlamaya çalışıyorum... Daha sonra basamak basamak bunlardan sonuca nasıl ulaşabilirim ya da bunu daha kolay bir şekilde kendime nasıl anlatabilirim... Buradan yola çıkarak basamaklar şeklinde ispatı oluşturmaya çalışıyorum.
	Hüseyin: Genelde teorem ispatlarında belli başlı şeyler var... Yani teorem ifadesinden anlayabildiğimiz kadarıyla bazen ispatlar iki kısımlı olabilir, çift önerme olabilir... Bu sayede ispatı yaparken hangi yöntemi kullanacağıma karar veririm. Daha sonra o yöntemi kullanarak belli verilerle o yöntemi birleştiriyorum ve sonuca gitmeye çalışıyorum. İbrahim: İspat yaparken... Eee... Genelde bildiğim şeylerden yararlanmaya çalışıyorum. Mesela; tümevarım öğrendik ispat yaparken... Eğer problem tümevarıma uygunsa onu kullanmaya çalışıyorum. Eğer tümevarıma uygun değilse problem bir de olmayana ergi yöntemi var... Problemden geçenlerin tersini kabul edip tersinin doğru olmadığını göstermeye çalışıyorum. Eğer becerebilirim bunları yapmaya çalışıyorum... ☺ Yani ilk olarak yöntemimi belirlemeye çalışıyorum ve sonrada belirlediğim yöntemin gereklerini uygulamaya çalışıyorum. Nermin: Üniversitede öğrendiğimiz şekliyle söyleyecek olursam... Burada mesela tümevarım ve tümdengelim var... Bir de olmayana ergi metodu şeklinde üç metot gördük sadece sanırım... Derslerde bazen hocalarımız mesela olmayana ergi metoduyla yapılmış bir ispatı tümevarımla da yapabilir misiniz diye... Ben de bunları yapmaya uğraşıyordum ama olmuyordu... ☺ Bazen de o mantık nasıl oluyor diye düşünüyorum. Hani niye orada tümevarım kullanılıyor da olmayana ergi kullanılmamış diye... Aslında biz onu da biraz ezber olarak öğreniyoruz. Yani ispat yaparken ilk olarak yöntemi seçmeye çalışıyorum. Daha sonra verilenlere bakıyorum yani hipotezde bana ne verilmiş diye... Yani elimde olanları anlamaya çalışıyorum. Hatta orta okulda da yapardık, verilen, istenen, sonuç diye aynen onun gibi... Tabi burada bağlaçlarda önemli... Yani ifadede ise mi var yoksa ancak ve ancak mı var diye onları inceliyorum... Yani bu bağlaçlar yardımıyla ispatı tek taraflı mı yoksa çift taraflı mı yapacağıma karar veriyorum.
	Büşra: Zaten hocam en fazla kullandığım tümevarım... Tümdengelim ispatlarını fazla algılayamıyorum. O yüzden tümdengelim çok fazla kullanmıyorum. İlk düşüncem tümevarım kullanabilir miyim oluyor. İspatlarda ilk olarak hangi yöntemi uygulamam gerektiğini anlamaya çalışıyorum. Yöntemi belirledikten sonra basamak basamak ilerlemeye çalışıyorum.

Çizelge 4.6. (Devamı)

	Hatice: İspat yaparken... Eee... Eğer ifadede gösteriniz diyorsa genelde ilk olarak aksine kabul ederim yani kabul edelim ki böyle olmasın diye başlarım ve sonuçta ifadenin aksine ulaşırım ve böylelikle ispatı tamamlarım. Bunun dışında ispata verilen artık her neyse iki tane olsun diye başlarım. Genelde ispatları bu şekilde yaptık. Örneğin tekliğini ispatlayın denirse iki tane kabul ederek başlarım sonuçta eşit çıkıp çıkmadığına bakarım eğer eşit çıkarsa bir tane olduğu görülür. Ayfer: İspatın ifadesine bakıyorum... Mesela ispatta gerek şart var mı... Daha doğrusu önermenin bana ne söylediğine bakıyorum. Hipoteze bakıyorum ne diyor orada ona göre yöntem seçiyorum. Olmayana ergiyi seçiyorum ve ya başka bir yöntemi seçiyorum... Mesela tümevarım gerekliyse onu seçiyorum ve o şekilde yapıyorum. Bu ispat yöntemlerinin belli kalıpları var zaten... Olmayana ergi ise kabul edelim ki olmasın diye başlıyorum, tümevarım ise $n=1$ diyoruz işte kabul ediyoruz bu yöntemde de mesela... Daha doğrusu ezber yani... İfadeye bakıyorum ne var orada... Eğer gerek yeter şart diyorsa çift yönlü önerme onu yapıyorum, eğer işte sayısal olarak bir eşitlik varsa tümevarım yöntemini kullanıyorum. Sonra da yöntemleri kalıpları belli olduğu için onları uyguluyorum. Aysel: Aslında bu ispatlanacak ifadeye bağlı... Kimi zaman olmayana ergi, kimi zaman yeter şart... Yani verilen ifadede istenenle alakalı bence... Yani ilk olarak ifadenin gereği olan ispat yöntemini belirlerim. Daha sonra hangi ispat yöntemiyle daha kısa kolay yoldan sonuca ulaşabilirim ona göre işlemlerimi yaparım. İspat yöntemini belirlediğimde zaten ne yapmam gerektiği ve hangi adımları izleyerek sonuca ulaşacağımı da anlamış olurum.
	Ayhan: Bir ispatı yaparken öncelikle ispatın alt yapısını oluşturmamız gerekiyor. Mesela bir ispat başka bir ispat için gerekli olabilir. O yüzden de ispatın alt kısımlarını oluşturmamız lazım... Bunun içinde yapacağımız ispat hangi konuyla ilgiliyse o konunun anlaşılıp anlaşılmadığı ya da o konuda yapacağımız ispatla ilgili bilmemiz gereken özellikler varsa öncelikle onları aktarmamız lazımdır. Yani öncelikle ön bilgilerimize bakmalıyız ardından ispatı oluşturabiliriz.
Ön bilgi	Nermin: Birde verilen ifadede önceki bilgilerimi kullanabilir miyim ona bakıyorum. Başka... Bilgilerin birbirleriyle ilişkisi var mı ona bakarım. Mesela soyut cebirde bazı soruları tümevarımla ispatlıyorduk ama ispatı yaparken karekök bilginizin olması gerekiyor, üslü sayılar bilgin olması gerekiyor. Yani önceki bilgilerimle istenenleri nasıl bağdaştırırım onu incelerim. Aslına bakarsanız biraz bulmaca gibi bir şey yani...

Öğretmen adaylarının ispat yaparken izledikleri yaklaşımlar ile ilgili görüşleri genel olarak, ispat yöntemi (Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Hatice, Ayfer, Aysel) kategorisi altında toplanmıştır. Bununla birlikte, ispatın mantığı (Büşra, Aykut, Nazlı) ve ön bilgi (Ayhan, Nermin) kategorileri ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır. Ayrıca Nermin ve Büşra'nın görüşlerinin iki farklı kategori içerisinde yer aldığı görülmektedir.

4.1.7. Öğretmen Adaylarının Yaptıkları Bir İspatı Tamamladıklarını Nasıl Anladıklarına Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının bir ispatı tamamladıklarını nasıl anladıklarını öğrenebilmek için onlara “Bir ispatı tamamladığınızı nasıl anlarsınız?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İstenen İfadeye Doğru Bilgilerle Ulaşıldığında, İspat Yöntemine Göre ve Amaca/Sonuca Ulaşıldığında* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.7 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.7.

Öğretmen Adaylarının Yaptıkları Bir İspatı Tamamladıklarını Anlamalarına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İstenen İfadeye Doğru Bilgilerle Ulaşıldığında	Nermin: Sonuca ulaşırsam... ☺ Gerçi bazı sorularda ispatladığımız da yani sınavlara ezberleyip girdiğimiz için... Neden ispatı orada bitirdiğini anlayamıyorum. Ama ispatı ilk ben yapıyor olsaydım, kabul ettiğim şeyin doğru olduğunu gördüğüm anda bitirirdim. Ya da anlayabileceğim şekilde bir sonuca ulaşırsam, ama işte böyle olduğunda da bitmiyor bazen açıklamak gerekiyor. Mesela uzun uzun yazıyoruz hocam ve en sonuna da bunu böyle aldığımızdan dolayı şu çıktı ve dolayısıyla da ispat bitmiştir diyoruz. Mesela ispatın sonunda bir çelişkiye ulaşıyoruz ve bu bir çelişkidir diyoruz. Yani ilk başta kabul ettiğimiz şeye bağlı... Mesela $n=a$ diyoruz ama ispatın sonunda eşit olmadığına ulaşmaya çalışıyoruz işte buna ulaştığımızda aslında ispatı bitirmiş oluyoruz. Aysel: Sonuca ulaştınca... Tabi bunun içinde ispatta kullandığım ifadeleri kontrol ederek elde edebilirim. Yani kullandığım ifadelerin hepsini açıklamışsam ya da eğer kullandığım ifadeler başka bir teoremin sonucuysa bunları doğru kullanıp kullanmadığıma bakarım. Bir de ifadenin sonucunda istenen şey nedir ona bakarım ve istenene doğru bilgileri kullanarak, açıklayarak ulaşmışsam bana göre ispat tamamlanmış olur.
İspat Yöntemine Göre	Ayfer: Sonuç doğruysa tamamlanmış oluyor işte... ☺ Başta verilen ifadeye göre hipoteze göre doğruysa ispat doğrudur zaten... İspatı tamamlamada bir de tabii ki ispat yönteminin etkisi var. Eğer yanlış yaptıysak bilmek çok önemli... Mesela olmayana ergi ile çözülecek bir şeyi biz tümevarım ile çözersek olmaz yani karmaşık olur. Sonuca da ulaşamayız zaten... Dolayısıyla hangi ispat yöntemini kullanarak ispat yapılacağını bilmek önemli... Onu da her zaman yapamıyoruz açıkçası... Bazı sorularda ben hangi yöntemi kullanmam gerektiğini bilemiyorum. İbrahim: Bazen zorlandığımız oluyor aslında... Yani aslında burada da ispat yöntemleri bizlere ışık tutuyor... Mesela ispatı olmayana ergi ile yapıyorsam bakıyorum en sonda ilk verilen hipotezle çelişkiye ulaştığım zaman ispatı tamamladığımı düşünüyorum. Benzer şekilde tümevarımla ispat yaparken de aradığım sonucu bulduğumda... Yani $k+1$. basamağa ulaştığımda yani en baştaki ifade $k+1$ içinde aynı ise ispatı tamamladığımı düşünüyorum.

Çizelge 4.7. (Devamı)

	Hatice: Yani bildiğimiz ispat yöntemlerine göre adım adım ilerlediğimizde sonuçta ulaştığımız şey beklediğim gibi ise zaten ispat tamamlanmıştır. Aykut: Sonuca ulaştığım genelde bir iki ispat yönteminde rahat anlaşılıyor... Mesela çelişki bulma yönteminde falan... Çünkü çelişki direk ortaya çıkıyor ve dolayısıyla ispat bitmiştir diyebiliyoruz. Ancak doğrudan ispatı falan çok kullanmadığımdan biraz daha karışık olabiliyor. Yani kullandığım yöntem bu konuda bana çok yardımcı oluyor. Yöntem açık olduğu zaman sonucu da açık oluyor
Amaca/Sonuca Ulaşıldığında	Nazlı: Yani ben ispatlarda genelde sonuca ulaştığım zaman kavrama ulaştığımı ifade edebiliyorum. Mesela ispatı verilen teoremleri anlamadığım zaman ispatlarının en son ifadesinde, sonuçla verilen ifadeyi karşılaştırdığım zaman gerçekten buna ulaştığımı anlayabiliyorum. Ayhan: Sonuçta ispatı kendimiz yaptığımız için kafamızda evet bu ispat bitti düşüncesi oluştuğunda ispat bitmiştir. Yani benim bir ifadede ispat yapmamı gerektiren amaca ulaştığımda ispat bitmiştir. İspata başladığım andan itibaren ispatlayacağım şey zaten bellidir. Dolayısıyla o sonuca ulaştığımda ispat tamamlanmış olur. Hüseyin: Evet bir de onu anlaması var... Anlamakta biraz problem olabilir, onu yaşayabiliriz şu aşamada... Yani bizim öğrendiğimiz teoremler ve ispatları var. Biz bunların hocalarımızdan öğrendiğimiz gidiş yöntemine bakıyoruz ve bize verildiği şekliyle öğreniyoruz. Bu tip ispatlarda sonuç zaten belli oluyor. Ancak şu an kendimiz bir soruyla veya teoremlerle karşılaştığımızda tamam bunun ispatı bitmiştir demek benim için zor olabilir. Yani bunu göstermede sıkıntı yaşayabileceğimi düşünüyorum. Büşra: İstenilen sonuca ulaştığım zaman... Yani baştaki veriler zaten belli... Mesela ifade de şu şuyse şöyle olur şeklinde... Buradaki sonuçtaki ifadeyi elde etmişsem ispat tamamdır diyorum. Bunu anlamada da kullandığımız ispat yöntemlerinden çok basamaklar önemlidir. Yöntem ispatın tamamı için geçerli olan bir şey ama sonuca ulaşmak için basamaklar, geçmiş bilgiler, konuyla ilgili matematiksel terimler daha önemlidir diye düşünüyorum.

Öğretmen adaylarının yaptıkları bir ispatı tamamladıklarını nasıl anladıkları ile ilgili görüşleri genel olarak, ispat yöntemine göre (Ayfer, İbrahim, Hatice, Aykut) ve amaca/sonuca ulaşıldığında (Nazlı, Ayhan, Hüseyin, Büşra) kategorileri altında toplanmıştır. Bununla birlikte, istenene doğru bilgilerle ulaşıldığında (Nermin, Aysel) kategorisi ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır.

4.1.8. Öğretmen Adaylarının Yapılmış Bir İspatın Doğruluğunu Değerlendirirken Dikkat Edilmesi Gereken Hususlara Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının yapılmış bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken dikkat ettikleri hususlara yönelik görüşlerini öğrenebilmek için onlara “Matematiksel bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken nelere dikkat etmek gerekir?” sorusu

sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İspatın Amacını İncelerim*, *İspat Adımlarını İncelerim*, *Yöntemini İncelerim*, *Dilini İncelerim* ve *Kavramlar Arasındaki İlişkiyi İncelerim* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.8 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.8.

Öğretmen Adaylarının Yapılmış Bir İspatın Doğruluğunu Değerlendirirken Dikkat Ettikleri Hususlara Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İspatın Amacını İncelerim	Ayhan: Öncelikle yapılan ispatı, ispat yapılan konuyla bağdaştırmaya çalışırım. Acaba düşündüğüm gibi mi yoksa farklı bir yoldan mı ispatlanmış incelerim. Bunun yanında yapılan ispatın amacına uygun olup olmadığını incelerim. Bunu yapabilmek için yapılan ispatın pratikte bir örnek soru üzerinde doğru olup olmadığını görmeye çalışırım. [Yaklaşık 30 saniye düşündükten sonra]Şu an aklıma gelenler bu şekilde hocam... Nazlı: Öncelikle verilen ifadelerden yola çıkarak mı gitmiş yoksa kendi düşüncelerinden faydalanarak mı ispata gitmiş ona bakarım... Bir de basamaklarda atlama olmuş mu ya da öğrenciye kavraturken bunun kendisi ifade etmeden bir basamağı atlayıp burayı öğrenci kendisi anlar düşüncesiyle mi gitmiş ona bakarım...
İspat Adımlarını İncelerim	Hüseyin: Kullandığı şeyler daha çok... Teoremin içeriğinde mesela p ise q önermesini almış ve bu önermeyi neyi takip ederek adım adım ilerlemiş ve sonuçta ne elde etmiş ona bakarım. Adımlarda bir hata olup olmadığını incelerim. Sonuçta da yapılan işlemlerde hata olup olmamasına göre ispatı değerlendiririm. İbrahim: Adımlarını takip ederim... Tek tek neyi nasıl yapmış diye bakarım... Eğer kendimce bir yanlış görmüyorsam ispatın doğru olduğunu düşünürüm ama belli bir adımda çelişki ve ya aklıma yatmayan bir şey bulursam bunun doğru olup olmadığını bu konuda daha uzman kişilere sorarak değerlendiririm. Eğer bu söylediğim çelişkileri bulamaz isem ispatın doğruluğunu kabul ederim. Nermin: Düzgün matematiksel işlemler yapabilmiş mi ve işlemlerde hata var mı yok mu onları incelerim. Mesela hocam bazen kitaplarda ispat yaparken araya $+2$ ekleniyor diyelim bir eşitlikte... Bazen onun nereden geldiğini anlayamıyoruz. Bu tip durumlarda en baştan bakıyorum, en sondan bakıyorum ipucu vermemiş. Kafasına göre mi eklemiş yoksa ispatı kendine göre mi yönlendirmiş hiç orayı anlayamıyoruz mesela... Biraz açık olursa yani yaptığı her adım hakkında bilgi verilmesi gerekiyor. Eğer bu adımlarda bir hata yoksa ve bana da mantıklı gelirse ispatı kabul edebilirim. Ama özellikle de soyut cebirde bazı ispatlar doğru olmasına ve herkes tarafından kabul edilmesine rağmen bana çok mantıksız gelebiliyor. Bazı ispatlar da hep kabul üzerine yapılıyor... Bir çok şeyi kabul etmiş ve ispatı da hep onlar üzerine yapmış olabiliyor. Yani buradaki kabullerin nereden geldiğini bilmeden kabul ediyoruz... İnanç gibi bir şey oluyor aslında... Aysel: İspatı yapmaya çalışırken kullandığı yardımcı ifadelerin doğru olup olmadığına bakarım. Yazdığı ifadeleri nereden aldığına bakarım... Başka... Aslında dediğim gibi sonuca nereden ulaşmış ve sonuca ulaşmak için kullandığı aşamalara bakarım. Zaten eğer aşamaları doğru bir şekilde ilerletebilmişse ve buradan da doğru sonuca ulaşabilmişse... Eee aslında bana göre ispat yaparken daha çok aşamalar önemlidir. Sonuç çokta önemli değildir çünkü neye ulaşmak istediğin açık olarak teorem

Çizelge 4.8. (Devamı)

	ifadesinden bellidir. Dolayısıyla sonucu bir şekilde yazabiliriz. O yüzden ispatın sonuca ulaştıran adımları önemlidir. Zaten ispat yaparken bir aşamada hata yapılmışsa bu diğer aşamaların da hatalı olmasına sebep olacaktır. Bu yüzden ispatın bütün aşamalarında doğru ifadeler kullanılıp kullanılmadığını adım adım kontrol ederim. Nazlı: Yani ispatlara başlarken önce kavramlardan yola çıkılarak başlanır. Daha sonra da öğrenciyi mesela tümevarımla ispat yapıyorsam bu yöntemde önce $p=1$ verildikten sonra $p=k$ dan mı gidiyor. Ya da $p=1$ verildikten sonra aynı şartlar 2 içinde, 3 içinde sağlıyor mu ya da bunları direk atlayıp k için ifade ettikten sonra $k+1$ için mi ifade ediyor bunları incelerim.
	Nermin: İlk olarak bir yöntemine bakmak lazım... Ardından teoremden verilen ifade ile onun kabul ettiği ifade ne kadar tutarlı ona bakarım. Kabul ettiği şeyleri kullanabilmiş mi, gerçekten güzel ifade edebilmiş mi ona bakarım. Büşra: İlk önce yöntemini incelerim hocam, hangi yöntem kullanılmış... Sonra yönteme paralel olarak istenenle yapılan basamaklar ve sonucu ifadede istenen gibi mi bunları incelerim. Yani ispatına uygun mu yani ispatın içinde bir çelişki var mı onu incelerim. Verilen ifade ile yapılan ispat arasında bir tutarsızlık, zıtlık var mı ararım. Eğer ifade ile ispat arasında bir tutarsızlık varsa zaten kabul etmeyeceğim eğer yoksa kabul ederim.
Yöntemini İncelerim	Aykut: Öncelikle teoremi en ince hatlarıyla anlamaya çalışırım. Teoremi anladıktan sonra ispatta hangi yöntemi kullanmış ona bir göz atarım. Sonra ispatı elimden geldiğince anlamaya çalışırım... En ince ayrıntılarına kadar sentez ederim. İspatta atlattığı herhangi bir nokta var mı? Düşünce mantığı ne? Bu yoldan gidildiği zaman bu teoreme ulaşabiliyor mu? Bunları değerlendirmeye çalışırım. Hatice: Şimdi ilk olarak ispatı yaparken nelere dayanmış onları görmek isterim. İspatı direk kafasına göre değil de matematiksel ispat yöntemlerinden (mesela olmayana ergi, çelişki bulma vs.) hangisi ile yaptığını ve yöntemin özelliklerini kullanabilme durumuna bakarım. İkincisi ispatı yaparken mesela şu ifade şuradan geldi dediğimizde bunu kağıt üzerine dökmesi gerekir. Yani kullanılan kavramların ezbere değil de mantıklı bir bütün halinde sunulması önemlidir. Ayfer: Adımlara bakarım... [Eee]... Yöntemine bakarım... İlk olarak ifadeye bakarım eğer normal düz kalıp bir cümle ise ifadelerine bakarım. Daha sonra hangi yöntemi kullandığını bakarım. Bu adımlarda yazılanların hipotezle doğruluğunun onaylanmasını incelerim. Yapılan ispata göre verilen ifade ile istenen ifade arasındaki tutarlılığı incelerim.
Dilini İncelerim	Nermin: Güzel Türkçe kullanabilmiş mi ona bakarım, çünkü ispatta oda önemli diye düşünüyorum. Devrik cümleler mesela ispatı biraz yoruyor.
Kavramlar Arasındaki İlişkiyi İncelerim	Hatice: Kavramlar arasında kurulan ilişkilerin doğru olması gerekir. Kavramlar arasında geçişlerde bağlantı kurulabilmiş mi incelerim. Ayrıca yapılan ispatın birebir kitaplarda yazan ispatlarla aynı olmasını beklemezdim. Kişinin kendisinden bir şeyler katması da tabi doğru olduğu sürece aslında benim için önemlidir. Çünkü direk kitaplardaki ispatlar yapıldığında öğrencileri ezbere yöneliyoruz. Ezbere yapılan ispatların aslında çokta önemi yok bana göre... Öğrencinin kendi mantıklı cümleleri benim için daha önemli olurdu diye düşünüyorum. O yüzden sadece kitaba bağlı kalmadan matematiksel olarak mantıklı bir ispat benim için yeterlidir.

Öğretmen adaylarının yapılmış bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken dikkat etmeleri gereken hususlar ile ilgili görüşleri genel olarak, ispat adımlarını incelerim

(Hüseyin, İbrahim, Nermin, Aysel, Nazlı) ve yöntemini incelerim (Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer) kategorileri altında toplanmıştır. Buna göre çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğu, yapılmış bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken ispatın adımlarını ve yöntemini inceleyecekleri şeklinde görüş belirtmişlerdir. Bununla birlikte, ispatın amacını incelerim (Ayhan, Nazlı), dilini incelerim (Nermin), kavramlar arasındaki ilişkiyi incelerim (Hatice) kategorileri ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır. Ayrıca Nermin, Nazlı ve Hatice'nin görüşleri birden fazla kategori içerisinde yer almıştır.

4.1.9. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımlara Yükladıkları Anlamlar İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel tanımların ne anlam ifade ettiğini öğrenebilmek için onlara “*Matematiksel tanımlar sizin için ne anlam ifade eder?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Kavramların Anlamı, Matematik Dili ve Matematiğin Temeli* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.9 da kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.9.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların Anlamına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
	Ayhan: Matematiksel tanımlar... [Eee] Matematikteki konular hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlarlar. Neyin ne olduğunu... Yani bizim için ne anlama geldiğini, kavramların açık ya da kapalı olan özelliklerini tanımlar yardımıyla öğrenebiliriz.
	Hüseyin: Bir şeyin tanımını bilmeden onun ne olduğunu anlayamayız. Mesela fonksiyon diyoruz. Eğer tanımını bilmezsek bu sözcük bize hiçbir şey ifade etmez. Ayrıca fonksiyonun tanımını bilmeden bu kavramla ilgili olarak üzerine ne koyabiliriz ve neyi ilerletebiliriz. Matematikte bir kavramın tanımını bilmeden o kavramı hiçbir şekilde kullanamayız.
Kavramların Anlamı	İbrahim: Tanımlar da önemlidir. Çünkü neyin ne olduğunu daha çok tanımlar yardımıyla açıklıyoruz. Yani bilmediğimiz bir şeyi bildiğimiz bir şeye dönüştüren ve daha iyi anlamamızı sağlayan kavramlardır. Tanımlar matematikte hemen her şeyi vermiyor ama bir ön bilgi oluşturmamızı sağlıyor. Derslerde ilk olarak tanımları yapıyoruz ve daha sonra bu tanımlar üzerine özellikler oluşturuyor ve değişik teoremler görüyoruz. Bunları nasıl uygulayacağımızı da görüyoruz. Tanımlar işte tüm söylediklerimin temelini atan kavramdır diye düşünüyorum ve bu yüzden oldukça önemlidir.

Çizelge 4.9. (Devamı)

	Hatice: Tanımlar matematik için oldukça önemlidir. Çünkü ders çalışırken falan direk tanıma bakarak bir şeyin ne olduğunu hatırlıyorsun ya da öğreniyorsun. Ben kendi adıma birçok şeyi tanımlar yardımıyla öğreniyorum. Tanımları öğrendikten sonra zaten o kavramın özelliklerini öğrenmiş oluyorsun ve daha sonrasında da soruları çözebiliyorum. Genelde derslerimizde konularla alakalı başlıkları atıyoruz ve ardından kavramın tanımı verildiğinde artık kavramın ne olduğunu tanımı okuduğumuzda öğrenebiliyoruz. Ayrıca zaten tanımlar kısa, net ve anlaşılır oluyor. Bu yüzden de benim için daha anlaşılır oluyor. Nazlı: Aslında matematiksel tanımları anlamadan öğrenci hiçbir şekilde o kavramı anladığını zannetse de ya da bir konuyu anladığını zannetse de o tanım hakkında hiç bir şey bilmiyorsa yani tanımı tam olarak anlamadıysa bence o konu mutlaka bir yerde çatlak verecektir. Yani öğrenci tam olarak o konuyu kavramış hale gelmeyecektir. Kısacası matematikteki bir konuyu tam olarak kavratan şey tanımlardır. Nermin: Mesela bizler konuşurken her bir kelimenin anlamını bilmezsek cümle kuramayız. O yüzden matematikte de terimlerin anlamlarını bileceğiz ki hani bir soru verildiğinde mesela n doğal sayı ve ya sayma sayısı denildiğinde ben doğal sayı ile sayma sayısı arasında ki farkı bilmezsem n için hangi değerleri verebileceğimi bilemem. Aslında matematik için tanımlar trafik işaretleri gibidir. Bir yolda ilerleyebilmek için trafik işaretlerinin hepsinin anlamını bilmek lazım matematikte de aynı bir yoldan soruyu çözebilmek için kullanacağım bütün terimlerin anlamını bilmem lazım. Aykut: Tanımlar üniversiteye gelmeden önce gereksiz gibi geliyordu... ☺ Çünkü tanım yazılıyordu, sonra örneklerle geçiliyordu ve örnekler üzerinde çalışıyorduk... Fakat tanımların teoremlerden daha da öncelikli olduklarına karar verdim. Çünkü bir soruyu çözerken o konuyla ilgili tanımları en ince ayrıntısına kadar hakim olmak gerekiyor. Çünkü matematiksel tanımlar içerisinde geçen her, bazı, en az bir gibi kelimeler anlaşılmadan çözüm yanlış olabiliyor. O yüzden en ince ayrıntılarına kadar tanımların anlaşılması gerekiyor. Örneğin fonksiyonun tanımı... Değer kümesinde bir elemana gitmeli ve tanım kümesinde boşta eleman kalmamalı... Eğer bu tanımı en ince ayrıntısına kadar anlamazsak bir fonksiyon ifadesi geldiğinde bunun fonksiyon olup olmadığını bilmeden çözmeye kalkarsan sonuçta yanlışlıklar ortaya çıkıyor. Bu yüzden tanımlar çok önemlidir. Çünkü tanımlar çok iyi bilmeliyiz ki onların dışına çıkmadan sorular üzerinde matematik yapabilelim.
Matematik Dili	Ayfer: Matematiksel tanımlar önemli tabii ki... Çünkü herhangi bir şeye yanlış cevap bulabiliriz. Nasıl anlatayım onu... Tanımlar bir şeye verilen zihnimizde canlanan ilk isimler olduğu için bizler tanımı bilmediğimizde ne yapacaksak, hangi işlemi uygulayacaksak... Nasıl anlatayım... Mesela trigonometride bir problem çözerken eğer bazı terimleri bilmezsek sonuca gidemeyiz. Birbiriyle bağlantılı olan konuları işleyemeyiz. Algılamada zorluk çekeriz. Aslında bir yerde de tanımlar olmadan matematik yapamayız. Ya matematik hayatımızın her alanında var çok önemli bir şey ama matematikte ispatın çok önemli olduğunu düşünmüyorum. Aysel: Tanımlar... Matematiksel tanımlar bir derse başlanırken hani o derste kullanılacak öğrencilerin bilmediği mutlaka birçok ifadeler ya da sözcükler var. Bu ifadelerin açıklanması gerekiyor. Mesela soyut cebirde bir homomorfizm kavramı... Öğrenciler bu kavramla ilk kez karşılaştıkları için bunun tanımını vermeden homomorfizmi anlatmak mümkün değildir. İllaki matematiksel tanımına ihtiyaç var.
Matematiğin Temeli	Büşra: Bence matematiğin temelini onlar oluşturuyor hocam... Mesela geometride açıyı bilmeyen birisine açıyı nasıl anlatabiliriz ki... Bana göre matematiğin temelinde tanımlar vardır.

Öğretmen adaylarının, matematiksel tanımların ne anlam ifade ettiği ile ilgili görüşleri genel olarak, kavramların anlamı (Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Hatice, Nazlı) ve matematik dili (Nermin, Aykut, Ayfer, Aysel) kategorileri altında toplanmıştır. Bununla birlikte, matematiğin temeli (Büşra) kategorisi ile ilgili görüşe sahip bir öğretmen adayı da bulunmaktadır.

4.1.10. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların İspatlardaki Rollerine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının, matematiksel tanımların ispatlardaki rolünün neler olduğu ile ilgili görüşlerini öğrenebilmek için onlara “*Matematiksel tanımların matematiksel ispattaki rolü nedir? Bana bir örnek verebilir misiniz?*” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İspatlarda Sonuca Götürme Rolü, İspatı Şekillendirme Rolü, İspattaki Yol Gösterici Rolü ve İspatta Geçen Kavramlar Arasında İlişki Kurma Rolü* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.10 da kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.10.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tanımların İspatlardaki Rolüne Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İspatlarda Sonuca Götürme Rolü	Hüseyin: Bana göre tanımlar ispatlarda sonuca götüren kısımdır. Yani yazdığımız ifadelerden sonra şu tanımdan dolayı bu böyledir diyebiliriz. İspatlarda bu şekilde sonuca ulaşabiliriz. Örneğin iki fonksiyon birebir ise bileşkeleri de birebirdir teoreminin ispatında birebirliğin tanımını kullanmamız gerekir. Bu ispatı yaparken iki tane fonksiyon almamız gerekiyor ve bunlar birebir olmalı... Dolayısıyla bu ispatı yaparken birebir fonksiyon tanımını ispatın başlangıcında kullanmış olduk. Daha sonra ispatı ilerlettiğimizde iki fonksiyonu karşılaştırırız. Bu iki fonksiyon birebir ise şu özellikleri sağlamalıdır deriz ve buradan bileşke fonksiyona geçeriz. Son olarak bileşke fonksiyon içinde birebirlik araştırılırken bileşke fonksiyonun birebirlik tanımına ulaşmaya çalışırız. Dolayısıyla ispatın sonunda da tanımdan faydalanmış olduk. Büşra: Bence zaten matematikteki tanımlar olmasa ispatta olmaz. Mesela karmaşık sayılarla ilgili bir problem çözüyoruz KFT dersinde... Mutlak z nin onun eşleniğine eşit olmadığını bilmeyen birisi bu soruyu çözemez. Yani bizlerde bunları matematiksel bilgiden daha çok tanımlardan öğreniyoruz. Dolayısıyla bir ifadenin tanımını öğrendiğimizde o kavramın özelliklerine daha çok hakim oluyoruz. Tanımları öğrendikten sonra kavramları farklı farklı taraflara çekerek kendi düşünce gücünü geliştirebiliyorsun. Yani ispat yaparken tanımlardan yararlanıyorum ve tanımlar yardımıyla farklı düşünceler üretebiliyorum. Aysel: İspatların çoğunda tanımlar kullanılıyor zaten... Tanımlardan faydalanılıyor. Evet faydalanılıyor yani tanımlar ispatların çoğunda sonuca ulaşmamızı sağlıyor. Yine homomorfizme alakalı bir örnek verecek olursak bu kavramla ilgili bir ispat yaparken yine bu kavramın tanımından faydalanıyoruz.

Çizelge 4.10. (Devamı)

İspatı Şekillendirme Rolü	Aykut: Eğer tanımları bilerseniz teoremlerin ispatları zaten kendiliğinden şekilleniyor. Çünkü ispat yapmak için bir şeyler bilmek gerekir. İspat yapılacak olan konunun ince hatlarının bilinmesi ispat için zaten çok önemli... Eğer bunlar bilinmezse zaten ispata başlanamaz. Şu an örnek olarak tam hatırlayamıyorum ama bu şekilde uygulamalar görmüştüm. Özellikle olasılıkla ilgili birkaç teoremin ispatında birebir tanımları kullanarak ve bazı kelime oyunları yaparak ispatların yapıldığını görmüştüm. İbrahim: Matematiksel tanımlar... Yani zaten ispatları yaparken tanımlar üzerine kurguluyoruz... Bu tanımları konu olarak mesela fonksiyonları tanım olarak görüyoruz... İşte tanımı budur şeklinde bizlere tanımlanıyor... Bizlerde teorem ispatlarında bu tanımlardan faydalaniyoruz... Yani tanımda geçen ifadelerden faydalaniyoruz ve tanım bu şekildeydi diyerek ispatı şekillendirebiliyoruz. Fonksiyonlar örneğini verirsem bazen ispatlara başlarken aslında ilk yaptığımız şey fonksiyonun tanımını yazmak oluyor ve bunun üzerine ispatı şekillendirmeye çalışıyoruz. Nermin: Mesela neyde kullanıyorduk, geçen seneden hatırlamaya çalışıyorum... Hocam mesela bir çemberin iç açısını ve ya yay uzunluğunu ispatlarken aslında formülün nasıl olduğunu biliyoruz ama mesela yay uzunluğunu ispatlarken açı kavramını bilmem lazım, onun tanımını bilmem lazım. Sonra çemberin iç açısının 360 derece olduğunu bilmem lazım. 360 sayısını bilirken doğal sayıları, tam sayıları bilmem lazım. Koordinat sistemini bilmem lazım. Yani ispatları yaparken hem farkında olarak hem de farkında olmadan birçok tanımdan faydalaniyoruz. Çünkü neyin ne olduğunu bilmeden ispat içerisine yerleştiremeyeceğimizden birçok tanım kullanıyoruz. Aynen konuşmada olduğu gibi, birçok kelimenin anlamlarını biliyoruz ve cümleleri kurarken çoğu kez anlamını düşünmeden kullanıyoruz. İspatlarda da kavramları yerleştirirken birçok şeyi yerleştirirken aklımızda aslında onları neden kullandığımızın cevabı var. Yani artık tanımlar iyi öğrenildiğinde nerede kullanılacakları bizim için bir refleks halini alıyor. Ayfer: İspat yaparken tabi kabul ediyoruz. Sonra diyoruz ki mesela p ve q asal olsun diye kabuller yapıyoruz. Bunlar ispat yaparken tanımlar bizlere adımlarda kolaylık sağlıyor. İspattaki adımların daha iyi işlemesine yardımcı oluyor. Nazlı: Önce ispatı anlatabilmek için ya da ispattan ifadeler sunabilmek için önce tanımın çok iyi bir şekilde verilmesi lazım. Yani matematiksel bir ifade olan ispatların [Nasıl ifade edebiliriz]... Tanımların da çok fazla ispat yapıldığı için anlaşılamayan şeyler olmaması gerekiyor. Bilindik kavramlardan yola çıkarak ispata ulaşmak gerekiyor. Burada ki bilindik kavramları da tanımlar yardımıyla oluşturabiliyoruz ama tanımları da yine bildiğimiz şeyler üzerine kurmamız gerekiyor. Yani tanımlar içerisinde de tekrar bir kavram kargaşasına yol açmamak için biraz daha bilindik kavramlardan yola çıkıp açıklanması gerekiyor. Mesela 2 den büyük asal sayılar her zaman tektir şeklindeki bir ifadeye bir ispat sunmamız için öncelikle asal sayı kavramının ne olduğunu bilmemiz gerekiyor ve çift sayılar kavramından da yola çıkarak hatta doğal sayıları da bilmemiz gereklidir. Bununla birlikte tek sayıları ve doğal sayıların nasıl tek ya da çift olabileceğini nasıl asal olabileceklerini bilmeliyiz. Dolayısıyla bu ispatı yaparken bir çok tanımdan faydalaniyoruz.
İspattaki Yol Gösterici Rolü	Ayhan: İspat yaparken bazen tanımlardan faydalaniyoruz. Yani herhangi bir ifadenin ispatını yaparken o ifade içerisinde geçen kavramların tanımları bize ne söylüyor, ne anlatıyor bunları görebilmeliyiz. İspat yaparken yazdığımız aşamalar içerisinde de eğer bir tanım kullanılmışsa hangi tanım olduğunu da belirtiyoruz. Bu açıdan bakıldığında tanımlar ispat yapmanın bir ön koşulu gibi oluyor. Bazen ispatları tanımlar yardımıyla oluşturuyoruz. Bu sayede tanımlar yardımıyla teorem ispatları yapabiliyoruz. Tanımlar açıklayıcı olduklarından dolayı hangi kavramı kullanıyorsak o kavramı kullanma nedenimizi tanımlar sayesinde açıklayabiliyoruz. Yani tanımlar ispat yaparken bizlere bir nevi yol gösterici oluyor.

Çizelge 4.10. (Devamı)

İspatta Geçen Kavramlar Arasında İlişki Kurma Rolü	Hatice: İspat yaparken zaten kavramlar arasında bir ilişki kurmaya çalışıyoruz. Aslında biz ispat yaparken bildiklerimizden yola çıkarak sonuca ulaşmaya çalışıyoruz. Bilinmeyeni bildiklerim yardımıyla arıyorum ve bu bildiklerim arasında da mutlaka tanımlar var. Çünkü bir kavramı açıklayabilmek için tanımına ihtiyacımız oluyor. Dolayısıyla ispatları yaparken de kavramları direk tanımlarını yazılarak ilerliyoruz. Bu tanımları bildiğimiz için ispatı daha rahat tamamlayabiliyoruz. Bazen sadece tanımlarda yeterli olmuyor, bazen başka teoremler, özellikler de kullanılabiliyor. Sonuç itibarıyla başka kavramlar da kullanılsa onların içerisinde geçen her ifadenin tanımına yine ihtiyaç duyuluyor. Çünkü bir kavramın tanımını bilmeden direk özelliklerini bilmek bana göre bir şey ifade etmez. Bununla ilgili örnek şuan aklıma gelmiyor ama tanımlar ispat için oldukça önemli diye düşünüyorum.

Öğretmen adaylarının, matematiksel tanımların ispatlardaki rolü ilgili görüşleri genel olarak, ispatı şekillendirme rolü (Aykut, İbrahim, Nermin, Ayfer, Nazlı) kategorisi altında toplanmıştır. Bununla birlikte, ispatlarda sonuca götürme rolü (Hüseyin, Büşra, Aysel), ispattaki yol gösterici rolü (Ayhan) ve ispatta geçen kavramlar arasında ilişki kurma rolü (Hatice) kategorileri ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır.

4.1.11. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki Farklara/Benzerliklere Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının, matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki farklar/benzerlikler ile ilgili görüşlerini öğrenebilmek için onlara “Matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki varsa farklar ve benzerlikler nelerdir?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *İspat ile Problem Çözme Arasındaki Benzerlikler ve İspat ile Problem Çözme Arasındaki Farklar* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.11 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.11.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki Farklara/Benzerliklere Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
İspat ile Problem Çözme Arasındaki Benzerlikler	Ayhan: Matematikte sorulan soruların bazıları zaten ispatlamayı gerektiren sorulardır. Bazen problem çözme ile ispatın ortak noktaları olabiliyor. Yani bazen matematiksel bir problemi ispat şeklinde de çözebiliriz. Matematiğin içerisinde bu tarz sorular var.
	Hüseyin: Öğrenim seviyesine göre değişebilir aslında... Lise seviyesinde örnek olarak çözülen tümevarım problemleri lisansta ispat olarak yapılabilir. Bu örnekte olduğu gibi birbirleriyle bağlantılı da olabilirler... Mesela bu soru lisede sorulsa bir problemdir fakat lisans seviyesinde olsa ispattır diyebiliriz.
	İbrahim: Hmm... Aslında bu iki kavram arasında farklar da var benzerlikler de var... Matematiksel ispat biraz daha böyle bildiğimiz şeylerle yapılıyor. Bazen de ispatları problem çözümlerinde kullanıyoruz ama her zaman kullanmıyoruz. Bazı problemler de ispatları çözümlerde kullandığımız oluyor. İkisi arasındaki benzerlik aslında şöyle ispat yaparken adım adım gidiyoruz. Soru çözümünde de çözüm aynı şekilde yapılıyor. Yani adım adım tek tek çözüyoruz soruyu ve çözüme ulaşıyoruz. Bu süreç hem ispat hem de problem çözümünde birbirine benziyor.
	Nermin: İspatla problem çözme arasında benzerlikler de var ama şu an aklıma gelmiyor... Benzerlik olarak şunu söyleyebilirim bazı ispatlarda aynen problem çözümlerinde olduğu gibi sayılarla yapılıyor. İşte bu sayılarla yapılan ispatlarla problem çözme benzerdir. Bunun dışında geometride iddia sebep şeklinde yaptığımız ispatlarda problem çözmeye benzerdir. Tümevarımla yaptığımız ispatlar daha çok problem çözme gibi oluyor.
	Büşra: Bunun yanında öyle ispatlar var ki bir satırda yapılan ve sadece matematiksel işlemler içeren ispatlar problem çözmeye benziyor olabilir. Bana göre ispatların işlemsel kısımları problem çözümlerine benzerdir ve bunun dışında da bir benzerliğin olabileceğini de düşünmüyorum. Yani ispatların işlemsel tarafları problem çözümüne benzerdir.
	Aykut: Problem çözmek... Mesela işçi havuz problemleri çözülürken tamamen mantık kullanılır. İşlemsel bilgi gerektirir. Ancak tabi problem çözümleri içinde yine problem ifadelerinin anlaşılması gerekir. Bana göre ispatlarla aralarında ki benzerlik budur. Her ikisini anlamadan yapamayız.
	Hatice: Benzer yanları oluyor. Mesela bazen problem çözerken teorem ispatlarından faydalanarak ilişki kurabiliyoruz. Ders çalışırken özellikle soyut cebirde eğer teoremin ispatı aklıdaysa problem çözerken ispatlarda kullandığımız şeylerden de yararlanabiliyoruz. Bazen bu şekilde bir benzerlikte olabiliyor.
	Ayfer: Bu ikisi arasında benzerlikte vardır tabii ki ikisi arasında... Problem çözümünde mesela ilk önce ifadeye bakarız... Problem çözmede daha çok problemi veriyor ve bizden sonucunu istiyor. Ama ispatta ifadeyi veriyor ve bu buna eşittir diyor...[Yine farklı yönlerini söylüyorum ama]... Eşitliğin doğru olduğunu göstermemiz isteniyor. Ayrıca bir problemde ispatı olabilir...
	Aysel: Benzerlik olarak ta belki her ikisinde de tanımlardan yararlanıyoruz. Ayrıca problem çözerken teoremlerden de faydalandığımız oluyor ama birebir birbirinin aynısıdır diyemeyiz. Her ikisi içinde benzerliklerde var farklılıklarda ama farklılıklar daha çok sanki...

Çizelge 4.11. (Devamı)

	Nazlı: Benzerlik olarak, aslında her ikisinde de bilinmeyen şeyler var... Hem ispatta hem de problem çözmede bilinmeyen şeyler var... Bu şekilde düşünüldüğünde hem ispatlarda hem de problem çözümlerinde bilinmeyenlerden yola çıkılarak bir sonuca ulaşma gayesi var, benzerlik olarak da bunu söyleyebiliriz.
	Ayhan: Aralarında ki fark ise, ispat sonuçta belirli bir kavramdır. Bazen matematik problemlerini aklımızdan geçen değişik fikirlerle çözebiliriz. Böyle düşünüldüğünde ispat problem çözmeye göre daha sınırlı bir kavram gibi geliyor. Çünkü problem çözerken genelde çözümlerde ispatları kullanıyoruz. Bu ise problem çözmenin ispatı kapsayan bir kavram olduğunu gösteriyor. Dolayısıyla problem çözme ispattan çok daha geniştir ve ispatı da içerir.
	Hüseyin: Problemler bir sayı problemi olabilir, yaş problemi olabilir... Bunların çözümü için denklem kurarız ama ispatta daha çok belli başlı olamayana ergi metodu gibi kalıpları kullanırız. Bunun yanında biraz önceki örnekte olduğu gibi birbirleriyle bağlantılı da olabilirler... Mesela bu soru lisede sorulsa bir problemdir fakat lisans seviyesinde olsa ispattır diyebiliriz.
	İbrahim: Hmm... Aslında bu iki kavram arasında farklar da var benzerlikler de var... Matematiksel ispat biraz daha böyle bildiğimiz şeylerle yapılıyor. Bazen de ispatları problem çözümlerinde kullanıyoruz ama her zaman kullanmıyoruz. Bazı problemler de ispatları çözümlerde kullandığımız oluyor. İkisi arasında ki fark ise, matematiksel ispatlar da daha fazla matematiksel ifade notasyon kullanılıyor ama matematiksel soru çözümünde notasyonlar biraz daha az oluyor. İspatlar daha kavramsal, soru çözümleri ise daha çok işlemsel oluyor diye düşünüyorum.
İspat ile Problem Çözme Arasındaki Farklar	Nermin: Problem çözerken sadece sonuca ulaşıyoruz yani sonuç bizim için önemli oluyor. Aynen ÖSS deki gibi yani... Mesela türev alırken üssü bir azaltıyoruz ve üssü katsayı olarak alıyoruz bunun nasıl olduğunu biliyoruz. Burada önemli olan mesela x yerine 1 yazıldığında türevinin sıfır çıkmasıdır. Sadece sonuca ulaşıyoruz. Ama ispatta o sonuca nasıl ulaştığımız önemlidir. Problem çözerken önemli olan sonuç iken ispat yaparken önemli olan süreçtir. Problem çözerken sonucumuz doğru olsun yeter ama ispatta en başta kabul ettiğim şey önemli, sonuçta bulduğum şeyle bağlantılı olması önemli... Yani sorunun tamamı önemli ispatta... İspatlarda bazen çift yönlü de çalışılabilir. Sonuçtan başa doğru ve baştan sonuca doğru olabiliyor ama problem çözme tek yönlü oluyor. Sadece baştan sonuca doğru ilerliyoruz. Problem çözerken çok fazla edebiyat kullanmıyoruz ama ispat yaparken edebiyat yapmamız gerekiyor.
	Büşra: Matematiksel problem çözme daha zevkli bence... Çünkü problem çözerken açıklanmaması gereken kısa yollar bulabiliyorsun ya da zaman kaybına neden olabilecek işlemleri atlayabiliyorsun. Ama ispatta her adımın açık açık yazılması gerekiyor. Çünkü bir adım gitti mi sonuca ulaşamayabilirsiniz. Sayfalarca boş yere işlem yapmış olabilirsiniz.
	Aykut: Aralarında farklılıklar da var tabii ki... Problemler daha çok işlemsel, ispatlar ise kavramsaldır. Problemde rakamlar, sayılar kullanılır. İspatlarda ise aksiyomlar, tanımlar gibi kavramlar kullanarak daha soyut bir şekilde sonuca ulaşılır.
	Hatice: Hmm... Şimdi ispat dediğimizde bazı şeyleri genellemiş oluyoruz... Yani ispat yaparken daha genel konuşuyoruz ama problem olduğu zaman sadece o probleme özgü çözüyoruz soruları bence ikisi arasındaki fark budur. İspat daha genel ama problem çözme daha özeldir.

Çizelge 4.11. (Devamı)

Ayfer: Şimdi ispatı herkes farklı şekilde yapabilir. Zihni açık olan bir insan, bakış açısı geniş olan bir insan her türlü her çeşit ispat yapabilir... Ama problem çözmede çözersin... Bana problem çözme daha nesnel gibi geliyor. Çünkü problem çözme de sonuç vardır. İspatta nesneldir ama herkes daha farklı şekillerde yapabilir. İspat daha çok yoruma dayalıdır. Genelde ispat kişiden kişiye değişik yollarla yapılır ama problem çözümleri daha birbirine benzer yollarla yapılabilir.

Aysel: Bence ispat yapmak daha çok teorik ama problem çözmede daha çok pratik bilgilerden yararlanıyoruz. Bunu bir fark olarak düşünebiliriz. Problem çözerken teoremlerden elde edilen bilgilerden faydalanarak daha çok pratik bilgilerden faydalanıyoruz. Teoremler daha çok teorik bilgileri oluşturuyor problem çözümleri ise bu bilgilerin bir nevi uygulaması oluyor.

Nazlı: Problem çözmede daha çok bilindik kavramlardan yola çıkarak sonuca ulaşılabilir ama matematiksel ispatlarda mutlaka bir öncesinin de bilinmesi gerekiyor. Yani ispat yapabilmek için somut bir şeyler elde etmek gerekiyor ki onun ispatı olsun ama problem çözmede bunun için somut bir ifadeye gerek yok bence... Yani daha önceden bildiğimiz şeyleri daha net bir şekilde açıklayabilmek için... Bunu öğrenciye empoze etmek içinde sorunun çözümü verilip direk geçilebilir ama ispatta bunlar mutlaka daha bir şeylerle ilişkilendirilerek sonuca varmak gerekiyor.

Öğretmen adaylarının, matematiksel ispatlar ile matematiksel problem çözme arasındaki benzerliklere yönelik olarak, her iki durumda da ortada bir problem durumunun olduğunu ve hem ispat yapıldığında hem de problem çözüldüğünde bu problemin ortadan kaldırıldığı ile ilgili görüşler belirtmişlerdir. Matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki farklara yönelik olarak, matematiksel ispatın genellemeye odaklandığını, kavramsal bilgi gerektirdiğini, matematiksel problem çözmenin ise işlemsel bilgi gerektirdiği ve öznel olduğu yönünde görüşler belirtmişlerdir.

4.1.12. Öğretmen Adaylarının “Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır” Düşüncesine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının, matematiksel problem çözme ve matematiksel ispat arasındaki ilişki ile ilgili görüşlerini öğrenebilmek için onlara ““Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Probleme Bakış Açısı*, *Problemin Türüne Göre Değişir*, *Süreç Olarak Aynıdır* ve *Problem Çözme İspat Değildir* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.12 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.12.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme İle Matematiksel İspat Arasındaki İlişkiye Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Probleme Bakış Açısı	Ayhan: Bu düşünceye sahip olan kişi bana göre her problem çözmeyi sanki bir şeyleri onaylamak gibi görüyor. Bana kalırsa her onaylamanın bir ispat olduğu düşüncesine sahip... Bu açıdan bakıldığında çözdüğü her problemi bir doğrulama olarak düşünürsek düşüncemiz mantıklı olur. Hüseyin: Sonuca götürüyor her ikisi de bizi... Yani istenen sonuca ulaşma çabası var her ikisinde de... Verilen bilgileri kullanarak bir problemin sonucuna ulaşmaya çalışmakta bir ispat olarak görülebilir. Yani ispatlanması gereken ifadelerin illaki teorem şeklinde olması şart değildir. İşte teoreminiz bu ispatı da bu şekilde olmayabilir her zaman... Bazen sorulan bir problemin çözümünü de bir ispat olarak düşünülebilir. İbrahim: Katılım aslında bu görüşe... Şöyle mesela; her problem sonuçta... Aslında ispatladığımız teoremlerde aslında bir problem... Yani bu problemlerin ne olduğunu ispat ediyoruz bunların... Çözdüğümüz sorularda da bir problemi ispat ediyoruz yani kullandığımız yol artık neyse bu sayede bir sonuca ulaşıyoruz. Bu şekilde düşünüldüğünde ortak yönleri olduğu görülebilir. Aykut: Az önce de bahsettiğim gibi benzer yönleri çok... Ancak bu görüşe biraz katılıyorum, biraz da katılmıyorum. Bana göre problem çözme ispata göre daha basittir. Teorem ispatları sonuçta daha zor ve herkesin yapamayacağı ve matematiksel olarak seviyenin daha yüksek olduğu bir iştir.
Problemin Türüne Göre Değişir	Aysel: Aslında doğru yanları da var ama her problem çözme bir ispat mıdır?... Eee... Hayır bence... Öyle problemler var ki sadece zihin geliştirmeyle ilgili yani... Ama bazı problemlerde tanımları kullanarak çözüyoruz özellikle de geometride... Mesela ikizkenar üçgenle ilgili bir problemi sadece ikizkenar üçgen tanımıyla çözebiliyoruz. Yaptığımız iş bir ispat yapmak mıdır? Bence bu problemde probleme değişir. Ayfer: Evet... Ama tam olarak böyle değildir. Çünkü her problem çözme bir ispat sayılamaz. Sana bir problemde bir eşitlik veriyorsa ve bunun doğruluğunun gösterilmesi isteniyorsa bu bir ispat olur. Ama bir problem verip de bunu çözünüz diyorsa onu ispatlamış olmazsınız çözmüş olursunuz. İspat daha çok kanıtama, tanıma anlamındadır. Dolayısıyla ispat ifadelerin doğru olduğunu göstermektir. Problem çözerken de doğru sonuca ulaşma var ama orada ispat yok... Bunun dışında her ikisinde de aynı süreç var aslında... Nazlı: Bazı kavramlar için evet bu doğrudur... Problem çözerken mutlaka önceki ispatlara dayanarak problem çözülebiliyor ama bu her kavram için geçerli değildir bana göre...
Süreç Olarak Aynıdır	Hatice: Aslında haklı olduğu yerler var... Doğru aslında biraz... Yani [eee] problem çözerken problem ifadesinde ne isteniyorsa aynen ispat yapar gibi onun doğruluğunu göstermeye çalışıyoruz. Bir nevi açıklamaya çalışıyoruz... Aslında ispat yaparken de teorem ifadesinin doğruluğunu göstererek açıklamaya çalışıyoruz. Bu yüzden her iki süreçte birbirine benziyor. Dolayısıyla bu görüşün haklılık payı var gibi geliyor bana... Büşra: Ya zaten bir şeyleri bildikten sonra problemleri çözebiliyoruz. Mesela bir havuz problemini çözebilmek için basamakları var ve bu basamakları işlettikten sonra çözüyorsun ve sonuca ulaşıyorsun ve istenilen bir şeye ulaşıyorsun. Bir teoremin ispatını yaparken de baştan verileri yazıyorsun ve şu ise diye devam edip bir sonuca ulaşıyorsun. Aslında bu bakış açısına göre bu görüş doğru yani... Bizler aslında matematiksel işlemlerle açıkladığımız için problemleri, çoğu zaman ispat diye almıyoruz. Ama ispatın işlemsel yönü göz önünde bulundurulduğunda bu görüş doğrudur.

Çizelge 4.12. (Devamı)

Problem Çözme İspat Değildir	Nermin: <i>Aslında problem çözerken onun sonucuna ulaşıyoruz o yüzden ispat olur mu bilmiyorum... Hocam mesela biz ispat yaparken mesela çarpımın türevi var diyelim... Çarpımın türevinde birincinin türevi çarpı ikinci artı ikincinin türevi çarpı birinci diye yazıyoruz. Biz ispat yaparken bu eşitlik bize veriliyor ve bunun doğru olup olmadığını araştırmamızı istiyor. Ama problem çözerken sadece eşitliğin bulunması isteniyor. Yani bütün problem çözümleri sonuca ulaştığından problem çözümlerinin tamamına ispattır diyemeyiz gibi geliyor. Problem çözerken bir sonuca ulaşıyoruz ve sonucumuz doğruysa doğru yanlışsa yanlış oluyor ama ispatta ulaştığımız her şeyin nedenini bulmak gerekiyor. Yani verdiğim örnekte neden birincinin türevini alıyorum da ikincinin almıyorum ya da arada neden + var da - yok gibi... O yüzden bütün problem çözmelere ispat diyemem herhalde...</i>

Öğretmen adaylarının, “*Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır*” görüşü ilgili görüşleri çoğunlukla, probleme bakış açısı (Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Aykut) kategorisi altında toplanmıştır. Buna göre çalışmaya katılan öğretmen adayları, matematiksel problem çözme ile matematiksel ispat arasındaki ilişkiyi probleme bakış açısı ile alakalı olarak yorumlamışlardır. Bununla birlikte, problemin türüne göre değişir (Aysel, Ayfer, Nazlı), süreç olarak aynıdır (Hatice, Büşra) ve problem çözme ispat değildir (Nermin) kategorileri ile ilgili görüşler de ortaya çıkmıştır.

4.1.13. Öğretmen Adaylarının “*Matematikte yapılan her ispat aslında problem çözme aktivitesidir*” Düşüncesine Yönelik Görüşleri İle İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının, matematiksel ispat ve matematiksel problem çözme arasındaki ilişki ile ilgili görüşlerini öğrenebilmek için onlara ““*Matematikte yapılan her ispat aslında problem çözme aktivitesidir*” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; *Problemler İspat Şeklinde de Çözülebilir, Süreç Olarak Aynıdır ve Her İkisinde de Problem Ortadan Kalkar* kategorileri altında toplanmıştır. Çizelge 4.13 de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Çizelge 4.13.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat İle Matematiksel Problem Çözme Arasındaki İlişkiye Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen Adaylarının Görüşleri
Problem İspat Şeklinde de Çözülebilir	Ayhan: Buna katılıyorum... Çünkü geçen senelerde soyut cebir dersinde hocamızda aslında buna benzer ifadeler kullanıyordu. Derste sorduğu problemleri istersem ispat tarzında çözebilirim diyordu. Bu açıdan bakıldığında bu düşünce de bir bakıma doğrudur. Hocamız öyle söylüyordu ispatı problem olarak problem olan bir soruyu da ispatlayabiliriz diye söylüyordu. Dolayısıyla bu iki kavram aşağı yukarı birbiri yerine kullanılabilir. Hüseyin: Evet... Bir bakıma bu da doğrudur. Yine verdiğim örnekten söyleyecek olursam o teoremin ispatını bir problem çözümü olarak ta düşünebiliriz. Yani bizim burada tanımlardan hareket etmemiz bir çözüm yapmadığımız anlamına gelmiyor. Yani bir problemi çözmek için illa sayısal veriler kullanmamız gerekmez. Tanım üzerinden ben bu problemi çözebilir ve bunu teorem olarak algılayabilirim. Bu açıdan bakıldığında bir ispat problem çözümü de olabilir. Nazlı: Bu biraz daha doğru gibi... Yani ispatta problemleri bir şekilde çözerek sonuca ulaşıyor ama problem çözmede her zaman ispat kullanılabilir düşüncesi bence daha yanlış gibi... Aysel: Evet buna katılıyorum... Yani çünkü ispat yaparken o çözüm aşamaları problemde... Yani problem çözerken ispata göre sanki daha basit yollardan gidiyoruz. Ya da kurallardan yararlandığımız ve artık bizim için daha aşina olduğumuz bilgileri kullandığımız için olabilir. Ama ispat yapmak daha zor gibi geliyor. Yani ispatı çözmek bana göre sanki daha zor bir problemi çözmek gibi geliyor. Aslında evet her ispat bir problem çözmektir ama daha zor bir problemi çözmektir.
Süreç Olarak Aynıdır	Hatice: Yani bana göre bu doğrudur... İlk söylediğimize göre daha net ve tamamen katılıyorum diyebilirim. Çünkü ispat yaparken nasıl yapacağım ne yapacağım şeklinde çözümü düşünüyoruz. Bu yaptıklarımızın aynısını problem çözerken de düşünüyoruz. Yani ben bu problemi nasıl çözerim falan diye düşünüyoruz. Ardından bu düşünceler sonucunda kafamızda bir şekilde çözümü tasarlıyoruz ve sonrada çözüme ulaşmaya çalışıyoruz. Aynı süreç ispatta da var... Yani hangi yöntemle yapacağımızı düşünüyoruz ve sonrada yine çözüme ulaşmaya çalışıyoruz. Bu sayede ifadenin doğru olduğunu gösteriyoruz. Bu şekilde düşünüldüğünde ispatlara problem çözümü gibi bakılabilir. Bazen mesela hocalarımız teorem ispatlarını bize problem olarak sorabiliyorlar. Bu yüzden bu görüşe daha fazla katılıyorum... İbrahim: ☺ Aynı adam mı söylemiş hocam... ☺ Aslında bu görüşte bana göre doğru... Yani sonuçta bir problem çözüyoruz. Teorem ispatlarında hani belli bir şeyi kabul ediyoruz ama bu kabulleri neden yaptığımızı ispatlamış oluyoruz. Başka bir deyişle ispatı yaparken aslında bir çözüme ulaşmış oluyor. Böylece yaptığımız ispatta bir çözüm olmuş oluyor. Özellikle tümevarımla yapılan ispatlar tıpkı bir problemin çözümünü aramak gibi oluyor... Bu görüş bana sanki bunu anlatır gibi geldi.

Çizelge 4.13. (Devamı)

Her ikisinde de Problem Ortadan Kalkar	Büşra: Eee... Bu da olabilir... Aslında bu şekilde hiç düşünmemiştim. Aslında doğru, çünkü ispat bir problemi ortadan kaldırmak için yapılan bir öneri... Hipotez nasıl ki bir probleme getirilen geçici çözüm ise ispat ettiğimizde probleme getirilen geçici çözüm ve biz bunun doğruluğunu kabul ettikten sonra aslında bir problemi de çözmüş oluyoruz. Sonuçta problemi genel anlamda düşündüğümüzde hem onu çözdüğümüzde, hem de ispatladığımızda biz o problemi ortadan kaldırmış oluyoruz. Ayfer: Eee... Öyledir yani... İspatı yaptığımızda problemi de çözmüş oluyoruz aynı zamanda... Ona artık biz problem de diyebiliriz. Mesela bir teorem ispatında biz teoremin ifadesini bir problem olarak da düşünebiliriz. Aykut: Bu biraz daha mantıklı gibi... Sonuçta ispat yaparken de önümüzde bir problem var ve onu çözeceğiz. Ama normal bildiğimiz problem çözme yollarından daha farklı bir şekilde yapılacak... Yani yöntemleri her ne kadar farklı olsa da her ikisinde de bir problem cümlesi var ve bunlar da çözüme ulaşmak amaçlanıyor. Burada yapılan işe odaklanılırsa ispat ile problem çözme hemen hemen aynıdır. Nermin: İspat yaptıktan sonra mutlaka bir sonuç buluyoruz ya hocam o yüzden olabilir... Bu görüş bana daha mantıklı gibi geliyor. Aslında problem çözme biraz test sınavı gibi ispat ise klasik sınavlar gibidir. Dolayısıyla ispatta süreç, problem çözmede sonuç önemlidir.

Öğretmen adaylarının, “Matematikte yapılan her ispat aslında bir problem çözme aktivitesidir” görüşü ilgili görüşleri çoğunlukla, süreç olarak aynıdır (Nazlı, Hatice, Aysel, İbrahim) ve her ikisinde de problem ortadan kalkar (Büşra, Ayfer, Aykut, Nermin) kategorileri altında toplanmıştır. Buna göre çalışmaya katılan öğretmen adayları, matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki ilişkiyi her iki kavram içinde benzer süreçler kullanıldığı ve her ikisinde de var olan problemin ortadan kaldırılması gerektiği ile ilgili görüşler belirtmişlerdir. Bununla birlikte, problemler ispat şeklinde de çözülebilir (Ayhan, Hüseyin) kategorisi ile ilgili görüşlerde ortaya çıkmıştır.

4.2. Kavram Anlamı ve Kavram İmajı ile İlgili Bulgular

Bu bölümde öğretmen adaylarının, ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramlarından ne anladıkları ve bu kavramlara yönelik kavram imajları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular öğretmen adaylarına göre ayrı ayrı betimsel bir şekilde sunulmuştur.

4.2.1. Ayhan'ın Durumu

4.2.1.1. İkili işlem kavramı

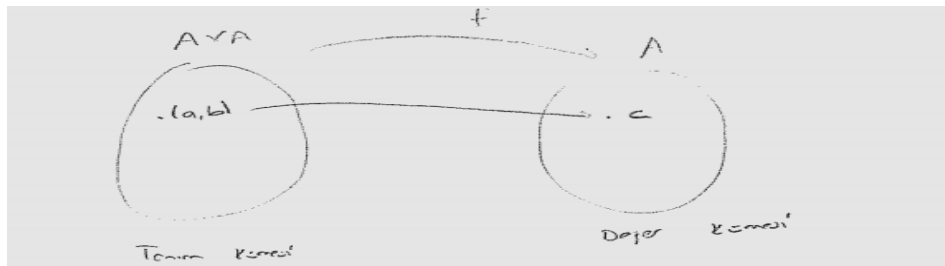
Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayhan: Burada işlemin tanımı bize aktarılmış... Yani burada $A \times A$ dan yani kartezyen çarpımdan A ya bir fonksiyon tanımlanmış. Buradaki fonksiyonu da ikili işlem olarak adlandırıyoruz. Tanımdan ilk anladığım ikili işlemin bir fonksiyon oluşu... O halde ikili işlem fonksiyon olma özelliklerini sağlamalıdır. Buna göre ikili işlem ilk olarak kapalılık özelliğini sağlamalıdır. İkincisi ise değer kümesinde mesela $a * b$ nin bir tane elemanı olmalı yani birden fazla olmamalı... Yani değer kümesindeki o görüntü bir tane olmalıdır. Yani tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir tane elemanı olmalı... Yani o görüntüsü bir tane olmalıdır.

Ayhan ikili işlem denildiğinde ilk olarak fonksiyon kavramını düşünmektedir. İkili işlemin özel bir fonksiyon olduğu yönünde görüş belirtmiştir. Buna göre ikili işlem; tanım kümesi $A \times A$ olan ve değer kümesi de A olan özel bir fonksiyondur. Yani tanım kümesini ikililer ve değer kümesini de A kümesinin elemanları oluşturmaktadır. Bu yüzden ikili işlem, fonksiyon olma özelliklerini sağlamalıdır. Ayhan'a göre fonksiyon olma şartlarından birincisi; ikili işlemin kapalılık özelliğini sağlamasıdır. İkinci özellik ise; tanım kümesinde ki her elemanın görüntüsünün bir tane olması şeklindedir. Dolayısıyla Ayhan, ikili işlem kavramının kapalı ve iyi tanımlı olması gerektiğinin farkındadır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.1. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayhan: [Şekli çiziyor]... Tanım kümesindeki elemanlar sıralı ikili şeklindedir. Burada bu f fonksiyonu bu sıralı ikiliden mesela c gibi bir sabite gidiyor. Yani tanım kümesi sıralı ikililerden değer kümesi ise sabitlerden oluşan bir fonksiyon ilk aklıma gelen...

Ayhan, ikili işlem ile fonksiyon kavramları arasında bir ilişki kurmuş ve bu ilişkiyi Şekil 4.1 deki gibi resmetmiştir. Buna göre Ayhan, ikili işlem kavramını fonksiyon kavramı imajı ile açıklamıştır.

4.2.1.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayhan: Bir kümenin her elemanının toplu olarak bu özellikleri sağlamasıdır. Yani bir kümenin elemanlarının tamamının bu özellikleri sağlamasıdır.

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık sizce neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Ayhan: Yani bir küme üzerinde bulunan bir eleman... [Eee]... Eğer kapalılık özelliği olmasaydı bu küme üzerinde bu işlemi yapamazdık. Burada tanımlanan işlemimiz zaten ikili işlem olduğundan biz kapalılık şartına bakıyoruz. Çünkü kapalılık olmasa idi ikili işlem olmazdı. İkili işlemin tanımı gereği kapalılık şartını sağlaması gerekir. Yani grupta kapalılık şartının olması ikili işleminden dolayıdır.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Ayhan: Eee... Birleşme özelliği için şu ana kadar hiç düşünmedim. Aklıma bir şey gelmiyor hocam.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Ayhan: Birim eleman bir elemanı yine kendisine eşleyen bir ifadedir. Yani $a * e = a$ ifadesinin anlamı nedir? Yani burada a elemanının etkisiz elemanla işleme girmesi sonucu yine kendisine götürür. Yani tanımlanan işleme göre herhangi bir etkisi olmayan elemandır. İsminden de anlaşıldığı gibi her elemanı yine kendisine dönüştüren ifadedir.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Ayhan: Ters elemanda bir elemanı etkisiz elemana dönüştüren ifadedir. Buradaki tanımdan hareket edersek $a * a^{-1} = e$ oluyor.

Mülakatçı: Güzel... Peki birim elemana ulaşmak neden bu kadar önemli olabilir? Matematikte biz bunu nasıl kullanabiliriz?

Ayhan: Hocam burada ters görüntü elde etmek için olabilir.

Ayhan, grup tanımından bir kümenin bütün elemanlarının grup şartlarını sağlaması gerektiğini anlamaktadır. Ayhan'ın düşüncelerini daha iyi anlayabilmek için araştırmacı tarafından grup şartları tek tek incelenmiştir. Kapalılık özelliği için küme üzerinde tanımlanan ikili işlemin tanımlı olabilmesi için sağlanması gerektiği cevabı alınmıştır. Çünkü bir küme üzerinde tanımlı ikili işlemin, kapalı olması gerekmektedir. Ayhan'ın kapalılık ile ilgili düşünceleri ikili işlemle alakalı olarak şekillenmiştir.

Birleşme özelliği için yöneltilen soruya cevap alınamamıştır. Çünkü Ayhan birleşme özelliğinin neden sağlanması gerektiğini daha önceden hiç sorgulamamıştır.

Aday birim eleman tanımını kendi cümleleri ile açıklamak istemiş ve birim elemanın bir elemanı yine kendisine dönüştüren ifade olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte ters eleman için de bir elemanı birim elemana dönüştüren ifadedir şeklinde cevap vermiştir. Ayrıca birim elemana ulaşma gayesini de ters görüntü elde edebilmek için olabilir şeklinde açıklamıştır. Ayhan mülakat esnasında verdiği cevaplardan kendisi de çok tatmin olmamış ve “Aslında bu özellikleri her zaman kullanıyoruz ama ne işe yaradıklarını şu ana kadar hiç sorgulamadım” şeklinde görüş belirtmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

$G = \{a, b, c, d\}$

.	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	d	a	c
c	c	b	d	a
d	d	a	c	b

$6 \times 6 \rightarrow 6$ yine bir G nin elemanıdır

Şekil 4.2. Ayhan'ın Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayhan: Yani hocam grup denildiğinde ilk aklıma elemanların bir arada olması geliyor. Daha öncede söylediğim gibi bir kümede bulunan elemanların belli şartları sağlaması aklıma geliyor. Yani ilk aklıma gelen bir küme oluyor. [Kağıttakileri yazıyor] ... Bir G kümesi $G = \{a, b, c, d\}$ elemanlarından oluşan... Mesela bu G kümesi üzerinde bir çarpma işlemi tanımlanmış olsa... Yani bu G kümesinin çarpma işlemine göre grup olması demek şu demektir; [Kağıttaki tabloyu çiziyor] ... Yani sonuçta bir işlem tanımlandığı için $*: G \times G \rightarrow G$ yine bir G nin elemanıdır. Bu yüzden grup içerisinde de yine alınan sıralı ikililerin yine G deki bir elemanla eşleşmesi söz konusudur. Yani grup içerisinde herhangi bir G kümesi üzerinde bir kartezyen çarpım tanımlayıp yine G deki bir elemanı elde ediyoruz.

Ayhan, grup kavramı ile ilgili kavram imajını bir küme ve bir ikili işlemden yararlanarak oluşturmuştur. Ayrıca küme üzerinde tanımlanan ikili işlemin kapalılığını ve oluşan cebirsel yapının bir grup belirtmesini, grup tablosundan yararlanarak bir örnek üzerinde göstermeye çalışmıştır.

4.2.1.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayhan: [Düşünüyor]... Hocam alt kümelerinde mesela bulundukları kümeden ayrı olarak yine bu grup aksiyomlarını sağladığını göstermek için olabilir. Yani bütün içerisinden bir parça alıp bu parçanın da bu özellikleri bütün gibi sağladığını göstermek olabilir.

Mülakatçı: Peki size göre bütünden ziyade küçük kümeler üzerinde çalışmanın ne gibi faydaları olabilir?

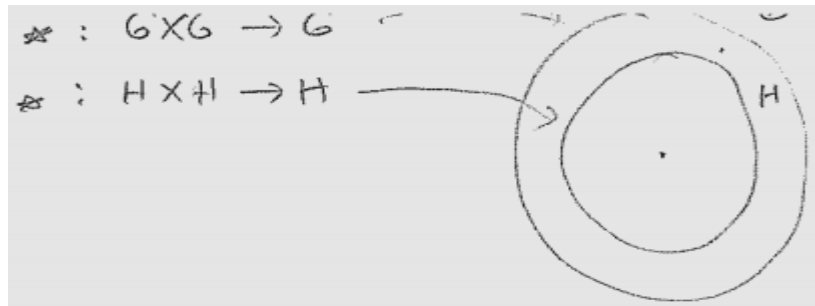
Ayhan: [Düşünüyor]... Aklıma bir şey gelmiyor ama matematiksel olarak bize kolaylık sağladığını düşünüyorum. Aslında hocam bu kavramların her biri birbiriyle bağlantılı ama neden alt gruplar var tam olarak bir şey gelmiyor aklıma... Yani bir ifadenin başka bir ifade yardımıyla betimlenmesi gibi bir şey aslında... Belki grupların oluşturulmasında alt gruplar belki de alt yapı sağlayabilir.

Ayhan, grup ve alt grup kavramlarının birbirleriyle bağlantılı olduğunu düşünmektedir. Bununla birlikte alt grup oluşturma amacının ne olduğu ile ilgili olarak

aslında tam bir düşünceye sahip değildir. Grubu oluşturan kümeden alınan bir alt küme üzerinde de grup şartlarının sağlatılmasının matematikçilere kolaylık sağlayabileceğini düşünmektedir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*



Şekil 4.3. Ayhan'ın Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayhan: *Hocam alt gruplar bana göre alt kümelere benziyor. Sadece özel bir alt küme olarak düşünebiliyorum. Mesela bir G kümesi ve onunda bir H alt kümesi zihnimde canlanıyor. [Kağıttaki şekil çiziyor]... Mesela hocam $*$ işlemi $G \times G \rightarrow G$ ye ve yine $*$: $H \times H \rightarrow H$ olsun. G kümesi ve onun bir alt kümesi olarak H kümesini alabiliriz. Burada H kümesi de G üzerinde tanımlanan $*$ işlemine göre bir gruptur.*

Ayhan, alt grup kavramına yönelik kavram imajını herhangi bir grup içerisinde alınan özel bir alt küme şeklinde geliştirmiştir. Buna göre $*$: $G \times G \rightarrow G$ ve $*$: $H \times H \rightarrow H$ şeklinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere H alt grup G ifadesinde, H ın G kümesine göre aynı özellikleri sağlayan özel bir küme olduğunu düşünmektedir.

4.2.1.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: *Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Ayhan: *Aslında grup homomorfizmi iki küme arasında tanımlanan bir fonksiyondur. Yani birinci küme üzerinde tanımlanan işlemle ikinci küme yani değer kümesi üzerinde tanımlı işlemle eşleyen bir fonksiyon işlevi görüyor.*

Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Ayhan: Bu şekilde tanımlanmasının sebebi işlemlerin birbirleriyle eşlenmesinden dolayıdır.

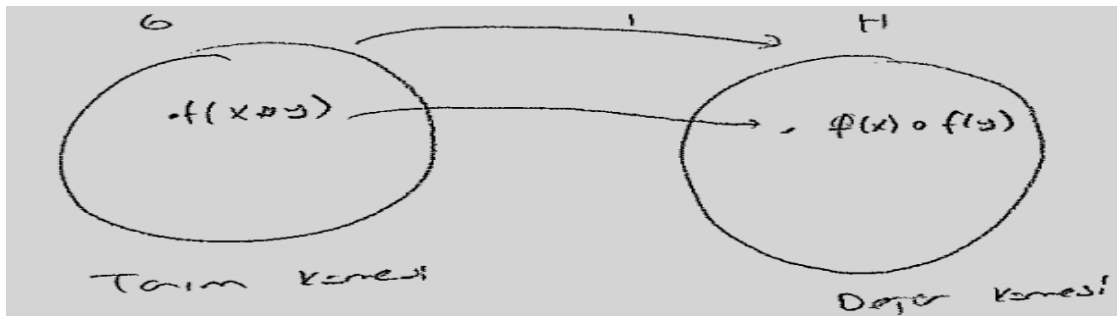
Mülakatçı: Peki o zaman tanım ve değer kümeleri gruplar olan dönüşümlere fonksiyon diyebilir miyiz?

Ayhan: [Düşünüyor] ... Evet diyebiliriz.

Ayhan, grup homomorfizmini, tanım ve değer kümesi gruplardan oluşan bir fonksiyon olarak düşünmektedir. Bu yüzden grup homomorfizminin gruplar arasındaki işlemleri birbirine eşleyebilme özelliğine vurgu yapmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.4. Ayhan'ın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayhan: Homomorfizm... G kümesini tanım kümesi ve H kümesini de değer kümesi olarak alırsak f fonksiyonunu G den H a tanımlayabiliriz. G kümesi üzerinde $*$ işlemi ve H kümesi üzerinde de o işlemi tanımlanmış olsun. G kümesi üzerinde $x * y$ elemanının görüntüsü de değer kümesinde $f(x) \circ f(y)$ şeklinde olur. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonuna bir grup homomorfizmi diyebiliriz. Burada G kümesi $*$ işlemine göre bir grup ve H da o işlemine göre bir gruptur.

Ayhan, grup homomorfizmi kavramı için fonksiyon imajına sahiptir ve bunu çizdiği şekilde açıklamıştır. Buna göre, tanım ve değer kümesi farklı işlemlere göre birer grup olan özel bir fonksiyon ile grup homomorfizmi kavramları arasında bir benzerlik kurmuştur.

4.2.1.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: *Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Ayhan: *Hocam vektörlerin uzayın herhangi bir noktasında bulunabileceğini gösterir. Yani uzayın her yerinde bulunabileceğini düşünebiliriz. Bir nevi öteleme gibi düşünebiliriz. Yani vektörler uzayın her yerinde tanımlı olabilir.*

Ayhan, vektörlerle ilgili olarak etkinlikteki tanımdan, vektörlerin uzayın herhangi bir noktasında olabileceğini ve vektörlerin uzayın başka noktalarına ötelenebileceğini anlamaktadır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*



Şekil 4.5. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayhan: *Vektör denildiğinde bir doğru aklıma geliyor. Bu doğrunun bir doğrultusu, yönü, ismi, başlangıç ve bitiş noktası olmalıdır. Ama başlangıç noktası belli bitiş noktası belli değildir. [Kağıttaki şekil çiziyor]... Başlangıcı belli olan $\vec{v}$ vektörü $+x$ yönünde olsun. Çizdiğim vektörün doğrultusu da yine $+x$ yönünde olur.*

Ayhan, vektörlerle ilgili zihninde oluşan imgeyi, Şekil 4.5 deki gibi çizmiştir ve vektörleri belli bir yönü, doğrultusu, ismi, başlangıç noktası olan doğru parçaları olarak tarif etmiştir.

4.2.2. Hüseyin'in Durumu

4.2.2.1. İkili işlem kavramı

Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Hüseyin: İki kümeden oluşan kartezyen çarpım kümeleri var... İki küme var... $A \times A$ şeklindeki bir kümeden alınan elemanların görüntüleri yine A kümesinde ise biz buna ikili işlem diyoruz.

Mülakatçı: Peki burada bahsedilen fonksiyonun tanım kümesindeki ve değer kümesindeki elemanlar nasıl elemanlardır?

Hüseyin: A nın elemanlarıdır...

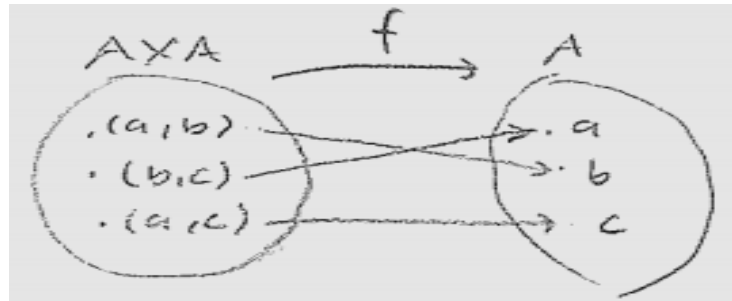
Mülakatçı: Peki tanım kümesindeki elemanlar ile değer kümesindeki elemanlar birbirinden farklı mıdır? Neden?

Hüseyin: Farklıdır... Tanım kümesinden aldığımız elemanlar ikili elemanlardır. Görüntü kümesindeki elemanlar ise tek elemanlardır.

Hüseyin, ikili işlem tanımını, tanım kümesini ikililerin ve görüntü kümesini de tekli elemanların oluşturduğu bir dönüşüm olarak yorumlamıştır. Buna göre tanım kümesi kartezyen çarpım kümesinden ve görüntü kümesi de kartezyen çarpımı oluşturan kümenin elemanlarından oluşturmaktadır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.6. Hüseyin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hüseyin: Şekil olarak düşündüğümüzde... [Şekli çiziyor] ... Tanım kümesini $A \times A$ olarak alalım... Burada A kümesinin elemanları $\{a, b, c\}$ olsun... O halde tanım kümesindeki elemanlar $(a, b), (b, c), (a, c)$... şeklinde olsun. Burada tanımladığım f fonksiyonu $A \times A$ kümesindeki sıralı ikilileri A kümesindeki sabitlerle eşleyen bir bağıntı ise buna ikili işlem diyebiliriz.

Hüseyin, ikili işlemle ilgili kavram imajını Şekil 4.6 daki gibi oluşturmuştur. Buna göre ikili işlem özel bir fonksiyon olarak değerlendirilmiştir. Hüseyin'in ifadeleri ve şekil incelendiğinde bir örnek üzerinden tanım ve değer kümeleri oluşturulmuştur. Tanım kümesi kartezyen çarpım ve değer kümesi ise kartezyen çarpımı oluşturan kümenin kendisi olarak seçilip tanımlanan f bağıntısı yardımıyla birbiriyle eşlenmiştir. Hüseyin'in kavram imajı, ikili işlem kavramının tanımını yansıtmaktadır.

4.2.2.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Hüseyin: Bir küme üzerinde bir ikili işlem yapmışız. [Eee]... Kapalılık ve birleşme özelliği... Birim eleman ve ters eleman özelliği bizim zaten ikili işlem özelliklerimiz... Yani bunlar ikili işlemde tanımladığımız özellikler... Aslına bakarsanız biz bu özelliklerin tamamını ikili işlemlerde tanımladık.

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Hüseyin: Kapalılık olmasaydı... Tanımladığımız yapıda, demek ki grup olabilmesi için tanımladığımız bir küme var ve bizim o kümenin dışına çıkmamız lazım... Yani o kümeden hareketle biz bir şeyleri oluşturuyoruz.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Hüseyin: Birleşme olmasaydı mesela bizim uyguladığımız ikili işlem değişirdi. Mesela birleşme özelliğine göre $a * (b * c) = (a * b) * c$ aynı sonucu vermeli... Bu özellik olmasaydı işlemin esnekliğinden yararlanamazdık. Mesela biz hep birim elemandan

yola çıkıyoruz. Mesela istediğimiz sonuca ulaşmak için sağdan soldan tersi ile işlem yapıyoruz. Birleşme özelliğini çoğunlukla oralarda kullanabiliyoruz.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz? Bu soruyu bir örnek üzerinde de düşünebilirsiniz. Mesela tamsayılar kümesi toplama işlemine göre bir gruptur. Bu grubun birim elemanı bu yapıya ne katar?

Hüseyin: Birim elemanı herhangi bir sayı ile topladığımızda aynı sayıya ulaşmak şeklinde tanımladığımız için, bir sayı ile 0 ı topladığımızda yine aynı sayıyı vermesi gerekir.

Mülakatçı: Peki bu durum bizim ne işimize yarar?

Hüseyin: İkili işlemi tablo şeklinde düşündüğümüzde de birim elemanı bulabiliyoruz ama bu bizim ne işimize yarıyor. Tablodan hareketle düşünelim... Genelde biz birim elemanı ters elemanı bulmak için kullanırız ama tersini bulmaya yarıyor dediğimizde de bir sonuca gidemiyoruz.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Hüseyin: Birim elemanın ne işe yaradığını anlayabilsek zaten ters elemanın da ne işe yaradığını bulmuş olacağız. Ama şuan için bir fikrim yok hocam... Yani hocam günlük yaşamla bağdaştırmak adına... Bilemiyorum... Mesela hocam doğal sayıların, tamsayıların nasıl oluşturulduğunu grup, halka ve cisimler yardımıyla ispatını yapmıştık. Onun dışında grup kavramını nerede kullanırız veya ne işimize yaradığıyla ilgili bir eğitim almadık açıkçası... Öğrendiğimiz kadarıyla verilen bu dört özelliği sağlayan kümeye gruptur diyoruz. Yani grupla ilgili olarak aklıma gelenler grubun bu şartları oluyor.

Hüseyin, grup tanımı ile alakalı olarak bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanan ikili işlemi düşünerek bir yorum yapmak istemiştir. Grup için gerekli olan özellikleri düşündüğünde ise aslında bu özelliklerin tamamının ikili işlemlerde tanımlı olduğunu hatırlamıştır. Bu özelliklerden kapalılık özelliği için kümeden alınan elemanların işlem sonuçlarının kümenin dışına çıkmaması için tanımlanabileceğini düşünmüştür. Bu özellik olmadığında kümeler yardımıyla yapılar kurulamayacağını vurgulamıştır. Birleşme özelliği olmadığı zaman tanımlanan işlemin esnekliğinden yararlanılamayacağını, birim eleman ve ters eleman bulmanın zorlaşacağını düşünmüştür. Bununla birlikte bir örnek üzerinde birleşme özelliğinde üç elemanın farklı şekilde işleme girmesinin sonucu değiştirmeyeceğini vurgulamıştır. Birim eleman

için de ters elemanı bulmak için kullanıldığını ve bir elemanla işleme girdiğinde sonucu etkilemediğini ifade etmiştir. Ters eleman için ise net bir cevap verememiştir. Çünkü ters elemanla ilgili soruya cevap verebilmek için birim elemanın net olarak ne işe yaradığının bilinmesi gerektiğini ve bunu da kendisinin bilmediğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*

Hüseyin: *Gruplar ne işimize yarar neye benzer şeklinde bir eğitim almadık... Grup denildiğinde ilk aklıma gelenler bir küme, bir ikili işlem ve bu ikili işlemin bu küme üzerinde sağlaması gereken dört şart oluyor. Bunun dışında zihnimde bir şey oluşmuyor.*

Hüseyin, grup kavramı ile ilgili olarak grup tanımı dışında bir kavram imajı oluşturmamıştır. Çünkü buna yönelik bir eğitim almadıklarını vurgulamıştır. Hüseyin, grup denildiğinde bir küme ve bu küme üzerinde tanımlı ikili işlemin sağlaması gereken dört özelliğin olması gerektiğini ifade etmiştir.

4.2.2.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: *Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Hüseyin: *Hocam aralığı küçültmek için olabilir. Bu sayede işlemlerin tanımlı olmasını garanti altına alırız.*

Mülakatçı: *Peki size göre küçük aralıklar üzerinde çalışmanın ne gibi faydaları olabilir?*

Hüseyin: *Aslında konuyla çok alakalı değil ama limitte, türevde falan aralıkları küçülttüğümüz zaman fonksiyonları o aralıkta tanımlayabiliyoruz. Buradaki amaçta sanırım bununla alakalı olarak düşünülmüş olabilir.*

Hüseyin, alt grup tanımı ile ilgili düşüncelerini analiz kavramları ile açıklamaya çalışmıştır. Buna göre alt grup tanımlanma sebebi ile ilgili olarak fonksiyonların tanımlı olabilmeleri için aralıkların daraltılması ile bir ilişki kurmaya çalışmıştır. Alt grup

tanımlanmasının işlemlerin tanımlı olmalarını garanti altına almak için yapılabileceğine vurgu yapmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*



Şekil 4.7. Hüseyin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hüseyin: *Zihnimde canlanan şöyle bir şey; bir tane küme seçiyorum ve bu grup içerisinde aynı özellikleri taşıyan daha küçük bir grup oluşturuyorum. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Burada $G, *$ işlemine göre bir grup olsun. Ben burada G nin bir alt kümesi olan H ı alıyorum ve H kümesi de $*$ işlemine göre bir gruptur. Yani burada G nin özelliklerini H ında taşıması gerekiyor.*

Hüseyin, alt grupla ilgili kavram imajını Şekil 4.7 de görüldüğü gibi alt küme kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Alt grubun, grup içerisinde alınan bir alt kümenin, tanımlı işleme göre grupla aynı karakteri sağlaması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Yani alt grup tanımında olduğu gibi, gruptan alınan herhangi bir alt kümenin gruptaki işleme göre bir grup olması gerektiğine vurgu yapmıştır.

4.2.2.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: *Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Hüseyin: *Tanımda iki tane grup almışız ve bir ϕ dönüşümü G den H a... Yani birinci gruptan ikinci gruba... Gruptan gruba bir dönüşüm tanımlıyoruz. Ama neden böyle bir şey tanımlanır daha önce hiç düşünmemiştim.*

Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Hüseyin: Hocam homomorfizmde birebirlik ve örtenlik vardı... Acaba onunla alakası olabilir mi? Yani homomorfizm tanımladığımızda birebir, örten ve sürekli olması gerekecek... Dolayısıyla tersi de sürekli olan bir dönüşüm elde edeceğiz.

Mülakatçı: Homomorfizm tanımına baktığımızda söylediğin özelliklerin olmadığını görüyoruz.

Hüseyin: [Düşünüyor]... Sanırım ben karıştırıyorum hocam... Yani hocam homomorfizm tanımlanma sebebi iki grup arasında ilişki kurmak olabilir. İlk grubu $*$ işlemine tabi tutabiliyoruz, ikinci grupta da bileşke işlemine göre elemanları tabi tuttuğumuzda elemanların eşdeğer olduğu ortaya çıkıyor. Belki de bir nevi elemanları karşılaştırıyoruz.

Hüseyin, grup homomorfizmi tanımı ile alakalı olarak iki grup arasında tanımlanan bir dönüşüm olduğunu ve ne işe yaradığı ile ilgili üzerinde daha önce hiç düşünmediğini ifade etmiştir. Araştırmacı ile kavram üzerinde konuşmalarının devamında ise, homomorfizm kavramı ile izomorfizm kavramını karıştırdığı da görülmüştür. Bunun üzerine araştırmacı tarafından sorulan sonda sorularla kavram üzerindeki düşüncesinin iki grup arasında ilişki kurmak ve gruplardaki elemanların karşılaştırılması için tanımlanabileceği şeklinde değişmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

Hüseyin: Yani hocam grup homomorfizmi denildiğinde sadece tanımı aklıma geliyor. Bunun dışında da zihnimde başka bir şey oluşmuyor hocam...

Hüseyin'in grup homomorfizmi tanımı ile bu kavram hakkındaki kavram imajı aynıdır. Çünkü grup homomorfizmi ile ilgili olarak zihninde kavram tanımı dışında bir şey oluşturamamıştır.

4.2.2.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Hüseyin: Şimdi uzayda düşündüğümüzde bir doğru parçasının vektör olabilmesi için ilk olarak başlangıç noktası olacak ve birde bitiş noktası olacak... Yani şekilde verilen vektörlerin üçünün de aynı olabilmesi için belli başlı şartları sağlaması gerekiyor. Bu doğru parçalarının eşit uzunlukta, aynı yönlü ve bir de paralel olması gerekiyor. Yani burada verilen CD vektörü diğer vektörlere paralel olmasaydı bu vektörlere eşit olmayacaktı. Yani bize aynı vektörü ifade etmeyecekti.

Hüseyin, vektörün tanımı ile alakalı olarak vektörlerin sağlaması gereken özellikler üzerine yoğunlaşmış ve şekille tanım arasındaki bağlantıyı tam olarak kuramamıştır. Çünkü şekilde verilen vektörlerin birbirine eşit olması gerektiği yanlışlığına düşmüştür. Etkinlikte yer alan şekil incelendiğinde, vektörlerin paralel, aynı yönlü ve eşit uzunlukta oldukları görülmektedir. Bu yüzden bu vektörler birbirine denk vektörlerdir. Birbiri yerine kullanılabilirler fakat eşit değildirler.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?



Şekil 4.8. Hüseyin'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hüseyin: Vektör denildiğinde başlangıç noktası belli, yönü ve bir büyüklüğü olan bir doğru parçası aklıma geliyor. [Kağıttaki şekli çiziyor].

Hüseyin, vektör kavramı ile ilgili olarak kendi zihninde oluşturduğu imajı şekil 4.8 deki gibi çizmiştir. Buna göre Hüseyin'in zihninde vektör denildiğinde başlangıç noktası belli, yönü ve bir büyüklüğü olan doğru parçası oluşmaktadır.

4.2.3. İbrahim'in Durumu

4.2.3.1. İkili işlem kavramı

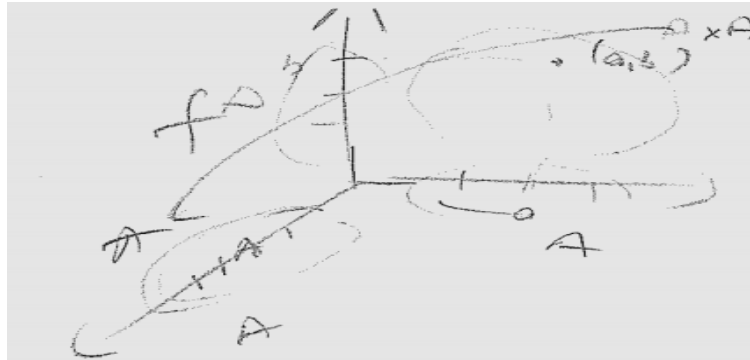
Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

İbrahim: Bu tanım... Bu konuyla ilgili düşüncem şöyle... İkili işlemi cebirsel olarak değil de geometrik olarak yorumlayabilirim... Mesela x ve y eksenleri olarak bakarsak koordinat düzlemi üzerindeki ikilileri görebiliriz ikili işlem olarak... Birde işlemin mantığı olarak bakarsak; bu şekilde düşündüğümüzde ise değişik mesela bir toplama işlemi notasyon olarak kullanılan işlemlerde kendine has bir notasyon olarak düşünülebilir. Mesela toplama işlemi notasyonu tanımlandığı işleme göre a ile b yi toplamayı gerektirir işlem olarak... Diğerinde de bir $*$ işlemi tanımlar ve bu işlemde de a ile b nin iki katını topla şeklinde tanımlanabilir. Burada anlatmaya çalıştığım şey aslında ikili işlemler kendine has işlemleri tanımlayan notasyonlardır.

İbrahim, ikili işlem tanımından anladıklarını iki şekilde ifade etmiştir. Bunlardan birincisi ikili işlemin geometrik anlamı, ikincisi ise işlemin mantığı şeklindedir. İbrahim ikili işlemin geometrik anlamı olarak, koordinat düzlemindeki ikilileri ikili işlem olarak düşünmüştür. İşlemin mantığının ise ikili işlemin tanımlandığı notasyona göre belli olacağını ifade etmiştir. Buna göre işlemin mantığı işleme ait notasyonun nasıl tanımlandığı ile ilgilidir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.9. İbrahim'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

İbrahim: İkili işlem tanımı içerisinde yer alan fonksiyon kavramından yola çıkacak olursam zihnimde de yine fonksiyon kavramına ilişkin şeyler oluşuyor aslında... Tabi bu fonksiyon $A \times A$ dan A ya şeklinde olmalı... Burada tanım kümesi $A \times A$ olduğu için bunu bir koordinat sistemi şeklinde gösterebilirim... [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Bu koordinat düzlemini üç boyutlu çizebilirim. Bu koordinat düzlemi üzerinden aldığımız bir (a, b) ikilisini yine bu ikilileri oluşturan kümenin elemanlarıyla eşleyen bir fonksiyon olarak düşünebilirim. Buna göre (a, b) ikililerini oluşturan kümeler A kümesi ise x ve y eksenleri A kümesinin elemanlarından oluşacak şekilde bir tanım kümesi teşkil edebilirim. Değer kümesini ise z eksenini üzerinde yine bir A kümesi teşkil ettiğimde $A \times A$ nın elemanlarını A kümesinin elemanlarıyla eşleyen bir fonksiyonu bu şekilde canlandırabilirim. Burada şekilde tanımladığım f fonksiyonuna bir ikili işlemdir diyebilirim.

İbrahim, ikili işlem kavramı ile ilgili kavram imajını tanım içerisinde yer alan fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Buna göre ikili işlemin tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi de A olacak şekilde üç boyutlu bir koordinat sistemi oluşturmuştur. Koordinat sistemi üzerinde xy eksenini $A \times A$ olacak şekilde tanım kümesi ve z koordinatlarını da A kümesi olacak şekilde görüntü kümesi olarak seçmiş ve f fonksiyonunu $A \times A$ dan A ya eşlemiştir. İbrahim'in oluşturduğu kavram imajı incelendiğinde ikili işlemin hem geometrik anlamı hem de işlemin mantığını içerdiği görülmektedir. Buna göre İbrahim'in kavram imajı kavram anlayışı paralelinde oluşmuştur.

4.2.3.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

İbrahim: Grup... Bana göre matematiksel olarak daha karmaşık yapıları ifade etmenin bir yoludur diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Burada söylediğiniz karmaşık yapıları biraz açabilir misiniz?

İbrahim: Yani... Daha karmaşık yapılar ifade etmek demeyeyim de daha karmaşık yapılar oluşturmanın bir yoludur. Yani bir ikili işlemi farklı bir işlemle birleştirerek daha farklı yapılar oluşturuyoruz. Grup denildiğinde aklıma gelenler bu şekilde...

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

İbrahim: Kapalılık şartı... Yani grup tanımlıyoruz... Grubun [eee]... Nasıl söyleyeyim onu... Kapalılık şartı grubun kendi içinde kalmasını sağlıyor. Yani [eee]... Farklı elemanlara, farklı yerlere gitmesini önüyor. Yani küme üzerinde tanımlanan ikili işleme göre elemanların yine aynı kümede kalmasını sağlıyor.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

İbrahim: Eee... Birleşme özelliği de elemanları birbirine bağlıyor diye düşünüyorum... Yani farklı elemanları birbirine bağlamak, birleştirmek için kullanıyoruz diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

İbrahim: Birim eleman... Şimdi birim eleman olmasaydı... Mesela tamsayılarda sıfır olmasaydı. Tamsayılarda sıfır olmasaydı ters eleman diye bir şey olmazdı. Zaten birim eleman ters elemanı gerektiren durumdur. Mesela 3 varken -3 olmazdı ve tamsayıları grup olarak tam ifade edemezdik. Dolayısıyla tamsayıları kısıtlamış olurduk ve tam olarak ifade etmemizi engellerdi.

Mülakatçı: Kısıtlamadan kastınız nedir? Nasıl bir kısıtlama olurdu?

İbrahim: Yani... Kümedeki bütün elemanları ifade etmemizi kısıtlıyor.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

İbrahim: İşleme girdiğinde birim elemanı veriyor...

Mülakatçı: Güzel... Peki biz bunu matematikte nasıl kullanıyoruz?

İbrahim: Ters elemanı... Mesela nasıl düşünelim... Herhangi bir k elemanının tersi bize neyi verir diyorsunuz yani?

Mülakatçı: Evet...

İbrahim: Yani tam olarak üzerinde çok düşündüğüm bir konu değil ama şöyle söyleyebilirim... Matematikte biz her şeyi ifade etmeye çalışıyoruz. Ters elemanda mesela bir a elemanımız var bununda tersi olmalı işte onu da ifade etmeliyiz. O yüzden ters elemanı da inceliyoruz.

İbrahim, grup kavramı tanımını; daha karmaşık yapılar oluşturma'nın bir yolu olarak nitelendirmiştir. Yani grup kavramı sayesinde, ikili işlemlerin farklı kümeler üzerinde tanımlanarak yeni yapılar oluşturmada kullanılabileceğini düşünmektedir. Grup özelliklerinden kapalılık özelliğinin kümeden alınan elemanların işlem sonuçlarının yine aynı kümede kalmasını sağladığını belirtmiştir. Yani işlem sonuçlarının yine aynı kümede kalması sağlanarak sadece o küme üzerinde çalışılabileceğini ifade etmiştir. Birleşme özelliğinin farklı elemanları birbirine bağlamada, birleştirmede kullanılabileceğini düşünmüştür. Birim eleman için birim eleman olmasaydı ters eleman olmazdı şeklinde yorum yapmıştır. Tamsayılar örneği üzerinde 3 varken -3 olmazdı ve tamsayıları kısıtlamış olurduk sonucuna ulaşmıştır. Bu kısıtlama olduğunda da tamsayılar kümesinin elemanlarının tamamının ifade edilemeyeceğini vurgulamıştır. Ters eleman için ise ters eleman tanımı dışına çıkamamış ve ters eleman birim elemanı bulmak için kullanılır şeklinde cevap vermiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*

İbrahim: *Grup denildiğinde... Somut bir örnek mi vereyim yoksa soyutta olabilir mi?*

Mülakatçı: *Aklınıza hangisi geliyorsa olabilir...*

İbrahim: *Grup aslında en başta da söylediğim gibi matematiksel olarak biraz daha karmaşık bir yapıyı ifade etmektir. Hani sosyal olarak baktığımızda gruplar vardır ya böyle hani bunların kendileri aralarında ilişkileri olan insanlar topluluğudur ya... Matematikteki grupta biraz daha soyut düşünüyoruz. Karmaşık bir yapıdır. Üzerinde işlem yapılan elemanların kendi aralarında ilişkileri var çünkü işleme giriyorlar. Bunun gibi bir şeydir. Aslında üzerinde biraz düşünüldüğünde sosyal gruplar ile matematiksel gruplar arasında da bir ilişkinin varlığından söz edilebilir. Çünkü birinde grubu oluşturan insanlar arasındaki ilişki onları bir arada tutar. Benzer şekilde matematiksel gruplarda da kümedeki elemanlar arasındaki ikili işleme göre ilişki elemanları bir arada tutmaktadır.*

İbrahim, grup kavramını günlük hayatla ilişkilendirerek bir kavram imajı geliştirmiştir. İbrahim, grup kavramı ile alakalı kavram imajını sosyal hayatta insanların bir araya gelerek oluşturduğu gruplara benzetmiştir. Buna göre matematikte kullanılan

grup kavramında tanımlanan işleme göre elemanlar arasında ve insanların oluşturduğu sosyal gruplarda ise insanlar arasında bir ilişki vardır. Her ikisinde de hem elemanlar arasındaki ilişki hem de insanlar arasındaki ilişki onları bir arada tutmaktadır şeklinde düşünerek kavram imajını oluşturmuştur.

4.2.3.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: *Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

İbrahim: *Alt grup alt kümeyle alakalı aslında bunu şöyle açıklayabilirim; biz matematikte tümdengelim ilkesi kullanıyoruz. İşte önce bütünü veriyoruz, sonra daha özelleştiriyoruz. Burada da önce grup veriliyor bütün olarak ve daha sonra daha iyi anlaşılması için alt grup veriliyor. Mesela derslerde de önce bir grup veriliyor ve daha sonra daha iyi anlaşılması için bunun alt gruplarını veriyor. Bu sayede konunun daha iyi anlaşılması ve pekiştirilmesi amaçlanıyor. Bir nevi aldığımız grupları özelleştirmeye çalışıyoruz alt gruplar yardımıyla diyebilirim. Mesela doğal sayılar kümesini özelleştiriyoruz, rasyonel sayılar kümesini özelleştiriyoruz.*

Mülakatçı: *Peki size göre bütünden ziyade küçük kümeler üzerinde çalışmanın ne gibi faydaları olabilir?*

İbrahim: *Konunun anlaşılması açısından daha faydalı olacağını düşünüyorum. Konular daha iyi kanıksanır diye düşünüyorum.*

İbrahim, alt grup tanımıyla alakalı olarak düşüncelerini matematiksel tümdengelim ilkesinden yararlanarak açıklamak istemiştir. Buna göre, konunun daha iyi anlaşılabilmesi için ilk önce grup kavramı açıklanıyor ve daha sonra bu kavramın özel halleri olan alt grup kavramı açıklanarak çalışılan grupları özelleştirmek amaçlanıyor şeklinde düşünülmüştür.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*

İbrahim: *Alt grup denildiğinde aklımda hemen beliren bir şey olmuyor ama hemen alt küme mantığını çağırıştırıyor. Yine matematikteki bütün parça ilkesi aklıma geliyor yani*

tümdengelim yoluyla kavramların daha iyi anlaşılabilceği aklıma geliyor. Bunun dışında ilk olarak bir alt küme çağrışımı yapıyor.

İbrahim, alt grup ile ilgili kavram imajını oluştururken alt küme kavramından yararlanmışır. Bununla birlikte alt grup için bütün parça ilişkisini kurmanın amaçlandığını vurgulamış ve alt grupla ilgili zihninde ilk olarak alt kümenin oluştuğunu belirtmiştir.

4.2.3.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

İbrahim: Bu tanım bize farklı cebirsel yapıları ortak bir payda da birleştirebileceğimizi anlatıyor. Tanımı incelediğimizde bir $*$ işleminin diğer yapıdaki bileşke işlemine dönüşebileceğini anlatmaya çalışıyor. Farklı iki cebirsel yapıyı bir yerde birleştiriyor diyebiliriz. Yani gruplar arasında bir ilişki kurmaya çalışıyoruz.

Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

İbrahim: Burada bu şekilde tanımlanmasının nedeni belki de eşitliği koruyabilmek için olabilir. Burada görüntü kümesi üzerinde $*$ işlemi alınmamıştır çünkü H kümesi üzerinde tanımlı olan işlem bileşke işlemidir ve tanımda da bundan faydalanılmıştır. Yani bu yüzden tanımda farklı işleme yönelmiş olabilir. Yani burada G , $*$ işlemine göre bir grup olduğu için $*$ işleminin kapalılığı G üzerinde garantidir. [Düşünüyor]... Elemanları başlangıçta G kümesi üzerinden aldığımız için $*$ işlemi H kümesi üzerinde de kapalıdır.

Mülakatçı: Madem ki $*$ işlemi her iki küme üzerinde de tanımlı ve kapalı ise işlem dönüşüm altında neden değişiyor olabilir?

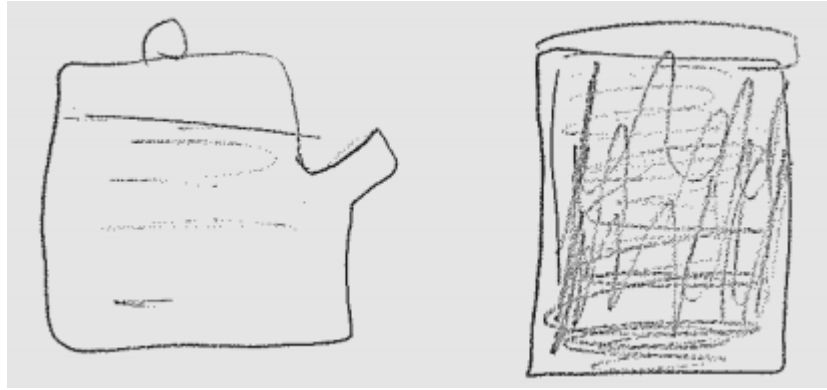
İbrahim: [Düşünüyor]... Bununla ilgili bir fikrim yok hocam...

İbrahim, grup homomorfizmi tanımının gruplar arasında bir ilişki kurmak için tanımlanabileceğini düşünmektedir. Yani grup homomorfizmi sayesinde farklı cebirsel yapıların birleştirilmesinin amaçlandığını vurgulamıştır. Grup homomorfizmi altında işlemlerin neden değiştiği ile alakalı soruya ise cevabından emin olmamakla beraber eşitliği korumak için olabilir yanıtını vermiştir. Fakat düşüncesinden emin olmadığı için

birinci işlemin ikinci küme üzerinde de kapalı olacağı sonucuna ulaşmış ve sonrasında da bu konu hakkında bilgisinin olmadığını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.10. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

İbrahim: Homomorfizm ile ilgili bir hocamız güzel bir şey söylemişti... Çaydanlıkla bardak örneğini vermişti bize... Hocamızın bu örneğinden sonra zihnimde homomorfizm ile ilgili çaydanlık bardak şeması kalmış. Yani çaydanlıktaki çayın bardakla eşlenmesi diyebilirim... [Kağıttaki şekli çiziyor]... Yani çaydanlıktaki çayı hiç değiştirmeden direk olarak bardağa boşaltma yapıyoruz... Birebir, örten ve tersi olan bir dönüşüm yapmış oluyoruz. Yani eğer istersek bardaktaki çayı tekrar çaydanlığa boşaltabiliriz. Yani birebir eşleme yapabiliyoruz.

İbrahim, grup homomorfizmi ile alakalı kavram imajını Şekil 4.10 daki gibi çizmiştir. Buna göre grup homomorfizmi kavramını çaydanlık bardak şeması ile açıklamıştır. Bu şemayı önceki yıllarda derslerine gelen bir hocasının verdiği örnekten yararlanarak oluşturmuştur. Çaydanlıktaki çayı hiç değiştirmeden bardağa boşalttığımızda aslında bir homomorfizm tanımlamış olduğumuzu vurgulamıştır. Fakat devamında homomorfizm kavramının birebir, örten ve tersi olan bir dönüşüm olduğu yanlışlığına düşmüş ve izomorfizm kavramı ile karıştırmıştır.

4.2.3.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: *Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

İbrahim: *“Paralel, aynı yönlü, eşit uzunlukta doğru parçalarının bütününe bir vektör denir.”... Bana göre burada vektörü yerini değiştirebileceğimiz bir şey olarak düşünüyoruz ama aynı vektör olacak. Uzunluğu aynı olacak, birbirlerine paralel aynı yönlü ve paralel olacak... Bu doğru parçalarının tamamını bir vektör olarak düşünüyoruz. Yani buradaki şekilde yer alan CD vektörünü şekilde olduğu gibi tanımda yer alan özelliklerini değiştirmeden AB vektörüne dönüştürdüğümde aslında $CD = AB$ olur. Aslında bunlar aynı vektörlerdir. Burada belki koordinatlarını değiştireceğiz ama aynı doğru parçasından bahsediyoruz. Bunların tamamını da bir vektör olarak nitelendireceğiz.*

İbrahim, vektörlerle ilgili etkinlik içerisinde verilen tanımda vektörlerin yer değiştirebileceği ve bu tanımın da bunun üzerine kurulduğunu düşünmektedir. Bu yüzden İbrahim, vektör tanımında verilen şekildeki vektörlerin birbirine eşit olduğu yanılgısına düşmüştür. Bu bakış açısına göre vektörlerin paralellik, aynı yönlülük ve eşit uzunluk özellikleri değiştirilmeden konumunun değiştirilebileceği sonucuna ulaşmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*

İbrahim: *Vektör denildiğinde ilk zamanlarda zihnimde uzayda bir doğru parçası çağırıyordu. Ama daha ayrıntılı olarak vektörü öğrendiğimizde vektör bir doğru parçasıdır ama o doğru parçasını istediğimiz şekilde yer değiştirebileceğimiz bir bağıntıyı ekleyerek birleştirdim. Yani vektör denildiğinde aslında benim zihnimde de buradaki şekil aklıma geliyor.*

İbrahim’in vektörlerle ilgili kavram imajı mülakat öncesine kadar bir doğru parçası iken mülakat içerisinde kavram imajı etkinlikte yer alan şekil olarak değişmiştir. Dolayısıyla İbrahim’in kavram imajı etkinlik sonunda değişmiştir.

4.2.4. Nermin'in Durumu

4.2.4.1. İkili işlem kavramı

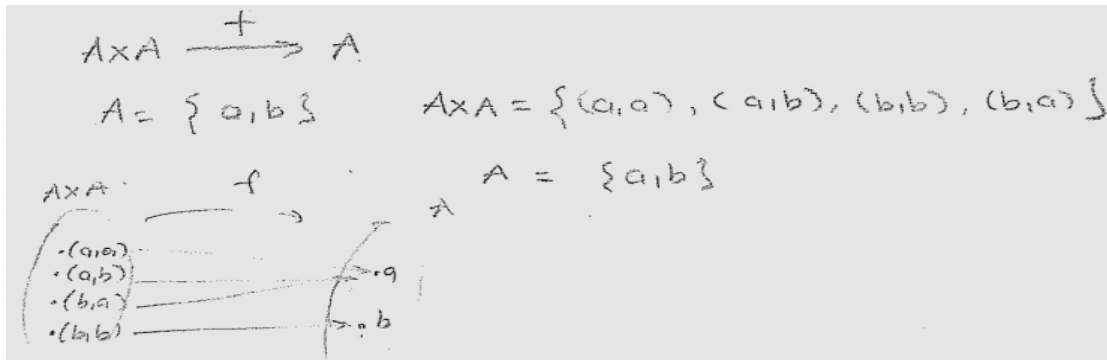
Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nermin: Şimdi ben burada kartezyen çarpımı biliyorum, tanım olarak fonksiyonu biliyorum o yüzden bu tanım bana bir şeyler anlatabilir ama bu iki tanımı bilmeyen birine bir şey anlatamaz. İlk olarak tanımda $A \times A$ dan A ya dediği için burada bir bağıntının olup olmadığı aklıma geliyor. İşte $A \times A$ dan elemanlar seçiyorum ve seçtiğim elemanlar A ya gidecek... Yani tanım kümesi ve değer kümesi çağrışımı yapıyor. Fonksiyon tanımı aklıma geliyor. Fonksiyon tanımında; birebir eşleme, boşta eleman kalmaması gibi tanımlar kullanıyorduk onlar aklıma geliyor... Yani bir ikili işlem dediğimizde bir kere fonksiyon olması gerekiyor. Tanım kümesi kartezyen çarpımlardan oluşacak değer kümesi ise kartezyen çarpımı oluşturan bu tanıma göre sadece A dan oluşuyor. Bu şekilde tanımlanan özel bir fonksiyonun ikili işlem olduğu anlatılıyor.

Nermin, ikili işlem tanımını okuduğunda ikili işlemin özel bir fonksiyon olduğunu düşünmüştür. Bu fonksiyonun tanım kümesi kartezyen çarpım şeklinde ve değer kümesi de kartezyen çarpımı oluşturan kümeden oluşmaktadır. Buna göre ikili işlem tanımı Nermin'in zihninde fonksiyon çağrışımı yapmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.11. Nermin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nermin: *[Kâğıttaki şekilleri çiziyor]... Şimdi $A \times A \rightarrow A$ ya bir fonksiyon olacak... Mesela A kümesinden $\{a, b\}$ gibi elemanlar alsam... Şimdi $A \times A$ dediğim zaman... $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$ çok emin değilim ama $A \times A$ nın elemanları sanırım bu şekilde olur. Çünkü boşta eleman kalmaması gerekiyordu... Tanım kümesi bu şekildeki ikililerden oluşmalıdır. Şimdi A kümesi $\{a, b\}$ idi. O halde $A \times A$ kümesini tanım kümesi ve A kümesini de değer kümesi kabul eden bir fonksiyon olacak. kartezyen çarpım kümesindeki ikilileri A kümesinin elemanları ile eşleyeceğim. Şimdi tanım kümesinden alacağım ikililerin hepsi a ile eşleşebilir ya da hepsi b ile eşleşebilir. Bu fonksiyonun tanımlanmasına göre değişir. Bunu da fonksiyonların şema ile gösterimleri şeklinde ifade edebilirim. *[Aslında söylediklerimin çokta doğru olup olmadığından emin değilim]*... *[Kâğıttaki şemayı oluşturuyor]*... Aslında ben burada tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi A olan sabit bir fonksiyon tanımlamış oldum. İlk başta da söylediğim gibi ikili işlem aslında özel bir fonksiyondur. Tanım kümesi ikililerden oluşur ve değer kümesi de bu ikilileri oluşturan kümenin kendisinden oluşur.*

Nermin, ikili işlem ile ilgili kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Bu düşüncesini bir örnek üzerinde özel bir fonksiyon olarak göstermek istemiştir. Bunun için iki elemandan oluşan bir A kümesi yardımıyla tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi de A olacak şekilde temsili bir f fonksiyonu tanımlayarak kavram imajını özel bir fonksiyon olarak oluşturmuştur.

4.2.4.2. Grup kavramı

Mülakatçı: *Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Nermin: *Şimdi hocam ben bu şartları bildiğim için... Yani kapalılık, birleşme, birim eleman ve ters eleman şartlarını biliyorum. Bu özelliklerin ne ifade ettiğini biliyorum. Ama grup deyince ne anlamam gerekiyor bilemiyorum açıkçası. Yani neden bir yapının grup olduğunu araştırırız bilemiyorum. Yani hocam bizler sadece verilen yapıların grup, halka ya da cisim olup olmadıklarını araştırıyoruz ama işte tamsayılar grup olduğu için şunu yapıyoruz diyemiyorum. Yani ne işe yarar bilemiyorum. Neden gruplar, halkalar, cisimler birbirinden farklıdır ve sağlandıkları kümelere ne gibi avantajlar sağlarlar bilemiyorum.*

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Nermin: Bu özellik değer ve tanım kümesinden dolayı olabilir hocam. Mesela $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e bir ikili işlem tanımladığımızda burada kapalılık şartı sağlanmazsa ikili işlem olmaz. Yani kapalılık özelliği ikili işlem olmayı garantiler.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Nermin: Eee... Birleşme özelliği de şey olabilir. Mesela burada toplama işlemine göre, başka bir kümede çarpma işlemine göre... Mesela hocam geçen haftaki ikili işlem mülakatında işlemle ilgili olarak birleşme özelliğini kullanmıştım. Yani yine ikili işlemin güçlü olmasını sağlayan bir özelliktir ama tabi birleşme özelliğini sağlamayan ikili işlemlerde olabilir. Bunun dışında da birleşme özelliği şu işe yarar diyebileceğim bir şey gelmiyor aklıma...

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Nermin: Birim eleman... Açıkçası hiçbir fikrim yok hocam... Bu gün aklıma bir şey gelmiyor.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Nermin: Ters elemana birim eleman olduğu için bakıyoruz... Yani ters elemanla birim eleman aslında birbirleriyle bağlantılı... Ama neden grupta birim eleman ve ters eleman olmak zorunda... [Düşünüyor]... Şimdi bir kere bu kapalılık özelliği bana mantıklı geliyor. Çünkü G kümesi üzerinde bir ikili işlem alıyorum. Birleşme özelliğinde ikili işlem olup olmadığını göstermek ya da işlemler üzerinde kolaylık sağlamak için olabilir... Ters elemanı da birim elemana göre yorumlarım ama birim eleman hakkında bir yorum yapamıyorum.

Nermin, grup kavramından ne anlaması gerektiği ve neden kümelerin grup olduğunun araştırıldığı ile ilgili bir fikrinin olmadığını söylemiştir. Sadece kümeler üzerinde tanımlanan ikili işlemin sağlaması gereken özellikleri incelediklerini belirtmiştir. Bu açıdan bakıldığında Nermin'in grup kavramını tam olarak kavramsallaştıramadığı görülmektedir. Nermin kapalılık özelliği için ikili işlemin tanımlanan küme üzerinde tanımlılığını garanti edeceğini fark etmiş ve bu şekilde cevap

vermiştir. Birleşme özelliği için ise ikili işlemin daha güçlü olmasını sağlayacağını düşünmüş ancak bunun dışına çıkamamıştır. Birim eleman içinde birleşme özelliğinde olduğu gibi kesin bir fikrinin olmadığını belirtmiştir. Ters eleman için de bir yorum yapamamış sadece birim eleman ile ters eleman arasında bir ilişki olduğu yönünde cevap vermiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*

Nermin: *Bu şartlar geliyor. Aslında grubun kelime anlamı olarak belli şartlara göre toplanmak da aklıma geliyor ama neden bu kümeleri bir grup yapıyoruz onu bilmiyorum. Yani buradaki problemde yer alan rasyonel sayıların toplama işlemine göre bir grup olup olmadıklarını neden araştırıyoruz onu bilmiyorum.*

Nermin, grup kavramına yönelik bir kavram imajı geliştirememiştir. Bir kümenin verilen işleme göre grup olup olmadığını araştırdıklarını fakat bunu neden yaptıklarını bilmediğini belirtmiştir.

4.2.4.3. Alt grup kavramı

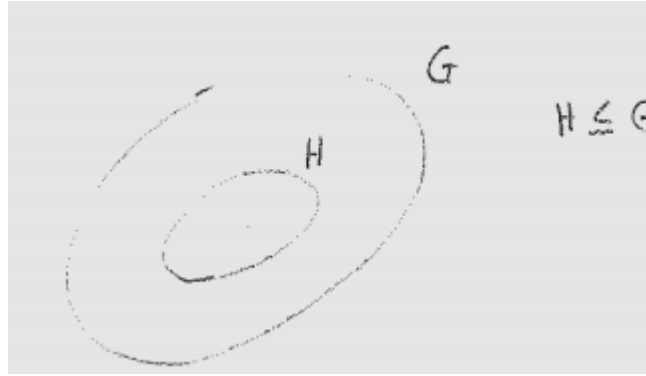
Mülakatçı: *Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Nermin: *Belki hocam kümenin tümüne değil de özel bir alt kümesine bakmak için olabilir. Bana göre alt gruplar sayesinde yapacağımız işlemleri daha basite indirgeyebiliriz. Belki daha yüzeysel bakmak için olabilir. Mesela hocam burada yer alan problemde $\mathbb{Z}$ üzerinde değil de H üzerinde çalışmak daha kolay olabilir. Çünkü bu problem örneğinde H kümesi $\mathbb{Z}$ kümesine göre daha somut, belirgin bir kümedir.*

Nermin, alt grupların bir kümenin bütünü yerine onun alt kümesi olan bir küme üzerinde çalışmanın daha kolay olmasından dolayı tanımlanmış olabileceğini düşünmüştür. Bu sayede işlemlerin daha basite indirgenebileceğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*



Şekil 4.12. Nermin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nermin: *Alt grup denildiğinde ilk olarak grubun bir alt kümesi gibi algılıyorum. Alt grup bende bir alt küme çağrışımı yapıyor... Hani alt grup, alt küme derken de bir benzerlik var zaten... Yani bir grup içerisinde alının ve o grubun özelliklerini sağlayan daha küçük gruplar olarak düşünebiliriz. Yani bir G grubunun bir H alt grubunu alt küme şeklinde gösterebiliriz. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Buradaki G bir grup ve H da onun bir alt kümesi olsun ve H, G nin bir alt kümesi olduğu için G deki özellikleri zaten sağlarlar.*

Nermin, alt grupla ilgili kavram imajını alt küme kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Nermin bu iki kavramın yazılışlarının ve çağrışımlarının da birbirine benzediğini düşünmektedir. Ayrıca Nermin, alt grupların içerisinde bulunduğu grupların özelliklerini sağlayan küçük gruplar olduğunu belirtmiştir.

4.2.4.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: *Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Nermin: *Bir kere iki tane grup verilmiş, demek ki homomorfizm tanımlı olması için iki tane gruba ihtiyacımız olduğunu anlıyorum. Bu gruplar arasında da bir dönüşüm tanımlanmış. Bu dönüşüm de $G \rightarrow H$ a tanımlı olduğu için bir fonksiyona benziyor.*

Tanımlanan bu dönüşümün tanım kümesi G kümesi olacak. Tanım kümesinden iki eleman alınmış ve bu elemanların görüntüleri ile eşleştirmiş. İlk gruptan alınan elemanlar ilk grubun işlemine göre işleme alınmış. İkinci grubun elemanları ise ikinci grubun işlemine göre işleme alınmış ve bunlar birbirine eşit olarak tanımlanmıştır.

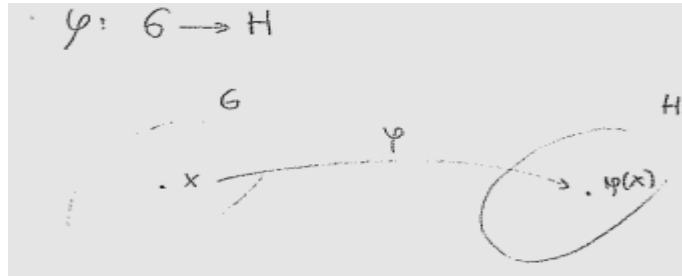
Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Nermin: Çünkü G , $*$ işlemine göre ve H da $\circ$ işlemine göre tanımlanmıştır. Eğer bu şekilde tanımlanmış olmasaydı o zaman fonksiyon olmazdı. Eğer her iki küme üzerinde de $*$ işlemine göre eleman seçersek tanım kümesinden doğru, değer kümesinden ise yanlış eleman seçmiş oluruz. Dolayısıyla her iki küme üzerinde tanımlı olan işlemlere göre eleman seçilmelidir.

Nermin, tanımını ilk okuduğunda grup homomorfizmi tanımlanabilmesi için iki gruba ihtiyaç olduğunu fark etmiştir. Grup homomorfizminin tanım ve değer kümesi gruplar olan bir fonksiyon olduğuna karar vermiştir. Grup homomorfizminde işlemlerin değişmesini ise her iki grupta da işlemlerinin farklı tanımlanmasından kaynaklandığını düşünmektedir. Bu şekilde tanımlı olmasından dolayı tanım kümesindeki her elemene karşılık değer kümesinde bir elemanın karşılık geldiğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.13. Nermin'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nermin: Yani bir fonksiyon olduğunu düşünüyorum. Çünkü $G \rightarrow H$ a bir dönüşüm olarak tanımlanmış o yüzden bir fonksiyon şekli zihnimde canlanıyor... Şimdi $\varphi: G \rightarrow H$ a tanımlı bir dönüşüm olsun. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... G den alacağım bir x elemanını H üzerinde $\varphi(x)$ ile eşleyen bir φ dönüşümü olarak düşünebiliriz.

Nermin, grup homomorfizmi ile alakalı kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Tanımladığı φ dönüşümünde tanım kümesini G grubu ve görüntü kümesini de H grubu olarak belirlemiş ve $G \rightarrow H$ a bir fonksiyon şekli çizmiştir.

4.2.4.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nermin: Yani burada aldığımız elemanları uzayda aldığımız için doğru parçalarından söz ediliyordur. Yani sonuçta uzayda tek bir doğru parçası olmayacağı için bu şekilde tanımlanmış olabilir. Yani başlangıç noktası aynı olan sonsuz tane doğru parçası vardır.

Mülakatçı: Güzel... O halde ben bu şekilde yer alan vektörlerin her birine aynı vektörü temsil ediyorlar diyebilir miyim?

Nermin: Ama başlangıç noktaları farklı... Şimdi paralel, aynı yönlü ve eşit uzunlukta olduklarında eşit vektörler diyebilirim. O halde şekilde verilen vektörlerin tamamı aslında aynı vektörü temsil etmektedirler...

Mülakatçı: Peki bu vektörler aynı ise neden çakışık değil de uzayın farklı noktalarında bulunuyorlar?

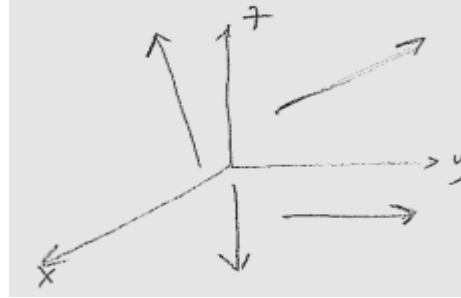
Nermin: Çok boyutlu olduğu için olabilir... Hani masanın üzerini yani bir düzlem olarak düşünsek... Bilemiyorum, yani belki uzayda sonsuz nokta olduğu için ve paralel olduğu için bu şekilde vektörler çizilebiliyor olabiliriz.

Nermin, tanımda yer alan doğru parçaları ifadesini, vektörlerin uzayda tanımlı olmalarıyla izah etmek istemiştir. Dolayısıyla tanımda vektörlerin uzayın herhangi bir noktasında bulunabileceği vurgusunun yapıldığına karar vermiştir. Bu yüzden de bir vektörün belli özellikleri sağladığında uzayın farklı yerlerinde olabileceğini ifade

etmiştir. Bununla birlikte Nermin de şekilde verilen vektörlerin birbirine eşit olduğu yanılığısına düşmüştür.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*



Şekil 4.14. Nermin'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nermin: *Daha çok aklıma fizik geliyor. Çünkü lise döneminden itibaren sürekli vektörleri fizik derslerinde görüyorduk. Üniversiteye gelene kadar matematikte hiç vektör görmemiştim. Bununla birlikte vektör denildiğinde aklıma hep belli bir yöne giden oklar geliyor. Hep işte belli bir başlangıç noktası olan ve belli bir yöne doğru giden oklar düşünüyorum. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Yani hep başlangıç noktası olan ve bir yöne giden doğrular aklıma geliyor.*

Nermin, vektör kavramına yönelik kavram imajını şekil 4.14 deki gibi oluşturmuştur. Ayrıca vektörleri daha çok fizik derslerinden hatırladığını ve üniversite dönemine kadar matematikte hiç vektörlerle karşılaşmadığını belirtmiştir. Vektör kavramını belli bir başlangıç noktası ve yönü olan oklar, doğru parçaları olarak izah etmiştir.

4.2.5. Büşra'nın Durumu

4.2.5.1. İkili işlem kavramı

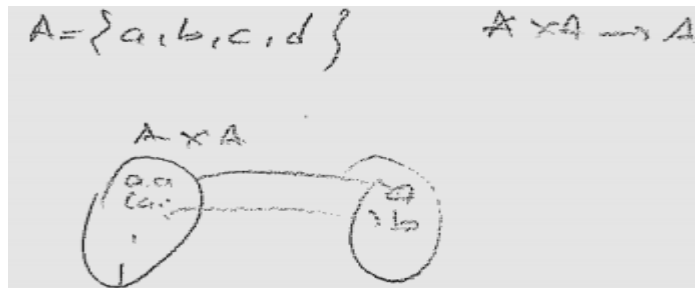
Mülakatçı: *İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Büşra: İkili işlem iki kümeden alınan elemanların bir kümeye taşınmasıdır. Mesela burada olduğu gibi $A \times A \rightarrow A$ ya... Yani $A \times A$ kümesindeki sıralı ikililerin taşınmasıdır. Sıralı ikililerin kendilerini oluşturan kümeye taşınmasıdır.

Büşra, ikili işlem tanımının sıralı ikililerin kendilerini oluşturan kümeye taşınmasını ifade ettiğini düşünmektedir. Bu yüzden ikili işlemin tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi de A olan bir dönüşüm olduğunu ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.15. Büşra'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Büşra: Tabii... [Kağıttaki şekli çiziyor]... Hocam şimdi ben bir A kümesi seçsem elemanları $\{a, b, c, d\}$ şeklinde olan... Bağlantıyı $A \times A \rightarrow A$ ya seçeceğim için ilk kümemiz $(a, a), (a, b) \dots$ şeklinde elemanlardan oluşacak. Yani ikililerden oluşacak. Diğer kümede ise a, b, c gibi tekli elemanlarla eşleşecek. Yani tanım kümesinde sıralı ikililer şeklinde olacak ve değer kümesi ise A kümesinin kendisinden oluşur.

Büşra, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Buna göre Büşra'nın ikili işlem kavramına yönelik kavram imajı tanım kümesini sıralı ikililerin ve değer kümesini de sıralı ikilileri oluşturan kümenin kendisinin oluşturduğu özel bir fonksiyondur.

4.2.5.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Büşra: Güzel soru... Grup nedir acaba... Mantık hocam işte... Sayılar üzerinde işlem yapmakta kolaylık sağlar. Yani grup şartlarını düşündüğümüzde bu özellikler sağlandığı zaman artık o küme özel oluyor.

Mülakatçı: Bu bahsettiğiniz özellik ne olabilir?

Büşra: Özelliği ne olabilir...

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Büşra: Kapalılık özelliğinde, mesela toplama işlemini düşündüğümüzde kümeden alınan iki elemanın toplamının yine o kümeye ait olması zorunludur. Yani bu özellik o kümeden farklı bir küme üzerinde çalışmadığını gösteriyor.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Büşra: Birleşme... [Eee]... Küme üzerinde bir sonuca ulaşmak için kullandığım yolu... [Eee]... Nasıl söyleyeyim... Yani yaptığımız işlem üzerinde matematiksel oyunlar oynayabileceğim anlamına geliyor. Mesela birleşme özelliği için parantezin yerinin bir önemi olmaması bize matematiksel olarak rahatlık sağlıyor.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Büşra: Verilen işleme göre hangi sayı ya da rakam işleme tabi tutulursa hiçbir etkisinin olmadığı... O kümede varlığı hani işlemde kullandığımız sayılara hiçbir etkisinin olmadığını gösteren bir değerdir. Hocam mesela 0 toplama işleminde etkisiz elemandır bunu biliyorum. Yani hocam eğer bir kümeyi özel kılmak istiyorsak ve etkisiz elemanda grup şartlarından bir tanesi olduğundan onunda bulunması gerekiyor. Mesela hocam tamsayılar kümesi üzerinde tanımlı toplama işleminde birim eleman 0 dır ve 0 olmasa idi ters elemandan bahsedemezdik. Mesela hocam işlem tablosu oluşturduğumuzda tablodan etkisiz elemanı bulamayız. Bunun dışında da aklıma fazla bir şey gelmiyor açıkçası. Eğer birim eleman olmasaydı bu elemanın tersi de olmazdı çünkü bir elemanla tersi işleme girdiğinde birim elemanı verir.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Büşra: Ters eleman olmasaydı birim eleman olmazdı. Mesela hocam şimdi bir işlemi tersten tanımlayacağımız zaman... Mesela $f(2) = 3$ ise $f^{-1}(3) = 2$ olduğunu bilmem gerekir. O kümenin içerisinde kaldığını bilmem gerekiyor.

Mülakatçı: Güzel... Bu söylediklerin işlemin tamamı için önemlidir fakat bir elemanın tersi neden bulunur? Mesela tamsayılarda toplama işlemine göre 2 elemanın tersi -2 dir ve bu bizim ne işimize yarar?

Büşra: Evet bunu toplama işleminde kullanıyoruz. Eğer $\mathbb{Z}$ de toplama işlemi tanımlıyorsak orada önemlidir. Bunun dışında nerede önemli olabilir ki... Tanımladığım küme üzerinde grup olması için ters eleman olması gerekiyor. O zaman çalıştığım küme üzerinde birim elemanı olması gerekiyor ki çalıştığım kümenin dışına çıkmayayım ya da başka bir yerden eleman seçmek zorunda kalmayayım. Zaten öyle olursa grup olmaz.

Büşra, grup tanımı ile alakalı olarak sayılar üzerinde işlem yapma kolaylığı sağladığını belirtmiştir. Grup şartlarını düşündüğünde bu şartların sağlanmasının o kümeyi özel bir küme yaptığını ve bu sayede de sayılar üzerinde işlem yapma kolaylığı sağladığını düşünmektedir. Kapalılık özelliği için toplama işlemi örneği üzerinde düşünerek kapalılık özelliği sağlandığında hangi küme üzerinde çalışıldığının belirli olduğuna vurgu yapmıştır. Birleşme özelliğinin tanımlanan işlem üzerinde matematiksel oyunlar oynayabilmemize olanak sağladığına ve bu sayede matematiksel rahatlık sağladığına odaklanmıştır. Birim eleman için birim eleman tanımı dışına çıkamamış ve birim eleman ile ters eleman arasındaki ilişkiden söz etmiştir. Bununla birlikte birim eleman özelliğinin de grup şartları arasında olmasından dolayı kümeyi özel kılmak için bu özelliğin de sağlanması gerektiğini düşünmektedir. Ters elemanla ilgili ise eğer ters eleman olmasaydı birim eleman olmazdı şeklinde düşünmektedir. Bu yüzden ters eleman içinde birim elemanla arasındaki ilişkiden bahsetmiş ve bunun dışına çıkamamıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

Büşra: Grup denildiğinde aklıma gelen şey bu dört maddesi oluyor. Bunun dışında aklımda bir resim, şema canlanmıyor açıkçası... Mesela burada yer alan problemde örnek verecek olursam $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi yanlış hatırlamıyorsam eğer yarı gruptur. Sonuçta zihnimde de buradaki gibi bir küme canlanıyor.

Büşra, grup kavramına yönelik olarak tanım dışında bir kavram imajı oluşturmamıştır. Grup kavramı ile ilgili ilk aklına gelenler grubun sağlaması gereken özellikleri olmuştur.

4.2.5.3. Alt grup kavramı

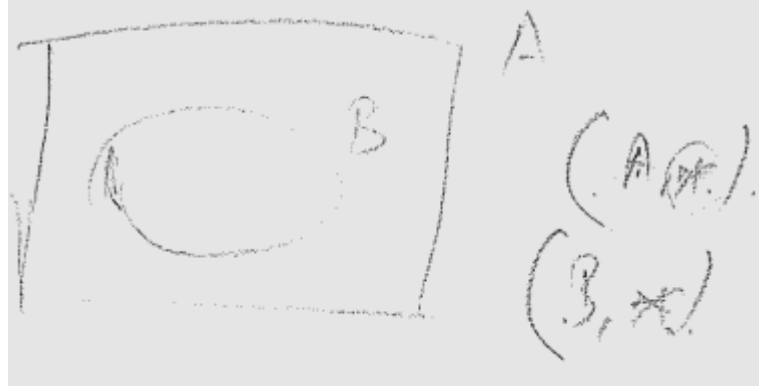
Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Büşra: [Düşünüyor]... Mesela hocam reel sayılar toplama işlemine göre bir gruptur. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi de onun bir alt grubudur. Reel sayılar kümesindeki elemanların bir kısmı $\mathbb{Z}$ de yoktur. Bu şekilde düşünüldüğünde kümenin kısıtlanması söz konusudur. Buradan da $\mathbb{Z}$ üzerinde işlemler yapıp bunu reel sayılara genelleleyebiliriz. Çünkü $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde reel sayılara göre bazı özellikleri görmek daha kolay olabilir.

Büşra, alt grubun küçük kümeler üzerinde çalışmanın daha kolay olmasından dolayı tanımlanmış olabileceğini bir örnekle açıklamaya çalışmıştır. Buna göre reel sayılar üzerinde toplama işleminin sağlaması gereken özellikleri tamsayılar üzerinde görmek daha kolaydır. Ayrıca tamsayıların toplama işlemine göre sağladığı özellikleri reel sayılar kümesi de sağlar. Çünkü tamsayılar toplama işlemine göre reel sayıların bir alt grubudur şeklinde açıklamaya çalışmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.16. Büşra'nın Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Büşra: Mesela G grubu büyük bir küme ise mesela G grubundaki kümeyi bir evrensel küme olarak düşünürsek onun alt grubunda yer alan kümeyi daha küçük bir küme olarak düşünebiliriz. Yani ilk aklıma gelen şekil bir alt küme oluyor. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Burada bir A kümesi ve onun bir alt kümesi olan B kümesini alabiliriz. Burada A ve B kümeleri aynı işleme göre birer grupturlar. Yani burada B kümesi üzerinde çalışıp kullandığımız veya bulduğumuz özellikleri A kümesine genelleyebiliriz. Çünkü aynı işleme göre her ikisi de bir gruptur.

Büşra, alt grup kavramına yönelik kavram imajını alt küme kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Buna göre A grubu B grubunu kapsamaktadır ve her iki grup da aynı işleme göre tanımlanmıştır. Dolayısıyla B kümesi üzerinde $*$ işlemine göre çalışıp bulduğumuz özellikleri A kümesine genelleyebiliriz şeklinde bir açıklama yapmıştır.

4.2.5.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Büşra: Hocam mesela ilk gruptan seçilen iki elemanın işleminin sonucuyla ikinci gruptan aynı elemanların işlemlerinin sonucunun aynı olması gerekiyor. Birebir bir dönüşüm gibi düşünebiliriz.

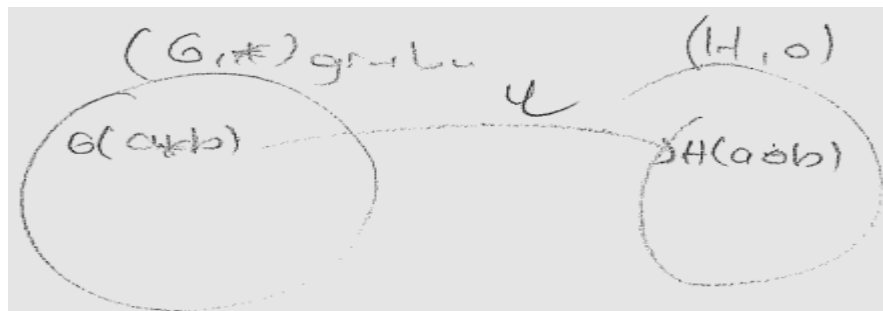
Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Büşra: Eğer bu şekilde tanımlanmış olmasaydı tanımda farklı iki grup denilmezdi. Yani tanımlanan gruplar $(G,*)$ ve $(H,*)$ gibi olurdu ve sanki birbirlerinin alt grupları üzerinde tanımlanmış gibi olurdu. Bu şekilde farklı gruplar üzerinde tanımlanan bir dönüşümde de görüntü kümesi üzerindeki işleme göre hareket edilmesi gerekir çünkü burada ikinci işlem H kümesi üzerinde tanımlıdır ve bu küme üzerinde kapalıdır. Eğer işlem değişmeyip $*$ işlemi olarak kalsaydı işlemin kapalılığı hakkında bir şey söyleyemezdik.

Büşra, grup homomorfizminin birebir bir dönüşüm olarak düşünülebileceğini ifade etmiştir. Bu düşüncesini de grup homomorfizmi kavramındaki eşitlikten yararlanarak şekillendirmiştir. Grup homomorfizmi kavramında işlemlerin değişmesini de grup homomorfizminin farklı gruplar arasında tanımlanmasından yararlanarak ifade etmiştir. Büşra, dönüşüm altında işlemlerin değişmesi gerektiğini çünkü gruplar üzerinde tanımlanan işlemlerin farklı olduğunu belirtmiştir. Eğer işlemler bu şekilde değişmiş olmasaydı görüntü kümesinde kapalılık özelliği olmayabilirdi şeklinde açıklama yapmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.17. Büşra'nın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Büşra: Hocam bu tanım iki grup arasında tanımlanan birebir eşleme gibi bir şey... Aklıma ilk bu geliyor. Yani iki grup arasında tanımlanan bir fonksiyon gibi düşünüyorum. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Yani hocam $(G,*)$ gibi bir grup alsam ve bu

grup içerisinde aldığım iki elemanı $*$ işlemine alsam; ikinci olarak da (H, o) işlemi alsam ve yine bu grup içerisinde aldığım iki elemanın bileşke işlemine göre tabi tuttuğumda bunların sonuçlarının birbirine eşlenmesidir. Yani bir φ dönüşümü vasıtasıyla bu elemanların birbirleriyle eşlenmesidir.

Büşra, grup homomorfizmi ile ilgili kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Tanım kümesini ve değer kümesini farklı grupların oluşturduğu özel bir fonksiyon imajı geliştirmiştir. Fakat Büşra tanımladığı temsili φ dönüşümünü yanlış resmetmiştir. Çünkü G grubundan alacağı elemanların φ dönüşümü altındaki görüntülerinin H grubunda olması gerekiyor. Buna karşın Büşra H grubunun elemanları ile G grubunun elemanlarını φ dönüşümü ile direk eşitlemiştir.

4.2.5.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: *Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Büşra: *[Düşünüyor]... Biz daha önce vektörü başlangıcı ve bitişi olan yönlü doğru parçalarına vektör denir diyorduk. Bu tanımla ilk defa karşılaştım açıkçası... Bu tanımda bize vektörleri uzayda düşünmemize yardımcı olmak için yapılmış olabilir.*

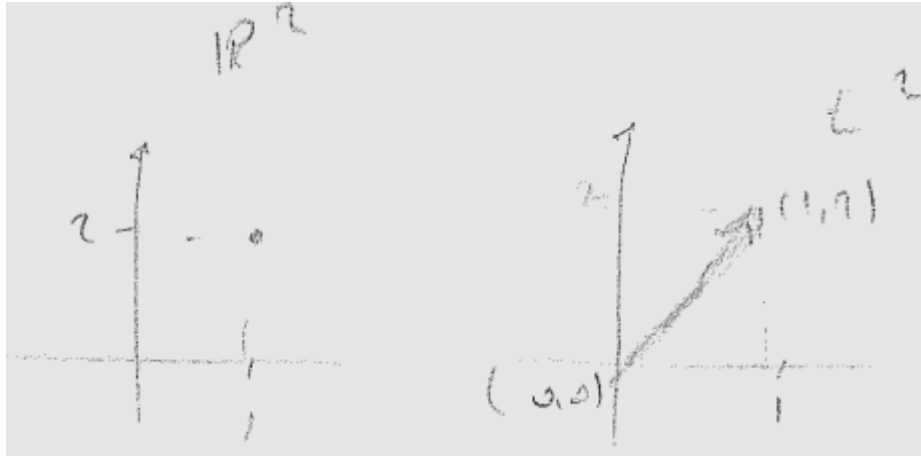
Mülakatçı: *Güzel... Peki bu tanıma göre $CD = AB$ midir? Neden?*

Büşra: *Yani aynı yönlü, eşit uzunlukta ve paralel... Eğer bu üçü sağlanıyorsa evet birbirine eşit vektörlerdir. Yani tüm özellikleri aynıdır. Yani normu aynı, yönü aynı, doğrultusu aynı, uzunluğu aynı, her şeyi aynı yani... Bu şekilde düşünüldüğünde birbirlerine eşittir.*

Büşra, etkinlik içerisinde yer alan vektör tanımıyla ilk kez karşılaşmıştır. Daha öncesinde vektörü başlangıcı ve bitişi olan yönlü doğru parçası olarak öğrendiklerini ve bu tanımın vektörleri uzayda düşünmesini sağladığını belirtmiştir. Bununla birlikte tanımla ilgili şekli yanlış yorumlamış ve şekilde verilen vektörlerin birbirine eşit olduğu yanlışlığına düşmüştür.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*



Şekil 4.18. Büşra'nın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Büşra: Vektör denildiğinde aklıma bileşenlerden oluşan yönlü bir doğru parçası geliyor. Mesela hocam $\mathbb{R}^2$ de (1,2) bana bir nokta ifade eder. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Ama E^2 de (1,2) dediğimde belirli bir uzunluğu, yönü ve doğrultusu olan bir vektör verir. Yani başlangıcı (0, 0) ve bitişi (1, 2) olan bir vektör verir.

Büşra, vektörlerle ilgili kavram imajını şekil 4.18 deki gibi oluşturmuştur. Şekil incelendiğinde Büşra kavram imajını oluştururken daha önceden öğrendiği vektör tanımlarından yararlanmış ve bir örnek üzerinde kavram imajını geliştirmiştir.

4.2.6. Aykut'un Durumu

4.2.6.1. İkili işlem kavramı

Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aykut: Bu tanım... Tanım kümesini ikililerin oluşturduğunu... [eee]... Yani tanım kümesinde iki tane kümenin kartezyen çarpımından oluşan kümenin elemanlarından tek bir elemanla eşleşmesiyle oluşan bir bağıntı olduğunu anlıyoruz. [Başka türlü nasıl anlatabilirim...]Yani buradaki tanımda bir A kümesinin kendisiyle kartezyen çarpımından oluşan elemanlar ikili işlemin tanım kümesini oluşturmaktadır. Yani tanım kümesi ikililerden oluşmaktadır. Değer kümesinde ise yine A kümesinin tek elemanları bulunmaktadır. Bu şekildeki bir dönüşüme ikili işlem adı verilmiş.

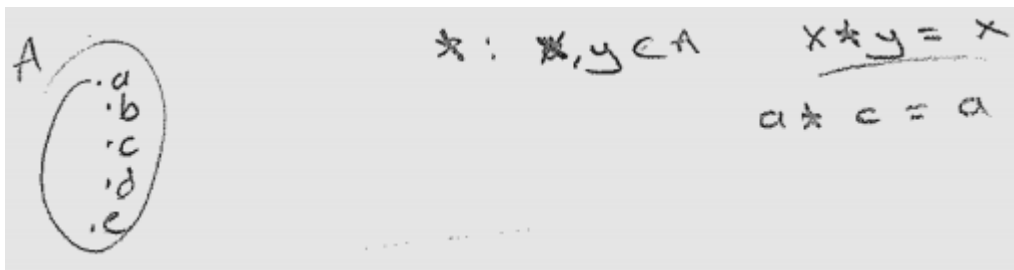
Mülakatçı: Peki o zaman $A \neq B$ için, $A \times B \rightarrow A$ ya tanımlı bir dönüşüm içinde ikili işlem diyebilir miyiz? Neden?

Aykut: Bence yine bir ikili işlem olur. Ama A ve B kümeleri...[eee]... Benim bildiğim kadarıyla ikili işlem sonuçta işlem sayısına bağlı bir şey... Hatırladığım kadarıyla bence olur... Yani kartezyen çarpımdaki kümeler farklıda olsa biz yine bir ikili işlem tanımlayabiliriz.

Aykut, ikili işlem tanımını tanım kümesini ikililerin oluşturduğu ve değer kümesini de kümenin tek elemanlarının oluşturduğu bir bağıntı olarak yorumlamıştır. Aykut, ikili işlem tanımında $A \times A \rightarrow A$ ya ifadesini tam olarak anlayamamış ve $A \times B \rightarrow A$ ya bir ikili işlemin tanımlanabileceği yanılgısına düşmüştür.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.19. Aykut'un İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aykut: $A \times A$... [Kâğıttaki şekli çiziyor]... Örneğin tanımda bir A kümemiz var... Elemanları $\{a, b, c, d, e\}$ şeklinde olsun. $A \times A$ ya bir tane işlem tanımlıyoruz. Mesela bir $*$ işlemi tanımlayalım... [eee]... Ne olsun... $x > y$ lerden oluşsun ve bu elemanların her ikisi de A kümesinin elemanı olsun. A dan aldığımız iki eleman için $x * y = x$ olarak tanımlayabiliriz. Böyle bir fonksiyon tanımladık... Örneğin bu bağıntıya göre A kümesinden x ve y gibi elemanlar alalım. Mesela $a * c = a$ şeklinde olsun veya başka elemanlarda alabiliriz. Bu şekilde tanımlayabiliriz ikili işlemi ve buna bir ikili işlemdir diyebiliriz.

Aykut, ikili işlem ile alakalı kavram imajını şekil 4.19 daki gibi oluşturmuştur. Şekil incelendiğinde Aykut'un tanım kümesini $A \times A$ olarak düşündüğü ve bir örnek üzerinde ikili işlemi açıklamaya çalıştığı görülmektedir. Aykut'un ikili işlemle ilgili fikirlerinin tam oluşmadığı kavram imajından da görülmektedir. Tanımladığı A kümesine göre bir kartezyen çarpımdan bahsetmesine rağmen bunu şekle dökememiştir. Ayrıca kullandığı notasyonlar karışıklığa sebep olmuştur.

4.2.6.2. Grup kavramı

Mülakatçı: *Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Aykut: *Grup, öncelikle cebirsel yapılardan bir tanesi... Bir küme üzerinde bir ikili işlem olması gerekir. Küme ve bir ikili işlemin oluşturduğu cebirsel yapıya grup diyoruz. Örneğin; Doğal sayılar kümesini ve toplama işlemini aldığımızda bu ikili bir grup oluşturur. Bu şekildedir.*

Mülakatçı: *Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?*

Mülakatçı: *Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?*

Aykut: *Kapalılık özelliği sağlanmadığı zaman... [Eee]... Zaten grubun tanımından gidersek, bu şart sağlanmadığında grup olmaz. Olmamasının sebebi ise yine doğal sayıları ve çıkarma işlemini düşünürsek; doğal sayılar çıkarma işlemine göre bir grup değildir. Cebirsel yapıdır ama grup değildir. Neden grup olmadığı ise mesela $3 - 5$ dersek sonuç -2 çıkar ve bu sonuç doğal sayılarda tanımlı değildir. Yani elimizde bir küme var ve biz bu küme üzerinde bir işlem tanımlıyoruz ve sonuçta bu kümeden iki elemandan seçip işleme tabii tutulduğunda çıkan sonuç bu küme içerisinde olmuyor. Burada eğer biz tamsayıları bilmesek bu -2 elemanın ne olduğunu bile bilemeyiz. Yani çalıştığımız kümeye göre anlamsız bir şey elde edilmiş oluyor. Yani bizim çalıştığımız kümenin dışında belirsiz bir eleman çıkar dolayısıyla anlamsız bir şey oluyor. O yüzden de bir grup tanımlayamıyoruz...*

Mülakatçı: *Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?*

Aykut: Birleşme özelliği de grup sorularında epey kullanışlı bir özelliktir. Genel olarak bir çok teoremin ispatında da kullanıyoruz ama onun haricinde nasıl yararı vardır açıkçası fazla bir şey söyleyemiyorum. Genelde teorem ispatlarında falan kullandığımızdan önemlidir.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Aykut: Birim eleman özelliği yine teorem ispatlarında olsun, yine işlem sonuçlarının pratik bulunmasında olsun kullanışlıdır. Yani mesela uzun bir ifade verilmiş ve burada bunun sonucunu bulmada bir elemanın tersi ile işleme girdirilip sonucuna direk e yazarak sonuca pratik olarak ulaşmamızı sağlıyor. Yani onun birim eleman olduğunu bilmek işlemlerde kolaylık sağlıyor...

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Aykut: Ters eleman zaten birim elemanın bir sonucu... Yani bir elemanla onun tersini işleme sokarsak birim elemanı buluruz. Bunu da zaten teoremlerde fazlasıyla kullanıyoruz. Onun haricinde yine bir elemanın diğerinin tersi olduğunu bilirse yine işlemlerde işlerimiz epey bir kolaylaşmaktadır. Yani bize kolaylık sağlamaktadır. Yani farkında olmamız bize kolaylık sağlıyor.

Aykut, grubun bir küme ve bir ikili işlemin oluşturduğu cebirsel yapı olduğunu belirtmiş ve bunu bir örnekle açıklamıştır. Aykut, grubun tanımına bakıldığında zaten kapalılık özelliği sağlanmadığında bir gruptan bahsedilemeyeceğini doğal sayılar kümesi üzerinde çıkarma işlemi örneğini vererek açıklamaya çalışmıştır. Yani kapalılık özelliği olmadığında kümeden alınan elemanların işlem sonuçları kümenin içerisinde yer almadığından anlamsız bir sonuç bulunacağını ifade etmiştir. Birleşme özelliğinin de grup sorularında oldukça kullanışlı bir özellik olduğundan söz etmiştir. Genelde problem çözümlerinde ve teorem ispatlarında kullanıldığını ama bunun dışında ne işe yaradığıyla ilgili bir fikrinin olmadığını belirtmiştir. Birim elemanın da yine işlem sorularında oldukça kullanışlı olduğunu ve işlemlerde kolaylık sağladığını ifade etmiştir. Ters elemanında birim elemanın bir sonucu olduğunu belirtmiştir. Çünkü bir elemanla tersi işleme girdiğinde sonuç birim elemana eşit çıkmaktadır. Aslında ters elemanında aynen birim elemandaki gibi işlemlerde kolaylık sağladığını düşünmektedir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

Aykut: Grup denildiğinde... Direkt zaten grubun dört özelliği aklıma geliyor. Zaten bu dört özellik sağlandığından işlemleri daha basit bir şekilde yapabiliyorum. Yani mesela bu bir ikili işlem, şu bir küme diye verildiği zaman hemen verilen özelliklerine dikkat ediyorum. Mesela kapalılık sağlanıyor mu, birleşme sağlanıyor mu vs... Yani işlem yaparken ona göre yapmalıyım... Ama gruptur dediği zaman hemen birleşme, birim, ters ve kapalılık özelliklerini çekinmeden kullanarak sonuca ulaşabiliyorum. Yani grup denildiğinde bize basit anlamda kolaylık sağlayan bir küme gibi aklıma geliyor. Yani grup denildiğinde bir şekil, şema değil de direkt olarak bu dört özelliğin cebimde olduğunu düşünüyorum.

Aykut'un grup kavramı ile ilgili kavram imajı aslında grubun tanımıdır. Çünkü grup denildiğinde grup olma şartlarının sağlandığını ve işlemlerini buna göre yapabileceğini düşünmektedir.

4.2.6.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aykut: Soyut cebir dersi içerisinde bazı tanımları alt grup tanımından faydalananarak yapabiliyoruz. O yüzden buralarda alt grup kullanılıyor. Onun haricinde... İşte bir işlem, bir özellik alt grupta sağlanırsa zaten grupta da sağlanır. Bu şekilde birebir eşleme yaparak başka kümeler üzerinde de kullanabiliriz. Mesela doğal sayılarda sağlanan bir özellik reel sayılar kümesi üzerinde de sağlanır diyerek genellemeler yapabiliyoruz. Bu şekilde düşündüğümüzde reel sayılar üzerinde çalışmaktansa doğal sayılar kümesi üzerinde çalışmak bizlere kolaylık sağlamaktadır.

Aykut, alt grup kavramının soyut cebirde başka tanımları yapmalarına yardımcı olduğuna ve alt gruplarla gruplar arasındaki ilişkinin önemine vurgu yapmıştır. Bir örnek üzerinde alt gruplarda sağlanan özelliklerin gruplarda da sağlandığını açıklamak

istemiştir. Bu düşüncesinden hareketle grup üzerinde çalışmak yerine alt gruplarda çalışmanın kolaylık sağladığını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*

Aykut: *Ya gruplar zaten soyut bir kavram... Gruplar ikililerden oluşuyor. Bir işlem bir kümeden oluşan... Alt grup denildiğinde de yani bu grubun özelliklerini sağlayan bir yapı ve belli özellikleri aklıma geliyor. Yani alt grupla ilgili zihnimde sadece alt grubun özellikleri canlanıyor. Bir de alt grubunda bir grup olduğu aklıma geliyor.*

Aykut'un alt grup kavramına yönelik kavram imajı alt grup tanımından ibarettir. Öyle ki alt gruplarla ilgili ilk aklına gelenler alt grup özellikleri ve alt grupların da grup şartlarını sağlamasıdır.

4.2.6.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: *Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Aykut: *Öncelikle elimizde iki tane grup var ve ilk gruptan aldığımız iki eleman ve ilk grubun işlemine göre yapılan işlem ile görüntülerin ikinci gruba göre tanımlı işleme göre yapılan işlemin birbirine eşit olduğunu söylüyor. Bundan anladığımı şu şekilde ifade edebilirim; elimizde iki tane uzay var ilk uzaydan aldığımız iki eleman ve bu grup üzerinde tanımlı işleme göre yapılan işlemin sonucu tanımladığımız dönüşümle diğer uzayda da birinci uzaydan aldığımız elemanların görüntülerini ikinci uzaydaki işlemle yapılan işlemin sonucuna eşit olduğudur.*

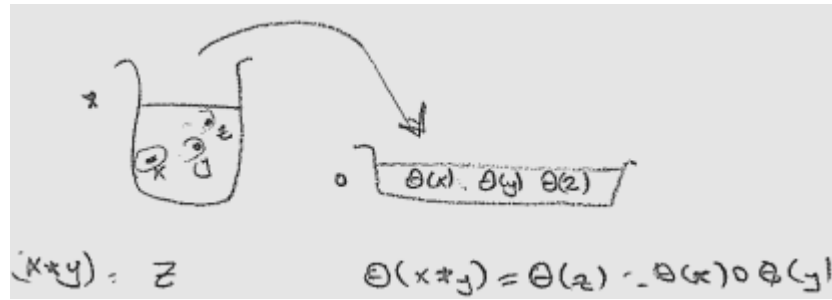
Mülakatçı: *Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?*

Aykut: *Burada birinci işlem elimizde tanımlı olan birinci grubun işlemidir. Mantık gereği birinci işlemle ilk kümeden aldığımız elemanlar üzerinde işlem yapmamıza izin verir. İkinci işlem ise ikinci kümeden aldığımız elemanlar üzerinde işlem yapmamıza izin verir. Verilen tanımda işlemin değişmemesi için H kümesinin de $*$ işlemine göre grup olması gerekir. Tanımda H kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu yüzden dönüşüm bu şekilde tanımlanmıştır.*

Aykut, grup homomorfizmi tanımından iki grup arasında tanımlanan bir dönüşüm olduğunu ve bu dönüşüm sayesinde birinci grupta yapılan işlemlerin ikinci gruba taşındığını düşünmektedir. Aykut, bu dönüşümde birinci grubun işleminin birinci gruptaki elemanlarla işlem yapmaya izin vereceğini, ikinci grupta tanımlanan işlemin de ikinci gruptaki elemanlarla işlem yapmaya izin vereceğini belirtmiştir. Bu yüzden homomorfizm dönüşümünde işlemlerin değişmesi gerektiğini vurgulamıştır. İşlemlerin değişmemesi için H grubunun da $*$ işlemine göre grup olması gerektiğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.20. Aykut'un Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aykut: Günlük hayatla belki de ilişkilendirebilirim. Kavramlar çok soyut olduğu için bunu yapmak biraz zor ama dönüşüm olarak düşündüğümüzde belki yapabiliriz. Aklıma ilk olarak bir üçgenin alanı ile bir çokgenin alanının homomorfik olarak birbirine eşit olabileceği geliyor. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Bir bardak suyu alıp boyut olarak daha yayvan bir kaba boşalttığımızda burada da bir dönüşüm yapmış oluruz diyebilirim. Yani burada ilk kap üzerinde yapabildiğimiz her işlemi ikinci kaptaki da yapabiliriz. Yani birinci kaptan aldığımız elemanlarla yaptığımız işlemleri ikinci kaptaki o elemanların görüntüleri ile de ikinci kabin işlemine göre yapabiliriz.

Aykut, grup homomorfizmi kavramına yönelik kavram imajını dönüşüm ifadesinden yararlanarak oluşturmuştur. Aykut, uzun bir kaptaki suyu daha geniş yayvan bir kaba boşalttığında bir dönüşüm yaptığını ve bu dönüşümün bir grup

homomorfizmi olduğunu ifade etmiştir. Yani birinci kaptaki elemanlarla yapılan işlemlerin birinci kaptaki elemanların görüntüleri ile ikinci kaptaki işleme göre de yapılabileceğini belirtmiştir.

4.2.6.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: *Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Aykut: *Şimdi bunu nasıl ifade edebilirim... Bir doğru ile bir vektörü ayırt edebilmek için sonuçta bir başlangıç noktasına ihtiyaç vardır. O yüzden başlangıç noktası şartı verilmesi gerekir. İkinci olarak paralel, aynı yönlü ve eşit uzunlukta olması gerekir denilmiş... Buradaki uzunluk değişkendir, yön farklı olabilir, bir de paralellik var... Bunlar $(0, 0, 0)$ noktasına göre tanımlanmıştır. Yani başlangıç noktası $(0, 0, 0)$ noktası olan bir vektöre paralel, eşit uzunlukta ve aynı doğrultuda olan başka doğru parçaları ile homomorfizm kurulamıyorsa bu doğru parçaları vektör olarak tanımlanamaz diyebilirim. Zaten vektörlerde toplama, çıkarma gibi işlemleri yapabilmemiz için bu vektörlerin yerlerini değiştirebilmek gerekir. Yani bu tanımda verilen paralellik, yön ve uzunluk sabit kalmak şartıyla vektörün başlangıç noktasını değiştirebiliyoruz. Bunları yapabildiğimiz için zaten vektörlerde işlem yapabiliyoruz. O yüzden de tanım vektörlerin yer değiştirebileceğine yönelik olarak verilmiştir.*

Aykut, vektör tanımını doğru bir şekilde yorumlamıştır. Tanımda yer alan ve vektörlerin sağlaması gereken özellikleri yorumlamıştır. Aykut, tanım ve şekil arasındaki bağlantıyı kurabildiği için vektörlerin bazı özellikleri değiştirilmediğinde uzayın başka noktalarına taşınabileceğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*



Şekil 4.21. Aykut'un Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aykut: *Vektör aslında liseden bu yana karşılaştığımız bir kavram... Vektör denildiğinde başlangıç noktası olan ve belli bir yönde uzayıp giden ışınlar aklıma geliyor. [Kağıttaki şekli çiziyor] ...*

Aykut, vektör kavramına yönelik kavram imajını başlangıç noktası olan ve belli bir yönde uzayıp giden ışınlar olarak oluşturmuştur.

4.2.7. Hatice'nin Durumu

4.2.7.1. İkili işlem kavramı

Mülakatçı: *İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Hatice: *Yani iki kümeden alınan elemanlarla yeni bir küme oluşturuyoruz. Yani iki kümenin birleşimiyle oluşturulmuş olan yeni bir kümenin elemanlarını başka bir kümeye götüren dönüşüm bir ikili işlem oluşturuyor.*

Hatice, ikili işlem kavramının, iki kümenin birleşimi ile oluşturulan yeni bir kümenin elemanlarının başka bir kümenin elemanlarına götüren dönüşüm olduğunu ifade etmiştir. Adayın düşüncelerinden ikili işlem tanımını tam olarak anlayamadığı görülmektedir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?*

$$A = \{a, b, c, d\} \quad a, b, c \rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

*	a	b	c	d
a	d	a	c	b
b	:			
c	:			
d	:			

Şekil 4.22. Hatice'nin İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hatice: İkili işlem denildiğinde ilk aklıma gelen şey işlem tablosu oluyor. Yani bir A kümesi $A = \{a, b, c, d\}$ ise mesela herhangi bir $*$ işlemine göre artık $*$ işleminin özelliğine göre tabloda sıralanışı aklıma geliyor (Kağıtta bulunan tabloyu oluşturuyor). Tabi burada tabloyu oluşturabilmemiz için $*$ işleminin belli bir kuralının olması gerekiyor ve elemanlar $*$ işleminin kuralına göre sıralanması gerekiyor. İlk etapta ikili işlem denildiğinde aklıma gelen bu şekilde bir tablo oluyor.

Mülakatçı: İkili işlem denildiğinde zihninizde oluşan ilk şey bir ikili işlem tablosu mudur?

Hatice: Yani evet... Belli bir kurala göre oluşturulmuş bir ikili işlem tablosu zihnimde ilk beliren şey...

Hatice, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajını belli bir kurala göre oluşturulan bir işlem tablosu olarak geliştirmiştir. Burada tablonun oluşturulabilmesi için $*$ işleminin kuralına göre A kümesinin elemanlarının sıralanması gerektiğini belirtmiştir.

4.2.7.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Hatice: Matematiksel olarak birçok özellikten yeni bir ifade oluşturuluyor yani... Yani bu özellikler sağlandığında kümeye yeni bir özellik tanınmış oluyor... Özellik demeyeyim de yeni bir şey tanımlanmış oluyor yani... Yani bu şartlar sağlandığında bu küme ve işlem artık özel bir küme halini alıyor. Bu özellikleri sağlayan bir küme birçok kümeden ayrılıyor yani... Diğer kümelerden ayrıldığından ve bu kümeyi biz grup diye

tanımladığımızdan dolayı grup olma özelliğinden artık bu kümeye birçok şeyi de sağlatabiliyoruz yani... Bu dört özelliği sağladığını tek bir kelimeyle gruptur dediğimizde bu küme üzerinde çeşitli şeyler tanımlayabiliyoruz ama hatırlayamıyorum ne tanımladığımızı...

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Hatice: Yani kapalılık orda tanımlanmış işleme göre kümenin kapalı olması... O kümeye ne katar acaba... Yani kapalı olması o kümenin o işleme uygunluğunu gösteriyor. Yani o kümede o işlemi kullanarak o kümede tanımlı olduğunu gösteriyor.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Hatice: Eee... Birleşmede ne sağlar bilmiyorum da... [Düşünüyor]... Birleşme özelliği kümeden alınan elemanları indirgeyebiliyor yani... Mesela üç eleman alıyoruz iki elemana indirgiyoruz, birbirlerine eşitliğini görüyoruz ve bu sayede ikili işlemin daha esnek olduğunu görebiliyoruz.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Hatice: Birim elemanda da o küme üzerinde o işleme göre bir tek eleman var ki o elemana göre... O küme içerisindeki her bir elemanın o elemanla işlemi sonucunda sonuç yine kendisine eşit çıkıyor. Bu özellik kümeye ne katar acaba... [Düşünüyor]... Mesela tamsayılarda toplama işlemine göre bir gruptur ve birim elemanı sıfırdır. Bu kümede sıfır olmasaydı acaba ne olurdu? Böyle olduğunda işlem tanımlanamaz. Yani şöyle tanımlanamaz. İki elemanı topladığınızda sonuç sıfır olabilir ama sıfır olmadığı zaman kapalılık şartı bozulur. Demek ki bu özellikler birbirlerine bağlıdır. Mesela birleşme özelliğinde de... Mesela birleşme özelliğinin olup olmadığını incelerken de birim elemanı kullanıyoruz.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar?

Hatice: Mesela tersi olmasaydı... [Düşünüyor]... Mesela yine tamsayılar örneğini düşünüyorum. O zamanda birim elemana ulaşmada zorluk yaşanırdı. Aslında şu özelliklerin çoğu olmasa çoğu teoremin ispatında kullandığımız özellikler o işlemde tanımlanmamış olacaktı.

Hatice, grup tanımından bir küme üzerinde grup şartlarının sağlanması sonucu bu kümenin diğer kümelerden ayrıldığını ve özel bir küme olduğunu anladığını ifade etmiştir. Ayrıca bir kümenin grup olması ile bu küme üzerinde bir çok özelliğin tanımlanabileceğini belirtmiştir. Hatice, kapalılık özelliğinin kümenin üzerinde tanımlanan işleme göre uygunluğunu göstereceğini ifade etmiştir.

Birleşme özelliğinin ikili işlemin esnekliğini gösterdiğini belirtmiştir. Buna göre birleşme özelliği sayesinde elemanların indirgenebileceğini düşünmektedir. Birleşme özelliği sayesinde üç elemanın iki elemana indirgendiğini ve bu şekilde işlemin esnek bir yapısının olduğuna karar vermiştir.

Birim elemanla ilgili olarak kavram tanımı dışına çıkamamıştır. Hatice, birim eleman tanımını kendi cümleleri ile ifade etmiştir. Bir örnek üzerinde düşündüğünde ise aslında grup olma özelliklerinin birbiri ile bağlantılı olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Ters elemanla ilgili olarak ise ters eleman olmasaydı birim elemana ulaşmakta zorluk yaşanırdı şeklinde görüş belirtmiştir. Hatice, ters elemanla ilgili net bir açıklama yapamamıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Şekil 4.23. Hatice'nin Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hatice: Grup denildiğinde benim ilk aklıma gelen şey tablo oluyor. [Kağıttaki tabloyu çiziyor]... Grup denildiğinde aklıma hep işlem tablosu geliyor. Bunun dışında grup denildiğinde dört tane grup şartının sağlandığı aklıma geliyor. Bunun dışında tabloda

değişme özelliğinin pratik olarak nasıl bulunduğu geliyor. Yani esas köşegene göre elemanların simetrik oluşu değişme özelliğinin varlığını gösteriyordu. Bununla birlikte birim elemanı bulma nasıldı onlar aklıma geliyor. Ayrıca grup denildiğinde yine o dört özelliğin sağlandığı da aklıma geliyor. Yani bir küme ve bir işlem var. O küme o işleme göre bu dört özelliği sağlıyorsa gruptur.

Hatice, grup kavramına yönelik kavram imajını ikili işlem kavramında olduğu gibi işlem tablosundan yararlanarak oluşturmuştur. Bununla birlikte grup denildiğinde bir küme ve bir ikili işlem aklına gelmektedir. Ayrıca küme üzerinde tanımlan işlemin sağlaması gereken dört şartı hatırlamaktadır.

4.2.7.3. Alt grup kavramı

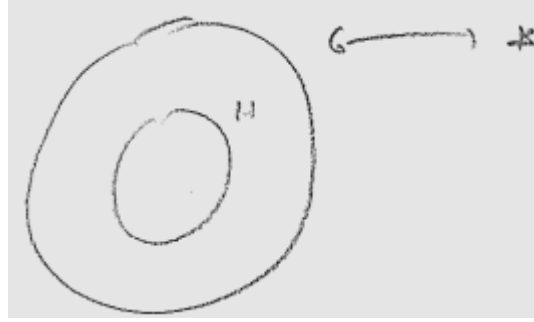
Mülakatçı: *Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Hatice: *[Düşünüyor]... Belki kümeyi kısıtlayıp işlemleri kolaylaştırmak olabilir. Mesela bir kümenin grup olduğunu gösterebilmek için onun bir alt kümesi üzerinde işlem yaparak daha kolay görebiliriz. Mesela burada yer alan problemde H kümesi G nin alt kümesidir ve H ın bir grup olduğunu G nin grup olmasından dolayı daha kolay görebiliriz. Yine bu problemde yer alan H kümesi G ye göre daha küçük bir kümedir ve kümelerde kısıtlama yaparak işlemleri kısıtlıyoruz.*

Hatice, alt grup tanımı ile ilgili olarak bir kümenin kısıtlanması ve bu sayede işlemleri kolaylaştırmanın amaçlandığını belirtmiştir. Eğer bir G kümesinin grup olduğu gösterilmek isteniyorsa bu kümenin bir alt kümesi olan H kümesinin grup olduğunu göstermenin daha kolay olduğunu ifade etmiştir. Hatice, bu şekilde işlemlerin kolaylaştırılması için alt grup tanımının oluşturulmuş olabileceğini düşünmektedir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*



Şekil 4.24. Hatice'nin Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hatice: Şu anda yok hocam.

Mülakatçı: Peki burada yer alan tanıma göre zihninizde oluşanlar nelerdir?

Hatice: Yani bu alt grubun tanımı... Yani aslında zihnimde ilk canlanan venn şemasıyla oluşturulmuş bir küme ve yine bu küme içerisinde yer alan başka bir venn şemasıyla bir küme oluyor. Aslında bu şekil şuan aklıma geldi belki her zaman aynı şekil aklıma gelmeyebilir. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Mesela $*$ işlemine göre G bir grup olsun ve H, G nin bir alt kümesi ve yine $H, *$ işlemine göre bir grup ise bu H kümesi $*$ işlemine göre G nin bir alt grubu olur deriz.

Hatice, alt grup kavramına yönelik kavram imajını alt küme kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Hatice, temsili bir G grubu ve bu gruptan aldığı bir H alt kümesini venn şeması ile göstermiştir. Şekil üzerinden G ve H kümelerinin $*$ işlemine göre grup olmaları gerektiğini ifade etmiştir.

4.2.7.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Hatice: Yani bir fonksiyon gibi düşünebiliriz. Burada dönüşüm denilmesinin sebebi de bu zaten, dönüşüm zaten bir fonksiyondur. Bunun dışında grup homomorfizmi yardımıyla belki de grupları birbirine dönüştürüyor olabiliriz. Yani grup homomorfizmi yardımıyla G den aldığımız elemanlarla H kümesinin elemanlarını oluşturuyoruz.

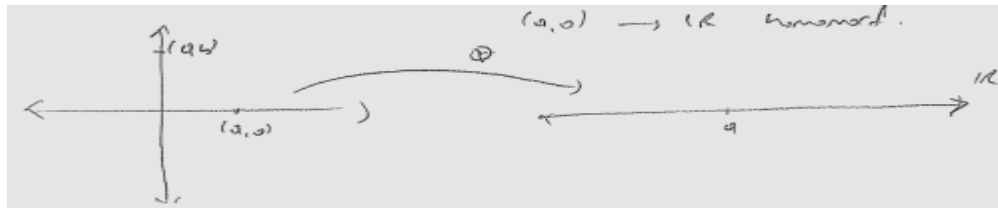
Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Hatice: Buradaki φ zaten grup homomorfizmi ve biz buna eş yapı dönüşümü de diyorduk. Bu sayede iki grubun birbirine denk olup olmadığını kontrol ediyoruz. Çünkü G den alınan elemanlarla G kümesi üzerindeki işleme göre işlem yapıyoruz. H kümesinin elemanlarını da G den alınan elemanların görüntüleri oluşturuyor ve bu elemanlar üzerindeki işlemde H bir grup olduğu için H kümesi üzerindeki işleme göre yapıyoruz. Yani iki grubu birbirine denk hale getirmeye çalışıyoruz.

Hatice, grup homomorfizmi tanımında geçen dönüşüm ifadesinin bir fonksiyon olmasından dolayı bu kavramın bir fonksiyon olarak düşünülebileceğini ifade etmiştir. Bu dönüşüm sayesinde G kümesinin elemanları ile H kümesinin elemanlarının oluşturulabileceğini belirtmiştir. Yani homomorfizm yardımıyla grupların birbirine dönüştürülebileceğini vurgulamıştır. Homomorfizm sayesinde grupların birbirine denk hale getirildiğini ve bu yüzden işlemlerin değiştiğini belirtmiştir. Çünkü H grubunun elemanları G grubunun elemanlarının görüntüleri ile oluşturulmaktadır ve bu elemanlarla işlem yapmak için H kümesi üzerinde tanımlanan işlemin kullanılması gerektiğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.25. Hatice'nin Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hatice: Homomorfizm ile ilgili kompleks sayıların $(a, 0)$ şeklinde ifade edilmesinden dolayı kompleks sayıların Reel sayılara homomorf olduğunu hatırlıyorum ve ilk duyduğumda çok hoşuma gitmişti. Yani ben bunu bilmiyordum ve $(a, 0)$ şeklindeki kompleks sayıların reel sayılara homomorf olduğunu öğrendiğimde homomorfizmin ne

işe yaradığını da öğrenmiştim. Yani $(a, 0)$ şeklindeki sıralı ikililer reel sayılara denktir. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Yani kartezyen düzlem üzerindeki $(a, 0), (0, b)$ elemanlarının reel sayılara yani sayı doğrusuna denk olduğunu söyleyebiliriz. Yani buradaki $(a, 0)$ ikilisini reel sayı ekseninde a gibi bir reel sayı ile eşleyen φ dönüşümüne bir homomorfizm denir. Yani denk yapı dönüşümü diyebiliriz.

Hatice, homomorfizm kavramına yönelik kavram imajını ön bilgilerinden yararlanarak oluşturmuştur. Hatice, kompleks sayılar kümesinin $(a, 0)$ şeklindeki elemanlarının reel sayılar kümesine homomorf olduğunu göstermiştir. Bu şekilde kompleks sayılar kümesi ile reel sayılar kümesi arasında bir denk yapı dönüşümü tanımlanabileceğini ifade etmiştir.

4.2.7.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: *Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Hatice: *Yani tanıma göre burada verilen vektörler eşittir. Aslında burada verilen vektörler büyüklük olarak aynıdır. Yani üç boyutlu uzayda bu vektörlerin yerleri farklıdır.*

Mülakatçı: *Güzel... Peki bu vektörlerin yerlerinin farklı olması bu vektörlerin farklı olduğunu gösterir mi?*

Hatice: *Farklıdır tabi... Diğer türlü şöyle olur; büyüklüğü bir birim olan bütün vektörler aynı olur. Aynı zamanda da o zaman üç boyutlu uzayda bu vektörlerin tanımlanmasının bir manası kalmaz.*

Mülakatçı: *Şu şekilde düşünelim. Uzayın farklı noktalarından aynı yönlü ve paralel birer birimlik iki tane vektör alsak bu iki vektör birbirine eşit olur mu?*

Hatice: *Tanıma göre bunu söyleyebiliriz. Çünkü tanımda vektör o şekilde tanımlanmış...*

Mülakatçı: *Peki bu konuda sizin düşünceniz nedir? Neden?*

Hatice: *Bence aynı olmazlar... Mesela AB vektörü ile CD vektörünü düşünelim. AB vektörünün başlangıç noktası A, diğerinin başlangıç noktası ise C... Yani uzayda bulundukları konumlar farklıdır.*

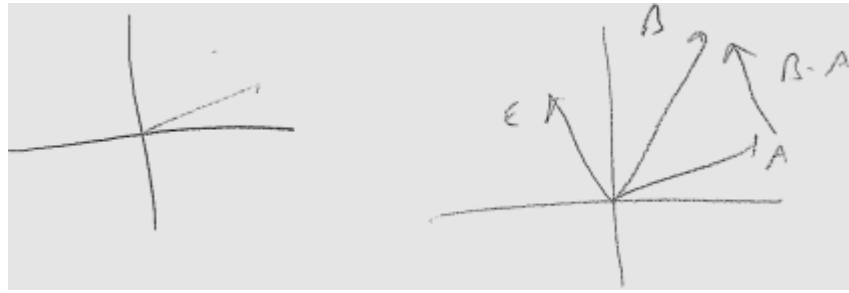
Mülakatçı: *Burada şekilde verilen vektörler paralel, aynı yönlü ve eşit uzunluktadır. Bu şartları sağlamalarına rağmen farklı mıdır? Neden?*

Hatice: Evet... Çünkü bu vektörlerin uzaydaki konumları birbirinden farklıdır.

Hatice, vektör kavramına yönelik tanımı tam olarak yorumlayamamıştır. Tanımda yer alan vektörler arasındaki denklik bağıntısını zihninde oluşturamadığı için bu vektörlerin eşit olma durumları üzerinden yorum yapmıştır. Hatice tanımla ilgili şekilde yer alan vektörlerin konumlarının birbirinden farklı olduğu için eşit olamayacaklarını belirtmiştir. Ancak tanımda bu vektörlerin birbirine eşit olarak verildiğini düşündüğü için kafası karışmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?



Şekil 4.26. Hatice'nin Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Hatice: Yani 0 dan başlamış ve artık nereye doğru giderse gitsin bir doğru parçası aklıma geliyor.

Mülakatçı: Yani her zaman vektörün sıfırdan mı başlaması gerekir?

Hatice: Yani biz derslerde hep öyle yapıyorduk. Aklıma hep öyle geliyor ama illa oradan başlaması gerekmez. [Kağıttakileri çiziyor]... Yani ilk etapta iki boyutlu uzay geliyor. Yani benim ilk aklıma gelen iki boyutta sıfırdan başlayan bu yönlü doğru parçasıdır.

Hatice, vektör kavramına yönelik kavram imajını $\mathbb{R}^2$ de başlangıç noktası $(0,0)$ olan yönlü bir doğru parçası olarak oluşturmuştur. Aslında vektörlerin başlangıç noktasının her zaman $(0,0)$ olması gerekmediğini fakat derslerde hep bu şekilde vektörler çizdikleri için aklıma ilk gelen vektörün bu şekilde olduğunu belirtmiştir.

4.2.8. Ayfer'in Durumu

4.2.8.1. İkili işlem kavramı

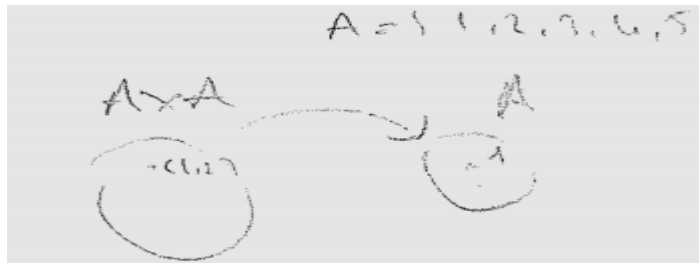
Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayfer: Yani bir bağıntı olarak da düşünebiliriz... Yani tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi de A olan bir bağıntıdır diyebiliriz. Yani, tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi A olan özel bir dönüşüm de diyebiliriz. Aslında ikili işlem dediğimiz kavram fonksiyon olma özelliklerini sağlamalıdır.

Ayfer, ikili işlem kavramının fonksiyon olma özelliklerini sağlaması gerektiğini belirtmiştir. İkili işlemin, tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesinin de A kümesi olan özel bir bağıntı olduğunu ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.27. Ayfer'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayfer: Matematiksel olarak mı yapmalıyım...

Mülakatçı: Aslında istediğiniz gibi yapabilirsiniz. İlk aklınıza gelenleri çizebilirsiniz.

Ayfer: [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Şöyle diyelim... $A \times A$ kümesinden A kümesine bir ikili işlem olarak aklıma gelenler bu şekilde...

Mülakatçı: Bu çizdiğiniz şekilde $A \times A$ kümesinden bir eleman gösterebilir misiniz?

Ayfer: Mesela şu şekilde $(1,2)$ elemanını alabiliriz. [Emin olamıyor söylediğinden ve doğrulatmaya çalışıyor...] ... Tabiki burada A kümesinin elemanlarını seçmem

gerekiyor... A kümesini mesela $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olarak alalım. Burada çizdiğim ikili işlem şemasına göre mesela $A \times A$ kümesinden aldığım $(1, 2)$ elemanı A kümesinde herhangi bir elemanla eşleşebilir. Burada mesela 1 ile eşleşebilir. Yani burada anlatmak istediğim şey tanım kümesi ikililerden değer kümesi ise A kümesinin herhangi elemanlarından oluşmalıdır. [Yani söylediklerim doğru mu bilmiyorum ama hocam öyle düşünüyorum...]

Ayfer, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuş ve tanım kümesi $A \times A$, değer kümesi A olan bir fonksiyon şeması çizmiştir.

4.2.8.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayfer: Belli şartları birleştirdiğimizde grup oluyormuş. Neymiş bunlar kapalılık özelliği, birleşme, birim eleman ve ters eleman özellikleri...

Mülakatçı: Acaba bu özellikler neden seçilmiş ve neden önemlidir?

Ayfer: Çünkü... Niye önemli... [Düşünüyor]...

Mülakatçı: Grupla ilgili olarak biliyoruz ki sağlanması gereken dört tane şartımız var değil mi? Size göre bu şartlar ne anlam ifade ediyor ve neden önemlidir?

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Ayfer: Kapalılık şartı şu demek zaten... O kümenin elemanı olduğunu gösterir. O kümenin elemanı değilse gruptan bahsedemeyiz. Daha doğrusu aradığımız kümeden bahsedemeyiz... Yani işlem kapalı olmazsa ikili işlemden söz edemeyiz. İkili işlemden söz edemezsek de gruptan söz edemeyiz.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Ayfer: Birleşme özelliği mi? Birbirine eşit olduğunu göstermek için önemlidir.

Mülakatçı: Nelerin birbirine eşit olduğunu gösteriyoruz?

Ayfer: Elemanların... Mesela toplama ya da çarpma işleminde fark etmez elemanların birbirine eşit olduğunu göstermek için kullanırız. Birleşme özelliği aslında bizim

bildiğimiz manada biraz işlem önceliğine benziyor. Zaten işlem önceliğinin de birleşme özelliğinden kaynaklandığını düşünüyorum.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Ayfer: Etkisiz elemanda herhangi bir sayının işleme girdiğinde yine kendisini vermesi gerekiyor.

Mülakatçı: Peki ters eleman ne işe yarar? Bir grup örneği üzerinden de bu özellikler hakkında yorum yapabilirsiniz?

Ayfer: Mesela en basitinden tamsayılarda toplama işlemini ele alabiliriz. Bu küme bu işleme göre kapalıdır. Çünkü herhangi iki tane tamsayıyı ele aldığımızda onların toplamaları yine bir tamsayıdır. Birleşme özelliği de sağlanır yine... Mesela üç tane eleman aldığımızda işlem önceliğine göre ikişer ikişer alıp toplayabiliriz. Etkisiz elemanı... Tamsayılarda etkisiz eleman 0 dır. Herhangi bir tamsayıyı 0 ile toplarsak yine aynı sayıyı elde ederiz. Yine tamsayılardan yola çıkarsak her elemanın tersi vardır. İşlemimiz toplama ama yine... İşlemi belirtmemiz lazım... Çünkü hangi işlem olduğu önemli...

Mülakatçı: Güzel... Şimdi şöyle düşünelim. Tamsayılar toplama işlemine göre bir gruptur ve birim elemanı da 0 dır. Peki tamsayılarda sıfırı bulmak neden önemlidir?

Ayfer: Sıfıra ulaşmak için işleme giren elemanın tersini almamız gerekir. Bu şekilde ters elemanı kullanarak sıfıra ulaşırız ama neden ulaşırız bilemiyorum ☺.

Ayfer, grup tanımı ile ilgili olarak bir küme üzerinde tanımlı olan bir ikili işlemin kapalılık, birleşme özelliği, birim eleman ve ters eleman özelliklerini sağlaması gerektiğini belirtmiştir. Kapalılık özelliğini ikili işlem kavramından yararlanarak açıklamış ve küme üzerinde işlemin kapalı olmasının ikili işlem olmasından kaynaklandığını vurgulamıştır.

Birleşme özelliğini işlem önceliğine benzetmiştir. Kümeden alınan elemanların birbirine eşit olduğunu göstermek için hangi sırada işleme girdiklerinin önemli olmadığını belirtmiştir.

Birim elemanla ilgili olarak kavram tanımını kendi cümleleri ile ifade etmiş ve bir elemanın birim elemanla işleme girmesi sonucunun yine elemanın kendisi olduğunu belirtmiştir. Ters eleman için bir elemanla tersinin işleme girmesi sonucunun birim eleman olduğunu fakat birim elemana neden ulaştıklarını bilmediğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

* Grup denildiğinde tamsayılar kümesi, rasyonel kümesi, işlem topluluğu, gr-p olma şartları, özellikler, matematiksel ifadeler aklınıza gelir.

Şekil 4.28. Ayfer'in Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayfer: Grup denildiğinde... Mesela tamsayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi, işlem topluluğu... Daha çok sözel olarak matematiksel ifadeler aklıma geliyor. Grup olma şartları, özellikler, matematiksel ifadeler aklıma geliyor.

Ayfer, grup kavramı ile ilgili kavram imajını grup tanımından yararlanarak oluşturmuştur. Ayfer'in kavram imajı ile grup tanımı aynıdır. Bununla birlikte Ayfer grup denildiğinde ilk aklına gelenleri grup örnekleri ile açıklamaya çalışmıştır.

4.2.8.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayfer: Alt küme özelliğinden dolayı olabilir... Mesela $(G,*)$ bir grupsa ve H , G nin bir alt kümesi diyelim... Burada $(G,*)$ bir grup ve H da yine $*$ işlemine göre bir grup oluyorsa biz $(H,*)$ cebirsel yapısına G nin bir alt grubudur diyoruz. Yani alt kümesi olduğundan dolayı biz alt grup oluşturabiliyoruz.

Mülakatçı: Peki matematikçiler neden alt grup tanımlamış olabilirler?

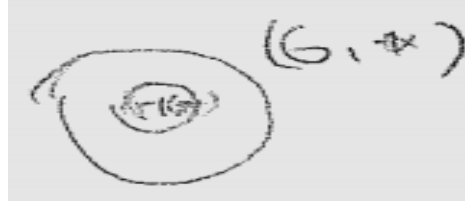
Ayfer: Eleman sayısını azaltarak doğruluğunu daha iyi görebilmek için olabilir. Yani belki de parçaladığımız kümenin küçük gruplardan oluştuğunu göstermek olabilir. Küçük grupların özelliklerini alındıkları kümeye yansıtmak için olabilir.

Ayfer, alt grup tanımını kendi cümleleri ile tekrar ifade etmiştir. Alt grupların, bir grubun parçalarının da küçük gruplar oluşturduğunu göstermek için tanımlanmış olabileceğini belirtmiştir. Bununla birlikte aday alt grupların, küçük grupların

sağladıkları özellikleri ait oldukları kümeye yansıtılabilmesi için tanımlanmış olabileceğini düşünmüştür.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?*



Şekil 4.29. Ayfer'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayfer: *Alt grup denildiğinde alt küme geliyor aklıma... [Kağıttaki şekli çiziyor]... Mesela bir G kümesi alalım ve bu G kümesi $*$ işlemine göre bir grup olsun. Bu kümenin bir de H şeklinde alt kümesini alalım ve H da yine $*$ işlemine göre bir grup olsun. Bu şekildedir.*

Ayfer, alt grup kavramına yönelik kavram imajını alt küme kavramından yararlanarak oluşturmuş ve alt grubu alt küme şeklinde izah etmiştir.

4.2.8.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: *Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?*

Ayfer: *Grup homomorfizminin aslında bir fonksiyon olduğunu anlıyorum. G den H ya bir fonksiyon...*

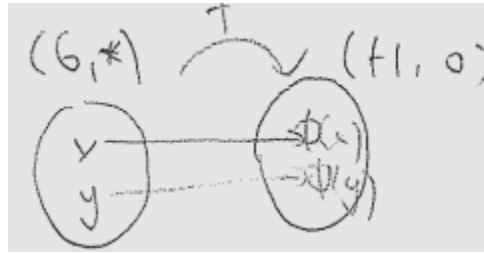
Mülakatçı: *Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?*

Ayfer: *Şimdi hocam iki tane grup olduğu için yapıyı koruması anlamında olabilir... Çünkü burada G grubu $*$ işlemine bir grup ve H da bileşke işlemine göre bir grup olduğundan tanımlanan dönüşümün yapıyı koruması gerekiyor. O yüzden dönüşümün bu şekilde tanımlanması gerekiyor.*

Ayfer, grup homomorfizmi tanımından bu kavramın bir fonksiyon olduğunu anlamaktadır. Ayrıca grup homomorfizmi kavramının yapıyı koruyan bir dönüşüm olduğu için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlandığını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.30. Ayfer'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayfer: Fonksiyonlar olabilir... Yani grup homomorfizmi kavramını fonksiyonlarla eşdeğer tutabilirim. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Tanım kümesi $(G, *)$ yapısı ve değer kümesi de $(H, \circ)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu olarak düşünebiliriz. G den aldığımız bir x elemanı H kümesi üzerinde $\varphi(x)$, ve yine G den aldığımız y elemanı da H kümesi üzerinde $\varphi(y)$ şeklinde eşlenir.

Ayfer, grup homomorfizmi kavramına yönelik kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Ayfer, grup homomorfizminin tanım ve değer kümesi gruplardan oluşan bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir.

4.2.8.5. Vektör kavramı

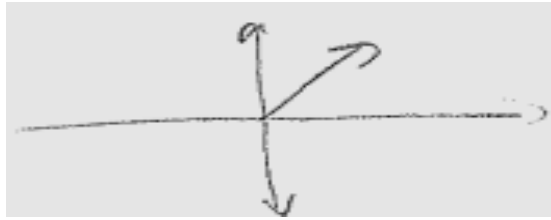
Mülakatçı: Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Ayfer: Benim buradan anladığım şey eğer vektörlerin büyüklükleri eşit ise yön olarak farklı da olsa vektörler birbirine eşittir. Yani yön olarak fark etmiyor. Yani vektörler birbiriyle eşit uzunlukta ise eşittirler. Yani yönlerinin aynı olmasına gerek yoktur. Yani yönünün farklı olması onun eşit olmadığını göstermez.

Ayfer, vektör tanımını tam olarak anlayamamıştır. Vektör kavramı ile ilgili tanımda yer alan denklik bağıntısını yorumlayamadığı için tanımla ilgili şekilde yer alan vektörlerin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte vektörlerin eşit olması için sadece büyüklüklerinin eşit olması gerektiğini, yönlerinin farklı olmasının eşitliği bozmayacağını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?



Şekil 4.31. Ayfer'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Ayfer: Yani vektör denildiğinde benimde aklıma burada yer alan şekle benzer şeyler geliyor. Sadece bana göre vektörlerin üç boyutlu olması önemli değildir. Mesela vektörler tek boyutta da olabilir, $\mathbb{R}^2$ de de olabilir. Yani vektör denildiğinde benim aklıma doğru parçalarından oluşan yapı geliyor. Yani $\mathbb{R}^2$ de bir vektör çizecek olursam... [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Bu şekilde 2 boyutlu bir vektör çizebilirim.

Ayfer, vektör kavramına yönelik kavram imajını $\mathbb{R}^2$ başlangıç noktası $(0,0)$ olan bir yönlü doğru parçası olarak geliştirmiştir. Ayrıca Ayfer vektörlerin sadece üç boyutta değil tek veya iki boyutta da tanımlanabileceğini belirtmiştir.

4.2.9. Aysel'in Durumu

4.2.9.1. İkili işlem kavramı

Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aysel: İşlemin tanımı... [Tanımı tekrar okuyor] ... Bana göre bu tanımı anlamak için öncelikle fonksiyon tanımını bilmek gerekiyor... [Biraz düşünüyor] ... Hocam çok zor

sorular soruyorsunuz... ☺ Bu tanım bize işlemin bir fonksiyon olacağını ama... $A \times A$ dan A ya bir ikili işlemin... [Eee] ... Başka ne söylenebilir... Bir de n li işlem vardır mesela orda $(A \times A)^n \rightarrow A$ ya gibi... Burada bize ikili işlemin $A \times A \rightarrow A$ ya bir fonksiyon olması gerektiğini anlatıyor. Bunun içinde bir kere tanımlı olması gerekiyor yani iyi tanımlılık özelliğini sağlaması gerekiyor. Yani bir ikili işlem iyi tanımlı olmalıdır. Başka ne olabilir... Yani fonksiyon olma özelliklerini sağlaması gerekiyor.

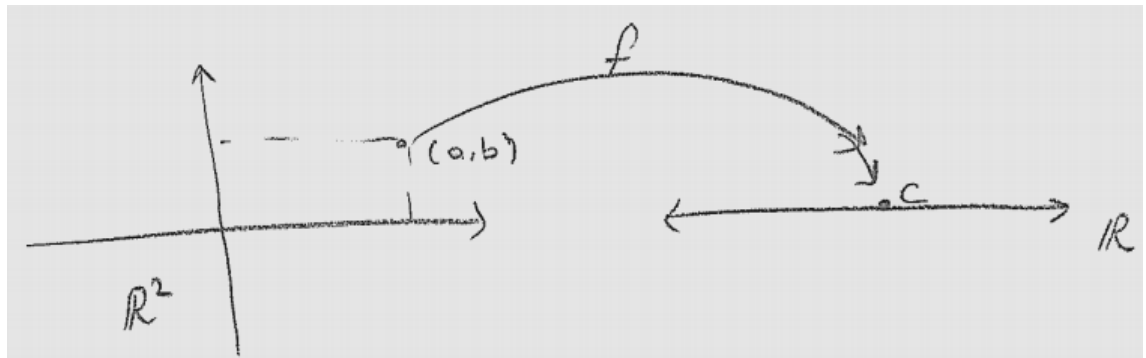
Mülakatçı: Peki o zaman her fonksiyon bir ikili işlemdir diyebilir miyiz?

Aysel: Yani her ikili işlem aslında bir fonksiyondur sonucuna ulaşabiliriz. Bunu çıkarıyoruz ama her fonksiyon bir ikili işlemdir diyemeyiz. Her ikili işlem bir fonksiyondur deriz çünkü $A \times A \rightarrow A$ ya olması gerekiyor. Yani burada tanım ve değer kümeleri önemli... Yani ikili işlemde $A^2 \rightarrow A$ ya ama her fonksiyon $A^2 \rightarrow A$ ya değildir. Bu yüzden her fonksiyon bir ikili işlem değil ama her ikili işlem bir fonksiyondur deriz.

Aysel, ikili işlemin tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi A olan özel bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir. İkili işlemin fonksiyon olma özelliklerinden iyi tanımlılığı sağlaması gerektiğini vurgulamıştır. Bununla birlikte her ikili işlemin bir fonksiyon olduğunu fakat her fonksiyonun bir ikili işlem olamayacağını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.32. Aysel'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aysel: Hayır... ☺ Nasıl resmedebilirim ki... Şema ile gösterebiliriz aslında... Mesela $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon tanımlayabilirim. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir

fonksiyon alalım... Yani kartezyen Düzlemden sayı doğrusu üzerine bir f fonksiyonu düzlemden alacağımız bir (a,b) elemanını sayı doğrusu üzerinde bir c elemanına götüren bir fonksiyon bir ikili işlem olabilir. O zaman 3 lü işlemde $A^3 \rightarrow A$ ya, n li işlem de $A^n \rightarrow A$ ya gibi düşünülebilir. Ama onları pek resmedemeyiz gibi geliyor. Yani A^3 olabilir belki ama üçüncü boyuttan sonrasını nasıl çizebiliriz ki...

Aysel, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Aysel ikili işlemi ifade etmek için koordinat düzleminde sayı doğrusu üzerine $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ye şeklinde bir f fonksiyonu oluşturmuştur.

4.2.9.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aysel: Bu tanımın bizlere anlatmak istediği şey küme üzerinde tanımlı olan işlemin, küme üzerinde tanımlı beraber grup olması için işlemin belirli özellikleri sağlaması gerekir. O özelliklerin neler olduğu burada sıralanmış zaten...

Mülakatçı: Peki işlemin bu özellikleri sağlaması bu kümeye nasıl bir ayrıcalık katıyor ve neden bu özellikler acaba?

Aysel: Aslında bu soruları bence grubu oluşturan ve özelliklerini tanımlayan kişiye sormak lazım... © Bilmiyorum...

Mülakatçı: Mesela tek tek inceleyecek olursak ve kapalılık özelliğinden başlarsak, kapalılık size göre neden önemlidir ve neden kümenin o işleme göre kapalı olup olmadığını inceleriz?

Aysel: Kapalı olduğunda bir kere o işlem fonksiyon oluyor... İyi tanımlı olmuş oluyor işlem... Dolayısıyla iyi tanımlanmış olması garanti altına alınıyor.

Mülakatçı: Peki birleşme özelliği için neler söyleyebilirsiniz?

Aysel: Onu geçelim... © Bununla ilgili aklıma hiçbir şey gelmiyor.

Mülakatçı: Birim eleman için ne söyleyebilirsiniz?

Aysel: Olmadığını düşünelim... Mesela doğal sayılarda 0 ın olmadığı sayma sayılarını düşünelim. Toplama işlemine göre yarı grup oluyor çünkü etkisiz eleman özelliği sağlanmıyor. Dolayısıyla grup olmuyor yani grubun tanımına uymuyor.

Mülakatçı: Peki sayma sayılarının toplama işlemine göre grup olmaması sayma sayılarının toplama işlemine hangi özelliklerini kısıtlamaktadır?

Aysel: Yani ben bunları hiç düşünmemiştim açıkçası...

Mülakatçı: Mesela aynı işleme göre monoid, yarı grup ve grup olan bir küme düşünelim. Bunların birbirlerine göre artıları eksileri nelerdir?

Aysel: Grup olunca o küme matematiksel olarak acaba o grubun sağladığı ama yarı grubun sağlamadığı özellikler oluyor belki de... Mesela ters ve etkisiz elemanı olmuyor yarı grupların... Dolayısıyla o işleme göre etkisiz eleman ve ters eleman sağlanmadığından tüm özellikler sağlanmıyor. Bir yerde işlemimizi sınırlandırıyor. Nasıl yaparız mesela o işleme göre herhangi bir elemanın tersini işleme sokamıyoruz. Yani bu bize ne kazandırır, dolayısıyla işlemimizi sınırlandırır. İşlemin özelliklerini sınırıyor. Tamsayıları düşündüğümde aslında ters elemanın olması belki de denklemlerde çözüm kümesi bulunmasını sağlar. Yani konuyu anlatırken de bence bu şekilde anlatılması kavramların soyut olmasının bir nebze de olsa önüne geçilebilir. Yani kullanıma dönük olarak kavramların ne işe yaradığını anlamımızı sağlar. Çünkü ben bu güne kadar bunları düşünmemiştim. Yani biz bu güne kadar sadece bir küme bir ikili işlem alıp belli bu dört şartı sağlamaya çalışıyorduk ve sağladığında da o kümenin o ikili işleme göre grup olduğunu söylüyorduk. Bu şekilde yapmaktansa grubun ne işe yaradığı ile ilgili üzerinde düşünmek daha anlamlı olabilir.

Mülakatçı: O zaman şimdi tekrar sorayım... Grup tanımı size ne anlatıyor? Neden?

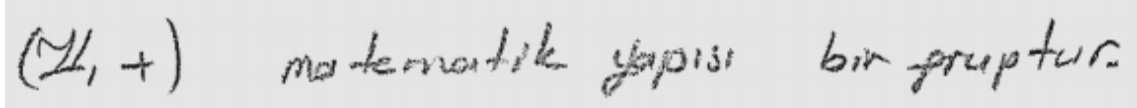
Aysel: Grup denildiğinde birçok işlemin yapılabildiği bir küme aklıma geliyor. Ya da işlemin özelliklerinin çoğunu barındıran bir küme... Çözüm kümesini çok rahat bulabileceğim bir küme... Yani o küme içerisinde bir denklem sistemi demek ki tanımlayabilirim. Yani birçok özelliğe sahip bir küme...

Aysel, grup tanımından bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanan işlemin grup şartlarını sağlaması gerektiğini anlamaktadır. Kapalılık özelliğinin ikili işlemin fonksiyon olmasını ve bu sayede iyi tanımlılığını garantilediğini düşünmektedir. Birleşme özelliği için yorum yapmamıştır. Birim elemanı için kümede birim eleman olmaması durumunu düşünmüş ve bu özellik sağlanmadığında kümenin grup olamayacağını belirtmiştir. Ters eleman için denklemlerde çözüm kümesi bulmada kullanılabileceğini ifade etmiştir. Sonuç olarak Aysel grupların, üzerinde birçok işlem

yapılabilen kümeler olduğuna karar vermiştir. Gruplar üzerinde denklem sistemleri kurulabileceği ve çözüm kümelerinin bulunabileceği sonucuna ulaşmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



$(\mathbb{Z}, +)$ matematik yapısı bir gruptur.

Şekil 4.33. Aysel'in Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aysel: Grup... Hayır sadece matematiksel tanımlar ve cebirsel ifadeler geliyor aklıma... Onun dışında pek bir şey gelmiyor. Sadece kümeler yani tamsayılar kümesi ve toplama işlemi aklıma geliyor. Ya da çarpma işlemine göre grup mu değil mi? Bunlar aklıma geliyor. $(\mathbb{Z}, +)$ matematik yapısı bir gruptur. [Yazıyor]... Aslında grup denildiğinde aklıma sadece özellikleri geliyor.

Aysel'in grup kavramı ile ilgili kavram imajı grup tanımı ile aynıdır. Bununla birlikte grup kavramı ile ilgili kavram imajını bir örnekle açıklamaya çalışmıştır.

4.2.9.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aysel: Mesela G bir grup olsun, onun bir alt kümesi de eğer alt grupsa G nin bütün özelliklerini sağladığını, G de yapılan tüm işlemlerin bu alt küme üzerinde de sağlanabileceğini gösteriyor. Ben alt gruptan G den daha küçük bir küme üzerinde G de yapabileceğimiz bütün işlemleri yapabileceğimizi anlıyorum. Mesela toplama işlemine göre $2\mathbb{Z}$ cebirsel yapısı $(\mathbb{Z}, +)$ cebirsel yapısının alt grubudur ve $\mathbb{Z}$ üzerinde toplama işlemine göre yapılan tüm işlemler $2\mathbb{Z}$ üzerinde de yapılabilmektedir.

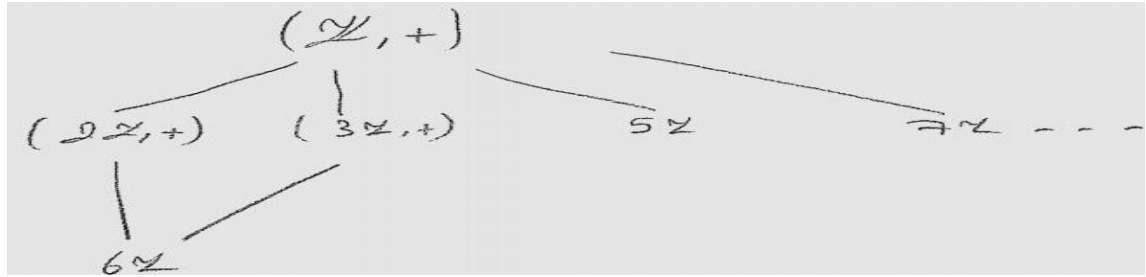
Mülakatçı: Peki size göre bütünden ziyade küçük kümeler üzerinde çalışmanın ne gibi faydaları olabilir?

Aysel: Ya daha geniş bir grupta çalışmaktansa bence daha küçük bir grupta çalışmak daha avantajlıdır. Eleman sayısı ne kadar azalırsa bize o kadar zaman kazandırır. Yani küçük kümeler üzerinde işlemin özellikleri daha kolay görülebilir.

Aysel, alt grup tanımını kendi cümleleri ile ifade etmiştir. Bununla birlikte gruplarda yapılan tüm işlemlerin bu grubun alt gruplarında da yapılabileceğini belirtmiştir. Ayrıca geniş bir grupta çalışmak yerine bu grubun daha küçük bir alt grubunda çalışmanın daha kolay olacağını ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.34. Aysel'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aysel: Alt grup denildiğinde benim aklıma $(\mathbb{Z}, +)$ ve onun alt gruplarından oluşan bir diyagram geliyor. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Böyle bir şema aklıma geliyor.

Aysel, alt grup kavramına yönelik kavram imajını $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun alt grup diyagramından yararlanarak oluşturmuştur.

4.2.9.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aysel: Bu tanımdan φ nin birinci gruptan ikinci gruba tanımlı bir dönüşüm olduğunu anlıyorum. Eğer bu dönüşüm birinci grubun işlemine göre iki elemanın çarpımını diğer grubun işlemine göre de $\varphi(x)$ ile $\varphi(y)$ nin işleme girmesi sonuçlarının eşit olduğu durumlarda bu dönüşüme grup homomorfizmi diyoruz.

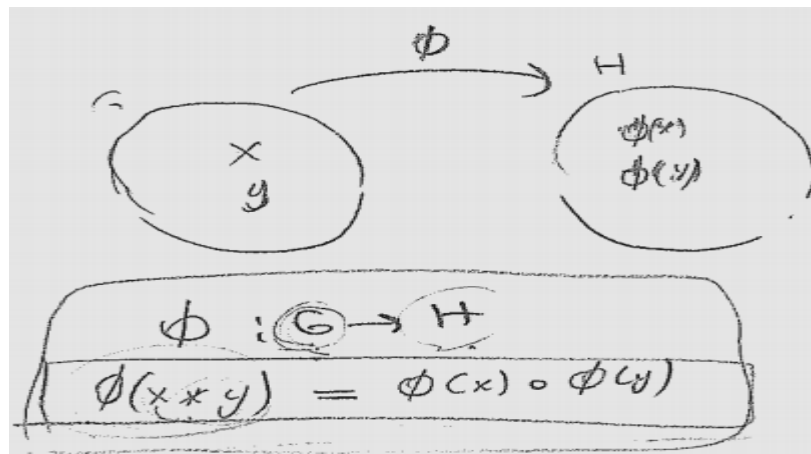
Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

Aysel: Dönüşümümüz $G \rightarrow H$ ya tanımlanıyor ve H daki işlem de bileşke işlemidir. Bu halde işlemlerin değişmesi gerekir çünkü $*$ işlemi belki de H kümesi üzerinde tanımlı değildir. Burada $\varphi(x)$ ve $\varphi(y)$ elemanları H kümesine aittir ve H kümesi üzerinde de bileşke işlemi tanımlıdır o yüzden bu küme üzerinde çalışırken işlemimiz bileşke olmalıdır. Bu sayede de zaten homomorfizm tanım kümesinde bulunan yapıyı değer kümesine bu şekilde taşıyabiliyor.

Aysel, grup homomorfizmi tanımından φ nin iki grup arasında tanımlı bir dönüşüm olduğunu anlamaktadır. Bu dönüşümün birinci gruptaki elemanlar ile bu elemanların φ altındaki görüntüleri arasında olduğunu düşünmektedir. Ayrıca homomorfizm kavramının yapıyı koruduğunu belirtmiştir. Bu yüzden $G \rightarrow H$ şeklinde tanımlanan bir φ dönüşümünde H kümesinin elemanlarının $\varphi(x), \varphi(y)$ şeklinde olduğunu ve bu elemanların H kümesindeki işleme göre belirli olduğundan işlemlerin değişmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.35. Aysel'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aysel: Mesela bir grup düşünelim... Grubumuz G ve elemanları da x, y ler olsun. Ve bir φ dönüşümü de $G \rightarrow H$ ya tanımlı olsun... [Kağıttaki şekli çiziyor]... Burada ki H kümesinin elemanları da $\varphi(x)$ ve $\varphi(y)$ olsun. Buradaki mantık şu; φ dönüşümü G deki elemanları H daki elemanlara götüren ama G deki elemanların G deki işleme göre ve H daki elemanların da H daki işleme göre alınması gerekir.

Aysel, grup homomorfizmi kavramına yönelik kavram imajını tanım ve değer kümesini grupların oluşturduğu bir dönüşüm yardımıyla geliştirmiştir. Ayrıca oluşturduğu şekilde elemanların nasıl olması gerektiğini ve hangi işleme göre belirli olduklarını ifade etmiştir.

4.2.9.5. Vektör kavramı

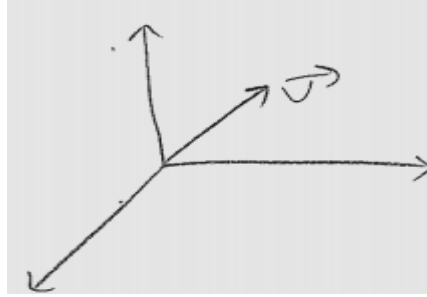
Mülakatçı: Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Aysel: Ben vektörün böyle bir tanımı olduğunu ilk kez görüyorum. Daha önce hep belli bir büyüklüğü, yönü ve doğrultusu olan büyüklüklere vektör diyorduk ama burada paralel, aynı yönlü ve eşit uzunluktaki doğru parçalarının bütününe diyor. O halde bu şekilde verilen vektörlerin hepsi de tanıma göre aslında vektörü temsil etmektedirler. Burada sadece konumları değişmiş fakat aslında hepsi de aynı vektörler. Vektörleri tanımlamak için neden böyle bir tanım yapılmış olabilir ki... [Düşünüyor]... Burada şekilde verilen vektörler aslında tanımdaki tüm şartları sağlıyor sadece başlangıç noktaları farklı o yüzden aynı vektörler değildirler. Aslında bakarsanız tam da bir fikrim yok...

Aysel, vektörlerle ilgili olarak verilen tanımla ilk kez karşılaştığını belirtmiştir. Aysel, tanım ve tanımla ilgili şekil arasındaki ilişkiyi kurabilmiş fakat tam olarak açıklayamamıştır. Burada verilen vektörlerin paralel, aynı yönlü ve eşit uzunlukta olduğunu fakat konumları farklı olduğu için eşit olmadıklarını belirtmiştir. Aysel, bu fikrini tam olarak açıklayamamıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?



Şekil 4.36. Aysel'in Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Aysel: Vektör denildiğinde benim aklıma hep şu gelir; reel değerli olmayan, skaler olmayan büyüklükler, yönü olan, doğrultusu olan ve şiddeti olan büyüklere vektör denir. Yani skaler olarak ifade edemediğimiz büyüklüklerdir diyebiliriz. Mesela 3 boyutlu uzayda herhangi bir vektör diyebiliriz. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Mesela 3 boyutta doğrultusu, yönü ve şiddeti olan bir $\vec{v}$ vektörü aklıma geliyor. Matematikten daha çok fizik dersleri aklıma geliyor aslında vektör denildiğinde...

Aysel, vektör kavramına yönelik kavram imajını 3 boyutta doğrultusu, yönü ve şiddeti olan başlangıcı $(0, 0, 0)$ noktası olan bir doğru parçası olarak oluşturmuştur.

4.2.10. Nazlı'nın Durumu

4.2.10.1. İkili işlem kavramı

Mülakatçı: İkili işlemin tanımını okuduğunuzda, ikili işlem sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nazlı: İkili işlem kavramı mı?

Mülakatçı: Evet...

Nazlı: Şimdi verilen bir A kümesi üzerinde elemanlarla yapılabilecek ya da yine o A kümesiyle beraber tekrar o küme üzerinde yapılabilecek matematik üzerine... Nasıl söyleyeyim... İkili işlem...

Mülakatçı: Şimdi biz burada aslında bir fonksiyon tanımı üzerinde yorum yapıyoruz değil mi?

Nazlı: Evet...

Mülakatçı: O halde bizim tanım ve değer kümemiz olmalı değil mi?

Nazlı: Evet...

Mülakatçı: Burada tanım kümesindeki elemanlar nasıl elemanlardır?

Nazlı: $A \times A \rightarrow A$ ya şeklinde... Yani A kümesindeki elemanlarla yine A kümesindeki elemanların kartezyen çarpımlarından oluşan bir kümedir. Dolayısıyla bu kümeden aldığımız elemanlar ikili elemanlardır.

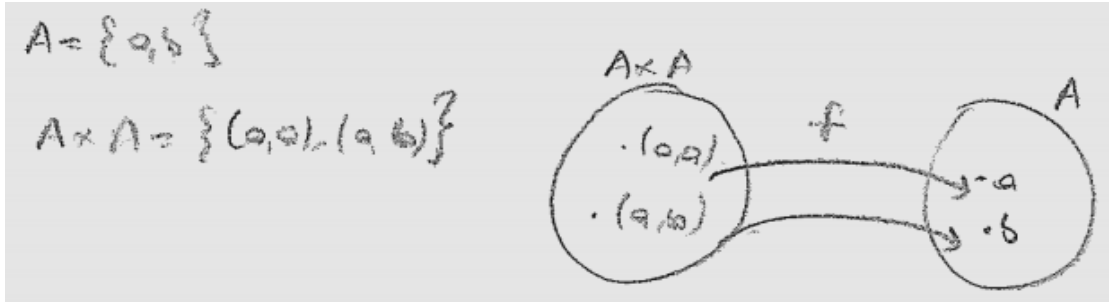
Mülakatçı: Peki değer kümesi nasıl elemanlardan oluşmaktadır?

Nazlı: Değer kümesi ise A kümesindeki elemanlardan oluşmaktadır.

Nazlı, ikili işlem tanımını tam olarak yorumlayamamıştır. Araştırmacının sonda soruları sayesinde tanım kümesi $A \times A$ ve değer kümesi A olan bir bağıntı olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: İkili işlem tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir? Bunu bana resmedebilir misiniz?



Şekil 4.37. Nazlı'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nazlı: [Kağıttaki şekli çiziyor]... Bu şekildedir herhalde... Tam olarak hatırlamıyorum ki... Bunların tekrar dönüşümleri var mıdır?

Mülakatçı: Yazdığın şekilde bir kartezyen çarpım kümesi düşünebiliriz.

Nazlı: O zaman bunu bir fonksiyon şeklinde mi göstereyim?

Mülakatçı: Evet... Bu kartezyen çarpım kümesini tanım kümesi kabul eden bir fonksiyon şeması çizebilir misiniz?

Nazlı: O zaman $A \times A$ dan aldığım elemanları yine A kümesindeki elemanlarla eşleyen bir bağıntı düşünebiliriz.

Nazlı, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajını oluşturmak için temsili bir $A = \{a, b\}$ kümesi ve $A \times A = \{(a, a), (a, b)\}$ kartezyen çarpım kümesi tanımlamıştır. Tanımladığı bu iki küme ile kavram imajını araştırmacının da yardımıyla $A \times A \rightarrow A$ bir f bağıntısı şeklinde oluşturmuştur.

4.2.10.2. Grup kavramı

Mülakatçı: Grup tanımını okuduğunuzda, grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nazlı: Maddelerden hareketle mi söyleyeyim?

Mülakatçı: Aslında bir bütün olarak tanımlı okuduğunuzda zihninizde oluşan düşünceler nelerdir?

Nazlı: Grup nedir... Bunun için ne söyleyebiliriz... [Düşünüyor] ... Güzel bir soru... ☺
Aslına bakarsanız hiçbir fikrim yok.

Nazlı, grup kavramı ile ilgili bir fikir yürütememiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

Nazlı: Yani bir küme üzerinden yapılabilecek işlemlerde temelde bu dört maddenin kullanılmasıyla ortaya çıkan yeni bir özelliktir. Bunun dışında da grup bir kümenin elemanlarının farklı şekilde ifade edilmesidir. Yani işlem üzerinden elemanların tekrardan ifadesidir diyebilirim. Ancak zihnimde grup denildiğinde somut bir şeyler canlanmıyor açıkçası... Yani grup denildiğinde zihnimde sağlaması gereken bu dört şart canlanıyor.

Nazlı, grup kavramına yönelik grup tanımı dışına çıkamamış ve grup kavramına yönelik tanım dışında bir kavram imajı geliştirememiştir.

4.2.10.3. Alt grup kavramı

Mülakatçı: Alt grup tanımını okuduğunuzda, alt grup sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nazlı: Şimdi ilk olarak grup tanımını düşündüğümüzde matematiksel olarak bir yapı oluşturmaya çalışıyoruz. Bunun alt gruplarını da oluşturma sebebi daha küçük kümelerle ilgilenip sonuca daha kolay ulaşabilmek içindir. Yani kolaylık sağlar diye düşünüyorum.

Nazlı, alt grup tanımının oluşturulan matematiksel yapıları inceleme kolaylığı sağlamak için tanımlanmış olabileceğini belirtmiştir. Bu şekilde daha küçük kümelerle ilgilenip sonuca daha kolay ulaşılabilirliğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Alt grup denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Alt grup tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?

Nazlı: Yine grup özelliklerinin sağlandığı aklıma geliyor. Yani kapalılık, birleşme, değişme, etkisiz eleman, ters eleman özelliklerinin sağlandığı aklıma geliyor. Onun dışında da şuan aklıma başka bir şey gelmiyor.

Nazlı'nın alt grup kavramına yönelik kavram imajı alt grup tanımı ile aynıdır. Nazlı, tanım dışına çıkamamış ve farklı bir imaj geliştirememiştir.

4.2.10.4. Grup homomorfizmi kavramı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi tanımını okuduğunuzda, grup homomorfizmi sizin için matematiksel olarak ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

Nazlı: Tanım kümesindeki işlemler yardımıyla değer kümesindeki işlemlere ulaşmış... Yani değer kümesinde tanımlanan işleme tanım kümesindeki elemanlar aracılığıyla ulaşmış...

Mülakatçı: Peki size göre $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümünün $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şeklinde tanımlanmasının nedeni ne olabilir?

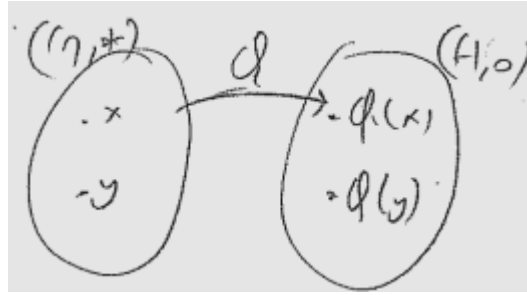
Nazlı: [Düşünüyör]... Eğer bu şekilde tanımlanmış olmasaydı zaten bir dönüşüm olmazdı. Eğer sonuçta görüntüler de $\varphi(x) * \varphi(y)$ olsaydı yine $G \rightarrow G$ ye tanımlanmış olurdu ve bir dönüşüm tanımlanmamış olurdu.

Nazlı grup homomorfizminin, tanım kümesindeki işlemler yardımıyla değer kümesindeki işlemlerin oluşturulduğu bir dönüşüm olduğunu belirtmiştir. Dönüşüm altında işlemlerin değişme sebebini ise, eğer işlemler değişmemiş olsaydı $G \rightarrow H$ bir

dönüşüm tanımlanmamış olurdu şeklinde ifade etmiştir. İşlemlerin değişmemesi durumunda dönüşümün $G \rightarrow G$ şeklinde tanımlanmış olacağını ve bu şekilde bir dönüşüm tanımlanamayacağını vurgulamıştır.

Kavram İmajı

Mülakatçı: Grup homomorfizmi denildiğinde zihninizde oluşan, ilk aklınıza gelen nedir? Grup homomorfizmi tanımından anladığınız kadarıyla zihninizde oluşanlar nelerdir?



Şekil 4.38. Nazlı'nın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nazlı: [Düşünüyor] ... Yani bir G grubundan H grubuna tanımlanmış olan bir fonksiyon geliyor aklıma... Yani bir fonksiyonu çağrıştırıyor. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Yani $(G, *)$ grubundan aldığımız x, y elemanlarını φ dönüşümü yardımıyla (H, o) grubunda yer alan $\varphi(x), \varphi(y)$ elemanlarını oluşturan bir φ dönüşümü olarak tanımlayabiliriz.

Nazlı, grup homomorfizmi kavramına yönelik kavram imajını fonksiyon kavramından yararlanarak oluşturmuştur. Buna göre $(G, *)$ kümesinden alınan x, y elemanlarının φ dönüşümü yardımıyla (H, o) grubunda yer alan $\varphi(x), \varphi(y)$ elemanları ile eşleyen bir dönüşümdür şeklinde ifade etmiştir.

4.2.10.5. Vektör kavramı

Mülakatçı: Vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli incelediğinizde matematiksel olarak vektörler sizin için ne anlam ifade ediyor? Bu tanım size ne anlatıyor?

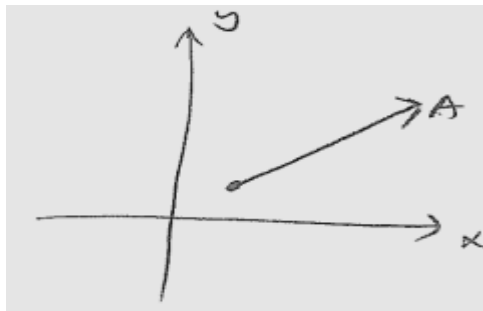
Nazlı: Yani alınan vektör uzayda olacak... Başlangıç noktası ve uzunlukları da aynı olduğu zaman bunlara vektör diyoruz. Yani şekle baktığımızda uzayda bir CD vektörü varsa AB vektörü CD vektörünün aynısı olamaz. Bence bu şekilde yer alan vektörlerin

tamamı birbirinden farklı vektörlerdir. Yani bu vektörlerin aynı uzayda olmaları, uzunlukları ve aynı yönlü olmalarından dolayı tanıma göre aynı vektör olarak kabul edilmişlerdir.

Nazlı, vektör kavramına yönelik tanımı tam olarak yorumlayamamıştır. Nazlı, tanımla ilgili şekilde yer alan vektörlerin aynı olamayacağını belirtmiş fakat sebebini tam olarak açıklayamamıştır. Tanımda ise aynı uzayda olmalarından, uzunluklarının aynı olmasından ve aynı yönlü olmalarından dolayı aynı vektör olarak kabul edildiğini ifade etmiştir.

Kavram İmajı

Mülakatçı: *Güzel... Peki vektör denildiğinde sizin zihninizde oluşan imge nedir? Neden?*



Şekil 4.39. Nazlı'nın Vektör Kavramı İle İlgili Kavram İmajı

Nazlı: *Başlangıcı ve sonu olan, yani uzayda başlangıcı ve sonu olan doğru parçalarına vektör denir. Mesela $\mathbb{R}^2$ de [Kağıttaki şekli çiziyor] ... bir başlangıcı ve sonu olan bir A vektörü çizebiliriz.*

Nazlı, vektör kavramına yönelik kavram imajını $\mathbb{R}^2$ de başlangıcı ve sonu olan bir doğru parçası şeklinde oluşturmuştur.

4.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme Süreçlerine Ait Bulgular

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili problem çözme süreçlerine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

4.3.1. İkili İşlem Kavramı

Öğretmen adaylarının ikili işlem kavramı ile ilgili problemi anlama kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.14 de verilmiştir.

Çizelge 4.14.

Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Problemi Anlama	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
<i>Doğru anlayanlar</i>	Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer, Aysel, Nazlı
<i>Eksik anlayanlar</i>	Hatice
<i>Yanlış anlayanlar</i>	Ayhan

Çizelgeye göre 8 aday problemi doğru, 1 aday eksik ve 1 aday ise yanlış anlamışlardır. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu problemi doğru anladıkları için çözüm için ne yapmaları gerektiğine doğru karar vermişlerdir. Eksik anlayan aday ise problemi tam olarak anlayamadığından çözüm sürecinde sorunlar yaşamıştır. Yanlış anlayan aday ise problemin çözümünde yanlış matematiksel ifadeler kullanmıştır.

İkili işlemle ilgili problemi doğru anlayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu problemin çözümü için ne yapılmalıdır?*

Aysel: *Öncelikle fonksiyon olma özelliklerini sağlaması gerekiyor. İlk olarak iyi tanımlılık özelliği... İlk olarak toplama işlemi için bakacak olursak; $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı olması gerekiyor...*

Öğretmen adaylarından ikili işlem kavramına yönelik problemi doğru anlayanlar, ikili işlem tanımını kullanmış ve problemi çözmek için ikili işlemin fonksiyon olma özelliğinden yararlanarak problemi çözmek istemişlerdir.

İkili işlemle ilgili problemi eksik anlayan bir öğretmen adayının düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu problemde verilen işlemler birer ikili işlem midir?*

Hatice: *İkili işlemin özelliklerini mi kullanmam gerekiyor...*

Mülakatçı: Soruda verilen iki dönüşümün birer ikili işlem olup olmadıkları soruluyor. Problemi çözmek için ne kullanması gerektiğine siz karar vermelisiniz.

Hatice: İlk önce toplama işlemi ile başlarsak... [Biraz düşünüyor] ... İlk olarak toplama işleminin kapalılık özelliğini inceleyelim... Bunun için doğal sayılardan iki eleman almalıyız ve sonuçta iki elemanı da doğal sayılardan alacağımız için toplama işleminin sonucu da bir doğal sayı olur. Dolayısıyla kapalıdır. Aynı şekilde birleşme özelliği içinde gösterilebilir. [Söylediklerini kağıda döküyor] Dolayısıyla birleşme özelliği de vardır.

Mülakatçı: Birleşme özelliği neden var?

Hatice: Birleşme özelliği neden var... Yine bu özelliğin olduğu genelde ikili işlem tablosundan aklıma geliyor. Mesela tabloda [Kendi oluşturduğu tabloya bakıyor] Hani birim elemanla iki tane elemanı işleme aldığınız zaman mesela iki eleman a, b ve e aldığınız zaman $a + (b + e) = (a + b) + e$ buna dayanarak ispatlıyorduk herhalde... Dolayısıyla problemde verilen işlemin birleşme özelliğini ben buradan görebiliyorum. Daha sonra birim elemanı incelemeliyim... [Kağıttakileri yazıyor] $a \in \mathbb{N}$ için $a + e = e + a = a$ ise $e = 0$ ve $0 \in \mathbb{N}$ olduğundan birim eleman vardır. Aynı zamanda bir de ters elemanımız olmalıdır. [Kağıttaki ters elemanla ilgili kısmı yazıyor] [İşlemler sonucunda a elemanının tersi $-a$ olarak bulunuyor] Ama şimdi... O zaman toplama işlemi... Doğal sayılar kümesi üzerinde çalıştığımıza göre ters elemanı bulamadık. Aslında benim şu ana kadar baktıklarımın hepsi grup olma özellikleriydi. Ama buradaki işlemin işlem olup olmadığını neye göre inceliyoruz bilmiyorum. İşlemin tanımını okuduğumda işlem $A \times A$ dan A ya bir fonksiyon... Aslında biz burada verilen işlemin fonksiyon olup olmadığını mı incelemeliydik acaba... [Düşünüyor] ...Evet evet bu şekilde olabilir. Çünkü ben bu özellikleri takip ettikçe şimdi hatırlıyorum da grubun özelliklerini inceliyorum. Ama ikili işlem $A \times A$ dan A ya bir fonksiyonsa burada verilen toplama işlemi de buradaki ikiliyi bir doğal sayıya götüren bir fonksiyondur. İkili işlemin tanımına uyuyor o zaman toplama işlemi bir ikili işlemdir.

Mülakatçı: Söylediklerinize göre şimdi ne yapmamız gerekiyor?

Hatice: Tanımdan yola çıkarak işlem yapmamız gerekiyor. Çünkü başlangıçta yaptıklarım grubun özellikleriydi ve bu şekilde bir sonuca ulaşamam... Şimdi verilen toplama işleminin fonksiyon olup olmadığına bakacağız.

Problemi eksik anlayan aday, başlangıçta problemin çözümü için problem ifadesinde verilen işlemlerin ikili işlemin bütün özelliklerini sağlaması gerektiğini düşünmüştür. Çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalar sırasında fikrini değiştirmiş ve problemi çözmek için ikili işlem tanımını kullanması gerektiğine karar vermiştir.

İkili işlemle ilgili problemi yanlış anlayan bir öğretmen adayının düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu problemde verilen işlemler birer ikili işlem midir?*

Ayhan: *Hocam bu problemi çözebilmek için hem toplama hem de çarpma işlemi için ikili işlem özelliklerini sağlamam gerekli... Eğer ikili işlemin bütün özellikleri sağlanırsa ikili işlem, sağlanmazsa da ikili işlem olmadığına karar veririm.*

Problemi yanlış anlayan öğretmen adayı ise verilen işlemlerin birer ikili işlem olması için ikili işlem özelliklerinin sağlanması gerektiğini düşünmüştür. Çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalarda da düşüncesini değiştirmemiş ve problemi kendi düşüncelerine göre çözmüştür.

Öğretmen adaylarının kümeden eleman seçme kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.15 de verilmiştir.

Çizelge 4.15.

Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kümeden Eleman Seçme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kümeden doğru eleman seçenler</i>	İbrahim, Nermin, Büşra, Hatice, Aysel, Nazlı
<i>Kümeden yanlış eleman seçenler</i>	Hüseyin, Aykut, Ayhan
<i>Kümeyi belirtmeyenler</i>	Ayfer

Çizelge incelendiğinde 6 adayın kümeden doğru eleman seçenler, 3 adayın kümeden yanlış eleman seçenler ve 1 adayın da kümeyi belirtmeyenler kategorilerinde yer aldığı görülmektedir.

İkili işlemle ilgili problemi çözmek için kullanması gereken elemanları çalıştığı kümeden doğru seçen bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Nermin: *Tamam... [Kağıttakileri yazmaya başlıyor]... $a, b \in \mathbb{N}$ diyelim. Şimdi buradaki kartezyen çarpımdan dolayı (a, b) alabiliyorum. Burada alacağım (a, b) ikilileri $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin elemanlarıdır.*

Öğretmen adaylarından kümeden doğru eleman seçenler kategorisinde yer alan adaylar ikili işlemlerin doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlandığının farkındadırlar. Bu yüzden de elemanların doğal sayılar kümesinden alınması gerektiğini vurgulamışlardır. Bu düşünceden hareketle elemanları $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den ikililer şeklinde almışlardır. İkilileri oluşturan elemanların ise doğal sayı olması gerektiğini belirtmişlerdir.

Çalıştığı kümeden yanlış eleman seçen bir öğretmen adayının düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: *Şimdi toplama işlemi için doğal sayılar kümesinden alacağımız (a, b) ikililerini kullanmalıyım... Benzer düşünceyi yine çarpma işlemi için de kullanmalıyım. Yani $(a, b) \in \mathbb{N}$ için çarpım sonucunun doğal sayı olması gerekir.*

Kümeden yanlış eleman seçen adaylar da doğal sayılar kümesi üzerinde çalıştıklarının farkındadırlar. Ancak tanım kümesinde yer alan ikilileri $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden seçmişlerdir.

Çalıştığı kümeyi belirtmeyen bir öğretmen adayının düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: *Mesela ben burada 1 ile 2 elemanlarını alayım... Burada söylenen (a, b) ikilisi $A \times A$ üzerindedir. [Çalışma kâğıdındaki yazıyor]... Yani (a, b) elemanı $A \times A$ içerisinde oluyor ve elemanı oluyor. Burada ben $(a, b) = (1, 2)$ aldım mesela... O halde burada $(1, 2) \in A \times A$ iken $1 + 2 = 3 \in A$ olur.*

Kümeyi belirtmeyenler kategorisinde yer alan Ayfer, çözüm için kullandığı elemanları hangi kümeden aldığını belirtmemiş ve ikili işlem tanımında yer alan $A \times A \rightarrow A$ ya notasyonunu kullanmıştır.

Çözümün sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.16 da verilmiştir.

Çizelge 4.16.

Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Çözümün Sunumu	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Tam/ikna edici açıklama yapanlar	İbrahim, Büşra, Aykut, Aysel
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	Hüseyin, Hatice, Ayfer, Nazlı
Hiç açıklama yapmayanlar	...
Yanlış açıklama yapanlar	Ayhan, Nermin

Çizelgeye göre 4 aday tam/ikna edici açıklama yapanlar, 4 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 2 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Bir öğretmen adayının ikili işlemle ilgili problemi tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur;

$$\begin{aligned}
 &+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
 &a, b \in \mathbb{N}, \quad a+b \in \mathbb{N} \quad \checkmark \\
 &a, b \in \mathbb{N}, \quad a.b \in \mathbb{N} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Şekil 4.40. Aysel'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Mülakatçı: Bu problemde verilen işlemler birer ikili işlem midir?

Aysel: Öncelikle fonksiyon olma özelliklerini sağlaması gerekiyor. İlk olarak iyi tanımlılık özelliği... İlk olarak toplama işlemi için bakacak olursak; $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ye

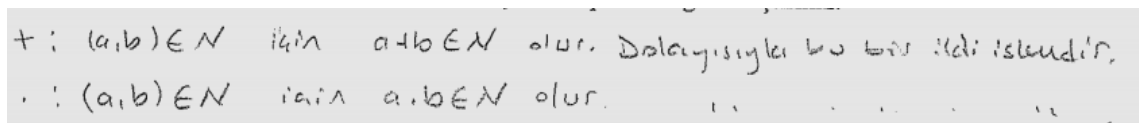
tanımlı olması gerekiyor... Önce buna bakalım. [Kağıttakileri yazıyor]... $\mathbb{N}$ den alacağımız iki eleman için, yani $a, b \in \mathbb{N}$ için bunların toplamı da yani $a + b$ de toplama işlemine göre yine doğal sayılar kümesinin bir elemanıdır. Dolayısıyla bu işlem $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ye bir işlemdir ve bu yüzden ikili işlem olma özelliğini sağlar. O halde toplama işlemi bir ikili işlemdir. Benzer şekilde çarpma işlemi de bir ikili işlemdir. Yani a, b gibi iki doğal sayı için bunların çarpımı da $a \cdot b$ yine doğal sayıların elemanı olduğu için çarpma işlemi de doğal sayılar kümesi üzerinde bir ikili işlemdir.

Mülakatçı: Bu problemin çözümünde kullandığınız ifadeleri neye dayanarak yazdınız?

Aysel: Yazdığım şeyler için öncelikle tanıma baktım... Tanımdan, $A \times A$ dan ikili elemanlar alınmış mı ona bakıyorum... Buna göre problemde ben de (a, b) ikilisini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den aldım. Bu ikilinin elemanlarının adı toplama işlemine göre sonucuna bakıyorum... Çıkacak olan sonucun doğal sayılar kümesinin elemanı olup olmadığını inceliyorum. Buradan ulaştığım sonuca göre de ikili işlem olup olmadığını söyledim. Yaptığım incelemelere göre de her iki işlemde birer ikili işlemdir sonucuna ulaştım.

Öğretmen adaylarından çözümün sunumunu tam/ikna edici açıklayarak yapanlar ikili işlem tanımını doğru kullanmışlardır. Adaylar problemin çözümü için ikili işlem tanımından yararlanarak doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin birer ikili işlem olduğunu doğru bir şekilde göstermişlerdir.

Bir öğretmen adayının ikili işlemle ilgili problemi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.



$+$: $(a, b) \in \mathbb{N}$ için $a + b \in \mathbb{N}$ olur. Dolayısıyla bu bir ikili işlemdir.
 $\cdot$: $(a, b) \in \mathbb{N}$ için $a \cdot b \in \mathbb{N}$ olur.

Şekil 4.41. Hüseyin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Mülakatçı: Bu problemde verilen işlemler birer ikili işlem midir?

Hüseyin: İlk fonksiyona bakacak olursak; şimdi burada doğal sayılardan iki tane eleman almışım ve bu aldığım elemanları ikili işleme tabii tuttuğumda sonuçta $a + b$ gibi bir sabit sayıyı oluşturmuş. Bu o zaman bir ikili işlemdir. Çünkü tanıma uyuyor. [Çalışma kağıdındakileri yazıyor]

Mülakatçı: Çarpma için ne söyleyebiliriz?

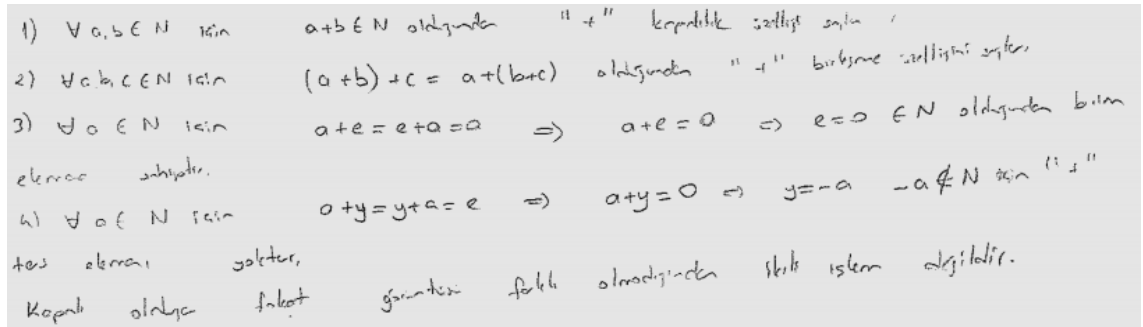
Hüseyin: Çarpma içinde aynısı geçerli... Yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den aldığımız ikililer çarpma işlemine tabii olduklarında sonuçta $a \cdot b$ gibi bir doğal sayı ile eşleşmekte... O yüzden çarpma işlemi de yine doğal sayılar üzerinde bir ikili işlemdir. [Kağıttakileri yazıyor]

Mülakatçı: Bu problemin çözümünde kullandığınız ifadeleri neye dayanarak yazdınız?

Hüseyin: Tanıma dayanarak problemi çözdüm. İkili işlem tanımına uygun olup olmadığını inceliyorum.

Belirsiz/yetersiz açıklama yapan adaylar doğru sonuca ulaşmışlar fakat çözüm için kullandıkları matematiksel dil ve notasyonlar yetersiz kalmıştır.

Bir öğretmen adayının ikili işlemle ilgili problemi yanlış açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.42. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Mülakatçı: Bu problemde verilen işlemler birer ikili işlem midir?

Ayhan: [Çalışma kâğıdındaki kileri yazıyor]... Her $a, b \in \mathbb{N}$ için buradaki a ve b bir doğal sayı olduğu için bunların toplamı da bir doğal sayıdır. Sonuçta $a + b \in \mathbb{N}$ olduğundan, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalılık özelliğini sağlar. Kapalılık sağlanıyor, şimdi birleşme özelliğini incelemeliyiz.

Her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için... Burada şartlarını yazmadan direk olarak cevabını yazacağım... Acaba bir örnek üzerinde mi yapsam ama yok örnek olmaz... [Nasıl yapmam gerekiyor...]... $(a + b) + c = a + (b + c)$ olduğundan toplama işleminin birleşme özelliği sağlanır.

Üçüncü olarak etkisiz birim eleman olup olmadığını araştırmalıyız. Her $a \in \mathbb{N}$ için $a + e = e + a = a$ ise $a + e = a$ ise $e = 0$ ve $0 \in \mathbb{N}$ olduğundan birim elemana

sahiptir.

Bir diğer özelliğimiz ise her bir elemanın tersinin olup olmadığıdır. Her $a \in \mathbb{N}$ için $a + y = y + a = e$ ise $a + y = 0$ olur. Buradan $y = -a$ bulunur. Ama $-a$ doğal sayıların elemanı değildir. Bu yüzden toplama işleminin doğal sayılar kümesi üzerinde ters eleman özelliği yoktur.

Mülakatçı: Peki incelediğiniz özelliklere göre Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işlemi bir ikili işlem midir? Neden?

Ayhan: Yani burada verilen işlemin ikili işlem olması için kapalılık özelliğini sağlaması lazımdı... Bir de tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde yalnızca bir tane görüntüsünün olması lazımdı. Buna göre evet bir ikili işlemdir diyebiliriz. Çünkü kapalılığı zaten gösterdim. Görüntülerin tek olduğunu göstermek içinde sonuçta tanım kümesinde iki tane eleman aldığımızda bu elemanların toplamaları belli bir sayıdır. Yani tanım kümesinde birbirinden farklı elemanlar seçtiğimizde illaki onların görüntüleri de birbirinden farklı olur. Örnek verecek olursam $2 + 3 = 5$ tir, $2 + 4 = 6$ dır gibi...

Mülakatçı: O halde söylediklerinizden yola çıkarsak örneğin $3 + 2$ şeklinde olursa elemanlar görüntüleri yine 5 olabilir. Bunun için ne söyleyebilirsiniz?

Ayhan: $3 + 2$ gelse... Evet doğru diyorsunuz o zaman görüntüler aynı olur. Bu şekilde düşündüğümüzde işlem olamaz... Çünkü biz burada sıralı ikili tanımını kullandığımız için evet bu şekilde olduğunda ikili işlem olmaz. O halde şunu söyleyebiliriz bu problem için toplama işlemi doğal sayılar üzerinde kapalıdır ama her elemanın görüntüsü farklı olmadığından ikili işlem değildir.

Mülakatçı: Çarpma için ne söyleyebiliriz?

Problem $(a,b) \rightarrow ab$

1) $\forall a,b \in \mathbb{N}$ için $ab \in \mathbb{N}$ olduğunda kapalılık özelliği sağlanır.

2) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ için $(a,b)c = a(bc)$ olduğunda birleşimlilik.

3) $\forall a \in \mathbb{N}$ için $a.e = e.a = a \Rightarrow e = 1 \in \mathbb{N}$ olup etkisiz eleman var dır.

4) $\forall a \in \mathbb{N}$ için $a.y = y.a = e \Rightarrow y.a = 1 \wedge a.y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a} \notin \mathbb{N}$ olduğunda ters yoktur.

Kapalılık özelliği sağlanıp diğer kriterlerin sağlanması bir tek olmadığında sistem değildir.

Şekil 4.43. Ayhan'ın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Problem Çözümü Devamı

Ayhan: *Bu da aynıdır herhalde... [Kağıttakileri yazıyor]... Her $a, b \in \mathbb{N}$ için $a \cdot b \in \mathbb{N}$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Benzer şekilde;*

Her $a, b, c \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olduğundan birleşmelidir.

Yine her $a \in \mathbb{N}$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ şartını sağlayan birim eleman çarpma işlemi için $e = 1$ dir ve $1 \in \mathbb{N}$ dir. Dolayısıyla etkisiz eleman vardır.

Ters elemana bakalım; yine her $a \in \mathbb{N}$ için $a \cdot y = y \cdot a = e$ ise $y \cdot a = 1$ ve $a \cdot y = 1$ olduğundan $a = \frac{1}{y}$ olarak bulunur. Burada da $\frac{1}{y}$ doğal sayıların elemanı olmadığından ters eleman özelliği sağlanmaz.

O halde toplama işleminde olduğu gibi doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi de kapalılık özelliğini sağlar fakat her elemanın değer kümesindeki görüntüsü bir tek olmadığından ikili işlem değildir. [Yazdıklarından emin olamıyor... Biraz düşündükten sonra emin olduğunu söylüyor.]

Mülakatçı: *Bu problemin çözümünde kullandığınız ifadeleri neye dayanarak yazdınız?*

Ayhan: *Yani bu işlemleri yaparken ikili işlemin var olan özelliklerinden yararlandık... Yani bir işlemin ikili işlem olabilmesi için hangi şartları sağlaması gerekiyorsa o özellikleri inceleyerek bu soruyu yaptık.*

Yanlış açıklama yapan adaylar, problemin çözümü için ikili işlem tanımını yorumlayamamışlardır. Bu kategoride yer alan adaylardan Ayhan problemin çözümü için yanlış bir yol seçmiş, toplama ve çarpma işlemleri için ikili işlem özelliklerini sağlamak istemiştir. Toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini incelemiştir. Ayhan hem toplama hem de çarpma işlemlerinin ters eleman özelliğini sağlamadığını göstermiştir. Bununla birlikte her iki işleminde kapalılık özelliğini sağladığını fakat her elemanın görüntüsünün farklı olmadığına karar vermiştir. Bunun için örnekler vermiş ve $(3, 2)$ sıralı ikilisi ile $(2, 3)$ ikilisinin görüntülerinin eşit olduğunu belirtmiştir. Görüntülerin birbirinden farklı olması gibi bir yanılgı içinde olduğu için her iki işlemin de ikili işlem olmadığına karar vermiştir. Nermin ise hem toplama hem de çarpma işlemleri için doğal sayılar kümesinden aldığı alt kümeler üzerinde çalışmıştır. Aldığı alt kümelerin kapalı olmamasından dolayı bu işlemlerin birer ikili işlem olmadığına karar vermiştir.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.17 de verilmiştir.

Çizelge 4.17.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	İbrahim, Büşra, Aysel
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Hüseyin, Aykut, Ayfer, Nazlı
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, Nermin, Hatice

Çizelgeye göre 3 öğretmen adayı doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan, 4 öğretmen adayı yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan ve 3 öğretmen adayı da gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer almaktadır.

Öğretmen adaylarından doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alanlar, çözüm için ikili işlem tanımını doğru kullanmışlardır. Çözüm için ikili işlemlerin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ şeklinde tanımlandığının farkındadırlar. Bu yüzden kullanmaları gereken elemanları $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden almışlar ve görüntülerini de $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde aramışlardır. Bununla birlikte ikili işlem tanımını doğru yorumlayarak işlemin kapalılık özelliğine vurgu yaparak çözüm yapmışlardır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylar ikili işlemin tanımını tam olarak yorumlayamamışlardır. Çünkü problem ifadesindeki ikili işlemlerin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ şeklinde tanımlandığını bilmelerine rağmen kullanmaları gereken ikilileri $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden seçerek işlem yapmışlardır. Bu kategoride yer alan öğretmen adayları verilen işlemlerin birer ikili işlem olduğunu belirlemişler fakat matematiksel olarak yanlış ifadeler kullanmışlardır.

Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylar ise problem ifadesinde yer alan işlemlerin sağlanması gereken özellikleri tam olarak anlayamamışlardır. Adaylardan Ayhan ve Nermin yanlış matematiksel ifadeler ve özellikler kullanarak yanlış çözüm yapmışlardır. Hatice ise çözüm sırasında araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalardan sonra doğru sonuca ulaşmıştır. Ayhan ve Hatice toplama ve çarpma işlemlerinin birer ikili işlem olabilmesi için ikili işlemin bütün özelliklerinin sağlanması gerektiğini düşünmüşlerdir. Ayhan çözümünü bu şekilde devam ettirerek ters eleman özelliğinin her iki işlem için de sağlanmadığı sonucuna ulaşmıştır. Son olarak da işlemlerin kapalı olduğunu fakat her elemanın görüntüsünün farklı olmadığını ifade etmiştir. Bu yüzden her iki işlemin de ikili işlem olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Hatice ise araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalar sırasında tanımdan yararlanması gerektiğini anlamış ve iki örnek üzerinde işlemlerin ikili işlem tanımına uyduğunu göstermiştir. Nermin ise ikili işlem tanımındaki fonksiyon olma şartını yanlış yorumlamış ve tanım kümesinde yer alan her ikilinin görüntüsünün bulunamayacağını, doğal sayılardan aldığı alt küme örnekleri üzerinde göstermek istemiştir. Nermin “*Şimdi burada a ve b ye değer versem mesela 1 ve 2 şeklinde... Şimdi burada toplama işlemini yaparken şimdi $A \times A$ kümesini yazarım. Burada $A \times A$ kümesi şöyle olur. $A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ şeklindedir. Şimdi burada A kümesinin elemanları $\{1,2\}$ ama yani burada toplama bağıntısına göre oluşturulan f in elemanları da $\{1,2\}$ lerden oluşacak bir kere... Burada toplama işlemi sonucunda ise $f: \{2,3,4\}$ şeklinde oluyor. Burada çıkan elemanlara baktığımda ise elemanların A kümesinin elemanları olmadığını görüyorum. İşte bu yüzden değer kümesi hakkında bir bilgi sahibi olamıyorum. Yani $a + b$ gerçekten değer kümesinin içerisinde mi?... Buradaki bağıntıda benim değer kümem sadece A kümesinin elemanlarından oluşmalıdır. Buna karar veremiyordum ama burada örnek üzerinde yaptığımda olmadığını görüyorum. Buna göre toplama işlemi bir ikili işlem değildir diyebilirim.*” şeklinde bir alt küme üzerinde her elemanın görüntüsünün olmadığını gördüğü için gereksiz ifadeler kullanarak yanlış sonuca ulaşmıştır.

4.3.2. Grup Kavramı

Öğretmen adaylarının grup kavramı ile ilgili problemi anlama kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.18 de verilmiştir.

Çizelge 4.18.
Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Problemi Anlama	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Doğru anlayanlar	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel, Nazlı
Eksik anlayanlar	...
Yanlış anlayanlar	...

Çizelgeye göre 10 aday da problemi doğru anlamışlardır. Bununla birlikte problemi eksik ya da yanlış anlayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır. Adayların tamamı problemi doğru anladıkları için çözüm için ne yapmaları gerektiğine doğru karar vermişlerdir. Problem ifadesinde verilen $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin toplama işlemine göre bir grup olabilmesi için grup şartlarının sağlanması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Grup kavramı ile ilgili problemi doğru anlayan iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: *Toplama işlemine göre bir gruptur diye düşünüyorum. Şimdi şu şekilde düşünürsek, rasyonel sayılar tamsayıları da kapsadığı için ve tamsayıların da toplama işlemine grup olduğunu biliyorum. Tamsayılar kümesi de rasyonel sayıların bir alt kümesi olduğuna göre rasyonel sayıların da toplama işlemine göre bir grup belirttiğini düşünüyorum. Ama işlemimiz çarpma olsaydı, her elemanın tersi olmayabilirdi. Burada da işlemimiz toplama olduğuna göre bir grup olduğunu düşünüyorum. O zaman rasyonel sayılar üzerinde toplama işleminin grup olma şartlarını sağlayıp sağlamadığına bakarım...*

Nazlı: *$\mathbb{Q}$ dan eleman alıp bu dört özelliğin sağlanıp sağlanmadığını incelemeliyim. [Kağıttakileri yazıyor]...*

Adayların tamamı problem cümlesinde verilen $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin toplama işlemine grup şartlarını sağlaması gerektiğinin farkındadırlar. Bu yüzden rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işleminin kapalılık, birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerini sağlaması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu

düşünceden hareketle adaylar çözüm için rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işlemine grup olma şartlarını sağlamışlardır.

Öğretmen adaylarının kümeden eleman seçme kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.19 da verilmiştir.

Çizelge 4.19.

Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kümeden Eleman Seçme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kümeden doğru eleman seçenler</i>	Nazlı, Aysel, Ayfer, Hatice, Aykut, Nermin, Hüseyin
<i>Kümeden yanlış eleman seçenler</i>	Büşra, İbrahim, Ayhan
<i>Kümeyi belirtmeyenler</i>	...

Çizelge incelendiğinde 7 adayın kümeden doğru eleman seçenler ve 3 adayın da kümeden yanlış eleman seçenler kategorinde yer aldığı görülmektedir.

Kümeden doğru eleman seçenler kategorisinde yer alan adaylar rasyonel sayılar kümesi üzerinde işlem yaptıklarının farkındadırlar. Bu yüzden elemanları rasyonel sayı belirtecek notasyonlar kullanarak seçmişlerdir. Bununla birlikte kümeden yanlış eleman seçenler kategorisinde yer alan adaylar ise rasyonel sayılar kümesinden aldıkları elemanları rasyonel sayı notasyonu kullanarak tanımlamamışlardır. Adayların rasyonel sayı yerine tamsayı notasyonları kullandıkları görülmüştür.

Çözümün sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.20 de verilmiştir.

Çizelge 4.20.

Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Çözümün Sunumu	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Tam/ikna edici açıklama yapanlar	Nermin, Hüseyin, Aykut, Aysel
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	Ayhan, Büşra, Hatice, Ayfer
Hiç açıklama yapmayanlar	İbrahim, Nazlı
Yanlış açıklama yapanlar	...

Çizelgeye göre 4 aday tam/ikna edici açıklama yapanlar, 4 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 2 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Bir öğretmen adayının grup kavramı ile ilgili problemi tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$ şeklindeki sayılardır.

61) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ olarak dediğimizde $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q}$
 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$ tepalidir.

62) $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) \stackrel{?}{=} (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$
 $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} + (\frac{cf + ed}{df}) = \frac{ad + cf + bef}{bdf} = \frac{ad + cf + bef}{bdf} = (\frac{ad + cf}{bdf}) + \frac{bef}{bdf} = (\frac{ad + cf}{bdf}) + \frac{e}{f} = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$

63) $\forall a, b, e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{e_1}{e_2} \in \mathbb{Q}$
 $\frac{a}{b} + \frac{e_1}{e_2} \stackrel{?}{=} \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = 0$ $e_1 = 0$ $e_2 \in \mathbb{Z}$ $\frac{e_1}{e_2} \in \mathbb{Q}$ 0 bir elemandır.

64) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$
 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{?}{=} 0$ $c = -a$ $d = -b$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ters eleman vardır.

4 soruda sorduğundan $\mathbb{Q}$ toplama birimine göre bir gruptur.

Şekil 4.44. Nermin'in Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Nermin: İlk olarak ben bu rasyonel sayıları tanımlayayım. Bir kere rasyonel sayıları oluştururken $a, b \in \mathbb{Z}$ almak zorundayım. Daha sonra a/b şeklinde olan ve $b \neq 0$

şeklinde olan sayılara biz rasyonel sayı diyoruz. Rasyonel sayıların toplama işlemine göre grup olup olmadığını gösterirken ilk olarak kapalılık özelliğini göstermem lazım.

G1) İki tane rasyonel sayı almam lazım ki aralarında bir işlem olsun. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ diyeceğim; a/b ve c/d eleman $\mathbb{Q}$ desem $a/b + c/d$ eleman mıdır? $\mathbb{Q}$ bunu inceleyeceğim. Eğer bu işlem sonucu yine rasyonel sayı olursa kapalıdır diyeceğim. Bunu da şöyle gösterebiliriz... $a/b + c/d = ad + bc/bd$ elde edilir. Tabi burada bu işlemi yapabilmek için payda eşitledim ve topladım. Çıkan sonuçta da tamsayıları bir birleriyle çarpıp topladığım için sonuçlar yine bir tamsayı olur ve iki tamsayının birbirine bölümü sonucunda da rasyonel sayıları elde ediyorum. Dolayısıyla sonuçta eleman $\mathbb{Q}$ olduğundan kapalıdır.

G2) Birleşme özelliğini incelerken 3 tane rasyonel sayı almam lazım... Yine $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ için $a/b, c/d, e/f \in \mathbb{Q}$ olsun. Şimdi bunu gösterirken $a/b + (c/d + e/f) = (a/b + c/d) + e/f$ eşit midir bunu inceleyeceğim. $a/b + (c/d + e/f) = a/b + (cf + ed/df) = adf + bcf + bed/bdf$ olur. Şimdi elde ettiğim sonuçta tek tek paydalarını ayrı ayrı yazsam... $(adf + bcf/bdf) + bed/bdf$ elde edilir. Şimdi burada parantez içerisindeki ifadeyi de ayırayım. $(adf/bdf + bcf/bdf) + bed/bdf$ yazabilirim. Sonra da sadeleştirmeleri yapsam; bu sadeleştirmeler sonucunda $(a/b + c/d) + e/f$ elde ederim ve bu eşitliği gösterdiğim için de birleşmelidir. Üçüncü olarak birim eleman özelliğini inceleyeceğim;

G3) Yine $\forall a, b, e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$ ve $a/b, e_1/e_2 \in \mathbb{Q}$ için göstermek istediğim şey $a/b + e_1/e_2 = a/b$ midir olacak. Şimdi bunu nasıl gösterebilirim acaba... [Düşünüyorum]... Payda mı eşitlesem acaba... Ya da $e_1/e_2 = 0$ çıkıyor zaten hocam... Buradan da $e_1 = 0$ ve $e_2 \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde $e_1/e_2 \in \mathbb{Q}$ mudur acaba emin olamadım.

Mülakatçı: Sıfır bir rasyonel sayı mıdır?

Nermin: Evet 0 bir rasyonel sayıdır. Dolayısıyla bu haliyle olur ama bunu birim eleman olarak yazabilir miyim diye düşünüyorum. Yani evet sıfır toplama işlemine göre etkisiz elemandır. O halde $e_1/e_2 \in \mathbb{Q}$ olup 0 birim elemandır.

G4) Ters eleman özelliğini araştırmalıyım. Yine ters eleman için de $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ diyelim. Şimdi $a/b + c/d = 0$ olduğunu göstermem lazım. Bu şekilde bir c/d var mıdır? Bunu da bulabiliriz. Yani $c = -a$ ve $d = -b$ olacak şekilde bir ters eleman bulabiliriz. O halde $(a/b)^{-1} = -a/b$ olur. Burada $-a/b \in \mathbb{Q}$ olduğundan ters

eleman da vardır. Ama ben derslerden eğer yanlış hatırlamıyorsam bu kümenin grup olmadığını göstermiştik.

Mülakatçı: Ama siz bu haliyle bir grup buluyorsunuz. Bir yerde hata mı yaptığınızı düşünüyorsunuz?

Nermin: Evet ben grup buldum... Yaptığım işlemlerde bir hata olduğunu düşünmüyorum ve bu işlemlere göre grup oluyor. 4 şartı da sağladığından $\mathbb{Q}$ toplama işlemine göre bir gruptur.

Öğretmen adaylarından çözümün sunumunu tam/ikna edici açıklayarak yapanlar grup kavramının tanımını doğru kullanmışlardır. Adaylar problemin çözümü için rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işleminin sağlaması gereken özellikleri grup tanımından yararlanarak doğru bir şekilde göstermişlerdir. Bununla birlikte sağlanan özelliklerin nedenlerini doğru bir şekilde açıklamışlardır.

Bir öğretmen adayının grup kavramı ile ilgili problemi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Handwritten mathematical proof for the group properties of rational numbers under addition:

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ için $a + b \in \mathbb{Q}$ kapalı
- 2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ Birleşme öz. var
- 3) $\forall a \in \mathbb{Q}$ için $\exists e \in \mathbb{Q}$
 $a + e = e + a = a$ dıradık.
 $e = 0 \in \mathbb{Q}$
- 4) $\forall a \in \mathbb{Q}$ ve $e \in \mathbb{Q}$ ol. $a + e = e + a = a$
 $a + a' = a' + a = e$
 $a' = e - a$ $a' = e - a$
 $a' = 0 - a$
 $a' = -a \in \mathbb{Q}$

Şekil 4.45. Büşra'nın Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Büşra: Burada ilk olarak $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ için $a + b \in \mathbb{Q}$ olur. O halde kapalıdır.

İkinci olarak; $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ için birleşme özelliği de sağlanır. Yani $a + (b + c) = (a + b) + c$ olur.

Mülakatçı: Neden?

Büşra: Çünkü rasyonel sayılar kümesinde birleşme özelliği var. Toplama işlemine göre birleşme özelliği var. Buradan genelleyecek olursak birleşme özelliğinin var olduğunu görürüz.

Üçüncü olarak; $\forall a \in \mathbb{Q}$ için $\exists e \in \mathbb{Q}$ bulmamız gerekiyor. Bunun $a + e = e + a = a$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Q}$ arıyorum. Buradan her iki taraftan da $e = 0$ geliyor. Sıfırda rasyonel sayı olduğu için $e = 0$ dır.

Dördüncü olarak; $\forall a \in \mathbb{Q}$ ve $e \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ arıyorum. Çıkan sonucun da yine $\mathbb{Q}$ ya ait olması gerekiyor. $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$ olacak. İlk eşitliği alırsam $a^{-1} = a - e$ diğer taraftan da yine $a^{-1} = e - a$ olur. Burada e dediğim ifade 0 idi. O halde $a^{-1} = 0 - a = -a$ olarak bulunur. $-a$ da yine $\mathbb{Q}$ nun elemanıdır. O halde rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre bir grupmuş... Demek ki ben yanlış hatırlıyorum.

Belirsiz/yetersiz açıklama yapan adaylar doğru sonuca ulaşmışlar fakat çözüm için kullandıkları matematiksel dil ve notasyonlar ile toplama işleminin rasyonel sayılar kümesi üzerinde sağladığı özelliklerin sebeplerini açıklamakta yetersiz kalmışlardır. Bu kategorideki adaylar özellikle birim eleman ve ters eleman özelliklerinin sağlandığını ifade etmişler fakat neden bu özelliklerin var olduğunu açıklamamışlardır.

Bir öğretmen adayının grup kavramı ile ilgili problemi hiç açıklama yapmayarak çözümünü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Handwritten mathematical proof for the group properties of rational numbers:

$$\begin{aligned}
 1) & \quad a, b \in \mathbb{Q} \quad a + b \in \mathbb{Q} \quad (\text{kapalılık d't}) \\
 2) & \quad a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{Q} \quad (\text{Bir. d't}) \\
 3) & \quad 0 \in \mathbb{Q} \quad a + 0 = 0 + a = a \quad (\text{Et. Eleman}) \\
 4) & \quad a, a' \in \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{Q} \quad a + a' = a' + a = 0 \quad a' \in \mathbb{Q} \quad (\text{Ters ele.}) \\
 & \quad \boxed{a' = -a} \\
 & \quad \text{Grupdur.}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.46. İbrahim'in Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

İbrahim: Bunların şartlarına bakacağız... Birinci şartımız kapalılık şartı... $a, b \in \mathbb{Q}$ diyeceğiz. Buradan $a * b$ diyeceğiz işlemimiz $*$ mıydı? Yok toplamaydı pardon... $a + b$ toplamı da yine $\mathbb{Q}$ nun elemanıdır. Dolayısıyla kapalılık sağlanır. Buna aksi bir örnek veremeyiz.

İkinci durumumuz birleşme... Yine $a, b, c \in \mathbb{Q}$ alalım. $(a + b) + c = a + (b + c)$ ve bu eşitlik sağlanır. Ayrıca bunu ayrıntılı göstermeye gerek yoktur.

Mülakatçı: Neden?

İbrahim: Çünkü burada üç rasyonel sayının toplamında sıralamanın önemi yoktur. Dolayısıyla sonuç yine $\mathbb{Q}$ nun elemanıdır. Buradan da birleşme özelliğinin varlığından söz ederiz.

Rasyonel sayılarda toplama işlemine bakıldığında göre; $0 \in \mathbb{Q}$ diyeceğiz. Buradan $a + 0 = 0 + a = a$ olur. Dolayısıyla etkisiz elemanı vardır.

Dördüncü özelliğimizde ters elemandır. a ile a nın tersi yine $\mathbb{Q}$ nun elemanı olsun ve yine $0 \in \mathbb{Q}$ olsun. $a + a' = a' + a = 0$ ise yani bir $a' \in \mathbb{Q}$ varsa ki bu vardır. Dolayısıyla ters eleman özelliği de sağlanır.

Mülakatçı: Nedir ters eleman?

İbrahim: Buraya göre mi hocam?

Mülakatçı: Evet...

İbrahim: Buraya göre ters eleman $-a$ dır. Dolayısıyla rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre bir gruptur. Abelyen gruptur. Değişmelidir.

Hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde yer alan adaylar ise ön bilgilerinden yararlanarak problemin çözümünü yapmışlar ve özelliklerin neden rasyonel sayılar kümesi üzerinde sağlandığına dair açıklama yapmamışlardır. Bu adaylar problemin sonucuna doğru ulaşmışlar ancak kullandıkları matematiksel ifadeleri açıklama gereği duymamışlardır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.21 de verilmiştir.

Çizelge 4.21.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Nermin, Ayfer, Aysel
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, İbrahim, Büşra, Hatice, Nazlı
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Hüseyin, Aykut

Çizelgeye göre 3 öğretmen adayı doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan, 5 öğretmen adayı yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan ve 2 öğretmen adayı da gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer almaktadır.

Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar problemin çözümü için grup tanımını doğru kullanmışlardır. Adaylar rasyonel sayılar ve üzerinde tanımlanan toplama işlemine uygun notasyonlar kullanarak işlem yapmışlardır. Ayrıca toplama işleminin rasyonel sayılar kümesi üzerinde sağladığı özelliklerin sebeplerini düzgün matematiksel ifadeler ile açıklamışlardır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar grup tanımını doğru bir şekilde kullanmışlar ve bu şekilde problemi çözmüşlerdir. Adaylardan Ayhan, İbrahim ve Büşra çalıştıkları kümeye uygun notasyonlar kullanmamışlardır. Bu adaylar rasyonel sayılar kümesindeki elemanları a, b şeklinde notasyonlar kullanarak seçmişler ve buna göre işlem yapmışlardır. Ayrıca toplama işleminin sağladığı özelliklerin açıklamalarını yapmadan doğrudan çözüm yapmışlardır. Adaylardan Hatice ve Nazlı ise aslında rasyonel sayılar kümesine uygun notasyonlar kullanarak eleman seçmişler fakat bu elemanların özelliklerini açıklamamışlardır. Hatice ve Nazlı rasyonel sayılar kümesindeki elemanları a/b şeklinde kullanmışlar fakat $b \neq 0$ olması gerektiğine vurgu yapmamışlardır. Bununla birlikte Nazlı toplama işleminin sağladığı özelliklerin sebeplerini ifade etmemiştir.

4.3.3. Alt Grup Kavramı

Alt grup kavramı ile ilgili problemi anlama kategorisine göre adayların sınıflandırılması Çizelge 4.22 de verilmiştir.

Çizelge 4.22.

Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Problemi Anlama</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru anlayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel, Nazlı
<i>Eksik Anlayanlar</i>	...
<i>Yanlış Anlayanlar</i>	...

Çizelgeye göre adayların tamamı problemi doğru anlamışlar ve bu yüzden de problemin çözümünde ne yapmaları gerektiğine doğru karar vermişlerdir.

Problem ifadesinde verilen H kümesinin $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun alt grubu olduğunu göstermek için adaylar farklı tercihler kullanmışlardır. Adaylardan Ayhan, Büşra ve Aysel H kümesinin $(\mathbb{Z}, +)$ nin alt grubu olduğunu göstermek için ön bilgilerinden yararlanmak istemişlerdir. Bu adaylar bir alt grup olma kriteri olan $\forall x, y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ teoremini kullanmaya karar vermişlerdir. Benzer şekilde adaylardan Aykut ve Ayfer bu teoreme denk olan $\forall x, y \in H$ için $xy \in H$ ve $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$ teoremini kullanmak istemişlerdir. Diğer adaylar ise H kümesinin alt grup olduğunu göstermek için çalışma kağıdında yer alan tanımı kullanmaya karar vermişlerdir. Bu adaylar H kümesine grup olma şartlarını sağlamaya çalışmışlardır.

Öğretmen adaylarının kümeden eleman seçme kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.23’de verilmiştir.

Çizelge 4.23.
Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Kümeden Eleman Seçme	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Kümeden doğru eleman seçenler	Ayhan, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
Kümeden yanlış eleman seçenler	Hüseyin, İbrahim, Nermin, Nazlı
Kümeyi belirtmeyenler	...

Çizelge incelendiğinde 6 adayın kümeden doğru eleman seçenler ve 4 adayın da kümeden yanlış eleman seçenler kategorinde yer aldığı görülmektedir.

Kümeden doğru elemanlar seçenler kategorisinde yer alan adaylar H kümesinin özelliklerini dikkate almışlardır. Adaylar $H = \{x \in \mathbb{Z}: ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ şeklinde tanımlanan küme üzerinden $x \in \mathbb{Z}$ ve a sabit olmak üzere $ax \equiv 0 \pmod{5}$ ve $ay \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde elemanlar seçmişlerdir. Adaylar kümenin nasıl tanımlı olduğunu ve özelliklerini dikkate almışlardır. Bununla birlikte kümeden yanlış elemanlar seçenler kategorisinde yer alan adaylardan Hüseyin ve İbrahim H kümesini açık hali ile yazmak istemişlerdir. Adaylar üzerinde çalıştıkları kümeyi $H = \{5a, 10a, \dots\}$ şeklinde belirlemişler ve elemanları bu kümeden seçerek işlem yapmışlardır. Bununla birlikte bu kategoride yer alan Nermin H kümesinden $ax \equiv 0 \pmod{5}$ ve $by \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde elemanlar almıştır. Nazlı ise H kümesinin özelliklerini tam anlayamamış ve elemanları $a \equiv 0 \pmod{5}$ ve $2a \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde seçmiştir.

Çözümün sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.24’de verilmiştir.

Çizelge 4.24.
Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Çözümün Sunumu	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Tam/ikna edici açıklama yapanlar	Ayhan, Büşra, Aykut, Aysel
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	Hüseyin, Nermin, Ayfer
Hiç açıklama yapmayanlar	...
Yanlış açıklama yapanlar	İbrahim, Hatice, Nazlı

Çizelgeye göre 4 aday tam/ikna edici açıklama yapanlar, 3 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 3 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Bir öğretmen adayının alt grup kavramı ile ilgili problemi tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$x \in \mathbb{Z}$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall x, y \in H$ alalım. $x - y \in H$ olduğunu göstereyim.
 $\left. \begin{array}{l} ax \equiv 0 \pmod{5} \in H \\ ay \equiv 0 \pmod{5} \in H \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ax - ay \equiv 0 \pmod{5} \\ a(x - y) \equiv 0 \pmod{5} \text{ olup } x - y \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan} \\ a(x - y) \equiv 0 \pmod{5} \in H \text{ dir. Bu nedenle} \end{array}$
 $H = \{x \in \mathbb{Z} ; ax \equiv 0 \pmod{5} \text{ olması}\}$ $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubudur.

Şekil 4.47. Ayhan'ın Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Ayhan: Yani burada H kümesinin elemanları $ax = 5k$ şeklindedir. Ben bu çözümü geçen yıl yaptığımız bir teorem ispatından faydalanarak yapmak istiyorum. Hatırladığım kadarıyla bu yolla yapmak daha kısa idi.

Mülakatçı: Problemi çözmeden önce ilk olarak burada verilen H kümesinden iki eleman seçebilir misiniz?

Ayhan: H kümesinden x ve y şeklinde iki tane eleman alalım. $x \in \mathbb{Z}$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bu elemanlardan $x - y \in H$ olduğunu göstermeliyiz. Burada aldığımız elemanlar $ax \equiv 0 \pmod{5}$ eleman H ve $ay \equiv 0 \pmod{5}$ eleman H şeklindedir.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi problemin çözümünü yapabiliriz.

Ayhan: Şimdi benim burada yapmam gereken şey $x - y \in H$ olduğunu göstermeliyim.

Mülakatçı: Burada neden $x - y$ elemanını araştırıyorsunuz?

Ayhan: Çünkü burada normalde $x \cdot y^{-1} \in H$ olduğunu inceliyoruz. Ama burada işlemimiz toplama işlemi olduğu için buradaki y elemanın tersi de $-y$ ifadesi olduğu için bu ifadeyi araştırıyorum.

O halde $ax - ay \equiv 0 \pmod{5}$ ifadesini araştırmalıyım. Buradan $a(x - y) \equiv 0 \pmod{5}$ olup $x - y \in \mathbb{Z}$ olduğundan $a(x - y) \equiv 0 \pmod{5}$ eleman H dır. Çünkü iki tamsayının farkı yine bir tamsayıdır. Bu nedenle $H = \{x \in \mathbb{Z} : ax = 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubudur.

Çözümün sunumunu tam/ikna edici açıklayarak yapan adaylar alt grup olma kriteri olan teoremler yardımıyla çözüm yapmışlardır. Adaylardan Ayhan, Büşra ve Aysel problemde verilen H kümesinin $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun alt grubu olduğunu göstermek için $\forall a, b \in H$ için $a - b \in H$ olup olmadığını incelemişlerdir. Bu adaylar problemde kullandıkları teoremi doğru bir şekilde kullanmış ve çözüm aşamalarını açıklamışlardır. Aykut ise bu teoreme denk olan $\forall a, b \in H$ için $a + b \in H$ ve $\forall a \in H$ için $-a \in H$ şeklindeki teoremi kullanmıştır. Aykut teorem yardımıyla problemi çözmüş ve yine bu kategoride yer alan diğer adaylar gibi çözüm aşamalarını açıklamıştır.

Bir öğretmen adayının alt grup kavramı ile ilgili problemi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$H = \{0, 5a, 10a, \dots\}$
 G1) $\forall x \in \mathbb{Z}$ tam, $5a + 10a = 15a \in H$ kapalıdır.
 G2) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ tam, $(5a + 10a) + 0 = 5a + (10a + 0)$
 $15a = 15a$ birleşme.
 G3) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $5a + e = 5a = e + 5a$,
 $e = 0 = e$, $0 \in H$, birim eleman.
 G3) $\forall x \in \mathbb{Z}$ tam, $5a + y = e = 0 = y + 5a$
 $y = -5a = -y$, $y \in H$ ters eleman.
 $H, \mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur.

Şekil 4.48. Hüseyin'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Mülakatçı: Problemi çözmeden önce ilk olarak burada verilen H kümesinden iki eleman seçebilir misiniz?

Hüseyin: Burada H kümesinin elemanları tamsayılardan oluşuyor ve mod 5'e göre kalanlarının 0 olması gerekiyor. Bu yüzden benim seçeceğim x elemanlarının 5'in katı şeklinde olması gerekiyor. H kümesi 5'in katları şeklinde olduğu için $H = \{0, 5a, 10a, \dots\}$ şeklinde olmalıdır.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi problemin çözümünü yapabiliriz.

Hüseyin: Problemde verilen $\mathbb{Z}$ kümesi bir grup olduğu için kapalılık özelliğini sağlar. Şimdi H kümesinin de grup özelliklerini sağlaması için kapalılık özelliğini sağlaması gerekir.

G1) H kümesinden aldığım $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, H dan alacağım iki elemanın işleme girmeleri sonucunda yine H ın bir elemanını elde etmeliyim. O halde $5a + 10a = 15a \in H$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır. Şimdi grubun ikinci özelliği olan birleşme özelliğini inceleyeceğiz.

G2) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için, $(5a + 10a) + 0 = 5a + (10a + 0)$ birbirine eşit olmalıdır. Buradan $15a = 15a$ elde edilir. Buna göre birleşme özelliği de sağlanır. Şimdi üçüncü olarak birim eleman özelliğine bakacağız.

G3) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, birim elemanı e olarak alırsak; $5a + e = 5a = e + 5a$ eşitliğini yazabiliriz. Burada eşitliğin her iki tarafına da $-5a$ eklersek; $e = 0 = e$, elde ederiz. $0 \in H$ olduğundan 0 , H kümesinin birim elemanıdır. Son olarak ters eleman özelliğini incelemeliyiz.

G4) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $5a + y = e = 0 = y + 5a$ olur. Buradan $y = -5a = y$, $y \in H$ olduğundan ters eleman özelliği de sağlanır. Çünkü burada aldığımız x elemanları birer tamsayı olduğundan $-5a$ elemanı da yine H kümesinin elemanıdır. Dolayısıyla H , $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur.

Belirsiz/yetersiz açıklama yapan adaylar problem ifadesinde verilen H kümesinin alt grup olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ancak bu kategoride yer alan adaylar çözüm için kullandıkları özellikleri tam olarak ifade etmemişlerdir. Adaylardan Hüseyin ve Nermin verilen H kümesinin alt grup olduğunu göstermek için alt grup tanımından yararlanmışlar ve H kümesinin toplama işlemine göre bir grup olduğunu göstermişlerdir. Bu adaylar çözüm içerisinde kullandıkları birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerinin neden sağlandığını tam olarak açıklamamışlardır. Ayfer ise

çözüm için $\forall a, b \in H$ için $a - b \in H$ şeklinde tanımlı olan teoremden yararlanılmış fakat çözümde kullandığı kapalılık ve ters eleman özelliklerini tam olarak ifade etmemiştir.

Bir öğretmen adayının alt grup kavramı ile ilgili problemi yanlış açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Handwritten work showing the solution for finding a subgroup H of $(\mathbb{Z}, +)$ such that $5a \equiv 0 \pmod{5}$.

Given: $5a \equiv 0 \pmod{5}$ and $10a \equiv 0 \pmod{5}$.
 Let $x = \{5, 10, 15, \dots, 5k\}$.

1) $ax \equiv 0 \pmod{5}$ for $5k \in \mathbb{Z}^+$ (closedness is satisfied).
 2) $(a \cdot x)y \equiv a(xy)$ for $y \in \mathbb{Z}^+$ (associative).
 3) $ax \equiv 0$ for $5k \in \mathbb{Z}$ and $5k \equiv 0 \pmod{5}$ (closure).
 4) $(a \cdot e) \equiv 0 \Rightarrow x^{-1} = a$ (inverse element exists).
 $H \leq (\mathbb{Z}, +)$

Şekil 4.49. İbrahim'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

İbrahim: Bu problemi çözebilmek için verilen kümenin grup şartlarını sağlaması gerekecek. Bunu incelemeliyiz.

Mülakatçı: Problemi çözmeden önce ilk olarak burada verilen H kümesi üzerinden iki eleman seçebilir misiniz?

İbrahim: Mesela H kümesinden; 5'i seçersek $5a \equiv 0 \pmod{5}$ ve $x = 5$ diyebiliriz. Bunun yanında 5'in katı olan başka bir eleman daha alabilirim. Mesela diğer eleman da 10 olabilir. Yine $10a \equiv 0 \pmod{5}$ ve $x = 10$ şeklinde olabilir. Burada yer alan a sabit tamsayısı için bu elemanlar her zaman bu eşitliği sağlar.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi problemin çözümünü yapabiliriz.

İbrahim: İlk olarak $(\mathbb{Z}, +)$ ya göre grubun elemanlarını yazayım. Bu grubun elemanları $x = \{5, 10, 15, \dots, 5k\}$ şeklindedir. Şimdi ilk olarak kapalılık özelliğini inceleyeceğiz.

- 1) $ax \equiv 0 \pmod{5}$ ifadesine göre $x = 5k$ şeklindedir. Bulduğumuz $5k$ elemanı da zaten $(\mathbb{Z}, +)$ olduğundan kapalılık sağlanır. İkinci olarak birleşme özelliğine bakacağız.

- 2) $(ax)y \equiv a(xy)$ şeklinde yazabiliriz. Burada da yine y elemanıdır $(\mathbb{Z}, +)$ olur. Bu eşitlik her tamsayı için sağlanacağından dolayı birleşme özelliği de sağlanır. Üçüncü olarak etkisiz elemanı incelemeliyim.
- 3) $ax \equiv 0 \dots$ Bu grubun etkisiz elemanı kaç olur... $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun etkisiz elemanı 0 dır. $ax \equiv 0$ eşitliğini sağlayacak eleman vardır zaten $x = 5$ için sağlıyor. O yüzden etkisiz elemanı vardır.

Mülakatçı: Etkisiz eleman nedir?

İbrahim: Alt grubun etkisiz elemanı $5k$ dır. Çünkü 5 in katları mod 5 e göre 0 dır. Bunu matematiksel olarak şöyle yazabilirim; $5k \in \mathbb{Z}$, $5k \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde yazabilirim. Dördüncü olarak da ters elemanı bulmalıyız.

- 4) $a.e \equiv 0$ ise zaten burada x i $5k$ olarak aldığımızda a direk olarak x in tersi oluyor. Yani $x^{-1} = a$ olur. Böylece ters elemana da ulaşmış oluyoruz. Yani x in tersi a dır. Ters eleman da olduğu için H bir alt gruptur.

Yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer alan adaylar, H kümesinin alt grup olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Adaylardan İbrahim, problemin çözümü için grup olma özelliklerinden yararlanmış fakat bu özellikleri gösterebilmek için H kümesine uygun elemanlar kullanmamıştır. İbrahim, çözümde bir işlem kullanmamış sadece H kümesinin özelliklerinden yararlanmıştır. Bu yüzden çözümü tamamen yanlıştır. Hatice, H kümesinin alt grup olduğunu göstermek için grup özelliklerini kullanmıştır. Aday, grup özelliklerinden birleşme özelliğini kullanmış fakat neden bu özelliğin sağlandığını açıklamamıştır. Bununla birlikte hem birim elemanı hem de ters elemanı 0 olarak bulmuştur. Bu yüzden Hatice'nin çözümü de yanlıştır. Nazlı ise H kümesinin özelliklerini tam olarak yansıtacak elemanlar kullanmamıştır. Nazlı, elemanlarını $a \equiv 0 \pmod{5}$, $2a \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde belirlemiş ve H kümesinin alt grup olduğunu göstermek için grup özelliklerinden yararlanmıştır. Nazlı yanlış elemanlar kullanarak H kümesinin grup özelliklerinin tamamını sağladığına karar vermiştir.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.25 de verilmiştir.

Çizelge 4.25.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Aysel, Büşra, Ayhan, Nermin
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Hatice, İbrahim, Hüseyin
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Nazlı, Aykut, Ayfer

Çizelgeye göre 4 öğretmen adayı doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan, 3 öğretmen adayı yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan ve 3 öğretmen adayı da gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer almaktadır.

Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar problemin çözümü için H kümesinin elemanlarını $ax \equiv 0 \pmod{5}$ ve $ay \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde doğru kullanmışlardır. Ayrıca adaylardan Nermin dışındakiler kullandıkları teorem ifadesini ve özelliklerini doğru kullanmışlardır. Nermin ise çözüm için kullandığı grup olma özelliklerini doğru kullanmış ve açıklamıştır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylar H kümesinin özelliklerini tam olarak yansıtmayan elemanlar kullanmışlardır. Adaylardan İbrahim ve Hüseyin, H kümesinin elemanlarını $H = \{0, 5a, 10a \dots\}$ şeklinde almışlar ve bu elemanları kullanarak çözüm yapmışlardır. İbrahim çözüm sürecinde sadece H kümesinin özelliklerinden yararlanmış ve hangi işleme göre çalıştığını belirtmemiştir. Hatice ise H kümesinin elemanlarını doğru seçmesine rağmen kümenin birim ve ters elemanını birbirine eşit bulmuştur. Hatice, birim ve ters elemanı birbirine eşit bulmasına rağmen H kümesinin alt grup olduğuna karar vermiştir.

Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylardan Aykut ve Ayfer problemi doğru çözmüşlerdir. Ancak Ayfer, H

kümesinin alt grup olduğunu göstermek için kullandığı teorem gereği $\forall ax \in H$ için $-ax \in H$ olduğunu göstermesi yeterli iken bunun yanında $\forall ay \in H$ için $-ay \in H$ olduğunu da göstermiştir. Ayfer'in bu kullanımı $\forall$ notasyonunu yorumlayamamış olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte Aykut, problemin çözümünü doğru yapmasına rağmen çözüm içerisinde oldukça gereksiz notasyonlar kullanmıştır. Aykut H kümesinin elemanlarını ilk olarak u, v şeklinde belirlemiş ve daha sonra bu elemanları $u = ax \equiv 0 \pmod{5}, v = ay \equiv 0 \pmod{5}$ olarak tanımlamıştır. Çözüm içerisinde H kümesindeki elemanların toplama işlemine göre kapalılık ve ters eleman özelliklerini incelemiştir. Fakat elemanları bu şekilde seçtiği için zorlanmıştır. Aykut'un çözümü aşağıda sunulmuştur.

Handwritten solution for the subgroup problem. The solution shows the closure and inverse properties for a set H defined by elements of the form $ax \pmod{5}$.

Given: $u, v \in H$ $u = ax \equiv 0 \pmod{5}$ $v = ay \equiv 0 \pmod{5}$

i) $u + v \in H$

$$\begin{array}{r} ax \equiv 0 \pmod{5} \\ + ay \equiv 0 \pmod{5} \\ \hline a(x+y) \equiv 0 \pmod{5} \\ \Rightarrow u+v \equiv 0 \pmod{5} \end{array}$$

ii) $u \in H$ olsun $u^{-1} \in H$ midir? $e = a \cdot 0 \equiv 0 \pmod{5}$

$$\begin{array}{r} u + u^{-1} = e \\ ax \equiv 0 \pmod{5} \\ + u^{-1} \\ \hline 0 \equiv 0 \pmod{5} \end{array}$$

her iki tarafa solda 0 'un toplama işlemine göre tersine işleme yaparsak.

$$\begin{array}{r} a(-x) \equiv 0 \pmod{5} \\ ax \equiv 0 \pmod{5} \\ + u^{-1} \\ \hline a(-x) \equiv 0 \pmod{5} \\ a(0) \equiv 0 \pmod{5} \end{array}$$

$\Rightarrow u^{-1} = a(-x) \equiv 0 \pmod{5} \in H$

H alt gruptur.

Şekil 4.50. Aykut'un Alt Grup Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Bu kategoride yer alan diğer bir aday olan Nazlı ise H kümesinin özelliklerini tam olarak yansıtamamıştır. Nazlı, H kümesini elemanlarını $a \equiv 0 \pmod{5}, 2a \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde kullanmıştır. Nazlı, bu kümede olan elemanların 5'in katı olması gerektiğini ihmal etmiştir. Ayrıca problemin çözümü için kullandığı grup olma şartlarını da tam olarak açıklamamıştır.

4.3.4. Grup Homomorfizmi Kavramı

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili problemi anlama kategorisine göre adayların sınıflandırılması Çizelge 4.26 da verilmiştir.

Çizelge 4.26.
Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Problemi Anlama	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Doğru anlayanlar	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel, Nazlı
Eksik anlayanlar	...
Yanlış anlayanlar	İbrahim

Çizelgeye göre 9 aday problemi doğru ve 1 aday da yanlış anlamışlardır. Bununla birlikte problemi eksik anlayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup homomorfizmi kavramına yönelik problemi doğru anlayanlar kategorisinde yer alan adaylar çözüm için tanımdan yararlanmak istemişlerdir. Adaylar grup homomorfizmi tanımını kullanarak problemi çözebileceklerini ifade etmişlerdir. Yanlış anlayanlar kategorisinde yer alan İbrahim ise problemi çözmek için grup homomorfizmi tanımının yanında grup tanımından da faydalanması gerektiğini düşünmüştür. İbrahim, problem ifadesindeki dönüşüm üzerinden grup özelliklerini incelemiştir.

Öğretmen adaylarının kümeden eleman seçme kategorisine göre sınıflandırılması Çizelge 4.27’de verilmiştir.

Çizelge 4.27.
Öğretmen Adaylarının Kümeden Eleman Seçme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Kümeden Eleman Seçme	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Kümeden doğru eleman seçenler	Büşra, Aysel
Kümeden yanlış eleman seçenler	...
Kümeyi belirtmeyenler	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Aykut, Hatice, Ayfer, Nazlı

Çizelge incelendiğinde 2 adayın kümeden doğru eleman seçenler ve 8 adayın da kümeyi belirtmeyenler kategorilerinde yer aldığı görülmektedir. Bununla birlikte

kümeden yanlış elemanlar seçenler kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Kümeden doğru elemanlar seçenler kategorisinde yer alan adaylar $\mathbb{R}^*$ kümesinde yer alan elemanların $\mathbb{R} / \{0\}$ şeklinde olduğunu farkındadırlar. Adaylardan Büşra $\mathbb{R}^*$ kümesinden seçtiği elemanların sıfırdan farklı olması gerektiğini göstermek için üzerinde çalıştığı kümeyi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} / \{0\}$ şeklinde tanımlamıştır. Aysel ise $\mathbb{R}^*$ kümesinden seçtiği x, y elemanlarını $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ şeklinde tanımlamıştır. Kümeyi belirtmeyenler kategorisinde yer alan adaylar ise $\mathbb{R}^*$ kümesindeki elemanların özellikleri ile ilgilenmemişlerdir. Adaylar çözüm için $x, y \in \mathbb{R}^*$ olsun şeklinde elemanlar seçmişlerdir. Adaylar tarafından yapılan bu seçim aslında yanlış değildir fakat eleman seçimi bu şekilde olduğunda adayların hangi küme üzerinde çalıştıkları anlaşılmamaktadır.

Çözümün sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.28 de verilmiştir.

Çizelge 4.28.

Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Çözümün Sunumu	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Tam/ikna edici açıklama yapanlar	Hatice
Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer, Aysel, Nazlı
Hiç açıklama yapmayanlar	...
Yanlış açıklama yapanlar	İbrahim

Çizelgeye göre 1 aday tam/ikna edici açıklama yapanlar, 8 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 1 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Bir öğretmen adayının grup homomorfizmi kavramı ile ilgili problemi tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Sözüm: $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ için ,
 $\varphi(x, y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
 olup $|x|, |y| \in \mathbb{R}^+$ old. φ bir grup homomorfizmidir

Şekil 4.51. Hatice'nin Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Hatice: Şimdi tanım gereği $\mathbb{R}^*$ dan iki tane eleman alacağız... Grup homomorfizmi olması için $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ için; $\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y|$ olur. Şimdi de mutlak değer in özelliğinden ayrı ayrı yazabiliriz. Yani $|x| \cdot |y|$ şeklinde... Buradan da $|x| = \varphi(x)$ ve $|y| = \varphi(y)$ olur. Bulduğumuz elemanları pozitif reel sayı olması gerekiyor ve bu elemanlarda o şekilde... Eşitliğin ikinci kısmındaki elemanlar da yine çarpma işlemine göre... O halde φ bir grup homomorfizmidir. $\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ olup $|x| \cdot |y| \in \mathbb{R}^+$ olduğundan φ bir grup homomorfizmidir.

Hatice, problemin çözümü için kullanması gereken elemanları $\mathbb{R}^*$ kümesinden seçmiş fakat bu elemanların sıfırdan farklı olması gerektiğini belirtmemiştir. Hatice, problemi çözmek için grup homomorfizmi tanımını ve mutlak değer in özelliklerini kullanmıştır. Hatice, verilen dönüşümün neden grup homomorfizmi olduğunu açıklamıştır. Hatice, problem ifadesinde dönüşümün $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı olmasından dolayı görüntü kümesindeki elemanların pozitif olması gerektiğini belirtmiştir. Dönüşümün mutlak değerle tanımlı olmasından dolayı görüntü kümesindeki elemanların pozitif olduğuna karar vermiştir.

Bir öğretmen adayının grup homomorfizmi kavramı ile ilgili problemi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ için $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
 φ homomorfizmdir.

Şekil 4.52. Nermin'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Nermin: Önce $\mathbb{R}^*$ kümesinden iki tane eleman seçmeliyim. Yani $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ için; φ nin bir homomorfizm olabilmesi için homomorfizm tanımını kullanarak; $\varphi(x.y) = \varphi(x). \varphi(y)$ eşitliğinin sağlanması gerekecek. Problem içerisinde $\varphi(x) = |x|$ olarak verilmiş. O zaman $\varphi(x.y) = |x.y|$ olur. $|x.y|$ ifadesini G ve H ın birer grup olması ve mutlak değer özelliğinden dolayı; $|x.y| = |x|.|y|$ olarak yazabiliriz. Bunu da $\varphi(x). \varphi(y)$ olarak yazabiliriz. Bu dönüşümü sağladığından dolayı da φ bir homomorfizmdir. $|x.y| = |x|.|y| = \varphi(x). \varphi(y)$ olup φ homomorfizmdir.

Bu kategoride yer alan adaylar problemin çözümü için grup homomorfizmi tanımını ve mutlak değer özelliklerini doğru kullanmışlardır. Adaylar $\mathbb{R}^*$ kümesinden elemanlara φ dönüşümünü doğru bir şekilde uygulamışlar ve mutlak değer $|x.y| = |x|.|y|$ özelliğini kullanarak $\varphi(x.y) = \varphi(x). \varphi(y)$ sonucuna ulaşmışlardır. Adaylar sadece tanıma odaklanmışlar ve tanım gereği dönüşümü $\varphi(x.y) = \varphi(x). \varphi(y)$ şeklinde ifade ettiklerinden φ nin bir grup homomorfizmi olduğu sonucuna varmışlardır. Adaylar dönüşümün görüntü kümesindeki elemanların pozitif reel sayı olması gerektiğini belirtmemişlerdir.

Bir öğretmen adayının grup homomorfizmi kavramı ile ilgili problemi yanlış açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

1) $x, y \in \mathbb{R}^*$ $\varphi(x.y) = \varphi(x). \varphi(y)$
 $= |x|. |y| \in \mathbb{R}^+$ kapalılık sağlanır.

2) $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ $\varphi((x.y).z) = \varphi(x.(y.z))$
 $(|x|. |y|). |z| = |x|. (|y|. |z|) \in \mathbb{R}^+$ birleşim öz.

3) $\varphi(x.e) = \varphi(e.x)$ 4) $\varphi(x.x^{-1}) = \varphi(e)$
 $\varphi(x). \varphi(e) = \varphi(e). \varphi(x)$ $\varphi(x). \varphi(x^{-1}) = 1$
 $|x|. 1 = 1 |x|$ $|x|. |x^{-1}| = 1$
 $\varphi(e)=1$ etkisiz eleman var. $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|} \in \mathbb{R}^+$ ters eleman var

Şekil 4.53. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

İbrahim: Bu $\mathbb{R}^*$ kümesi nedir?

Mülakatçı: $\mathbb{R}^*$ ile ifade edilen küme, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesidir.

İbrahim: Bu problemi çözmek için direk tanımı kullanabiliriz. Yani $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ olup olmadığını araştıracağız. Bu tanımlı dönüşüm üzerinde grup şartlarını sağlamaya çalışacağız. Mesela ilk olarak;

- 1) İki tane eleman alalım... $x, y \in \mathbb{R}^*$ olsun. Buradan işlemlerimizin ikisi de çarpma olduğu için $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ yazabiliriz. Burada $\varphi(x) = |x|$ ve $\varphi(y) = |y|$ olduğuna göre, $|x| \cdot |y|$ olur. Bu ifadenin çarpımı da pozitif olacağından eleman $\mathbb{R}^+$ dır. Dolayısıyla kapalılık sağlanır.
- 2) Şimdi birleşme özelliğine bakacağız... O halde $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ olarak alalım. $\varphi((x \cdot y) \cdot z) = \varphi(x \cdot (y \cdot z))$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını göstereceğiz. Burada yazdıklarım φ dönüşümünden dolayı; $(|x| \cdot |y|)|z| = |x|(|y||z|)$ olur. Burada ki eşitlik sağlanır ve $\mathbb{R}^+$ nın elemanıdır. Dolayısıyla birleşme özelliği de sağlanır.
- 3) Etkisiz elemanı araştıralım. Buna göre $\varphi(x \cdot e) = \varphi(e \cdot x)$ eşitliğini inceleyeceğiz. Buradan $\varphi(x) \cdot \varphi(e) = \varphi(e) \cdot \varphi(x)$ olur. O halde φ dönüşümünden dolayı $|x| \cdot 1 = 1 \cdot |x|$ olur. Burada $e = 1$ olarak aldım çünkü $(\mathbb{R}, \cdot)$ nın etkisiz elemanı 1 dir. O halde $\varphi(e) = 1$, φ dönüşümünün etkisiz elemanıdır. Dolayısıyla etkisiz elemanı var ve 1 dir.
- 4) Son olarak ters eleman kaldı... Bunun için de $\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e)$ eşitliğini incelemeliyiz. Bu da $\varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = 1$ olmalıdır. Buradan φ dönüşümü gereğince; $|x| \cdot |x^{-1}| = 1$ olur. Dolayısıyla $|x|^{-1} = 1/|x|$ olur. Burada da bulduğumuz eleman da yine $\mathbb{R}^+$ nın elemanıdır. Dolayısıyla ters elemanda var.

Dört şartı sağladığından ve $\mathbb{R}^*$ dan $\mathbb{R}^+$ ya tanımlı olduğundan dolayı da verilen φ dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

İbrahim, problemi çözmek için grup homomorfizmi tanımını ve grup olma özelliklerini kullanmıştır. İbrahim, φ dönüşümü üzerinde grup olma şartlarını incelemiştir. Çözüm sürecinde dönüşüm üzerinden kapalılık, birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerini araştırmıştır. Bu özelliklerin sağlandığını garip matematiksel işlemler yaparak bulmuş ve sonuçta φ dönüşümünün grup homomorfizmi olduğuna karar vermiştir.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.29'da verilmiştir.

Çizelge 4.29.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	...
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Aykut, Hatice, Ayfer, Büşra, Aysel, Nazlı
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	İbrahim

Çizelgeye göre 9 öğretmen adayı yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan ve 1 öğretmen adayı da gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer almaktadır. Bununla birlikte doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylardan Hatice dışındakiler φ dönüşümünün $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı olduğunu ifade etmemişlerdir. Adaylar görüntü kümesindeki elemanların pozitif reel sayı olması gerektiğine vurgu yapmamışlardır. Adaylar sadece homomorfizm tanımı ve mutlak değer özelliklerini kullanarak φ dönüşümünün homomorfizm olduğuna karar vermişlerdir. Bununla birlikte Büşra ve Aysel dışındaki adaylar $\mathbb{R}^*$ kümesindeki elemanların nasıl elemanlar olduğunu belirtmemişlerdir. Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan İbrahim ise φ dönüşümünün bir grup homomorfizmi olduğunu göstermek için dönüşüm üzerinden grup şartlarını incelemiştir. İbrahim, incelediği her bir grup şartında yanlış matematiksel ifadeler ve notasyonlar kullanmıştır.

4.3.5. Vektör Kavramı

Vektör kavramı ile ilgili problemi anlama kategorisine göre adayların sınıflandırılması Çizelge 4.30 da verilmiştir.

Çizelge 4.30.

Öğretmen Adaylarının Problemi Anlama Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Problemi Anlama</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru anlayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel, Nazlı
<i>Eksik anlayanlar</i>	...
<i>Yanlış anlayanlar</i>	...

Çizelgeye göre adayların tamamı problemi doğru anlamışlardır. Doğal olarak problemi eksik anlayanlar ve yanlış anlayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Öğretmen adaylarının tamamı vektör kavramı ile ilgili problemin çözümü için iki vektörün eşitliği tanımını kullanmak istemişlerdir. Adaylar problemde verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin birbirine eşit olması için bileşenlerinin eşit olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Çözümün sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.31’de verilmiştir.

Çizelge 4.31.

Öğretmen Adaylarının Çözümün Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Çözümün Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Hatice, Aysel, Nazlı
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	...

Çizelgeye göre 6 aday tam/ikna edici açıklama yapanlar ve 4 aday da belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar ve yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Bir öğretmen adayının vektör kavramı ile ilgili problemi tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow (1-x, y-2, 3) = (1+x, 1, z+1)$ Buradan
 $1-x = 1+x \wedge y-2=1 \wedge z+1=3$
 $2x=0 \wedge y=3 \wedge z=2$
 $x=0$
 $\vec{a} = (1, 1, 3) \quad \vec{b} = (1, 1, 3)$

Şekil 4.54. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Ayhan: Vektörlerin birbirine eşit olabilmesi için x, y, z koordinatlarının da birbirine eşit olması gerekir. Yani eğer $a = b$ ise $(1-x, y-2, 3) = (1+x, 1, z+1)$ olmalıdır. Buradan; $1-x = 1+x$ ise $2x = 0$ ve $x = 0$ çıkar. $y-2 = 1$ ise buradan da $y = 3$ çıkar. Ve $z+1 = 3$ ise $z = 2$ olur. O zaman burada $\vec{a}$ vektörümüz, $\vec{a} = (1, 1, 3)$ ve $\vec{b}$ vektörümüzde $\vec{b} = (1, 1, 3)$ olur.

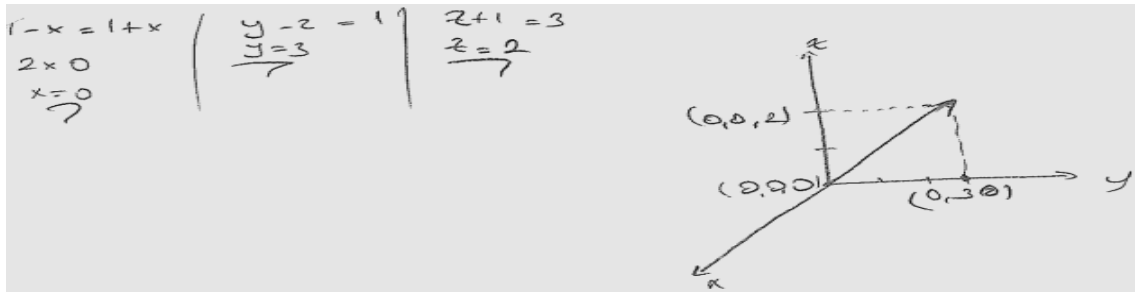
Şimdi elde ettiğimiz vektörü koordinat düzleminde göstereceğiz. Üç boyutlu uzayda gösterelim... Bu vektörü bir konum vektörü şeklinde alabiliriz. Yani $(0, 0, 0)$ noktasından başlayan ve $(1, 1, 3)$ noktasında bitecek şekilde çizebiliriz... [$\vec{a}$ vektörünü çiziyor] ... Bu şekilde çizebilirim.

Mülakatçı: Tekrar tanıma dönecek olursak bulduğumuz $\vec{a}$ vektörünü uzayın başka bir noktasına taşıyabilir miyiz?

Ayhan: Tanımda da anlatmaya çalıştığı gibi bu $\vec{a}$ vektörünü uzayın başka noktalarına taşıyabiliriz. Ama doğrultusunu, uzunluğunu ve yönünü değiştirmememiz gerekir.

Çözümün sunumunu tam/ikna edici şekilde açıklayanlar kategorisinde bulunan adaylar problemi çözmek için iki vektörün birbirine eşitliği tanımını kullanmışlardır. Adaylar $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin bileşenlerini birbirine eşitleyip, $x = 0$, $y = 3$ ve $z = 2$ değerlerini bulmuşlardır. Buldukları bu değerleri $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin bileşenlerinde yerine yazarak $\vec{a} = \vec{b}$ vektörünü $\vec{a} = \vec{b} = (1, 1, 3)$ olarak bulmuşlardır. Adaylar buldukları vektörü üç boyutlu uzayda doğru bir şekilde resmetmişlerdir.

Bir öğretmen adayının vektör kavramı ile ilgili problemi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak çözümü ve çözüm sürecinde araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.55. Aykut'un Vektör Kavramı İle İlgili Problem Çözümü

Aykut: Vektörlerde eşitlik her bir koordinatın birbirine eşit olmasıyla tanımlanmıştır. Yani $1 - x = 1 + x$, buradan $2x = 0$ ve $x = 0$ dır. Aynı şekilde $y - 2 = 1$ ise $y = 3$ olarak bulunur. Son olarak da $z + 1 = 3$ ise $z = 2$ olarak bulunur. Bulduğumuz bu vektörü koordinat sisteminde çizmemiz istenmiş. O halde bulduğumuz vektör $(0, 3, 2)$ olduğundan yz eksenini üzerinde bir vektör oluşur. [Kağıttaki şekli çiziyor]... Yani düzlemsel bir bölge üzerinde oluşur.

Mülakatçı: Tekrar tanıma dönecek olursak bulduğumuz $\vec{a}$ vektörünü uzayın başka bir noktasına taşıyabilir miyiz?

Aykut: Tabi taşıyabiliriz. Mesela doğrultusunu, uzunluğunu ve yönünü değiştirmeyecek şekilde $\vec{a}$ vektörünü $\vec{b}$ vektörü şeklinde de gösterebilirdik.

Bu kategoride yer alan adaylarda problemin çözümü için iki vektörün eşitliği tanımını kullanmışlardır. Adaylar iki vektörün bileşenlerini birbirine eşitleyerek $x = 0$, $y = 3$ ve $z = 2$ değerlerini bulmuşlardır. Ancak adaylar buldukları değerleri $\vec{a}$ veya $\vec{b}$

vektörlerinin koordinatlarını belirlemek için kullanmamışlardır. Doğrudan buldukları değerleri $\vec{a} = \vec{b}$ vektörlerinin koordinatları olarak almışlardır. Bu yüzden vektörün gösterimini yanlış yapmışlardır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.32’de verilmiştir.

Çizelge 4.32.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Hatice, Aysel, Nazlı
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	...

Çizelgeye göre 6 öğretmen adayı doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar ve 4 aday da yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisine göre doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylar problemin çözümünü doğru yapmışlardır. Adaylar problemi çözmek için iki vektörün eşitliği tanımından yararlanmış ve vektörü bulmak için de buldukları x, y, z değerlerini $\vec{a}$ veya $\vec{b}$ vektörünün koordinatlarını belirlemek için kullanmışlardır. Bu sayede vektör gösterimini doğru yapmışlardır. Bununla birlikte yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar da problemi doğru çözmüşler fakat $\vec{a} = \vec{b}$ vektörünü yanlış oluşturdukları için vektörün koordinat düzleminde gösterimini yanlış oluşturmuşlardır.

4.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yapma Süreçlerine Ait Bulgular

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili teoremleri ispatlama süreçlerine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

4.4.1. İkili İşlem Kavramı

İspata nasıl başlayacağını ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.33 de verilmiştir.

Çizelge 4.33.

Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Hüseyin, Nermin, Aysel, Ayhan
<i>Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	İbrahim, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Nazlı
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	...
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 4 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 6 aday ise eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yanlış açıklayanlar ve açıklama yapmayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İkili işlemle ilgili ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Nermin: Burada varsa bir tektir diyor... Şimdi ben iki tane ters eleman alırsam ve bunların eşitliğini gösterirsem bir tek olduğunu göstermiş olurum. Yani ben burada ters elemanı bildiğimden $a \in A$ için iki tane ters eleman alabilirim.

İkili işlemle ilgili ispata nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: *Nasıl ispatlayacağımızı... Ben bu ispatı biliyorum... Ters varsa tektir diyor o zaman mesela ben şöyle düşünebilirim ki... İki tane tersi olsun diye düşünebilirim. Olmayana ergi metodunu kullanabilirim burada... İşlemler yanlış olabilir ama ben düşüncemi söyleyeyim...*

Öğretmen adaylarından ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan 4 aday A kümesinden aldıkları herhangi bir a elemanı için birbirinden farklı iki ters eleman alarak ispata başlamışlardır. Bu kategoride yer alan öğretmen adayları hangi kümede çalıştıklarını belirterek kabul ettikleri 2 ters elemanı birbirinden farklı olarak seçmişlerdir. Bununla birlikte eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan 6 aday ise sadece iki ters eleman olduğunu kabul ederek ispata başlamışlardır. Bu kategorideki adaylar hangi küme üzerinde çalıştıklarına ve ters elemanların birbirinden farklı olması gerektiğine vurgu yapmamışlardır.

Tanımları ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.34 de verilmiştir.

Çizelge 4.34.

Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Tanımları İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kullandıkları tanımları belirtenler</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler</i>	...
<i>Kullandıkları tanımları belirtmeyenler</i>	Nazlı

Çizelgeye göre 9 aday kullandıkları tanımları belirtenler ve 1 aday ise kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte

kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Öğretmen adaylarının ikili işlem kavramı ile ilgili ispatı yapabilmeleri için ters eleman, birleşme özelliği, birim eleman tanımlarını kullanmaları gerekmektedir. Adayların tamamı bu tanımları kullanmışlardır. Nazlı dışındaki adaylar ispat içerisinde kullandıkları özellikleri ve tanımlarını ifade etmişlerdir. Fakat Nazlı, özellikleri doğru kullanmasına rağmen hangi tanımlardan yararlandığını belirtmemiştir.

İspatın sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.35 de verilmiştir.

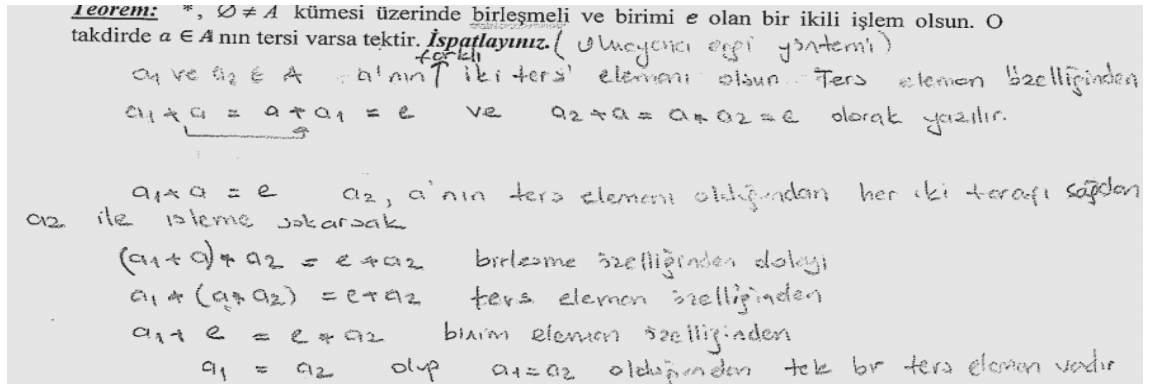
Çizelge 4.35.

Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Nermin, İbrahim, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	Nazlı
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	Hüseyin

Çizelgeye göre 8 aday tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar, 1 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 1 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İkili işlemle ilgili teoremi tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.56. Nermin'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Nermin: [Teoremin ifadesinde önemli yerlerin altını çizerek okuyor] Bunu geçen yıldan hatırlıyorum hocam... Burada varsa bir tektir diyor... Şimdi ben iki tane ters eleman alırsam ve bunların eşitliğini gösterirsem bir tek olduğunu göstermiş olurum. Yani ben burada ters elemanı bildiğimden $a \in A$ için iki tane ters eleman alabilirim. Bunları da a_1 ve a_2 olacak şekilde isimlendirebilirim. Şimdi tam edebiyat yapamayacağım ama iki ters eleman olarak alabilirim. [Yazdıklarını siliyor ve daha düzgün cümleler kurmaya çalışıyor]... a_1 ve a_2 eleman A , a 'nın farklı iki ters elemanı olsun. Bir de ben önceki bilgilerimden ters elemanla a 'nın işleme girmesi sonucu birim elemanı verir. Ters eleman özelliğinden $a_1 * a = a * a_1 = e$ ve a_2 de a 'nın tersi olduğu için $a_2 * a = a * a_2 = e$ olarak yazılır. Bunu biliyorum şimdi bu eşitliklerden bir tanesini ele alarak diğerini elde edebilirim. Yani eşitliği gösterebilirim. Şimdi ben burada $a_1 * a = e$ eşitliğini kullanabilirim çünkü bu eşitliğin sonucunu e olduğunu biliyorum. O halde $a_1 * a = e$ ise şimdi ben buradan derim ki; a_2 , a 'nın ters elemanı olduğundan her iki tarafı da soldan a_2 ile işleme sokarsak;

Mülakatçı: Ben burada bir soru sormak istiyorum. Şimdi burada neden soldan a_2 yi işleme katıyorsunuz?

Nermin: Eşitlikteki a_1 i yok etmek... Ama tabii ben burada yanlış yazdım çünkü a_1 ters elemandı... Benim burada sağdan yapmam gerekiyordu...

Mülakatçı: O halde sağdan yapma amacınız nedir?

Nermin: Sağdan yapıyoruz ki a ile a 'nın tersi işleme girebilsin. Çünkü a ile a 'nın tersi işleme girdiği zaman birim elemanı elde edeceğim. Aslında ben burada ters eleman ve birim eleman özelliğini kullanıyorum. Çünkü bir elemanla kendisinin tersi işleme

girdiğinde sonuç birim elemanı verir. Bunu yakalayabilmek için sağdan işleme dahil ediyorum.

Buradan; $(a_1 * a) * a_2 = e * a_2$ olur. Birleşme özelliğinden dolayı

$a_1 * (a * a_2) = e * a_2$ burada da ters eleman özelliğinden $a_1 * e = e * a_2$ elde edilir. Şimdi burada da birim eleman özelliğinden $a_1 = a_2$ olur. $a_1 = a_2$ olduğundan tek bir ters eleman vardır. Şimdi başlangıçta iki tane farklı ters eleman almıştım sonuçta da bunlar eşitlendi.

Mülakatçı: İspat tamamlandı mı? Neden?

Nermin: Aslında bitti ama aralarda sanki biraz eksikler kaldı... Ama sonuca ulaştım çünkü olmayana ergi yöntemi kullandığım için başta kabul ettiğim şeyin aksini gösterdiğim için ispat bitmiştir.

Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullandıkları bütün özelliklerin sebeplerini açıklamışlardır. Adaylar bu sayede geçerli bir ispat yapmışlardır. Ancak bu kategoride yer alan adaylardan Hatice dışında kalanlar ispatın yönteminin olmayana ergi olduğunu düşünmüşlerdir.

İkili işlemle ilgili teoremi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Nazlı: [Teoremin ifadesini okuyor]... A kümesi üzerinde iki ya da üç eleman seçsek... Ben şimdi burada tersi varsa tektir onu ispatlayacağım değil mi?

Mülakatçı: Evet... Nasıl yaparız bu ispatı? Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Nazlı: Önce iki tane eleman seçeceğim... Bu elemanları a_1 ve a_2 olarak seçsem... Bu seçtiğim elemanlar a nın ters elemanlarıdır. Bu seçtiğim elemanlarında ispatın sonucunda birbirine eşit olduğunu göstermeye çalışacağım.

$a_1, a_2 \in A$ ve A nın birbirinden farklı iki tane elemanı. Bu elemanları $*$ işlemine tabi tuttuğumuzda,

$$a_1 * a = e \Rightarrow (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$a_2 * a = e \Rightarrow (a_2 * a) * a_1 = e * a_1 \Rightarrow a_2 = a_1$$
 olmayana ergi yöntemi kullanıldı.

Şekil 4.57. Nazlı'nın İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Nazlı: [Çalışma kağıdındakileri yazıyor]... Burada a_1 ve a_2 , $a \in A$ nın farklı iki ters elemanıdır. Bu elemanları $*$ işlemine tabii tuttuğumuzda $a_1 * a = e$ ise sağdan a^{-1} ile işleme sokmalıyım. O halde eşitliğimiz $(a_1 * a) * a^{-1} = e * a^{-1}$ olur. Burada a^{-1} dediğimiz eleman a nın tersi ise bunun yerine a_2 kullanabilir miyim? [Düşünüyor]... Evet evet kullanabilirim. O zaman $a_1^{-1} * a = e$ desem... [Yazdığından emin olamıyor]... Yoksa böyle yazmasam mı? Şimdi başlangıçta $a \in A$ nın iki farklı tersi a_1 ve a_2 olsun dediğimize göre a nın tersleri olarak bu ikisinden herhangi birini kullanabiliriz. O halde burada a_2 elemanını kullansak daha anlamlı olabilir. Tamam... O zaman eşitliğimizin son hali $(a_1 * a) * a_2 = e * a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ şeklinde olur. $a_2 * a = e$ ise $(a_2 * a) * a_1 = e * a_1$ ise $a_2 = a_1$ benzer şekilde burada da $a_1 = a_2$ çıktı. Dolayısıyla ispatı tamamlamış olduk.

Mülakatçı: Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?

Nazlı: Kullandığım ispat yöntemi... Yani isim olarak mı söylemeliyim?

Mülakatçı: Evet.

Nazlı: Dağılma özelliğini kullandım... Sağdan dağılma... Onun dışında ispat... Olmayana ergi yöntemine göre yaptım.

İspatı yaparken belirsiz/yetersiz açıklamalar yapan Nazlı, ispat sürecinde güçlük yaşamış ve yazdıkları üzerinde düşünerek ispatı tamamlamayı başarmıştır. Aslında ikili işlemle ilgili özellikleri doğru kullanmış fakat sebeplerini net olarak açıklamamıştır.

İkili işlemle ilgili teoremi yanlış açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: [Teoremin ifadesinde önemli yerlerin altını çizerek okuyor]

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Hüseyin: Burada ters elemanın tek olduğunu göstermemiz isteniyor. Biz bu ispatı yaparken tek değil de çift olduğunu düşünürsek yani tersten gidersek bu şekilde ispatlamaya çalışabiliriz.

$$\begin{aligned}
 & a_1, a_2, a \text{ nin iki farklı tersi olsun.} \\
 & a * a_1 = a_1 * a = e \quad a * a_2 = a_2 * a = e \\
 & a * a_1 = e = a * a_2 \quad a_1 * a = e = a_2 * a \\
 & a * a_1 = a * a_2 \quad (a_1 * a) * a^{-1} = (a_2 * a) * a^{-1} \\
 & a^{-1} * (a * a_1) = a^{-1} * (a * a_2) \quad a_1 * (a * a^{-1}) = (a_2 * a) * a^{-1} \\
 & (a^{-1} * a) * a_1 = (a^{-1} * a) * a_2 \quad a_1 * e = a_2 * e \\
 & e * a_1 = e * a_2 \quad a_1 = a_2 \\
 & a_1 = a_2
 \end{aligned}$$

Şekil 4.58. Hüseyn'in İkili İşlem Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Hüseyn: Şimdi [Çalışma kağıdındaki gibi] a_1 ve a_2 , a nın iki farklı tersi olsun. Şimdi bunları işleme sokacağız. Yani, $a * a_1 = a_1 * a = e$ olmalıdır. a_2 de ters eleman olduğu için bir ikinci eşitlik yazabiliriz. Buna göre $a * a_2 = a_2 * a = e$ olur. Şimdi yazdığımız eşitliklerdeki birinci elemanları alırsak $a * a_1 = e = a * a_2$ eşitliğini yazabiliriz çünkü buradaki her iki eşitlikteki birim elemanlar aynıdır. Buradan $a * a_1 = a * a_2$ eşitliği elde edilir. Buradan ne yapabilirim... a ları ters işleme sokabilirim. Yani soldan a^{-1} i işleme sokabilirim. O halde $a^{-1} * (a * a_1) = a^{-1} * (a * a_2)$ elde edilir. Daha sonra birleşme özelliğini kullanırsak; $(a^{-1} * a) * a_1 = (a^{-1} * a) * a_2$ olur. Şimdi burada a ile a nın tersi bize birim elemanı veriyordu... O halde eşitliğimiz, $e * a_1 = e * a_2$ olur. Birim elemanla bir elemanı ikili işleme tabii tuttuğumuzda sonuç yine kendisiydi. Buradan da $a_1 = a_2$ olduğunu görürüz.

Mülakatçı: İspatı tamamladınız mı? Neden?

Hüseyn: Hayır... İspatın bir de ikinci yöntemi var... Diğer eşitlikleri de karşılaştırıp aynı olduğunu gösteriyoruz. [Kağıttakileri yazıyor...] Buna göre; $a_1 * a = e = a_2 * a$ eşitliğinde a nın tersini sağdan işleme aldığımızda; $(a_1 * a) * a^{-1} = (a_2 * a) * a^{-1}$ eşitliğini elde ederiz. Burada yine birleşme özelliğinden $a_1 * (a * a^{-1}) = a_2 * (a * a^{-1})$ elde edilir. Yine a ile a nın tersinin sonucu birim elemanı verir. O halde eşitliğimiz $a_1 * e = a_2 * e$ olur. Birim elemanla a_1 ve a_2 nin işleme girmesi sonucunda yine kendileri işlemin sonucu olacak. O halde $a_1 = a_2$ olduğu görülür. Bu haliyle ispat tamamlanmıştır.

Mülakatçı: Size göre bu ispatı yaparken neler kullandınız?

Hüseyn: Birisi birim eleman özelliğini kullandım. Teorem ifadesinde birleşmeli dediği için birleşme özelliğini kullandım burada...

Mülakatçı: Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?

Hüseyin: *Bu ispat... Olmayana ergi yöntemiyle yaptım...*

Yanlış açıklama yapanlar kategorisinde yer alan Hüseyin, farkında olmadan üç ters eleman kullanarak ispat yapmıştır. Bu aday ispata doğru başlamış ve doğru adımlar kullanmıştır. Fakat ispatın işlem basamağında sadeleştirme yapabilmek için başlangıçta tanımladığı ters elemanlar dışında farklı bir ters eleman kullanmıştır. Bu işlem ispatın yöntemi ve kabullerle uyuşmadığı için ispat geçersiz olmuştur.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.36'da verilmiştir.

Çizelge 4.36.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Nazlı
<i>Gereksiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Hüseyin

Çizelgeye göre 8 aday doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar, 1 aday yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar ve 1 aday da gereksiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer almaktadır. Öğretmen adaylarından doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar ikili işlem özelliklerini doğru notasyon ve ifadelerle göstermişlerdir. İspatı tamamlamak için ters eleman, birleşme özelliği ve birim eleman özelliklerini kullanan adaylar bu özellikler için gerekli olan notasyonları doğru belirlemiş ve ifade etmişlerdir. Nazlı ispat içerisinde yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanmıştır. İspatta kullandığı ters eleman ve birim eleman özelliklerini $a_1 * a = e = a * a_1$ yerine $a_1 * a = e$ şeklinde tek yönlü araştırmak istemiştir. Ayrıca kullandığı özelliklerin

sebeplerini açıklamamıştır. Bununla birlikte Hüseyin ise gereksiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanmıştır. Aslında Hüseyin ispata doğru bir şekilde başlamış fakat ispatın işlem basamaklarında gereksiz ifade ve notasyonlar kullanmıştır. Ters elemanların birbirine eşit olduğunu göstermek için üçüncü bir ters eleman kullanmış ve bu şekilde başlangıçtaki kabulünün ve yönteminin dışına çıkmıştır.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.37 de verilmiştir.

Çizelge 4.37.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	Hatice
<i>Yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler</i>	Nermin, Ayhan, Hüseyin, Nazlı, İbrahim, Büşra, Aykut, Ayfer, Aysel

Çizelgeye göre 1 aday yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar, 9 aday ise yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorilerinde hiçbir öğretmen adayı bulunmamaktadır.

İkili işlemle ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini açıklamayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hatice: *Hangisiydi... İki tane kabul ettim... Tam hatırlamıyorum ispat yöntemlerini de... Ama çelişki bulma olabilir...*

İkili işlemle ilgili ispatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen üç adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Nermin: *Biz bu ispatı olmayana ergi yöntemine göre çözmüştük... Çünkü burada varsa bir tektir diyor... Şimdi ben iki tane ters eleman alırsam ve bunların eşitliğini gösterirsem bir tek olduğunu göstermiş olurum. Yani ben burada ters elemanı bildiğimden $a \in A$ için iki tane ters eleman alabilirim.*

Aykut: *Bu ispatı olmayana ergi yöntemine göre yaptım... Çünkü olmayan bir şeyden doğru olan sonuca ulaştım.*

Ayhan: *Burada hocam olmayana ergi yöntemini kullandığımı düşünüyorum...*

Hatice dışındaki adaylar, ispatı olmayana ergi yöntemine göre yaptıklarını düşünmektedirler. Adaylardan sadece Hatice ispatta çelişki bulma yöntemini kullandığının farkındadır. Ancak Hatice de neden çelişki bulma yöntemini kullandığını açıklayamamıştır. Bununla birlikte Hatice dışındaki adayların çelişki bulma ile olmayana ergi yöntemi arasındaki farkı tam olarak anlamadıkları gözlenmiştir. Adaylar olmayana ergi yöntemini kullandıklarını ifade etmişler fakat buldukları sonucun bu yönteme uygun olmadığını anlamamışlardır.

4.4.2. Grup Kavramı

İspata nasıl başlayacağını ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.38 de verilmiştir.

Çizelge 4.38.

Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer, Aysel
<i>Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	Hatice, Nazlı
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	...
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 8 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 2 aday ise eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yanlış açıklayanlar ve açıklama yapmayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Aykut: *Ters elemanın tanımını zaten kullanacağız... Şimdi $a^{-1} \in G$ olsun. Burada G bir grup olduğundan her a elemanı için tersi de yine bu grubun elemanıdır. Bu elemanı eğer ben G grubundan alıyorsam bu elemanın tersi de yine grubun elemanı olmak zorundadır.*

İspata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispata G nin bir grup olmasından yararlanarak başlamışlardır. Adaylar G bir grup olduğundan bu gruptaki tüm elemanların tersinin olduğunu farkındadırlar. Bu yüzden G grubundan aldıkları her a elemanı için bir a^{-1} elemanının var olduğunu ifade etmişlerdir. Benzer şekilde a^{-1} eleman G ve G bir grup olduğu için a^{-1} elemanının tersi olan $(a^{-1})^{-1}$ elemanının da G nin elemanı olduğunu düşünmüşlerdir. Adaylar bu düşüncelerinden ve ters eleman tanımından yararlanarak ispata başlamışlardır.

Grup kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Nazlı: *Bütün grup şartlarını zaten sağlıyor. Burada a ile a nın tersini işleme soksak... Hiç hatırlayamıyorum...*

Mülakatçı: *Şöyle yapalım... Teorem ifadesini okuduğumuzda herhangi bir $a \in G$ için ifadesi mevcut, o halde bizim başlangıç noktamız da galiba bu gruptan bir eleman almak olmalı değil mi?*

Nazlı: *Evet... O halde G grubundan bir a elemanı alalım. Yani $a \in G$ olsun.*

Mülakatçı: *Şimdi G bir grup olduğuna göre a elemanının tersi mevcuttur öyle değil mi?*

Nazlı: *Evet mevcuttur. O halde G bir grup olduğuna göre $a^{-1} \in G$ vardır.*

Mülakatçı: Güzel... Şimdi bu yazdığınız cümleyi matematiksel olarak ifade edebilir miyiz?

Nazlı: Bu iki elemanın işleme girip e elemanına eşit olmasıdır. Yani $a * a^{-1} = e$ olur.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi biz a elemanının tersinin varlığını G bir grup olduğundan yazabiliriz. Peki a^{-1} elemanının da tersi var mıdır?

Nazlı: Vardır... O halde $(a^{-1})^{-1}$ vardır. Bu olduğuna göre $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$ eşitliği de sağlanır. Buna göre $a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$ eşitliğini elde ederim.

Eksik/yetersiz açıklayanlar kategorisindeki adaylar, teorem ifadesini okuduklarında ispata nasıl başlamaları gerektiğine karar verememişlerdir. Bu yüzden araştırmacı tarafından sonda sorular sorulmuş ve adaylar bu sorular sayesinde ispata doğru başlamışlardır. Adaylar ispatta G nin bir grup olmasından ve ters eleman tanımından yararlanacaklarının farkındadırlar ancak bilgilerini bir araya getirememişlerdir.

Tanımları ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.39 da verilmiştir.

Çizelge 4.39.

Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Tanımları İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kullandıkları tanımları belirtenler</i>	Ayhan, Nermin, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler</i>	Hüseyin, İbrahim, Nazlı
<i>Kullandıkları tanımları belirtmeyenler</i>	Büşra

Çizelgeye göre 6 aday kullandıkları tanımları belirtenler, 3 aday kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler ve 1 aday ise kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorilerinde yer almaktadır.

Öğretmen adaylarının grup kavramı ile ilgili ispatı yapabilmeleri için grubun tanımında bulunan bütün özellikleri kullanmaları gerekmektedir. Adaylardan kullanılan tanımları belirtenler kategorisinde yer alanlar, grup tanımındaki özellikleri kullanmışlar ve kullandıkları özelliklerin tanımlarını ifade etmişlerdir. Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler kategorisinde yer alan adaylar grup tanımındaki bütün özellikleri kullanmışlar fakat özellikle kullandıkları birleşme özelliği tanımı belirtmemişlerdir. Bununla birlikte kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorisinde yer alan Büşra ise ispatta grubun bütün özelliklerini kullanmasına rağmen özelliklerin tanımlarına vurgu yapmamıştır.

İspatın sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.40 da verilmiştir.

Çizelge 4.40.

Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

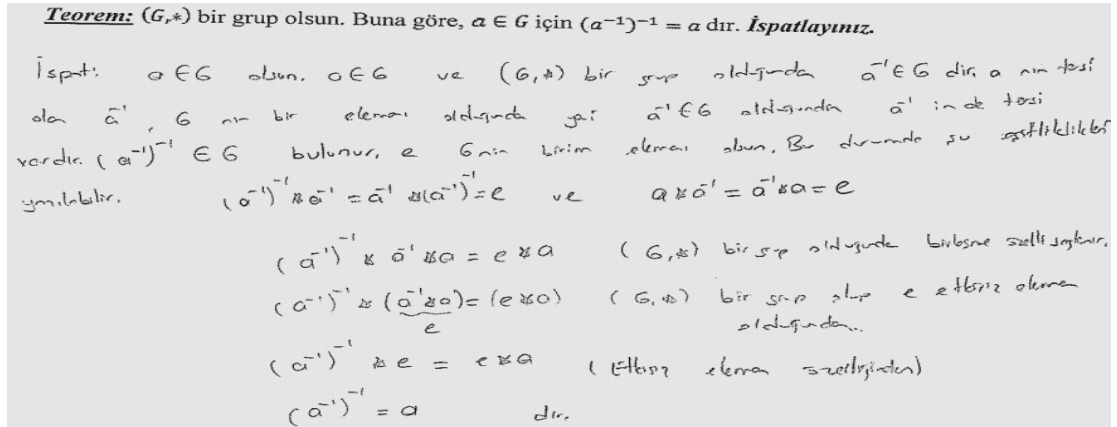
<i>İspatın Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Nermin, Aykut, Hüseyin, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	İbrahim, Büşra, Hatice, Ayfer, Nazlı
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	...

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar, 5 aday ise belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar ve yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup kavramı ile ilgili teoremi tam/ikna edici şekilde açıklama yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Ayhan: Şimdi hocam $(G,*)$ bir grup olduğundan her elemanın tersi vardır. Mesela G den alınan bir a elemanının tersi olan $a^{-1} \in G$ dir. Benzer olarak a^{-1} de bu kümenin bir elemanı olduğu için onunda tersi vardır.



Şekil 4.59. Ayhan'ın Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: Güzel... Şimdi bu söylediklerinizi yazabilir misiniz?

Ayhan: $a \in G$ olsun. $a \in G$ ve $(G,*)$ bir grup olduğundan $a^{-1} \in G$ dir. a nın tersi olan a^{-1} , G nin bir elemanı olduğundan yani $a^{-1} \in G$ olduğundan a^{-1} inde tersi vardır. Bu elemanı da $(a^{-1})^{-1}$ olarak gösterirsek $(a^{-1})^{-1} \in G$ bulunur. Yine G bir grup olduğundan birim elemanı vardır. e , G nin birim elemanı olsun. Bu durumda şu eşitlikleri yazabiliriz. $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e$ ve $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ eşitlikleri yazılabilir. Şimdi $*$ işlemine göre birinci eşitlikte sağdan her iki tarafa a elemanını sağdan uyguladığımızda eşitliğin doğru olduğunu ispatlayacağız. $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} * a = e * a$ olur. Şimdi, $(G,*)$ bir grup olduğundan birleşme özelliği sağlanır. $(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (e * a)$ olur. Şimdi burada a nın tersi a^{-1} olduğu için bu iki eleman işleme girdiğinde sonuç e olur. Çünkü $(G,*)$ bir grup olup e etkisiz eleman olduğundan... $(a^{-1})^{-1} * e = e * a$ olsun. Şimdi buradan etkisiz eleman özelliğinden dolayı da $(a^{-1})^{-1} = a$ olur.

Mülakatçı: İspatı tamamladık mı?

Ayhan: Evet ispatı tamamladık...

Mülakatçı: Burada bu ispatı yaparken neler kullandınız?

Ayhan: Bu ispatı yaparken grup şartlarından yararlandık. Yani etkisiz eleman özelliğinden, birleşme ve ters eleman özelliklerinden yararlandık. Yani bildiğimiz grup özelliklerini kullanarak ispatımızı bitirmiş olduk.

Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullandıkları grupla ilgili bütün özelliklerin sebeplerini açıklamışlardır. Bu kategorideki adaylar bu sayede geçerli bir ispat yapmışlardır. Adaylar ispata başlarken düşündüklerini matematiksel olarak doğru ifadelerle desteklemişler ve ispatı doğru ifadelerle tamamlamışlardır.

Grup kavramı ile ilgili teoremi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$a \in G$ olsun. Bu bir grup olduğuna göre $a^{-1} \in G$ vardır. Bu durumda
 $a * a^{-1} = e$ olur. O halde $(a^{-1})^{-1} \in G$ vardır.
 $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$ de sağlanır. Buna göre
 $a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$
 Bu eşitliği sağdan a ile $*$ işlemine tabi tuttuğumuzda
 $(a * a^{-1}) * a = ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a$
 $a * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a)$
 $a * e = (a^{-1})^{-1} * e$
 $a = (a^{-1})^{-1}$
 olduğundan.

Şekil 4.60. Nazlı'nın Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Nazlı: Bütün grup şartlarını zaten sağlıyor. Burada a ile a nın tersini işleme soksak...
Hiç hatırlayamıyorum...

Mülakatçı: Şimdi G bir grup olduğuna göre a elemanının tersi mevcuttur değil mi?

Nazlı: Evet mevcuttur. O halde G bir grup olduğuna göre $a^{-1} \in G$ vardır.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi biz a elemanının tersinin varlığını G bir grup olduğundan yazabiliriz. Peki a^{-1} elemanının da tersi var mıdır?

Nazlı: Vardır... O halde $(a^{-1})^{-1}$ vardır. Bu olduğuna göre $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$ eşitliği de sağlanır. Buna göre $a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$ eşitliğini elde ederim.

Mülakatçı: Güzel... Şimdi burada ne yapmamız lazım?

Nazlı: a ile işleme koymamız lazım... Şimdi bu eşitlikte sağdan a ile $*$ işlemine tabi tuttuğumuzda...

Mülakatçı: Peki neden sağdan işlem yapıyorsunuz?

Nazlı: a^{-1} leri yok etmem lazım ki... Bir de $a^{-1} * a = e$ olduğunu bildiğimiz için sağdan işlem yapıyoruz. $(a * a^{-1}) * a = ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a$ elde ederiz. Grupta birleşme özelliğinden parantezler yer değiştirebilir. O halde $a * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a)$ eşitliğini elde ederiz. Buradan $a * e = (a^{-1})^{-1} * e$ olur ve buradan da $a = (a^{-1})^{-1}$ olduğu görülür.

Belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatı yapan adaylar ise aslında ispatı doğru yapmışlardır. Fakat kullandıkları özelliklerin sebeplerini tam olarak açıklamamışlardır. Adaylar kullanmaları gereken özellikleri doğru kullanmışlar fakat bu özellikleri neden kullandıkları ile ilgili açıklamaları tam yapamamışlardır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.41’de verilmiştir.

Çizelge 4.41.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	Ayhan, Aykut, Ayfer, Nazlı
Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	Nermin, Hüseyin, İbrahim, Büşra, Hatice, Aysel
Gereksiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	...

Çizelgeye göre 4 aday doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar, 6 aday ise yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer almaktadır. Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar grup özelliklerini açıklayabilmek için, ikili işlem özelliklerini doğru notasyon ve ifadelerle göstermişlerdir. İspatı tamamlamak için ters eleman, birleşme özelliği ve

birim eleman özelliklerini kullanan adaylar bu özellikler için gerekli olan notasyonları doğru belirlemiş ve ifade etmişlerdir.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylar ise grup özelliklerini doğru kullanmış fakat özellikler üzerinde kısaltmalar yapmışlardır. Özellikle ters eleman özelliği için $a * a^{-1} = e$ ifadelerini kullanmışlardır. Aslında adayların bu şekilde ters eleman kullanımları yanlış değildir ama ters eleman tanımı gereğince bu özelliğin $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ şeklinde kullanımı daha uygundur.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.42 de verilmiştir.

Çizelge 4.42.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Aykut, Aysel
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Hatice, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 8 aday ise yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Aysel: Burada hangi ispat yöntemini kullandık... Ya aslında burada doğrudan ispat yaptık evet evet doğrudan ispat... Aslında ispatları yaparken çokta yöntemlerle ilgilenmiyorum sadece elimizdeki verilerden sonuca ulaşmaya çalışıyorum. Açıkçası aslında şu sınavlarda hocalarımız hangi yöntemi kullanıyorsunuz diye sorsalar emin olun ispat yöntemleri hakkında daha fazla bilgi sahibi olurduk ve bu soruları çok iyi bilirdik. Biz sadece sınavlarda geçer notu alma kaygısı taşıdığımız ve ezber yaptığımız için maalesef ve bunlar bizlere sorulmadığı için çok iyi bilemiyoruz.

Grup kavramı ile ilgili ispatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: [Düşünüyor]... Tümevarım değil... Doğrudan veya dolaylı ispat oluyor... Çok emin olmamakla birlikte dolaylı ispat olduğunu düşünüyorum.

Mülakatçı: Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?

İbrahim: [Düşünüyor]... Olmayana ergi değil ☺...

Mülakatçı: İlk aklınıza gelen olmayana ergi oluyor nedense...

İbrahim: Ters şeyleri düşündüğümüz içindir belki ☺... Aslında hangi ispat yöntemine girdiğini bilmiyorum. Bu hipotezlerden, bize verilenlerden faydalanarak ispatladık ama... Tümevarım da değil... Nasıl adlandırılıyor, tam isim olarak bilmiyorum.

Adaylardan sadece Aysel ve Aykut ispatın yöntemini doğru belirlemişlerdir. Bu adaylar ispatı doğrudan ispat yöntemine göre yaptıklarının farkındadır ancak doğrudan ispatın mantığı hakkında yeterli açıklama yapmamışlardır. Bununla birlikte adaylardan Büşra ve Ayfer ispatın yöntemini yanlış belirlemişlerdir. Büşra, ispatta parça bütün ilişkisi kurduğunu düşündüğü için ispatı tümevarım, Ayfer ise çok emin olmamakla birlikte dolaylı ispat yöntemlerini kullandığını ifade etmiştir. Diğer adaylar ise ispatta kullanılan yöntemi belirleyememişlerdir.

4.4.3. Alt Grup Kavramı

İspata nasıl başlayacağını ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.43 de verilmiştir.

Çizelge 4.43.

Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Aykut, Aysel, Hatice, Nermin
<i>Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	Nazlı
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	Hüseyin, İbrahim, Büşra, Ayfer
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 1 aday eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar ve 4 aday da yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Alt grup kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Aysel: *Şimdi burada alt grup olduğunu göstermem gereken kümeden iki eleman almalıyım. Yani $a, b \in H \cap K$ olsun. Alt grup olması için $a * b^{-1} \in H \cap K$ göstermeliyim.*

Bu kategoride yer alan adaylar ispata kesişim kümesinden eleman alarak başlamışlardır. Adaylardan Ayhan, Aykut ve Aysel ispata kesişim kümesinden iki eleman alıp bu elemanlardan birincisi ile ikincisinin tersinin yine kesişim kümesinde olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Hatice ve Nermin ise kesişim kümesinden aldıkları elemanlarla grup olma şartlarını incelemişler ve tanımdan hareketle ispatı yapmak istemişlerdir.

Alt grup kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Nazlı: *Şimdi H kümesinden bir x elemanı alsak bu aynı zamanda G ninde elemanı olacak... Aldığım aynı x elemanını K içinde alsak... Ya da farklı bir y elemanı alsak*

K dan bu da yine *G* nin elemanı olur. Ama bunların kesişimlerini *G* nin alt kümesi olarak nasıl ifade edebilirim... [Düşünüyor]... Şu an hiçbir şey aklıma gelmiyor hocam... Yani hocam burada bir eleman *H* kümesinden bir eleman da *K* kümesinden alsak kesişimlerinin olacağını garanti etmez. Burada aynı elemanları *H* ve *K* için alsak acaba...

Mülakatçı: Bu son söyledikleriniz hangi kümenin elemanlarıdır?

Nazlı: *G* nin elemanlarıdır...

Mülakatçı: Şimdi şöyle düşünelim... Aynı eleman hem *H* kümesinde hem de *K* kümesinde ise bu kümeyi nasıl ifade edebiliriz?

Nazlı: Bu söylediğimiz eleman *G* içerisinde. Dolayısıyla *G* olarak ifade edebiliriz...

Mülakatçı: Aynı zamanda başka hangi kümededir...

Nazlı: *H* ve *K* nin kesişimindedir.

Mülakatçı: O zaman elemanları hangi kümeden seçmeliyiz?

Nazlı: $H \cap K$ kümesinden almalıyız...

Mülakatçı: Güzel... Bu şekilde devam edebiliriz...

Nazlı: O halde şimdi $H \cap K$ nin bir grup olduğunu göstermeliyim. Bunun için ilk olarak kapalılık özelliğine bakalım...

Nazlı, ispata nasıl başlaması gerektiğine karar verememiştir. İlk olarak elemanları *G* kümesinden alıp bütünden parçaya doğru hareket etmek istemiştir. Fakat *G* kümesinden alacağı herhangi bir x elemanının hem *H* hem de *K* kümesinde olmayabileceğinin farkındadır. Bu yüzden *H* ve *K* kümelerinden eleman almak istemiş ama yine aldığı elemanın kesişim kümesinde olmasının garanti olmadığını belirtmiştir. Bu yüzden araştırmacı aslında Nazlı'nın söylemeye çalıştığını ortaya çıkarmak için sonda sorular yöneltmiştir. Hem *H* hem de *K* kümesinde olan elemanlarla çalışmak isteyen Nazlı, nihayet elemanları kesişim kümesinden almaya karar vermiştir. İspatı yapmak için kesişim kümesinden aldığı elemanlar ile grup olma şartlarını incelemiştir.

Alt grup kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını yanlış açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Ayfer: İspatta ilk olarak teorem ifadesinde verilenleri kabul ederek başlamalıyız. Yani *H* alt grup *G* ve *K* alt grup *G* olduğunu kabul edelim. Şimdi hem *H* dan hem de *K* dan

ikişer eleman alacağım. $h_1, h_2 \in H$ olsun. O halde H alt grup G olduğundan $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ olacaktır. Aynı şeyi K içinde yazabiliriz. Yani $k_1, k_2 \in K$ olsun. Yine K alt grup G olduğundan $k_1 \cdot k_2^{-1} \in K$ dır. Şimdi kesişimlerini göstermem gerekecek. Tabi teorem ifadesinde $*$ işlemi verilmiş ama ben işlemi çarpı olarak aldım. Şimdi H ve K kümelerinden aldığım elemanları kesişimden alarak $H \cap K$ nın alt grup olduğunu göstereceğim.

İspata nasıl başlayacağını yanlış açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar kesişim tanımını kullanamamışlardır. Adaylardan Ayfer, verilen alt gruplardan farklı ikişer eleman seçmiştir. Seçtiği elemanlar farklı kümelere ait olduğu için bu elemanları kullanamamıştır. Ayfer, ispata doğru bir şekilde başlayamadığı için işlem basamaklarını da oluşturamamıştır. Hüseyin, ispata Ayfer'in söylediklerine benzer şekilde başlamak istemiştir. Hüseyin, hem H hem de K kümelerinden elemanlar almış ve bu elemanların kesişimlerinin boş küme veya boştan farklı olduğu durumları incelemek istemiştir. Hüseyin, bu düşüncesinden hareketle grup şartlarını incelemiş fakat grup olma özelliklerini kesişim işlemine göre yapmak istemiştir. Hüseyin, ispatın başlangıcında ve işlem basamaklarında oldukça garip matematiksel ifadeler kullanmıştır. İbrahim, ilk olarak $H \cap K \neq \emptyset$ olması gerektiğini ifade etmiştir. Sonrasında H ve K nın birer alt grup olmalarından dolayı sağlamaları gereken özellikleri belirtmiş ve kesişim kümesinin de bu şartları sağlaması gerektiğine karar vermiştir. Kesişim kümesine nasıl geçmesi gerektiği hakkında bir açıklama yapmamıştır. Büşra ise hem H hem de K alt gruplarından aldığı ortak elemanlar yardımıyla H ve K nın alt grup olmalarından yararlanarak aynı özelliğin $H \cap K$ tarafından da sağlanması gerektiğini direk ifade etmiştir.

Tanımları ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.44 de verilmiştir.

Çizelge 4.44.

Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Tanımları İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kullandıkları tanımları belirtenler</i>	Ayhan, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Aysel, Nazlı
<i>Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler</i>	Hüseyin, İbrahim
<i>Kullandıkları tanımları belirtmeyenler</i>	Ayfer

Çizelgeye göre 7 aday kullandıkları tanımları belirtenler, 2 aday kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler ve 1 aday ise kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorilerinde yer almaktadır.

Alt grup kavramı ile ilgili ispatı yapmak için kesişim kümesi ve alt grup tanımlarının bilinmesi ve ifade edilmesi yeterlidir. Adaylardan Hüseyin, İbrahim ve Ayfer ispata yanlış başladıkları için ispat içerisinde kullandıkları tanımları tam olarak açıklamamışlardır. Özellikle Ayfer, ispatta kullandığı tanımların hiç birini ifade etmemiştir. Bu üç aday dışında kalanlar ise kullandıkları tanımları ifade etmişlerdir.

İspatın sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.45 de verilmiştir.

Çizelge 4.45.

Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

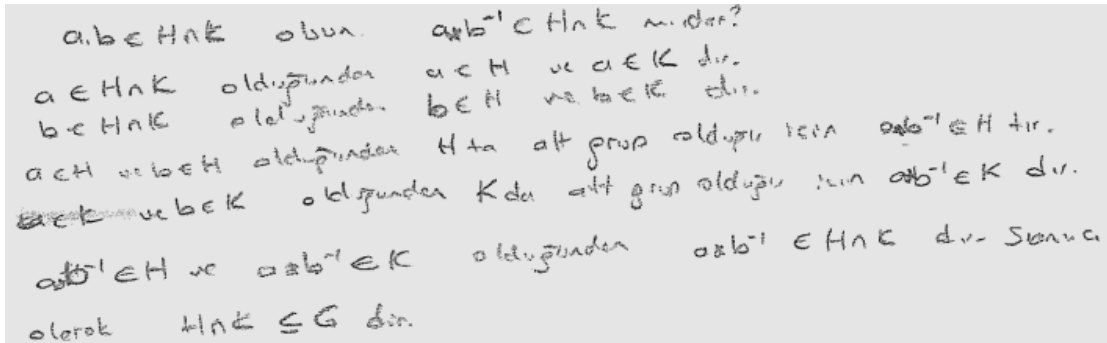
<i>İspatın Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Aykut, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	Nermin, Hatice, Nazlı
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	Hüseyin, İbrahim, Büşra, Ayfer

Çizelgeye göre 3 aday tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar, 3 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar ve 4 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Alt grup kavramı ile ilgili teoremi tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Aykut: Öncelikle H ve K alt gruplarından birer eleman alınmalıdır. Daha doğrusu bu iki alt grubun kesişiminden bir eleman alınmalı ve sonra bu kesişim üzerinde $*$ işlemi yapılır. Devamında da H ve K nin birer alt grup oldukları kullanılarak aldığımız elemanın da $H \cap K$ ya göre bu özelliği sağladığı gösterildiğinde $H \cap K$ nin de bir alt grup olduğu gösterilmiş olur.



Şekil 4.61. Aykut'un Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: Güzel... Şimdi bu söylediklerinizi yazabilir misiniz?

Aykut: $a, b \in H \cap K$ olsun. İncelemek istediğimiz şey $a * b^{-1} \in H \cap K$ nin elemanı mıdır? Şimdi $a \in H \cap K$ olduğundan $a \in H$ ve $a \in K$ dir. Benzer şekilde $b \in H \cap K$ olduğundan $b \in H$ ve $b \in K$ dir. $a \in H$ ve $b \in H$ olduğundan, H da alt grup olduğu için $a * b^{-1} \in H$ dir. Benzer şekilde $a \in K$ ve $b \in K$ olduğundan, K da alt grup olduğu için $a * b^{-1} \in K$ dir. Bu ikisinden $a * b^{-1} \in H$ ve $a * b^{-1} \in K$ olduğundan $a * b^{-1} \in H \cap K$ dir. Sonuç olarak $H \cap K$ alt grup G dir.

Mülakatçı: İspatı tamamladık mı?

Aykut: İspatı tamamladık...

İspatın sunumunu tam/ikna edici şekilde açıklayan adaylar ispatta kullanmaları gereken özellikleri ve tanımları doğru ve eksiksiz olarak ifade etmişlerdir. Özellikle ispatta iki alt grubun kesişim kümesinin neden alt grup olduğu noktasında kesişim tanımını ve alt grup olma özelliklerini doğru kullanmışlardır.

Alt grup kavramı ile ilgili teoremi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Hatice: *$H \cap K$ nın grup şartlarını sağlayıp sağlamadığını incelemeliyim. Bunu yaparken de H ve K nın alt grup olduğundan yararlanacağız.*

$H \cap K$ dan iki tane eleman almalıyız. Yani $x_1, x_2 \in H \cap K$ için $x_1, x_2 \in H$ ve $x_1, x_2 \in K$ dir. O halde $H \leq G$ ve $K \leq G$ olduğundan, $x_1 * x_2 \in H$ ve $x_1 * x_2 \in K$ dir. Bu durumda $x_1 * x_2 \in H \cap K$ olup kapalıdır. Benzer düşünce ile;

Her $x_1, x_2, x_3 \in H \cap K$ ise $x_1, x_2, x_3 \in H$ ve $x_1, x_2, x_3 \in K$ dir. Yine $H \leq G$ ve $K \leq G$ olduğundan H ve K birleşmelidir. O halde $H \cap K$ da $*$ işlemine göre birleşmelidir. Şimdi birim elemanı inceleyelim;

Her $x_1 \in H \cap K$ için $H \leq G$ ve $K \leq G$ olup hem H hem de K birim elemana sahiptir. Dolayısıyla $H \cap K$ da birim elemana sahiptir ama bunu nasıl ifade edebilirim...[Düşünüyor]... Şu şekilde söyleyebilirim: $H \leq G$ ve $K \leq G$ olup hem H hem de K birim elemana sahiptir. Ve bu birim eleman G nin birim elemanıdır. Dolayısıyla $H \cap K$ nın birimi de aynıdır. Yani $H \cap K$ nın da birim elemanı vardır. Benzer düşünce ile ters elemanı da inceleyebiliriz.

Her $x_1 \in H \cap K$ için $x_1 \in H$ ve $x_1 \in K$ dir. Bu H ve K birer alt grup olduğundan her elemanın tersi vardır. O halde $x_1^{-1} \in H$ ve $x_1^{-1} \in K$ vardır. Bu durumda $x_1^{-1} \in H \cap K$ dir. O halde $H \cap K \leq G$ dir.

$\forall x_1, x_2 \in H \cap K \Rightarrow x_1, x_2 \in H \wedge x_1, x_2 \in K$ dir.
 $H \leq G \wedge K \leq G$ olduğundan, $x_1, x_2 \in H \wedge x_1, x_2 \in K$ dir.
 Bu durumda $x_1, x_2 \in H \cap K$ olup kapalıdır.
 $\forall x_1, x_2, x_3 \in H \cap K \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in H \wedge x_1, x_2, x_3 \in K$ dir.
 $H \leq G$ ve $K \leq G$ old. H ve K birleşmelidir. O halde $H \cap K$
 da $*$ işlemine göre birleşmelidir.
 $\forall x_1 \in H \cap K$ için $(H \leq G \wedge K \leq G)$ olup H ve K nin birim
 elemanı vardır. Ve bu birim elemanı G nin birim elemanıdır. Doğruysa,
 $H \cap K$ nin birimi de aynıdır.
 $\forall x_1 \in H \cap K$ için $x_1 \in H \wedge x_1 \in K$ dir. O halde $x_1^{-1} \in H$ ve
 $x_1^{-1} \in K$ vardır. Bu durumda $x_1^{-1} \in H \cap K$ dir.
 O halde $H \cap K \leq G$ dir.

Şekil 4.62. Hatice'nin Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: İspatı tamamladık mı?

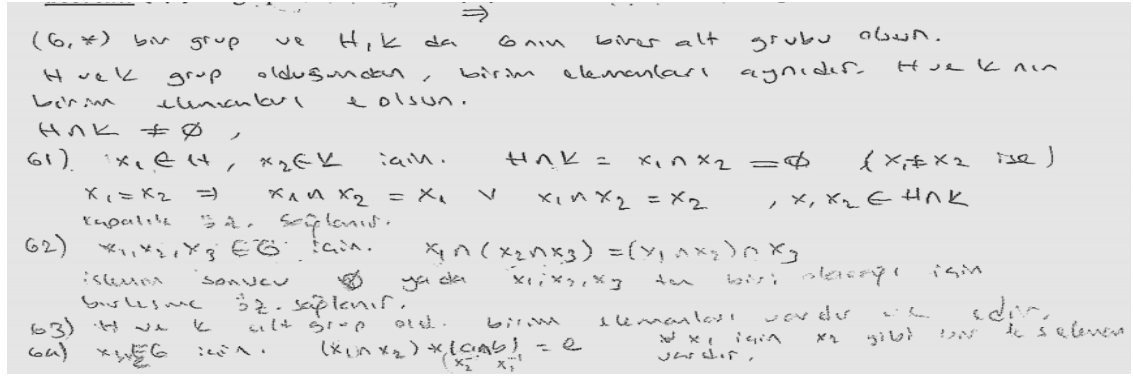
Hatice: Evet...

Bu kategoride yer alan adaylar ispatı grup şartlarından yararlanarak yapmak istemişlerdir. Adaylar kesişim kümesinden aldıkları elemanların grup şartlarını sağladığını göstermişlerdir. Bu yüzden kapalılık, birleşme, birim ve ters eleman özelliklerini incelemişlerdir. Bu özellikleri doğru bir şekilde göstermişler fakat tam olarak açıklamamışlardır.

Alt grup kavramı ile ilgili teoremi yanlış açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Hüseyin: Öncelikle teorem ifadesinde ise kullanıldığı için tek taraflı bir ispat yapmamız gerekiyor. İspatı yaparken de $(G, *)$ bir grup olarak alıp, H ve K yı da iki tane alt grup olarak seçmemiz gerekiyor. Bu ifadelerden faydalanarak da $H \cap K$ nında bir alt grup olduğu sonucuna ulaşmamız gerekiyor.



Şekil 4.63. Hüseyn'in Alt Grup Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Hüseyn: $(G, *)$ bir grup ve H, K da G nin birer alt grubu olsun. Şimdi H ve K grup özelliklerini taşıyacağı için buradaki H ve K nin birim elemanı da aynı olur. Yani H ve K grup olduğundan birim elemanları aynıdır. H ve K nin birim elemanları e olsun. Dolayısıyla bu iki grubun birim elemanları aynı olduğundan $H \cap K \neq \emptyset$ dir. Şimdi $H \cap K$ nin grup olma şartlarını sağladığını gösterebiliriz: Birinci olarak $H \cap K$ nin kapalılık özelliğini sağladığını göstermeliyiz.

G1) Şimdi H kümesinden bir eleman ve K kümesinde de başka bir eleman aldığımızda bu elemanları farklı aldığımızda kesişim boş küme olur. Yani $x_1 \in H, x_2 \in K$ için, $H \cap K = x_1 \cap x_2 = \emptyset$ ($x_1 \neq x_2$ ise) olur. Boş küme de $H \cap K$ nin bir elemanıdır. Eğer $x_1 = x_2$ ise $x_1 \cap x_2 = x_1$ ve ya $x_1 \cap x_2 = x_2$ olur. Burada $x_1, x_2 \in H \cap K$ dir. Çünkü x_1 veya x_2 sonuçlarından herhangi biri işlemin sonucu olur ve bu elemanlar H ve K nin elemanları olduğu için kesişimlerinde de yer alırlar. Bu yüzden kapalılık özelliği sağlanır. İkinci olarak birleşme özelliğini inceleyelim;

G2) [Düşünüyör] ... Burada üç tane eleman almalıyım ve bunları H ve K kümelerinden değil de direk olarak G den aldığımızda işimiz biraz kolaylaşabilir. $x_1, x_2, x_3 \in G$ için $x_1 \cap (x_2 \cap x_3) = (x_1 \cap x_2) \cap x_3$ işleminin sonucu ya boş kümedir ya da x_1, x_2, x_3 elemanlarından biri olur. Burada G bir grup olduğundan zaten birleşme özelliğini sağlar. Dolayısıyla $H \cap K$ kümesi de birleşme özelliğini sağlar. Üçüncü olarak birim elemanı incelemeliyiz.

G3) H ve K alt grup olduklarından birim elemanları vardır ve e dir. Daha önce de söylediğim gibi alt grupların birim elemanı ile grubun birim elemanı aynıdır. Kesişim

içinde H ve K için kesişimlerine uygularsak $H \cap K$ nın birim elemanı da yine e olur. Son olarak ters elemanı incelemeliyim.

G4) Birim elemanları var ve aynı ise; $x_1, x_2 \in G$ için $(x_1 \cap x_2) * (a \cap b) = e$ şartının sağlanması gerekir. Burada aldığımız a elemanı $(x_2)^{-1}$ ve b de $(x_1)^{-1}$ şeklindedir. Elemanları bu şekilde seçtiğimde G bir grup olduğundan birleşme özelliğini de sağlar ve elemanlar gruplandırılabilir. Kesişim işlemine göre burada işlem yapıldığında x_1 elemanının tersi x_2 şeklinde bulunur. Yani her x_1 için x_2 gibi bir ters eleman vardır.

Dört özelliği de sağladığına göre $H \cap K$ alt grup G olur.

Mülakatçı: İspatı tamamladık mı?

Hüseyin: Herhalde tamamladık...

Hüseyin, kesişim kümesinin boş küme ve boştan farklı olmasına göre ispatı oluşturmuştur. H ve K kümesinden aldığı elemanların kesişimlerinin boş olduğu durumlar için ispatın açık olduğunu ifade etmiştir. Kesişim kümesinin boştan farklı olduğu durumlar için ise kapalılık, birleşme, birim ve ters eleman özelliklerini kesişim işlemine göre incelemiştir. Hüseyin, ispatta garip işlemler ve çıkarımlar yaparak sonuca ulaşmıştır. İbrahim ise $H \cap K \neq \emptyset$ olması durumuna göre ispatı yapmıştır. İbrahim, teorem ifadesinde verilen H ve K alt gruplarından yararlanarak bu kümelerin kesişimlerinde bulunan elemanların da alt grup özelliklerini sağlayacağını belirtmiştir. Büşra, hem H hem de K kümesinden x, y elemanlarını almış ve bu kümelerin alt grup olmalarından dolayı $x * y^{-1} \in H$ ve $x * y^{-1} \in K$ olduğunu ifade etmiştir. Yine H ve K alt grup olduğundan $x * y^{-1} \in H \cap K$ olduğunu belirtmiştir. Büşra, bu şekilde ispatı tamamlamıştır ancak ispatı sadece x, y elemanları için geçerli olmuştur. Ayfer ise ispata nasıl başlaması gerektiğine karar verememiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalar sonunda elemanları $H \cap K$ kümesinden hk şeklinde almaya karar vermiştir. Fakat bu kullanımı ile bir sonuca ulaşamamış ve elemanları x, y şeklinde almıştır. Sonuçta da $x, y \in H \cap K$ için $H \cap K \leq G$ olduğundan $x * y^{-1} \in H \cap K$ olduğunu ifade etmiştir. Ayfer, ispatın içinden çıkamamış ve sonuca ulaşmak için sağlanması gereken özellikleri yazmıştır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.46'da verilmiştir.

Çizelge 4.46.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, Nermin, Aykut, Hatice, Aysel
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Büşra, Nazlı
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Hüseyin, İbrahim, Ayfer

Çizelgeye göre 5 aday doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar, 2 aday yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar ve 3 aday ise gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer almaktadır.

Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylardan Ayhan, Aykut ve Aysel ispatta alt grup gösterimi için $a, b \in H \cap K$ için $a * b^{-1} \in H \cap K$ notasyonunu kullanmışlardır. Nermin ve Hatice ise $H \cap K$ kümesinden aldıkları elemanlara grup şartlarını uygulamışlardır. Adaylar, ispatta kullandıkları matematiksel dil ve notasyonları ispatın yapısına uygun olarak seçmişlerdir.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullanan adaylardan Büşra, ispatta aslında özel bir çözüm yapmıştır. Öyle ki G kümesinden x, y gibi iki eleman alarak ispata başlamış ve aynı elemanları kullanarak $x * y^{-1} \in H$ ve $x * y^{-1} \in K$ olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla aynı elemanları kullanarak $x * y^{-1} \in H \cap K$ olduğu sonucuna ulaşmış ve matematiksel olarak yetersiz bir açıklama yapmıştır. Nazlı ise ispata nasıl başlaması gerektiği ile ilgili sorunlar yaşamıştır. Sonrasında ispata doğru şekilde başlamış fakat grup şartlarının sağlandığını gösterirken yetersiz ifadeler kullanmıştır.

Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylardan Hüseyin ve Ayfer, yanlış notasyonlar kullanmışlardır. Hüseyin, ispatta kullanması gereken işlemi $*$ yerine " $\cap$ " kesişim olarak almış ve buna göre işlem yapmıştır. Ayrıca Hüseyin, konu ile ilgisi olmayan yanlış matematiksel ifadeler kullanmıştır. Ayfer ise kesişim kümesinin elemanlarını hk şeklinde seçmiş ve ispatın içinden çıkamayınca kesişim kümesinin alt grup olması için sağlaması gereken özellikleri yazarak ispatı tamamlamak istemiştir. İbrahim ise sadece alt grup olma şartlarını yazarak ispatı tamamladığını düşünmüştür. İbrahim, $H \leq G$ ve $K \leq G$ olduğundan kesişim kümesinde yer alan elemanların da $H \cap K \leq G$ özelliklerini sağlayacağını belirtmiştir.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.47 de verilmiştir.

Çizelge 4.47.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Ayhan, İbrahim, Aykut, Hatice, Aysel
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler</i>	Hüseyin, Nermin, Büşra, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 5 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 5 aday ise yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Alt grup kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

İbrahim: *[Düşünüyor]... Doğrudan ispat... Yani eldeki bilgileri kullanarak direk sonuca ulaşma yoluna gittik.*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatı doğrudan ispat yöntemine göre yaptıklarının farkındadırlar. Ancak adaylar doğrudan ispat yöntemini neden ve nasıl uyguladıklarını tam olarak açıklamamışlardır.

Alt grup kavramı ile ilgili ispatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Büşra: *[Düşünüyor]... Bu ispatı yaparken hatırladığım kadarıyla tanımları kullanmaya çalıştım. [Eee]... Tümevarım kullandım hocam... Parçaları kullandım ve bütüne gitmeye çalıştım.*

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Ayfer: *[Düşünüyor]... İspat yöntemlerinden hangisini kullandım... Bilmiyorum.*

Büşra dışındaki adaylar, ispatın yöntemini bilmediklerini ifade etmişlerdir. Büşra ise parçadan bütüne ulaştığını düşündüğü için ispatı tümevarım yöntemine göre yaptığına karar vermiştir.

4.4.4. Grup Homomorfizmi Kavramı

İspata nasıl başlayacağını ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.48 de verilmiştir.

Çizelge 4.48.

Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	İbrahim, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Nazlı
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	...
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar ve 5 aday da eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yanlış açıklayanlar ve açıklama yapmayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

İbrahim: *Homomorfizm var. Yani ilk başta verilen tanımdan faydalanabiliriz. [Düşünüyör]... Burada dönüşüm tanımlanmamış ama... Burada kuvvet alındığına göre işlemi çarpma olarak alabilirim. O zaman şöyle diyelim... $(G, \cdot)$ ve $(H, \cdot)$ birer gruptur. Çünkü grup homomorfizmi tanımlayabilmek için bu ikisinin grup olması şarttır. φ dönüşümünü de şu şekilde yazabiliriz; $\varphi: G \rightarrow H$ bir dönüşüm olmak üzere G den iki eleman alalım...*

Bu kategoride yer alan adaylar ispata G kümesinden elemanlar alarak başlamışlardır. Adaylar homomorfizm tanımını teoreme göre kullanmak için g^n ifadesini φ dönüşümünde kullanmışlardır. Ayrıca Hatice dışındaki adaylar, ispatta kullanmaları gereken işlemin çarpma işlemi olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla dönüşümü $\varphi: G \rightarrow H$ şeklinde çarpma işlemine göre tanımlamışlardır. Hatice ise kullandığı işlemi herhangi bir notasyon kullanmadan belirtmiştir.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Ayhan: *[Teoremin ifadesini okuyor]... [Düşünüyor]... Acaba burada hangi işlem tanımlanmış olabilir ki...*

Mülakatçı: *Burada kuvvet alındığına dikkat edelim...*

Ayhan: *Burada n ifadesini nasıl dışarı atabiliriz ki... Açarsak... Tamam anladım bu bir grup homomorfizmi ise açtığımızda görebiliriz ama buradaki ikinci işlemimiz ne olabilir. İlk kümenin işlemini tahmin edebiliyorum ama ikinci kümede acaba hangi işleme göre açmamız lazım... Her ikisinde de kuvvet alıyoruz o zaman tamam her iki işlemde çarpma olabilir. Tamam şimdi anladım.*

Bu kategorideki adaylar ispata başlamak için hangi işlemi kullanacaklarına karar verememişlerdir. Araştırmacı ile aralarında geçen konuşmalardan sonra çarpma işlemi kullanmaları gerektiğine karar vermişler ve dönüşümü $(G, .)$ grubundan $(H, .)$ grubuna tanımlamışlardır.

Tanımları ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.49 da verilmiştir.

Çizelge 4.49.

Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Tanımları İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Kullandıkları tanımları</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel,
<i>belirtenler</i>	Nazlı
<i>Kullandıkları tanımları</i>	İbrahim
<i>eksik/yetersiz belirtenler</i>	
<i>Kullandıkları tanımları</i>	...
<i>belirtmeyenler</i>	

Çizelgeye göre 9 aday kullandıkları tanımları belirtenler ve 1 aday da kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla

birlikte kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispatı yapmak için grup homomorfizmi tanımının bilinmesi ve ifade edilmesi yeterlidir. İbrahim dışındaki bütün adaylar, kullandıkları tanımları tam olarak açıklamışlardır. Adaylar ispatı grup homomorfizmi tanımına göre oluşturmuşlar ve bunu ifade etmişlerdir. İbrahim ise ispatı grup homomorfizmi tanımına göre oluşturmuş fakat ispat içerisinde bunu ifade etmemiştir.

İspatın sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.50 de verilmiştir.

Çizelge 4.50.

Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	İbrahim, Nazlı
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	...

Çizelgeye göre 8 aday tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar, 2 aday ise belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte hiç açıklama yapmayanlar ve yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili teoremi tam/ikna edici şekilde açıklama yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Aykut: *Burada n . kuvvet olduğu için işlemimiz çarpma olacaktır. Yani G ve H kümelerinin çarpma işlemine göre birer grup olması gerekir. O zaman şu şekilde*

başlayabiliriz; $\forall g \in G$ için diyelim. Ayrıca $(G, \cdot)$ ve $(H, \cdot)$ birer gruptur. Şimdi ispatı yaparken tümevarım yöntemini kullanabilir veya direk çarpmanın özelliğinden de ispatlayabiliriz. [Yöntemine karar vermeye çalışıyor]... Şimdi $\varphi(g \cdot g \dots g)$ (n tane) şeklinde açık olarak yazabiliriz. Şimdi bunun φ ye görüntüsünü yazalım... $\varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)$ (n tane) şeklindedir. Şimdi $\varphi(g \cdot g \dots g) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)$ olup olmadığını araştıracağız. Burada grup homomorfizmi tanımından bu eşitliği zaten yazabiliriz. O halde $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. Bu şekilde yazabildiğim için de ispat tamamlanmış olur.

$$\forall g \in G \quad (G, \cdot) \text{ gruptur } (H, \cdot) \text{ gruptur.}$$

$$\varphi(\underbrace{g \cdot g \dots g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)}_{n \text{ tane}} \quad \text{dur. grup homomorfizmi tanımından,}$$

$$\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n \text{ dir.}$$

Şekil 4.64. Aykut'un Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?

Aykut: Bir eleman alıp grup homomorfizmi tanımını kullanarak sonuca ulaştığım için doğrudan bir ispat yaptım...

Teoremi farklı bir yöntemle ispatlayan ve sunumunu tam/ikna edici şekilde açıklayan Ayhan'ın mülakatı aşağıdadır.

$$\text{İspat: } \forall s \in G \text{ ve } \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } u: G \rightarrow H \text{ bir grup homomorfizmi olduğunda}$$

$$\text{ispatımızı tümevarım yapalım.}$$

$$n=2 \text{ için } u(s) = (u(s))^1 = u(s) \text{ olduğunda doğrudur.}$$

$$n=k \text{ için } u(s^k) = (u(s))^k \text{ için doğrudur. şimdi } n=k+1 \text{ için doğru olduğunu gösterelim.}$$

$$u(s^k) = u(\underbrace{s \cdot s \dots s}_{k \text{ tane}}) = \underbrace{u(s) \cdot u(s) \dots u(s)}_{k \text{ tane}} \text{ olur, } u \text{ bir homomorfizmi olduğundan}$$

$$\underbrace{u(s^k) \cdot u(s)}_{k \text{ tane}} = \underbrace{u(s) \cdot u(s) \dots u(s)}_{k \text{ tane}} \cdot u(s)$$

$$u(s^{k+1}) = (u(s))^{k+1} \text{ olur, } k+1 \text{ için doğru olduğundan } u(s^n) = (u(s))^n \text{ dir.}$$

Şekil 4.65. Ayhan'ın Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Mülakatçı: Peki bu ispata nasıl başlanmalıdır?

Ayhan: $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olduğundan ispatımızı tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için $\varphi(g) = (\varphi(g))^1 = \varphi(g)$ olduğundan doğrudur.

$n = k$ için $\varphi(g^k) = (\varphi(g))^k$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edeceğiz. Yani $n = k$ için bu ifade doğru olsun. Şimdi $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Şimdi $\varphi(g^k) = \varphi(g \cdot g \dots g)$ (k tane) işlemimiz çarpma olduğu için bu eşitliği yazabiliriz. Burada φ bir homomorfizma olduğundan bunlar $\varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)$ (k tane) olur. Bu eşitliği de yine φ bir homomorfizma olduğundan yazabiliyoruz. Şimdi $(k + 1)$. terime geçeceğimiz için eşitliğin her iki tarafını $\varphi(g)$ ile çarparsak; $\varphi(g^k) \cdot \varphi(g) = \varphi(g \cdot g \dots g)$ (k tane) $\cdot \varphi(g)$ olur. Yine φ bir homomorfizma olduğundan $\varphi(g^{k+1}) = (\varphi(g))^{k+1}$ olur. Şimdi $k + 1$ için bu eşitlik doğru olduğundan $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. Bu şekilde ispatı tamamlarız.

İspatın sunumunu tam/ikna edici şekilde açıklayan adaylar ispatta kullanmaları gereken özellikleri ve tanımları doğru ve eksiksiz olarak ifade etmişlerdir. Özellikle ispatta $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)$ ifadesini grup homomorfizmi tanımı gereği yazdıklarını belirtmişlerdir. Ayhan dışındaki adaylar, ispatta benzer adımlar takip etmişlerdir. Ayhan ise ispatı tümevarım yöntemine göre ispatlamış ve tümevarım adımlarının neden sağlandığını açıklamıştır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili teoremi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$(G, \cdot)$ ve $(H, \cdot)$ birer gruptur. $\phi: G \rightarrow H$ bir homomorfizma olmak üzere, $g_1, g_2 \in G$
 o, $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$ olur. $g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}$ olmak üzere,
 $\phi(g^n) = \phi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\phi(g) \cdot \phi(g) \cdot \dots \cdot \phi(g)}_{n \text{ tane}}$
 $= (\phi(g))^n$ olur.

Şekil 4.66. İbrahim'in Grup Homomorfizmi Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

[Teoremin ifadesini okuyor]...

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlanmalıdır?

İbrahim: Homomorfizm var. Yani ilk başta verilen tanımdan faydalanabiliriz. [Düşünüyör] ... Burada dönüşüm tanımlanmamış ama... Burada kuvvet alındığına göre işlemi çarpma olarak alabilirim. O zaman şöyle diyelim... $(G, .)$ ve $(H, .)$ birer gruptur. Çünkü grup homomorfizmi tanımlayabilmek için bu ikisinin grup olması şarttır. φ dönüşümünü de şu şekilde yazabiliriz; $\varphi: G \rightarrow H$ bir dönüşüm olmak üzere G den iki eleman alalım... $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere; $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ olur. Şimdi de g^n i tanımlayalım. Yani $g^n = g \cdot g \dots g$ (n tane) çarpımı olmak üzere; $\varphi(g^n) = \varphi(g \cdot g \dots g)(n \text{ tane}) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)(n \text{ tane}) = (\varphi(g))^n$ olur. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta kullandıkları grup homomorfizmi tanımını tam olarak ifade etmemişlerdir. Adaylar grup homomorfizmi tanımını G grubundan seçtikleri iki eleman üzerinde kullanıp $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ şeklinde ifade etmişler ve $\varphi(g^n) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) \dots \varphi(g)$ ifadesine genellemişlerdir.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.51 de verilmiştir.

Çizelge 4.51.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	Aykut, Ayfer, Aysel
Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	Nermin, Büşra, Hüseyin, Hatice, Nazlı, Ayhan, İbrahim
Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar	...

Çizelgeye göre 3 aday doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar ve 7 aday da yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer

almaktadır. Bununla birlikte gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar teorem ifadesindeki dönüşümün çarpma işlemine göre tanımlandığının farkındadırlar. Bu yüzden adaylar φ dönüşümünü G grubundan seçtikleri g^n elemanına uygulamışlar ve homomorfizm tanımından yararlanarak sonuca ulaşmışlardır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde ise İbrahim ve Hatice dışındaki adaylar ispatta hangi işlemi kullanmaları gerektiğine karar verememişlerdir. Adaylar araştırmacı tarafından verilen ipuçlarından yararlanarak ispatta çarpım notasyonu kullanmaları gerektiğini fark etmişlerdir. Bununla birlikte Nazlı ve İbrahim, ispatta kullandıkları homomorfizm kavramını tam olarak ifade etmemişlerdir. Hatice ise dönüşümde kullanılan işlemi tam olarak belirtmemiştir. Hatice, teorem ifadesinde gruplar üzerinde tanımlanan işlemlerin net olarak belirtilmediğini ifade etmiştir. Bu yüzden ispatta homomorfizm tanımını $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ şeklinde işlem notasyonu olmadan kullanmıştır.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.52 de verilmiştir.

Çizelge 4.52.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Aykut, Hatice, Aysel
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler</i>	Büşra, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, 5 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar ve 3 aday da yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve tam olarak açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Hüseyin: *Doğrudan ispat yöntemini kullandım. Başlangıçta verilen $\varphi(g^n) = p$ ve $(\varphi(g))^n = q$ dersek p ise q ispatı yaptık. Çünkü grup homomorfizmi tanımından yararlanarak bu eşitliğin doğruluğunu göstermiş olduk.*

Hüseyin, ispatta doğrudan ispat yöntemi kullandığını ve doğrudan ispatın $p \Rightarrow q$ şeklindeki ifadelerin ispatında kullanıldığını belirtmiştir. Ayhan ise ispatta tümevarım yöntemi kullanmış ve tümevarım yönteminin basamaklarını açıklamıştır.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Aykut: *Bir eleman alıp grup homomorfizmi tanımını kullanarak sonuca ulaştığım için doğrudan bir ispat yaptım...*

Bu kategoride yer alan adaylar, ispatı doğrudan ispat yöntemine göre yaptıklarını ifade etmişler fakat neden doğrudan ispat yöntemini kullandıklarını belirtmemişlerdir.

Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili ispatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Büşra: *[Düşünüyor]... Yani olmayana ergi değil, tümevarım değil... Yani hocam bu ispatta özel bir yöntem kullanmadık bence... Yani problem çözer gibi ispat yaptık bence...*

Mülakatçı: *Kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Ayfer: *[Düşünüyor]... Tümdengelim olabilir.*

Büşra, ispatı özel bir yöntem kullanmadan yaptığını belirtmiştir. İspatı problem çözer gibi yaptığını ifade etmiştir. Ayfer, ispatta tümdengelim yöntemi kullandığına karar vermiş fakat tümdengelim yöntemlerinden hangisini kullandığını belirleyememiştir. Nazlı ise küçük örneklerden bütüne gittiğini düşündüğü için ispatta tümevarım yöntemi kullandığını ifade etmiştir.

4.4.5. Vektör Kavramı

İspata nasıl başlayacağını ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.53 de verilmiştir.

Çizelge 4.53.

Öğretmen Adaylarının İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspata Nasıl Başlayacağını İfade Etme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Büşra, Aykut, Aysel
<i>Eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Ayfer, Nazlı
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	Hatice
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 4 aday eksik/yetersiz şekilde açıklayanlar ve 1 aday da yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Vektör kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Büşra: $\vec{0}$ vektörü tanıdı... [Tanımı inceliyor]... Yani başlangıç ve bitiş noktasının aynı olabilmesi için bu vektörün hiç başlamamış olması gerekir... Yani nokta tayin etmemiz gerekir. $\vec{a}$ vektörünü $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gibi alsam... $\vec{0}$ vektörünü de $(0, 0, \dots, 0)$

şeklinde kabul etsem... Şimdi bu elde ettiklerimi $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ eşitliğinde yerine yazabilirim.

Bu kategoride bulunan adaylar ispatta kullanmaları gereken $\vec{0}$ vektörü ve $\vec{a}$ vektörünü doğru bir şekilde tanımlayarak ispata başlamışlardır. Adaylar ispatta kullanacakları vektörleri n boyutta tanımlamışlar ve bu sayede genel bir ispat yapmak istemişlerdir.

Vektör kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklayan iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: Aslında bu gayet açık, burada neyi ispatlayacağım her şey çok açık... $\vec{0}$ vektörü zaten başlangıç ve bitiş noktası aynı olan vektördür. Bu yüzden de toplama işlemine göre etkisiz eleman gibi düşünebiliriz.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlamamız gerekir? Neden?

Ayfer: $\vec{0}$ vektörü başlangıç ve bitiş noktası aynı olan vektördü... Yani $\mathbb{R}^3$ de düşünürsem bu vektörü $(0,0,0)$ şeklinde alabilirim... Ama tabi bu yazdığım $\mathbb{R}^3$ dedir. $\mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ şeklindedir. İspatı da 3 boyutta yapacağım... Şimdi bir de $\vec{a}$ vektörü tanımlamalıyım. Bunu da yine 3 boyutta yapabilirim. $\vec{a}$ vektörünü de $\vec{a} = (x,y,z)$ olsun. Şimdi de $\vec{a} + \vec{0}$ ı açmalıyım.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlamamız gerekir? Neden?

İbrahim: Bu ispatı yaparken yine tanımlardan faydalanabiliriz. Şöyle ki; vektörlerde toplama şöyle idi. $\overrightarrow{AB}$ vektörü mesela $\vec{a}$ olsun. Ve $\vec{0}$ vektörü de tanımdan başlangıcı ve bitişi B noktası olan vektör olsun. Dolayısıyla $\vec{a}$ vektörü ile $\vec{0}$ vektörünün toplamı AB ile başlangıcı ve bitişi B olan $\vec{0}$ vektörünü toplayacağız. Dolayısıyla da AB ile 0 ı toplayacağız. Sonuçta da yine $\overrightarrow{AB}$ ye ulaşacağız.

Bu kategoride bulunan adaylar ispatta kullanmaları gereken $\vec{0}$ vektörü ve $\vec{a}$ vektörünü genel bir ifade şeklinde tanımlamamışlardır. Ayfer, ispatı 3 boyutlu uzayda, Nazlı ve Nermin ise 2 boyutlu uzayda yapmak istemişler ve vektörleri buna göre tanımlamışlardır. İbrahim ise ispatta $\vec{a}$ vektörünü $\overrightarrow{AB}$ şeklinde, $\vec{0}$ vektörünü de başlangıç ve bitiş noktası aynı olmasından dolayı bir nokta olarak kullanmak istemiştir. İbrahim dışındaki adaylar, bu düşüncelerinden hareketle özel bir çözüme ulaşmışlardır. İbrahim ise yanlış matematiksel ifadeler kullanarak geçersiz bir ispat yapmıştır.

Vektör kavramı ile ilgili ispata nasıl başlayacağını yanlış açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispata nasıl başlanmalıdır?*

Hatice: *Buradaki işlem toplama işlemi ve $\vec{0}$ vektörü verilmiş. İlk olarak biz burada eşitliklerden birini alalım. Yani $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ eşitliğini ele alalım. Şimdi her iki tarafı $\vec{a}$ vektörünün tersi olan $-\vec{a}$ vektörü ile toplayalım. Bu şekilde yapılır mı tamda emin olamıyorum aslında... [Düşünüyor] ...*

Hatice, ispata nasıl başlaması gerektiğine karar verememiştir. Bu yüzden ispata $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ifadesine $\vec{a}$ vektörünün vektörlerde toplama işlemine göre tersi olan $-\vec{a}$ vektörünü dâhil ederek başlamak istemiştir. Eğer Hatice ispata bu şekilde başlamış olsaydı, sonuçta $\vec{0} = \vec{0}$ elde edecekti. Bu yüzden araştırmacı Hatice'nin ispatı devam ettirebilmesi için sonda sorular sormuştur. Bu sayede Hatice, ispatı tamamlayabilmiştir.

Tanımları ifade etme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.54 de verilmiştir.

Çizelge 4.54.

Öğretmen Adaylarının İspatta Kullandıkları Tanımları İfade Etme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Tanımları İfade Etme	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Kullandıkları tanımları belirtenler	İbrahim, Büşra, Ayfer
Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler	Ayhan, Nermin, Aykut, Hatice, Aysel, Nazlı
Kullandıkları tanımları belirtmeyenler	Hüseyin

Çizelgeye göre 3 aday kullandıkları tanımları belirtenler, 6 aday kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler ve 1 aday da kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorilerinde yer almaktadır.

Vektör kavramına yönelik ispatı oluşturmak için adayların $\vec{0}$ vektörü ve vektörlerde toplama işlemi tanımını ifade etmeleri gerekmektedir. Kullandıkları tanımları belirtenler kategorisinde yer alan adaylar ispata $\vec{0}$ vektörünü tanımlayarak başlamışlardır. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ olduğunu göstermek için de vektörlerde toplama işlemi tanımından yararlanmışlardır. Kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler kategorisinde yer alan adaylardan Ayhan, Aysel ve Aykut ispatta kullandıkları $\vec{0}$ vektörünü doğru bir şekilde tanımlamışlardır. Ancak $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ eşitliğini göstermek için vektörlerde toplama işlemi tanımından yararlandıklarını ifade etmemişlerdir. Adaylar bu işlemi doğrudan yapmışlar ve nedenini açıklamamışlardır.

Kullandıkları tanımları belirtmeyenler kategorisinde bulunan Hüseyin ise ispatta kullandığı $\vec{0}$ vektörünü, hiçbir açıklama yapmadan $\mathbb{R}^n$ de $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ eşitliğini de hiçbir açıklama yapmadan göstermiştir.

İspatın sunumu kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.55 de verilmiştir.

Çizelge 4.55.

Öğretmen Adaylarının İspatın Sunumu Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Sunumu</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar</i>	...
<i>Belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar</i>	Ayhan, Büşra, Aykut, Aysel
<i>Hiç açıklama yapmayanlar</i>	Hüseyin
<i>Yanlış açıklama yapanlar</i>	İbrahim, Nermin, Hatice, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 4 aday belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar, 1 aday hiç açıklama yapmayanlar ve 5 aday da yanlış açıklama yapanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte tam/ikna edici şekilde açıklama yapanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Vektör kavramı ile ilgili teoremi belirsiz/yetersiz açıklamalar yaparak ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Ayhan: Burada $\vec{0}$ vektörü herhalde birim eleman gibi görülmüş. Gerçektende $\vec{0}$ vektörü n boyutlu uzayda $(0, 0, \dots, 0)$ şeklinde ifade edildiği için vektörlerde toplama işlemine göre etkisizdir. Yani teorem ifadesinde verilenler birbirine eşittir zaten...

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{0} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\
 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{a} \in \mathbb{R}^n \\
 \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0 + x_1, 0 + x_2, \dots, 0 + x_n) \\
 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{a} \in \mathbb{R}^n \text{ olup burada} \\
 \vec{a} + \vec{0} &= \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \text{ dir,}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.67. Ayhan'ın Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Ayhan: İlk olarak $\vec{a}$ ve $\vec{0}$ vektörlerini tanımlayayım. $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Buradan; $\vec{a} + \vec{0} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{a}$ eleman $\mathbb{R}^n$ dir. Bir de diğer taraftan ispatlamamız gerekiyor...

$$\begin{aligned}
 \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0 + x_1, 0 + x_2, \dots, 0 + x_n) = \\
 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{a} \text{ eleman } \mathbb{R}^n \text{ olup buradan da } \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

Mülakatçı: Güzel... İspatı tamamladık mı?

Ayhan: Evet...

Bu kategoride yer alan adaylar ispatı doğru bir şekilde tamamlamışlardır. Adaylar $\vec{0}$ ve $\vec{a}$ vektörlerini n boyutlu olarak tanımlamışlardır. Ayhan, Aykut ve Aysel ispatta vektörlerin toplamına nasıl ulaştıklarını ifade etmemişlerdir. Adaylar vektörleri doğru toplamışlar fakat bu toplama işlemini neden bu şekilde yaptıklarını izah etmemişlerdir. Bununla birlikte Büşra, ispatta toplama işlemini nasıl yaptığını da açıklamıştır. Fakat Büşra, iki vektörün toplamını $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0) +$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a}$ şeklinde göstermiştir. Büşra, aslında hem sağdan hem de soldan $\vec{0}$ vektörünün işlem sonucuna etki etmediğini göstermek istemiş ama bunu matematiksel olarak yeterli ifade edememiştir.

Vektör kavramı ile ilgili teoremi hiç açıklama yapmadan ispatlayan bir adayın ispatı ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \\ \vec{a} + \vec{0} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (a_1+0, a_2+0, \dots, a_n+0) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \vec{a} \quad \text{--- (1)} \\ \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= (0+a_1, 0+a_2, \dots, 0+a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \vec{a} \quad \text{--- (2)} \\ \text{(1) ve (2) den, } \vec{a} + \vec{0} &= \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \text{ old. görülmüş.} \end{aligned}$$

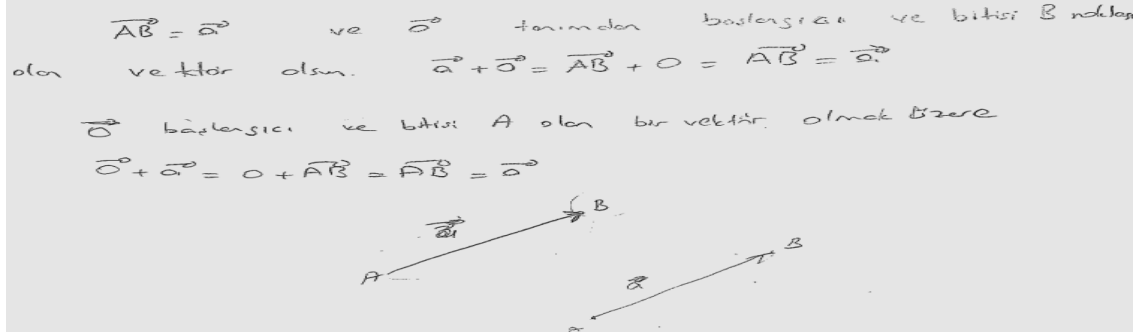
Şekil 4.68. Hüseyin'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Hüseyin: İlk olarak bu vektörleri gösterelim. Yani $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ şeklinde olur. İlk önce birinci eşitliği alalım... $\vec{a} + \vec{0} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a} \dots (1)$ olur.

Şimdi de ikinci eşitliği, yani $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu göstermeliyim. O zaman $\vec{0} + \vec{a} = (0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0 + a_1, 0 + a_2, \dots, 0 + a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a} \dots (2)$ olur. (1) ve (2) den de $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğu görülür.

Hüseyin, ispatta kullandığı $\vec{0}$ ve $\vec{a}$ vektörlerini doğru bir şekilde tanımlamış fakat bu vektörleri neden n boyutta tanımladığını belirtmemiştir. Bununla birlikte ispatın devamında $\vec{a} + \vec{0}$ ve $\vec{0} + \vec{a}$ işlemlerini vektörlerde toplama işlemi tanımına uygun bir şekilde yapmış fakat toplama işlemini neden bu şekilde yaptığını da açıklamamıştır.

Vektör kavramı ile ilgili teoremi yanlış açıklamalar yaparak ispatlayan iki adayın ispatları ve bu süreçte araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.69. İbrahim'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

İbrahim: Bu ispatı yaparken yine tanımlardan faydalanabiliriz. Şöyle ki; vektörlerde toplama şöyle idi. $\overrightarrow{AB}$ vektörü mesela $\vec{a}$ olsun. Ve $\vec{0}$ vektörü de tanımdan başlangıcı ve bitiş B noktası olan vektör olsun. Dolayısıyla $\vec{a}$ vektörü ile $\vec{0}$ vektörünün toplamı AB ile başlangıcı ve bitiş B olan $\vec{0}$ vektörünü toplayacağız. Dolayısıyla da AB ile $\vec{0}$ toplayacağız. Sonuçta da yine AB ye ulaşacağız. Bu da yine $\vec{a}$ vektörüne eşit olur. Yani; $\vec{a} + \vec{0} = AB + 0 = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ olur. Benzer şekilde tersini de gösterebiliriz.

Şimdi tersinden göstereceğimiz için $\vec{0}$ vektörü başlangıcı ve bitiş A olan bir vektör olmak üzere; $\vec{0} + \vec{a} = 0 + AB = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ olur.

Mülakatçı: Güzel... Bu yaptıklarınızı şekille de izah edebilir misiniz?

İbrahim: [$\overrightarrow{AB}$ vektörünü çiziyor] ... $\vec{a}$ vektörünün başlangıcı A noktası ve bitiş B olsun. $\vec{0}$ vektörünün tanımına göre $\vec{0}$ vektörünü B noktasında başlatıp B noktasında bitirebilirim. Yani aslında $\vec{0}$ vektörü herhangi bir uzunluk belirtmeyen vektördür. Dolayısıyla $\vec{0}$ vektörünü B noktası olarak alabilirim. Bu ikisini topladığımızda sonuç yine $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektörünü elde ederiz.

Tersten baktığımızda da yine $\overrightarrow{AB}$ vektörü için yine $\vec{0} + \overrightarrow{AB}$ ye bakarsak; $\vec{0}$ vektörünü bu seferde A dan başlayıp A da bitecek şekilde tanımlayabiliriz. Yani $\vec{0}$ vektörünü bu sefer A noktası olarak alabiliriz. Yine $\vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

İbrahim, ispata $\vec{a}$ vektörünü $\vec{a} = AB$ şeklinde tanımlayarak başlamıştır. Benzer şekilde $\vec{0}$ vektörünü de başlangıç ve bitiş noktası aynı olan vektör olarak almıştır. Bu yüzden $\vec{0}$ vektörünü bir nokta olarak tayin etmiştir. İbrahim, $\vec{a} + \vec{0}$ vektör toplamını

$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şeklinde ifade etmiştir. Burada $\vec{0}$ vektörünü başlangıç ve bitiş noktası B olan bir vektör olarak ifade etmiştir. Benzer düşünce ile $\vec{0}$ vektörünün başlangıç ve bitiş noktasını $\vec{A}$ olarak alıp $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ eşitliğini göstermiştir. Ayrıca İbrahim matematiksel olarak ifade ettiği işlemleri araştırmacının isteği üzerine görsel olarak da açıklamaya çalışmıştır.

Mülakatçı: Bu ispata nasıl başlamanız gerekir? Neden?

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \quad \vec{0} = (0, 0) \quad (\text{vektör tanımından}) \\ \vec{a} + \vec{0} &= (x, y) + (0, 0) = (x+0, y+0) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (1) \\ \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0) + (x, y) = (0+x, 0+y) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (2) \\ (1) \text{ ve } (2) \text{ -den } \vec{a} + \vec{0} &= \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Şekil 4.70. Nermin'in Vektör Kavramı İle İlgili Teorem İspatı

Nermin: Şimdi ben burada $\vec{a}$ vektörüne (x, y) ve $\vec{0}$ vektörüne de $(0, 0)$ desem... Yani vektör tanımından ikili olarak alsam... Yani bu vektörleri bu şekilde tanımlayabilirim. Şimdi $\vec{a} + \vec{0} = (x, y) + (0, 0)$ olur. Şimdi ayrı ayrı bileşenleri toplayabilirim. $\vec{a} + \vec{0} = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$ yani $\vec{a}$ vektörüne eşittir. Yani; $\vec{a} + \vec{0} = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = \vec{a} \dots (1)$ olur. Aynı şekilde de tersini gösterebilirim. $\vec{0} + \vec{a} = (0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y) = \vec{a} \dots (2)$ şeklinde iki tarafı da gösterdiğim için (1) ve (2) den $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ bulunur.

İspatın sunumunda yanlış açıklamalar yapanlar kategorisinde yer alan İbrahim dışındaki adaylar ise $\vec{0}$ ve $\vec{a}$ vektörlerini $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$ de göstermek istemişlerdir. Adaylardan Nermin, Hatice ve Nazlı $\mathbb{R}^2$ de, Ayfer ise $\mathbb{R}^3$ de işlem yapmışlardır. Bu yüzden adaylar genel bir ispattan ziyade iki vektörün toplamı için özel bir çözüm yapmışlardır.

Matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.56 da verilmiştir.

Çizelge 4.56.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Matematiksel Dil ve Notasyon Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Aysel
<i>Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Nazlı
<i>Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar</i>	İbrahim

Çizelgeye göre 3 aday doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar, 6 aday yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar ve 1 aday da gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorilerinde yer almaktadır.

Doğru matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullanmaları gereken vektörleri n boyutlu olarak tanımlamışlardır. Ayrıca adaylar ispattaki toplama işlemini vektörlerde toplama işlemine göre doğru bir şekilde yapmışlardır.

Yetersiz matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde bulunan adaylardan Nermin, Hatice, Ayfer ve Nazlı vektörleri 2 veya 3 boyutlu olarak tanımlamışlardır. Bu şekilde ispata başladıkları için ispatta genel bir ifade yerine özel bir çözüme ulaşmışlardır. Büşra ve Aykut ise ispata vektörleri n boyutlu tanımlayarak başlamışlar fakat vektörlerde toplama işlemini tam yapmamışlardır. Özellikle Aykut, sadece $\vec{a} + \vec{0}$ işlemini yapmış ve vektörlerde toplama işleminin değişme özelliğine vurgu yaparak $\vec{0} + \vec{a}$ toplamının sonucunu incelememiştir. Büşra ise vektörlerde toplama işlemini doğru yapmasına rağmen matematiksel olarak doğru ifade edememiştir.

Gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullananlar kategorisinde bulunan İbrahim ise ispatta vektörlerin bileşenlerini ifade etmediği için yanlış bir ispat

yapmıştır. İbrahim, $\vec{0}$ vektörünün tanımını yorumlayamadığı için bu vektörü bir nokta olarak belirlemiş ve yanlış matematiksel ifadeler kullanmıştır.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımı kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.57 de verilmiştir.

Çizelge 4.57.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımı</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	Ayhan
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Aykut, Hatice
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	Hüseyin, Aysel
<i>Yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler</i>	Büşra, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 1 aday yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, 4 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar ve 3 aday da yöntemi yanlış belirleyen veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır.

Vektör kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve tam olarak açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu ispatı yaparken kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Ayhan: *Doğrudan ispat... Yani bildiğimiz ifadelerden... Bildiğimiz bir doğrudan diğer bir doğru ifadeyi elde etmeye çalıştık. Yani p ise q yu ispat ediyoruz. Yani adım adım doğru önermeleri bulup yine p ise q önermesinin doğru olduğunu gösteriyoruz.*

Ayhan, yaptığı ispatta doğrudan ispat yöntemi kullandığının ve bu yöntemin $p \Rightarrow q$ şeklindeki ifadelerin ispatında kullanıldığının farkındadır. Bu yüzden Ayhan,

kullandığı ispat yönteminin hangi matematiksel ifadelerin ispatında kullanıldığını doğru bir şekilde ifade etmiştir.

Vektör kavramı ile ilgili ispatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Hatice: *Doğrudan... Çünkü sadece elimdeki bilgileri kullandım.*

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta, doğrudan ispat yöntemini kullandıklarının farkındadırlar. Ancak adaylar ispatta doğrudan ispat yöntemini kullanma sebebini sadece var olan bilgilerden yararlanmalarına bağlamışlardır.

Vektör kavramı ile ilgili ispatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Kullandığınız ispat yöntemi size göre hangisidir?*

Büşra: *[Düşünüyor]... Yani hocam özel bir yöntem yok sonuçta verilen ifadeye vektörlerin açık hallerini yazarak yaptım.*

Ayfer: *Hangi yöntemle yaptım... Bilmiyorum... İspat yöntemlerini çok iyi öğrenemedim.*

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta hangi yöntemi kullandıklarını belirleyememişlerdir. Adaylardan Büşra ve Nazlı, ispatta var olan bilgileri kullandıklarını dolayısıyla özel bir ispat yöntemi kullanmadıklarını ifade etmişlerdir. Ayfer ise ispatı hangi yönteme göre yaptığını bilmediğini belirtmiştir.

4.5. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Süreçlerine Ait Bulgular

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili başkaları tarafından yapılan ispatların doğruluklarını değerlendirme süreçlerine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

4.5.1. İkili İşlem Kavramı

Kavram kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.58 de verilmiştir.

Çizelge 4.58.

Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kavram Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru inceleyen ve açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Büşra, Aykut, Hatice
<i>Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Aysel
<i>Doğru inceleyen ve açıklamayanlar</i>	Ayfer
<i>Yanlış inceleyen ve açıklayanlar</i>	Nazlı

Çizelgeye göre 5 aday doğru inceleyen ve açıklayanlar, 3 aday doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar, 1 aday doğru inceleyen ve açıklamayanlar ve 1 aday da yanlış inceleyen ve yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır.

İkili işlem kavramına yönelik başkası tarafından yapılan ispatın değerlendirilmesi etkinliğinde yer alan ispatta öğretmen adaylarının birim eleman kavramının kullanımını incelemeleri gerekmektedir. İspatta çelişki bulma yöntemi kullanıldığı için başlangıçta herhangi bir $a \in A$ için e_1 ve e_2 birim eleman olsun kabulü yapılmıştır. Yapılan ispatta birim eleman tanımı eksik kullanılmış ve her bir birim elemanın gösterimi için sadece sağ birim eleman tanımı kullanılmıştır. Bununla birlikte birim elemanın kümenin her elemanı için sağlandığına vurgu yapmak istenmiştir. Bunun için ispat içerisinde özel olarak $a = e_1$ ve $a = e_2$ dönüşümleri kullanılmıştır. Adaylardan doğru inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alanlar birim eleman ve özelliklerini tam olarak açıklamışlardır. Bu kategorideki adaylar birim elemanın hem sağ hem de sol birim eleman şeklinde incelenmesi gerektiğine vurgu yapmışlardır. Ayrıca $a = e_1$, $a = e_2$ dönüşümlerinin kullanılabileceğini ifade etmişler ve birim elemanın kümedeki her eleman için sağlanması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu kategoride yer alan öğretmen adayları birim eleman için geçerli olan eksikliği gördükleri için ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir.

Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar, birim elemanın sadece sağ birim olarak incelenmesinin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Bununla birlikte $a = e_1$ ve $a = e_2$ dönüşümlerinin kullanılabileceğini çünkü birim elemanın kümedeki her eleman için geçerli olduğunu ifade etmişlerdir. Bu kategorideki adaylar birim eleman kullanımının doğru olduğunu düşündükleri için ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir.

Doğru inceleyen ve açıklamayanlar kategorisinde yer alan aday, ispatın doğru yöntemle yapıldığını ve işlemlerde de bir hata göremediğini belirterek ispatın doğru olduğuna karar vermiştir. Ayfer, ispat içerisinde birim eleman tanımının doğru kullanıldığını ve $e_1, e_2 \in A$ olduğu için $a = e_1$ ve $a = e_2$ dönüşümlerinin yapılabileceğine vurgu yapmıştır. Yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alan aday ise ispat içerisinde birim eleman kavramının doğru kullanıldığını ve $a = e_1$, $a = e_2$ şeklinde bir dönüşüm yapılamayacağını belirtmiştir. Nazlı, bu şekilde ispatın eksik olacağını ve yapılan ispatın özel bir çözüm olduğunu ifade etmiştir.

İspatın kurgusunu inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.59 da verilmiştir.

Çizelge 4.59.

Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Kurgusunu İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Hatice, Aykut, Büşra, Hüseyin, Ayhan
<i>Belirsiz/yetersiz açıklayanlar</i>	Aysel, Ayfer, Nermin, İbrahim
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	Nazlı

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 4 aday belirsiz/yetersiz açıklayanlar ve 1 aday da yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatı tam/ikna edici şekilde açıklama yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Hatice: Burada etkisiz elemanın tekliğini ispatladığımıza göre ispat yanlış değildir.

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Hatice: Evet... Çünkü başlangıçta iki tane etkisiz eleman olduğunu kabul etmiş... Teklik ispatlarında böyle yapıyoruz o yüzden bana göre doğrudur.

Mülakatçı: İspat basamaklarında bir hata var mıdır? Neden?

Hatice: [Öğrenci basamakları kontrol ediyor.] Burada $a = e_2$ almış ve bunu da yapabilir çünkü her $a \in A$ için geçerlidir. Burada belki sadece şunu yapabiliirdi... Birim elemanın özelliğini kullanırken $a * e_1 = e_1 * a = a$ diye yapılsaydı daha kolay görülebilirdi. Çünkü değişme özelliğine vurgu yapılmamış ve bu ispatta değişme özelliği varmış gibi yapılmış. Teorem ifadesinde $*$ işlemi için sadece ikili işlem olsun demiş. İkili işlem olması onun değişme özelliğini taşıdığını ispatlamaz. Bu yüzden iki taraftan da etkisiz eleman incelenmeliydi. Dolayısıyla ispat eksiktir.

İspatın kurgusunu tam/ikna edici şekilde açıklayarak inceleyenler kategorisinde yer alan öğretmen adayları ispatta kullanılan birim eleman ve özelliklerini irdelemişlerdir. Adaylar birim eleman kullanımının tanıma uymadığını belirterek birim elemanın nasıl kullanılması gerektiğini açıklamışlardır. Bu kategoride yer alan adaylar yapılan ispatın doğru olabilmesi için sağ ve sol birim elemanın kullanılması gerektiğine vurgu yapmışlardır.

İspatı belirsiz/yetersiz şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

İbrahim: [Teorem ifadesini okuyor ve ispatı inceliyor] İspat doğrudur...

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

İbrahim: Evet... Az önce benim yaptığım ispattaki gibi olmayana ergi ile varsayalım ki iki tane etkisiz elemanı olsun diye başlanmış.

Mülakatçı: İspat basamaklarında bir hata var mıdır? Neden?

İbrahim: Adımları tek tek inceleyecek olursak... Burada önce birinci etkisiz eleman için işlem yapmış... İşte a ile birinci etkisiz elemanı işleme soktuğumuz da sonuç a olur. Ve burada özel bir durum olarak $a = e_2$ olsaydı demiş...

Mülakatçı: Bunu yapabilir mi?

İbrahim: Tabi ki yapabilir... Çünkü etkisiz eleman kümenin her elemanı için geçerli olmalıdır.

İbrahim: $a = e_2$ aldığında e_2 ile e_1 i işleme soktuğumuzda e_1 etkisiz olduğu için sonuç e_2 ye eşit olur dedik. Aynı şekilde e_2 etkisiz eleman olduğundan bu sefer e_2 için bakıyoruz duruma... e_2 için baktığımızda yine aynı işlemde $a * e_2 = a$ dır. Bu seferde yine diğerinin tersi olarak $a = e_1$ alınabilir. Buradan da $e_1 * e_2 = e_1$ olur. Bu elde ettiğimiz iki eşitlikten $e_2 = e_1$ olduğunu söyleriz. Adımlarda bir hata göremedim.

Belirsiz/yetersiz açıklayarak inceleyenler kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullanılan birim eleman tanımının doğru olduğunu düşünmüşlerdir. Bu kategorideki öğretmen adayları sadece sağ birim eleman kullanılarak yapılan ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir.

İspatı yanlış açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Nazlı: [Teorem ifadesini ve ispatı okuyor] ...

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Nazlı: İspatın başlangıcında hata yok. Çünkü biraz önce benim yaptığım gibi iki etkisiz eleman alarak başlamış.

Mülakatçı: İspat basamaklarında bir hata var mıdır? Neden?

Nazlı: Adımlarda hata var aslında ama nerede onu çözemedim. e_1 ve e_2 etkisiz eleman olarak seçilmiş ama burada $a = e_1$ ve $a = e_2$ seçmem ne kadar doğru. Burada bir yanlışlık olduğunu düşünüyorum. a nın e_1 ve e_2 olarak seçilmesi bana göre yanlıştır. İspat yanlış değil ama eksiklik var gibi geldi ama nerede onu tam çözemedim açıkçası... [Çalışma kağıdındakileri yazıyor] ...

Yanlış açıklayanlar kategorisinde yer alan aday, birim elemanın sadece sağ birim olarak kullanılmasının doğru olduğunu düşünmüş ve ispatta özel olarak $a = e_1$ ve $a = e_2$ dönüşümlerinin kullanılmaması gerektiğini savunmuştur. Adayın bu şekilde düşünmesi birim eleman tanımını tam olarak yorumlayamamış olduğunu göstermektedir.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.60 da verilmiştir.

Çizelge 4.60.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Hatice
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler</i>	Aysel, Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Ayfer, Nazlı, Aykut

Çizelgeye göre 1 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 9 aday da yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hatice: *Biraz önce yaptığımız ispatla birbirine benzer bir ispat yapılmış. O yüzden burada da çelişki bulma yöntemi kullanılmıştır. Çünkü tektir ispatı yapmak için farklı bir şey kabul ediyorum ve sonuçta onun bir çelişki olduğunu görüyorum. Çünkü birbirine eşit çıkıyor.*

İspatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: *Bu ispatta da olmayana ergi kullandık... Yani ispata başlarken etkisiz elemanı tek değil de iki tane olduğunu düşündük. Sonra etkisiz elemanın tanımını kullanarak işlem yaptık.*

Nazlı: *Yine tanımı kullanmış... Ama isim olarak hangi ispat yöntemi olduğunu bilemiyorum.*

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer alan Hatice ispatta çelişki bulma yöntemi kullanıldığını fark etmiş fakat çelişki bulma yönteminin neden ve nasıl kullanıldığını tam olarak açıklamamıştır. Bununla birlikte Hatice dışındaki adaylar, ispatta hangi yöntemin kullanıldığı tam olarak anlayamamışlardır. Adaylardan Nazlı ve Büşra ispatın yöntemini belirleyemezken diğer adaylar ispatta olmayana ergi yönteminin kullanıldığını ifade etmişlerdir. Bu adaylar olmayana ergi ile çelişki bulma yöntemleri arasındaki farkı tam olarak algılayamamışlardır. Bu iki yöntemi birbirine karıştırmışlardır.

Cevabını savunma kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.61 de verilmiştir.

Çizelge 4.61.

Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Cevabını Savunma</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Büşra, Hüseyin, Ayhan, Hatice, Aykut
<i>Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	Aysel, Ayfer, Nermin
<i>Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar</i>	Nazlı, İbrahim

Çizelgeye göre 5 aday cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 3 aday cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar ve 2 aday da cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorilerinde yer almaktadır.

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Büşra: Birim elemanın tanımından $a * e_1 = a$ olur. Bu her $a \in A$ için sağlanacağından özel olarak $a = e_2$ alınırsa $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \dots (1)$ olur. Aynı şekilde $a * e_2 = e_2 * a = a$ (Ama hocam burada diğer taraflı incelenmemiş onu söyleyeyim... Her iki taraftan incelenmesi gerekir. Çünkü değişme özelliği yok ifade edilmemiş... O zaman ispat eksik oluyor.) yine her $a \in A$ için sağlanacağından $a = e_1$ seçebiliriz. $e_1 * e_2 =$

$e_1 \dots (2)$ olur. (1) ve (2) den de $e_1 = e_2$ olur. Ayrıca burada değişme özelliğinden bahsedilmediğinden iki taraflı incelenmelidir.

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullanılan birim eleman kavramı ve özelliklerine vurgu yapmışlardır. Bu adaylar birim eleman tanımını tam olarak içselleştirmiş olduklarından uygulamadaki eksiklikleri ikna edici şekilde açıklamışlardır.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: Adımlarda bir hata yoktur. Sonuca doğru bir şekilde ulaşılmıştır. Dolayısıyla ispat doğrudur.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar sadece ispatta yapılan işlemlere odaklanmışlardır. İspat içerisinde yapılan işlemlerin doğru olduğunu görmüş ve ispatı kavramsal açıdan irdelememişlerdir. Bu yüzden ispatta kullanılan birim elemanın sadece sağ birime göre incelendiğini göz ardı etmişlerdir.

Cevabını yanlış açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Nazlı: Başlangıçta hata yok. Verilen denklemlerde birleşme özelliği kullanılarak birim elemana ulaşılabilirdi. Burada yapılan şey ispat için özel bir çözüm olmuş.

Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorisinde yer alan adaylardan Nazlı, ispatta sadece $a = e_1$ ve $a = e_2$ dönüşümünü irdelemiştir. Buradaki dönüşümün yapılması ile sadece özel bir çözüm yapılabileceğini düşündüğü için yanlış bir açıklama yapmıştır. İbrahim ise cevabını açıklamamıştır. İbrahim, sadece ispatta yapılan işlemlerle ilgilenmiş ve bir hata olmadığını düşündüğü için açıklama gereği duymadan ispatın doğru olduğuna karar vermiştir.

4.5.2. Grup Kavramı

Kavram kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.62 de verilmiştir.

Çizelge 4.62.
Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Kavram Kullanımını İnceleme	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Doğru inceleyen ve açıklayanlar	Aysel, Hatice, Aykut, Nermin, Ayhan
Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar	Nazlı, Ayfer, Büşra, İbrahim, Hüseyin
Doğru inceleyen ve açıklamayanlar	...
Yanlış inceleyen ve açıklayanlar	...

Çizelgeye göre 5 aday doğru inceleyen ve açıklayanlar, 5 aday ise doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte doğru inceleyen ve açıklamayanlar, yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Grup kavramına yönelik başkası tarafından yapılan ispatın değerlendirilmesi etkinliğinde yer alan ispatta öğretmen adaylarının grup tanımında yer alan kavramların kullanımını incelemeleri gerekmektedir. İspatta doğrudan ispat yöntemi kullanıldığı için başlangıçta $a \in G$ için; $a * a = a$ olsun kabulü yapılmıştır. Yapılan ispatta birleşme, ters ve birim eleman özellikleri doğru bir şekilde kullanılmıştır. Bununla birlikte teorem ifadesi gereği birim ve ters elemanlar sadece sol taraftan incelenmiştir. İspatta kullanılan kavramları doğru inceleyen ve açıklayan adaylar ispatta grup olma özelliklerinin kullanıldığının farkındadırlar. Adaylar ispat içerisinde yer alan kabul ve ilave edilen elemanların grup özelliklerinden yararlanılarak yapılabileceğini ifade etmişlerdir. Adaylar ispatta kullanılan birleşme, ters ve birim eleman kavramlarının kullanımlarını incelemiş ve bir hata yapılmadığını belirtmişlerdir.

Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde bulunan adaylardan Hüseyin, Büşra ve Ayfer grupta değişme özelliğinden söz edilmediği için ispatta soldan ilave edilen ters elemanın sağdan da incelenmesi gerektiğine vurgu yapmışlardır. Adaylar teorem ifadesi ile ispatı arasındaki ilişkiyi kuramadıklarından ispatta eksiklik olduğunu düşünmüşlerdir. Bu kategoride yer alan Nazlı ve İbrahim ise grup olma

özelliklerinin doğru kullanıldığını ifade etmişlerdir. Bu adaylar özelliklerin neden kullanıldığı ile ilgili açıklamaları tam olarak yapmamışlardır. Sadece özelliklerin kullanımlarında bir hata olup olmadığını kontrol etmişlerdir.

İspatın kurgusunu inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.63 de verilmiştir.

Çizelge 4.63.

Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Kurgusunu İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Nermin, Aykut, Hatice, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklayanlar</i>	Hüseyin, İbrahim, Büşra, Ayfer, Nazlı
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar ve 5 aday ise belirsiz/yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar ve yanlış açıklayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatı tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

İspat: $a \in G$ için;

1. $a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

2. Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda, ✓
 $a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$

3. Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak; ✓
 $(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$

4. Yazalım. Bu da, " " "
 $e * a = e$
 Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

~~A. İspat eksiktir. Çünkü~~ C. İspat yanlıştır. Çünkü
 B. İspat doğrudur. Çünkü D. Bir fikrim yok

4. adımda $a^{-1} * a = e$ olduğunu ters eleman tanımını kullanarak göstermiştir fakat bunu belirtmemiştir.

Yine 3. adımda $e * a = a$ ya eşit olduğunu etkisiz eleman tanımında yazdığını belirtmemiştir.

Şekil 4.71. Aykut'un Grup Kavramı İle İlgili İspatı Değerlendirmesi

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Aykut: Şimdi teorem ifadesinde ise budur ifadesi geçiyor. Burada sonuç itibariyle tek yönlü bir ispat yapılması gerekecek. Yani birinci kısmını kabul edecek ve ikinci kısmını gösterecek... Eğer bunun bu olması için gerek ve yeter şart deseydi bir de tersini göstermesi gerekecekti... Sonuç itibariyle doğru bir başlangıç yapmış. İlk kısmı kabul ederek işe başlamış.

Mülakatçı: İspatın devamında yani işlem adımlarında bir hata veya yanlışlık yapılmış mı?

Aykut: [İspatın devamını okuyor] ... Burada G bir grup olarak verildiği için her eleman için ters eleman vardır. Dolayısıyla ispat içerisinde geçen ters eleman işleme dahil edilebilir. İspatta olduğu gibi soldan ters elemanı işleme dahil edebilir. Tabi yine birleşme özelliğinin var olduğunu biliyoruz ve 2. adımda da bunu kullanıyoruz. Birleşme özelliğini de yine doğru bir şekilde kullanmış. Devamında şöyle denilebilirdi, ters eleman tanımından parantez içerisi e ye eşittir denilebilirdi. Çünkü bundan önceki tüm adımları belirtmiş. Burada sanki biraz eksiklik var gibi ama... Ters eleman tanımından da sonuca ulaşılmış. Aslında ispat doğrudur fakat son adımda kullandığı özelliği belirtmemiştir. Ben bu adımda ters eleman özelliğinin kullanılmasına vurgu yapılmayışını bir eksiklik olarak görüyorum.

İspatın kurgusunu tam/ikna edici şekilde inceleyenler kategorisinde yer alan öğretmen adayları ispatta kullanılan grup olma şartlarının neden kullanıldığını ve kullanımlarını incelemişlerdir. Adaylar ispatta kullanılan birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerini irdelemişlerdir. Bu kategorideki adaylar kullanılan özelliklerde bir hata olmadığını belirtmişler ve açıklamışlardır. Bununla birlikte ispatta birim eleman ve ters eleman özelliklerinin kullanıldığına ve kullanılan özelliklerin sebeplerinin yazılmadığına vurgu yapmışlardır.

İspatı belirsiz/yetersiz şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Nazlı: Doğru başlamış...

Mülakatçı: Neler yapmış?

Nazlı: Teoremden verilenleri kullanmış... $a * a = a$ olsun demiş ve bu ifade zaten teorem içerisinde var olan bir ifade...

Mülakatçı: Güzel... İspatın basamaklarında bir hata yapılmış mı?

Nazlı: Görebildiğim bir hata yok...

Mülakatçı: Neler yapılmış basamaklarda bunlar hakkında bilgi verebilir misiniz?

Nazlı: Birleşme özelliğini kullanmış... Birim elemanı kullanmış...

Mülakatçı: Doğru kullanılmış mı?

Nazlı: [Düşünüyor]... $a^{-1} * a = e$ olduğunu söylemiş ama burada ters eleman mı yoksa birim eleman özelliğinden dolayı mı yazıyor bunları söylememiş...

Mülakatçı: Burada ilk başta birleşme özelliği kullanılmış ve devamında da $(a^{-1} * a = e)$ demiş... Bunu söyleyebilir mi?

Nazlı: Burada a ile a^{-1} işleme girdiği için yapabilir. Burada bence ispat yanlıştır.

Mülakatçı: Neden?

Nazlı: Çünkü $a^{-1} * a$ işleminin sonucunu e ye eşitlemiş sonra da e ile a yı işleme sokup e ye eşitlemiş. Bu durumda e ve a ikisi de aynı anda birim eleman oluyor.

Mülakatçı: Peki teorem ifadesi ne idi ve neyi ispatlamamız isteniyordu?

Nazlı: a nın birim eleman olduğunu göstermemiz isteniyordu... Yani $a = e$ olduğunu... Şimdi $a^{-1} * a = e$ demiş ve $e * a = e$ eşitliğine göre a nın birim eleman olması gerekir. Aynı zamanda e de birim eleman... Ondan sonra $a = e$ olmuş...

Mülakatçı: Teorem ifadesine tekrar bakar mısınız?

Nazlı: Hipotezimiz $a * a = a$ ve bu eşitlik sağlanırsa $a = e$ dir diyor. Bunu göstermek için yapılan işlemler sonucunda da $a = e$ olarak bulunmuş. Bu şekilde düşündüğümde de yanlışlık yok gibi...

Belirsiz/yetersiz açıklayarak inceleyenler kategorisinde yer alan adaylar, ispatta kullanılan grup olma şartlarını incelemişler fakat bu özelliklerin neden kullanılması gerektiğini tam olarak açıklamamışlardır. Bu kategorideki adaylardan Hüseyin, Büşra ve Ayfer, ispatta ters eleman ve birim eleman kullanımları üzerine odaklanmışlar ve teorem ifadesinden kaynaklanan kullanımı yanlış yorumlamışlardır. Diğer adaylar ise ispatta kullanılan özelliklerin sadece işlemsel hata içermemesine dikkat etmişler ve kullanıma sebeplerini tam olarak açıklamamışlardır.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.64 de verilmiştir.

Çizelge 4.64.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar</i>	Hatice, Aysel
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Aykut
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar, 1 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar ve 7 aday da yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve tam olarak açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?

Hatice: Yani kabul edelim deyip doğrudan ispat gibi bir şey oluyor.

Mülakatçı: Doğrudan ispatta ne yapıyorduk?

Hatice: Hatırladığım kadarıyla $p \Rightarrow q$ yu gösterirken yani p doğru ise r doğrudur, r_1 doğru ise r_2 doğru... Sonunda da q doğrudur şeklinde göstermeye çalışıyorduk. Buradaki aradaki basamaklarda yine p ise q ispatındaki adımları izlemiş gibi görünüyor. O yüzden burada doğrudan ispat yapıldığını düşünüyorum.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta doğrudan ispat yönteminin kullanıldığını farkındadırlar. Bu adaylar ispatta neden doğrudan ispat kullanıldığını ve doğrudan ispat yönteminin nasıl uygulanması gerektiğini açıklamışlardır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Aykut: *Burada da yine doğrudan ispat yapılmıştır. Eldeki veriler kullanılarak tek taraflı ispat yapılmıştır.*

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer alan Aykut, ispatta doğrudan ispat yöntemi kullanıldığını belirlemiş fakat doğrudan ispat yönteminin nasıl uygulandığını tam olarak açıklamamıştır.

İspatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

İbrahim: *Burada da az önce benim ispatı yaptığım yöntem kullanılmış... Ama isim olarak... Adım adım ispat mı acaba... Adım adım ispattır bence eğer öyle bir ispat yöntemi varsa...*

Hüseyin: *Açıkçası bir fikrim yok hocam...*

Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorisinde yer alan Nermin ve Ayfer, ispatın yöntemini yanlış belirlemişlerdir. Bu adaylardan Ayfer, ispatın dolaylı ispata göre, Nermin ise olmayana ergi yöntemine göre yapıldığını ifade etmişlerdir. Hüseyin ise bu konu hakkında hiçbir fikrinin olmadığını belirtmiştir. Diğer adaylar ise yapılan ispatta özel bir ispat yöntemi kullanılmadığına karar vermişlerdir.

Cevabını savunma kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.65 de verilmiştir.

Çizelge 4.65.
Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Cevabını Savunma	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar	Nermin, Aykut, Ayhan
Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar	Hatice, Aysel, Nazlı, İbrahim
Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar	Büşra, Ayfer, Hüseyin

Çizelgeye göre 3 aday cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 4 aday cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar ve 3 aday da cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorilerinde yer almaktadır.

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayhan: *Çünkü ispata doğru başlamış. Adımları tek tek kullanarak ispatı yapmış. Grup olma özelliklerini kullanmış. Bunları kullanırken de herhangi bir hata yapmamış. Dolayısıyla sonuca doğru ulaşmış.*

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatın değerlendirilmesi sonucu karar verdikleri cevabın sebeplerini açıklamışlardır. Buna göre ispatın eksik veya doğru olduğuna karar veren adaylar neden bu cevapları verdiklerinin açıklamasını yapmışlardır.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hatice: *Yok düşünmüyorum... Yani onu kabul ettik, yani onu kabul etme değil de $a * a = a$ olsun denilerek başlanıp devamında da, kullanılan birim eleman ve ters eleman özelliklerinin belirtilmesiyle daha açık net bir ispat olurdu.*

Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta kullanılan özelliklerin ifade edilip edilmemiş olmasına odaklanmışlardır. Bu adaylar verdikleri kararların sebeplerini tam olarak açıklamamışlardır.

Cevabını yanlış açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: *Çünkü birim eleman özelliği çift yönlü olmayı gerektirir. Yani $e * a = a * e = e$ olmalıdır. Grupta değişme özelliğinin olduğunun belirtilmesi gerekirdi.*

Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta birim eleman ve ters eleman kullanımlarına odaklanmışlardır. Bu adaylar teorem ifadesinde verilen grubun değişme özelliğine vurgu yapılmadığı için birim eleman tanımı gereği hem sağdan hem de soldan inceleme yapılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

4.5.3. Alt Grup Kavramı

Kavram kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.66 da verilmiştir.

Çizelge 4.66.

Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kavram Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru inceleyen ve açıklayanlar</i>	Ayhan, Aykut, Hatice
<i>Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Hüseyin, Nermin, Büşra, Ayfer
<i>Doğru inceleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yanlış inceleyen ve açıklayanlar</i>	İbrahim, Aysel, Nazlı

Çizelgeye göre 3 aday doğru inceleyen ve açıklayanlar, 4 aday doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar ve 3 aday ise yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte doğru inceleyen ve açıklamayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Alt grup kavramına yönelik ispatın doğruluğunu değerlendirmek için grup olma ve gerek yeter şart ispatının özelliklerinin incelenmesi gerekmektedir. Doğru inceleyen

ve açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar verilen ispatın sadece yeter şart kısmına ait olduğunu fark etmişlerdir. Bu yüzden ispatta gerek şart kısmının eksik olduğunu belirtmişlerdir. Bununla birlikte yeter şart ispatında grup şartlarından ters eleman, birim eleman ve kapalılık özelliklerinin incelendiğini ifade etmişlerdir. Adaylar ispatta grup özelliklerinden birleşme özelliğinin incelenmediğini görmüşlerdir. Ayhan, birleşme özelliğinin ispat içerisinde ifade edilmemiş olması üzerinde çok durmamıştır. Ayhan, G bir grup olduğu için gruptaki her elemanın birleşme özelliğine sahip olduğunu belirtmiş ve H kümesinin elemanlarının da birleşmeli olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu yüzden birleşme özelliğinin incelenmemiş olmasının ispatın geçerli olmasını etkilemeyeceğini belirtmiştir. Aykut ve Hatice’de benzer düşünceleri savunmuşlardır. Adaylar H kümesindeki elemanların birleşmeli olduğunun açık olmasına rağmen ispatta elemanların birleşme özelliğini neden sağladığının vurgulanması gerektiğini ifade etmişlerdir. Adaylar bu düşüncelerinden hareketle yapılan ispatın eksik olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Kavram kullanımını doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde bulunan adaylardan Hüseyin ve Ayfer, ispatta gerek yeter şartın incelenmesi gerektiğinin farkındadırlar. Adaylar ispatta grup özelliklerinden ters eleman, birim eleman ve kapalılık özelliklerinin incelendiğini vurgulamışlardır. Fakat ispatta birleşme özelliğinin incelenmediğini fark etmemişlerdir. Bu yüzden ispattaki eksikliğin sadece gerek şart ispatı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bununla birlikte Nermin ve Büşra ise ispatın gerek ve yeter şart şeklinde yapılması gerektiğini fark etmemişlerdir. Adaylar sadece verilen ispata göre düşünmüşler ve ispatta grup şartlarından birleşme özelliğinin gösterilmemiş olmasına odaklanmışlardır. Adaylar H kümesinde birleşme özelliğinin sağlandığının hissedildiğini fakat bu özelliğin de gösterilmesi gerektiğini savunmuşlardır. Bu yüzden adaylar ispattaki eksikliğin sadece birleşme özelliğinin gösterilmemesinden kaynaklandığını ifade etmişlerdir.

Kavram kullanımını yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatın gerek ve yeter şart şeklinde yapılması gerektiğini fark etmemişlerdir. Sadece İbrahim, ispatın bu şekilde yapılması gerektiğini belirtmiştir. İbrahim, değerlendirmesi gereken ispatta sadece yeter şart kısmının bulunmasına rağmen ispatı ikiye ayırmıştır. Verilen ispat içerisinde hem gerek hem de yeter şart kısımlarının ispatlandığını belirtmiştir. Ayrıca gerek şart kısmının doğru incelendiğini, yeter şart

kısımında ise kapalılık özelliğinin yanında birim ve ters eleman özelliklerinin daha ayrıntılı incelenmesi gerektiğini belirtmiştir. Aysel ve Nazlı ise ispatta sadece birleşme özelliğinin incelenmediğini vurgulamışlardır. Aysel, H alt küme G ve G bir grup olduğundan H kümesindeki elemanların birleşme özelliğini sağladığının aşıkardığını belirtmiş ve ispatın doğru olduğu sonucuna ulaşmıştır. Nazlı ise ispatta birleşme özelliğine vurgu yapılması gerektiğini ifade etmiş ve ispatın eksik olduğu sonucuna ulaşmıştır.

İspatın kurgusunu inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.67 de verilmiştir.

Çizelge 4.67.

Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Kurgusunu İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Aykut, Hatice
<i>Belirsiz/yetersiz açıklayanlar</i>	Hüseyin, Ayfer
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Büşra, Aysel, Nazlı

Çizelgeye göre 3 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 2 aday belirsiz/yetersiz açıklayanlar ve 5 aday ise yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatı tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Hatice: Şimdi gerek ve yeter şart ispatı olduğu için ilk olarak gerek şartı ispatlaması gerekecek... Şimdi burada ilk olarak yeter şart ispatlanmış yani $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğu gösterilmek istenmiş. Dolayısıyla burada grup şartlarını sağlamaya çalışmış. [İspatı inceliyor] ... Bu teoreme eş olan bir teorem daha vardı ve o teoremden iki madde halinde idi. O teoremden yer alan şartlar sağlatılmaya çalışılmış.

Mülakatçı: Burada araştırılan şartlar nelerdir? Neden?

Hatice: İspat içerisinde ters elemanı kullanmış. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız diyerek kapalılığı kullanmış sanırım. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Şimdi ters eleman ve kapalılık özellikleri kullanıldı. Dolayısıyla hatırladığım teoremin şartları gösterilmek isteniyor. Ama benim derslerden hatırladığım kadarıyla bu teoremi ispatlarken önce verilen diğer teoremi kullanıyorduk. Burada da bence öyle yapılmış. [Tekrar baştan sona ispatı inceliyor] ... İspat eksik diye düşünüyorum. Şimdi burada $a, b \in H$ olduğunu kabul edip alt grup olduğunu gösterdik ama H kümesinin alt grup olduğunu kabul edip $a * b^{-1}$ ye ulaşmamız gerekiyordu. Yani gerek ve yeter şart ispatının sadece tek tarafı yapılmış. O zaman ispat eksiktir. Bir de ispatın en son adımında yine kapalılık gösterilmiş. İspat eksiktir ama eksik olan kısmın doğruluğu konusunda da emin olamıyorum. Yani H kümesinden iki tane eleman alındığında ters eleman, birim eleman ve kapalılık özelliklerini göstermiş. Bir de birleşme özelliğini incelemesi gerekiyordu. Birleşme özelliği incelenmemiş. Çünkü üç eleman hiç seçilmemiş. O zaman şöyle diyebiliriz. İspat eksiktir. Birinci eksiklik gerek yeter şart ispatında sadece tek taraf ispatlanmıştır. Sadece yeter şart ispatlanmış ve gerek şart ispatlanmamıştır. İkinci eksiklik ise yeter şart ispatında da birleşme özelliğini incelenmemiştir.

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta kullanılan özelliklerin sebeplerini tam/ikna edici şekilde açıklamışlardır. Adaylar ispatın hem iki aşamada yapılmasının hem de gerek ve yeter şartın nasıl yapılması gerektiğinin farkındadırlar. Adaylar ispatta kullanılan özelliklerin kullanımlarını ve nedenlerini doğru açıklamışlardır.

İspatı belirsiz/yetersiz şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Ayfer: [Teorem ifadesini ve ispatı altını çizerek inceliyor] ... İlk önce H alt grup G olsun deyip $a * b^{-1} \in H$ olduğunu göstermem gerekir. Ama burada tam tersini yapmış. Burada $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun demiş. Tamam, bu şekilde de yapılabilir ama bu ispatın ikinci kısmı olur.

Mülakatçı: Bu ispat iki kısımda mı yapılmalı?

Ayfer: Evet... Gerek ve yeter şart içerdiğine göre iki kısımdan oluşmalıdır.

Mülakatçı: Peki size göre burada yapılan ispatın hangi kısmıdır?

Ayfer: Burada yeter şart ispatlanmıştır... [İspatı tekrar inceliyor] ...

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Ayfer: Evet... Yeter şart için doğru bir başlangıç yapılmış çünkü $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğunu kabul etmiş. Şimdi bu bilgiye dayanarak H kümesinin bir grup olduğunu göstermeye çalışıyor. Burada özel olarak $a = b$ alabilir ve bunun sonucunda da etkisiz elemanı bulur. Buraya kadar doğrudur. Devamında ters elemanın varlığını G nin bir grup olmasından faydalanarak buluyor. Şimdiye kadar ters eleman ve birim elemanı bulmuş. Devamında kapalılık özelliğini de göstermiş. Dolayısıyla yeter şart kısmı doğru yapılmıştır. Şimdi burada gerek şart eksik ama ispatın tamamı için eksik diyemem. İspat yanlıştır bence...

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta gerek ve yeter şartın ispatlanması gerektiğini belirtmiştir. Adaylar ispatın iki aşamada yapılması gerektiğini ve sadece yeter şart kısmının ispatlandığını ifade etmişlerdir. Yeter şart ispatı için birim eleman, ters eleman ve kapalılık özelliklerinin sağlanmasını yeterli görmüşlerdir. İspatta birleşme özelliğinin incelenmemiş olduğunu fark etmemiş ve yeter şart ispatının doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Ayfer, ispatın gerek şart kısmının yapılmamış olmasından dolayı ispatın yanlış, Hüseyin ise aynı sebepten dolayı ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir.

İspatı yanlış açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Büşra: Ulaşmak istediği sonucu başta kabul etmiş. H kümesinden a, b gibi iki eleman almış ve $a * b^{-1} \in H$ olsun demiş. Devamında özel olarak $a = b$ almış.

Mülakatçı: Yapabilir mi?

Büşra: G bir grup olduğundan yapabilir. Çünkü a ve b H kümesinin elemanı olduğu için tek eleman seçmiş gibi olur. Dolayısıyla bu özel seçim yapılabilir. Devamında $a * a^{-1} = e$ olur demiş, burası da doğru çünkü bir elemanla tersi işleme girdiğinde birim elemanı verir. Çıkan sonuç yine baştaki kabulünden dolayı H kümesi içerisinde. Dolayısıyla H kümesi içerisinde birim elemanın varlığı gösterilmiş olur. Sonra e ve b H kümesinde olduğundan dolayı hipotezi kullanarak $e * b^{-1} = b^{-1}$ olmuş. Burada da ters elemanı göstermiş oldu. İki şartı sağlamış oldu. Devamında $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Yani ters elemanın sağlandığını gösterdi burada... Ayrıca G bir

grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Burada da kapalılığın sağlandığını da göstermiş. Kaldı geriye birleşme özelliği... Birleşme özelliğinin sağlandığını göstermemiş. Ama H kümesinin alt grup olduğunu göstermek için kapalılık, birleşme, birim ve ters eleman özelliklerinin hepsini göstermesi gerekiyor. Bu ispatta ilk olarak ters elemanı, sonra etkisiz elemanı ve son olarak da kapalılık özelliklerini göstermiş. Ama birleşme özelliğini göstermemiş. Bence bu bir eksikliktir.

Mülakatçı: Peki bunun dışında bir eksiklik var mı?

Büşra: [İspatı tekrar inceliyor] ... Yok hocam bunun dışında bir eksiklik göremiyorum. Sadece birleşme özelliği eksiktir. [Kağıttaki şekli çiziyor] ... Burada aslında biraz önce çizdiğim şekilde de olduğu gibi düşünürsek mesela bir G grubu ve H altkümesi alalım. Burada yer alan G grubu her eleman için birleşme özelliğini sağlıyorsa H da birleşme özelliğini sağlar. Çünkü H kümesinde ki her eleman zaten G nin elemanıdır. Ama ispat içerisinde ifade edilmesi de gerekiyordu. Yani ispat yanlış bir ispat değil ama bunun da ifade edilmesi gerektiğini düşünüyorum. Aslında birleşme özelliği gösterilmemiş olmasına rağmen H ın birleşmeli olduğu hissediliyor ama gösterilmesi gerekirdi.

Bu kategoride yer alan İbrahim dışındaki adaylar, ispatın gerek ve yeter şart şeklinde olması gerektiğini fark etmemişlerdir. İbrahim ise ispatın gerek ve yeter şart şeklinde olması gerektiğini fark etmiştir. Ancak sadece yeter şart kısmı verilen ispatta hem gerek hem de yeter şart ispatının yapıldığını düşünmüştür. İbrahim, kendi düşüncesine göre ispatta gerek şartın doğru olduğunu ve yeter şartta da birim ve ters eleman özelliklerine daha fazla vurgu yapılması gerektiğini ifade etmiştir. Birleşme özelliği üzerinde ise hiç durmamıştır. Diğer adaylar ise ispatta sadece birleşme özelliğinin eksik olduğunu belirtmişlerdir. Aysel, birleşme özelliğinin aşık olmasından dolayı incelenmesine gerek olmadığını belirtmiştir ve ispatın doğru olduğuna karar vermiştir. Diğer adaylar ise ispattaki eksikliğin sadece birleşme özelliğinin incelenmemesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.68 de verilmiştir.

Çizelge 4.68.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve ...</i>	
<i>sebebini tam olarak</i>	
<i>açıklayanlar</i>	
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve</i>	İbrahim, Aysel
<i>sebebini yetersiz açıklayanlar</i>	
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve</i>	Aykut, Hatice
<i>sebebini açıklamayanlar</i>	
<i>Yöntemi yanlış belirleyenler</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Ayfer, Nazlı
<i>veya belirleyemeyenler</i>	

Çizelgeye göre 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar ve 6 aday da yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

İbrahim: *Burada da yine doğrudan ispat yapılmış. Verilen hipotezlere göre sonuca gidilmiş. Elimizde var olan bilgiler kullanılmış.*

Bu kategoride yer alan öğretmen adayları verilen ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapıldığını belirlemişlerdir. Doğrudan ispat yöntemi kullanımının sebebini ise hipotezden faydalanarak var olan bilgilerden yararlanılması şeklinde açıklamışlardır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini açıklamayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Hatice: *Bu da yine doğrudan ispat herhalde... Tam hatırlamıyorum aslında ispat yöntemlerini... Yani ispat yöntemleri içerisinde tümevarım var, tümdengelim var. Onlarında ne olduğunu tam olarak hatırlayamıyorum. Tümdengelimde sanırım ikiye ayrılıyordu. Doğrudan ve dolaylı diye... Dolaylı olanlarda dörde ayrılıyordu. Yani olmayana ergi değil, çelişki de bulmamışız... Tam emin olmamakla birlikte yine doğrudan ispat diyorum.*

Bu kategoride yer alan adaylar ise ispatta doğrudan ispat yöntemi kullanıldığını belirtmişler fakat sebebini açıklamamışlardır.

İspatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Ayhan: *Hocam bu teorem ancak ve ancak şeklinde ispatlanmalıdır. Öncelikle H alt kümesini alt grup kabul edip $a * b^{-1} \in H$ olduğunu, ikinci olarak da $a, b \in H$ alıp $a * b^{-1} \in H$ olduğunu göstererek H in bir alt grup olduğunu göstermek gerekliydi. Yani ancak ve ancak ispatı yapılmalıydı. Yani burada da ancak ve ancak ya da gerek ve yeter şart ispatı yapılmaya çalışılmıştır.*

Nermin: *Hocam ben üç tane ispat yöntemi biliyorum ve burada yapılan ispat onların hiç birine uymuyor. Bu ispatın başlangıcında bir kabul var sanki biraz olmayana ergiye benziyor ama olmayana ergide bu kabulün doğru olup olmadığını araştırıyorduk ve burada öyle bir şey yapılmadığından olmayana ergi değildir. Bilmiyorum.*

Bu kategoride yer alan Ayhan dışındaki adaylar, ispatın yöntemini belirleyememişlerdir. Ayhan ise ispatta gerek ve yeter şart ispat yöntemi kullanıldığını ifade etmiştir.

Cevabını savunma kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.69 da verilmiştir.

Çizelge 4.69.
Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Cevabını Savunma	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar	Aykut, Hatice, Ayhan
Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar	Hüseyin, Ayfer
Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar	İbrahim, Nermin, Büşra, Aysel, Nazlı

Çizelgeye göre 3 aday cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 2 aday cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar ve 5 aday da cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorilerinde yer almaktadır.

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Aykut: Bu ispatta birleşme özelliğinin sağlandığını göstermesi gerekirdi. Ayrıca ispatın gerek şart kısmından hiç bahsedilmemiştir. Gerek şart kısmında H alt grup G olduğu kabul edilip $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğu gösterilmeliydi.

Bu kategoride yer alan adaylar ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir. İspattaki eksikliğin grup olma şartlarından birleşme özelliğinin incelenmemiş olması ve gerek şart ispatının yapılmamış olmasından kaynaklandığını ifade etmişlerdir.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: H alt grup G ise her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğunun gösterilmesi gerek. Yeter şart kısmı doğru ispatlanmıştır.

Bu kategorideki adaylardan Hüseyin, ispatın eksik olduğuna, Ayfer ise yanlış olduğuna karar vermişlerdir. Aslında her iki öğretmen adayı da benzer açıklamalar yapmışlar fakat cevapları farklı olmuştur. Adaylar ispattaki eksiklik veya yanlışlığın ispatta gerek şart kısmının yapılmamış olmasından kaynaklandığını ifade etmişlerdir.

Cevabını yanlış açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Aysel: *H alt küme G olduğundan H in tüm elemanları G dedir. G deki elemanlar birleşme özelliğini sağladığından H daki elemanların birleşme özelliğini sağladığı aşıkardır.*

Bu kategoride yer alan adaylardan Aysel dışındakiler, ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir. Aysel ise ispatın doğru olduğunu ifade etmiştir. Aysel, ispatta birleşme özelliğinin incelenmediğini fark etmiş ve bu özelliğin zaten aşıkardır olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte diğer adaylar da ispatta birleşme özelliğine odaklanmışlar ve gösterilmediği için ispatın eksik olduğunu belirtmişlerdir. İbrahim dışındaki adaylar ise ispatta gerek ve yeter şart kullanımı gerektiğini fark etmemişlerdir. İbrahim ise gerek ve yeter şart ispatını yanlış incelemiş ve cevabını yanlış savunmuştur.

4.5.4. Grup Homomorfizmi Kavramı

Kavram kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.70 de verilmiştir.

Çizelge 4.70.

Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kavram Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru inceleyen ve açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Aykut, Ayfer, Aysel
<i>Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	...
<i>Doğru inceleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yanlış inceleyen ve açıklayanlar</i>	İbrahim, Büşra, Hatice, Nazlı

Çizelgeye göre 6 aday doğru inceleyen ve açıklayanlar ve 4 aday ise yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar, doğru inceleyen ve açıklamayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirmeleri için grup homomorfizmi kullanımına ve bir grupta birim elemanın bir tek olması gerektiğine dikkat etmeleri gerekmektedir. Kavram kullanımını doğru inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatta homomorfizm tanımının yanlış kullanıldığını fark etmişlerdir. Adaylar ispatta homomorfizm tanımının $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ şeklinde kullanımının yanlış olduğunu ve bu kullanımın aslında $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G)$ şeklinde olması gerektiğini belirtmişlerdir. Dolayısıyla buradan $\varphi(e_G) = e_H$ eşitliği ve H grubunda birden fazla birim eleman olamayacağını ifade eden teorem ifadesi yardımıyla ispatın sonuçlandırılması gerektiğini belirtmişlerdir.

Kavram kullanımını yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alan Hatice dışındaki adaylar ise homomorfizm tanımının $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ şeklinde kullanılmasının doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Adaylar bu kullanımın homomorfizm tanımı gereği yazılabileceğini belirtmişlerdir. Bununla birlikte adaylar ispatta yer alan bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir ifadesi ile $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliğindeki üç farklı birim elemanın aslında eşit olduğunu da gösterildiğine karar vermişlerdir. Hatice ise ispatta kullanılan $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ ifadesinin yanlış olduğunu düşünmüş fakat birim elemanın tekliğini ifade eden teoremin kullanılması ile $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ şeklinde oluşan yanlışlığın giderildiğini ifade etmiştir.

İspatın kurgusunu inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.71 de verilmiştir.

Çizelge 4.71.

Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Kurgusunu İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, Nermin, Aykut, Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklayanlar</i>	Hatice, Ayfer
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	İbrahim, Büşra, Nazlı

Çizelgeye göre 5 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 2 aday belirsiz/yetersiz açıklayanlar ve 3 aday ise yanlış açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatı tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: *[Teorem ifadesini ve ispatı altını çizerek inceliyor] ... Hocam ben bu ispatı anlayamadım ya...*

Mülakatçı: *Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?*

Hüseyin: *İspatın başlangıcında bir hata yok doğru... G den bir eleman alınmış ve birim eleman özelliği kullanılmış buraya kadar bir hata yok. Yani yazılan eşitlikleri kontrol edersek;*

$$\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \dots (1)$$

$$\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) \dots (2)$$

eşitliklerinde homomorfizm tanımından sonuç yine $\varphi(a)$ olur. Yani homomorfizm tanımına göre (1) ve (2) ifadeleri benim yazdığım gibi olabilir. Şimdi hocam H kümesini de yine bir grup olarak alabiliriz. H kümesi de yine bir grup olduğundan birim elemanı e_H olarak alabiliriz. Şimdi hocam (1) eşitliğimiz $\varphi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G)$ ise eşitliğin ikinci kısmı H grubunda tanımlı olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ olmalıdır. Yani $\varphi(e_G)$ elemanı H grubunun birim elemanı olur. Yani H grubunun birim elemanı e_H olduğundan bu iki eleman eşittir. Benzer şekilde (2) eşitliği de $\varphi(a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a)$ ise $\varphi(e_G) = e_H$ olur. Yapılan ispata bakıldığında ise $\varphi(e_G)$ nin direk olarak H grubunun birim elemanı olduğu yazılmıştır. Yani burada H ın birim elemanı olarak e_H alınmalıydı. Yani görüntüdeki birim eleman yanlış yazılmıştır. İkincide de aynı şekilde... Devamında da (1) ve (2) eşitliklerinden $\varphi(e_G)$ nin H birim elemanı olduğunu söylemesi gerekirdi. Burada $\varphi(e_H)$ olarak yanlış alınmıştır. Devamında da yine bir grubun birim elemanının tek olmasından dolayı $\varphi(e_G) = e_H$ sonucuna ulaşılabilir. Yani birim elemanın tek olduğu H bir grup olduğundan ayrıca gösterilmesine de gerek yoktur. Yani bana göre ispat yanlıştır.

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta kullanılan özelliklerin sebeplerini tam/ikna edici şekilde açıklamışlardır. Adaylar ispatta homomorfizm tanımının yanlış kullanıldığını ve neden yanlış olduğunu açıklamışlardır. Bununla birlikte homomorfizm

altında birim elemanın görüntüsünün nasıl oluşturulması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca ispatta kullanılan birim elemanın tekliği ile ilgili teoreme atıfta bulunarak $\varphi(e_G) = e_H$ eşitliğini kullanmış ve H grubunun birim elemanını e_H olarak belirlemişlerdir.

İspatı belirsiz/yetersiz şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

[Teorem ifadesini ve ispatı inceliyor] ...

Mülakatçı: Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?

Hatice: Evet diyebilirim... Şimdi burada G nin birim elemanı ile grup homomorfizmi yardımıyla H nin birim elemanı bulunuyor. Yani grup homomorfizmi tanımı kullanılarak $\varphi(e_H)$ bulunabilir miydi?... *[Düşünüyor]*... Tamam iki tane eleman alıyoruz ve grup homomorfizminin tanımını kullanıyoruz ve sonuçta da $\varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ bulunmuş... Yani $\varphi(e_G) = \varphi(e_H)$ olmuş... Sanki burada bir hata var gibi çünkü $\varphi(e_G) = e_H$ yazması gerekirdi gibi düşünüyorum... Aynı şeyi (2) içinde yapmış... Bana göre bu kısımlar yanlış gibi...

Mülakatçı: Güzel... Peki size göre ispat nasıl olmalıydı? Neden?

Hatice: Şöyle olabilirdi; $\forall a \in G$ için; $\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G)$ yazabiliriz. Çünkü φ bir grup homomorfizmi ve G bir grup olduğundan birim elemanı vardır. Bu kalsın... Bir de grubun değişme özelliğinin olup olmadığını bilmediğimiz için bir de diğer yönlü yapalım. $\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a)$ olur. Dolayısıyla bu iki eşitliği kullanarak $\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(e_G)\varphi(a)$ gelir. Dolayısıyla buradan $\varphi(e_G)$ elemanının H nin birim elemanı olduğu görülür. Yani $\varphi(e_G) = e_H$ olduğu görülür. Çünkü dönüşüm altında çıkan elemanlar H in elemanıdır. Dolayısıyla $\varphi(e_G)$ nin H in birim elemanı olması gerekir. Dolayısıyla ispat yanlıştır.

Mülakatçı: Peki ispatın devamı için ne söyleyebilirsiniz?

Hatice: İspatın devamında aslında benim söylediklerimi yazmış ve sonucu e_H elemanına eşitlemiş. İlaveten de birim elemanın tekliğini de göstermiş. Bu şekilde bakınca da ispat doğru görünüyor. Ben ispatın devamına bakmadan karar verdim ama yaptığı hata aşağıdaki $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliği sayesinde düzeltilmiştir. Ayrıca da zaten birim elemanın tek olduğunu da gösterdiği için bu eşitlikte birden fazla birim elemanın görünmesini de önlemiş. Bu haliyle bütün olarak baktığımızda ispat doğrudur.

Bu kategoride yer alan adaylar ispatta kullanılan homomorfizm tanımının yanlış kullandığını fark etmişler ve nasıl kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ancak Hatice, ispatın devamında $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliğinde yalnız bir birim eleman bulunduğunu göstermek için kullanılan teorem ifadesi ile bu yanlışlığın giderildiğini düşünmüştür. Hatice, birim elemanın tekliğinin ifade edilmesi ile yapılan yanlışlığın giderildiğine karar vermiş ve ispatın doğru olduğunu ifade etmiştir. Ayfer ise sadece homomorfizm tanımına odaklanmış ve ispatın devamını tam olarak incelememiştir. Ayfer, homomorfizm kavramının yanlış kullanılmasından dolayı ispatın yanlış olduğuna karar vermiştir.

İspatı yanlış açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Büşra: *[Teorem ifadesini ve ispatı altını çizerek inceliyor]... Hocam ispat içerisinde sadece $\varphi(e_G) = \varphi(e_H)$ yazılmasını anlayamadım ama... Sanırım bunu da grup homomorfizmine bağlıyor... Eğer bunu grup homomorfizmi ile açıklamışsa ki öyle yapmış sanırım... İspat doğru gibi... Çünkü devamında da $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğunu birim eleman varsa teoremini kullanarak ispatlıyor. Sonuç olarak da diğer iki birim elemanı eleyerek e_H olarak buluyor. Dolayısıyla ispatta bir eksiklik yok ve ispat doğrudur.*

Mülakatçı: *Size göre ispata doğru başlanmış mı? Neden?*

Büşra: *İspatta G den alınan bir eleman G nin birim elemanı çarpılarak başlanmış. Bunu yapabilir çünkü birim elemanla bir eleman işleme girdiğinde sonuç değişmez. Tabi φ bir grup homomorfizmi olduğundan işleme giren elemanlar ayrı ayrı yazılabilir. Bunu yaptığında eşitliğin ikinci kısmında yer alan elemanlar artık H kümesinin elemanlarıdır. Dolayısıyla sonucun yine $\varphi(a)$ olabilmesi için H kümesi üzerinde $\varphi(a) \cdot \varphi(e_H)$ yazılmalı ki sonuç değişmesin. Aynı şeyi birim elemanın soldan işleme alınması için de yapmış. Çünkü değişme özelliğinin olup olmadığını bilmiyoruz. Sonrasında da H kümesine ait üç tane birim elemana ulaşılmıştır. Bu üç birim elemanı da bir grupta yalnız tek birim eleman bulunur teoremi gereğince de tek birim elemana indirgeyebilmiştir. Dolayısıyla da H in birim elemanı olan e_H elemanına ulaşılmıştır. İspatta da gerek yeter şart olmadığından bu kadarı yeterlidir. Dolayısıyla doğru bir ispattır.*

Bu kategoride yer alan adaylar ispattaki kavram kullanımlarının ve ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir. Adaylar homomorfizm tanımının doğru kullanıldığını ifade etmişler ve ispatı sonuçlandırmak için $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliğini kullanarak H kümesindeki birim elemanın bir tek olduğunun gösterildiğini belirtmişlerdir. Adaylar homomorfizmin tanım ve görüntü kümelerini tam olarak algılayamadıkları için $\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ ifadesinin doğru olduğuna karar vermişlerdir.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.72 de verilmiştir.

Çizelge 4.72.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini tam olarak açıklayanlar</i>	...
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayanlar</i>	Ayhan, İbrahim, Aykut
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini açıklamayanlar</i>	Hüseyin, Nermin, Hatice, Ayfer
<i>Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler</i>	Büşra, Aysel, Nazlı

Çizelgeye göre 3 aday yöntemi doğru belirleyen ve yetersiz açıklayanlar, 4 aday yöntemi doğru belirleyen ve açıklamayanlar ve 3 aday da yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte yöntemi doğru belirleyen ve tam olarak açıklayanlar kategorisinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?

Ayhan: *Bu ispat doğrudan yapılmıştır. Çünkü doğru olduğu zaten bilinen ifadeler kullanılarak sonuca ulaşılmıştır.*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapıldığını belirlemişlerdir. Adaylar ispatta doğrudan ispat yöntemi kullanılmasını ispatın bilinen ifadelerden faydalanılarak yapılmasına bağlamışlardır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini açıklamayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Hüseyin: *Burada da yine verilenler bellidir. O yüzden yine doğrudan ispat yapılmıştır.*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapıldığını belirlemişlerdir. Ancak adaylar ispatta neden doğrudan ispat kullanıldığını ifade etmemişlerdir.

İspatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Nazlı: *[Düşünüyor]... Çelişki bulma olabilir. Çünkü birden fazla birim eleman olduğunu görüyor ve sonuçta da birim elemanın tek olduğunu göstermiş.*

Büşra: *[Düşünüyor] ... Yani hocam bu ispatta da özel bir yöntem yok... Homomorfizmin tanımını ve özelliklerini kullanarak ispat edilmiş ve yine farklı bir teoremden yararlanılmış... Ve bir kabul var... Bence bu ispatta da özel bir yöntem kullanılmamıştır.*

Bu kategoride bulunan adaylardan Nazlı, ispatın yöntemini çelişki bulma şeklinde yanlış olarak belirlemiştir. Nazlı, ispatta birden fazla birim elemanın olduğunu ve sonuçta da tek bir birim elemana ulaşıldığı için çelişki bulma yöntemi kullanıldığına karar vermiştir. Büşra ve Aysel ise ispatta hangi yöntemin kullanıldığını belirleyememişlerdir. Büşra, ispatta özel bir ispat yöntemi kullanılmadığını, Aysel ise ispatta hangi yöntemin kullanıldığından emin olmadığını ifade etmişlerdir.

Cevabını savunma kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.73 de verilmiştir.

Çizelge 4.73.
Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması

Cevabını Savunma	
Kategoriler	Öğretmen Adayları
Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar	Ayhan, Hüseyin, Aykut
Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar	Nermin, Ayfer, Aysel
Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar	İbrahim, Büşra, Hatice, Nazlı

Çizelgeye göre 3 aday cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar, 3 aday cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar ve 4 aday da cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorilerinde yer almaktadır.

Cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ayhan: $\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G)$ şeklinde yazılmalıdır. Çünkü φ bir homomorfizmdir. Benzer şekilde (2) eşitliği de $\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a)$ şeklinde olmalıdır. H bir grup olduğundan H in birim elemanı vardır ve bu elemanı e_H ile gösterelim. Buradan $\varphi(e_G) = e_H$ eşittir. Çünkü H grubundaki işleme göre $\varphi(e_G)$ birim yani etkisiz elemandır.

Bu kategoride bulunan adaylar ispatta yapılan hatanın grup homomorfizmi tanımından kaynaklandığını belirtmişlerdir. Adaylar ispatta kullanılan $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ dönüşüm ifadesinin yanlış olduğunu fark etmişlerdir. Bu kullanım yerine $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G)$ ifadesinin kullanılarak $\varphi(e_G) = e_H$ eşitliğinin elde edilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Aysel: İspat yanlıştır. Çünkü $\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a)\varphi(e_G)$ ise $\varphi(e_G) = e_H$ olmalıdır.

Bu kategoride bulunan adaylar ispatta grup homomorfizmi tanımının yanlış kullanıldığını ifade etmişlerdir. Ancak ispatta kullanılan (1) ve (2) adımlarından sadece

bir tanesi üzerine odaklanmışlardır. Aslında adaylar ispattaki hatayı belirlemişler fakat tam olarak ifade etmemişlerdir. Adaylar ispattaki bu hatanın ispatı yanlış yapacağına karar vermişlerdir.

Cevabını yanlış açıklayan iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hatice: *Çünkü birim eleman özelliği kullanılarak $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu gösterilmiş.*

Büşra: *Homomorfizm doğru kullanılmış ve doğru adımlarla sonuca gidilmiştir.*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir. Sadece Hatice, grup homomorfizmi tanımının ispatta yanlış kullanıldığını belirtmiştir. Hatice dışındaki adaylar ise ispatta grup homomorfizmi tanımının doğru kullanıldığına karar vermişlerdir. Bu adaylar gruplar arasında tanımlanan dönüşümde hangi grup üzerinde çalışıldığına tam olarak karar verememişlerdir. Adaylar tanım ve görüntü kümelerinin hangileri olduğunu tam olarak anlayamamışlardır. Bu yüzden de görüntü kümesinde yer alması gereken elemanların hangileri olduğunu belirleyememişlerdir. Bu ayırımı yapan Hatice ise $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ ifadesindeki elemanların birbirine eşit olduğuna vurgu yapmak için kullanılan teoreme odaklanmıştır. Teorem gereği bir grupta yalnız bir birim eleman olmalıdır ve Hatice bu teorem ifadesinden dolayı ispattaki hatanın giderildiğini düşünmüştür. Hatice, bu yüzden ispatın doğru olduğuna karar vermiştir.

4.5.5. Vektör Kavramı

Kavram kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.74 de verilmiştir.

Çizelge 4.74.
Öğretmen Adaylarının Kavram Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Kavram Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Doğru inceleyen ve açıklayanlar</i>	Aysel
<i>Doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Nazlı
<i>Doğru inceleyen ve açıklamayanlar</i>	...
<i>Yanlış inceleyen ve açıklayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 1 aday doğru inceleyen ve açıklayanlar, 9 aday ise doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte doğru inceleyen ve açıklamayanlar, yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Öğretmen adaylarının ispata değerlendirmeleri için vektörlerin nasıl tanımlanmış olduğunu, reel değerli bir skalerin vektörlerde toplama işlemi üzerine dağılmasını ve vektörlerde toplama işleminin doğru yapıp yapılmadığını incelemeleri gerekmektedir. Adaylardan kavram kullanımını doğru inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer alan Aysel, ispatta kullanılan vektörlerin 3 boyutlu yerine n boyutlu olarak tanımlanması gerektiğini belirtmiştir. Aysel, ispatın ancak n boyutta yapıldığında genel bir ispat olacağını ifade etmiştir. Bu şekilde özel bir ispat olacağını vurgulamıştır. Bununla birlikte ispatta vektörlerde toplama ve skalerin vektör toplamı üzerine dağılma özelliğinin doğru kullanıldığını belirtmiştir.

Kavram kullanımını doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer alan Aykut dışındaki adaylar, ispatta kullanılan vektörlerin 3 boyutta tanımlı olmalarını yeterli görmüşlerdir. Adaylar ispatta kullanılan vektörlerde toplama işlemi ve skalerin vektörlerde toplama işlemi üzerine dağılma özelliklerinin doğru kullanıldığını karar vermişlerdir. Bu adaylar ispatın 3 boyutta yapılmasının ispata eksik veya yanlış yapmayacağını belirtmişlerdir. Aykut ise ispatın n boyutta yapılması gerektiğini belirtmiştir. Fakat Aykut, ispatta yapılan diğer işlemleri tam olarak açıklamamıştır.

Aykut, ispatta sadece vektörlerin n boyutta seçilmesi gerektiğini ve diğer işlemlerin doğru olduğunu ifade etmiştir.

İspatın kurgusunu inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.75 de verilmiştir.

Çizelge 4.75.

Öğretmen Adaylarının İspatın Kurgusunu İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>İspatın Kurgusunu İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Tam/ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	Aysel
<i>Belirsiz/yetersiz açıklayanlar</i>	Ayhan, Hüseyin, İbrahim, Nermin, Büşra, Hatice, Ayfer, Nazlı, Aykut
<i>Açıklama yapmayanlar</i>	...
<i>Yanlış açıklayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 1 aday tam/ikna edici şekilde açıklayanlar ve 9 aday ise belirsiz/yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadır. Bununla birlikte açıklama yapmayanlar ve yanlış açıklayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

İspatı tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak inceleyen bir adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Aysel: *[Teorem ifadesini ve ispatı inceliyor] ... Vektörler 3 boyutlu uzaydan seçilmiştir. İlk olarak iki vektörü toplamış ve sonra da dağılma özelliğini kullanmış. İspatta bana göre bir hata yapılmamış. İspat doğrudur.*

Mülakatçı: *İspata doğru başlanmış mıdır? Neden?*

Aysel: *Bana göre 3 boyutlu uzayda değil de n boyutlu uzayda vektörler alınarak yapılmış olsa idi daha doğru ve genel olurdu. Bu düşünceme göre ispat eksiktir. Bu ispatta özel olarak incelenmiştir.*

Mülakatçı: *Peki ispatın işlem basamaklarında bir hata var mıdır? Neden?*

Aysel: *Hayır yok... Çünkü toplama işlemi bileşen bileşen doğru yapılmıştır. Daha sonra çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır. Bunda da bir hata*

yok ve sonrada bileşen bileşen ayırmış. Sonra da skalerle çarpıldıktan sonra toplanmadan önceki hali yazılmıştır. Daha sonra da dağılmadan önceki halini yazmış. Yaptıkları doğrudur.

Mülakatçı: Teorem ifadesi 3 boyutta vektör kullanılmasını gerektiriyor olabilir mi?

Aysel: [Teorem ifadesini tekrar okuyor] ... Bana göre n boyutlu alınmış olsaydı daha doğru olurdu. O yüzden ispat eksiktir ama basamaklarda bir hata yoktur.

Aysel, ispatta kullanılan vektörlerin genel birer vektör ifade etmediklerinin farkındadır. Aysel, ispatta kullanılması gereken vektörlerin n boyutlu olarak tanımlanması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak o zaman ispatın genel bir ispat olacağını belirtmiştir. Bununla birlikte ispatta yapılan diğer işlemlerde bir hata olmadığını sebepleri ile birlikte açıklamıştır.

İspatı belirsiz/yetersiz şekilde açıklamalar yaparak inceleyen iki adayın araştırmacı ile aralarındaki konuşmalar aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: İspata doğru başlanmış mıdır? Neden?

Hüseyin: İspatın başlangıcında iki vektör ve bir reel sayı alınmış... Zaten bu teoremin ilk kısmında verilmiştir. O halde doğrudur. Sonra skalerle çarpım, toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği kullanılarak denilmiş; ilk olarak vektörlerde toplama ve sonrasında $\mathbb{R}$ deki dağılma ve skalerle çarpım işlemleri yapılmış. Dolayısıyla yapılan işlemlerde bir sakınca yok. Toplam bileşen bileşen yapılmış ve skalerde sonrasında her bir bileşenle çarpılıp toplanmış. Dolayısıyla toplamı doğru bir şekilde ifade etmiş. Skalerle çarpma işlemi yapılarak aslında vektörün boyunu s reel sayısı kadar arttırdım veya kısalttım. Yani bende olsam aynısını yapardım. Sonuca ulaşmak için skalerle çarptıktan sonra s skaleri ile çarpılan vektörler yine iki vektörün toplamı şeklinde yazılabilir ve öyle yapılmış. Sonrada s skaleri dışarı alınmıştır. Zaten s skaleri dışarı alındığında diğer kısımlar vektörlerin kendisidir ve sonuç olarakta bir skalerle vektörün çarpımı elde edilerek sonuca doğru bir şekilde ulaşılmıştır.

Mülakatçı: İspata doğru başlanmış mıdır? Neden?

Aykut: [Teorem ifadesini ve ispatı inceliyor] ... Vektörler 3 boyutlu uzayda alınmış... Bir de s skaleri alınmış. Bu ispat için söylenebilecek tek eksik bana göre neden n boyutlu uzayda daha genel bir ispat değil de 3 boyutlu uzayda ispat yapılmıştır. Yani bana göre yapılan işlemlerin tamamı doğrudur. Bildiğim kadarıyla ispatlar daha genel

yapılır. Bu ispatta tümevarım yöntemi genelleştirilebilir. Ama bu ispat için benim bir eksiklik olarak gördüğüm tek şey bu vektörlerin n boyutlu uzaydan alınmamasıdır. Burada teorem ifadesinde V vektör uzayından eleman alınmaktadır ve bu uzayda bütün vektörler olacağına göre bence n boyuta çıkılması gerekirdi.

Bu kategoride yer alan adaylardan Aykut dışındakiler, ispatta vektörlerin n boyut yerine 3 boyutta tanımlanmış olmasını doğru kabul etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar ispatta kullanılan vektörlerin toplamı ve skalerin vektör toplamı üzerine dağılma özelliğinin sebeplerini açıklayarak doğru yapıldığına karar vermişlerdir. Aykut ise vektörlerin 3 boyut yerine n boyutta tanımlanması gerektiğini belirtmiş fakat ispatın devamında yapılan işlemlerin neden doğru olduğunu açıklamamıştır.

Mantık ve ispat yöntemleri kullanımını inceleme kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.76 da verilmiştir.

Çizelge 4.76.

Öğretmen Adaylarının Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Mantık ve İspat Yöntemleri Kullanımını İnceleme</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini tam olarak açıklayanlar</i>	Hatice
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayanlar</i>	Ayhan, İbrahim
<i>Yöntemi doğru belirleyen ve sebebini açıklamayanlar</i>	Hüseyin, Nermin, Aykut, Aysel
<i>Yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler</i>	Büşra, Ayfer, Nazlı

Çizelgeye göre 1 aday yöntemi doğru belirleyen ve sebebini tam olarak açıklayanlar, 2 aday yöntemi doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayanlar, 4 aday yöntemi doğru belirleyen ve sebebini açıklamayanlar, 3 aday da yöntemi yanlış belirleyenler veya belirleyemeyenler kategorilerinde yer almaktadır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini tam olarak açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Hatice: *Burada da doğrudan ispat yapılmıştır. Yani yine p ise q yu bulmaya çalışılmıştır. Yani p den yararlanarak p_1 , p_1 den yararlanarak p_2 ve bu şekilde devam ederek q ya ulaşılmıştır. Burada da herhangi bir kabul kullanmadan, aksine bir şey yapmadan doğrudan ispatlanmıştır.*

Hatice, ispatta doğrudan ispat yönteminin kullanıldığını belirlemiş ve bu ispat yönteminin nasıl yapılması gerektiğini açıklamıştır.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini yetersiz açıklayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Ayhan: *[Düşünüyor] ... Doğrudan ispat yapılmıştır yine... Yani Reel sayılarda toplama ve çarpma işleminin özelliklerini kullanarak doğru bir ifade elde edilip sonuçta da istenilen doğruya ulaşılmıştır.*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapıldığını ifade etmişlerdir. Adaylar ispatta neden bu yöntemin kullanıldığını ve yöntemin nasıl yapılması gerektiğini tam olarak açıklamamışlardır. Adaylar ispatta bilinen özelliklerden yararlanıldığı için bu yöntemin kullanıldığına karar vermişlerdir.

İspatın yöntemini doğru belirleyen ve sebebini açıklamayan bir adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Nermin: *Doğrudan ispat yapılmıştır. Bu etkinlikler sayesinde bir ispat yöntemlerini de öğrenmiş oldum... ☺*

Bu kategoride bulunan adaylar ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapıldığını belirlemişler ancak ispatta neden bu yöntemin kullanıldığını ifade etmemişlerdir.

İspatın yöntemini yanlış belirleyen veya belirleyemeyen iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Peki bu ispat yapılırken size göre hangi ispat yöntemi kullanılmış?*

Büşra: [Düşünüyor]... Yani hocam burada da yine özel bir yöntemden ziyade problem çözülmüş gibi geliyor. Sanki iki vektörün toplamını bulmuş ve bir skalerle çarpmış gibi geliyor.

Ayfer: Yani burada yapılan ispat tümevarım ve ya tümdengelimle yapılmamış... Olmayana ergi değil... Doğrudan ya da dolaylı ispat diye düşünüyorum. Başka da bir bilgim ve fikrim yok açıkçası... Dolaylı olması içinde bir kabule ihtiyacım var. O halde doğrudan ispattır diye düşünüyorum ama emin değilim.

Bu kategoride bulunan adaylar ispatta hangi yöntemin kullanıldığını tam olarak ifade edememişlerdir. Büşra, ispatta özel bir yöntem kullanılmadığını problem çözer gibi iki vektörün toplandığını ve toplamın bir skalerle çarpıldığını belirtmiştir. Ayfer, ispatta kullanılan yöntemi belirlemek için bildiği bütün yöntemleri düşünmüştür. Bu yöntemleri eleterek ispatın doğrudan ispat yöntemine göre yapılmış olabileceğini düşünmüş fakat emin olamamıştır. Nazlı ise ispatta tanımdan yararlanıldığını ama hangi yöntemin kullanıldığını bilmediğini ifade etmiştir.

Cevabını savunma kategorisi içerisinde yer alan alt kategoriler ve bu alt kategorilere göre öğretmen adaylarının sınıflandırılması Çizelge 4.77 de verilmiştir.

Çizelge 4.77.

Öğretmen Adaylarının Cevabını Savunma Kategorisine Göre Sınıflandırılması

<i>Cevabını Savunma</i>	
<i>Kategoriler</i>	<i>Öğretmen Adayları</i>
<i>Cevabını tam/ ikna edici şekilde açıklayanlar</i>	...
<i>Cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar</i>	İbrahim, Nermin, Büşra, Aykut, Hatice, Ayfer, Aysel, Ayhan, Hüseyin, Nazlı
<i>Cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar</i>	...

Çizelgeye göre 10 aday da cevabını yetersiz şekilde açıklayanlar kategorilerinde yer almaktadırlar. Bununla birlikte cevabını tam/ikna edici şekilde açıklayanlar ve cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorilerinde hiçbir aday bulunmamaktadır.

Cevabını yetersiz şekilde açıklayan üç adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hüseyin: $s((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) = s((a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)) = (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) = (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) = (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) = s(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3) = s\vec{a} + s\vec{b}$. *Yapmış olduğum ispata paralel bir ispat yapıldığı için ispat doğrudur.*

İbrahim: *Yapılan işlemler doğrudur. Vektör toplama tanımları ve dağılma özelliği doğru bir şekilde kullanılmış. İspat tamamlanmıştır.*

Aykut: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri n boyutlu uzaydan seçilmeliydi.

Öğretmen adaylarının tamamı ispatın değerlendirilmesinde verdikleri cevapları tam olarak savunamamışlardır. Aysel ve Aykut dışındaki adaylar, ispatta bir hata olmadığını savunmuşlardır. Bu adaylar ispatın sadece işlem kısmına odaklanmışlardır. Burada da bir hata olmadığı için ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir. Aysel ve Aykut ise ispatta sadece vektörlerin n boyutlu olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu adaylar ispatın işlem basamağına vurgu yapmamışlardır. Her iki aday da ispatta vektörlerin n boyutlu seçilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Bu yüzden ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

5.1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının matematiksel ispatla ilgili görüşlerinden elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının matematiksel ispatla yönelik görüşlerini öğrenebilmek için ilk olarak adaylara “*Size göre matematiksel ispat nedir?*” sorusu yöneltilmiştir. Adayların bu soruya verdikleri yanıtlar ispatın olumlu yönleri ile ilgilidir. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının ispat ile ilgili görüşleri; matematiksel ifadelerin doğrulanması, matematiğin rehberi, sonuca ulaşma, beyin jimnastiği, bilgilerin uygulamaya hazır hale getirilmesi ve kavramlar arasındaki ilişkiyi aramak kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adaylarının ispat hakkında olumlu düşüncelere sahip olmaları önemlidir (Almeida, 2000; 2003; Jones, 1997; 2000). Çünkü ilgili alan yazında ispat hakkında olumlu düşüncelere sahip olan adayların öğrencilerine ispatı daha iyi aktarabilecekleri savunulmaktadır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Öçal ve Güler, 2010). Bu yüzden adayların ileride öğretmenlik yapacakları yaş gruplarına ispat hakkındaki olumlu düşüncelerini aktarabilecekleri söylenebilir.

Adayların “*Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?*” sorusu ile ilgili yanıtları; ezber, anlamlı/kalıcı öğrenme, doğruluk, merak, kullanışlılık ve ilişki kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın kendileri için ne anlam ifade ettiği ile ilgili görüşlerde de ezber (Nermin, Ayfer, Büşra) kategorisinde yer alanlar dışında genellikle olumlu görüşler belirttikleri görülmektedir. Olumlu görüşe sahip olan adayların genel olarak anlamlı/kalıcı öğrenme (Nermin, Büşra, Aysel, Nazlı) kategorisinde yer aldıkları görülmüştür. Ancak adaylardan Nermin ve Büşra açısından ispatın hem olumlu hem de olumsuz yansımaları oluşmuştur. Bu adaylar ispat yapmak için yapılan ezberlerin kendilerine bir katkısının olmadığını düşündükleri için bazı ispatları gereksiz bulmaktadırlar. Bununla birlikte mantıklarına uyan ispatların ise

anlamalı ve kalıcı öğrenmelerine yardımcı olduğunu düşünmektedirler. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin bilgilerin doğruluğunu kanıtlamak, kullanışlı olmasını sağlamak ve kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamak yönünde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının “*Matematiksel ispat yapmanın amacı size göre nedir?*” sorusu ile ilgili yanıtları; doğruluk, mantıklı/anlamalı öğrenme, beklenti, bütünlük, merak ve ezber kategorileri altında toplanmıştır. Adaylardan ezber (Ayfer) kategorisi dışında kalanlar matematiksel ispatın amacına yönelik olumlu düşüncelere sahiptirler. Bu adaylar ispatın amacı ile ilgili farklı ama pozitif düşüncelere sahiptirler. İspatın amacı ile ilgili olarak adaylar; kavramların, ifadelerin doğruluğunu göstermek (doğruluk), ezbere dayalı öğrenmeyi önlemek, kavramları nedenleri ile öğrenmek (mantıklı/anlamalı öğrenme), matematiğin beklentilerimizi karşılaması (beklenti), matematiğin gelişimini sağlamak ve kavramların nedenlerine yönelik merakımızı gidermek (merak) şeklinde görüşlere sahiptirler. Ezber kategorisinde yer alan Ayfer ise ispatın amacını net olarak anlayamamıştır. Ayfer, zaten bilinen ifadelerin doğruluğunu göstermenin amacını anlamadığını ve saçma bulduğunu ifade etmiştir. Ayfer, ispatı sadece dersleri geçmek için ezberlediğini ve ispatın ezber yeteneğine katkısının olabileceğini belirtmiştir. Adayların matematiksel ispatın anlamına yönelik yanıtları İmamoğlu (2010) tarafından yapılan doktora tez çalışmasında aynı soruya aldığı yanıtlarla tutarlıdır. Her iki çalışmada da adayların ispatın olumlu yönlerine yönelik görüşler belirttikleri görülmüştür.

Matematiksel ispatın önemine yönelik görüşlerini öğrenebilmek için adaylara “*Matematikte ispat yapmak size göre ne kadar önemlidir? Lütfen açıklayınız.*” sorusu yöneltilmiştir. Adayların ispatın önemine yönelik görüşleri; ispatın doğru bilgilere ulaştırma rolü, ispatın farklı düşünmedeki rolü, ispatın önemsiz yönü, ispatın mantıklı/anlamalı öğrenmeye katkısı, ispatın mesleklerdeki rolü ve ispatın günlük yaşamla ilişki kurma rolü kategorileri altında toplanmıştır. İspatın önemi ile ilgili adayların genelde olumlu düşüncelere sahip oldukları görülmektedir. Olumlu görüşe sahip adaylar ise ispatın önem derecesinin, ileride yapacakları mesleklere göre şekilleneceğini belirtmişlerdir. Öyle ki bu adaylar ileride öğretmen olduklarında sınırlı sayıda ispat yapacaklarını fakat akademisyen olarak görev yaptıklarında ispatın kendileri için daha önemli olacağını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar, ispatın

önemi ile alakalı olarak ispatın matematikte doğru bilgilere ulaştırdığı, farklı düşünmede rol oynadığı, mantıklı/anlamli öğrenmeye katkı sağladığı ve günlük yaşamla ilişki kurma fırsatı sağladığı için önemli olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca ispatın önemsiz (Ayfer, Büşra) olduğu yönünde görüş belirten adaylar da bulunmaktadır. Ayfer, özellikle soyut cebir derslerinde yaptıkları ispatların önceden ispatlandığı için önemsiz olduğunu belirtmiştir. Büşra ise günlük hayatla ilişkisi olmayan ispatların önemsiz, ilişkili olduğunu düşündüğü ispatların ise çok önemli olduğunu ifade etmiştir.

Adayların “*Matematiksel bir ifadede ispatı gerektiren nedir?*” sorusu ile ilgili yanıtları; matematiksel ifadelerin doğru/yanlış olduğunu araştırmak, zevk, genellemeye ulaşma arzusu, merak duygusu kategorileri altında toplanmıştır. Adaylar matematiksel bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu ortaya koymak için ispat yapıldığı fikrine odaklanmışlardır. Bu sayede matematiksel ifadelerin doğruluğundan şüphe edilmeden emin bir şekilde kullanılabileceğini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar, matematiksel bir ifadenin; genel bir ifadeye ulaşabilmek için, ispat yapmaktan zevk alındığı için ve ifadelerin neden doğru olduğunun merak edilmesinden dolayı ispatlanabileceği şeklinde görüşlere sahiptirler.

Adayların “*Bir ispatı yaparken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz?*” sorusu ile ilgili yanıtları; ispatın mantığı, ispat yöntemi, tatmin ve önbilgi kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adayları verilen bir ifadeyi ispatlayabilmek için nasıl bir yaklaşım izlemeleri gerektiğine genelde ispat yöntemine göre karar vermektedirler. Verilen ifadeye göre ispat yöntemine karar verdikten sonra ispatı oluşturduklarını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar, verilen ifadenin mantığını anlamaya çalışarak ve ispatı oluşturmak için verilen ifadeye göre ön bilgilerinden yararlanarak ispattaki yaklaşımlarına karar verdiklerini belirtmişlerdir.

Adayların “*Bir ispatı tamamladığınızı nasıl anlarsınız?*” sorusuna yönelik yanıtları; istenen ifadeye doğru bilgilerle ulaşıldığında, ispat yöntemine göre ve amaca/sonuca ulaşıldığında kategorileri altında toplanmıştır. Öğretmen adayları, verilen bir ifadenin ispatını genelde kullandıkları ispat yöntemine göre ve verilen ifadeye göre amaca/sonuca ulaştıklarında tamamladıklarını anladıklarını belirtmişlerdir. Bununla birlikte istenen ifadeye doğru bilgilerle ulaşıldığında kategorisinde yer alan adaylar,

kullandıkları bilgilerin doğruluğundan ve doğru sonuca ulaştıklarından emin olduklarında ispatı tamamladıklarını anladıklarını ifade etmişlerdir.

Adayların başkası tarafından yapılmış olan bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken dikkat ettikleri hususları öğrenebilmek için adaylara “*Matematiksel bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken nelere dikkat etmek gerekir?*” sorusu yöneltilmiştir. Adayların bu soru ile ilgili görüşleri; ispatın amacını incelerim, ispat adımlarını incelerim, yöntemini incelerim, dilini incelerim ve kavramlar arasındaki ilişkiyi incelerim kategorileri altında toplanmıştır. Adaylar, başkası tarafından yapılan bir ispatı değerlendirirken genelde ispat adımları ve kullanılan ispat yöntemi üzerinde duracaklarını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte yapılan ispatın amacını, dilini ve kullanılan kavramlar arasındaki ilişkiyi incelerim şeklinde görüşler de ortaya çıkmıştır. Adaylar arasında özellikle Nermin, Hatice ve Nazlı birden fazla kategoride yer alan görüşler belirtmişlerdir. Bu durum adayların daha önce yapılmış olan bir ispatın doğruluğunu sorgulamamış olmalarından kaynaklanmaktadır. Çünkü bu adaylar ispatın doğru olması için gerekli olan kilit argümanlar hakkında net görüşler belirtmemişler ve bu yüzden de bir ispatta olması gereken bütün özellikleri sıralamışlardır.

Adayların “*Matematiksel tanımlar sizin için ne anlam ifade eder?*” sorusu ile ilgili yanıtları; kavramların anlamı, matematik dili ve matematiğin temeli kategorileri altında toplanmıştır. Adaylar, tanımlarla ilgili genellikle matematikte kullanılan kavramların anlamı olduğunu belirtmişlerdir. Benzer düşünceler matematik dili kategorisinde yer alan adaylar için de geçerlidir. Öyle ki bu kategoride bulunan adaylar da tanımları, matematik yapmak için gerekli olan dili oluşturan kelimeler, cümleler olarak ifade etmişlerdir. Ayrıca bir öğretmen adayı ise tanımların matematiğin temelini oluşturduğuna vurgu yapmıştır.

Adayların “*Matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki varsa farklar ve benzerlikler nelerdir?*” sorusuna yönelik yanıtları; ispat ile problem çözme arasındaki benzerlikler ve ispat ile problem çözme arasındaki farklar kategorileri altında toplanmıştır. Adaylar ispatla problem çözme arasındaki benzerlikleri, her ikisinde de çözülmesi ya da ispatlanması gereken bir problem olduğu, süreç olarak adım adım ilerlendiği, her ikisinde de tanımlardan faydalandığı, her ikisinde de bilinmeyen olması şeklinde görüşler belirtmişlerdir. Benzerliklere yönelik olarak adaylar hem ispatların

hem de problem çözümlerinin süreçleri ve her ikisi için de bir problem olması gerektiği üzerine odaklanmışlardır. Bununla birlikte adaylar ispatla problem çözme arasındaki farklara yönelik, ispatlarda bilinen ifadelerin kullanıldığı fakat problem çözümede daha çok mantık kullanıldığı, problem çözme sayısal iken ispatların daha kavramsal olduğu, problem çözümlerinin kişiden kişiye değişebileceği fakat ispatların daha genel olduğu ve ispatlar belli kalıplara göre yapılırken problem çözümlerinin daha yaratıcı olduğu şeklinde görüşler belirtmişlerdir. Buna göre adaylar, ispatların daha çok kavramsal, genel olduğunu, problem çözümlerinin ise daha işlemsel ve öznel olduğunu ifade etmişlerdir.

Adayların “*Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır*” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?” sorusuna yönelik yanıtları; probleme bakış açısı, problemin türüne göre değişir, süreç olarak aynıdır ve problem çözme ispat değildir kategorileri altında toplanmıştır. Adayların probleme bakış açısı kategorisinde bulunan görüşleri, hem problem çözme hem de ispatlarda verilen bir problemin çözümünün yapıldığını, her ikisinde de bir sonuca ulaşma çabası olduğu şeklindedir. Problemin türüne göre değişir düşüncesine sahip adaylar, her problem çözmenin bir ispat sayılamayacağını belirtmişlerdir. Adaylar, bazı kavramların ve problemlerin çözümlerinin ispat şeklinde yapılabileceğini fakat her problem çözmenin ispat olarak düşünülmemeyeceğini ifade etmişlerdir. Süreç olarak aynıdır kategorisinde yer alan adaylar, her ikisi için de istenen ifadelere ya da sonuçlara adım adım ulaşıldığını ve açıklamalar yapılmaya çalışıldığını vurgulamışlardır. Problem çözme ispat değildir görüşüne sahip olan aday ise problem çözerken bir sonuca ulaşıldığını fakat ispat yaparken ulaşılan her şeyin nedenlerinin araştırıldığını ifade etmiştir.

Adayların “*Matematikte yapılan her ispat aslında problem çözme aktivitesidir*” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?” sorusuna yönelik yanıtları; problemler ispat şeklinde de çözülebilir, süreç olarak aynıdır ve her ikisinde de problem ortadan kalkar kategorileri altında toplanmıştır. Adayların bu düşünceye yönelik görüşleri genel olarak süreç olarak aynıdır ve her ikisinde de problem ortadan kalkar kategorilerinde yer almaktadır. Süreç olarak aynıdır düşüncesine sahip olan adaylar, ispat yaparken verilen teorem ifadesinin çözümünün yapıldığını ve aslında problemin çözüldüğünü belirtmişlerdir. Her ikisinde de problemin ortadan kalktığını düşünen adaylar, ispatların bir problemin çözümü için getirilen bir öneri olduğunu, verilen problemin çözüldüğünü,

teoremlerin de bir problem olarak düşünölebileceğini ve çözümlerinin de ispat olabileceğini savunmuşlardır. Problemler ispat şeklinde de çözülebilir düşüncesine sahip olan adaylar ise verilen bir problemin çözümlünün tanımlardan yararlanılarak ispat şeklinde de yapılabileceğini ifade etmişlerdir.

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğu, matematiksel ispatın matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olduğunu vurgulamışlardır. Bu yüzden adayların matematiksel ispatın anlamı, önemi ve amacı ile ilgili görüşleri genelde olumlu yöndedir. Araştırmada elde edilen bu sonuç Baştürk (2010), Bayazıt (2009) ve İskenderoğlu'nun (2010) yaptıkları çalışmalar ile tutarlılık göstermektedir. Çünkü bu araştırmaların bulgularına göre de öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik olumlu görüşlere sahip oldukları ulaşılan sonuçlar arasındadır. Ancak Jones (2000), Moralı, Uğurel, Türnöklü ve Yeşildere (2006), Öçal ve Güler'in (2010) ve Varghese (2009b) çalışmaları ile paralellik göstermemektedir. Çünkü bu çalışmaların bulgularına göre öğretmen adaylarının matematiksel ispatın önemini ve işlevlerini tam olarak anlayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. İleride matematik öğretmeni olacak olan öğretmen adayların matematiksel ispatla ilgili olumlu görüşe sahip olmaları önemlidir. Çünkü matematiksel ispat yapma, ilköğretim, orta öğretim ve üniversite matematik programlarında yer almaktadır (NCTM, 2000). Bu nedenle öğretmen adaylarının kendilerini bu alanda geliştirerek, ispat yapma merkezli matematik etkinliklerini geliştirebilecek duruma gelebilmeleri gerekmektedir.

Öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili varsa eksiklikleri onların ileride derslerinde ispat yapma etkinliklerini kullanım sıklığını etkileyecektir (Bayazıt, 2009; Öçal ve Güler, 2010). Bu durum öğretmen adaylarının yetiştirecekleri öğrencilere de yansiyabilir. Bu yüzden öğretmen adaylarının derslerde yaptıkları ispatları ders geçme kaygısıyla değil ileride kullanacakları ve matematiğin doğasını anlamaları gerektiği için öğretildiği üzerinde durulmalıdır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının matematiksel ispatla ilgili olumsuz düşüncelerinin önüne geçmek için matematiksel ispatın anlamı, fonksiyonları ve işlevlerinin daha iyi anlaşılması üzerine yapılan çalışmaların artırılması gerekmektedir. Çünkü matematik öğretmenlerinin ispat düzeyleri ve öğrencilerine matematiksel ispatı öğretme yolları üzerine sınırlı sayıda araştırma olduğu ifade edilmektedir (Jones, 2000). Bu yüzden ilköğretim, ortaöğretim ve üniversite düzeyinde öğrencilerin matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin ispat yapmaya etkisinin farklı

parametlere göre araştırılması ve bu sayede matematiksel ispatın öneminin ortaya konması gerekmektedir.

5.2. Öğretmen Adaylarının Kavramları Anlama ve Kavram İmajlarına Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramlarını anlamaları ve bu kavramlara yönelik kavram imajları ile ilgili elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının ikili işlem kavramına yönelik düşünceleri ikili işlem tanımında yer alan fonksiyon kavramına göre şekillenmiştir. İbrahim dışındaki adaylar, kavram tanımından hareketle ikili işlem denildiğinde, kartezyen çarpım kümesinden bu çarpımı oluşturan kümeye tanımlı özel bir fonksiyon anladıklarını ifade etmişlerdir. Adaylar ikili işlemin, tanım kümesini ikililerin ve değer kümesini de sabitlerin oluşturduğu bir fonksiyon olduğunu düşünmektedirler. Bununla birlikte Aykut ikili işlem tanımına ters bir düşünceye sahiptir. Öyle ki aday, ikili işlemin tanımlı olabilmesi için tanım kümesinde ikililerin olmasının yeterli olduğunu düşünmüştür. Aykut, ikili işlemin $A \times B \rightarrow A$ şeklinde tanımlanabileceği şeklinde yanlış bir yorum yapmıştır. İbrahim ise ikili işlem tanımının hem geometrik hem de cebirsel anlama sahip olduğunu ifade etmiştir. Aday ikili işlemin geometrik anlamı olarak koordinatları, cebirsel anlamı olarak ise $+, *$ notasyonlarına göre tanımlanan kurallar çağrıştırdığını belirtmiştir.

Adaylar, ikili işlem kavramına yönelik kavram imajlarını yine kavram tanımında yer alan fonksiyon kavramına göre oluşturmuşlardır. Buna göre adaylar, genel olarak tanım kümesini sıralı ikililerin ve değer kümesini de sabit elemanların oluşturduğu bir fonksiyon şeması şeklinde kavram imajlarını geliştirmişlerdir. Farklı kavram imajı geliştiren adaylardan Hatice, ikili işlem kavramı ile ilgili kavram imajını örnek bir işlem tablosu ile göstermiştir. İbrahim, kavram tanımından anladıklarından hareketle ikili işlemin geometrik ve cebirsel anlamlarını birleştirerek üç boyutlu uzayda yz eksenini x eksenine taşıyan bir dönüşümle kavram imajını ifade etmek istemiştir. Aysel, koordinat düzlemini reel eksene taşıyan $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ile kavram imajını açıklamıştır. Aykut ise bir ikili işlem örneği ile kavram imajını göstermek istemiş fakat net bir kavram imajı geliştirememiştir.

Öğretmen adaylarının grup kavramının anlamına yönelik düşünceleri genellikle grubun tanımında yer alan özelliklere göre şekillenmiştir. Adaylar, grup tanımını

okuduklarında bir küme üzerinde tanımlı olan ikili işlemin sağlaması gereken dört şart üzerinde durmuşlardır. Bu şekilde düşünen adaylar açısından grup kavramı verilen bir küme üzerinde tanımlanan işleme göre grup olma şartlarının araştırılmasıdır. Ancak adaylar bu şartları neden araştırdıklarını bilmediklerini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar grup tanımından; matematiksel olarak daha karmaşık yapıları ifade etme, sayılar üzerinde işlem yapma kolaylığı, bir küme ve ikili işlemde oluşan cebirsel yapı anladıklarını ifade etmişlerdir. Nazlı ise grup kavramının matematiksel olarak ne anlam ifade ettiği ve özellikleri ile ilgili yorum yapamamıştır. Adaylar grup kavramına yönelik net yanıtlar veremedikleri için grup olma şartları ile ilgili sonda sorular sorulmuştur. Buna göre;

Adaylar kapalılık özelliği için genellikle kümenin ikili işleme uygunluğu ve küme üzerinde ikili işlemin tanımlı olması şeklinde görüşler belirtmişlerdir. Bununla birlikte kapalılık özelliğinin küme üzerinde tanımlanan ikili işlem sonucunun yine aynı kümede olmasını sağladığını ifade etmişlerdir. Adayların grup şartlarından kapalılık şartı için verdikleri yanıtlara göre kapalılık özelliğinin anlamını anladıkları söylenebilir.

Adaylar birleşme özelliğinin ne anlam ifade ettiğini tam olarak anlayamadıkları için net yanıtlar verememişlerdir. Adaylar birleşme özelliği için; işlemin esnek olması, farklı elemanları birbirine bağlama, işlemin güçlü olması, işlem yapma kolaylığı, teorem ispatlarında kullanımı, işlem önceliği şeklinde yanıtlar vermişlerdir. Adayların birleşme özelliğinin anlamı ile ilgili verdikleri yanıtların çeşitliliği, bu özelliğin ne anlam ifade ettiğini kavrayamadıklarını göstermektedir.

Adaylar birim eleman özelliğinin ne anlam ifade ettiği ile ilgili kesin yanıtlar verememişlerdir. Genellikle birim elemanın tanımını kendi cümleleri ile açıklamaya çalışmışlar ve farklı bir düşünce geliştirememişlerdir. Bununla birlikte birim elemanla ilgili; ters elemanın ön koşulu, grup olma şartlarından biri olduğu ve işlemlerde kolaylık sağladığı şeklinde yanıtlar bulunmaktadır.

Adaylar, ters eleman özelliğinin ne anlam ifade ettiği ile ilgili olarak da kesin yanıtlar verememişlerdir. Adaylar ters elemanın anlamını genellikle birim elemanla ilişkisine göre açıklamışlardır. Bununla birlikte adaylar ters elemanın anlamına yönelik; ters elemanın tanımı, işlemlerde kolaylık sağlar ve denklem çözümlerinde kullanılır şeklinde yanıtlar vermişlerdir. Adayların ters elemanın anlamına yönelik düşüncelerinin

de tam oluşmadığı görülmüştür. Sadece Aysel, ters elemanla ilgili farklı bir yorum yapabilmiş ve ters elemanların denklem çözümlerinde kullanılabileceğini belirtmiştir. Diğer adaylar sadece ters eleman tanımını kendi cümleleri ile ifade etmişlerdir.

Öğretmen adayların yanıtlarına göre grup kavramına yönelik kavram imajlarının grup tanımının dışına çıkmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Adaylar grup kavramı ile ilgili olarak genellikle bir küme ve üzerinde tanımlanan ikili işlemin sağlaması gereken dört şartın akıllarına geldiğini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adayların, bir küme ve bir ikili işlemden oluşan cebirsel yapı, grup tablosu, grup örnekleri şeklinde kavram imajları geliştirdikleri görülmüştür. İbrahim ise grup kavramını insanların bir araya gelerek oluşturdukları gruplara benzetmiştir. Aday grup kavramını oluşturan elemanların küme üzerinde tanımlanan ikili işleme göre, insanların oluşturduğu grupların ise sosyal olarak birbirleriyle ilişkili olduğunu ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının alt grup kavramının anlamına yönelik düşünceleri genellikle alt küme kavramına göre şekillenmiştir. Adaylar gruplarla çalışmak yerine grubun aynı özelliklerini taşıyan alt kümeleri üzerinde çalışmanın matematiksel olarak daha kolay olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylardan İbrahim ve Hüseyin, diğer adaylardan farklı yanıtlar vermişlerdir. İbrahim, matematik öğretiminde genellikle tümdengelim ilkesinin kullanıldığını ve bütünden parçaya şeklinde öğretim yapılmasının konuların öğretiminde daha yararlı olduğunu düşünmektedir. Bu yüzden ilk olarak grupların ve ardında da alt grupların öğretimi yapılarak konunun daha iyi anlaşılmasının sağlanabileceği şeklinde yanıt vermiştir. Hüseyin ise alt gruplar sayesinde küme üzerinde tanımlanan ikili işlemlerin tanımlılığının korunduğunu belirtmiştir. Hüseyin, fonksiyonlarla yapılan ve fonksiyonların tanım aralıklarının daraltılması ile alt küme kavramını ilişkilendirmiştir.

Adayların alt grup kavramına yönelik kavram imajlarının da genellikle alt küme kavramına göre şekillendiği görülmüştür. Adaylar, bir grup içerisinden alınan bir alt kümenin, aynı işleme göre grup olmasından yararlanarak alt grupla ilgili kavram imajlarını oluşturmuşlardır. Bununla birlikte alt grupla ilgili alt grubun tanımı, örnek bir alt grup diyagramı ve bütün parça ilişkisi şeklinde kavram imajları da oluşturulmuştur.

Öğretmen adaylarının grup homomorfizmi kavramının anlamına yönelik düşünceleri genellikle tanımda yer alan dönüşüm kavramına göre şekillenmiştir.

Adaylar genellikle grup homomorfizmi kavramının fonksiyon olduğu yönünde yanıtlar vermişlerdir. Bununla birlikte adaylar; farklı gruplar arasında ilişki kurma, bir grup yardımıyla başka bir grup oluşturmak için dönüşüm tanımlama ve farklı cebirsel yapıları birbirine bağlama şeklinde yanıtlar vermişlerdir. Adayların grup homomorfizminde işlemin korunumu ile ilgili düşünceleri ise genellikle işlemlerin farklı kümeler üzerinde tanımlı olması ile ilgilidir. Adaylar, tanım kümesinde tanımlı işlemin değer kümesindeki işleme dönüşmesi gerektiğini çünkü tanım kümesindeki işlemin değer kümesinde tanımlı olmayabileceğini ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylar işlemin korunması ile ilgili, yapı ancak bu şekilde korunur, gruplar arasında ilişki kurmak, grupların birbirine denk olduğunu göstermek şeklinde yanıtlar vermişlerdir.

Adayların grup homomorfizmi ile ilgili kavram imajları genellikle kavram tanımında yer alan dönüşüm kavramına göre şekillenmiştir. Adaylar grup homomorfizmi ile ilgili zihinlerinde oluşan şekli tanım ve değer kümesi gruplar olan bir fonksiyon şeması ile göstermek istemişlerdir. Bununla birlikte İbrahim ve Aykut farklı kavram imajları geliştirmişlerdir. İbrahim, homomorfizm ile ilgili kavram imajını çaydanlık bardak örneği ile göstermek istemiştir. Aday çaydanlıktaki çayın bardağa ve bardaktan da çaydanlığa dökülmesi şeklinde bir dönüşüm tanımlanabileceğini düşünmektedir. Bu şekilde tersi olan bir dönüşümün homomorfizm olabileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Aykut, aynı hacimde fakat farklı boyutlardaki bardaklarda bulunan suyun bu bardaklar arasında değişimi ile homomorfizm tanımlanabileceğini düşünmüştür. Adayların her ikisi de farklı kavram imajları geliştirmekle birlikte homomorfizm kavramını tersi olan bir dönüşüm olarak düşündüklerinden yanlış yorumlamışlardır.

Öğretmen adaylarının vektör kavramının anlamına yönelik düşünceleri genellikle vektörlerin uzayda tanımlanması ve bu yüzden de yer değiştirebilecekleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Adaylar vektör tanımı ve tanımla ilgili şekli yorumlamakta güçlük yaşamışlardır. Şekilde yer alan vektörlerin birbirine eşit olduğunu düşündükleri için vektör kavramına yönelik net yanıtlar verememişlerdir.

Adaylar vektör kavramına yönelik kavram imajlarını farklı boyutlarda çizdikleri vektör örnekleri ile oluşturmuşlardır. Vektörlerin belli bir başlangıç noktası, doğrultusu, yönü ve şiddeti olan doğru parçaları olduklarını ifade etmişlerdir.

Öğretmen adaylarının araştırmada yer alan kavramları anlamakta genel olarak güçlük yaşadıkları görülmüştür. Bu güçlükler adayların kavramlarla ilgili imajlarını da etkilemiştir. Doğal olarak adayların ilgili kavramlara yönelik kavram imajlarının da sınırlı olduğu gözlenmiştir.

Adaylar kavram tanımlarında yer alan ve başka kavramlarla ilişki kurabildikleri ikili işlem, alt grup ve grup homomorfizmi kavramlarını anlayabilmişler ve kavram imajları geliştirebilmişlerdir. Adayların, ikili işlem ve grup homomorfizmi kavramlarını anlamaları ve geliştirdikleri kavram imajları tanımlarda yer alan fonksiyon kavramına, alt grup kavramını anlamaları ve imajları ise alt grup tanımında yer alan alt küme kavramına göre şekillenmiştir. Bununla birlikte başka kavramlarla ilişkilendiremedikleri grup kavramını anlamakta ve kavram imajı geliştirmekte güçlük yaşamışlardır. Vektör kavramına yönelik kavram anlayışları ve kavram imajları ise ön bilgilerine göre şekillenmiştir. Araştırmada elde edilen sonuçlar ilgili alan yazında yer alan ve öğretmen adaylarının kavram anlayışlarının sınırlı olduğu sonucuna ulaşan (Moore, 1990;1994, Shipley, 1999) çalışmalarla tutarlıdır. Benzer şekilde araştırmada, kavram imajlarının kavram tanımında yer alan kavramlara göre şekillendiği fikrini ortaya çıkaran, Akkoç (2006), Tall ve Vinner (1981), Vinner (1983) çalışmalar ile paralel sonuçlar elde edilmiştir.

Öğretmen adaylarının kavram anlayışlarının ve kavram imajlarının zenginleştirilmesi için soyut cebir ve lineer cebir kavramlarının sınırlılıklarının açıklanması gerekmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının bu kavramları anlamalarına yardımcı olabilmek için soyut cebir ve lineer cebir kavramlarının uygulama alanları üzerinde durulmalıdır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının, soyut cebir ve lineer cebir kavramlarına yönelik kavram imajları gelişimi uzun süreli araştırmalar yapılarak incelenmelidir. Yapılacak benzer araştırmalarda, soyut cebir ve lineer cebir konularını öğretmen adaylarının kavram imajı geliştirmelerine olanak sağlayacak öğretim etkinlikleri üzerine odaklanmalıdır.

5.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Problem Çözme Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili problemleri çözme sürecinden elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının problem çözme süreci problemi anlama, kümeden eleman seçme, çözümün sunumu, matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorilerine göre incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının problem çözme süreci ile ilgili problemi anlama kategorisinde başarılı oldukları görülmüştür. Adayların tamamı grup, alt grup ve vektör kavramlarına yönelik problemleri doğru anlamışlardır. Bununla birlikte ikili işlem kavramına yönelik problemi Hatice eksik, Ayhan yanlış, diğer adaylar ise doğru anlamışlardır. Hatice problemi tam olarak anlayamadığı için problemde verilen işlemler üzerinden grup olma şartlarının tamamını incelemek istemiştir. Fakat çözüm sürecinde yaptığı hatayı fark ederek sadece ikili işlem olma şartını incelemiştir. Ayhan ise problemi yanlış anladığı için verilen işlemlere göre grup olma şartlarını incelemiştir. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin ters elemana sahip olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Ayhan, yaptığı işlemlerin grup şartları olduğunun farkındadır fakat problemi yanlış anladığı için hatalı bir sonuca ulaşmıştır. Grup homomorfizmi kavramı ile ilgili problemi ise İbrahim yanlış, diğer adaylar doğru anlamışlardır. İbrahim, problemi yanlış anladığı için tanımlanan dönüşüm üzerinden grup olma şartlarını incelemiştir. Aday, dönüşümün grup şartlarını sağladığını gösterebilmek için garip matematiksel ifadeler kullanmıştır. Bu işlemler sonucunda dönüşümün, grup şartlarını sağladığını düşündüğünden bir homomorfizm olduğuna karar vermiştir. Adaylar problemi anlama kategorisine göre değerlendirildiklerinde başarılıdırlar fakat problemi doğru anlamak doğru çözüm yapmayı garanti etmemektedir. Bununla birlikte problemi doğru anlamak problemde ne yapılması gerektiği ve izlenmesi gereken çözüm sürecinde adaylara yol göstermiştir. Yanlış anlayan adaylar ise çözüm sürecinde problemde istenenlerle ilgisi olmayan farklı kavramlarla ilgilenmişlerdir.

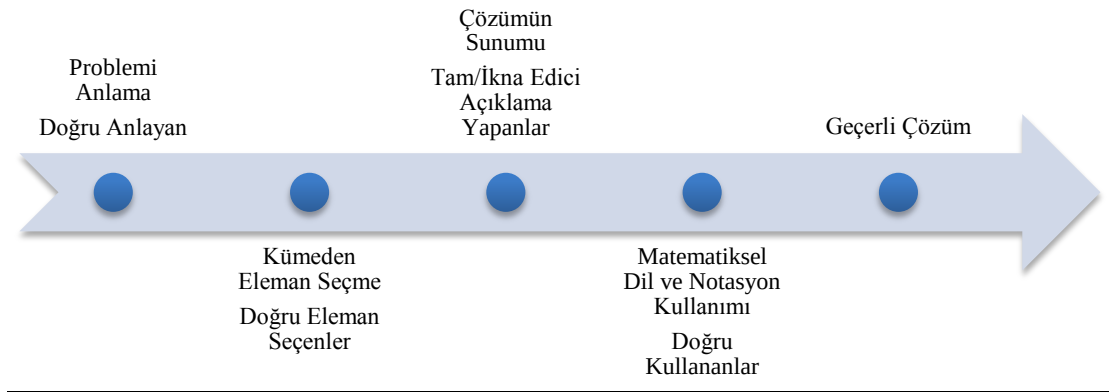
Kümeden eleman seçme kategorisine göre öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde adayların bu konuda eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Cebir kavramları ile ilgili problemlerin çözümlerinde üzerinde çalışılan kümeye uygun eleman seçmek kilit rol oynamaktadır. Ancak adaylar çözüm sürecinde bu durumun gerektiği kadar farkında olamamışlar ve çalıştıkları kümelerin özelliklerini göz ardı edebilmişlerdir. İkili işlem probleminde Hüseyin, Aykut ve Ayhan tanımlanan işlemlerin tanım kümelerinin $N \times N$ olduğunu göz ardı ederek eleman seçmişlerdir. Ayfer ise çalıştığı kümeyi belirtmeden eleman seçerek işlem yapmıştır. Grup probleminde Büşra, İbrahim ve Ayhan rasyonel sayılar kümesi üzerinde çalışmalarına rağmen tamsayılar kümesi üzerinden elemanlar seçmişlerdir. Alt grup probleminde Hüseyin, İbrahim, Nermin ve Nazlı verilen H kümesini temsil edecek elemanlar kullanamamışlardır. Hüseyin ve İbrahim H kümesinin elemanlarını 5 in katı olacak şekilde $H = \{0, 5a, 10a, \dots\}$ olarak oluşturmuşlardır. Nazlı, H kümesinin elemanlarını kümenin özelliklerini yansıtmayan $a, 2a$ şeklinde seçmiştir. Nermin ise H kümesinde yer alan a sabit elemanını yorumlayamadığı için $ax \equiv 0 \pmod{5}, by \equiv 0 \pmod{5}, cz \equiv 0 \pmod{5}$ şeklinde eleman seçimleri yapmıştır. Bu adaylar çözümlerini alt grup şartlarına göre yapmışlar fakat kullandıkları elemanlar H kümesini yansıtmamıştır. Dolayısıyla farkında olmadan başka kümeler üzerinde çalışmışlardır. Grup homomorfizmi probleminde ise sadece Büşra ve Aysel, dönüşümün tanım kümesi olan $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ kümesinde çalıştıklarını belirtmişlerdir. Diğer adaylar ise tanım kümesinden elemanları reel sayı olarak almışlar fakat seçtikleri elemanların 0 dan farklı olduğuna vurgu yapmamışlardır. Adayların kümeden doğru eleman seçmeleri problem çözümlerinde çalıştıkları kümenin dışına çıkmamaları açısından önemlidir. Ancak adayların bu konuda eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Araştırmada elde edilen bu sonuç, öğretmen adayları çözüm sürecinde kullandıkları değişkenlerin hangi kümeye ait olduğunu net olarak açıklamamaktadırlar (Biehler ve Kempen, 2013) sonucunu desteklemektedir.

Öğretmen adaylarının ileride öğretmen olacakları düşünüldüğünde problemleri çözmeleri kadar yaptıkları çözümleri öğrencilerine sunabilmeleri de önemlidir. Bu yüzden öğretmen adaylarının problem çözümleri, çözümün sunumu kategorisine göre analiz edilmiştir. Bunun sonucunda adayların yaptıkları çözümleri tam/ikna edici şekilde açıklamakta sorun yaşadıkları görülmüştür. Adaylardan ikili işlem, grup, alt

grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramlarına yönelik problemlerin çözümlerinin tamamını tam/ikna edici açıklamalar yaparak gösteren olmamıştır. Grup ve vektör problemlerini yanlış açıklamalar yaparak gösteren aday bulunmazken ikili işlem (Ayhan, Nermin), alt grup (İbrahim, Hatice ve Nazlı) ve grup homomorfizmi (İbrahim) problemlerini yanlış açıklamalar yaparak gösteren adaylar bulunmaktadır. Bununla birlikte yapılan çözümde kullanılan kavram ve özelliklerin net olarak açıklanmaması anlamına gelen belirsiz/yetersiz açıklama yapanlar kategorisinde yer alan adaylar da vardır. Özellikle grup homomorfizmi (Ayhan, Hüseyin, Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer, Aysel, Nazlı) probleminde olmak üzere ikili işlem (Hüseyin, Hatice, Ayfer, Nazlı), grup (Ayhan, Büşra, Hatice, Ayfer), alt grup (Hüseyin, Nermin, Ayfer) ve vektör (Nermin, Büşra, Aykut, Ayfer) problemlerinde de bu kategoride bulunan adaylar olmuştur. Adayların bu kategoride bulunmaları çözüm sürecinde ne yapmaları gerektiğini bildiklerini fakat kullandıkları kavramları ve nedenlerini tam olarak açıklayamadıklarını göstermektedir. Bu yüzden adayların işlem bilgilerine oranla kavram bilgilerinin yetersiz olduğu söylenebilir.

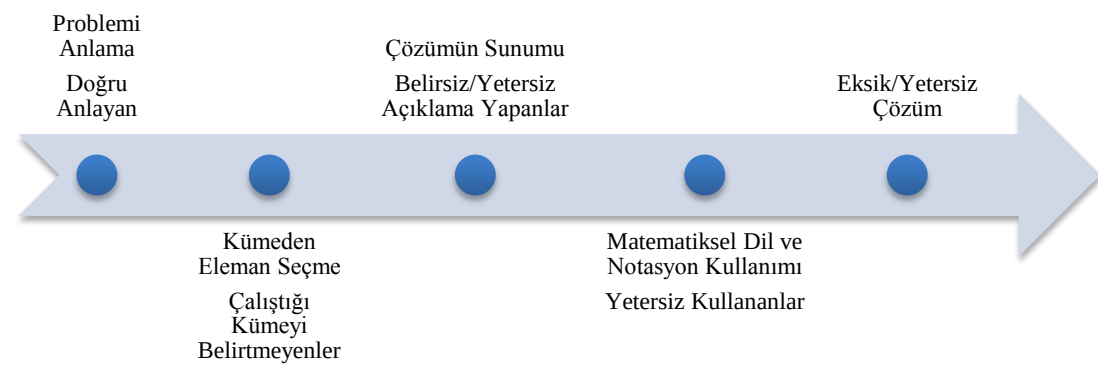
Öğretmen adaylarının problem çözümlerinde kullandıkları matematiksel dil ve notasyonlar, çözümün anlaşılabilmesi ve öğrencilere aktarılabilmesi bakımından önemlidir. Bu yüzden adayların problem çözümleri matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisine göre incelenmiş ve bu alanda yetersiz oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Adayların problem çözümlerinde genellikle yetersiz matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisinde yer aldıkları görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının problem çözümlerini yeteri kadar açıklayamadıklarını göstermektedir. Çünkü çözüm süreci dikkate alınmadığında adayların sonuca ulaşabildikleri görülmüştür. Fakat öğretmen adayları için sonuca ulaşmaktan çok nasıl ulaşıldığı, kullanılan ifadelerin çalışılan kümelere uygunluğu ve nasıl izah edildiği önemli olmalıdır. Öğretmen adaylarının matematiksel dil ve notasyon kullanımının önemini kavrayamadıkları söylenebilir.

Öğretmen adaylarının problem çözme süreci, incelenen kategoriler ve izledikleri adımlara göre geçerli, eksik ve yanlış şeklinde aşağıdaki gibi modellenmiştir.



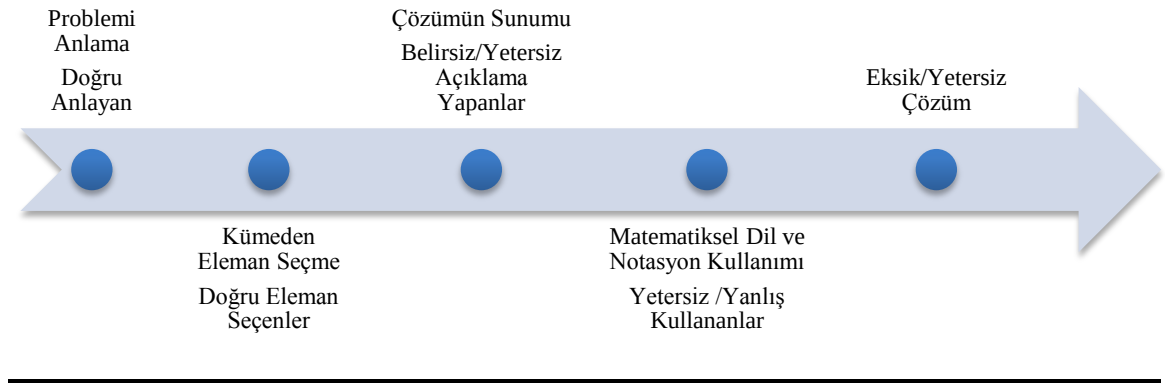
Şekil 5.1. Geçerli Problem Çözme Süreci

Geçerli çözüme ulaşan adaylar, problem çözme sürecinde incelenen kategorilere göre genellikle şekil 5.1'deki kategorilerde yer almışlardır. Adayların problem çözme sürecindeki yanıtlarının bu kategorilerde bulunması geçerli çözümler üretebilmelerini sağlamıştır. Bunun sonucu olarak, problemi doğru anlama ve kümeden doğru eleman seçme kategorilerinin geçerli problem çözme süreci için oldukça önemli olduğu görülmüştür. Araştırmada elde edilen bu sonuç, Ubuz (1991) tarafından yapılan ve problemi anlama basamağının sözel problemlerin çözümünde en önemli adım (Akt: Ubuz, 1994) olduğunu gösteren çalışmasının sonuçlarıyla paraleldir. Bununla birlikte tam/ikna edici açıklamalar yaparak çözümün sunumunu yapanlar ve doğru matematiksel dil ve notasyon kullananlar kategorisinde yer alan adayların çözümlerinin hem geçerli hem de anlaşılır olduğu gözlenmiştir.



Şekil 5.2. Eksik/Yetersiz Problem Çözme Süreci

Eksik/yetersiz problem çözümleri yapan adaylar, genellikle şekil 5.2'deki kategorilerde yer almışlardır. Adayların problem çözme sürecindeki yanıtlarının bu kategorilerde bulunması geçerli çözümlere ulaşmalarına engel olmuştur. Dolayısıyla çalıştıkları kümeleri belirtmemişler, çözümlerinin sunumunu belirsiz/yetersiz şekilde açıklamışlar ve yetersiz matematiksel dil ve notasyonlar kullanmışlardır. Adayların bu şekilde çözüm yapmaları kendileri için yeterli olabilir fakat adayların ileride öğretmen olacakları düşünüldüğünde çözümleri eksik/yetersiz olarak değerlendirilmiştir. Çünkü adayların öğretecekleri kavramlarla ilgili problemleri çözmeleri kadar bu çözümlerini öğrencilerine aktarabilmeleri de gerekmektedir. Bu açıdan düşünüldüğünde adayların yaptıkları çözümleri açıklamakta güçlüklerinin olduğu söylenebilir.



Şekil 5.3. Eksik/Yetersiz Problem Çözme Süreci

Problem çözme sürecinde incelen kategorilere göre şekil 5.3'deki adımları izleyen adaylar da geçerli çözüm üretememişlerdir. Adaylar, problemler için bir çözüm geliştirmişler fakat çözümlerinden emin olamamış ve açıklayamamışlardır.

Adayların problem çözme süreci genel olarak değerlendirildiğinde, araştırmada yer alan problemlerin tamamına yanıt verdikleri ve çözmeye çalıştıkları gözlenmiştir. Adayların problem çözümlerinin geçerli ya da eksik olarak değerlendirilmesi, kullanılan kavramların açıklanabilmesine göre değişmektedir. Bu yüzden adayların genellikle çözümün sunumu ve matematiksel dil kullanımında güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Araştırmada elde edilen bu sonuç öğretmen adaylarının, ilgili alan yazında yer alan ve problem çözme aşamaları içerisinde önemli adımlar olarak nitelendirilen başkalarını

yaptıkları çözüme ikna etme ve çözümün doğruluğunu açıklamada (Mason, Burton ve Stacey, 1985; Weber, 2004) güçlüklerinin olduğunu göstermektedir.

Problem çözme ve ispat yapma arasındaki ilişki göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının cebir öğrenme alanındaki problem çözümlerinde yaşadıkları güçlüklerin ispat yapma yaklaşımlarını etkileyeceği söylenebilir. Çünkü genel anlamda düşünme Yıldırım'a (2000) göre iki aşamadan oluşan bir problem çözme sürecidir. Birinci aşamada var olan sorun ya da problemi açıklayıcı ya da giderici çözümü bulma ve ikinci aşamada ise bulunan çözümün doğruluğu sınanmaktadır. Birinci aşama icat, yaratma olarak nitelendirilirken ikinci aşama ise doğrulama, kanıtlama ya da ispatlama olarak nitelendirilmektedir. Bununla birlikte NCTM (2000) raporuna göre problem çözme ve ispat yapma süreçleri matematiksel okuryazarlığın gelişmesinde iki önemli bileşendir. Ayrıca problem çözmenin de matematiksel okuryazarlığın gelişimi açısından önemi vurgulanmıştır. İspat yapmanın ise biliş ötesi bir yetenek olduğu için problem çözme becerisini geliştireceği ifade edilmiştir (Lucast, 2003).

Bu bakış açısına göre problem çözme ve ispat yapma süreçlerinin birbirini tamamlayıcı ve iç içe geçmiş beceriler olduğu görülmektedir. Ayrıca üniversite düzeyindeki alan derslerinin tanım→teorem→ispat formatında anlatıldığı (Weber, 2004) düşünüldüğünde öğreticilerin problem çözme etkinlikleri üzerinde de durmaları önem kazanmaktadır. Bu yüzden genelde üniversitelerde okutulan matematik derslerinde özelde ise matematik öğretmeni yetiştiren kurumlardaki alan derslerinde problem çözme ve ispat yapma arasındaki ilişkiye vurgu yapılmalıdır. Bunun için özellikle cebir öğrenme alanında yer alan teoremlerin problem çözme etkinlikleri ile desteklenmesi gerekmektedir. Bu bağlamda teorem ispatlarının problem çözme etkinliği olarak uygulanması ve benzer şekilde problem çözme etkinliklerinin de ispat şeklinde çözümünün yapılması bu iki kavram arasındaki ilişkinin anlaşılmasını kolaylaştırabilir. Ayrıca ilköğretim seviyesinden itibaren problem çözme ve ispat yapma süreçleri arasındaki ilişkiye vurgu yapılarak öğrencilerin bu iki kavram arasındaki ilişkiyi anlamlandırmalarına olanak sağlanmalıdır.

5.4. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yapma Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili ispat yapma sürecinden elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının ispat yapma süreci; ilgili alan yazında yer alan güçlüklerden yararlanılarak ispata nasıl başlayacağını ifade etme, tanımları ifade etme, ispatın sunumu, matematiksel dil ve notasyon kullanımı, mantık ve ispat yöntemi kullanımı kategorilerine göre incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının ispata başlama kategorisine göre yanıtları incelendiğinde adayların ispata nasıl başlayacaklarını ifade etmekte güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Adaylardan sadece Aysel yaptığı ispatların tamamına nasıl başlayacağını tam/ikna edici şekilde açıklayabilmiştir. Ayhan ise sadece grup homomorfizmi kavramına yönelik teorem ispatına nasıl başlayacağını eksik/yetersiz şekilde açıklamış diğer ispatlara nasıl başlaması gerektiğini tam/ikna edici şekilde açıklamıştır. Diğer adaylar ise ispatlara nasıl başlamaları gerektiğiyle ilgili sorun yaşamışlardır. Adaylar özellikle ikili işlem, alt grup ve grup homomorfizmi kavramlarına yönelik ispatlara başlamakta güçlük yaşamışlardır. Adayların ispata nasıl başlayacaklarına karar vermede yanlış fikirlerinin genellikle alt grup kavramına yönelik ispatta yaşandığı gözlenmiştir. Bununla birlikte adayların tamamı ispata nasıl başlaması gerektiği ile ilgili fikir belirtmişlerdir. Bu yüzden hiç açıklama yapmayanlar kategorisinde aday bulunmamaktadır. Adaylar ispatlara nasıl başlamaları gerektiği ile ilgili tam/ikna edici, eksik/yetersiz ya da yanlış açıklamalar yapmışlardır. Adayların ispata nasıl başlayacaklarına karar verebilmeleri ispatları tamamlamalarına yardımcı olmuştur. İspata tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak başlayan adayların genellikle ispatlarını tamamladıkları gözlenmiştir. Bu yüzden adayların yapacakları ispata nasıl başlayacaklarına tam olarak karar verebilmelerinin ispatı tamamlayabilmek için kilit rol oynadığı söylenebilir.

Öğretmen adaylarının ispat sürecinde kullandıkları tanımları ifade etme kategorisine göre yanıtları incelendiğinde, kullandıkları tanımları ifade etme çabası içinde oldukları gözlenmiştir. Adayların yaptıkları ispatlarda gerekli olan tanımların adımlarını ve kullanma sebeplerini açıklamakta istekli oldukları gözlenmiştir. Özellikle

ikili işlem ve grup homomorfizmi kavramlarına yönelik ispatlarda birer aday dışındaki bütün adaylar ispatta kullandıkları tanımları sebepleri ile birlikte belirtmişlerdir. Nazlı ikili işlemle ilgili ispatta kullandığı tanımları belirtmemiş, İbrahim ise grup homomorfizmi ile ilgili ispatta kullandığı tanımları eksik/yetersiz şekilde belirtmiştir. Grup ve alt grupla ilgili ispatlarda ise adayların genellikle kullandıkları tanımları ifade etme çabası içinde oldukları görülmüştür. Vektör kavramına yönelik ispatta adayların genellikle kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler kategorisinde oldukları gözlenmiştir. Adayların özellikle vektörlerle ilgili ispatta kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtmelerinin sebebinin ispatın yapısından kaynaklandığı söylenebilir. Çünkü diğer ispatlar daha fazla kavramsal bilgi gerektirmektedir. Vektörlerle ilgili ispatta ise daha çok işlemsel bilgi ön plana çıkmaktadır. Bu bakış açısına göre adayların işlemsel bilgilerini kullanmalarını gerektiren ispatlarda kullandıkları tanımları göz ardı edebildikleri söylenebilir.

Öğretmen adaylarının ileride öğretmen olacakları düşünüldüğünde ispat yapabilmek kadar yaptıkları ispatları öğrencilerine sunabilmeleri de önemlidir. Bu yüzden adaylar tarafından yapılan ispatlar, ispatın sunumu kategorisine göre analiz edilmiştir. Adayların yaptıkları ispatları sunumları, kavramlar arasında farklılık göstermiştir. Özellikle ikili işlem ve grup homomorfizmi kavramları ile ilgili ispatlarda adayların genellikle tam/ikna edici şekilde açıklamalar yapanlar kategorisinde yer aldıkları gözlenmiştir. Bununla birlikte grup, alt grup ve vektör kavramları ile ilgili ispatlarda ise adayların genellikle belirsiz/yetersiz ve yanlış açıklamalar yapanlar kategorilerinde yer aldıkları görülmektedir. Bu farklılığın ispatların yapısı ve ispatta kullandıkları kavramlarla ilgili olduğu söylenebilir. İkili işlem ve grup homomorfizmi kavramlarının birer dönüşüm olması ve adayların bu kavramları fonksiyon kavramı ile ilişkilendirmeleri yaptıkları ispatta daha başarılı olmalarına sebep olmuştur. Adaylar, kavramsal önbilgilerinden yararlanarak sonuca ulaşmışlardır. Adayların kavramsal ön bilgilerinden yararlanmalarının tam/ikna edici şekilde açıklamalar yapmalarına sebep olduğu söylenebilir. Grup ve alt grup kavramlarına yönelik ispatlarda ise adayların grup ve alt grup şartlarını kullanmaları gerekmektedir. Adayların, bu kavramları başka kavramlarla ilişkilendirememeleri bu ispatlarda belirsiz/yetersiz ve yanlış açıklamalar yapmalarına sebep olmuştur. Çünkü adaylar bu kavramları ve özelliklerini kullanarak ispatı sürdüremediklerinde başka kavramlarla ispatı destekleyememişlerdir. Bunun

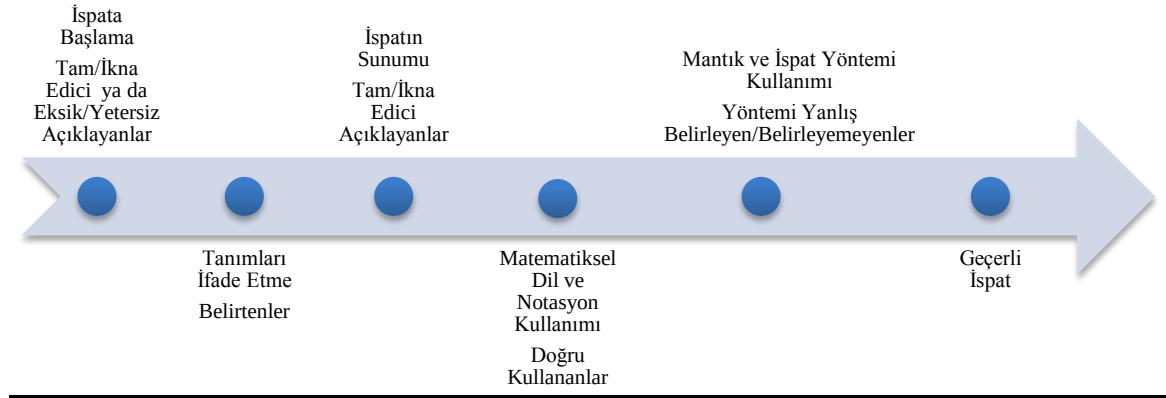
sonucunda açıklamaları yetersiz ya da yanlış olmuştur. Vektörlerle ilgili ispatta ise vektör tanımı anlaşılmadığı için eksik ya da yanlışların yapıldığı görülmüştür. Adaylar vektör tanımlarının n boyutlu olarak yapıldığını göz ardı ederek işlem yapmak istemişler ve genel bir ispat yerine özel çözümler yapmışlardır. Ayrıca İbrahim, $\vec{0}$ vektörünün tanımını anlayamadığı için sonsuz tane $\vec{0}$ vektörü tanımlayarak ispat yapmak istemiş ve ispatı geçersiz olmuştur. Adayların yanıtları genel olarak değerlendirildiğinde, yaptıkları ispatları başkalarına tam/ikna edici şekilde açıklamalar yaparak aktarmakta güçlüklerinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatları öğrencilerine net bir şekilde aktarabilmeleri ve ispatların anlaşılabilmesi için kullandıkları matematiksel dil ve notasyonlar önemlidir. Bu yüzden adayların yaptıkları ispatlar matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisine göre incelenmiştir. Adayların ikili işlem kavramı dışındaki ispatlarda matematiksel dil ve notasyon kullanımlarının genellikle yetersiz ve gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyon kullanımı kategorisinde yer aldığı görülmüştür. Adaylardan hiçbiri bütün ispatlarda doğru matematiksel ifade ve notasyon kullananlar kategorisinde yer almamaktadır. Adayların bu kategoride yer alan cevapları kavramlar arasında farklılık göstermektedir. Özellikle ikili işlem kavramında Nazlı ve Hüseyin dışındaki adayların doğru matematiksel ifade ve notasyon kullananlar kategorisinde yer aldığı görülmüştür. Bu yüzden adayların ikili işlem ve özelliklerini ifade edebildikleri söylenebilir. Bununla birlikte adayların grup homomorfizmi ve vektör kavramlarını ifade etmekte zorlandıkları gözlenmiştir. Adayların bu iki kavramla ilgili yanıtları genellikle yetersiz, gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyon kullananlar kategorisinde yer almaktadır. Ayrıca adayların grup ve alt grup kavramlarına yönelik notasyon kullanımlarında da güçlük yaşadıkları görülmüştür. Adayların grup kavramına yönelik ispatta yetersiz, alt grup kavramı ile ilgili ispatta ise yetersiz, gereksiz/yanlış matematiksel ifade ve notasyonlar kullandıkları görülmüştür. Özellikle alt grup kavramına yönelik ispatta Hüseyin, İbrahim ve Ayfer'in yanlış ifadeler kullandıkları görülmüştür. Adayların yanıtları genel olarak incelendiğinde ise kullandıkları kavramları ifade etmekte güçlük yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının yapacakları ispatlarda takip etmeleri gereken adımları netleştirebilmeleri için kullanmaları gereken ispat yöntemini ve ispatın mantığını

belirleyebilmeleri önemlidir. Bu yüzden adayların ispatları mantık ve ispat yöntemi kullanımı kategorisine göre analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların yöntemini belirlemede güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Hatta öğretmen adaylarının ispat yöntemleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları görülmüştür. Özellikle Büşra, Ayfer ve Nazlı'nın ispat yöntemlerini hiç bilmedikleri anlaşılmıştır. Aslında diğer adaylar için de durum çok farklı değildir. Adaylardan sadece Ayhan grup homomorfizmi ve vektör ispatında, Hüseyin ise sadece grup homomorfizmi ispatında yöntemi doğru belirlemiş ve açıklayabilmişlerdir. Bununla birlikte diğer adaylar farklı kavramlara yönelik ispatların hiçbirinde yöntemi ve sebebini net bir şekilde açıklayamamışlardır. Adayların özellikle dolaylı ispatları birbirine karıştırdıkları ulaşılan diğer bir sonuçtur. Ayrıca doğrudan ispat yöntemini ise bir ispat yöntemi olmaktan çok problem çözümü olarak nitelendirdikleri görülmüştür.

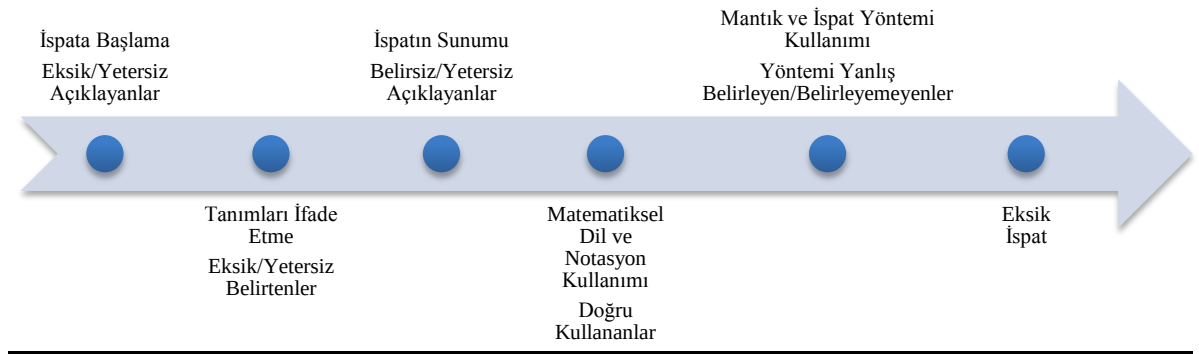
Öğretmen adaylarının ispat yapma süreci, incelenen kategoriler ve adayların bu kategorilerde izledikleri adımlara göre aşağıdaki gibi modellenmiştir. Adayların yaptıkları ispatlara göre geçerli, eksik ve yanlış ispat sürecini gösteren modeller aşağıda sunulmuştur.



Şekil 5.4. Geçerli İspat Yapma Süreci

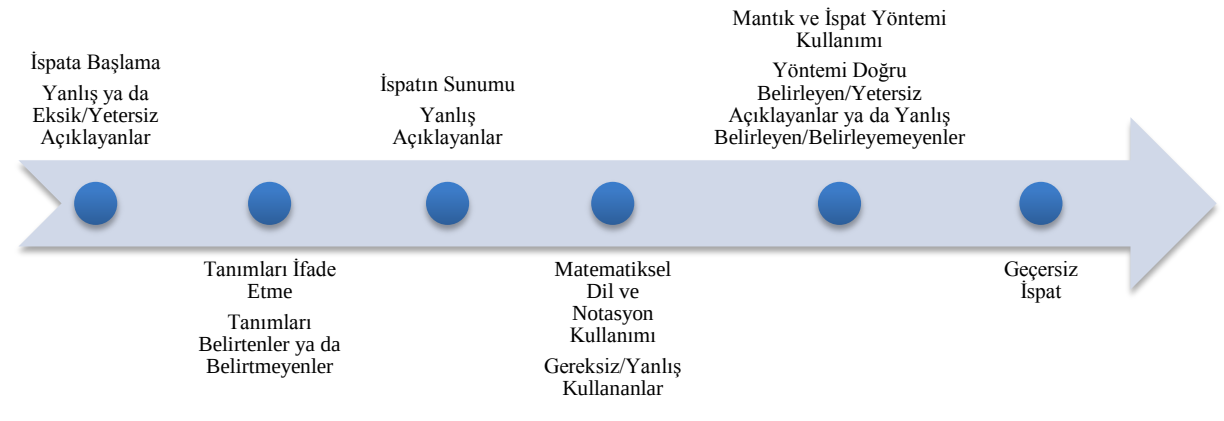
Geçerli ispat üretebilen adaylar ispat yapma sürecinde genellikle şekil 5.4'deki adımları takip etmişlerdir. Geçerli ispat yapan adayların ispat sürecinde kullandıkları tanımları belirttikleri, ispatın sunumunu tam/ikna edici şekilde açıkladıkları, doğru matematiksel dil ve notasyonlar kullandıkları gözlenmiştir. Bununla birlikte adayların ispata nasıl başlamaları gerektiğini tam/ikna edici ve eksik/yetersiz açıkladıkları görülmüştür. Adayların ispata nasıl başlamaları gerektiğine karar vermekte

güçlüklerinin olduğu gözlenmiş fakat bu kategoride güçlük yaşayan adaylardan geçerli ispatlar üretebilenlerin olduğu görülmüştür. Adayların ispat sürecinde en çok zorlandıkları kategorinin mantık ve ispat yöntemi kullanımı olduğu göze çarpmaktadır. Öyle ki geçerli ispatlar yapan adayların da yaptıkları ispatların yöntemini net olarak belirleyemedikleri ve yöntemi yanlış belirleyen/belirleyemeyenler kategorisinde yer aldıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu açıdan bakıldığında adayların ispat yöntemleri ile ilgili güçlüklerinin olduğu ama bu güçlüğün geçerli ispat üretmelerini engellemediği söylenebilir.



Şekil 5.5. Eksik İspat Yapma Süreci

Eksik ispat yapan adayların ispat yapma sürecinde kategorilere göre izledikleri adımlar genellikle şekil 5.5’deki gibidir. Adaylar tarafından yapılan ispatlardaki eksikliklerin tanımları ifade etme ve ispatın sunumu kategorilerine göre şekillenmiştir. Adayların ispatlarda kullandıkları tanımları eksik/yetersiz belirtenler ve ispatların sunumunu belirsiz/yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer aldıkları görülmektedir. Bu kategorilerdeki eksiklikler adayların ispatlarının eksik olarak değerlendirilmesine neden olmuştur. Çünkü bu kategorilerdeki eksiklikler ispatların kavramsal olarak yetersiz olmasına neden olmuştur. Bununla birlikte adayların ispata başlama ve mantık/ispat yöntemi kullanımlarında da güçlüklerinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 5.6. Geçersiz İspat Yapma Süreci

Adayların ispat yapma sürecinde geçersiz ispat yaparken izledikleri adımlar incelenen kategorilere göre genellikle şekil 5.6'daki gibi olmuştur. Akış diyagramları incelendiğinde adayların incelenen kategorilerin hepsinde de güçlüklerinin olduğu gözlenmiştir. Adayların ispata başlama kategorisinde yaşadıkları güçlüklerin diğer kategorilerdeki güçlüklerinin öncüsü olduğu söylenebilir. Çünkü nasıl bir ispat yapması gerektiğine karar veremeyen adayların yanlış çıkarımlar yaptığı gözlenmiştir. Keza bu durum, adayların ispatın kavramsal alt yapısını oluşturan tanımları ifade etme ve ispatın sunumu kategorilerinde sorun yaşamalarına sebep olmuştur. Adaylar ispatta kullandıkları tanımları belirtmemişler ya da ispatta kullanılmasına gerek olmayan tanımları kullanmışlardır. Bu şekilde ispatın iskeletini yanlış kurguladıkları için ispatın sunumunda yanlış açıklayanlar kategorisinde yer almışlardır. Adayların eksik ya da gereksiz tanımlardan yararlanmaları matematiksel dil ve notasyon kullanımı kategorisine de etki etmiştir. Dolayısıyla adaylar, gereksiz/yanlış matematiksel dil ve notasyonlar kullananlar kategorisinde yer almışlardır. Bununla birlikte adaylar mantık/ispat yöntemi kullanımında da güçlük yaşamışlardır. Adaylar kullandıkları ispat yöntemlerini belirleyememişler ya da yanlış belirlemişlerdir. Doğru ispat yöntemini belirlediklerinde ise neden bu ispat yöntemini kullandıklarını açıklayamamışlardır.

Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının ispat yapmakta güçlüklerinin olduğu anlaşılmıştır. Bu sonuç, öğrencilerin çoğunun nasıl ispatlayacağını, ispata nasıl başlaması gerektiğini, ispat sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanması gerektiğini bilmemektedir (Weber, 2001) görüşünü

desteklemektedir. Ayrıca öğretmen adaylarında ilgili alan yazında yer alan, ispata nasıl başlayacağını belirleme (Moore, 1990; 1994; Selden ve Selden, 2003; 2007), ispatta kullandıkları tanımları ifade etme (Azrou, 2013; Bayazıt, 2009; Knapp, 2005), ispatı kendi cümleleri ile ifade etme (Dubinsky, 2000), mantık ve ispat yöntemi kullanımı (Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Selden ve Selden, 2007; Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004; 2007), matematiksel dil ve notasyon kullanımı (Biehler ve Kempen, 2013; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2007) güçlüklerinin olduğu görülmüştür. Dolayısıyla araştırma sonuçları ilgili alan yazında yer alan çalışmalarla tutarlıdır. Ancak araştırma sonuçları, öğrencilerin dolaylı ispatlarda doğrudan ispatlara oranla daha fazla güçlüklerinin olduğu (Antonini ve Mariotti, 2008) sonucuyla çelişmektedir. Çünkü araştırma sonuçları öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini belirleyemediklerini ya da yanlış belirlediklerini göstermektedir.

Baştürk (2010), öğretmen adaylarının ispat yapmakta yaşadıkları güçlüklerin sebebini üniversitede aniden ispatla karşılaşmalarına bağlamaktadır. Çünkü ülkemizde öğrenciler ilköğretim ve lise düzeyinde ispat yapmamaktadırlar. Araştırma sonuçları, matematiğin vazgeçilmez bir parçası olan matematiksel ispatın, ilköğretim seviyesinden itibaren, matematik etkinliklerinin merkezine alınması gerektiğine vurgu yapmaktadır (NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Bu yüzden öğrencilerin ispatla üniversiteye başlamadan önceki öğrenim hayatlarında tanışmaları önerilmektedir.

Ayrıca yapılan araştırmalarda üniversite seviyesindeki matematik derslerinin tanım → teorem → ispat (Weber, 2004) ya da teorem → ispat → örnekler (Almeida, 2003) şeklinde anlatıldığı vurgulanmaktadır. Bu yüzden derslerin, teoremlerin anlaşılmasını sağlayacak ve özenle seçilmiş örnekler yardımıyla, örnekler → teorem → ispat ya da örnekler → ispat → teorem formatında anlatılması önerilmektedir (Almeida, 2003). Bununla birlikte öğretmen adaylarının lisans öğrenimlerindeki alan derslerinde ispat yapma becerilerini artırmaya yönelik etkinlikler yapılmalıdır. Karaoğlu (2010) çalışmasında teoremlerin anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmesinin öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını artırdığı sonucuna ulaşmıştır. Öğretim elemanlarının derslerinde, öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını artırmak için anahtar nokta ve fikirlere vurgu yapan etkinlikler tasarımları önerilmektedir.

Araştırma sonuçlarına göre öğretmen adaylarının ispata başlamaları geçerli ispat yapmalarında ve ispatı tamamlamalarında kilit rol oynamaktadır. Bu yüzden öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını artırmak için alan derslerinde ispata nasıl başlanması gerektiği ile ilgili farklı ispat yöntemlerine yönelik etkinlikler yapılması önerilmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat sürecinin birinci sınıftan itibaren değişimini incelemek amacıyla uzun süreli araştırmaların yapılması önerilmektedir. Bu şekilde öğretmen adaylarının ispat sürecine etki eden faktörler daha net ortaya çıkarılabilir.

5.5. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Doğruluğunu Değerlendirme Süreci ile İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının ikili işlem, grup, alt grup, grup homomorfizmi ve vektör kavramları ile ilgili ispatların doğruluklarını değerlendirme sürecinden elde edilen sonuçlar, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının ispat doğruluğu değerlendirme süreci; kavram kullanımını inceleme, ispatın kurgusunu inceleme, mantık ve ispat yöntemi kullanımını inceleme, cevabını savunma kategorilerine göre incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının kavram kullanımını inceleme kategorisine göre yanıtları incelendiğinde, adayların genellikle ispatlarda kullanılan kavramları doğru inceleyen ve açıklayanlar, doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer aldığı görülmüştür. Bu sonuç adayların genellikle ispatlarda hangi kavramların kullanılması gerektiğini belirleyebildiklerini göstermektedir. Ancak adayların kavramların kullanılma sebeplerini açıklamada güçlükler yaşadıkları söylenebilir. Çünkü adaylar ispatlarda hangi kavramların kullanılması gerektiğini genellikle doğru belirlemişler fakat sebeplerini açıklamada sorun yaşamışlardır. Bununla birlikte adayların kavram kullanımını yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde bulunan yanıtlarının alt grup, grup homomorfizmi ispatlarında yer aldığı görülmektedir. Öğretmen adaylarının bu iki kavrama yönelik yanlış açıklamalarının verilen ispatın yanlış olmasından ve adayların bu yanlışlığı tam olarak fark edememelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Çünkü alt grup kavramına yönelik verilen ispatta gerek ve yeter şart ispatlarından sadece yeter şart ispatının eksik ispatı, grup homomorfizmi kavramına yönelik ispatta ise homomorfizmin yanlış kullanılmasından kaynaklanan yanlış ispatın değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu yüzden adaylar alt grupla ilgili teoremden gerek ve yeter şart ifadesinin ispatının yapılması gerektiğini fark edememişlerdir. Yeter şart ispatında ise, grup olma şartlarının tam olarak incelenmemesinden kaynaklanan eksiklikleri görememişlerdir. Grup homomorfizmi ispatında ise adayların yanlış açıklamaları $\varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H)$ kullanımının doğru olduğunu düşünmelerinden kaynaklanmıştır. Bu kullanımın doğru olduğunu düşünen adaylar (İbrahim, Büşra ve Nazlı) homomorfizm altında birim elemanların eşleştiği sonucuna ulaşmışlar ve ispatın doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla birlikte Hatice bu kullanımın yanlış

olduğunu düşünmüşse de ispatın devamında $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliğinin birim elemanın tekliği teoremi yardımıyla gösterilerek yanlışlığın giderildiğini düşünmüştür. Dolayısıyla aday, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ eşitliğinin her durumda doğru olabileceği şeklinde yanlış bir düşünceye sahip olmuştur. Adayların doğru ve eksik yapılan ispatlarda kavram kullanımlarını doğru inceleyen ve açıklayan, doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorilerinde yer aldıkları görülmüştür. Yanlış açıklamaların ise genellikle yanlış olarak verilen ispatların değerlendirilmesinde ortaya çıktığı sonucuna ulaşılmıştır.

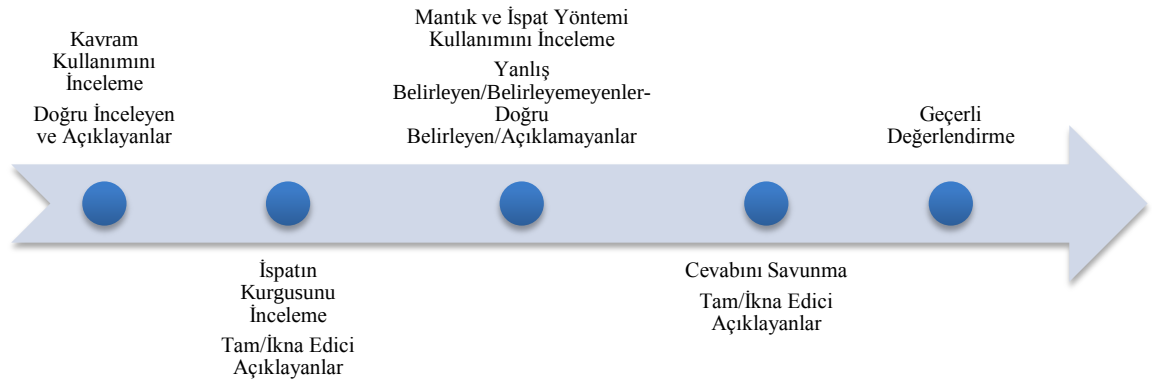
Öğretmen adaylarının ispatın kurgusunu inceleme kategorisine göre yanıtları incelendiğinde, kavram kullanımını inceleme durumlarına paralel sonuçlara ulaşılmıştır. Adayların kavram kullanımını incelemelerine paralel olarak ispatın kurgusunu incelemede de aynı kavramlarla ilgili güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Dolayısıyla adayların ispatlarda kullanılan kavramların sebeplerini açıklamada yaşadıkları güçlükler ispatın kurgusunu inceleme kategorisine yansımıştır. Adayların ispatın kurgusunu incelemede yaşadıkları güçlükler ise ispatlar üzerinde çok düşünmediklerini ve başkası tarafından yapılan ispatların doğruluğundan şüphe etmediklerini göstermektedir. Adayların başkası tarafından yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirme süreci ile ispatın doğruluğunu değerlendirme hakkındaki görüşleri arasında da paralellik olduğu söylenebilir.

Adayların başkası tarafından yapılan ispatlarda kullanılan yöntemi incelemekte güçlüklerinin olduğu görülmüştür. Adaylardan Büşra, Ayfer ve Nazlı'nın kendi yaptıkları ispatlarda olduğu gibi başkası tarafından yapılan ispatların yöntemini belirlemekte de güçlük yaşadıkları görülmüştür. Bu adaylar hiçbir ispatın yöntemini doğru olarak belirleyememiş ve ispat yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmadıklarını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte adaylardan sadece Hatice vektör kavramına yönelik ispatın yöntemini doğru belirleyerek sebebini tam olarak açıklayabilmiştir. Diğer kavramlarla ilgili ispatlarda bu kategoride hiçbir aday bulunmamaktadır. Adaylar kullanılan ispat yöntemini doğru belirlemiş olsalar da sebebini açıklayamamışlardır. Araştırma bulguları adayların ispat yöntemleri ile ilgili güçlüklerinin olduğunu ve hatta yöntemleri net olarak bilmediklerini göstermektedir.

Öğretmen adaylarının cevabını savunma kategorisine göre yanıtlarının alt kategoriler arasında farklılık gösterdiği görülmektedir. Bu kategorideki alt kategoriler adayların ispatların doğru, eksik ya da yanlışlığına karar vermelerinden çok sebepleri üzerine odaklanılarak oluşturulmuştur. Bu yüzden benzer açıklamalar yapan adayların ispatlara yükledikleri anlamlar farklı olabilmiştir. İkili işlem ve alt grup kavramına ilişkin ispatlarda cevabı tam/ikna edici açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar, ispatların eksik olduğuna karar vermişlerdir. Aslında alt grup ispatı yanlış olarak verilmiştir fakat bu kategoride yer alan adaylar ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir. İspattaki bu eksikliğin ispatta olması gereken gerek şart ispatı ve yeter şart ispatında ise grup şartlarından birleşme özelliğinin incelenmemesi olarak açıklamışlardır. Adaylar ikili işlem ispatında ise eksikliğin birim eleman özelliğinin sadece sağ birime göre yapılmasından kaynaklandığını ve verilen işlemin değişmeli olmamasından kaynaklandığını belirtmişlerdir. Bununla birlikte grup ve grup homomorfizmi ispatlarında tam/ikna edici açıklayanlar kategorisinde yer alan adaylar ispatlar için farklı sonuçlara ulaşmışlardır. Grup ispatında Nermin ve Aykut ispatın eksik, Ayhan ise doğru olduğuna karar vermişlerdir. Adaylardan Nermin ve Aykut ispatta bir hata olmadığını fakat kullanılan kapalılık, birim ve ters eleman özellikleri belirtilmediğinden ispatın eksik olduğuna karar vermişlerdir. Ayhan ise ispatta bir hata olmadığını düşündüğünden, doğru olduğunu belirtmiştir. Grup homomorfizmi ispatında ise Hüseyin ve Aykut ispatın yanlış, Ayhan ise eksik olduğuna karar vermişlerdir. Hüseyin ve Aykut ispatta kullanılan dönüşümün yanlış olduğunu doğru kullanımını yazarak göstermişlerdir. Ayhan ise aynı hatayı belirlemiş fakat yanlış olan kısımların çıkarılabileceğini düşündüğü için ispatın eksik olduğuna karar vermiştir. Vektör kavramına ilişkin ispatta ise, adaylardan Aykut ve Aysel ispatın eksik, diğerleri ise ispatın doğru olduğuna karar vermişlerdir. Bu ispatta adayların tamamı cevabını yetersiz açıklayanlar kategorisinde toplanmıştır. Adaylardan Aykut ve Aysel dışındakiler ispatta vektörlerin 3 boyutlu olmasını yeterli görmüşlerdir. Aykut ve Aysel ise vektörlerin n boyutlu olması gerektiğini ifade etmişler fakat sebeplerini tam olarak açıklamamışlardır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre cevabını yanlış açıklayanlar veya açıklamayanlar kategorisindeki yanıtların alt grup ve grup homomorfizmi ispatlarında yoğunlaştığı görülmektedir. Adayların bu kavramlarla ilgili kendi yaptıkları ispatlar da göz önüne alındığında bu kavramlarla ilgili ispatları yapma ve anlamada güçlüklerinin

olduğu söylenebilir. Adayların bu iki kavramla ilgili güçlüklerinin sebebi hem ispat yapma ve anlamadaki eksikliklerinden hem de kavramların yapısından kaynaklandığı söylenebilir.

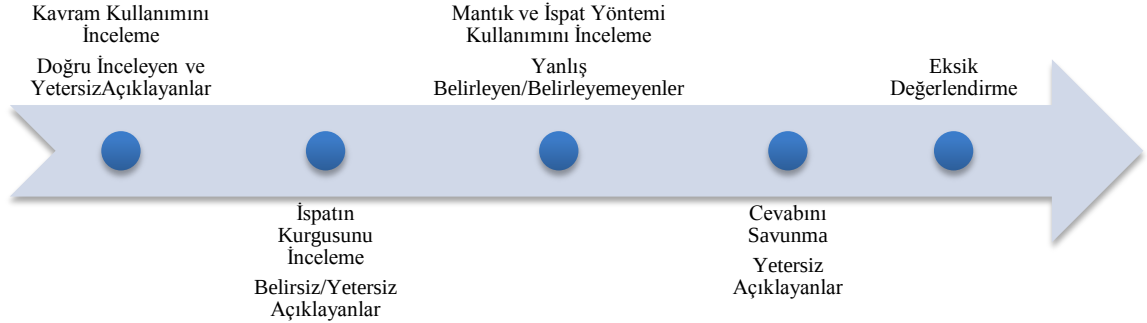
Öğretmen adaylarının ispat doğruluğu değerlendirme süreci, incelenen kategoriler ve adayların bu kategorilerde izledikleri adımlara göre aşağıdaki gibi modellenmiştir. Adayların ispat değerlendirmelerine göre geçerli, eksik ve yanlış ispat doğruluğu değerlendirme sürecini gösteren modeller aşağıda sunulmuştur.



Şekil 5.7. Geçerli İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci

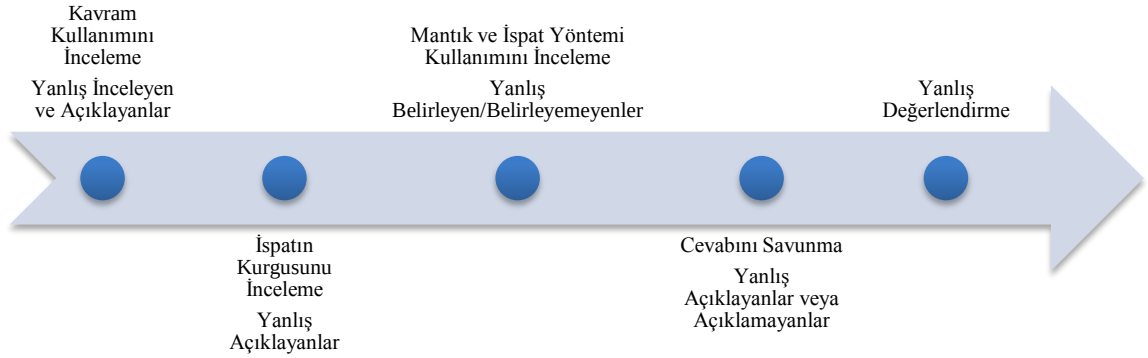
Adayların ispat doğruluğu değerlendirme sürecinde geçerli değerlendirme yapanların incelenen kategorilere göre genellikle izledikleri adımlar Şekil 5.7'deki gibidir. Bu bağlamda geçerli değerlendirme yapan adayların ispatları değerlendirmede kullanılan kavramları doğru inceleyen/açıklayanlar ve ispatın kurgusunu tam/ikna edici açıklayanlar kategorilerinde yer aldıkları görülmektedir. Adayların ispatta kullanılan kavramları belirleyebilmeleri ve bu kavramların neden/nasıl kullanıldıklarını ifade etmeleri ispatın değerlendirilmesinde kilit rol oynadığından bu kategorilerdeki başarıları diğer kategorilerde de başarılı olmalarına etki etmiştir. Bununla birlikte adayların ispat yöntemini belirlemede yaşadığı güçlükler ispat değerlendirmede de kendini göstermiştir. Geçerli değerlendirme yapan adayların genellikle ispat yöntemlerinde güçlük yaşadıkları görülmüştür. Yöntemi doğru belirleyen adaylar olmuşsa da neden bu yöntemin kullanıldığına yönelik net yanıtlar verememişlerdir. Ayrıca geçerli değerlendirme yapan adaylar ispatlarla ilgili verdikleri cevapları tam/ikna edici şekilde

açıklayabilmişlerdir. Bu sayede verdikleri cevaplardan emin olduklarını ve başkalarını kendi cevaplarına ikna edebileceklerini göstermişlerdir.



Şekil 5.8. Eksik İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci

Eksik değerlendirme yapan adayların incelenen kategorilere göre izledikleri adımlar genellikle şekil 5.8'deki gibi olmuştur. Eksik ispat doğruluğu değerlendirme süreci geçerli değerlendirmede olduğu gibi kavram kullanımını inceleme kategorisine göre şekillenmiştir. Adayların kavram kullanımını incelemede doğru inceleyen ve yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer almaları diğer kategorilerdeki durumlarını da etkilemiştir. Çünkü adaylar ispatta kullanılması gereken kavramları belirleyebilmelerine rağmen bu kavramların kullanılma sebeplerini net bir şekilde açıklayamamışlardır. Dolayısıyla adaylar ispatın kurgusunu inceleme kategorisinde de belirsiz/yetersiz açıklayanlar kategorisinde yer almışlardır. Çünkü ispatta kullanılan kavramların neden kullanıldığının açıklanması ispatın kurgusunu inceleme kategorisi ile ilgilidir. Bununla birlikte eksik değerlendirme yapan adayların da mantık/ispat yöntemi kullanımını incelemede güçlükleri bulunmaktadır. Ayrıca adayların kavramların kullanımından tam emin olmamaları cevaplarını savunmalarına da etki etmiştir. Dolayısıyla adayların ispatın doğruluğuna ya da yanlışlığına başkalarını ikna etmekte de eksiklerinin olduğu görülmüştür.



Şekil 5.9. Yanlış İspat Doğruluğu Değerlendirme Süreci

İspat doğruluğu değerlendirme sürecinde yanlış değerlendirme yapan adayların incelenen kategorilere göre izledikleri adımlar genellikle şekil 5.9'daki gibi olmuştur. Yanlış ispat doğruluğu değerlendirme süreci, geçerli ve eksik değerlendirmede olduğu gibi kavram kullanımını inceleme kategorisine göre şekillenmiştir. Adayların kavram kullanımını incelemede yanlış inceleyen ve açıklayanlar kategorisinde yer almaları diğer kategorilerdeki durumlarını da etkilemiştir. Çünkü adaylar ispatta kullanılması gereken kavramları belirleyememişler ya da yanlış/gereksiz kavramların kullanılması gerektiğini düşünmüşlerdir. Dolayısıyla adaylar ispatın kurgusunu inceleme kategorisinde de yanlış açıklayanlar kategorisinde yer almışlardır. Bununla birlikte adayların mantık/ispat yöntemi kullanımını incelemede güçlüklerinin olduğu görülmüştür. Ayrıca adayların kullanılan kavramları belirleyememeleri ya da yanlış belirlemeleri cevaplarını savunmalarına da etki etmiştir. Dolayısıyla adayların ispatların doğruluğundan ya da yanlışlığından emin olamadıkları için başkalarını kendi cevapları ile ikna edemeyecekleri görülmüştür.

Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatın doğruluğunu değerlendirmede güçlüklerinin olduğu tespit edilmiştir. Araştırmada incelenen kategorilere göre özellikle ispatın kurgusunu inceleme, mantık/ispat yöntemi kullanımını inceleme ve cevabını savunma kategorilerinde güçlük yaşandığı görülmüştür. Araştırmada elde edilen bu sonuç ilgili alan yazında yer alan (Bayazıt, 2009; Powers, Craviotto ve Grassl, 2010; Selden ve Selden, 2003) çalışmaların bulgularıyla tutarlıdır.

Öğretmen adaylarının ispat doğruluğu değerlendirme sürecinin ispat yapma performanslarını artırdığı yapılan araştırmalarla ortaya konulmuştur (Bayazıt, 2009; Powers, Craviotto ve Grassl, 2010). Bu yüzden öğretmen adaylarının ispat yapma performanslarını artırmak için lisans öğrenimleri boyunca ispat doğruluğu değerlendirmelerine olanak sağlayacak etkinlikler tasarlanmalıdır. Bu şekilde geleceğin öğretmenleri ve akademisyenlerinin, öğrencilerinin yapacakları ispatları değerlendirmelerine ve kendi ispat performanslarının gelişimine katkıda bulunulabilir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat doğruluğu değerlendirme süreçlerinin ispat yapma performanslarına etkisi deneysel araştırmalarla incelenmelidir. Bu sayede tasarlanan deneysel çalışmalar yardımıyla ispat doğruluğu değerlendirme etkinliklerinin geliştirilmesi ve uygulanması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

- Abramovitz, B., Berezina, M., Berman, A. and Shvartsman, L. (2009). How to understand a theorem?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(5), 577-586.
- Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 1-10.
- Alcock, L. (2004). *Uses of example objects in proving*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.
- Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31-35.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altun, M. (1997). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi*. Erkam Matbaacılık, Bursa.
- Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademedeki (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. Aktüel Alfa Akademi, Bursa.
- Altun, M. (2008). *Liselerde matematik öğretimi*. Aktüel Alfa Akademi, Bursa.
- Antonini, S. and Mariotti, A., M. (2008). Indirect proof: What is specific to this way of proving?. *ZDM-The International Journal of Mathematics Education*, 40, 401-412.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Arslan, S., ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, Cilt 35*, Sayı 156.

- Aydoğdu, T., Olkun, S., ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri. *Eğitim Araştırmaları*, 4(12), 64-74.
- Azrou, N. (2013). *Proof in algebra at the university level: Analysis of students difficulties*. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.
- Bahtiyari, Ö. A. (2010). *Sekizinci sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılığı, 4. Baskı, Ankara.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Bayazıt, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof*. Unpublished Doctoral Dissertation, Florida State University, Florida.
- Bayraktar, M. (2006). *Soyut cebir ve sayılar teorisi*. Gazi Kitabevi, Ankara.
- Bieda, K. N. (2008). *The pedagogy of proving in middle school mathematics*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Wisconsin-Madison.
- Biehler, R., and Kempen, L. (2013). *Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof*. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.
- Birinci, K. S. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bogdan, R. C., and Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

- Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and science Education* (pp. 547-589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.
- Coe, R., and Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53.
- Corbin, J. M., and Strauss, A. C. (2007). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin van hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Creswell, J. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. (2nd ed.) Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
- Çallıalp, F. (1999). *Örnekler ile soyut matematik*. Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.
- De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning mathematics from instruction. *Applied Psychology*, 2(53): 279-310.
- Dede, Y. (2012). *Matematik öğretmenleri konseyi standartlarıyla matematik öğretimi*. In Soner Durmuş (Çeviri Eds.), *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Dhayer, Y. Y. (2007). *The effect of a modified moore method on conceptualization of proof among college students*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Kent State.

- Dickerson, D. S. (2008). *High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Syracuse.
- Dubinsky, D. and Lewin, R. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior* 5, 55-92.
- Dubinsky, E. (2000). Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 211–240.
- Ernest, P. (1997). The epistemological basis for qualitative research in mathematics education: a postmodern perspective. *Journal for Research in Mathematics education*. Monograph, 9, 22-39.
- Fitzgerald, J. F. (1996). Proof in mathematics education. *Journal of Education*, 178(1), 35-45.
- Frasier, B. J. (2010). *Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Massachusetts Lowell.
- Furinghetti, F. and Morselli, F. (2009). *Teachers' beliefs and the teaching of proof*. Proceedings of ICME Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, Taipei, Taiwan.
- Furinghetti, F., Olivero, F., and Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(3), 319-335.
- Generazzo, S. D. (2011). *Proof and reasoning in an inquiry-oriented class: The impact of classroom discourse*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of New Hampshire.
- Gentew, L. Y. H. (2005). *An evaluation of a teaching approach to improve students' understanding of mathematical induction*. Dissertation Presented A Part Fulfillment Of The Requirement Of The Degree Of Master Of Education The University Of Hong Kong.

- Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219–236.
- Güven, B., Çelik, D., ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi.*, 30, 319.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., and Barbeau, E. (2002). What is a proof? In B. Baigrie (Ed.). *History of modern science and mathematics*, 1, 36-48.
- Hanna, G., and Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345–353.
- Hanna, G., and Jahnke, H. N. (1999). *Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs*. In O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the Twenty Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 73–80. Haifa, Israel.
- Hanna, G., Bruyn, Y., Sidoli, N., and Lomas, D. (2004). Teaching proof in the context of physics. *ZDM Mathematics Education*, 36(3), 82–90.
- Harel, G., and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from an exploratory study. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research In College Mathematics Education III* (Pp. 234-283). Providence, RI: AMS.
- Harel, G., and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.
- Haverhals, N. J. (2011). *Students' development in proof: a longitudinal study*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Montana.
- Healy, L., and Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics, executive summary*. London: Institute Of Education, University Of London.
- Healy, L., and Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

- Heinze, A., and Reiss, K. (2003). *Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence*. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Unpublished Doctoral Dissertation, Stockholm University, Stockholm.
- Herbst, P. G. (1998). *What works as proof in the mathematics class*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Georgia.
- İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- İskenderoğlu, T. A., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.
- Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 1, 53-60.
- Karaçay, T. (2009). *Soyut matematiğe giriş*. Kuban Matbaacılık Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.

- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kaya, R. (1985). *Analitik geometri*. Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.
- Knapp, J. (2005). *Learning to prove in order to prove to learn*. [Online], URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf. 11.11.2010 tarihinde erişildi.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 1109–1129.
- Laborde, C. (1990). Language and mathematics, in R Nesher and J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 51- 69.
- Lincoln, Y. S., and Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.
- Lucast, E. K. (2003). *Proof as method: A new case for proof in mathematics curricula*. Unpublished Master Dissertation, University of Carnegie Mellon.
- Mariotti, M. A., and Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 341–344.
- Mason, J., Burton, L., and Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Reading, MA: Addison-Wesley.

- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2005a). *İlköğretim Okulu Matematik Dersi 6-8 Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2005b). *Ortaöğretim (9-12). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013a). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8 Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013b). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9-12. Sınıflar Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Mingus, T. Y., and Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 8, 438-444.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68.
- Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Georgia, Georgia.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14, 1, 147-160.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nyaumwe, L. and Buzuzi, G. (2007). Teachers' attitudes towards proof of mathematical results in the secondary school curriculum: The case of Zimbabwe. *Mathematics Education Research Journal*, 19, 3, 21-32.

- Öçal, M. F., ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 318–323.
- Ören, D. (2007). *Onuncu sınıf öğrencilerinin geometrideki ispat şemalarının bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre incelenmesine yönelik bir çalışma*. Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pesen, C. (2008). *Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına göre matematik öğretimi*. Öğreti, Pegem Akademi. 4. Baskı, Ankara.
- Powers, R. A., Craviotto, C., and Grassl, R. M. (2010). Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 501-514.
- Raman, M. J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus*. Unpublished Doctoral Dissertation, University Of California, Berkeley.
- Raman, M. J. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5–41.
- Recio, A. M., and Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 1, 83-89.
- Reid, D. A. (2006). *Proof, proofs, proving and probing: research related to proof*. 14 Ocak 2011 tarihinde erişildi. URL: <http://ace.acadiau.ca/dreid/publications.html>.
- Richardson, J. T., and Ginsburg, G. P. (1999). *A judge's deskbook on the basic philosophies and methods of science*. Reno, Nevada: University of Nevada, State Justice Institute.
- Sarı, M., Altun, A., ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295–319.

- Schabel, C. J. (2001). *An instructional model to improve proof writing in college number theory*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Portland State.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1995). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrenceville, NJ: Erlbaum.
- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 55-80.
- Selden, A., and Selden, J. (2003). *Errors and misconceptions in college level theorem proving*. (Tech. Rep. No. 3). Cookeville, TN: Tennessee Technological University, Mathematics Department.
- Selden, A., and Selden, J. (2007). *Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs*. Technical Report, Mathematics Department, Tennessee Technological University 05.06.2012 tarihinde erişildi. URL: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf
- Shipley, A. J. (1999). *An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation, University Of American, Washington.
- Solow, D. (1990). *How to read and do proofs: an introduction to mathematical thought processes*. (2nd ed.), Wiley, New York.
- Soto, O. (2010). *Teacher change in the context of a proof-centered professional development*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of California.
- Stylianides, A. and Stylianides, G. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237–253.
- Stylianides, A. J. (2005). *Proof and proving in school mathematics instruction: making the elementary grades part of the equation*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Michigan.

- Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., and Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 133–162.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. and Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Şenkon, H. (1998). *Soyut cebir dersleri*. İ. Ü. Fen Fakültesi Basımevi, 2. Baskı, İstanbul.
- Tall, D. O. (1991). *The Psychology of Advanced mathematical thinking, Advanced mathematical thinking*. Kluwer: Holland, 3-21.
- Tall, D. O. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Taşçı, D. (2006). *Lineer cebir*. Gazi Kitabevi, 3. Baskı, Ankara.
- Taşçı, D. (2007). *Soyut cebir*. Alp Yayınevi, Ankara.
- Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Thompson, D. (1991). *Reasoning and proof in pre-calculus and discrete mathematics*. Paper Presented at the Meeting of The American Educational Research Association, Chicago, IL.
- Türk Dil Kurumu, <http://tdkterim.gov.tr/bts/?kategori=verilstvekelime=hataveyayn=tam>, adresinden 01.06.2012 tarihinde alınmıştır.
- Ubuz, B. (1994). Problem solving method with handout material: Max-min word problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25, 3, 367-376.

- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- VanSpronsen, H. D. (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Montana.
- Varghese, T. (2009a). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. IUMPST: The Journal. Vol 1 (Content Knowledge), [www.k-12prep.math.ttu.edu].
- Varghese, T. (2009b). Concept maps to assess student teachers' understanding of mathematical proof. *The Mathematics Educator*, 12(1), 49-68.
- Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 356-366.
- Vinner, S. (1983). Concept definition concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 14 (3), 293-305.
- Von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 4, 19-29.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behaviour*, 23, 115-133.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360.
- Wickelgren, W. A. (1974). *How to solve problems*. San Francisco, CA: W. H. Freeman & Company.

- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitapevi.
- Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Texas at Austin.
- Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. Sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

61) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ için $a + b \in \mathbb{Q}$ dir. (Çünkü $a, b \in \mathbb{Q}$ dir.)

62) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ dir. (Toplama işlemi birleşimlidir.)

63) $\forall a \in \mathbb{Q}$ için $a + e = e + a = a \Rightarrow a + e = a \wedge e + a = a$

$e = 0 \in \mathbb{Q}$ olduğunda $e \in \mathbb{Q}$ vardır. (Birim elemanı $e = 0 \wedge e = 0$ olur)

64) $\forall a \in \mathbb{Q}$ için $a + a' = a' + a = e = 0 \Rightarrow a + a' = 0 \wedge a' + a = 0$
 $a' = -a \wedge a' = -a$ olur

$a' = -a \in \mathbb{Q}$ olduğunda $a' = -a$ dir. (Ters elemanın varlığı)

$\mathbb{Q}$ rasyonel kümesi "+" işlemine göre bir gruptur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. **İspatlayınız.**

İspat: $a \in G$ olsun. $a \in G$ ve $(G, *)$ bir grup olduğunda $a^{-1} \in G$ dir. a nın tersi olan a^{-1} , G nın bir elemanı olduğunda a^{-1} in de tersi vardır. $(a^{-1})^{-1} \in G$ bulunur. e G nın birim elemanı olsun. Bu durumda şu eşitlikleri yazabiliriz.

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e \quad \text{ve} \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} * a = e * a \quad (G, *) \text{ bir grup olduğunda birleşme özelliğinden,}$$

$$(a^{-1})^{-1} * \underbrace{(a^{-1} * a)}_e = (e * a) \quad (G, *) \text{ bir grup olup } e \text{ etkisiz eleman olduğundan,}$$

$$(a^{-1})^{-1} * e = e * a \quad (\text{Etkisiz eleman özelliğinden})$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{dir.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Çünkü ispatta doğru birleşim, Adımı tek tek kullanarak ispatı yapmış. Grup dnc özelliklerini kullanmış. Bunları kullanarak da doğru bir hata yapmamış. Dolayısıyla sonucu doğru almış.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$x \in \mathbb{Z}$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall x, y \in H$ alalım. $x-y \in H$ olduğunu gösterelim.

$$\left. \begin{array}{l} ax \equiv 0 \pmod{5} \in H \\ ay \equiv 0 \pmod{5} \in H \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ax - ay \equiv 0 \pmod{5} \\ a(x-y) \equiv 0 \pmod{5} \text{ olup } x-y \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan} \end{array}$$

$$a(x-y) \equiv 0 \pmod{5} \in H \text{ dir. Bu nedenle}$$

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubudur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. **İspatlayınız.**

$x, y \in H \cap K$ olsun. Bu durumda $x, y \in H$ ve $x, y \in K$ dir. $y^{-1} \in H$ ve $y^{-1} \in K$ dir.

H ve K birer alt grup olduğu için grupların sırtlarını sırtlar. Bunun içinde

$y^{-1} \in H$ ve $y^{-1} \in K$ dir, H ve K birer alt grup olduğundan $x * y^{-1} \in H$ ve $x * y^{-1} \in K$ dir.

Bundan dolayı $x * y^{-1} \in H \cap K$ olup $H \cap K \leq G$ dir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Teoremin ispatında gerek şart kabul edilmemiş. Direkt olarak yeter şart ispat edilmiş. Doğru bir ispat eksiktir.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \varphi(x \cdot y) \stackrel{?}{=} \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y|$$

$$= |x| \cdot |y| \quad (\text{Mutlak değer sağlıgından})$$

$$= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \text{den } \varphi \text{ bir grup homomorfizmi olduğu sağlanır.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. **İspatlayınız.**

İspat: $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olduğundan ispatımızı tırne uyarım yapalım.

$$n=1 \text{ için } \varphi(g) = (\varphi(g))^1 = \varphi(g) \text{ olduğunda doğrudur.}$$

$$n=k \text{ için } \varphi(g^k) = (\varphi(g))^k \text{ için doğru olsun, şimdi } n=k+1 \text{ için doğru}$$

olduğunu gösterelim.

$$\varphi(g^k) = \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{k \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{k \text{ tane}} \text{ olur. } \varphi \text{ bir homomorfizmi olduğundan}$$

$$\varphi(g^k) \cdot \varphi(g) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{k \text{ tane}} \cdot \varphi(g)$$

$$\varphi(g^{k+1}) = (\varphi(g))^{k+1} \text{ olur, } k+1 \text{ için doğru olduğundan } \varphi(g^n) = (\varphi(g))^n \text{ dir.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir!

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulumuzdan H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

$$\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \text{ dir. } (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan})$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) \text{ dir, } H \text{ bir grup olduğunda } H \text{nin birim elemanı vardır}$$

ve bu elemanı e_H ile gösterelim. Buradan $\varphi(e_G) = e_H$ esittir. Çünkü H grubundaki işleme göre $\varphi(e_G)$ birim elemanın elemanıdır.

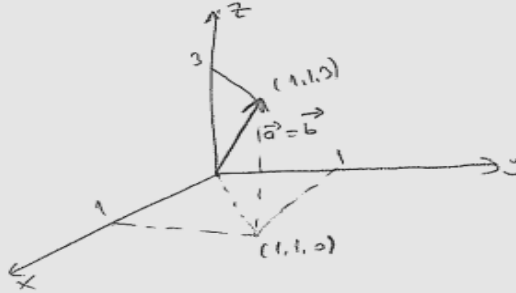
Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow (1-x, y-2, 3) = (1+x, 1, z+1) \quad \text{Burada}$$

$$\begin{aligned} 1-x &= 1+x & \wedge & & y-2 &= 1 & \wedge & & z+1 &= 3 \\ 2x &= 0 & & & y &= 3 & & & z &= 2 \\ x &= 0 & & & & & & & & \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (1, 1, 3) \quad \wedge \quad \vec{b} = (1, 1, 3)$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu **ispatlayınız**.

İspat: $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{0} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1+0, x_2+0, \dots, x_n+0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \vec{a} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0+x_1, 0+x_2, \dots, 0+x_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \text{olup burada} \end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \text{dır,}$$

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılıma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{bulunur} \end{aligned}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Çeviri: İspat eksiktir. Çünkü skalerle çarpım ve toplam tanımını kullanarak dağılım özelliğinde ispat yapmış, vektör uzayından iki tane vektör almış ve bu vektörler s skalerle çarpılıp toplanmış. Bu işlemlerde bir hata yok. Bu notla doğru sonucu ulaşmış.

Hüseyin'in Çözümleri

İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a+b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$\therefore (a, b) \in N$ için $a+b \in N$ olur. Dolayısıyla bu bir ikili işlemdir.
 $\therefore (a, b) \in N$ için $a \cdot b \in N$ olur.

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız.

a_1, a_2 , a nin ^{tercihi} iki tane ^{tercihi} tersi olsun.

$$a * a_1 = a_1 * a = e$$

$$a * a_2 = a_2 * a = e$$

$$a * a_1 = e = a * a_2$$

$$a_1 * a = e = a_2 * a$$

$$a * a_1 = a * a_2$$

$$(a_1 * a) * a^{-1} = (a_2 * a) * a^{-1}$$

$$a^{-1} * (a * a_1) = a^{-1} * (a * a_2)$$

$$a_1 * (a * a^{-1}) = a_2 * (a * a^{-1})$$

$$(a^{-1} * a) * a_1 = (a^{-1} * a) * a_2$$

$$a_1 * e = a_2 * e$$

$$e * a_1 = e * a_2$$

$$a_1 = a_2$$

$$a_1 = a_2$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- (A) İspat eksiktir. Çünkü
 B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
 D. Bir fikrim yok

$$e_2 * e_1 = e_2 \rightarrow$$

$$e_1 * e_2 = e_1$$

$$e_2 * e_1 = e_2 = e_1 * e_2$$

$$e_1 * e_2 = e_1 = e_2 * e_1$$

$$> e_1 = e_2$$

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$61) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, \quad x_1 \oplus x_2 = \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \right) = \left(\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \right) \in \mathbb{Q}$$

$$x_1 = \left(\frac{a_1}{b_1} \right), x_2 = \left(\frac{a_2}{b_2} \right)$$

$$62) \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} \text{ için } (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = \left(\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} \right) \oplus \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \oplus \frac{a_3}{b_3}$$

$$= \frac{a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2}{b_1 b_2 b_3} \quad \dots (1)$$

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = \frac{a_1}{b_1} \oplus \left(\frac{a_2}{b_2} \oplus \frac{a_3}{b_3} \right) = \left(\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{b_2 b_3} \right) = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 b_1 + a_3 b_2 b_1}{b_1 b_2 b_3} \quad \dots (2)$$

$$63) \forall x_1 \in \mathbb{Q} \text{ için } \frac{a_1}{b_1} \oplus e = e \oplus \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\left(-\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_1}{b_1} \right) \oplus e = \left(-\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_1}{b_1} \right)$$

$$64) \forall x_1 \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a_1}{b_1} \oplus y = e = y \oplus \frac{a_1}{b_1}$$

$$\left(-\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_1}{b_1} \right) \oplus y = e \neq y = -\frac{a_1}{b_1}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. İspatlayınız.

$a \in G$ için a -nın tersi a^{-1} olur. (Ters eleman özü.)

a^{-1} G nin elemanı old. için tersi olmalıdır.

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e = a^{-1} * (a^{-1})^{-1}$$

$$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (e * a)$$

$$(a^{-1})^{-1} * e = a$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Oluşan grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

$a * a = a$ ifadesinin de her iki taraftan a nın tersini soldan işleme katalı tutarsak $a = e$ olduğunu da gösterilebilir.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$H = \{0, 5a, 10a, \dots\}$$

61) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $5a + 10a = 15a \in H$ kapalıdır.

62) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için, $(5a + 10a) + 0 = 5a + (10a + 0)$

$$15a = 15a. \quad \text{birleşme,}$$

63) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $5a + e = 5a = e + 5a$.

$$e = 0 = e, \quad 0 \in H, \quad \text{birim eleman}$$

63) $\forall x \in \mathbb{Z}$ için, $5a + y = e = 0 = y + 5a$

$$y = -5a = y, \quad y \in H \quad \text{ters eleman}$$

$H, \mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$\Rightarrow$

$(G, *)$ bir grup ve H, K da G nin birer alt grubu olsun.

H ve K grup olduğundan, birim elementleri aynıdır. H ve K nin birim elementleri e olsun.

$$H \cap K \neq \emptyset,$$

61) $x_1 \in H, x_2 \in K$ için, $H \cap K = x_1 \cap x_2 = \emptyset \quad (x_1 \neq x_2 \text{ ise})$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 \cap x_2 = x_1 \vee x_1 \cap x_2 = x_2, \quad x_1, x_2 \in H \cap K$$

kapalıdır. $\Rightarrow$ 2. seçilir.

62) $x_1, x_2, x_3 \in G$ için, $x_1 \cap (x_2 \cap x_3) = (x_1 \cap x_2) \cap x_3$

işlem sonucunda $\emptyset$ ya da x_1, x_2, x_3 ten biri olacağı için

birleşme $\Rightarrow$ 2. seçilir.

63) H ve K alt grup old. birim elementleri vardır ve e dir.

64) $x_1 \in G$ için, $(x_1 \cap x_2) * (x_1^{-1} \cap x_2^{-1}) = e$ $\forall x_1$ için x_2 gibi bir x_2 seçilenecektir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

$H \leq G$ ise her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğunun gösterilmesi gerek.

Yeter şart kısmı doğru ispatlanmıştır.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$$\begin{aligned} \forall g \in G \text{ için } \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) &= \varphi(g \cdot (\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n-1 \text{ tane}})) = \varphi(g) \cdot \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n-1 \text{ tane}}) \\ &= \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} \\ &= (\varphi(g))^n \end{aligned}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (1)$$

Ve benzer şekilde,

$$\varphi(a) = \varphi(e_H \cdot a) = \varphi(e_H) \cdot \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_H)$ nin H grubunun birim elemanı olduğunu elde ederiz. Hâlbuki biliyoruz ki bir grubun birim elemanı daima tektir. Böylece kabulümüzden H in birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_H) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☒ C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$$\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \quad \dots (1)$$

$$\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) \quad \dots (2)$$

$$\varphi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \Rightarrow \varphi(e_G) = e_H$$

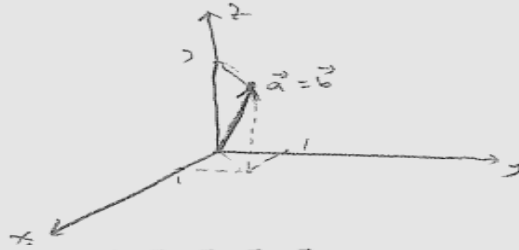
$$\varphi(a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) \Rightarrow \varphi(e_G) = e_H \quad \text{olur.}$$

(1) ve (2) den $\varphi(e_G)$ nin H in birim elemanı old. elde edilir.
 H grup olduğundan birim elemanı tek olmalıdır. Buradan,
 $\varphi(e_G) = e_H$ sonucu buluruz.

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\begin{array}{rcl} 1-x & = & 1+x \\ 0 & = & 2x \\ 0 & = & x \end{array} \quad \begin{array}{rcl} y-2 & = & 1 \\ y & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3 & = & z+1 \\ 2 & = & z \end{array}$$

$$\vec{a} = \vec{b} = (1, 1, 3)$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu *ispatlayınız*.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{0} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (a_1+0, a_2+0, \dots, a_n+0) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \vec{a} \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{0} + \vec{a} &= (0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= (0+a_1, 0+a_2, \dots, 0+a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \vec{a} \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

(1) ve (2) den $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ oldu görüldüğü.

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalärle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlışdır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$$\begin{aligned} s((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \end{aligned}$$

Yaptığım olduğum ispatın paralel bir ispat yapıldığı için ispat doğrudur.

İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$$(a, b) \in N \times N \rightarrow a + b \in N \quad (\text{kapalılıktan})$$

$$(a, b) \in N \times N \rightarrow a \cdot b \in N \quad (\text{kapalılıktan})$$

ikili işlemlerden

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. **İspatlayınız.** a 'nin iki tersi a_1 ve a_2 olsun

$$a * a_1 = e = a_1 * a$$

$$a * a_2 = e = a_2 * a$$

$$a * a_1 = a * a_2$$

$$(a_1 * a) * a_1 = (a_1 * a) * a_2$$

$$e * a_1 = e * a_2$$

$$a_1 = a_2 \quad |$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

- 1) $a, b \in \mathbb{Q} \quad a+b \in \mathbb{Q} \quad (\text{kapatılık d'si})$
- 2) $a+b, c \in \mathbb{Q} \quad (a+b)+c = a+(b+c) \in \mathbb{Q} \quad (\text{Bir. d'si})$
- 3) $0 \in \mathbb{Q} \quad a+0=0+a=a \quad (\text{E+ Element})$
- 4) $a, a' \in \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{Q} \quad 0+a'=a'+a=0 \quad a' \in \mathbb{Q} \quad (\text{Ters ele.})$

$$\boxed{a' = -a}$$

Grupdur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır. *İspatlayınız.*

$a \in G$ için a^{-1} vardır. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad (e \in G) \quad a^{-1} \in G$

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e \quad (a^{-1})^{-1} \in G$$

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = a^{-1} * a$$

$$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = (a * a^{-1}) * a \quad \text{Ters elem}$$

$$e * (a^{-1})^{-1} = e * a \quad \text{E+ luv}$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü

☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Adım adım incelendiğinde, grup özellikleri ve hipotezlerden faydalanılmış, ispatı eksiksiz şekilde tamamlanmıştır.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z}^+ : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$5a \equiv 0 \pmod{5} \quad \underline{x=5}$$

$$10a \equiv 0 \pmod{5} \quad \underline{x=10}$$

$$x = \{5, 10, 15, \dots, 5k\}$$

$$1) \quad ax \equiv 0 \pmod{5} \quad 5k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{kapalılık sağlanır.}$$

$$2) \quad (ax)y \equiv a(xy) \quad y \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{birleşme} \quad //$$

$$3) \quad ax \equiv 0 \quad 5k \in \mathbb{Z} \quad 5k \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{Etkersiz}$$

$$4) \quad (a \cdot e \equiv 0) \Rightarrow x^{-1} = a \quad \text{Ters element vardır}$$

$$H \leq (\mathbb{Z}, +)$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$H \cap K \neq \emptyset$ olmak üzere $H \leq G$ ve $K \leq G$ 'dir, $(H, *)$ bir grup belirtir. Aynı şekilde $(K, *)$ belirtir. $(H \cap K, *)$ bir grup belirtir.

Dolayısıyla H ve K 'nin elementlerinin grup şartlarına uyduğunu gösterir. Dolayısıyla iki kümenin ortak elementlerinin de grup şartlarını sağladığını söyleriz. Bundan dolayı

$$H \cap K \leq G \text{ 'dir.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Ayrıca sonraki kısımda grup olma şartları tam olarak irdelenmemiştir. $a * b^{-1} \in H$ olduğu gösterilmelidir.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \forall x \in \mathbb{R}^*$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$1) \quad x, y \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ = |x| \cdot |y| \in \mathbb{R}^+ \quad \text{kapalılık sağlanır.}$$

$$2) \quad x, y, z \in \mathbb{R}^* \quad \varphi((x \cdot y) \cdot z) = \varphi(x \cdot (y \cdot z)) \\ (|x| \cdot |y|) \cdot |z| = |x| \cdot (|y| \cdot |z|) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{birleşim öz.}$$

$$3) \quad \varphi(x \cdot e) = \varphi(e \cdot x) \quad 4) \quad \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e)$$

$$\varphi(x) \cdot \varphi(e) = \varphi(e) \cdot \varphi(x) \\ |x| \cdot 1 = 1 \cdot |x|$$

$$\varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = 1 \\ |x| \cdot |x^{-1}| = 1$$

$\varphi(e) = 1$ etkisiz eleman var.

$$|x^{-1}| = \frac{1}{|x|} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ters eleman var.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. **İspatlayınız.**

$(G, \cdot)$ ve $(H, \cdot)$ birer gruptur. $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşüm olmak üzere $g_1, g_2 \in G$ o.ö. $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ olur. $g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}$ olmak üzere.

$$\varphi(g^n) = \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} \\ = (\varphi(g))^n \quad \text{olur.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

İspat değildir. Çünkü grup homomorfizmi için birim elemanın tekliği gösterilmelidir. $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu doğru bir şekilde ispatlanmıştır.

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$1-x = 1+x$$

$$0 = 2x$$

$$\boxed{x=0}$$

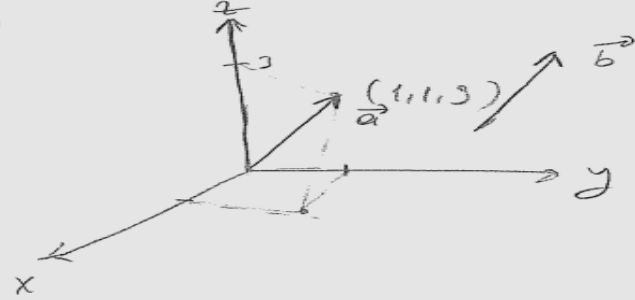
$$y-2 = 1$$

$$\boxed{y=3}$$

$$3 = z+1$$

$$\boxed{z=2}$$

$$\vec{a} = (1, 1, 3)$$

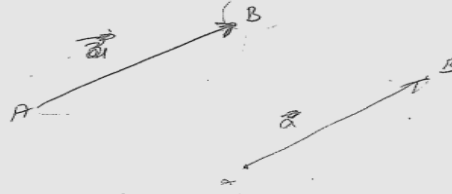


Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu ispatlayınız.

$\vec{AB} = \vec{a}$ ve $\vec{0}$ tanımdan başlangıcı ve bitisi B noktası olan vektör olsun. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB} = \vec{a}$

$\vec{0}$ başlangıcı ve bitisi A olan bir vektör olmak üzere

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{0} + \vec{AB} = \vec{AB} = \vec{a}$$



Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
(B) İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Yapılan işlemler doğrudur. Vektör toplama tanımı ve dağılım özelliği doğru bir şekilde kullanılmış, ispat tamamdır.

Nermin'in Çözümleri

İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a+b$
 - $(a, b) \rightarrow ab$
- } işlem değişikdir. Tanım kümesindeki her eleman için eşlenecek bir değer bulunamaz.

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$$a, b \in N \quad (a, b) \in N \times N \xrightarrow{+} (a+b) \in N$$

$a+b \in N$ Bu şekilde bir bağıntının tanımlanabileceği hakkında kesin bir bilgi yok.

$$a, b \in N \quad (a, b) \in N \times N \xrightarrow{\cdot} (a \cdot b) \in N$$

$$A \subset N \quad A = \{1, 2\} \quad A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f: \{1, 2, 3, 4\}$$

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız. (Uluçayın eği yöntemi)

a_1 ve $a_2 \in A$ a 'nın farklı iki tersi elemanı olsun. Ters eleman özelliğinden

$$a_1 * a = a * a_1 = e \quad \text{ve} \quad a_2 * a = a * a_2 = e \quad \text{olarak yazılır.}$$

$a_1 * a = e$ a_2 , a 'nın ters elemanı olduğundan her iki tarafı sağdan a_2 ile işleme sokarsak

$$(a_1 * a) * a_2 = e * a_2 \quad \text{birleşme özelliğinden dolayı}$$

$$a_1 * (a * a_2) = e * a_2 \quad \text{ters eleman özelliğinden}$$

$$a_1 * e = e * a_2 \quad \text{birim eleman özelliğinden}$$

$$a_1 = a_2 \quad \text{olup} \quad a_1 = a_2 \quad \text{olduğundan} \quad \text{tek bir ters eleman vardır}$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Doğru bir yöntem kullanmış. Yöntemin gereklerini uygulamış. Notasyon kullanımı doğru ve adımlarla eksiklik yapmamış. Farklı aldığı iki birim elemanı eşit çıkarttığı için sonuç doğrudur.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

$a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$ şeklindeki sayılardır.

61) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ olacak şekilde $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q} \text{ kapalıdır.}$$

62) $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b} + \left(\frac{cf+ed}{df}\right) = \frac{adf + bcf + bed}{bdf} \\ &= \left(\frac{adf+bcf}{bdf}\right) + \frac{bed}{bdf} = \left(\frac{ad}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \end{aligned}$$

63) $\forall a, b, e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{e_1}{e_2} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{e_1}{e_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = 0 \quad e_1 = 0 \quad e_2 \in \mathbb{Z} \quad \frac{e_1}{e_2} \in \mathbb{Q} \quad 0 \text{ birim elemanıdır.}$$

64) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0 \quad \left. \begin{matrix} c = -a \\ d = -b \end{matrix} \right\} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ ters elemanı vardır}$$

4 şartıda sağladığından $\mathbb{Q}$ toplama işlemine göre bir gruptur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. İspatlayınız.

İspat. Kapalıdır, birleşmelidir, etkisiz ve ters elemanı vardır.

$$a \in G \text{ için } (a^{-1})^{-1} = a$$

G bir grup olduğundan $a \in G$ için ters eleman özelliğini sağladığından ve kapalı olduğundan $a^{-1} \in G$ dir. $a^{-1} \in G$ olduğuna göre G bir grup olduğundan $(a^{-1})^{-1} \in G$ dir. $e \in G$, G 'nin etkisiz elemanı olsun.

$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1}) = e$ bu eşitliğin her iki tarafını sağdan a ile işlem yaparak (a^{-1}) , a -nın tersi olduğundan $(a^{-1}) * a = e$ dir.

$$(a^{-1})^{-1} * ((a^{-1}) * a) = e * a \quad \text{birim eleman özelliğinden } e * a = a$$

$$(a^{-1})^{-1} * e = a \quad \text{birim eleman özelliğinden}$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{İspat tamamlandı.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$$a * a = a \text{ olduğunu kabul edelim. } a^{-1} \in G$$

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işlem katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a \rightarrow \text{ters eleman}$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e \rightarrow \text{birim eleman}$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

Çünkü, kullandığı yöntem doğru ve ispata doğru başlamış. Notasyonlar doğru fakat bilgilendirme ve ispatın edebiyat kısmı eksik. Ben bildiğim için adımları anlattım ama hiç bilmeyen birisi neyin nereden geldiğini kavrayamadığı için ispatı yanlış bulabilir.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

a, b sabit $x, y \in \mathbb{Z}$ $ax \equiv 0 \pmod{5}$
 $by \equiv 0 \pmod{5}$

$$G1) \quad x, y \in \mathbb{Z} / \quad ax, by \in H \quad ax + by \in H \quad \left. \begin{array}{l} ax \equiv 0 \pmod{5} \\ by \equiv 0 \pmod{5} \end{array} \right\} ax + by \equiv 0 \pmod{5} \in H$$

$$G2) \quad x, y, z \in \mathbb{Z} / \quad ax, by, cz \in H \text{ olsun.}$$

$$\left. \begin{array}{l} ax \equiv 0 \pmod{5} + [by \equiv 0 \pmod{5} + cz \equiv 0 \pmod{5}] = 0 \\ [ax \equiv 0 \pmod{5} + by \equiv 0 \pmod{5}] + cz \equiv 0 \pmod{5} = 0 \end{array} \right\} = \text{birleşmelidir.}$$

$$G3) \quad x \in \mathbb{Z} / \quad ax \in H \text{ olsun.} \quad ax \equiv 0 \pmod{5} + ae \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow ax \equiv 0 \pmod{5}$$

$$e \in \mathbb{Z} / \quad x + e = x \quad e = 0 \quad (\mathbb{Z}, +) \text{ grubunun birim elemanı aynı zamanda}$$

H kumesinde birim elemanıdır.

$$G4) \quad (\mathbb{Z}, +) \text{ grup olduğu için } x \in \mathbb{Z} / \quad x + x^{-1} = e \text{ olarak yazılabilir. } x^{-1} = -x$$

$$ax \in H \text{ için } ax + ax^{-1} = e = 0 \quad ax + ax^{-1} = 0 \Rightarrow ax = -ax^{-1}$$

$$x = -x^{-1} \quad |x^{-1} = -x| \in H$$

$$ax \equiv 0 \pmod{5}$$

$$-ax \equiv 0 \pmod{5}$$

$H, (\mathbb{Z}, +)$ grubunun alt grubudur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$$G1) \quad x, y \in H \cap K \quad x * y \in H \cap K$$

$x * y \in G$ aynı zamanda $x * y \in H$ $x * y \in K$ olduğundan $x * y \in H \cap K$

$$G2) \quad x, y, z \in H \cap K \quad x * [y * z] = [x * y] * z$$

$(G, *)$ bir grup olduğundan birleşme özelliğini sağlar ve H, K G nin alt grubu olduğu için $H \cap K$ da bu özelliği sağlar.

$$G3) \quad x \in H \cap K \quad e \in G \text{ olsun } x * e = x \text{ yazılabilir. } e \in G \text{ olduğundan}$$

ve H, K G nin birer alt grubu olduğundan $e \in H$ ve $e \in K$ dir.

Dolayısıyla $e \in H \cap K$ dir.

$$G4) \quad x \in H \cap K \quad x^{-1} \in G \text{ olsun. } x * x^{-1} = e \quad (G, *) \text{ bir grup olduğu için yazılır}$$

$x^{-1} \in G$ ve H, K G nin birer alt grubu olduğu için $x^{-1} \in H$

$x^{-1} \in K$ olur. Dolayısıyla $x^{-1} \in H \cap K$ dir.

$H \cap K \leq G$ dir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü
 B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
 D. Bir fikrim yok

Çünkü; grup olma şartlarından birleşme özelliğini göstermemizdir

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* \text{ için } \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

φ homomorfizmdir.

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. *İspatlayınız.*

$$\forall g \in G \text{ ve } \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \varphi(g^n) = \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}}$$

$$= [\varphi(g)]^n$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) = \varphi(a) \cdot e_H = \varphi(a)$$

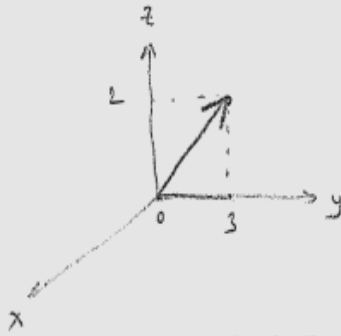
$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) = e_H \cdot \varphi(a) = \varphi(a)$$

$$\varphi(a) e_H = e_H \cdot \varphi(a) \Rightarrow \varphi(e_G) = e_H$$

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\begin{aligned}\vec{a} = \vec{b} &\Rightarrow (1-x) = (1+x) & x=0 \\ (y-2) &= 1 & y=3 \\ 3 &= z+1 & z=2\end{aligned}$$



Theorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu *ispatlayınız*.

$$\vec{a} = (x, y) \quad \vec{0} = (0, 0) \quad (\text{vektör tanımından})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = (x, y) + (0, 0) = (x+0, y+0) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (1)$$

$$\vec{0} + \vec{a} = (0, 0) + (x, y) = (0+x, 0+y) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (2)$$

(1) ve (2) -den $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ bulunur.

Theorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur}\end{aligned}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Cevap: Çünkü; Notasyonlar doğru alınmış. Skalerle çarpım, toplam ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği ispatta doğru kullanılmış. İfadeler doğru yapılarak doğru sonuçta ulaşılmıştır.

Büşra'nın Çözümleri İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $((a, b) \rightarrow a + b)$
- $((a, b) \rightarrow ab)$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$$\beta = \{ (a, b) \in N \times N \mid a + b \in N \}$$

$$\beta_1 = \{ (a, b) \in N \times N \mid a \cdot b \in N \}$$

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız.

Kabul edelim ki $a \in A$ nin a_1, a_2 gibi iki tersi olsun.

Ters elemanın özelliğinden $a * a_1 = a_1 * a = e$ ve $a * a_2 = a_2 * a = e$ olacaktır.

$a * a_1 = e$ eşitliğini göt önüne alırsak. Soldan a_2 ile $*$ işlemine göre işleme tabi tutarsak

$$a_2 * (a * a_1) = a_2 * e$$

$$(a_2 * a) * a_1 = a_2 * e$$

$$e * a_1 = a_2 * e \Rightarrow a_1 = a_2$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Birim elemanın tanımından $a * e_1 = a$ Bu $\forall a \in A$ sağlanacağından

özel olarak $a = e_2$ alınırsa $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ olur.

Aynı şekilde $a * e_2 = e_2 * a = a$ yme $\forall a \in A$ ian sağlanacağından $a = e_1$ seçebiliriz. $e_1 * e_2 = e_1$... (2)

(1) ve (2). 'den $e_1 = e_2$ olur

Değişme özelliğinden bahsedilmediğinden iki taraflı incelenmelidir.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ için $a+b \in \mathbb{Q}$ kapalı
- 2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ için $a+(b+c) = (a+b)+c$ Birleşme öz. var
- 3) $\forall a \in \mathbb{Q}$ için $\exists e \in \mathbb{Q}$
 $a+e = e+a = a$ dır.
 $e = 0 \in \mathbb{Q}$

- 4) $\forall a \in \mathbb{Q}$ ve $e \in \mathbb{Q}$ ol. üzere $a' \in \mathbb{Q}$
 $a+a' = a'+a = e$
 $a' = e-a$ $a' = e-a$
 $a' = 0-a$
 $a' = -a \in \mathbb{Q}$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. *İspatlayınız.*

$$a \in G \text{ olsun. } a^{-1} \in G \text{ dir. } a * a^{-1} = e \in G \text{ ve } a^{-1} * a = e \in G$$

$$a^{-1} \in G \text{ olsun } (a^{-1})^{-1} \in G \text{ dir. } a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e \in G$$

$$a^{-1} * a = a^{-1} * (a^{-1})^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} \text{ olur.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Oluş grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = a$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

$$a * a = a$$

$$(a * a) * a^{-1} = a * a^{-1}$$

$$a * \underbrace{(a * a^{-1})}_e = e$$

$$a * e = e$$

$$a = e$$

Değişmeli grup denediği için yukarıdaki gibi sıfırlık baki olabilir.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$x, y \in H \quad \begin{cases} ax \equiv 0 \pmod{5} \\ ay \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

$x, y^{-1} \in H$ olmalı

$$(ax) + (ay)^{-1} \equiv 0 \pmod{5}$$

$$ax + (a^{-1}y^{-1}) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$ax + ay \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a(x+y) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\underbrace{a}_{k} \equiv 0 \pmod{5} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 'dir.}$$

$ak \in H$ olur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. *İspatlayınız.*

$x, y \in G$ olsun. $x, y^{-1} \in H$ olursa $H \leq G$ 'dir.

$x, y \in G$ olsun. $x, y^{-1} \in K$ olursa $K \leq G$ 'dir.

$x, y \in H \cap K$ için $x, y^{-1} \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \leq G$ 'dir.

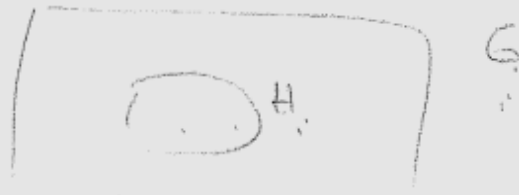
Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H 'da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok



İspat doğrudur. $(G, *)$ bir grup olduğu için her elemanı tam birleşme özelliği sağlar. Dolayısıyla H, G 'nin boş olmayan farklı bir alt kümesi olduğundan H 'da birleşme özelliğini sağlar ama bunun ifade edilmesi gerekir.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi(x \cdot y) = |xy| = \underbrace{|x| \cdot |y|}_{= \varphi(x) \cdot \varphi(y)} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$\forall g \in G$ için

$$\underbrace{\varphi(g \cdot g \cdot \dots \cdot g)}_{n \text{ tane } g \in \mathbb{Z}^+} = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} = (\varphi(g))^n$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ 'nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Halbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikir yok

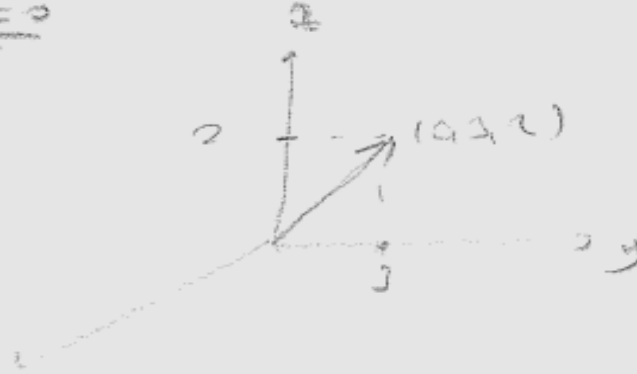
Homomorfizmi doğru kullanılmış ve doğru adımlarla

sonuca ulaşılmıştır.

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\begin{aligned} 1-x &= 1+x & y-2 &= 1 & 3 &= z+1 \\ 0 &= 2x & y &= 3 & z &= 2 \\ \underline{x=0} & & & & & \end{aligned}$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu ispatlayınız.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a}$$

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Vektörlerde verilen toplama işlemi ve $\mathbb{R}$ 'de dağılma işlemi ni doğru kullanmıştım.

Aykut'un Çözümleri

İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$a, b \in N$ $a + b \in N$ olup topluluk öz. sağlanır.
 $A \times A \Rightarrow A$ bir fonk. old. den ikili işlemdir.
 $a, b \in N$ $ab \in N$ olup topluluk öz. sağlanır.
 $A \times A \Rightarrow A$ bir fonk. old. den ikili işlemdir.

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız.

$a \in A$ nin a^{-1} diye a gibi 1 tane testi olsun. Ters eleman tanımından
 $a * b = b * a = e$
 $a * e = e * a = e$
 $a * b = e$ $a * e = e$ old. den $a * b = e$ denkleme a nı testi olan e yi
sola da b ye edelim.
 $e * (a * b) = e * e$ birleşme özelliğinden
 $(e * a) * b = e$ birim el. tan. ters eleman tanımında $e * a = e$ dir
 $e * b = e$ birim el. tanımından
 $b = e$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

Öncelikle e_1 ve e_2 $*$ işleminin etkisiz elemanları olsun denilmeliydi. Ayrıca e_1 ve $e_2 \in A$ old. belirtilmeliydi. Bunlara ek olarak $\forall a \in A$ için $a * e_1 = e_1$ ve $e_2 * a = e_2$ şeklinde birim elemanın tanım. tam olarak kullanılmıyordı. Ayrıca burada sadece sağda birim eleman kullanılmıştır.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$u, v \in H \quad \begin{aligned} u &= ax \equiv 0 \pmod{5} \\ v &= ay \equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

$$9) u+v \in H$$

$$\begin{aligned} ax &\equiv 0 \pmod{5} \\ + ay &\equiv 0 \pmod{5} \\ \hline a(x+y) &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

$$0 \equiv 0 \pmod{5} \text{ olduğundan } u+v \in H \text{ tır.}$$

$$ii) u \in H \text{ olsun } u^{-1} \in H \text{ midir?} \quad e = a \cdot 0 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$u+u^{-1} = e^{-1}$$

$$\begin{aligned} ax &\equiv 0 \pmod{5} \\ + u^{-1} & \\ \hline 0 &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

} her iki tarafa solda u nun toplama işlemine göre tersine işlem yaparsak.

$$\begin{aligned} (a(-x) &\equiv 0 \pmod{5}) \\ (ax &\equiv 0 \pmod{5}) \\ + u^{-1} & \\ \hline a(-x) &\equiv 0 \pmod{5} \\ a(0) &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 &\equiv 0 \pmod{5} \\ \Rightarrow u^{-1} &= a(-x) \equiv 0 \pmod{5} \in H \end{aligned}$$

H alt grubudur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$$a, b \in H \cap K \text{ olsun. } a * b^{-1} \in H \cap K \text{ midir?}$$

$$\begin{aligned} a \in H \cap K \text{ olduğundan } a &\in H \text{ ve } a \in K \text{ dir.} \\ b \in H \cap K \text{ olduğundan } b &\in H \text{ ve } b \in K \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$a \in H \text{ ve } b \in H \text{ olduğundan } H \text{ ta alt grup olduğu için } a * b^{-1} \in H \text{ tır.}$$

$$a \in K \text{ ve } b \in K \text{ olduğundan } K \text{ da alt grup olduğu için } a * b^{-1} \in K \text{ dir.}$$

$$a * b^{-1} \in H \text{ ve } a * b^{-1} \in K \text{ olduğundan } a * b^{-1} \in H \cap K \text{ dir. Sonuç olarak } H \cap K \leq G \text{ dir.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

bu ispatla birleşme özelliğinin sağlandığını göstermesi gerekirdi. Ayrıca ispatın gerek şart kısmından hiç bahsedilmemiştir. Gerek şart kısmında $H \leq G$ olduğu kabul edilip $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğu gösterilmeydi.

Doğrudan ispat yöntemiyle ispatlanmıştır.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi(x \cdot y) \stackrel{!}{=} \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$\varphi(xy) = |xy| = |x| |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \text{grup homomorfizmi dir.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$$\forall g \in G \quad (g, \cdot) \text{ grubudur } (H, \cdot) \text{ grubudur.}$$

$$\varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} \quad \text{dur. Grup homomorfizmi tanımlaması,}$$

$$\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n \text{ dir.}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için, $\varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a e_G)$
 $\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H)$ (φ homomorfizm olduğundan)...(1)

Ve benzer şekilde, $\varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_G a)$
 $\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_H) \varphi(a)$ (φ homomorfizm olduğundan)...(2)

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğunu elde ederiz. Hâlbuki biliyoruz ki bir grubun birim elemanı daima tektir. Böylece kabulümüzden H in birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
 B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☒ C. İspat yanlıştır. Çünkü
 D. Bir fikrim yok

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) e_H$$

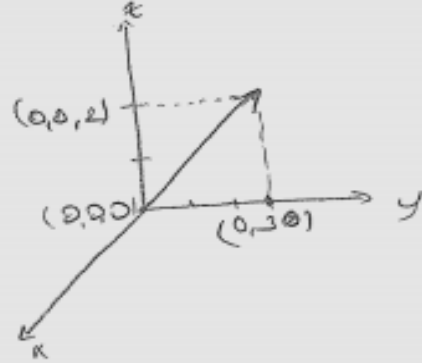
$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = e_H \varphi(a)$$

İspatla $\varphi(e_H)$ yazılmıyor $\varphi(a) \cdot \varphi(e_G) = \varphi(a)$ ve $\varphi(e_G) \cdot \varphi(a) = \varphi(a)$ olarak bırakılıp $\varphi(e_G)$ nin H grubunun etkisiz elemanı olduğu söylenmeli ve verilerden H nin etkisiz elemanının e_H olarak verildiği belirtilerek $\varphi(e_G) = e_H$ olduğu sonucuna ulaşılabilmektedir.

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\begin{cases} 1-x = 1+x \\ y-2 = 1 \\ 3 = z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu ispatlayınız.

$\vec{a} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zekinde bir vektör olsun.

$\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$ zekindedir.

$\vec{a} + \vec{0} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (0, 0, \dots, 0) = (u_1+0, u_2+0, \dots, u_n+0) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{a}$
vektörlerde toplama işleminin dağılım öz. vardır. diğer yolla da apikördü

Doğrudan ispat yöntemiyle teoremi ispatladık.

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımını ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri n boyutlu uzaydan seçilmeliydi. Doğrudan ispat yöntemiyle ispat yapılmıştır.

Hatice'nin Çözümleri

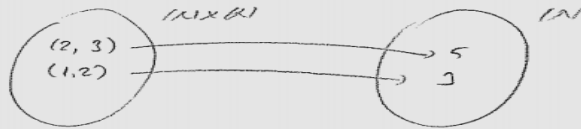
İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

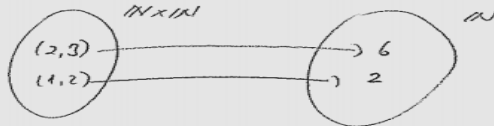
ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

- * $a, b \in \mathbb{N}$ için $a + b \in \mathbb{N}$ dir. (Kapatılık)
- * $a, b, c \in \mathbb{N}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Birleşme)
- * $0 \in \mathbb{N}$ için $a + 0 = 0 + a = a \Rightarrow 0 \in \mathbb{N}$ (Birim)
- * $a \in \mathbb{N}$ için $a + 0' = 0' + a = 0 \Rightarrow 0' = 0 \notin \mathbb{N}$
- * $(a, b) \rightarrow a + b \Rightarrow f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$



$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonk. olup $\mathbb{N}$ de bir ikili işlemdir.

- * $(a, b) \rightarrow a \cdot b \Rightarrow g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$



$\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonk. olup $\mathbb{N}$ de bir ikili işlemdir.

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız.

İspat: $a \in A$ nin tersi a_1, a_2 olsun. Ters eleman özelliğinden,

$$a \neq a_1 = a_1 * a = e \quad \text{ve} \quad a_2 * a = a * a_2 = e$$

olur. Birinci eşitlikte soldan a_2 ile işlem yapılırsa

$$a_2 * (a * a_1) = a_2 * (a_1 * a) \quad (\text{Birleşme ö.})$$

$$(a_2 * a) * a_1 = a_2 * (a_1 * a) \quad (2. \text{ eşitlikten})$$

$$e * a_1 = a_2 * e \quad (\text{Birim e. ö.})$$

$$a_1 = a_2 \quad (\text{Çarpma Bulma})$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
- ☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
- ☐ D. Bir fikrim yok

İspat ta

$$a * e_1 = e_1 * a = a$$

eşitliği kullanılsaydı sonuç daha rahat görülebilirdi. Değişme özelliğine vurgu yok dolayısıyla sıftı taraflı bakılmamalıydı.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

6.1 - $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z})$ a.1.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad (\text{kapalılık})$$

6.2 - $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} \quad (\text{Birleşme öz.})$$

6.3 - $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için

$$\frac{a}{b} + t = t + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Rightarrow t = 0 \in \mathbb{Q} \text{ olup } (\text{Birim e})$$

6.4) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için, $\frac{a}{b} + (\frac{a}{b})' = (\frac{a}{b})' + \frac{a}{b} = 0 \Rightarrow (\frac{a}{b})' = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ olup ters e. öz.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. **İspatlayınız.**

$(a^{-1})^{-1}, a^{-1}$ tersidir.

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e, \quad a * a^{-1} = e \quad \text{esittirlerince,}$$

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = a * a^{-1} \text{ dir. Sağda } a \text{ ile işlen yapıldı,}$$

$$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a * a^{-1}) * a \quad (\text{Grupta Birleşme öz.})$$

$$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = a * (a^{-1} * a) \quad (\text{Grupta Ters e. öz.})$$

$$(a^{-1})^{-1} * e = a * e \quad (\text{Grupta Birim e. öz.})$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

elde edilir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Oluş grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

İspatın başlangıcında,

$a * a = a$ olsun denkleme ilk başta devanın da, kullanarak

birim eleman ve ters eleman özelliklerinin belirtilmesiyle daha önceki
 net bir ispat olundu.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

* $\forall a x_1, a x_2 \in H$ isin,

$$a x_1 \equiv 0 \pmod{5} \quad \wedge \quad a x_2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a x_1 + a x_2 = a(x_1 + x_2) \equiv 0 \pmod{5}$$

olup H kapalıdır

* $\forall a x_1, a x_2, a x_3 \in H$ isin

$$a x_1 + (a x_2 + a x_3) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(a x_1 + a x_2) + a x_3 \equiv 0 \pmod{5}$$

olup birleşiklidir.

* $\forall a x_1 \in H$ isin

$$a x_1 + e = a x_1 \pmod{5} \text{ e göre doğrudur.}$$

$$e = 0 \in H$$

olup birim e vardır.

* $\forall a x_1 \in H$ isin $a x_1^{-1}$, $a x_1$ in tersini göstermek istene,

$$a x_1 + a x_1^{-1} = e = 0 \Rightarrow a x_1^{-1} = 0 \text{ olur.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. **İspatlayınız.**

Teorem ispatı:

* $\forall x_1, x_2 \in H \cap K \Rightarrow x_1, x_2 \in H \wedge x_1, x_2 \in K$ dir.

$H \leq G \wedge K \leq G$ olduğundan, $x_1, x_2 \in H \wedge x_1, x_2 \in K$ dir. Bu durumda $x_1, x_2 \in H \cap K$ olup kapalıdır.

* $\forall x_1, x_2, x_3 \in H \cap K \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in H \wedge x_1, x_2, x_3 \in K$ dir.

$H \leq G$ ve $K \leq G$ old. H ve K birleşiklidir o halde $H \cap K$ da * islemlere göre birleşiklidir.

* $\forall x_1 \in H \cap K$ isin $(H \leq G \wedge K \leq G)$ olup H ve K in birim elemanı vardır. Ve bu birim eleman G in birim elemanıdır. Dolayısıyla $H \cap K$ in birim elemanıdır.

* $\forall x_1 \in H \cap K$ isin $x_1 \in H \wedge x_1 \in K$ dir o halde $x_1^{-1} \in H$ ve $x_1^{-1} \in K$ vardır. Bu durumda $x_1^{-1} \in H \cap K$ dir.

O halde $H \cap K \leq G$ dir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

İspat yapılırken şart yeterlidir ispatlanmıştır. Şart gerektirir ; $H \leq G$ ise $a, b \in H$ isin $a * b^{-1} \in H$ oldu gösterilmelidir.

Şart yeterlidir yapılırken birleşme ö. bakılmamıştır.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

Çözüm: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

olup $|x|, |y| \in \mathbb{R}^+$ old. φ bir grup homomorfizmidir.

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

İspat: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi old. $\forall x, y \in G$,

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

dur. φ grup homomorfizmi old.

$$\begin{aligned}\varphi(g^{n-1} \cdot g) &= \varphi(g^{n-1}) \cdot \varphi(g) \\ &= \varphi(g)^{n-1} \cdot \varphi(g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(g^n) &= \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} \\ &= [\varphi(g)]^n\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

$\forall a \in G$ için,

$$\left. \begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) \\ \varphi(a) &= \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \varphi(a)\end{aligned} \right\} \begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(e_G) \varphi(a) \\ \varphi(e_G) &= e_H\end{aligned}$$

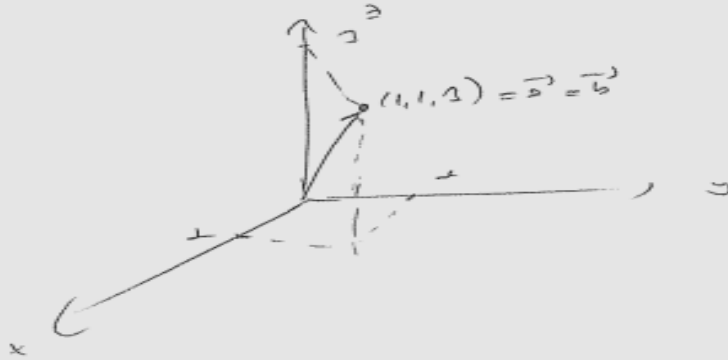
Çünkü birim e özelliği kullanılarak $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ old.

gösterilmiştir.

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\left. \begin{aligned} 1-x &= 1+x \Rightarrow 0=2x \Rightarrow x=0 \\ y-2 &= 1 \Rightarrow y=3 \\ 3 &= z+1 \Rightarrow z=2 \end{aligned} \right\} \vec{a} = \vec{b} = (1, 1, 3)$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu *ispatlayınız*.

İSPAT: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{0} = (0, 0)$ olsun.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{0} &= (a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) \\ &= (0 + a_1, 0 + a_2) \\ &= (0, 0) + (a_1, a_2) \\ &= \vec{0} + \vec{a} \end{aligned}$$

olup,

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$$

dir. Buna göre,

$$\vec{0} + \vec{a} = (0, 0) + (a_1, a_2) = (0 + a_1, 0 + a_2) = (a_1, a_2) = \vec{a}$$

olduğundan da,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

dir.

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

A. İspat eksiktir. Çünkü
☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlış. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

$\mathbb{R}^3$ de
 iki vektör seçilip tanımlanırken sonra skalerle çarpım ve toplama
 özelliklerinden yararlanılarak ispatta istenilen gösterilmiştir.

Ayfer'in Çözümleri İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a+b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

$$A \times A \rightarrow (a, b)$$

$$(1, 2) \in A \times A$$

$$1+2=3 \in A$$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$$* (a, b) \in A \times A \text{ iken } a+b \in A \text{ old. ikili işlem}$$

$$* a+b \in A \quad (1, 2) \in A \times A \quad 2 \in A \text{ ikili işlem}$$

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. İspatlayınız.

$a \in A$ nin a_1 ve a_2 gibi iki tane tersi olsun. Bu takdirde

$$a * a_1 = e = a_1 * a = e \quad \dots (1)$$

$$a * a_2 = e = a_2 * a = e \quad \dots (2)$$

$\rightarrow$ dolay $a_1 = a_2$

$$a * a_1 = a * a_2$$

$$(a_1 * a) * a_1 = a_1 * a * a_2 \rightarrow \text{birleşmeli olduğundan}$$

$$(a_1 * a) * a_1 = (a_1 * a) * a_2$$

$$e * a_1 = e * a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü ~~edilmiştir~~

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

✓ Adımlarda bir hata yoktur.

Sonuçta doğru ulaşılmıştır. Doğruyla

İspat doğrudur.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

1-) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad (b, d \neq 0)$ olmak üzere
 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$ olur. $\left(\begin{array}{l} ad+bc \in \mathbb{Z} \\ bd \in \mathbb{Z} \\ bd \neq 0 \end{array} \right)$
 (d) (b)

2-) $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \quad (b, d, f \neq 0)$

$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f}$ ($\mathbb{Z}$ da toplama işlemine göre dağılım özelliği olduğundan $\mathbb{Q}$ - elemanı $\mathbb{Z}$ den oluştuğundan $\mathbb{Q}$ da toplama işlemine göre dağılım özelliği vardır.)

3-) $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad e_2, e_1 \in \mathbb{Z}$

$\frac{a}{b} + \frac{e_2}{e_1} = \frac{a}{b}$ $(e_1, b \neq 0)$ olmak üzere $\frac{e_2}{e_1}$ birim elemanı 0'dır.

$\frac{e_2}{e_1} = 0$

4-) $a, b \neq 0, a', b' \in \mathbb{Z} \quad b, b' \neq 0 \quad \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = 0 \quad \frac{a'}{b'} = -\frac{a}{b}$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. İspatlayınız. Ters elemanıdır.

$(G, *)$ bir grup olduğundan $a \in G$ için $a^{-1} \in G$ dir.

$a^{-1} \in G$ olduğundan $(a^{-1})^{-1} \in G$ dir.

$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e \quad (1)$ I ve 2 eşitliklerin
 $a * a = e \quad (2)$ den;

$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = a^{-1} * a \rightarrow$ Soldan a uygulanırsa

$a * a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = a * a^{-1} * a \rightarrow$ Grupta

$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = (a * a^{-1}) * a$ birleşme özelliğinden

$e * (a^{-1})^{-1} = e * a \rightarrow$ Birim elemanı özelliğinden

$(a^{-1})^{-1} = a$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim. ✓

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$

Oluş grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$

Yazarız. Bu da,

$e * a = e$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü birim

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

Çünkü birim elemanı sağdan değil soldan uygulanmalıdır. Yani $e * a = a * e = e$ olmalıdır. Grupta dağılım özelliğinin belirlenmesi gerektirir.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}$$

$$ax \equiv 0 \pmod{5}$$

$$+ ay \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a(x+y) \equiv 0 \pmod{5} \text{ olduğundan kapalıdır.}$$

$(G, *)$ bir gr-p olduğundan

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow -x \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$y \in \mathbb{Z} \rightarrow -y \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$-ax \equiv 0 \pmod{5}$$

$$-ay \equiv 0 \pmod{5}$$

$$-a(x+y) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a(x+y) \equiv 0 \pmod{5}$$

Kapalık ve ters eleman barındırması sağlandığından alt gr-p'tir.

Theorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$H \leq G$ ve $K \leq G$ olduğunu kabul edelim.

$$h_1, h_2 \in H$$

$$H \leq G \text{ olduğundan } h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$$

$$k_1, k_2 \in K$$

$$K \leq G \text{ olduğundan } k_1 \cdot k_2^{-1} \in K$$

$$H \cap K \leq G$$

$$x, y \in H \cap K$$

$$H \cap K \leq G \quad xy^{-1} \in H \cap K \text{ dir.}$$

Theorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

~~C. İspat yanlıştır.~~ Çünkü

D. Bir fikrim yok

C-) İspat yanlıştır çünkü gerek şart ispatlanmamıştır. $H \leq G$ olduğunda $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olduğu göstermek gerektirirdi.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\varphi(x \cdot y) = |xy| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$$\varphi(g^n) = \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_{n \text{ tane}} = [\varphi(g)]^n$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir. Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ 'nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☒ C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$$\varphi(a) = \varphi(a \cdot e_G) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) = \varphi(a) \cdot e_H \quad \dots \quad (1)$$

$$\varphi(a) = \varphi(e_G \cdot a) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(a) = e_H \cdot \varphi(a) \quad \dots \quad (2)$$

(1) ve (2) ifadelerinden $\varphi(e_G) = e_H$ alınabilir.

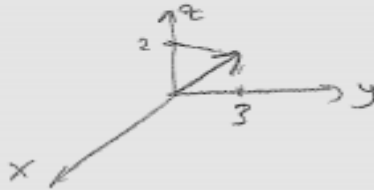
Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$\vec{a} = \vec{b}$$

$$\begin{array}{lcl} 1-x = 1+x & y-2 = 1 & 3 = z+1 \\ \underline{x=0} & \underline{y=3} & \underline{z=2} \end{array}$$

$(0, 3, 2) \Rightarrow yz$ düzlemi



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu *ispatlayınız*.

$$\vec{0} = (0, 0, 0) \quad z \text{ ekseninde olsun.}$$

$$\vec{a} = (x, y, z)$$

$$\vec{a} + \vec{0} = (x, y, z) + (0, 0, 0) = (x+0, y+0, z+0) = (x, y, z) = \vec{a}$$

$$\vec{0} + \vec{a} = (0, 0, 0) + (x, y, z) = (0+x, 0+y, 0+z) = (x, y, z) = \vec{a}$$

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

✓ a, b vektörleri karta yapılmadan doğru sonucu ulaşılmaz.

Aysel'in Çözümleri

İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $.$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$a, b \in \mathbb{N}, a + b \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$a, b \in \mathbb{N}, a \cdot b \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir, İspatlayınız.

a_1 ve a_2 ters eleman.

$$a_1 * a = a * a_1 = e \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2 * a = a * a_2 = e \quad \text{--- (2) olur.}$$

$$a_1 * a = e \Rightarrow (a_1 * a) * a_2 = e * a_2$$

$$a_1 * (a * a_2) = e * a_2$$

$$a_1 * e = a_2$$

$$a_1 = a_2$$

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
 (B) İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
 D. Bir fikrim yok

$e_1, e_2 \in A$ e_1 ve e_2 , A da $*$ işleminin iki etkisiz elemanı olsun.

$$\left. \begin{array}{l} e_2 * e_1 = e_2 \\ e_1 * e_2 = e_1 \end{array} \right\} e_1 = e_2$$

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

G1) $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ve $b \neq 0 \neq d$ olsun.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d \neq 0} \in \mathbb{Q} \quad \checkmark$

G2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a.d + b.c}{b.d} + \frac{e}{f} = \frac{f(a.d + b.c) + b.d.e}{b.d.f}$

$(\mathbb{Z}, +)$ ve $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bir grup old. den birleşmektedir.

G3) $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} + \frac{e_1}{e_2} = \frac{e_1}{e_2} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $e_1 = 0$

G4) $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = -\frac{a}{b}$ dir. $0 \in \mathbb{Q}$ $e_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. İspatlayınız.

G bir grup ve $a \in G$ old. $a^{-1} \in G$ dir

$(a^{-1}) \in G$ old. den $(a^{-1})^{-1} \in G$ dir. ($e \in G$ birim el. old)

$a * a^{-1} = e$

$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$ birleşme öz. dir

$a * \underbrace{a^{-1} * (a^{-1})^{-1}} = (a^{-1})^{-1}$

$a * e = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$ etki edilm.

$P \Rightarrow Q$

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$

Yazarız. Bu da, etkisiz el. öz. den

$e * a = e$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

- A) İspat eksiktir. Çünkü
B) İspat doğrudur. Çünkü

- C) İspat yanlıştır. Çünkü
D) Bir fikrim yok

Çünkü etkisiz ve ~~ters~~ element özelliklerinden kullanıldığı, ifade edilmemiştir.

$e * a = e$

Alt Grup

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$ax_1, ax_2 \in H$ olsun. Buradan,
 $ax_1 \equiv 0 \pmod{5}$
 $ax_2 \equiv 0 \pmod{5}$
 olur. $(ax_1) + (ax_2)^{-1} \in H \Rightarrow H \leq \mathbb{Z}$ dir.

$$\begin{array}{r} ax_1 \equiv 0 \pmod{5} \\ -ax_2 \equiv 0 \pmod{5} \end{array}$$

$$ax_1 - ax_2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{5} \in H \text{ old. den.}$$

$$H \leq \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

Teorem: $(G, *)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. *İspatlayınız.*

$a, b \in H \cap K$ olsun. $a * b^{-1} \in H \cap K$ old. göst.

$a, b \in H \cap K$ ise kes. tanımından

$a, b \in H$ ve $a, b \in K$ dir.

$H \leq G$ ve $K \leq G$ hipotezinden
 $a * b^{-1} \in H$ ve $a * b^{-1} \in K$ dir.

Kes.şimin tan. den,

$$a * b^{-1} \in H \cap K$$

olur. Buradan $H \cap K \leq G$ elde edilir.

Teorem: $(G, *)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ ✓ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
 B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
 D. Bir fikrim yok

Çünkü $H \subset G$ old. den H nin tüm elemanları G de dir. G de ki elemanlar birleşme öz. sayıladığından H daki elemanların birleşme öz. sayıladığı aşıkandır.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$x, y \in \mathbb{R}^+, \quad x, y \neq 0$$

$$\varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

homomorfizmdir. ✓

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$$\begin{aligned} \varphi(g, g^{n-1}) &= \varphi(g) \cdot \varphi(g^{n-1}) \text{ dir.} \\ &= \vdots \\ &= \underbrace{\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdots \varphi(g)}_n \\ &= [\varphi(g)]^n \end{aligned}$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Halbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

~~C. İspat yanlıştır. Çünkü~~

~~D. Bir fikrim yok~~

$$\varphi(a) = \varphi(a, e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G)$$

$$\varphi(e_G) = e_H$$

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_H)$$

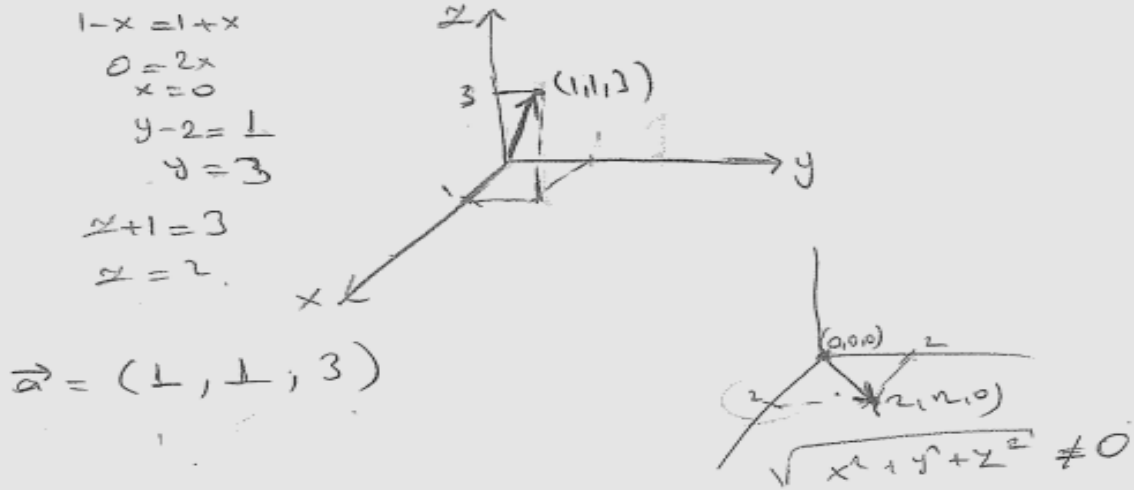
$$\varphi(e_1) = e_2$$

$\downarrow$
 H

$$e_1 = e_2$$

Vektörler

Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu ispatlayınız.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \vec{0} &= (0, 0, \dots, 0) \\ \vec{a} + \vec{0} &= (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) \\ 0 + \vec{a} &= (0 + a_1, 0 + a_2, \dots, 0 + a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \vec{a}\end{aligned}$$

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur}\end{aligned}$$

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
☐ B. İspat doğrudur. Çünkü

- ☐ C. İspat yanlıştır. Çünkü
☐ D. Bir fikrim yok

Selektörler n-beyutlu uzaydan seçilmeliydi.

Nazlı'nın Çözümleri İkili İşlem

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

N doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $N \times N \rightarrow N$ üzerinde;
 $+$ ve $\cdot$ fonksiyonlarının sonuçları bir N de bir değer olduğundan
her ikisi birer ikili işlemdir.

Teorem: $*, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nin tersi varsa tektir. **İspatlayınız.**

$a_1, a_2 \in A$ ve A nın birbirinden farklı iki tersi olsun. Bu
elementleri $*$ işlemine tabi tuttığımızda,

$$a_1 * a = e \Rightarrow (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$a_2 * a = e \Rightarrow (a_2 * a) * a_1 = e * a_1 \Rightarrow a_2 = a_1$$

olmayana eşitliği kullanıldı.

Teorem: $*, A$ da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- ☒ A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

Başlangıçta hata yok. Verilen denklemlerde birleşme özelliği
kullanılarak bir elemana ulaşılabiliyordu. Burada yapılan şey ispat
işin özel bir bölümü olduğu.

Grup

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

$$(G, +) \quad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in G \text{ olsun.}$$

$$G1) \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in G \text{ için } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in G$$

$$G2) \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in G \text{ için } \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$$G3) \forall \frac{a}{b} \in G \text{ için } \frac{a}{b} + e = e + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Rightarrow e = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \text{ olduğundan}$$

birim elemanı $e = 0$ dir.

$$G4) \forall \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} + x' = 0 \Rightarrow x' = -\frac{a}{b} \text{ olduğundan } \text{ters elemanı da}$$

vardır ve $-\frac{a}{b}$ dir.

4 özelliği de sağladığından gruptur.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir. İspatlayınız.

$a \in G$ olsun. Bu bir grup olduğun için $a^{-1} \in G$ vardır. Buradan da $a * a^{-1} = e$ olur. O halde $(a^{-1})^{-1} \in G$ vardır.

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e \text{ de sağlanır. Buna göre}$$

$$a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$$

Bu eşitliği sağdan a ile $*$ işlemine tabi tuttuğumuzda

$$(a * a^{-1}) * a = ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a$$

$$a * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a)$$

$$a * e = (a^{-1})^{-1} * e$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

olduğu görülür.

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü

☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

İspatı doğru göstermiştir. Kullanılan baranoklarda birim elemanı özelliğini, birleşme özelliğini; doğru olarak kullanmıştır. Dolayısıyla ispatı istediği sonucu almıştır.

Alt Grup

Problem: a sabit bir tam sayı olmak üzere;

$H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

$$n = 1, 2 \quad a \equiv 0 \pmod{5} \in H \\ 2a \equiv 0 \pmod{5} \in H$$

$$(1) \quad a \equiv 0 \pmod{5}, 2a \equiv 0 \pmod{5} \in H$$

$$\begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod{5} \\ 2a \equiv 0 \pmod{5} \\ \hline 3a \equiv 0 \pmod{5} \in H \end{array}$$

kapalıdır.

$$(2) \quad a \equiv 0 \pmod{5}, 2a \equiv 0 \pmod{5}, 3a \equiv 0 \pmod{5} \in H$$

$$(a \equiv 0 \pmod{5} + 2a \equiv 0 \pmod{5}) + (3a \equiv 0 \pmod{5}) = 3a \equiv 0 \pmod{5} + 3a \equiv 0 \pmod{5} \\ = 6a \equiv 0 \pmod{5} = a \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(a \equiv 0 \pmod{5}) + (2a \equiv 0 \pmod{5} + 3a \equiv 0 \pmod{5}) = a \equiv 0 \pmod{5} + 5a \equiv 0 \pmod{5} \\ = 6a \equiv 0 \pmod{5} = a \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(3) \quad a \equiv 0 \pmod{5}, 0 \equiv 0 \pmod{5} \in H \text{ için}$$

$$(a \equiv 0 \pmod{5} + 0 \equiv 0 \pmod{5}) = a \equiv 0 \pmod{5} \text{ o.k. } 0 \equiv 0 \pmod{5} = e$$

Teorem: $(G, \cdot)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. İspatlayınız.

$$(1) \quad x, y \in H \cap K \text{ için } x \cdot y \in H \cap K \text{ olduğunu göstermek}$$

$x, y \in H$ ve $x, y \in K$ olduğundan $\cdot$ işleminin göre $x \cdot y \in H \cap K$ olur.

$$(2) \quad x, y, z \in H \cap K \text{ için } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

H, K grup olduğundan her ikisine ilişkilili yapıldıktan sonra

göstermek gerekir.

$$(3) \quad x, e \in H \cap K \quad x \cdot e = x$$

$x, e \in H$ ve $x, e \in K$ olduğundan H ve K birimlerinin ilişkileri karşılanır.

$$(4) \quad x, x^{-1} \in H \cap K \quad x \cdot x^{-1} = e \quad H, K \text{ terslerinin ilişkileri karşılanmaktadır.}$$

Teorem: $(G, \cdot)$ bir grup H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a \cdot b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a \cdot b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a \cdot a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $a, b \in H$ için hipotezden, $a \cdot b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarsak. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a \cdot b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

- (A) İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

İspat eksiklikten dolayı Teorem ispatının her ikisi birimlerinin ve terslerinin ilişkilerine bakılmıyorken sadece ilişkilili gösterilmiştir.

Grup Homomorfizmi

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

φ bir grup homomorfizmidir.

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o takdirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. İspatlayınız.

$$\forall g \in G \text{ için} \quad \varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_n) = \underbrace{(\varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g))}_n$$

$$\varphi(g^2) = \varphi(g \cdot g) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) = (\varphi(g))^2$$

$$\varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_n) = \varphi(g) \cdot \varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g) = (\varphi(g))^n$$

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre;

e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dir.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a e_G) = \varphi(a) \varphi(e_G) = \varphi(a) \varphi(e_H) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G) \varphi(a) = \varphi(e_H) \varphi(a) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan}) \dots \dots \dots (2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

(1) ve (2) adımları doğrudur. Buradan $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$

sonucu da doğrudur. O halde yalnız bir tane birim elemanı olması gerekliliğinden de sonucu ulaştırmıştır.

Vektörler

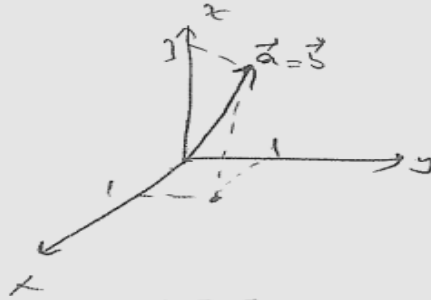
Problem: $\vec{a} = (1-x, y-2, 3)$ ve $\vec{b} = (1+x, 1, z+1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

$$1-x = 1+x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

$$y-2=1 \Rightarrow y=3$$

$$3 = z+1 \Rightarrow z=2$$

$$\vec{a} = (1, 1, 3) \quad \vec{b} = (1, 1, 3)$$



Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu ispatlayınız.

$$\vec{a} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{a} + \vec{0} = (x, y) + (0, 0) = (x+0, y+0) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (1)$$

$$\vec{0} + \vec{a} = (0, 0) + (x, y) = (0+x, 0+y) = (x, y) = \vec{a} \quad \dots (2)$$

(1) ve (2) den $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olur.

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımını ve $\mathbb{R}$ deki dağılım özelliği kullanılarak;

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3))$$

$$= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3)$$

$$= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3)$$

$$= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
☒ B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

$\mathbb{R}^3$ deki vektör olarak ise göstermiştir. Skalerle çarpım ve toplam tanımına dağılım özelliklerini deprem kullanmıştır. Anadepi sonucu da deprem bir şekilde de kullanmıştır.

EK 2. Matematiksel İspat Görüş Mülakat Formu

Adı ve Soyadı:

No:

Tarih ve Saat:

Yer:

Benim adım Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde doktora öğrencisiyim. Bu mülakatta amacım Orta Öğretim Matematik Öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmaktır. Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların, öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik ön yargılarını gidermede katkıda bulunacağına ümit ediyorum. Bu nedenle sizin bu konuyla ilgili düşüncelerini öğrenmek istiyorum. Bana mülakat sürecinde vereceğiniz bilgilerin tamamı gizli kalacaktır. Mülakatı izin verirsiniz kayıt etmek istiyorum. Bunun sizce bir sakıncası var mı? Bu mülakat yaklaşık olarak 40-45 dakika sürecek. Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Mülakat Soruları

1. Size göre matematiksel ispat nedir? Açıklayınız.
2. Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?
3. Matematiksel ispat yapmanın amacı size göre nedir?
4. Matematikte ispat yapmak size göre ne kadar önemlidir? Lütfen açıklayınız.
5. Matematiksel bir ifadede ispatı gerektiren nedir?
 - a. Bir ispatı yaparken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz?(Adımları araştırma, Nasıl başlarsınız, Nasıl devam edersiz)
 - b. Bir ispatı tamamladığınızı nasıl anlarsınız?
6. Matematiksel bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken nelere dikkat etmek gerekir?
7. Matematiksel tanımlar sizin için ne anlam ifade ediyor?
8. Matematiksel tanımların matematiksel ispattaki rolü nedir? Bana bir örnek verebilir misiniz?
9. Matematiksel ispat ile matematiksel problem çözme arasındaki varsa farklar ve benzerlikler nelerdir?
10. “Matematikte her problem çözme aktivitesi aslında bir ispattır” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?
11. “Matematikte yapılan her ispat aslında bir problem çözme aktivitesidir” görüşü hakkında neler söyleyebilirsiniz?

EK 3. İkili İşlem Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu

Sevgili öğrenciler aşağıdaki problemleri sesli düşünerek yanıtlamanız gerekmektedir. Problemlere vereceğiniz yanıtlar bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler katılımcılara verilen takma isimlerle aktarılacak ve katılımcıların kimlikleri gizli tutulacaktır. Katılımınız için teşekkürler...

Tanım: A da $*$ ve $\circ$ ikili işlem olsun. $\forall a, b, c \in A$ için;

- i. $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ ise $*$ işleminin $\circ$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.
- ii. $((a \circ b) * c) = (a * c) \circ (b * c)$ ise $*$ işleminin $\circ$ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır.

Tanım: $*$, A da tanımlı bir ikili işlem olsun. $\forall a \in A$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa e ye $*$ işlemi için etkisiz (birim) eleman denir.

Tanım: $*$, A da bir ikili işlem ve $e \in A$ birim elemanı olsun. Bir $a \in A$ elemanı için, $a * a' = a' * a = e$ eşitliğini sağlayan bir $a' \in A$ varsa a' ye a nın tersi denir.

Tanım: $\forall a, b, c \in A$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise o zaman $*$ işlemine birleşmelidir denir.

Tanım: $\forall a, b \in A$ için $a * b = b * a$ ise o zaman $*$ işlemine değişmelidir denir.

Problem: N doğal sayılar kümesi üzerinde;

- $(a, b) \rightarrow a + b$
- $(a, b) \rightarrow ab$

ile tanımlı $+$ ve $.$ fonksiyonlarının birer ikili işlem olup olmadığını araştırınız.

Teorem: $*$, $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde birleşmeli ve birimi e olan bir ikili işlem olsun. O takdirde $a \in A$ nın tersi varsa tektir. ***İspatlayınız.***

Teorem: $*$, A da tanımlı bir ikili işlem olsun. A da $*$ işleminin etkisiz elemanı varsa tektir.

Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: Kabul edelim ki e_1 ve e_2 iki etkisiz eleman olsun. e_1 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_1 = a$ olur ve özel olarak $a = e_2$ alınırsa, $e_2 * e_1 = e_2$ bulunur. Aynı şekilde e_2 bir etkisiz eleman olduğundan, $\forall a \in A$ için $a * e_2 = a$ ve özel olarak $a = e_1$ alınırsa $e_1 * e_2 = e_1$ bulunur. Elde edilen eşitlikler karşılaştırılırsa $e_1 = e_2$ olduğu görülür.

- A. İspat eksiktir. Çünkü
- B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
- D. Bir fikrim yok

EK 4. Grup Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu

Sevgili öğrenciler aşağıdaki problemleri sesli düşünerek yanıtlamanız gerekmektedir. Problemlere vereceğiniz yanıtlar bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler katılımcılara verilen takma isimlerle aktarılacak ve katılımcıların kimlikleri gizli tutulacaktır. Katılımınız için teşekkürler...

Tanım: G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına (ya da G kümesine $*$ işlemine göre) bir gruptur denir.

G1) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ (Kapalılık şartı)

G2) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme özelliği)

G3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

G4) G kümesindeki her bir a için e , G 'nin birim elemanı olmak üzere

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak şekilde $a' \in G$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

Problem: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur? Araştırınız.

Teorem: $(G,*)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır. *İspatlayınız.*

Teorem: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre, $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.
Aşağıdaki ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $a \in G$ için;

$a * a = a$ olduğunu kabul edelim.

Bu denklemin her iki tarafını soldan a nın tersi ile işleme katalım. Bu durumda,

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

Olup grubun birleşme özelliğini kullanarak;

$$(a^{-1} * a) * a = a^{-1} * a$$

Yazarız. Bu da,

$$e * a = e$$

Dolayısıyla $a = e$ olmasını gerektirir.

A. İspat eksiktir. Çünkü

B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü

D. Bir fikrim yok

EK 5. Alt Grup Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu

Sevgili öğrenciler aşağıdaki problemleri sesli düşünerek yanıtlamanız gerekmektedir. Problemlere vereceğiniz yanıtlar bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler katılımcılara verilen takma isimlerle aktarılacak ve katılımcıların kimlikleri gizli tutulacaktır. Katılımınız için teşekkürler...

Tanım: $(G,*)$ bir grup ve H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse yani $(H,*)$ cebirsel yapısı bir grup ise o takdirde $(H,*)$ 'a $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Problem: a sabit bir tamsayı olmak üzere;
 $H = \{x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 0 \pmod{5}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubu mudur? Araştırınız.

Teorem: $(G,*)$ bir grup $H \leq G$ ve $K \leq G$ ise, o takdirde $H \cap K \leq G$ dir. ***İspatlayınız.***

Teorem: $(G,*)$ bir grup H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olsun. Özel olarak $a = b$ alırsak o takdirde $a * a^{-1} = e \in H$ bulunur. Diğer yandan $e, b \in H$ için hipotezden, $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yazarız. Dolayısıyla $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olur. Ayrıca G bir grup ve H da alt küme olduğundan, $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$ olur. Dolayısıyla bu iki durumdan, $H \leq G$ olduğu görülür.

A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

EK 6. Grup Homomorfizmi Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu

Sevgili öğrenciler aşağıdaki problemleri sesli düşünerek yanıtlamanız gerekmektedir. Problemlere vereceğiniz yanıtlar bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler katılımcılara verilen takma isimlerle aktarılacak ve katılımcıların kimlikleri gizli tutulacaktır. Katılımınız için teşekkürler...

Tanım: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlarsa φ 'ye bir grup homomorfizmi yada kısaca bir homomorfizm denir.

Problem: $\varphi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ için $\varphi(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizmi midir? Araştırınız.

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ise o taktirde $\forall g \in G$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$ dir. ***İspatlayınız.***

Teorem: $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Buna göre; e_G , G 'nin birim elemanı ve e_H , H grubunun birim elemanı olmak üzere $\varphi(e_G) = e_H$ dır.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\forall a \in G$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G) = \varphi(a)\varphi(e_H) \text{ (}\varphi \text{ homomorfizm olduğundan)} \dots\dots\dots(1)$$

Benzer şekilde

$$\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G)\varphi(a) = \varphi(e_H)\varphi(a) \text{ (}\varphi \text{ homomorfizm olduğundan)} \dots\dots\dots(2)$$

Yazarız. Şimdi (1) ve (2) ifadelerinden, $\varphi(e_G) = \varphi(e_H) = e_H$ olduğu ve $\varphi(e_G)$ nin H grubunun birim elemanı olduğu elde edilir. Hâlbuki bir grubun birim elemanı yalnız bir tanedir. O halde kabulümüzden H grubunun birim elemanı e_H olduğundan $\varphi(e_G) = e_H$ sonucunu elde ederiz.

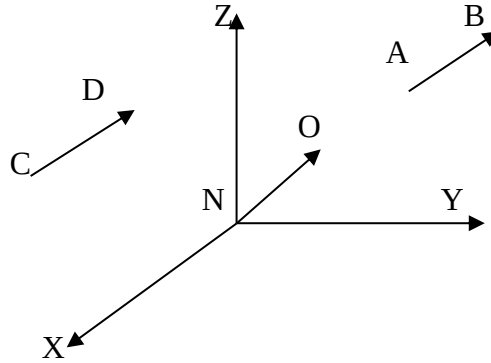
- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

EK 7. Vektör Kavramına Yönelik Klinik Mülakat Formu

Sevgili öğrenciler aşağıdaki problemleri sesli düşünerek yanıtlamanız gerekmektedir. Problemlere vereceğiniz yanıtlar bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler katılımcılara verilen takma isimlerle aktarılacak ve katılımcıların kimlikleri gizli tutulacaktır. Katılımınız için teşekkürler...

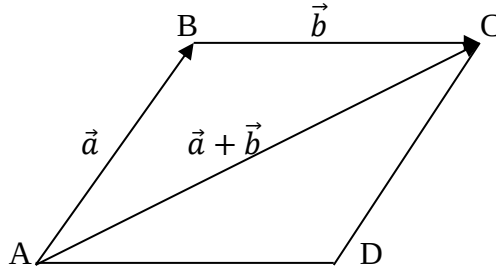
Tanım: Uzayın herhangi bir noktasını başlangıç noktası olarak alabilen paralel, aynı yönlü ve eşit uzunluktaki doğru parçalarının bütününe bir vektör denir.



Tanım: Tüm vektörlerin kümesini V ile gösterelim. $\vec{a}, \vec{b} \in V$ olmak üzere $\vec{a} + \vec{b} \in V$ vektörünü bulmak isteyelim. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ve $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ olmak üzere bu vektörlerin toplamı;

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

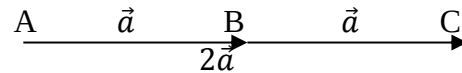
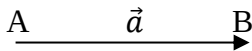
olarak tanımlanır.



Tanım: $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, n -boyutlu Euclides uzayında iki vektör olsun. Eğer, $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$ ise $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri eşittir denir.

Tanım: Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan vektöre sıfır vektörü denir. $\vec{0}$ şeklinde gösterilir.

Tanım: $k \in \mathbb{R}$ bir skaler ve $\vec{a}$ bir vektör olmak üzere, $\vec{a}$ nın her bileşenini k ile çarpmakla elde edilen vektör $k\vec{a}$ vektörüdür.



Problem: $\vec{a} = (1 - x, y - 2, 3)$ ve $\vec{b} = (1 + x, 1, z + 1)$ vektörlerinin eşit olması için x, y, z ne olmalıdır. Araştırınız. Ayrıca elde ettiğiniz vektörü koordinat sisteminde gösteriniz.

Teorem: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olduğunu *ispatlayınız*.

Teorem: $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $s \in \mathbb{R}$ için $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$ olur.

Aşağıda verilen ispatın doğruluğunu değerlendiriniz. Cevabınızı açıklayınız.

İspat: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alalım, $s \in \mathbb{R}$ olsun. Skalerle çarpım ve toplam tanımı ve $\mathbb{R}$ deki dağılma özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), s(a_3 + b_3)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, sa_3 + sb_3) \\ &= (sa_1, sa_2, sa_3) + (sb_1, sb_2, sb_3) \\ &= s\vec{a} + s\vec{b} \text{ bulunur} \end{aligned}$$

- A. İspat eksiktir. Çünkü
B. İspat doğrudur. Çünkü

- C. İspat yanlıştır. Çünkü
D. Bir fikrim yok

EK 8. Gönüllülük Sözleşmesi

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan “Öğretmen Adaylarının Cebir Öğrenme Alanında İspat Süreçlerinin İncelenmesi” çalışmasını yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakatlara katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Mülakatlar sırasında ve mülakatlar devam ederken katılımcılar çalışmaya devam edip etmeme konusunda özgür olacaklardır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır. Ancak araştırmanın sonuna kadar katılan tüm katılımcılara çalışma sonunda kitap seti hediye edilecektir.

Mülakatlar süresince katılımcılar hiçbir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Eğer herhangi bir olumsuzluk veya risk durumu ortaya çıkarsa mülakatlara ara verilecektir. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır.

Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana 0442 231 4269 numaralı telefondan ve ya gguler@atauni.edu.tr adresinden ulaşabilirsiniz. Ayrıca çalışma ile ilgili danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile de 0442 231 4207 numaralı telefondan veya rdikici@atauni.edu.tr adresinden görüşebilirsiniz.

Saygılarımla,

Gürsel GÜLER

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı:

Tarih:

İmza:

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Yozgat'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Yozgat'ta tamamladı. Lisans öğrenimini ise Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamlayarak, 2006 yılında mezun oldu. 2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında İzmir/Menemen'de Menemen Kız Meslek Lisesinde matematik öğretmenliği yaptı. 2007-2008 Eğitim Öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Doktora eğitimine başladı. Doktora öğrenimine devam ettiği sırada Şubat 2009'da Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. Halen Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde görev yapmaktadır.