

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

BİR GRAFIN LAPLASYEN MATRİSİNİN
ÖZDEĞERLERİ ve DİĞER GRAF
DEĞİŞMEZLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Hande TUNÇEL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 21.06.2013

Bornova-İzmir

2013

Hande TUNÇEL tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan ”**Bir Grafin Laplasyen Matrisinin Özdeğerleri ve Diğer Graf Değişmezleri Arasındaki İlişki**” baslikli bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **21.06.2013** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile basarili bulunmustur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Baskanı	: Prof. Dr. Pınar Dündar	
Raportör Üye	: Prof. Dr. Alpay Kırlangıç	
Üye	:Yard. Doç. Dr. Vecdi AYTAÇ	
Üye	:Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ	
Üye	:Prof. Dr. Mehmet SEZER	

ÖZET

BİR GRAFIN LAPLASYEN MATRİSİNİN ÖZDEĞERLERİ VE DİĞER GRAF DEĞİŞMEZLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

TUNÇEL, Hande

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Pınar Dünder

Mayıs 2013, 80 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusu ve tezde yapılan çalışmalar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bir grafin Laplasyen matrisi ve özdeğerleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Daha sonra işaretli grafların Laplasyen matrisi ve özdeğerleri ile ilgili tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir işaretli grafin normalize Laplasyen spektrumuna ait örüntü (interlacing) sonuçları verilmiştir. Ayrıt atma, tepe büzme, tepe ikileme gibi işlemlerinden sonra ortaya çıkan özdeğer örüntü sonuçlarının yanında, işaretli graflar için ardışık büzme işlemi tanımlanmıştır ve baskınlık sayısı ile ilişkilendirilip, örüntü sonucu elde edilmiştir. Ayrıca, 1 özdeğeri ile ardışık büzme, motif ve tepe çoğaltma işlemleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, işaretli graflar için join, tamamlayıcı prizmalar ve coalescence işlemleri ele alınıp denge durumları incelenmiştir. Grafların denge durumlarına göre, işaretli grafin Laplasyen özdeğerleri ile ilgili sınır değerler bulunmuştur.

Beşinci bölümde, işaret dereceli Laplasyen matris tanımı ortaya koyulmuştur. Tanımlanan bu yeni matrise ait, temel özellikler verilmiştir. Ayrıca, işaretli grafların Laplasyen matrisinin spektrumu ile işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumuna ait örüntü sonuçları elde edilip, iki matrisin spektrumu arasında ilişki kurulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Laplasyen matris, normalize Laplasyen matris, özdeğerler, örüntü (interlacing), graf işlemleri, baskınlık sayısı.

ABSTRACT

RELATION OF LAPLACIAN MATRIX OF A GRAPH AND OTHER GRAPH INVARIANTS

TUNÇEL, Hande

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Pınar Dündar

May 2013, 80 pages

This thesis essentially consists of five chapters. In the first chapter, information concerning the subject of the thesis and works which are related with this subject are shortly given.

In the second chapter, firstly basic definitions, properties and theorems related with Laplacian matrix, normalized Laplacian matrix and signed graphs are involved.

In the third chapter, some interlacing results are given about normalized Laplacian spectrum. Moreover, when such a sequence of contraction operation is well defined for signed graphs are introduced and set up interlacing relation between signed graph Γ and this well defined successive contractions associated with domination number $\gamma(G)$. Also, effect of successive contraction, motif and vertex doubling operations on eigenvalue 1 is investigated.

In the fourth chapter, join, complementary prisms and coalescence operations for signed graphs and balanceness of these operations are discussed. Beside, according to balanceness of graph, some boundary results for Laplacian eigenvalues are obtained.

In the fifth chapter, the signed degree Laplacian matrix is introduced and some fundamental properties of the matrix are given. Furthermore, some interlacing results are obtained both Laplacian of signed graphs and signed degree Laplacian matrix and relation between spectra of these two matrix is constructed.

Key Words: Laplacian matrix, normalized Laplacian matrix, eigenvalues, interlacing, domination number.

TEŞEKKÜR

Beş buçuk yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin hazırlanması sürecinde,

- bana güvenen ve doktora yapma fırsatını veren, bilgi, deneyim ve öğrettikleri ile yol gösterici olmus, sayın hocam Prof. Dr. Pınar DÜNDAR’a
- bütün yardım, tavsiye ve yönlendirmeleri için bu tezin ortaya çıkmasında çok büyük katkısı olan, ikinci danışman hocam Fatihcan M. ATAY’a ve sağladıkları maddi manevi her türlü destek için, başta direktör Jurgen JOST olmak üzere Max Planck Institute Mathematics for Science, Leipzig’e
- tez izleme komitemde olan ve verdiği tavsiye ve yönlendirmelerle tezimin gelişmesini sağlayan Alpay KIRLANGIÇ ve Vecdi AYTAÇ’a
- doktora öğrenimim süresinde BİDEB 2211 programı ile sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK’a,
- bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir destekten kaçınmayan ve her zaman bana arkamda olduklarını hissettiren aileme ve Elgin GÖLPEK’e.

yürekten teşekkür ederim.

HANDE TUNÇEL

Mayıs 2013

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZGELER DİZİNİ	xiv
SİMGELER DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 GENEL BİLGİLER	4
2.1 Bir Grafin Laplasyen Matrisi	4
2.2 İşaretli Graflar	6
2.3 İşaretli Graflarda Laplasyen Matris	7
2.4 İşaretli Grafların Laplasyen Spektrumu	8
2.5 Bir Grafin Normalize Laplasyen Matrisi	11
2.6 İşaretli bir Grafin Normalize Laplasyen Matrisi	13
3 İŞARETLİ GRAFIN NORMALİZE LAPLASYEN MATRİSİNİN ÖZDEGERLERİ ve ÖRÜNTÜ İLE İLGİLİ SONUÇLAR	15
3.1 Ön Bilgiler	15
3.2 Ayırıt Atma	16
3.3 Tepe Büzme	19
3.4 Baskınlık Kümesi ve Ardışık Büzme	21
3.5 Tepe Çoğaltma	23
3.6 Motif Çoğaltma, Ardışık Büzme ve 1 Özdeğeri	26
3.6.1 1 Özdeğeri	26
3.6.2 Motif çoğaltma	26
3.6.3 Ardışık büzme	28
4 İŞARETLİ GRAFLARDA İŞLEMLER VE LAPLASYEN ÖZDE- GERLER	31
4.1 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisleri için Join İşlemi	32

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4.1.1 Bir dengeli, bir dengesiz grafın join işlemi	33
4.1.2 İki dengeli işaretli grafın join işlemi	35
4.1.3 Dengesiz iki işaretli grafın join işlemi	36
4.2 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisinin Özdeğerleri için Tamam- layıcı Prizmalar İşlemi	37
4.2.1 Tamamlayıcı prizmaların dengeliliği	38
4.2.2 Majorizasyon ve tamamlayıcı prizmalar	39
4.2.3 Γ ve $\bar{\Gamma}$ grafları dengeli, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi dengesiz olduğunda	40
4.2.4 $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi dengeli ise	42
4.2.5 Γ dengeli, $\bar{\Gamma}$ dengesiz olduğu durumda	52
4.2.6 Γ ve $\bar{\Gamma}$ dengesiz olduğu durumda	53
4.3 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisi İçin Coalescence İşlemi	53
5 İŞARET DERECELİ LAPLASYEN MATRİSİ	59
5.1 Tanımlar ve Genel Bilgiler	59
5.2 Bazı Özel Graf Türleri için İşaret Dereceli Laplasyen Matrisin Spektrumu	62
5.2.1 Tam graf (K_n)	62
5.2.2 Yıldız graf ($K_{1,n-1}$)	64
5.2.3 Çevre graf (C_n)	64
5.2.4 Yol graf (P_n)	66
5.3 İşaret Dereceli Laplasyen Matrisin Spektrumunun Örüntü Sonuçları	68
5.4 İşaret Dereceli Laplasyen Matris ve İşaretli Grafların Laplasyen Matrisinin Spektrum İlişkisi	71
6 SONUÇ	73
KAYNAKLAR DİZİNİ	78
ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Γ işaretli grafından ayırıt atma ile elde edilen $\Gamma - e$ ve $\Gamma - e'$ grafları ve özdeğerleri.	19
3.2 Γ işaretli grafı ve $S = \{3, 7\}$ baskın küme örneği.	22
4.1 $C_5\overline{C_5}$ işaretli Tamamlayıcı Prisma grafı	38
4.2 $(K_{1,3}, \sigma_1)$ ve $(C_4, +)$ graflarının bütün coalescence işlemleri	54
4.3 Γ_1 ve Γ_2 işaretli grafları ve onların bir coalescence işlemi	58
5.1 0 regüler Çevre graf ile yol graf arasındaki ilişki	67

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Γ_1 , Γ_2 ve $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ graflarına ait sırasıyla λ_i , $\bar{\lambda}_i$ ve θ_i ile gösterilen Laplasyen spektrumlar.	58

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
G	Graf
Γ	İşaretli graf
V	Tepeler kümesi
E	Ayrıtlar kümesi
E^+	Pozitif işaretli ayrıtlar kümesi
E^-	Negatif işaretli ayrıtlar kümesi
$E(\Gamma_1\Gamma_2)$	Bir ucu Γ_1 , diğer ucu Γ_2 grafindaki ayrıtların kümesi
$\sigma(i, j)$	ij ayrıtının işaret fonksiyonu
θ	Tepe işaret fonksiyonu
$i \sim j$	komşu i ve j tepeleri
d_i	i tepesinin derecesi
$sdeg(i)$	i tepesinin işaret derecesi
d_i^+	i tepesinin pozitif derecesi
d_i^-	i tepesinin negatif derecesi
D	Derece matrisi
D_s	İşaret derece matrisi
$L(G)$	Laplasyen matris
$L(\Gamma)$	İşaretli grafin Laplasyen matrisi
$\bar{L}(G)$	Normalize Laplasyen Matris
$L_s(\Gamma)$	İşaret dereceli Laplasyen matris
A	Bitişiklik matrisi
A_s	İşaretli bitişiklik matris
C	İşaretli grafin tepe-ayrıt komşuluk matrisi
Q	Tepe-ayrıt komşuluk matrisi
Δ	En büyük tepe derecesi
δ	En küçük tepe derecesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
K_n	n tepeli tam Graf
C_n	n tepeli çevre graf

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
P_n	n tepeli yol Graf
$K_{1,n-1}$	n tepeli yıldız graf
m_v	v tepesinin 2-derecesi
$\gamma(G)$	Grafın baskınlık sayısı
$N(v)$	v tepesinin komşuluk kümesi
$\max_{v \in V} d_v^-$	en büyük negatif tepe derecesi
$\min_{v \in V} d_v^-$	en küçük negatif tepe derecesi

1 GİRİŞ

Cebir ve graf teorisinin kombinasyonundan meydana gelen cebirsel graf teorisini, 1974'den beri gelişimine devam etmektedir. Bu dal, cebirsel objeleri grafla ilişkilendirir ve cebirde kullanılan araçlar ile graf özelliklerini çeşitlendirir. Literatürde bu konuda yazılmış bir çok kitap ve araştırma bulunmaktadır (Godsil and Royle, 2001, Biggs, 1993, Beineke et al., 2004, Mohar, 1991, Merris, 1994, Fiedler, 1973, Cvetković et al., 1979). Matrisler ve özdeğerleri yardımıyla graf yapıları yorumlanmıştır. Cebirsel graf teorisinin en önemli konularından biri olan bir grafın Laplasyen matrisi kavramı ve bu matrisin özdeğerleri, diskret matematik, kombinatoriyel optimizasyon ve çeşitli kimya problemleri gibi matematiğin çeşitli alt dallarında kullanılmaktadır. Laplasyen matrisin yanı sıra bir grafın bitişiklik matrisinin özdeğerleri ile ilgili de birçok sonuç elde edilmiştir. Fakat Mohar (Mohar, 1991), Laplasyen matrisin spektrumunu daha sezgisel ve önemli bulmuştur. Literatürde, Laplasyen matrisin spektrumu ve grafın tepe dereceleri, yarıçapı, bağlantılılığı, baskınlık sayısı vb gibi, graf teorik parametrelerin ilişkisine dair çalışmalar bulunmaktadır (Anderson et al., 1985, Li et al., 1998, Merris, 1994, Aouchiche 2010, Stevanović et al., 2008, Lu et al., 2007).

Bütün Laplasyen özdeğerler arasında, ikinci en küçük özdeğer en ünlü olanlarından biridir ve Fiedler (Fiedler, 1973) tarafından cebirsel bağlantı olarak adlandırılmıştır. Önemi, grafın bağlantılılığı ile ilişkilendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, "bir G grafı bağlantılı bir graftır ancak ve ancak cebirsel bağlantısı sıfırdan farklıdır" sonucu iyi bilinmektedir.

Bir n tepeli ve m ayrıtlı bir G grafının Q tepe ayırıt komşuluk matrisi olmak üzere $K = Q^T Q$ matrisi ile $L(G)$ Laplasyen matrisi arasında nasıl bir ilişki olduğu Forsman (Forsman, 1976) ve Gutman (Gutman, 1978) tarafından aynı zamanlarda açıklanmıştır. Ayrıca, m grafın ayrıt sayısı ve $A(G^*)$ çizgi (line)grafın bitişiklik matrisi olmak üzere, K matrisi, $K(G) = 2I_m + A(G^*)$ şeklinde ifade edilir. Buradan yola çıkarak, $A(G^*)$ matrisinin en küçük özdeğerinin, en az -2 olduğu, Alan Hoffman tarafından söylenmiştir. En küçük

özdeğeri -2 olan graflarla ilgili çalışmalar Cameron, Goethals, Sholt ve Seidel tarafından ortaya koyulmuş ve ayrıca kök teorisi ile şaşırtıcı ve yakın bir ilişki ortaya çıkmıştır (Cvetković et al., 1988, Seidel et al., 1994). Laplasyen matrisin ilk farkedilir ortaya çıkışı, Kirchhoff'un matrix-tree teoremi (Kirchhoff, 1847) ile olmuştur:

Teorem 1.1 *$L(i|j)$, n tepeli G grafinin, $L(G)$ Laplasyen matrisinin, i . satır ve j . sütun elemanlarının silinmesi ile elde edilmiş $(n-1) \times (n-1)$ türünde bir alt matris olsun. Böylece, $(-1)^{i+j} \det(L(i|j))$, G grafinin spanning ağaçlarının sayısını verir.*

Bu tezin esas amacı, işaretli grafların Laplasyen ve normalize Laplasyen matrislerinin özdeğerleri ile ilgili sonuçlar vermektir. İşaretli graflar ilk olarak, sosyal psikolojideki sosyal denge teorisi ile ilişkilendirilip, Harary tarafından ortaya atılmıştır (Harary, 1953). Daha sonra, Zaslavsky, grafların matroidleri kavramını işaretli grafların matroidlerine genişletmiştir (Zaslavsky, 1982). Ayrıca, işaretli graflar için Matrix Tree teorem Zaslavsky ve Chaiken tarafından elde edilmiştir (Zaslavsky, 1982, Chaiken, 1982). Seidel tarafından, graflar üzerinde tartışmalarda önemli bir role sahip olan, değiştirme (switching) kavramı ortaya atılmıştır (Seidel et al., 1994). İşaretli grafların Laplasyen spektrumu ile ilgili çalışmalar, ikibinli yılların başında ilk defa Hou tarafından yapılmıştır (Hou et al., 2003). Yine Hou tarafından, işaretli grafin dengesiz olduğu durumlarda, en küçük özdeğer ile ilgili isoperimetrik sonuçlar elde edilmiştir (Hou, 2005). Daha sonra, Chung tarafından ortaya çıkarılan, bir grafin normalize Laplasyen matrisi kavramı, Li tarafından işaretli graflara genişletilmiş ve bazı temel sonuçlar elde edilmiştir (Li et al., 2009).

Tezin ikinci bölümünde Laplasyen ve normalize Laplasyen matris, işaretli graflar, işaretli graflar için Laplasyen ve normalize Laplasyen matris kavramları ele alınmıştır ve ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlerden bahsedilip, gerekli ön bilgiler sağlanmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde işaretli grafların normalize Laplasyen spektrumu için örüntü (interlacing) sonuçları elde edilmiştir. Özellikle, ayrıt atma

ve ekleme, tepe büzme gibi temel graf operasyonlarının Laplasyen özdeğere etkisi araştırılmıştır. Bu işlemlere ek olarak, işaretli graflar için izin verilebilir ardışık büzme işlemi tanımlanmış, baskınlık parametresi ile ilişkilendirilmiş bir örüntü sonucu elde edilmiştir. Ayrıca, işaretli graflarda tepe çoğaltma işlemi çalışılıp, bu işlemin bir özdeğerini meydana getirdiği gösterilmiştir. Son olarak, motif çoğaltma işlemini işaretli graflara genelleştirip, motif olarak adlandırılan bir işaretli grafin belli, küçük bir alt grafı, 1 özdeğerine sahip ise bu motifin çoğaltılması ile elde edilen graf 1 özdeğerine sahip olacağı sonucu elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, join, tamamlayıcı prizmalar (complementary prisims) ve coalescence işlemleri, işaretli graflara genişletilmiş ve bu graf işlemlerinin Laplasyen özdeğerlere etkisi araştırılmıştır. İşlemler sonrası oluşan grafların denge durumları incelenmiş, grafların denge durumlarına göre en büyük ve en küçük özdeğerler ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Tamamlayıcı prizmalar ve coalescence işlemlerine ait sonuçlar için, Fan'ın majorizasyon kavramından yararlanılmıştır (Grone and Merris, 1990).

Tezin beşinci bölümünde, köşegen elemanlarında, tepelerin işaret derecelerinin yer aldığı, işaret dereceli Laplasyen matris kavramı tanımlanmıştır. Bu yeni matrisin özdeğerlerine ait temel sonuçlar elde edilip, özel graf türleri için matrisin spektrumları incelenmiştir. Ayrıca, graftan tepelerin silinmesi ile ilişkilendirilen örüntü (interlacing) sonucu, işaretli grafların Laplasyen spektrumuna ve işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumuna genişletilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar birleştirilerek, yeni bir eşitsizlik ortaya çıkarılmıştır.

2 GENEL BİLGİLER

2.1 Bir Grafın Laplasyen Matrisi

Bitişiklik, komşuluk (tepe-ayrıt), mesafe matrisinin yanı sıra, Laplasyen matris graf ile ilişkilendirilebilen diğer bir matris türüdür. Matrisin özdeğerleri, Laplasyen matrisin spekturumunu oluştururlar. Bu kısımda Laplasyen matrisin tanımı ve diğer bölümler için gerekli ön bilgiler verilecektir.

G bir graf, Q tepe-ayrıt komşuluk matrisi, $D(G)$ derece matrisi olsun. G 'nin Laplasyen matrisi

$$L(G) = QQ^T = D(G) - A(G)$$

dir. Ayrıca, $L(G)$ Laplasyen matrisi aşağıdaki eşitliği sağlayan $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayında operasyon olarak da alınabilir; $i, j \in V$ ve d_i , i tepesinin derecesini göstermek üzere

$$Lf(i) = d_i f(i) - \sum_{j, j \sim i} f(j) \quad (1)$$

dır. (1) denklemindeki toplam, $j \sim i$ ile gösterilen komşu i ve j tepeleri üzerinde alınmıştır. Laplasyen matris oryantasyondan bağımsız ve simetriktir. Matrisin özdeğerleri reeldir ve negatif değildir. Laplasyen matrisin özdeğerleri aşağıdaki şekilde, azalmayan sıra ile sıralanırsa:

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G)$$

- Bütün bileşenleri 1 olan $n \times 1$ lik özvektör değeri için $\lambda_1(G) = 0$ dır. $L(G).1=0.1$.
- $\lambda_2(G) > 0 \Leftrightarrow G$ grafı, birleştirilmiştir. Sıfıra eşit özdeğer sayısı kadar grafın birleştirilmiş bileşeni vardır.
- Eğer G grafı, k regüler graf ise, bitişiklik matrisinin özdeğerleri $\theta_1, \dots, \theta_n$ olmak üzere, Laplasyen matrisin özdeğerleri $k - \theta_1, \dots, k - \theta_n$ şeklindedir.

Sıradaki özellikler , Laplasyen matrisin özdeğerleri hakkında önemli bilgi sağlayacaktır.

Lemma 2.1 (*Dirichlet Toplamı*) G , n tepeli bir graf, L , Laplasyen matrisi olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için:

$$x^T Lx = \sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2.$$

dir.

İspat. $x^T Lx = x^T Q Q^T x = (Q^T x)^T (Q^T x)$ eğer $ij \in E(G)$ ise $Q^T x$ nin ij ayırıtına karşılık gelen bileşeni $\pm(x_i - x_j)$ dir. ■

Buradan da özdeğerlerle ilgili önemli bir sonuca varılabilir:

$$\lambda_2(G) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{x^T Lx}{x^T x} = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2)$$

$$\lambda_n(G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x^T Lx}{x^T x} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (3)$$

Bu orana x vektörünün Rayleigh oranı diyeceğiz. Rayleigh oranı, özdeğerler için üst ve alt sınır belirlemede kullanışlı bir araçtır.

Laplasyen matrisin ilk uygulamalarından birisi Matrix-Tree Teoremidir.

Teorem 2.1 (*Kirchhoff Matrix-Tree theorem*) G grafının farklı spanning ağaçlarının sayısı, Laplasyen matrisin ($L = D - A$) herhangi bir kofaktörünün değerine eşittir.

Bu tezde kullanılacak olan işaretli grafların Laplasyen ve normalize Laplasyen matrisi kavramına geçmeden önce, işaretli graflarla ilgili önemli bilgiler verilecektir.

2.2 İşaretli Graflar

$G=(V,E)$ bir graf olsun. İşaretli graf $\Gamma = (G, \sigma)$, G grafının ayrıtlarının $+$ ve $-$ ile işaretlenmesi ile elde edilir. Burada $\sigma:E \rightarrow \{+, -\}$ işaret fonksiyonudur. İşaretli grafın tepeler kümesini $V(\Gamma)$, ayrıtlar kümesini $E(\Gamma)$ ile göstereceğiz. Bir işaretli grafın bir v tepesinin işaret derecesi, o tepeye komşu pozitif işaretli ayrıt sayısı (d_v^+) ile negatif işaretli ayrıt sayısının (d_v^-) arasındaki farktır, $sdeg(v)$ ile gösterilir. $sdeg(v) = d_v^+ - d_v^-$ dir. İşaretli grafın bir tepesinin derecesi $d_v = d_v^+ + d_v^-$ olarak bulunur. Yani işaretli graf ile altında yatan G grafi aynı tepe derecesi dizisine sahiptir. Γ bir işaretli graf ve C , Γ 'nin bir döngüsü (cycle) olmak üzere, C 'nin işareti $sgn(C) = \prod_{e \in C} \sigma(e)$ şeklinde bulunur.

Tanım 2.1 (Harary, 1953) *Bir işaretli grafın bütün döngüleri (cycles) pozitif ise o işaretli grafa dengeli işaretli graf (balanced signed graph) denir.*

Tanım 2.2 (Seidel et al., 1994) $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$ işaret fonksiyonu, $\Gamma = (G, \sigma)$ bir işaretli graf olsun. $\sigma^\theta(e) = \theta(i)\sigma(e)\theta(j)$ ile işaretlendirilmiş, Γ grafından elde edilen yeni işaretli grafa θ ile döndürülmüş graf denir. $\Gamma^\theta = (G, \sigma^\theta)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 (Seidel et al., 1994) Γ_1 ve Γ_2 iki işaretli graf olmak üzere, $\Gamma_2 = \Gamma_1^\theta$ olacak şekilde öyle bir θ fonksiyonu varsa bu iki grafa eş dönüştürülmüş graflar (switching equivalent) denir ve $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 M_1 ve M_2 $n \times n$ lik iki matris olsun. $M_2 = SM_1S$ olmak üzere öyle bir $S = diag(s_1, \dots, s_n)$, $s_i = \pm 1$ diagonal matrisi varsa bu iki matrise işaret olarak benzer (signature similar) matrisler denir.

Teorem 2.2 (İşaretli Graflar için Matrix-Tree Teorem)(Chaiken, 1982, Zaslavsky, 1982) Γ n tepeli birleştirilmiş bir işaretli graf ve b_l , l tane negatif döngü (cycle) içeren spanning altgrafların sayısı olmak üzere:

$$\det L(\Gamma) = \sum_{l=0}^n 4^l b_l$$

Matrix-Tree teoreme göre eğer Γ grafi dengeli bir graf $\Leftrightarrow \det L(\Gamma) = 0$ dir. Buradan da anlaşılır ki 0 ancak ve ancak dengeli bir graf için özdeğerdir (Hou et al., 2003).

2.3 İşaretli Graflarda Laplasyen Matris

Bu bölümde işaretli graflar için Laplasyen matrisden bahsedilecektir. İşaretli graflar için Laplasyen matris aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.5 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli bir graf olmak üzere, $L(\Gamma)$ ile göstereceğimiz Laplasyen matris $L(\Gamma) = D(\Gamma) - A_s(\Gamma)$ şeklinde tanımlanır. Burada $D(\Gamma)$ işaretli grafın diagonal tepe derece matrisidir, $A_s(\Gamma)$ bileşenleri $a_{ij}^\sigma = \sigma(i, j)a_{ij}$ şeklinde tanımlı, işaretli grafın bitişiklik matrisidir.

$L(\Gamma)$ simetrik bir matristir ve satır toplamaları $2(d_1^-, \dots, d_n^-)^t$ şeklindedir. Bahsedilen kavramlara göre, ayrıtların hepsi $+$ veya $-$ ile etiketlendiğinde: $L(G) = L(G, +)$ ve $D(G) + A(G) = L(G, -)$ olduğu açıkça görülür. İşaretli olmayan graflarda olduğu gibi, işaretli grafların Laplasyen matrisini de komşuluk matrisi ile ifade edebiliriz. İşaretli graflar için komşuluk matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$C = C(\Gamma) = (c_{ij})$ komşuluk matrisi olmak üzere;

$$c_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{eğer } i, e_j \text{ ayrıtının ilk tepesi(head) ise} \\ -1, & \text{eğer } i, e_j \text{ ayrıtının son tepesi(tail) ve } \sigma(e_j) = + \text{ ise} \\ +1, & \text{eğer } i, e_j \text{ ayrıtının son tepesi(tail) ve } \sigma(e_j) = - \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Matrisin bileşenlerinin genelleştirilmiş hali, $c_{ie} = -\sigma(e).c_{je}$ dir.

$$L(\Gamma) = CC^t$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$ reel bir vektör olmak üzere, komşuluk matrisinden yararlanarak elde edilen, Laplasyen matrisin kuadratik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$x^t L(\Gamma) x = x^t C C^T x = \sum_{i \sim j} (x_i - \sigma(i, j)x_j)^2 \text{ dir.}$$

Ayrıca, $L(\Gamma)$ Laplasyen matrisi, aşağıdaki eşitliği sağlayan $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayında operasyon olarak da tanımlanabilir. $\forall i \in V(\Gamma)$ için:

$$Lf(i) = d_i f(i) - \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) f(j) \quad (4)$$

2.4 İşaretli Grafların Laplasyen Spektrumu

İşaretli grafların Laplasyen spektrumu ilk olarak Hou tarafından ele alınmıştır (Hou et al., 2003). Hou, ilk olarak işaretli grafların en büyük özdeğerini ele almış ve onunla ilgili sonuçlar elde etmiştir (Hou et al., 2003). Daha sonra, en küçük özdeğeri ele alıp, isoperimetrik eşitsizlikler elde etmiştir (Hou, 2005). $\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli işaretli grafinin pozitif tanımlı, negatif olmayan özdeğerlere sahip Laplasyen matrisi $L(\Gamma)$ ile gösterilsin. Laplasyen matrisin spektrumu, artmayan sırada

$$\lambda_1(\Gamma) \geq \lambda_2(\Gamma) \geq \dots \geq \lambda_n(\Gamma)$$

şeklinde sıralansın. En küçük özdeğeri ifade etmek için Rayleigh oranı kullanılarak :

$$\lambda_1(\Gamma) = \sup \left\{ \sum_{i \sim j} (x_i - \sigma(i, j)x_j)^2 : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, x \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (5)$$

olduğu elde edilir.

İşaretli grafların Laplasyen spektrumu ilgili birkaç önemli sonuç aşağıda verilmiştir:

Lemma 2.2 (Hou et al., 2003) $\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (G, \sigma_2)$ iki işaretli graf olmak üzere, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \Leftrightarrow L(\Gamma_1)$ ve $L(\Gamma_2)$ işaret olarak benzer matrislerdir.

Teorem 2.3 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli bir graf olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1. Γ dengelidir;

2. $\Gamma = (G, \sigma) \sim (G, +)$;
3. Öyle bir S işaret matrisi vardır ki $SL(\Gamma)S$ nin diagonal dışındaki tüm bileşenleri 0 veya -1 dir;
4. Tepelerin öyle bir parçalanmasını bulabiliriz ki $V(\Gamma) = V_1(\Gamma) \cup V_2(\Gamma)$, V_1 ile V_2 arasındaki tüm ayrıtlar $-$ ve V_1 veya V_2 içindeki tüm ayrıtlar $+$ dir.

Benzer düşünce ile;

Teorem 2.4 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli bir graf olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. Γ deki tüm tek döngüler (cycles) negatif ve tüm çift döngüler pozitifdir;
2. $\Gamma = (G, \sigma) \sim (G, -)$;
3. Öyle bir S işaret matrisi vardır ki $SL(\Gamma)S$ nin diagonal dışındaki tüm bileşenleri 0 veya 1 dir;
4. Tepelerin öyle bir parçalanmasını bulabiliriz ki $V(\Gamma) = V_1(\Gamma) \cup V_2(\Gamma)$, V_1 ile V_2 arasındaki tüm ayrıtlar $+$ ve V_1 veya V_2 içindeki tüm ayrıtlar $-$ dir.

Lemma 2.3 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli birleştirilmiş işaretli bir graf ise

$$\lambda_1(\sigma) \leq \lambda_1(-) \text{ dir.}$$

$$\lambda_1(\sigma) = \lambda_1(-) \Leftrightarrow (G, \sigma) \sim (G, -) \text{ dir.}$$

Teorem 2.5 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli birleştirilmiş işaretli bir graf ise

$$\lambda_1(\Gamma) \leq 2(n - 1) \text{ dir}$$

Ayrıca, $\Gamma \sim (K_n, -)$ olduğu durumda eşitlik sağlanır.

$\lambda_1(\sigma)$ özdeğerinin üst sınırını elde etmek için $L(G, -) = D(G) + A(G)$ matrisinin en büyük özdeğerinden faydalanılmıştır. Sıradaki lemma $L(G, -) = D(G) + A(G)$ matrisi ile grafin çizgi grafinin bitişiklik matrisi arasında ilişki kurar.

Lemma 2.4 (Biggs, 1993) G , n tepeli bir graf olmak üzere, A , G grafinin bitişiklik matrisi, A_L , G grafinin çizgi grafinin bitişiklik matrisi olsun ve X $n \times m$ matrisi

$$(X)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ eğer } i \text{ tepesi ve } e_j \text{ ayrıtı komşu ise} \\ 0 & , \text{ aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise $X^t X = A_L + 2I_m$ dir.

İspat.

$$(X^t X)_{ij} = \sum_{l=1}^n (X)_{li} (X)_{lj}$$

şeklinde ifade edilir. $(X^t X)_{ij}$, eğer e_i e_j ayrıtları komşu ise 1 , eğer $i=j$ ise 2, eğer ayrıtlardan herhangi biri grafta yer almıyorsa 0 değerini alır. Yani diğer bir deyişle, l tepesinin, hem e_i hem e_j ayrıtına komşu olup olmadığıdır. Buradan, $X^t X = A_L + 2I_m$ sonucu elde edilir. ■

Bir işaretli grafin en büyük Laplasyen özdeğeri ile tepe dereceleri arasındaki ilişki, Hou tarafından aşağıdaki şekilde kurulmuştur (Hou et al., 2003):

Tanım 2.6 $\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli birleştirilmiş işaretli bir graf ve $j \in V(\Gamma)$ olmak üzere, $m_j = (1/d_j) \sum_{ij \in E(\Gamma)} d_i$ eşitliğine, j tepesinin 2-derecesi denir.

Böylece;

Teorem 2.6 (Hou et al., 2003) $\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli birleştirilmiş işaretli bir graf ise

$$1. \lambda_1(\sigma) \leq \max\{d_i + d_j : ij \in E\}.$$

$$2. \lambda_1(\sigma) \leq \max\{d_i + m_i : i \in V\}.$$

$$3. \lambda_1(\sigma) \leq \max\{d_i(d_i + m_i) + d_j(d_j + m_j)/(d_i + d_j) : (ij) \in E\}.$$

dir.

Ayrıca, yine Hou tarafından, dengesiz bir işaretli grafin en küçük Laplasyen özdeğeri ile isoperimetrik sayı parametresine oldukça benzer, graf teorik bir parametre olan $\omega(\Gamma)$ ile ilgili bağlantı aşağıdaki şekilde kurulmuştur (Hou, 2005):

W , $V(\Gamma)$ tepeler kümesinin bir alt kümesi olsun. ∂W , W kümesindeki tepeleri W nın dışındaki tepelere bağlayan ayrıt sayısını göstermek üzere, işaretli grafin $\omega(\Gamma)$ parametresi

$$\omega(\Gamma) = \min_{\emptyset \neq W \subseteq V} \frac{e_{\min}(W) + |\partial W|}{|W|}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $e_{\min}(W)$, grafi dengeli yapmak için, W tarafından oluşturulmuş alt graftan atılması gereken minimum ayrıt sayısıdır.

Önerme 2.1 (Hou, 2005) Γ işaretli bir graf olmak üzere, $\lambda_n \leq 4\omega(\Gamma)$ dır.

Teorem 2.7 (Hou, 2005) Γ , n tepeli birleştirilmiş işaretli bir graf ve Δ en büyük tepe derecesi olmak üzere, en küçük Laplasyen özdeğer λ_n

$$\lambda_n(\Gamma) \geq \Delta - \sqrt{\Delta^2 - \omega^2(\Gamma)}$$

dir.

2.5 Bir Grafin Normalize Laplasyen Matrisi

Bir grafin normalize Laplasyen matrisi kavramı Chung tarafından ortaya atılmıştır (Chung, 1997). Bu tanım, stokastik süreçler ve spektral geometrideki özdeğerler ile uyum sağlamaktadır. Bu açıdan önemli bir avantaj sağlar.

Bazı durumlarda sadece regüler graflar için söylenebilen özellikler, normalize Laplasyen matris ile genel graflara genelleştirilebilir. Düğüm ve katlı ayrıt içermeyen G grafi için, $\bar{L}$ ile gösterilen normalize Laplasyen matris aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.7 (*Chung, 1997*) G , n tepeli bir graf ve d_i , i tepesinin derecesi olmak üzere, grafın normalize Laplasyen matrisi

$$\bar{L}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \text{ ve } d_j \neq 0, \\ -1/\sqrt{d_i d_j} & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ bitişik ise} \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

şeklindedir.

D diagonal derece matrisi ve $d_i = 0$ olduğu durumda $D^{-1/2}(i, i) = 0$ olarak alınmak üzere, $\bar{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2}$ dir. Ayrıca, $\bar{L}$, aşağıdaki eşitliği sağlayan $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayında operatör olarak alınabilir; $i, j \in V(G)$ olmak üzere,

$$\bar{L}g(i) := g(i) - \sum_{j, j \sim i} \frac{g(j)}{\sqrt{d_i d_j}} \quad (6)$$

k -regüler bir graf için

$$\bar{L} = I - \frac{1}{k}A$$

dır. Genel graflar için, normalize Laplasyen matris, Laplasyen matriste olduğu gibi komşuluk matrisi cinsinden ifade edilir. S , satırları tepeler, sütunları ayrıtlar olan komşuluk matrisi olsun. Matrisin bileşenleri, $e = (i, j)$ ayrıtına karşılık gelen i tepesi için $1/\sqrt{d_i}$ değerine, j tepesi için $-1/\sqrt{d_j}$ değerine ve geri kalan her yerde 0 değerine sahiptir. Bu tanıma göre, normalize Laplasyen matris

$$\bar{L} = SS^T$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, g sütun vektörü olarak ele alınırsa, normalize Laplasyen için Rayleigh oranı, $g = D^{1/2}f$ olmak üzere

$$\frac{\langle g, \bar{L}g \rangle}{\langle g, g \rangle} = \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} \quad (7)$$

şeklindedir.

2.6 İşaretli bir Grafın Normalize Laplasyen Matrisi

İşaretli graflar için Normalize Laplasyen Matris kavramı Li tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Li et al., 2009).

Tanım 2.8 (Li et al., 2009) n tepeli Γ işaretli grafının normalize Laplasyen matrisinin bileşenleri

$$\bar{L}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = j \text{ ve } d_j \neq 0, \\ -\sigma(i, j)/\sqrt{d_i d_j} & \text{eğer } (i, j) \in E(\Gamma), \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\bar{L}(\Gamma)$ veya $\bar{L}(G, \sigma)$ şeklinde gösterilir.

D diagonal derece matrisi ve $d_j = 0$ olduğu durumda $D^{-1/2}(j, j) = 0$ olarak alınmak üzere, $\bar{L}(\Gamma) = D^{-1/2}L(\Gamma)D^{-1/2}$ dir. $\bar{L}(\Gamma)$, aşağıdaki eşitliği sağlayan $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayında operatör olarak alınabilir

$$\bar{L}f(i) := f(i) - \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_i d_j}} \quad (8)$$

İşaretli bir Γ grafının normalize Laplasyen matrisi $\bar{L}(\Gamma)$, pozitif yarı tanımlıdır. Yani özdeğerleri reel ve negatif değildir. İşaretsiz graflarda olduğu gibi, işaretli grafın normalize Laplasyen özdeğerleri 2'den küçük eşittir (Li et al., 2009). İşaretli grafın normalize Laplasyen spektrumu azalmayan sırada $0 \leq \bar{\lambda}_1 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_n$ ile gösterilsin. Böylece, $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin Rayleigh oranı

$$\lambda_n = \sup_{f \in \mathbb{R}^n} \frac{f^\top \bar{L}(\Gamma) f}{f^\top f} = \sup_{f \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} \leq 2 \quad (9)$$

şeklinde ifade edilir. Bütün bu sonuçlardan da anlaşıldığı gibi, dengeli bir Γ grafı için $L(\Gamma)$ ve $L(G)$ işaret olarak benzerdir ve aynı spektruma sahiptir. Buna ek olarak, bağlantılı bir G grafı için 0 bir Laplasyen özdeğerdir ve bir tanedir. Buradan, aşağıdaki Lemma söylenebilir:

Lemma 2.5 $\Gamma = (G, \sigma)$ dengeli ve bağlantılı bir işaretli graf olmak üzere, $L(\Gamma)$ ve $\bar{L}(\Gamma)$ matrisleri bir tane 0 Laplasyen özdeğerine sahiptir.

İşaretsiz graflarda olduğu gibi, aşağıdaki sonuç iki kümeli işaretli graflar için de söylenebilir:

Lemma 2.6 $\Gamma = (G, \sigma)$ iki kümeli işaretli bir graf olsun. Eğer λ , $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin özdeğeri ise, $2 - \lambda$ $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin özdeğeridir.

İspat. Γ , V_1 ve V_2 tepeler kümesinin ayrık birleşiminden oluşmuş, iki kümeli işaretli bir graf olsun. f fonksiyonunun, $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olduğu kabul edilsin. Böylece, (8) denkleminde, d_i i tepesinin derecesi olmak üzere

$$\bar{L}f(i) = f(i) - \sum_{j \in V_2} \frac{\sigma(i, j)f(j)}{\sqrt{d_i d_j}} \quad (10)$$

eşitliği elde edilir. Aşağıdaki şekilde bir g fonksiyonu tanımlansın:

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{eğer } i \in V_1 \\ -f(i) & \text{eğer } i \in V_2 \end{cases}$$

g fonksiyonu (10) denkleminde uygulanırsa;

$$g(i) - \sum_{j \in V_2} \frac{\sigma(i, j)g(j)}{\sqrt{d_i d_j}} = \lambda' g(i) \quad (11)$$

$$f(i) + \sum_{j \in V_2} \frac{\sigma(i, j)f(j)}{\sqrt{d_i d_j}} = \lambda' f(i), \quad i \in V_1 \text{ için} \quad (12)$$

$$-f(i) - \sum_{j \in V_2} \frac{\sigma(i, j)f(j)}{\sqrt{d_i d_j}} = -\lambda' f(i), \quad i \in V_2 \text{ için} \quad (13)$$

denklemleri elde edilir. Böylece, (10), (12) ve (10), (13) denklemlerinin birleşiminden $\lambda' = 2 - \lambda$ özdeğerinin g özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğer olduğu sonucuna ulaşılır. ■

3 İSARETLİ GRAFIN NORMALİZE LAP- LASYEN MATRİSİNİN ÖZDEĞERLERİ ve ÖRÜNTÜ İLE İLGİLİ SONUÇLAR

Özdeğerlerin örüntüsü, graf yapılarına ve çeşitli graf matrislerine ilişkin kıyaslama ve sisteme uygunluk açısından kullanışlı bir araçtır. İşaretsiz grafların Laplasyen ve bitişiklik matrislerini düşünerek, özdeğerlerin örüntü sonuçları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Haemers, 1995, Heuvel, 1995, Mohar, 1991, Chen et al., 2004, Li, 2006). Aksine, işaretli grafların özdeğer örüntüsü ile ilgili literatürde sonuç bulunmamaktadır.

Tezin bu kısmında, $\bar{L}(\Gamma)$ ile gösterilecek olan, işaretli grafların normalize Laplasyen matrisi ele alınıp, spektrumunun örüntüsü ile ilgili sonuçlar verilecektir. Ayrıca, tepe çoğaltma ve büzme işlemleri ile normalize Laplasyen özdeğerlerinin örüntü sonuçları ilişkilendirilecektir. Bunlara ek olarak, işaretli graflar için ard arda büzme işlemi tanımlanıp, ardışık büzme, motif ve tepe çoğaltma işlemlerinin, 1 özdeğerine etkisi incelenecektir.

3.1 Ön Bilgiler

Öncelikle, matris analizinden bazı kullanışlı sonuçları kısaca hatırlayacağız. Sıradaki sonuç, özdeğer örüntüleri ile ilgili temel araçlardan biridir.

Teorem 3.1 (*Horn et al., 1985*) (*Cauchy's interlacing teoremi*) A , $n \times n$ reel, simetrik bir matris ve B , A nın $(n-1) \times (n-1)$ esas alt matrisi olsun. Eğer

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad \text{ve} \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{n-1}$$

sırası ile A ve B matrislerinin spektrumları ise

$$\lambda_i \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

dir.

Teorem 3.2 (*Courant-Fischer Teoremi*) M $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris ve

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

M matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle Mf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} : 0 \neq f \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ve

$$\lambda_n = \max \left\{ \frac{\langle Mf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} : 0 \neq f \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

dir. Üstelik, S_t , $\mathbb{R}^n$ 'nin t boyutlu alt uzayını ve $f \perp S_t$, her $f^i \in S_t$ için $f \perp f^i$ belirtmek üzere, k . en küçük özdeğer λ_k için

$$\lambda_k = \min_{S_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S_{n-k-1} \\ f \neq 0}} \frac{\langle Mf, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \max_{S_k} \min_{\substack{f \perp S_k \\ f \neq 0}} \frac{\langle Mf, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

dir.

Sıradaki lemma, ilerideki bölümlerde elde edilecek sonuçların ispatı için kullanışlı bir araçtır.

Lemma 3.1 (*Chen et al., 2004*) Reel a, b , ve γ için

$$a^2 - 2\gamma^2 \geq 0, \quad b^2 - \gamma^2 > 0, \quad \text{ve} \quad \frac{a^2}{b^2} \leq 2.$$

olduğunu varsayılırsa

$$\frac{a^2 - 2\gamma^2}{b^2 - \gamma^2} \leq \frac{a^2}{b^2}.$$

dir.

Gerekli temel teoremler sağlandıktan sonra, bu bölümün esas sonuçları verilebilir:

3.2 Ayrıt Atma

İşaretsiz graflar için, bir graftan ayrıt atıldıktan sonra, bitişiklik matrisi, $A(G)$, Laplasyen matris, $L(G)$ ve normalize Laplasyen matrisin $\bar{L}(G)$,

özdeğerleri ile ilgili örüntü sonuçları daha önceden elde edilmiş olup, iyi bilinmektedir. Sıradaki sonucumuz, bir işaretli graflardan ayrıt atıldığında, işaretli grafin normalize Laplasyen matrisinin, $\bar{L}(\Gamma)$, özdeğerlerine bir genişletme sağlayacaktır.

Teorem 3.3 Γ , *isole tepesi olmayan işaretli bir graf ve $H = \Gamma - e$, Γ dan e ayrıtının atılması sonucu elde edilmiş bir diğer işaretli graf olsun. Eğer*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \text{ ve } 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$$

sırasıyla $\bar{L}(\Gamma)$ ve $\bar{L}(H)$ matrislerinin özdeğerleri ise, $\lambda_{n+1} = 2$ ve $\lambda_0 = 0$ olmak üzere, her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\lambda_{i-1} \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1} \quad (14)$$

dir.

İspat. $g = D^{1/2}f$ ile (9) denkleminde verilen Rayleigh oranını düşünelim. $D^{1/2}$ tersinir bir matris olduğu için, onun t boyutlu alt uzaydaki işlemleri, yine t boyutlu altuzaya sahip olacaktır. Böylece, $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin k . en küçük özdeğeri için Courant-Fisher teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \min_{S_{n-k-1}} \max_{g \perp S_{n-k-1}} \frac{g^\top \bar{L}(\Gamma) g}{g^\top g} \\ &= \min_{S_{n-k-1}} \max_{\substack{D^{1/2}f \perp S_{n-k-1} \\ D^{1/2}f \neq 0}} \frac{f^\top L(\Gamma) f}{f^\top D f} \\ &= \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_i f_i^2 d_i}. \end{aligned} \quad (15)$$

Benzer şekilde,

$$\lambda_k = \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_i f_i^2 d_i}. \quad (16)$$

Şimdi $e = (v_1 v_2) \in E$ ayrıtının Γ grafindan atıldığı ve ayrıtın işaretinin $\sigma(v_1, v_2) = -$ olduğu varsayalım. Ayrıt atma işleminden sonra, v_1 ve v_2 tepe-lerinin dereceleri bir azalacaktır. Böylece payda aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$\sum_j f_j^2 d_j \rightarrow \sum_j f_j^2 d_j - f_1^2 - f_2^2.$$

Ayrıca, komşuluk ilişkilerindeki değişimden ötürü, pay kısmı

$$\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 \rightarrow \sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - (f_1 + f_2)^2.$$

olur. Böylece, e_1 ve e_2 standart baz vektörlerini göstermek üzere

$$\begin{aligned} \theta_k &= \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - (f_1 + f_2)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - f_1^2 - f_2^2} \\ &\leq \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f_1 = f_2, f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - (f_1 + f_2)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - f_1^2 - f_2^2} \\ &= \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f \neq 0} \text{ ve } f \perp e_1 - e_2} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - 4f_1^2}{\sum_j f_j^2 d_j - 2f_1^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$\gamma^2 = 2f_1^2$, $a^2 = \sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2$, ve $b^2 = \sum_j f_j^2 d_j$ değerleri ile Lemma 3.1 yi kullanıp, bölüm 2 de bahsedilen özdeğerlerin üstten 2 ile sınırlı olması özelliğini de hatırlayarak (17) denkleminde aşağıdaki şekilde devam edilebilir:

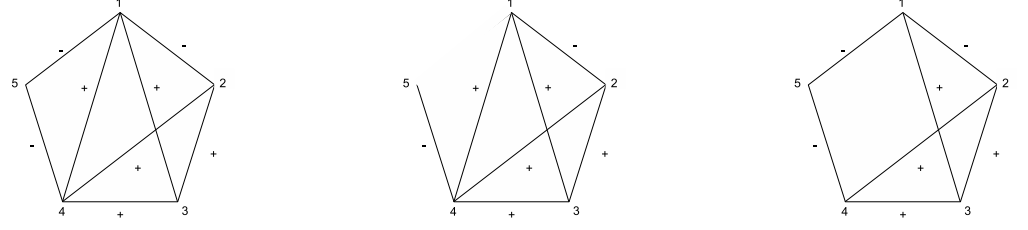
$$\begin{aligned} \theta_k &\leq \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k, \text{ and } f \perp e_1 - e_2 \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} \\ &\leq \max_{S'_{k+1}} \min_{\substack{f \perp S'_{k+1} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} = \lambda_{k+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Benzer şekilde, Courant-Fisher teoreminin min-max formunu kullanılarak

$$\begin{aligned} \theta_k &= \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - (f_1 + f_2)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - f_1^2 - f_2^2} \\ &\geq \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \\ f \neq 0 \\ f_1 = -f_2}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - (f_1 + f_2)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - f_1^2 - f_2^2} \\ &\geq \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \text{ and } f \perp e_1 + e_2 \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - 2f_1^2} \\ &\geq \min_{S'_{n-k}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} = \lambda_{k-1} \end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. (18) ve (19) denklemlerinin birleşiminden (14) denklemi sağlanır.

$\sigma(v_1, v_2) = +$ durumu benzer şekilde gösterilir. ■

 Γ $\Gamma - e$ $\Gamma - e'$

$\lambda_1 = 0.1852$

$\theta_1 = 0.1968$

$\bar{\theta}_1 = 0.2019$

$\lambda_2 = 0.5978$

$\theta_2 = 0.6667$

$\bar{\theta}_2 = 0.4980$

$\lambda_3 = 1.0661$

$\theta_3 = 0.8315$

$\bar{\theta}_3 = 1.0000$

$\lambda_4 = 1.4718$

$\theta_4 = 1.5289$

$\bar{\theta}_4 = 1.5020$

$\lambda_5 = 1.6792$

$\theta_5 = 1.7761$

$\bar{\theta}_5 = 1.7981$

Şekil 3.1: Γ işaretli grafindan ayırıt atma ile elde edilen $\Gamma - e$ ve $\Gamma - e'$ grafları ve özdeğerleri.

Yorum 3.1 *İşaretsiz graflarda ayırıt atma işleminden sonra, Laplasyen matrisin özdeğerlerinin azaldığı ya da aynı kaldığı bilinen bir sonuçtur (Mohar, 1991). Teorem 3.3 gösterir ki işaretli grafin normalize Laplasyen matrisinin özdeğerleri, ayırıt atma işleminden sonra artış gösterebilir. Teorem bununla ilgili bir üst sınır sağlamıştır. Örnek olarak şekil 3.1 de gösterilen ayırıt atma ile elde edilen iki grafin özdeğerleri incelensin. Laplasyen spektrumları kıyasladığımızda görülür ki özdeğerler artabilir ya da azalabilir.*

3.3 Tepe Büzme

G bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. $v \in V(G)$ tepesinin *açık komşuluğu*

$$N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$$

kümesidir ve *kapalı komşuluğu* ise $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ dir. G grafinin iki u ve v tepesi için, u ve v tepelerinin komşuluklarının birleşiminin yeni bir (uv) tepesinin komşulukları olacak şekilde, graftan u ve v tepesinin silinip, grafa yeni bir (uv) tepesi ekleme işlemine, u ve v tepesini tek bir tepeye *büzme* işlemi

denir. G grafından büzme işlemi sonucu elde ettiğimiz bu yeni graf $G/\{u, v\}$ ile gösterilir. u ve v tepeleri bitişik olduğu zaman, $G/\{u, v\}$ grafi, uv ayrıtının büzülmesi ile G grafından elde edilecektir.

İşaretsiz graflar için tanımlanan bu büzme işlemi, işaretli graflar için de ayrıtların işaretlerini koruyarak benzer şekilde tanımlanabilir. İşareti koruyabilmek için büzülen u ve v tepelerinden, ortak komşularına olan ayrıtların aynı işarete sahip olma şartı aranmaktadır. Diğer bir deyişle, Γ işaretli grafindaki her $x \in N(u) \cup N(v)$ tepesi için, eğer $\sigma(x, (uv)) = \sigma(x, u) = \sigma(x, v)$ ise $\Gamma/\{u, v\}$ işlemine *izin verilebilir büzülme* denir. Bundan dolayı, Γ grafi tarafından elde edilen izin verilebilir büzme, $\Gamma/\{u, v\}$, graftan u ve v tepelerinin silinip, yerine u ve v tepelerinin her x ortak komşuluğu için $\sigma(x, (uv)) = \sigma(x, u) = \sigma(x, v)$ olmak üzere yeni bir (uv) tepesi ekleyerek elde edilir. Özellikle, $N(u) \cap N[v] = \emptyset$ olduğu durumda $\Gamma/\{u, v\}$ izin verilebilir büzülmedir. Bir sonraki örüntü özelliği bu durumda uygun olacaktır.

Teorem 3.4 Γ bir işaretli graf, u ve v $N(u) \cap N[v] = \emptyset$ olacak şekilde Γ grafının iki tepesi olsun.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad \text{ve} \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{n-1}$$

sırasıyla $\bar{L}(\Gamma)$ ve $\bar{L}(\Gamma/\{u, v\})$ nin özdeğerleri ve $\lambda_{n+1} = 2$ ve $\lambda_0 = 0$ olmak üzere

$$\lambda_{i-1} \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1}$$

dir.

İspat. $j \in J$ ancak ve ancak $v_j \in N(v_1)$ olacak şekilde J bir indeks kümesi olsun. $u = v_1$, $v = v_2$ olmak üzere $N(u) \cap N[v] = \emptyset$ olduğundan, $\Gamma/\{v_1, v_2\}$ işlemi graftan $(v_1 v_j)$ ayrıtlarını atıp, aynı anda $(v_2 v_j)$ ayrıtlarını, işaretleri korunacak şekilde grafa ekleme olarak görülebilir. Böylece Courant-Fisher teoreminin (15) denklemini kullanarak ve Teorem 3.3 in ispatında olduğu gibi $\bar{L}(\Gamma/\{u, v\})$ matrisinin θ_k özdeğeri;

$$\theta_k = \min_{S'_{n-k-1}} \max_{f \perp S'_{n-k-1} \atop f \neq 0} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 + \sum_{j \in J} (f_2 - \sigma(v_2, v_j)f_j)^2 - (f_1 - \sigma(v_1, v_j)f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - d_1 f_1^2 + d_1 f_2^2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada pay ve paydadaki toplam, başlangıçtaki Γ grafindan hesaplanacaktır. Böylece, işaretli graflara benzer olarak (Chen et al., 2004), $f_1 = f_2$ alarak λ_{k-1} alt sınır değeri sağlanacaktır. λ_{k+1} üst sınır değeri, Courant Fisher teoreminin max min ifadesinden (16) elde edilecektir. Böylece, istenildiği şekilde $\lambda_{i-1} \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1}$ olacaktır. ■

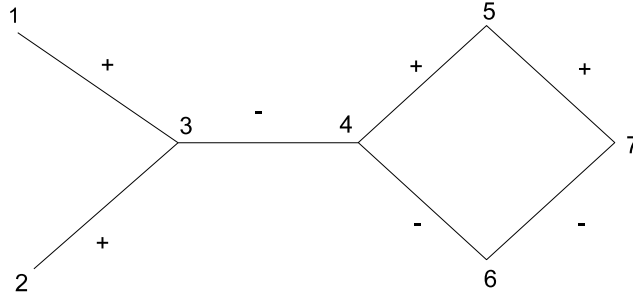
3.4 Baskınlık Kümesi ve Ardışık Büzme

v_1, v_2 tepelerinin büzülmesini takiben, oluşan yeni $(v_1 v_2)$ tepesinin bir diğer v_3 tepesine büzülmesiyle elde edilen yeni graf $(G/\{v_1, v_2\})/\{(v_1 v_2), v_3\}$ olarak düşünülebilir. Notasyonel yükten kurtulmak için, yeni oluşan graf, basitçe $G/\{v_1, v_2, v_3\}$ ile gösterilsin. Genelleştirilirse, $k - 1$ kez ardışık büzme ile $G/\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ grafinin elde edileceği düşünülebilir. Örüntü sonuçlarını vermeden önce, bu şekilde bir büzme işlemi dizisinin ne zaman iyi tanımlı olacağı incelenebilir.

Tanım 3.1 V, G grafinin tepeler kümesi, $S \subseteq V$ olmak üzere, eğer $V - S$ kümesindeki her tepe, S kümesindeki herhangi bir tepeye bitişik ise, S kümesine baskınlık kümesi denir. G grafinin en az elemana sahip baskınlık kümesinin, eleman sayısına baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir. $\gamma(G)$ eleman sayısına sahip G grafinin baskınlık kümesine $\gamma(G)$ -kümesi diyeceğiz.

Tanım 3.2 S bir baskın küme, $N[w] \cap S = \{v\}$ olacak şekilde $w \in V$ tepesine, $v \in S$ tepesinin S -özel komşuluğu denir. v tepesinin bütün S -özel komşulularının kümesi $pn[v, S]$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, açık S -özel komşulukları, $N(w) \cap S = \{v\}$ şartı altında tanımlanır. Graflarda baskınlık konusuyla ilgili (Haynes et al., 1998) genel bir



Şekil 3.2: Γ işaretli grafi ve $S = \{3, 7\}$ baskın küme örneği.

bakış sağlamaktadır. Eğer V deki her tepe, herhangi bir $v_i \in S$ tepesinin S -özel komşuluğu ise $\bigcap_{i=1}^{\gamma(G)} N(v_i) = \emptyset$ dir. (bakınız Şekil 3.2). Dahası, bu şartlar altındaki $\Gamma/\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ ardışık büzme işlemi iyi tanımlıdır.

Şekill 3.2'de verilen örnek incelenirse, Γ işaretli grafinin baskın kümesi $S = \{3, 7\}$ dir. 1, 2 ve 4 tepeleri 3 tepesinin S -özel komşuluklarıdır. Ayrıca, 5 ve 6 tepeleri, 7 tepesinin S -özel komşularıdır. Bunun sonucu olarak, $N(3) \cap N(7) = \emptyset$ dur.

Teorem 3.5 $\Gamma = (G, \sigma)$ bir işaretli graf, $\gamma(G) = k$, $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ bir $\gamma(G)$ -kümesi ve $\Gamma/\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ ardışık büzme işlemi iyi tanımlı olsun.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad \text{ve} \quad \theta_1^{(k-1)} \leq \theta_2^{(k-1)} \leq \dots \leq \theta_{n-(k-1)}^{(k-1)}$$

sırasıyla $\bar{L}(\Gamma)$ ve $\bar{L}(\Gamma/\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\})$ matrislerinin özdeğerleri ise, $i \leq 0$ olduğu durumda $\lambda_i = 0$ ve $i > n$ olduğu durumda $\lambda_i = 2$ olmak üzere

$$\lambda_{i-k+1} \leq \theta_i^{(k-1)} \leq \lambda_{i+k-1}, \quad (20)$$

dir.

İspat. Teorem 3.4 den, $\bar{L}(\Gamma)$ ve $\bar{L}(\Gamma/\{v_1, v_2\})$ matrislerinin özdeğerleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar

$$\lambda_{i-1} \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1}.$$

Benzer şekilde, oluşan yeni (v_1v_2) tepesinin v_3 tepesi ile büzülmesinden sonra, $\bar{L}(\Gamma/\{v_1, v_2\})$ ve $\bar{L}(\Gamma/\{v_1, v_2, v_3\})$ matrislerinin özdeğerleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar

$$\lambda_{i-2} \leq \theta_{i-1} \leq \theta_i^{(2)} \leq \theta_{i+1} \leq \lambda_{i+2}.$$

Argümanların tekrarından (20) denklemi elde edilir. ■

3.5 Tepe Çoğaltma

$\Gamma = (G, \sigma)$ n tepeli, bir işaretli graf ve $v \in V(\Gamma)$ olmak üzere, *tepe çoğaltma*, grafa yeni bir v' tepesi ekleyip, eklenen yeni tepeyi v nin tüm komşularıyla, aralarındaki ayrıt işaretleri korunacak şekilde birleştirme işlemidir, Γ^v ile gösterilir. Diğer bir ifade ile, $x \in N(v')$ ancak ve ancak $x \in N(v)$ ve her $x \in N(v)$ için $\sigma(v', x) = \sigma(v, x)$ dir. Gerekli tanım sağlandıktan sonra, sıradaki Γ^v grafının Laplasyen matrisinin özdeğerleri ile ilgili sonuca geçilebilir.

Teorem 3.6 Γ , n tepeli bir işaretli graf ve Γ^v , Γ grafından *tepe çoğaltma* ile elde edilmiş diğer bir işaretli graf olsun.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n+1} \quad \text{ve} \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$$

sırasıyla $\bar{L}(\Gamma^v)$ ve $\bar{L}(\Gamma)$ matrislerinin özdeğerlerini göstermek üzere, $\theta_{n+1} = \theta_{n+2} = 2$ olacak şekilde

$$\theta_i \leq \lambda_{i+1} \leq \theta_{i+2},$$

dir.

İspat. $j \in J$ ancak ve ancak $v_j \in N(v)$ olacak şekilde J bir indeks kümesi ve v' tepesi $v \in V(\Gamma)$ tepesinin kopyası olsun. Her $x \in N(v) \cap N(v')$ için $\sigma(x, v) = \sigma(x, v')$ olmasından ötürü, v ve v' tepelerinin, tepe çoğaltma ile yeni oluşan Γ^v grafında büzülme işlemi izin verilebilir büzülmedir ve $\Gamma^v/\{v, v'\} = \Gamma$ dir. Şimdi, v' tepesinin Γ^v grafından atıldığı varsayalım. Böylece Courant-Fisher

teoremini (15) kullanıp, Teorem 3.3 in ispatındaki şekilde ele alınırsa, $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin θ_k özdeğerleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$\theta_k = \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - \sum_{j \in J} (f_{v'} - \sigma(v', v_j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - d_{v'} f_{v'}^2 - \sum_{j \in J} f_j^2}$$

Burada pay ve paydadaki toplamalar Γ^v grafi üzerinden alınmıştır.

$$\theta_k \geq \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \\ f \neq 0 \\ f_{v'} = \sigma(v', v_j) f_j}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - \sum_{j \in J} (f_{v'} - \sigma(v', v_j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - d_{v'} f_{v'}^2 - \sum_{j \in J} f_j^2}$$

Aşağıdaki şekilde bir f' fonksiyonu tanımlansın:

$$f'_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = v' \\ -\sigma(v', i)/d_{v'} & \text{eğer } i \in N(v') \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$j \in J$ ancak ve ancak $v_j \in N(v')$ olacak şekilde bir J indeks kümesi ve f_j, v_j tepesine karşılık gelen değer olmak üzere, $f_{v'} = \sigma(v', v_j) f_j$ formundaki fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \geq \min_{S'_{n-k-1}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k-1} \text{ and } f \perp f' \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - 2d_{v'} f_{v'}^2} \\ & \geq \min_{S'_{n-k}} \max_{\substack{f \perp S'_{n-k} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} = \lambda_{k-1} \end{aligned}$$

dir. f'' fonksiyonu aşağıdaki formda tanımlanmak üzere

$$f''_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = v' \\ \sigma(v', i)/d_{v'} & \text{eğer } i \in N(v') \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Courant-Fisher teoreminin max-min formunu benzer şekilde kullanarak,

$$\begin{aligned} \theta_k &= \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - \sum_{j \in J} (f_{v'} - \sigma(v', v_j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - d_{v'} f_{v'}^2 - \sum_{j \in J} f_j^2} \\ &\leq \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \\ f \neq 0 \\ f_{v'} = -\sigma(v', v_j) f_j}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - \sum_{j \in J} (f_{v'} - \sigma(v', v_j) f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j - d_{v'} f_{v'}^2 - \sum_{j \in J} f_j^2} \\ &\leq \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \text{ and } f \perp f'' \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j) f_j)^2 - 4d_{v'} f_{v'}^2}{\sum_j f_j^2 d_j - 2d_{v'} f_{v'}^2} \end{aligned} \tag{21}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $\gamma^2 = 2d_{v'}f_{v'}^2$, $a^2 = \sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2$ ve $b^2 = \sum_j f_j^2 d_j$ alarak Lemma 3.1 kullanılarak, J tanımlanan indeks kümesi olmak üzere $f_{v'} = -\sigma(v', v_j)f_j$ formundaki fonksiyonlar için

$$\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 - 4d_{v'}f_{v'}^2 = \sum_{\substack{i \sim j \\ i \neq v'}} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 \geq 0$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \sum_j f_j^2 d_j - 2d_{v'}f_{v'}^2 &= (d_{v'}f_{v'}^2 + \sum_{j \in J} d_j f_j^2 + \sum_{j \notin N[v']} d_j f_j^2) - 2d_{v'}f_{v'}^2 \\ &= \sum_{j \in J} d_j f_{v'}^2 - d_{v'}f_{v'}^2 + \sum_{j \notin N[v']} d_j f_j^2 \\ &= f_{v'}^2 \left(\sum_{j \in J} d_j - d_{v'} \right) + \sum_{j \notin N[v']} d_j f_j^2 \end{aligned}$$

her $j \in J$ için, $d_j > 1$ ve $\sum_{j \in J} d_j$ toplamı $d_{v'}$ tane terim toplamından oluşmaktadır. Böylece, $(\sum_{j \in J} d_j) - d_{v'} > 0$ dır. Bundan dolayı ,

$$\sum_j f_j^2 d_j - 2d_{v'}f_{v'}^2 > 0$$

olduğu görülür. Bölüm 2 den özdeğerlerin üstten 2 ile sınırlı olduğunu hatırlayarak, Lemma 3.1 nin $a^2 - 2\gamma^2 \geq 0$, $b^2 - \gamma^2 > 0$ ve $a^2/b^2 \leq 2$ şartları sağlanır. Denklem (21) den devam edilerek,

$$\begin{aligned} \theta_k &\leq \max_{S'_k} \min_{\substack{f \perp S'_k \text{ and } f \perp f'' \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} \\ &\leq \max_{S'_{k+1}} \min_{\substack{f \perp S'_{k+1} \\ f \neq 0}} \frac{\sum_{i \sim j} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2}{\sum_j f_j^2 d_j} = \lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle,

$$\lambda_{i-1} \leq \theta_i \leq \lambda_{i+1} \leq \theta_{i+2} \leq \lambda_{i+3}$$

eşitsizliği elde edilir ve

$$\theta_i \leq \lambda_{i+1} \leq \theta_{i+2}$$

ispatlanmış olur. ■

3.6 Motif Çoğaltma, Ardışık Büzme ve 1 Özdeğeri

3.6.1 1 Özdeğeri

$\Gamma = (G, \sigma)$, n tepeli işaretli bir graf olsun. $i, j \in V(\Gamma)$ tepeleri bitişik ise $i \sim j$ ile ve i tepesinin derecesini d_i ile göstermek üzere, f fonksiyonu için,

$$\bar{L}f(i) := f(i) - \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_i d_j}}$$

olduğu (8) denkleminde biliniyor. $g \in \mathbb{R}^n$, $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olmak üzere

$$\bar{L}g - \lambda g = 0. \quad (22)$$

dır. (8) denklemi kullanılarak, (22) numaralı denklemden her i tepesi için

$$\frac{1}{\sqrt{d_i}} \sum_{j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = (1 - \lambda)g(i)$$

elde edilir. Eğer $\lambda = 1$ ise her i tepesi için

$$\sum_{j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = 0 \quad (23)$$

dir. 1 özdeğeri herhangi bir işaretli grafta tepe çoğaltma işlemi ile her zaman elde edilebilir. Γ^Σ , $v_\alpha \in V(\Gamma)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) tepelerinin ardışık m kez çoğaltılması ile elde edilmiş bir işaretli graf olmak üzere, $\bar{L}(\Gamma^\Sigma)$ matrisi aşağıda tanımlanan f_1 lokalize fonksiyonuyla 1 özdeğerine sahip olur.

$$f_1(i) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = v_\alpha \\ -1 & \text{eğer } i = u_\alpha \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Burada u_α, v_α tepesinin kopyasıdır. Böylelikle, 1 özdeğerinin sayısı, Γ^Σ grafının Laplasyen matrisinde m kadar artar. Şimdi, motif çoğaltma ve ardışık büzme operasyonlarının, işaretli graflarda 1 özdeğeri üzerindeki etkisine bakacağız.

3.6.2 Motif çoğaltma

Σ , $v_1, \dots, v_m$ tepelerine sahip, Γ grafının bağlantılı küçük bir alt grafı olsun. Σ alt grafı, Γ 'nın bu tepeler arasındaki bütün ayrıtlarını işaretleri

koruyacak şekilde içersin. Bu Σ alt grafını motif olarak adlandıracağız. $v_1, v_2, \dots, v_m$ tepelerini içeren Σ motifinin Laplasyen matrisi $\bar{L}(\Sigma)$, $f \in \mathbb{R}^m$ özvektörü ile 1 özdeğerine sahip olsun. f , Σ grafının tepeleri dışındaki değerleri 0 olacak şekilde genişletildiğinde, ne f fonksiyonu $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin özvektörü ve ne 1 özdeğeri $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin özdeğeri, olmak zorunda değildir. Fakat Γ grafi, Σ motifi ile çoğaltma yapıldığında, genişletilmiş grafın normalize Laplasyen matrisi 1 özdeğerine sahip olacaktır. Σ motifi ile elde edilmiş graf Γ^Σ ile gösterilsin. Γ^Σ grafi, Γ grafından, Σ motifinin, Σ' ile gösterilen kopyasının grafa eklenmesi ile elde edilmiştir. $u_1, \dots, u_m$ kopya tepelerinden oluşan Σ' grafi, Σ motifinin tepeleri ile aynı tepe bağlantılarına ve ayrıt işaretlerine sahiptir. Ayrıca, her bir $u_\alpha \in V(\Sigma')$ tepesi, $v_\alpha \in V(\Sigma)$ tepelerinin Σ motifi dışındaki bütün açık komşulukları ile bitişiktir.

İşaretsiz graflar için, motif çoğaltma ve bu işlemin 1 özdeğeri üzerine etkisi, normalize Laplasyen matrisler için çalışılmıştır (Banerjee and Jost, 2008). Bu kısımda, elde edilmiş bu sonuçlar, işaretli graflara genişletilecektir. Buna ek olarak, ardışık büzme sonrası 1 özdeğeri ile ilgili sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 3.7 Γ işaretli bir graf, Σ , Γ grafının motifi, Σ' motifin kopyası ve Γ^Σ , Γ grafından motif çoğaltma ile elde edilmiş işaretli graflar olsun. Eğer $\bar{L}(\Sigma)$ matrisi 1 özdeğerine sahipse, $L(\Gamma^\Sigma)$ matrisi, $v_\alpha \in \Sigma$ ve $u_\alpha \in \Sigma'$ tepeleri dışında 0 değerine sahip olan f özfonksiyonu ile 1 özdeğerine sahiptir.

İspat. Γ ve Σ sırasıyla n ve m dereceli işaretli graflar olsun. f , $\bar{L}(\Sigma)$ matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu ve d'_{v_α} , $v_\alpha \in V(\Sigma)$ tepesinin Σ grafındaki derecesi (veya $u_\alpha \in V(\Sigma')$ tepesinin Σ' grafındaki derecesi) olsun. Böylece, (23) denkleminde, $i \in V(\Sigma)$ veya $V(\Sigma')$ tepesi için $\sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d'_j}} = 0$ olduğu söylenir. Ayrıca, $i \in V(\Gamma^\Sigma)$ için d_i , i tepesinin Γ^Σ grafındaki derecesini göstermek üzere $g \in \mathbb{R}^{n+m}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$g(i) = \begin{cases} f(v_\alpha) \frac{\sqrt{d_{v_\alpha}}}{\sqrt{d'_{v_\alpha}}} & \text{eğer } i = v_\alpha \in V(\Sigma), \\ -f(v_\alpha) \frac{\sqrt{d_{v_\alpha}}}{\sqrt{d'_{v_\alpha}}} & \text{eğer } i = u_\alpha \in V(\Sigma'), \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

O zaman

$$\bar{L}(\Gamma^\Sigma)g(i) = g(i) - \frac{1}{\sqrt{d_i}} \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \text{ where } i, j \in V(\Gamma^\Sigma)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $i \in V(\Sigma)$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} &= \sum_{j \in V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} + \sum_{j \notin V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= \sum_{j \in V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} + \sum_{j \notin V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Benzer düşünce ile, her $i \in V(\Sigma')$ için, $\sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$ olduğu kolayca gösterilir. Eğer $i \notin V(\Sigma)$ veya $V(\Sigma')$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} &= \sum_{j \in V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} + \sum_{j \in V(\Sigma')} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} + \sum_{\substack{j \notin V(\Sigma) \\ j \notin V(\Sigma')}} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= \sum_{j \in V(\Sigma)} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} - \sum_{j \in V(\Sigma')} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece, her $i \in V(\Gamma^\Sigma)$ için, $\sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$ sonucuna ulaşılmış olunur. Böylece, $1, \bar{L}(\Gamma^\Sigma)$ matrisinin g özvektörüne karşılık gelen özdeğer olduğu ispatlanmış olur. ■

3.6.3 Ardışık büzme

Şimdi ardışık büzme işleminin 1 özdeğerine etkisini inceleyelim.

Teorem 3.8 $\Gamma = (G, \sigma)$, n tepeli işaretli bir graf ve G grafının baskınlık sayısı $\gamma(G) = k$ olsun. $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ bir $\gamma(G)$ -kümesi ve V nin her tepesi herhangi bir $v_\alpha \in S$ tepesinin S -özel komşusu olmak üzere eğer $\bar{L}(\Gamma)$ matrisi 1 özdeğerine sahip ve karşılık gelen özfonksiyon f , her $i \in S$ için $f(i) = 0$ ise $\bar{L}(\Gamma/\{v_1, \dots, v_k\})$ matrisi 1 özdeğerine sahiptir.

İspat. Bölüm 3.4'den eğer Γ nın her tepesi herhangi bir $v_\alpha \in S$ S -özel komşuluğu ise $\Gamma/\{v_1, \dots, v_k\}$ işleminin iyi tanımlı olduğu ve $\bigcap_{v_\alpha \in S} N(v_\alpha) = \emptyset$

olduğu biliniyor. f , 1 özdeğerine karşılık gelen $\bar{L}(\Gamma)$ matrisinin özvektörü olmak üzere, (23) denkleminde, her $i \in V(\Gamma)$ tepesi için

$$\sum_{j \sim i} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$$

dır. Notasyonel yükten kurtulmak için, $(k-1)$. ardışık büzülmeden sonra oluşan yeni tepe $w = ((\dots((v_1 v_2) v_3) \dots v_k))$ ile gösterilsin.

$\bar{L}(\Gamma/\{v_1, \dots, v_k\})$ matrisi için aşağıdaki gibi bir g fonksiyonu tanımlansın

$$g(i) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } i = w, \\ f(i), & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

V deki hertepe herhangi bir $v_\alpha \in S$ tepesinin S -özel komşuluğunda olduğu için, w tepesinin komşuları her $v_\alpha \in S$ tepesinin komşuluklarının ayrık birleşimde olduğu biliniyor. Diğer bir ifade ile, $w \in \Gamma/\{v_1, \dots, v_k\}$ tepesi için, $N(w) = N(v_1) \cup N(v_2) \cup \dots \cup N(v_k)$ için $\bigcap_{v_\alpha \in S} N(v_\alpha) = \emptyset$ dir. Böylece, her $v_\alpha \in S$ için $\sigma(v_\alpha, j) = \sigma(w, j)$ ve $\sum_{v_\alpha \sim j} \sigma(v_\alpha, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$ olduğundan, eğer $i = w$ ise

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} &= \sum_{j \in N(v_1)} \sigma(w, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} + \dots + \sum_{j \in N(v_k)} \sigma(w, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= \sum_{j \in N(v_1)} \sigma(w, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} + \dots + \sum_{j \in N(v_k)} \sigma(w, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan, eğer $i \neq w$ durumu ele alınırsa; Ardışık büzmeden önce, $v_\alpha \in S$ için $f(v_\alpha) = 0$ ve v_α tepesine bitişik bir $i \in V(\Gamma)$ tepesi için, (23) denkleminde ,

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} &= \sigma(i, v_\alpha) \frac{f(v_\alpha)}{\sqrt{d_{v_\alpha}}} + \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq v_\alpha}} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0 + \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq v_\alpha}} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq v_\alpha}} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} = 0 \quad (24)$$

olduğu elde edilir. Ardışık büzme işleminden sonra, i tepesi, w tepesi ile ve ayrıca v_α tepesi dışındaki büzme işleminden önce komşu olduğu aynı tepelere komşu olacaktır. (24) denkleminde, $\sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq w}} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq v_\alpha}} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \sum_{j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} &= \sigma(i, w) \frac{g(w)}{\sqrt{d_w}} + \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq w}} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0 + \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq w}} \sigma(i, j) \frac{f(j)}{\sqrt{d_j}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

dır. Böylece, her $i \in V(\Gamma/\{v_1, \dots, v_k\})$ için,

$$\sum_{j \sim i} \sigma(i, j) \frac{g(j)}{\sqrt{d_j}} = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $1, \bar{L}(\Gamma/\{v_1, \dots, v_k\})$ matrisinin özdeğeri olduğu ispatlanmış olur. ■

4 İŞARETLİ GRAFLARDA İŞLEMLER VE LAPLASYEN ÖZDEĞERLER

Bu bölümde, işaretli graflar için birkaç graf operasyonu ve onların Laplasyen özdeğerlerine etkisi ele alınacaktır. İşaretli grafların Kartezyen, Cvétkovic (NEPS) çarpımları ve çizgi grafları Zaslavsky tarafından çalışılmış, Laplasyen ve bitişiklik matrisinin spektrumu ve enerjileri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir (Zaslavsky et al., 2011). Tezin bu kısmındaki amaç, işaretli graflar ile yapılan join, tamamlayıcı prizmalar ve coalescence işlemlerinin, grafin dengesine olan etkisinden söz etmek ve Laplasyen özdeğerler ile ilgili sonuçlar vermektir. Ayrıca, herbir operasyon için ortaya çıkan grafin Laplasyen özdeğerlerini, işleme giren grafların Laplasyen özdeğerleri ile ilişkilendirmektir. Öncelikle, bu bölümde Laplasyen özdeğerlerin ilişkilendirilmesinde sıkça kullanılacak olan majorizasyon kavramı ile ilgili tanım ve teoremden söz edelim.

Tanım 4.1 (Grone and Merris, 1990) Farzedelim ki $b = (b_1, \dots, b_p)$ ve $c = (c_1, \dots, c_q)$ artmayan sırada sıralanmış, negatif olmayan reel değerli diziler olsun. Eğer,

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq \min\{p, q\}$$

ve

$$\sum_{i=1}^p b_i = \sum_{i=1}^q c_i$$

ise b dizisi c dizisini majorize eder denir ve $c \prec b$ ile gösterilir.

Teorem 4.1 (Horn et al., 1985)(Fan, 1954) Eğer H ve $\bar{H}$, $H_{11} : l \times l$, $H_{22} : m \times m$, $l + m = n$, olmak üzere, aşağıdaki formda, $n \times n$ türünde Hermitian matrisler ise

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix},$$

$$(\lambda(H_{11}), \lambda(H_{22})) = \lambda(\bar{H}) \prec \lambda(H) \quad (25)$$

dir.

4.1 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisleri için Join İşlemi

$\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$, sırasıyla n ve m tepeli iki işaretli graf olsun. Bu iki grafın $\Gamma_1 + \Gamma_2$ ile gösterilen join işlemi, Γ_1 ve Γ_2 graflarının, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2), E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2))$, Γ_1 şeklinde tanımlı birleşiminden, Γ_1 işaretli grafının her tepesinden Γ_2 işaretli grafının her tepesine positif ayrıt eklenerek elde edilmiş $n + m$ tepeli bir graf olarak tanımlanır. Γ_1 ve Γ_2 grafları arasındaki ayrıtları $i \in V(\Gamma_1)$ ve $j \in V(\Gamma_2)$ olmak üzere $(i, j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ile gösterilsin. Sıradaki Lemma, işaretli graflarda tanımlı join işleminin dengesi ile ilgilidir.

Lemma 4.1 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ işaretli graflar olsun. Eğer bu işaretli graflardan en az birtanesi negatif ayrıt içeriyorsa, bu grafların join işlemi sonucu elde edilmiş graf $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k$ dengesizdir.

İspat. Γ_i işaretli grafı $(v_i, v_j) \in E(\Gamma_i)$ negatif ayrıtını içerdiği kabul edilsin. Böylece, $i \neq j$ olmak üzere, $v_k \in V(\Gamma_j)$ için join işlemi sonucunda, v_i, v_j, v_k tepelerinden oluşan bir tane C_3 negatif döngüsü elde edilir. Buradan, $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k$ grafının dengesiz olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Lemma 4.2 $\Gamma = (G, \sigma)$, $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$ işaret fonksiyonu ile G grafindan dönüştürülen, n tepeli, dengeli bir işaretli graf olsun. Eğer, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ fonksiyonu, $L(G)$ matrisinin, λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon ise $\Gamma = (G, \sigma^\theta)$ işaretli grafının, λ Laplasyen özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $f' = (\theta(1)f_1, \theta(2)f_2, \dots, \theta(n)f_n)$ şeklindedir.

İspat. $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ fonksiyonunun λ_i Laplasyen özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olduğu biliniyor. Laplasyen matrisin operasyonel tanımı (1) ve $L(G)f_i = \lambda_i f_i$ olduğu bilgisi kullanılarak;

$$d_i f_i - \sum_{i \sim j} f_j = \lambda_i f_i \quad (26)$$

denklemleri elde edilir. Eğer Γ , dengeli bir graf ise $(\Gamma, \sigma) \sim (G, +)$ eş dönüştürülmüş graflardır ve aynı Laplasyen spektruma sahiptir, (Hou, 2005). $f' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$, $L(\Gamma) = D(\Gamma) - A_s(\Gamma)$ matrisinin λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$ işaret fonksiyonu ile $i, j \in V(G)$ tepeleri işaretlenerek, $e = (i, j) \in E(G)$ ayrıtları $\sigma^\theta(e) = \theta(i)\sigma(e)\theta(j)$ olacak şekilde dönüştürülür. Böylece, $L(\Gamma)$ matrisi, $(G, +)$ grafının, θ ile Γ grafına dönüştürülmesinden sonra aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$L_{ij}(\Gamma) = \begin{cases} d_i & , \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ -\theta(i)\theta(j) & , \text{ eğer } i \text{ bitişik } j \text{ ise} \\ 0 & , \text{ aksi halde} \end{cases}$$

f' fonksiyonunu Laplasyen matrisin operasyonel tanımına uygulanarak,

$$d_i f'_i - \sum_{i \sim j} \theta(i)\theta(j) f'_j = \lambda_i f'_i \quad (27)$$

denklemleri elde edilir. (26) ve (27) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \sim j} f_j}{f_i} &= \frac{\sum_{i \sim j} \theta(i)\theta(j) f'_j}{f'_i} \\ &= \frac{\sum_{i \sim j} \theta(j) f'_j}{\theta(i) f'_i} \end{aligned}$$

dir. Böylelikle, her $i \in V(\Gamma)$ için, $f'_i = \theta(i) f_i$ elde edilmiş olur. ■

Sıradaki bölümlerde, iki grafın join işleminden sonra, $\lambda_{\min}(\Gamma)$ özdeğerinin, grafların denge durumları göz önünde bulundurularak, üst sınır değerleri incelenir.

4.1.1 Bir dengeli, bir dengesiz grafın join işlemi

Γ_1 dengesiz ve Γ_2 dengeli işaretli graflar olsun. Buradan, Γ_1 ve Γ_2 graflarının spektrumlarını sırası ile $(\lambda_{\min}(\Gamma_1), \dots, \lambda_{\max}(\Gamma_1))$ ve $(0, \lambda_{\min}(\Gamma_2), \dots, \lambda_{\max}(\Gamma_2))$ şeklinde gösterilsin. Lemma 4.1 den, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ grafının dengesiz olduğu biliniyor. Sıradaki sonuçta, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ grafının Laplasyen matrisinin sıfırdan farklı en küçük özdeğeri için bir üst sınır elde edilecektir.

Önerme 4.1 $\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$ sırasıyla dengesiz n tepeli ve dengeli m tepeli işaretli graflar olmak üzere

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq n$$

dir. Eşitlik durumu, $\sigma \neq +$ ve tam iki tane $(K_{\frac{m}{2}}, +)$ alt graf içeren $\Gamma_2 = (K_m, \sigma)$ grafi için sağlanır.

İspat. $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$, $(H, +) = (H, \sigma_2^\theta)$ olacak şekilde bir işaret fonksiyonu olsun. Böylece, Lemma 4.2 den, $L(\Gamma_2)$ matrisinin 0 özdeğerine karşı gelen özfonksiyonu $y = (\theta(1)\frac{1}{\sqrt{m}}, \dots, \theta(m)\frac{1}{\sqrt{m}})$ şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki gibi bir f fonksiyonu tanımlansın:

$$f_i = \begin{cases} 0 & , \text{eğer } i \in \Gamma_1 \text{ ise} \\ y_i & , \text{eğer } i \in \Gamma_2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f = (f_i) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) &\leq \frac{\sum_{(ij) \in E(\Gamma_1 + \Gamma_2)} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\ &= \left(\sum_{(ij) \in E(\Gamma_1)} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 + \sum_{(ij) \in E(\Gamma_2)} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(ij) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2 \right) \\ &= 0 + 0 + n \cdot m \cdot \frac{1}{m} \\ &= n \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Eşitlik durumu için, $y = (\theta(1)\frac{1}{\sqrt{m}}, \dots, \theta(m)\frac{1}{\sqrt{m}})$, $L(\Gamma_2)$ matrisinin 0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olduğu biliniyor. Eğer f , $\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ matrisinin özfonksiyonu ise $L(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ matrisinin

$$L(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \begin{bmatrix} L(\Gamma_1) + mI_n & -1_{n \times m} \\ -1_{m \times n} & L(\Gamma_2) + nI_m \end{bmatrix}$$

formundan ötürü $\sum_{i \in V(\Gamma_2)} y_i$ toplamı, 0 değerine eşit olmalı. Böylece, $L(\Gamma_1 + \Gamma_2)f = \lambda(\Gamma_1 + \Gamma_2)f$ eşitliğinden $\lambda(\Gamma_1 + \Gamma_2) = n$ olduğu elde edilir. $\lambda_{\max}(\sigma) \leq \lambda_{\max}(-)$ olduğunu biliniyor (Hou et al., 2003). Buradan anlaşılır ki, üst sınır değerine ulaşmak için, Γ_2 grafinin $\sum_{i \in V(\Gamma_2)} y_i = 0$ olacak şekilde maximum sayıda

negatif ayrıt içermesi gereklidir. Maximum sayıda negatif ayrıt içerebilmesi için grafın ayrıt sayısının en fazla sayıya ulaşması gerekli, yani Γ_2 grafı K_m formunda olmalı. $\sum_{i \in V(\Gamma_2)} y_i = 0$ olduğundan y özfonksiyonu $\frac{m}{2}$ tane negatif ve $\frac{m}{2}$ tane pozitif bileşene sahiptir. Bu formda bir dengeli Γ_2 grafı oluşturmak için, $(K_m, +^\theta) = (\Gamma_2)$ olacak şekilde öyle bir $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$ fonksiyonu vardır ki, grafının $\frac{m}{2}$ tane tepesini negatif, $\frac{m}{2}$ tane tepesini pozitif ile işaretlenir. Böylece, Γ_2 grafının iki tane $(K_{\frac{m}{2}}, +)$ alt grafa sahip olduğu sonucu elde edilir. ■

4.1.2 İki dengeli işaretli grafın join işlemi

$\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$ iki dengeli işaretli graf ve en az bir tanesi negatif ayrıt içersin. Lemma 4.1 den join işlemi sonrasında elde edilen $\Gamma_1 + \Gamma_2$ grafının dengesiz olduğu biliniyor. Bu şartlar altında Laplasyen matrisin sıfırdan farklı en küçük özdeğerinin, üst sınırı incelensin.

Önerme 4.2 $\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$ sırasıyla n ve m tepeli ve en az bir tanesi negatif ayrıt içeren dengeli işaretli graflar olsun. Bu durumda Laplasyen matrisin sıfırdan farklı en küçük özdeğeri;

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \min\{m, n\}$$

dır.

İspat. $m \leq n$ ve $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$ olacak şekilde, $L(\Gamma_1)$ matrisinin 0'a karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Aşağıdaki şekilde bir $f = (f_i) \in \mathbb{R}^{n+m}$ fonksiyonu tanımlansın:

$$f_i = \begin{cases} x_i & \text{eğer } i \in \Gamma_1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \in \Gamma_2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) &\leq \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1 + \Gamma_2)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&= \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_2)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&\quad + \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&= \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \left(\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_2)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2 \right) \\
&= 0 + 0 + \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2 = n.m. \frac{1}{n} = \min\{n, m\}
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. ■

4.1.3 Dengesiz iki işaretli grafın join işlemi

$\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$ iki işaretli dengesiz graf olsun. Lemma 4.1 den, bu iki grafın joini sonucu elde edilen $\Gamma_1 + \Gamma_2$ grafının dengesiz olduğu biliniyor. Sıradaki sonuç, bu türdeki bir join işlemi için, Laplasyen matrisin sıfırdan farklı en küçük özdeğerinin üst sınırı ile ilgilidir.

Önerme 4.3 $\Gamma_1 = (G, \sigma_1)$ ve $\Gamma_2 = (H, \sigma_2)$ sırasıyla n ve m tepeli dengesiz iki işaretli graf olsun. $\Gamma_1 + \Gamma_2$ grafının Laplasyen matrisinin en küçük özdeğeri

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1) + m, \lambda_{\min}(\Gamma_2) + n\}$$

dir.

İspat. $\|x\| = 1$ olmak üzere, $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü, $L(\Gamma_1)$ Laplasyen matrisinin, $\lambda_{\min}(\Gamma_1)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ve $\|y\| = 1$ olmak üzere, $y \in \mathbb{R}^m$ vektörü, $L(\Gamma_2)$ Laplasyen matrisinin $\lambda_{\min}(\Gamma_2)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Aşağıdaki formda bir f fonksiyonu tanımlansın

$$f_i = \begin{cases} x_i & \text{eğer } i \in \Gamma_1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \in \Gamma_2 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) &\leq \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1 + \Gamma_2)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&= \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_2)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&\quad + \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&= \lambda_{\min}(\Gamma_1) + 0 + \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \sum_{(i,j) \in E(\Gamma_1, \Gamma_2)} (f_i - f_j)^2 \\
&= \lambda_{\min}(\Gamma_1) + m.n. \frac{1}{n} = \lambda_{\min}(\Gamma_1) + m
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, aşağıdaki gibi bir g fonksiyonu tanımlanarak:

$$g_i = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \in \Gamma_1 \\ y_i & \text{eğer } i \in \Gamma_2 \end{cases}$$

$\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \lambda_{\min}(\Gamma_1) + n$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece, $\lambda_{\min}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1) + m, \lambda_{\min}(\Gamma_2) + n\}$ eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

4.2 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisinin Özdeğerleri için Tamamlayıcı Prizmalar İşlemi

Bu bölümde, (Haynes et al., 2009) de tanımlanan tamamlayıcı prizma işleminin işaretli graflara genişletilmesinden sonra, Laplasyen matrisin sıfırdan farklı en küçük ve en büyük özdeğerleri ile ilgili sınırlar verilecektir.

Tanım 4.2 $G\overline{G}$ ile gösterilen G grafinin tamamlayıcı prizma grafi, G ve $\overline{G}$ graflarının, ayrık birleşimleri olan $G \cup \overline{G}$ grafi üzerinde tanımlanır ve iki grafa aynı etikete sahip tepeler arasında oluşturulan mükemmel eşleme işlemi ile oluşturulur.

Aynı işlem işaretli graflar için de tanımlanabilir. İşaretli tamamlayıcı prizma grafi, $\Gamma = (G, \sigma_1)$ işaretli bir graf ve $\overline{\Gamma} = (\overline{G}, \sigma_2)$, Γ grafinin tümleyen işaretli

grafi olmak üzere, iki grafın aynı etikete sahip tepeleri arasında mükemmel eşleme ile pozitif işaretli ayırıt eklenerek elde edilir ve Γ ve $\bar{\Gamma}$ şeklinde gösterilir. Şekil 4.1’de de görüldüğü gibi, $\Gamma = (C_5, \sigma_1)$ işaretli grafı ve onun tümleyen işaretli grafı $\bar{\Gamma} = (\bar{C}_5, \sigma_2)$, üzerinde tanımlanan tamamlayıcı prizma işlemi ile oluşturulan, işaretli Petersen grafıdır. Literatürde tamamlayıcı prizma işlemi sonucu oluşan grafın Laplasyen matrisinin özdeğerleri ile ilgili işaretli ve işaretsiz graflar için bir sonuç bulunmamaktadır. Bu bölümde, tamamlayıcı prizma işleminin Laplasyen spektrumuna ait sonuçlar elde edilecektir. Sıradaki sonuçta, tamamlayıcı prizma işlemi sonrası grafın dengeliliği incelenecektir. Böylelikle, grafın denge durumlarına göre Laplasyen matrisin özdeğerleri için majorizasyon kavramından yararlanılarak, sınır değerler elde edilecektir.

Teorem 4.2 $\Gamma = (G, \sigma_1)$ ve $\bar{\Gamma} = (\bar{G}, \sigma_2)$ dengeli işaretli graflar olmak üzere, en az bir tanesi negatif ayrıt içersin. Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarını sırasıyla $(G, +)$ ve $(\bar{G}, +)$ graflarına çevirebilen, $i \in \Gamma$, $\bar{i} \in \bar{\Gamma}$ olmak üzere, $\theta(i) = \theta(\bar{i})$ olacak şekilde öyle bir $\theta : V \rightarrow \{+, -\}$ fonksiyonu varsa, $\Gamma\bar{\Gamma}$ tamamlayıcı prizma grafi dengeli işaretli bir graftır.

İspat. Eğer $\theta(i) = \theta(\bar{i})$ ise $(\Gamma\bar{\Gamma}, \sigma)$ grafi $(G\bar{G}, +)$ grafına dönüştürülebilir. ■

Yorum 4.1 $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli işaretli bir graf ve $f = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, λ özdeğerine karşılık gelen $L(G\bar{G})$ matrisinin özfonksiyonu olmak üzere her $i \in V(\Gamma\bar{\Gamma})$ için Lemma 4.2 ve (4) denklemi kullanılarak;

$$\begin{aligned} (d_i + 1)\theta(i)x_i - \sum_{j \sim i} a_{ij}^\sigma \theta(j)x_j - \theta(i)y_i &= \theta(i)\lambda x_i \\ (d_i + 1)\theta(i)x_i - \theta(i)\sum_{j \sim i} \theta^2(j)x_j - \theta(i)y_i &= \theta(i)\lambda x_i \\ (d_i + 1)x_i - \sum_{j \sim i} x_j - y_i &= \lambda x_i \end{aligned} \quad (28)$$

elde edilir. Böylece, tamamlayıcı prizma grafi dengeli olduğunda, $\theta(i)$ işaret fonksiyonu işaretsiz graflarda olduğu gibi ihmal edilebilir.

Teorem 4.3 Γ veya $\bar{\Gamma}$ dengesiz işaretli graf ise $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengesizdir.

4.2.2 Majorizasyon ve tamamlayıcı prizmalar

Bu kısımda $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin özdeğerleri ile $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafini oluşturan Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarının Laplasyen matrisinin özdeğerleri arasındaki ilişki majorizasyon kavramından yararlanarak incelenecektir.

Teorem 4.4 $\Gamma\bar{\Gamma}$, Γ grafinin tamamlayıcı prizması ise $(\lambda(\Gamma) + 1, \lambda(\bar{\Gamma}) + 1) \prec \lambda(\Gamma\bar{\Gamma})$ dir.

İspat.

$$L(\Gamma\bar{\Gamma}) = \begin{bmatrix} L(\Gamma) + I_n & -I_n \\ -I_n & L(\bar{\Gamma}) + I_n \end{bmatrix}, \quad L' = \begin{bmatrix} L(\Gamma) + I_n & 0 \\ 0 & L(\bar{\Gamma}) + I_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere, Teorem 4.1 yi uygulanarak

$$(\lambda(\Gamma) + 1, \lambda(\bar{\Gamma}) + 1) = (\lambda(L(\Gamma) + I_n), \lambda(L(\bar{\Gamma}) + I_n)) \prec \lambda(\Gamma\bar{\Gamma})$$

elde edilir. ■

4.2.3 Γ ve $\bar{\Gamma}$ grafları dengeli, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi dengesiz olduğunda

$\Gamma = (G, \sigma_1)$ ve $\bar{\Gamma} = (\bar{G}, \sigma_2)$, n tepeli dengeli işaretli graflar ve onların tamamlayıcı prizması $\Gamma\bar{\Gamma}$, $2n$ tepeli dengesiz graf olmak üzere; $L(\Gamma)$, $L(\bar{\Gamma})$ ve $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrislerinin spektrumu sırasıyla, azalmayan formda $(0, \lambda_{\min}(\Gamma), \dots, \lambda_{\max}(\Gamma))$, $(0, \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\max}(\bar{\Gamma}))$ ve $(\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}))$ şeklinde gösterilsin. Sıradaki sonuçta, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$ özdeğeri için bir üst sınır değeri verilecektir.

Önerme 4.4 $\Gamma = (G, \sigma_1)$ ve $\bar{\Gamma} = (\bar{G}, \sigma_2)$ n tepeli dengeli işaretli graflar ve $\Gamma\bar{\Gamma}$ $2n$ tepeli dengesiz işaretli graf olsun. $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin en küçük özdeğeri için

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{n}$$

dir.

İspat. $\Gamma = (G, \sigma_1)$, n tepeli dengeli grafinin Laplasyen matrisi için, 0 bir özdeğerdir. $\|x\| = 1$ olmak üzere, $x = \pm(\theta(1)\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \theta(n)\frac{1}{\sqrt{n}})$, $L(\Gamma)$ matrisinin 0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Benzer şekilde $\|y\| = 1$ olmak üzere $y = \pm(\theta'(1)\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \theta'(\bar{n})\frac{1}{\sqrt{n}})$, $L(\bar{\Gamma})$ matrisinin 0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Aşağıdaki şekilde bir $f = (f_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ fonksiyonu tanımlansın:

$$f_i = \begin{cases} \frac{x_i}{\sqrt{2}} & \text{eğer } i \in \Gamma \text{ ise} \\ \frac{y_i}{\sqrt{2}} & \text{eğer } i \in \bar{\Gamma} \text{ ise} \end{cases}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) &\leq \inf_{f \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\sum_{\substack{i \sim j \\ (i,j) \in E(\Gamma\bar{\Gamma})}} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\ &= \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma)} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(\bar{\Gamma})} (f_i - \sigma(i,j)f_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(\Gamma, \bar{\Gamma})} (f_i - f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\ &= 0 + 0 + \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \sum_{(i,j) \in E(\Gamma\bar{\Gamma})} (f_i - f_j)^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{n} \end{aligned}$$

üst sınırı elde edilir. ■

Şimdi de $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$ en büyük özdeğeri ile ilgili sıradaki sonuç verilsin:

Önerme 4.5 Γ ve $\bar{\Gamma}$ grafları n tepeli dengeli graflar iken, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi, $2n$ tepeli dengesiz işaretli graf olsun. $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$$

dir.

İspat. $b = (\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}))$, artmayan sırada yazılmış $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumunun dizisi ve $c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1, 1, 1), \lambda(L(\Gamma) + I_n)$ ve $\lambda(L(\bar{\Gamma}) + I_n)$ matrislerinin artmayan sırayla yazılmış spektrumlarının dizisi olsun. Teorem 4.4'den biliniyor ki b dizisi c yi majorize eder. Böylece Tanım 4.1'den;

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq 2n \quad (29)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i \quad (30)$$

dir. Eğer $k = 1$ ise $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$ elde edilir. ■

Yorum 4.2 (29) ve (30) denklemlerinden $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i \geq \sum_{i=1}^{2n-1} c_i$ ve $\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i$ olduğu biliniyor. Buradan, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq 1$ olduğunu söylenebilir. Böylece, Önerme 4.4 de elde edilen sonuç sağlanır.

Sıradaki teorem $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafinin dengeli olup olmadığından bağımsız olarak, Γ ve $\bar{\Gamma}$ grafları dengeli olduğu durumlar için söylenebilen bir sonuçtur.

Teorem 4.5 Γ ve $\bar{\Gamma}$ n tepeli dengeli işaretli graflar, λ ve $\bar{\lambda}$, sırasıyla $L(\Gamma)$ ve $L(\bar{\Gamma})$ matrislerinin bir özdeğeri olmak üzere; $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisi, 1 veya $\lambda + \bar{\lambda} + 1$ özdeğerlerine sahip olması için gerek ve yeter koşul $\lambda\bar{\lambda} = 1$ dir.

İspat. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $L(\Gamma)$ matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ve $y = (y_1, \dots, y_n)$, $L(\bar{\Gamma})$ matrisinin $\bar{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Aşağıdaki şekilde bir $f = (f_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ fonksiyonu tanımlansın

$$f_i = \begin{cases} x_i & \text{eğer } i \in \Gamma \text{ ise} \\ y_i & \text{eğer } i \in \bar{\Gamma} \text{ ise} \end{cases}$$

$L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin bir λ' özdeğerine karşılık gelen u özvektörü için

$$L(\Gamma\bar{\Gamma})u = \lambda'u \quad (31)$$

eşitliği yazılabilir. $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafindaki, her $i \in V(\Gamma)$ tepesi için, f fonksiyonunu (4) ve (31) denklemlerine uygularsak

$$\begin{aligned} (d_i + 1)x_i - \sum_{i \sim j} a_{ij}^\sigma x_j - y_i &= \lambda' x_i \\ \lambda x_i + x_i - y_i &= \lambda' x_i \end{aligned} \quad (32)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafindaki, her $i \in V(\bar{\Gamma})$ tepesi için

$$\begin{aligned} (d_i + 1)y_i - \sum_{i \sim j} a_{ij}^\sigma y_j - x_i &= \lambda' y_i \\ \bar{\lambda} y_i + y_i - x_i &= \lambda' y_i \end{aligned} \quad (33)$$

dir. (32) ve (33) denklemlerinin birleşiminden

$$\begin{aligned} -y_i &= (\lambda' - \lambda - 1)x_i \\ -x_i &= (\lambda' - \bar{\lambda} - 1)y_i \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(\lambda' - \lambda - 1)(\lambda' - \bar{\lambda} - 1) = 1 \quad (34)$$

denklemi elde edilir. (34) denkleminin köklerinin hesabından, $\lambda' = 1$ ve $\lambda' = \lambda + \bar{\lambda} + 1$ ise $\lambda\bar{\lambda} = 1$ olduğu, eğer $\lambda\bar{\lambda} = 1$ ise, $\lambda' = 1$ veya $\lambda' = \lambda + \bar{\lambda} + 1$ olduğu kolayca görülür. ■

4.2.4 $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi dengeli ise

Teorem 4.6 $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi, Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarından oluşmuş $2n$ tepeli dengeli tamamlayıcı prizma grafi olsun. 2, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin özdeğeridir.

İspat. $\sum_{i=1}^n x_i = -\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ olacak şekilde bir $f = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonu tanımlansın. $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli bir graf olduğu için, Yorum 4.1 da belirtildiği gibi yapılan işlemlerde işaret ihmal edilebilir, graf işaretli bir graf gibi ele alınabilir. Bir $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin, $\lambda \neq 0$ özdeğerine karşılık gelen

bir g özvektörü olsun. 0 özdeğerinden farklı bir özdeğere karşılık gelen bir g özvektörü için $\sum_{i=1}^{2n} g_i = 0$ dır. Böylece, $d_i, i \in V(\Gamma\bar{\Gamma})$ tepesinin derecesi olmak üzere, (1) denkleminde,

$$\lambda g(i) := d_i g(i) - \sum_{j, j \sim i} g(j) \quad (35)$$

denklemini yazılabilir. Eğer, her $i \in V(\Gamma)$ tepesi için, f fonksiyonu (35) denkleminde uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (d_1 + 1)x_1 - \sum_{j \sim 1} x_j - y_1 &= \lambda x_1 \\ &\vdots = \vdots \\ (d_n + 1)x_n - \sum_{j \sim n} x_j - y_n &= \lambda x_n \end{aligned} \quad (36)$$

eşitlikleri elde edilir. (36) de yeralan bütün denklemlerin toplamından

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n d_i x_i - \sum_{i=1}^n d_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

bulunur. $\sum_{i=1}^n x_i = -\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n x_i &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, her $\bar{i} \in \bar{\Gamma}$ için, f fonksiyonu (35) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} (\bar{d}_1 + 1)y_1 - \sum_{j \sim \bar{1}} y_j - x_1 &= \lambda y_1 \\ &\vdots = \vdots \\ (\bar{d}_n + 1)y_n - \sum_{j \sim \bar{n}} y_j - x_n &= \lambda y_n \end{aligned} \quad (37)$$

eşitlikleri elde edilir. (37) denklemlerindeki bütün eşitlikler toplanarak

$$\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \bar{d}_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i = \lambda \sum_{i=1}^n y_i$$

eşitliği bulunur. Tekrar f fonksiyonunun formunu kullanarak,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n y_i &= \lambda \sum_{i=1}^n y_i \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece, $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli olduğu durumda, 2, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin özdeğeridir ve $\sum_{i=1}^n x_i = -\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$ olmak üzere $f = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonu, 2 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur. ■

Yorum 4.3 *Teorem 4.6 nin ispatında da gösterildiği gibi, $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli grafinin 2 Laplasyen özdeğerine karşılık gelen $f = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ özfonksiyonunun formu aşağıdaki gibidir:*

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\sum_{i=1}^n y_i \neq 0 \quad (38)$$

Lemma 4.3 $\Gamma\bar{\Gamma} = (G\bar{G}, \sigma)$ grafi, Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarının oluşturduğu, dengeli işaretli bir tamamlayıcı prizma grafi olsun. $\lambda_1 = 0 < \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \dots \leq \lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumu, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$ ve $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$ özdeğerleri 2 den farklı olmak üzere

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) + \lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) = n + 2 \quad (39)$$

dir.

İspat. $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafi dengeli bir graf olduğundan, altında yatan $G\bar{G}$ grafinin Laplasyen spektrumu ile $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumu aynıdır (Hou et al., 2003). İşaret yükünden kurtulmak için, dengeli graf, işaretsiz olarak alınabilir. $f = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ $L(G\bar{G})$ matrisinin k . özdeğeri λ_k değerine karşılık gelen $\sum_{i=1}^n x_i = -\sum_{i=1}^n y_i = 0$ formundaki özfonksiyon olsun. (4) numaralı denklemden g , L Laplasyen matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen, özfonksiyonu ise d_i i tepesinin derecesi olmak üzere

$$\lambda g(i) := d_i g(i) - \sum_{j, j \sim i} \sigma(i, j) g(j) \quad (40)$$

olduğunu biliniyor. f fonksiyonu (40) denklemine uygulanmak üzere, her $i \in V(G)$ için

$$(d_i + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} x_j - y_i = \lambda_k x_i \quad (41)$$

eşitliği elde edilir. Benzer düşünce ile, her $i \in V(\bar{G})$ için

$$(\bar{d}_i + 1)y_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} y_j - x_i = \lambda_k y_i \quad (42)$$

dir. Her $i \in G$ için yazılan (41) denkleminin sol tarafındaki x_i yerine $-y_i$, karşılığındaki $\bar{i} \in \bar{G}$ tepesi için aldığı y_i değeri yerine x_i değerleri alınarak

$$\begin{aligned} -(d_i + 1)y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} y_j - x_i &= -(n - 1 - \bar{d}_i + 1)y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} y_j - x_i \\ &= -(n + 1)y_i + (\bar{d}_i + 1)y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} y_j - x_i \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (42) denklemi ve $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ toplamı kullanılarak devam edilirse

$$\begin{aligned} &= -(n + 1)y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} y_j + x_i + \lambda_k y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} y_j - x_i \\ &= -(n + 1)y_i + \lambda_k y_i - y_i \\ &= (\lambda_k - n - 2)y_i \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$-(d_i + 1)y_i + \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} y_j - x_i = -(n + 2 - \lambda_k)y_i$$

elde edilir. Benzer şekilde, Her $i \in \bar{G}$ için yazılan (42) denkleminin sol tarafındaki y_i yerine x_i , karşılığındaki $i \in G$ tepesi için aldığı x_i değeri yerine $-y_i$ değeri alınarak

$$\begin{aligned} (\bar{d}_i + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} x_j + y_i &= (n - 1 - d_i + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} x_j + y_i \\ &= (n + 1)x_i - (d_i + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} x_j + y_i \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. (41) denklemini ve $-\sum_{i=1}^n x_i = 0$ olduğu kullanılarak devam edilirse

$$\begin{aligned} &= (n + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in G}} x_j - y_i - \lambda_k x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} x_j + y_i \\ &= (n + 1)x_i - \lambda_k x_i + x_i \\ &= (n + 2 - \lambda_k)x_i \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$(\bar{d}_i + 1)x_i - \sum_{\substack{j \sim i \\ i, j \in \bar{G}}} x_j + y_i = (n + 2 - \lambda_k)x_i$$

dir. Buradan, $f' = (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$ 'nin $L(G\bar{G})$ için $n + 2 - \lambda_k$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olduğu anlaşılır. Diğer bir ifade ile, $L(G\bar{G})$ matrisinin öyle bir λ_m özdeğeri vardır ki

$$(\lambda_k + \lambda_m) = n + 2 \quad (43)$$

dir. Teoremin ifadesinde de bahsedildiği gibi, $\lambda_{\min}(G\bar{G})$ ve $\lambda_{\max}(G\bar{G})$ ın 2'den farklı özdeğerlerdir. $\lambda_{\min}(G\bar{G}) + \lambda_{\max}(G\bar{G}) \neq n + 2$ olduğu kabul edilsin. Kabulden ve (43) denkleminde

$$\begin{aligned} \lambda_m(G\bar{G}) &= \lambda_{\min}(G\bar{G}) \\ \lambda_k(G\bar{G}) &< \lambda_{\max}(G\bar{G}) \end{aligned} \quad (44)$$

olmak üzere,

$$\lambda_k(G\bar{G}) + \lambda_{\min}(G\bar{G}) = n + 2 \quad (45)$$

dır. Aynı şekilde, spektrumdaki 2 den farklı $\lambda_n(G\bar{G})$ ve $\lambda_t(G\bar{G})$ özdeğerleri için (43) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda_n(G\bar{G}) &= \lambda_{\max}(G\bar{G}) \\ \lambda_t(G\bar{G}) &> \lambda_{\min}(G\bar{G}) \end{aligned} \quad (46)$$

olmak üzere

$$\lambda_t(\Gamma\bar{\Gamma}) + \lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) = n + 2 \quad (47)$$

dir. (44) ve (46) denklemlerinin taraf tarafa toplamından

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) + \lambda_k(\Gamma\bar{\Gamma}) < \lambda_t(\Gamma\bar{\Gamma}) + \lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \quad (48)$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat (45) ve (47) denklemleri ile (48) denklemi çelişmektedir. Bu çelişki kabulden kaynaklanmaktadır. Böylece, (39) denkleminde ulaşılmış olur. ■

Önerme 4.6 $\Gamma\bar{\Gamma} = (G\bar{G}, \sigma)$, dengeli bir işaretli graf olsun. $\lambda_{\min}(\Gamma)$ ve $\lambda_{\min}(\bar{\Gamma})$ sırasıyla Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarının sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğerleri olmak üzere, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğeri için

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \min\left\{2, \frac{\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) + 2}{2}\right\}$$

dir.

İspat. Graf dengeli olduğundan, işaretli olarak ele alınabilir. $\|x\| = 1$ olacak şekilde, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $L(\Gamma)$, $\lambda_{\min}(\Gamma)$ Laplasyen özdeğerine karşılık gelen bir özvektör ve $\|y\| = 1$ olacak şekilde $y = (y_1, \dots, y_n)$ $L(\bar{\Gamma})$, $\lambda_{\min}(\bar{\Gamma})$ Laplasyen özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olsun. Laplasyen matrisin operasyonel tanım (4) kullanılarak, her $i \in \Gamma$ için, d_i , $i \in V(\Gamma)$ tepe derecesini göstermek üzere

$$d_i x_i - \sum_{j \sim i} x_j = \lambda_{\min}(\Gamma) x_i \quad (49)$$

dir. Benzer şekilde, her $\bar{i} \in \bar{\Gamma}$ için, $\bar{d}_i$, $\bar{i} \in V(\bar{\Gamma})$ tepe derecesini göstermek üzere

$$\bar{d}_i y_i - \sum_{j \sim i} y_j = \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) y_i \quad (50)$$

dir. (49) denkleminin y_i ile (50) denkleminin x_i ile çarpımından elde edilen modifikasyon sonucu

$$d_i x_i y_i - y_i \sum_{j \sim i} x_j = \lambda_{\min}(\Gamma) x_i y_i \quad (51)$$

$$\bar{d}_i x_i y_i - x_i \sum_{j \sim i} y_j = \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) x_i y_i \quad (52)$$

denklemleri elde edilir. Her $i \in \Gamma$ için oluşturulan (51) denklemleri ve her $\bar{i} \in \bar{\Gamma}$ için oluşturulan (52) denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$$(n-1) \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i = (\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})) \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (53)$$

denkleminde ulaşılır. Böylece, $\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq 0$ için $\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) = n$ dir. $\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) < n$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ olacaktır. Buna göre aşağıdaki şekilde bir $f = (f_i) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$f_i = \begin{cases} x_i/\sqrt{2} & , i \in \Gamma \\ y_i/\sqrt{2} & , \bar{i} \in \bar{\Gamma} \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) &\leq \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\sum_{\substack{i \sim j \\ i, j \in \Gamma\bar{\Gamma}}} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\
&= \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{\sum_{(i, j) \in E(\Gamma)} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2 + \sum_{(i, j) \in E(\bar{\Gamma})} (f_i - \sigma(i, j)f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sum_{(i, j) \in E(\Gamma, \bar{\Gamma})} (f_i - f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \right) \\
&= \frac{\lambda_{\min}(\Gamma)}{2} + \frac{\lambda_{\min}(\bar{\Gamma})}{2} + \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \sum_{(i, j) \in E(\Gamma, \bar{\Gamma})} (f_i - f_j)^2
\end{aligned}$$

dir. $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ kabulünden $\sum_{(i, j) \in E(\Gamma\bar{\Gamma})} (f_i - f_j)^2 = 1$ olacaktır. Bundan dolayı

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \frac{\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) + 2}{2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Teorem 4.6'dan, $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli bir graf ise 2, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin özdeğeri olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \min\left\{2, \frac{\lambda_{\min}(\Gamma) + \lambda_{\min}(\bar{\Gamma}) + 2}{2}\right\}$$

sonucu ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.7 $\Gamma\bar{\Gamma} = (G\bar{G}, \sigma)$, $2n$ tepeli Γ ve $\bar{\Gamma}$ graflarından oluşmuş dengeli, işaretli bir tamalayıcı prizmalar grafi olsun. Eğer $\Gamma\bar{\Gamma}$ en az bir tane pendant (1. dereceden) tepe içeriyorsa, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$ ve $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$ özdeğerleri $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin sırasıyla sıfırdan farklı en küçük ve en büyük özdeğerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) &= \frac{(n+2) - \sqrt{n^2 + 4}}{2} \\
\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) &= \frac{(n+2) + \sqrt{n^2 + 4}}{2}
\end{aligned}$$

şeklinde dir.

İspat. Graf dengeli olduğu için $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ ile aynı Laplasyen spektruma sahip, altında yatan işaretli $G\bar{G}$ grafini ele alalım. $f = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $\sum_{i \in \Gamma\bar{\Gamma}} f_i = 0$ olacak şekilde, $L(G\bar{G})$ matrisinin, λ özdeğerine karşılık gelen bir

özfonksiyonu olmak üzere, $L(G\bar{G})$ matrisinin, λ özdeğerine karşılık gelen f özfonksiyonu için

$$L(G\bar{G})f = \lambda f \quad (54)$$

olduğu biliniyor. Kabul edilsin ki, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafiındaki pendant tepe, $\bar{\Gamma}$ grafiında isole olarak bulunan $\bar{i}$ tepesi olsun. Bu tepenin Γ grafiındaki karşılığı $(n-1)$ dereceli i tepesi için, (4) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} nx_i - \sum_{j \sim i} x_j - y_i &= \lambda x_i \\ (n+1)x_i - \sum_{j=1}^n x_j - y_i &= \lambda x_i \end{aligned} \quad (55)$$

elde edilir. Aynı şekilde, $\bar{i}$ pendant tepesi için

$$\begin{aligned} -x_i + y_i &= \lambda y_i \\ -x_i &= (\lambda - 1)y_i \end{aligned} \quad (56)$$

yazılır. $\lambda \neq 2$ olduğu kabul edilsin. Buradan, $\sum_{j=1}^n x_j = 0$ dir. (55) ve (56) denklemleri kullanılarak $y_i \neq 0$ için

$$\begin{aligned} -(n+1)(\lambda - 1)y_i - y_i &= -\lambda(\lambda - 1)y_i \\ \lambda^2 - \lambda(n+2) + n &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(n+2) + \sqrt{n^2+4}}{2} \text{ veya} \\ \lambda &= \frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2} \end{aligned}$$

dir. $\lambda = \frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2}$ değerinin $L(G\bar{G})$ matrisinin en küçük özdeğeri olduğu gösterilmek isteniyor. $\lambda = \frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2} < 2$ olduğu açıktır. Bu durumda, $\frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2}$ değerinin minimum özdeğer olma ihtimali vardır. Eğer, $\frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2}$ değerinden daha küçük bir özdeğer varsa, (57) denkleminin sağlaması için, minimum özdeğere karşılık gelen özfonksiyonda, pendant tepeye karşılık gelen değerin 0 olması gerekmektedir. Dolayısıyla, (56) denkleminde, G grafiındaki n dereceye sahip tepeye, özfonksiyonda karşılık gelen değer de 0 dır. Buna göre aşağıdaki şekilde bir $h \in \mathbb{R}^{2n}$ fonksiyonu tanımlansın:

$$h_i = \begin{cases} f_i & d_i \neq n \text{ veya } 1 \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) &\leq \lambda = \inf_{f \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\sum_{\substack{i \sim j \\ i, j \in (\Gamma\bar{\Gamma})}} (f_i - f_j)^2}{\sum_i f_i^2} \\ &\leq \inf_{h \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\sum_{\substack{i \sim j \\ i, j \in (\Gamma\bar{\Gamma})}} (h_i - h_j)^2}{\sum_i h_i^2}\end{aligned}$$

dir. Böylece, $\frac{(n+2)-\sqrt{n^2+4}}{2}$ değerinden daha küçük bir değer bulunamamış olur.

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) = \frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2}$$

Lemma 4.3, kullanılarak, $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) = \frac{(n+2)+\sqrt{n^2+4}}{2}$ elde edilir. ■

İşaretsiz graflar için, sıfırdan farklı en küçük özdeğer ile bağlantılılık arası ilişki iyi bilinmektedir (Fiedler, 1973). Grafın bağlantılılığı arttığında, 'cebirsal bağlantılılık' diye adlandırılan, sıfırdan farklı en küçük özdeğerin değeri de artar. Sıradaki sonuçta, bu bilgiden yola çıkarak dengeli bir tamamlayıcı prizma grafının sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğeri için bir üst sınır değeri elde edilecektir.

Teorem 4.8 $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$ ve $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$, $\Gamma\bar{\Gamma}$ $2n$ tepeli dengeli işaretli grafının Laplasyen matrisinin sıfırdan farklı minimum ve maximum özdeğerleri olmak üzere

$$\frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2} \leq \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$$

ve

$$\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \frac{(n+2) + \sqrt{n^2+4}}{2}.$$

dir.

İspat. $\Gamma_1\bar{\Gamma}_1$ ve $\Gamma_2\bar{\Gamma}_2$, $2n$ tepeli iki farklı, dengeli, işaretli graf olsunlar. $\Gamma_1\bar{\Gamma}_1$ grafının en az bir tane pendant tepe içerdiği kabul edilsin. Graflar dengeli olduğundan, altında yatan işaretsiz graf ile Laplasyen spektrumları aynıdır (Hou et al., 2003), bu yüzden grafları işaretsiz olarak ele alınabilir. Kabulden ötürü, $\Gamma_1\bar{\Gamma}_1$ grafının bağlantılılığı, $\Gamma_2\bar{\Gamma}_2$ grafının bağlantılılığından

küçük eşittir. Teorem 4.7'den ve grafin bağlantılılığı ile sıfırdan farklı en küçük özdeğer arasındaki ilişkiden yararlanılarak, herhangi bir $\Gamma\bar{\Gamma}$ dengeli bir tamamlayıcı prizma grafi için

$$\frac{(n+2) - \sqrt{n^2+4}}{2} \leq \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$$

olduğu söylenebilir. Ayrıca, Lemma 4.3 kullanılarak

$$\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \frac{(n+2) + \sqrt{n^2+4}}{2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

Sıradaki sonuçta, Teorem 4.4 kullanılarak $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma})$ ve $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma})$ için sınır belirlenecektir.

Önerme 4.7 Γ ve $\bar{\Gamma}$ birleştirilmiş işaretli graflar, $\Gamma\bar{\Gamma}$, $2n$ tepeli dengeli işaretli graf olmak üzere, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin en büyük özdeğeri

$$\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$$

dir.

İspat. $b = (\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}), 0)$, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumunun artmayan sırada sıralanmış dizisi ve $c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1, 1, 1)$, $L(\Gamma) + I_n$ ve $L(\bar{\Gamma}) + I_n$ matrislerinin spektrumlarının artmayan sırada sıralanmış dizisi olsun. Teorem 4.4 kullanılarak, b dizisi c dizisini majorize ettiği söylenir. Böylelikle, Tanım 4.1'den;

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq 2n \quad (58)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i \quad (59)$$

dir. $k = 1$ durumu ele alındığında, $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$ eşitsizliği elde edilir. ■

Yorum 4.4 (58) ve (59) numaralı denklemlerden $\sum_{i=1}^{2n-2} b_i \geq \sum_{i=1}^{2n-2} c_i$ ve $\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i$ olduğunu biliniyor. Buradan, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq 2$ olduğu açıktır. Teorem

4.6'dan, dengeli tamamlayıcı prizma grafinin 2 Laplasien özdeğerine sahip olduğu söylenebilir. Böylece, 2'nin, sıfırdan farklı en küçük özdeğer için bir üst sınır olduğu, majorizasyon kavramı kullanılarak elde edilmiş olur.

4.2.5 Γ dengeli, $\bar{\Gamma}$ dengesiz olduğu durumda

Önerme 4.8 Γ dengeli ve $\bar{\Gamma}$ dengesiz, n tepeli işaretli graflar olmak üzere, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin sıfırdan farklı en büyük ve en küçük özdeğeri

$$\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$$

$$\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq 1$$

dir.

İspat. Teorem 4.3'den, $\Gamma\bar{\Gamma}$ grafinin dengesiz olduğu söylenir. $b = (\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}))$, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumlarının artmayan sıradaki dizisi ve $c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1, 1)$, $L(\Gamma) + I_n$ ve $L(\bar{\Gamma}) + I_n$ matrislerinin spektrumunun artmayan sırada yazılmış dizisi olmak üzere, Teorem 4.4'den b dizisinin c dizisini majorize ettiği biliniyor. Böylece, Tanım 4.1 kullanılarak;

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq 2n \quad (60)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i \quad (61)$$

denklemleri elde edilir. $k = 1$ durumu için, $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$ dir. Ayrıca, (60) ve (61) denklemleri kullanılarak $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i \geq \sum_{i=1}^{2n-1} c_i$ ve $\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i$ olduğu elde edilir. Buradan, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq 1$ eşitsizliğine ulaşılır. ■

4.2.6 Γ ve $\bar{\Gamma}$ dengesiz olduğu durumda

Önerme 4.9 Γ ve $\bar{\Gamma}$, n tepeli dengesiz işaretli graflar olmak üzere, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin sıfırdan farklı en büyük ve en küçük özdeğerleri için

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) &\geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1 \\ \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) &\leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1\end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 4.3'dan $\Gamma\bar{\Gamma}$ tamamlayıcı prizma grafinin dengesiz olduğu biliniyor. $b = (\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}))$, $L(\Gamma\bar{\Gamma})$ matrisinin spektrumunun artmayan formda yazılmış dizisi ve $c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1)$, $L(\Gamma) + I_n$ ve $L(\bar{\Gamma}) + I_n$ matrislerinin spektrumlarının artmayan formda yazılmış dizisi olmak üzere, Teorem 4.4'dan biliniyor ki b dizisi c dizisini majorize eder. Böylece, Tanım 4.1 kullanılarak;

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq 2n \quad (62)$$

ve

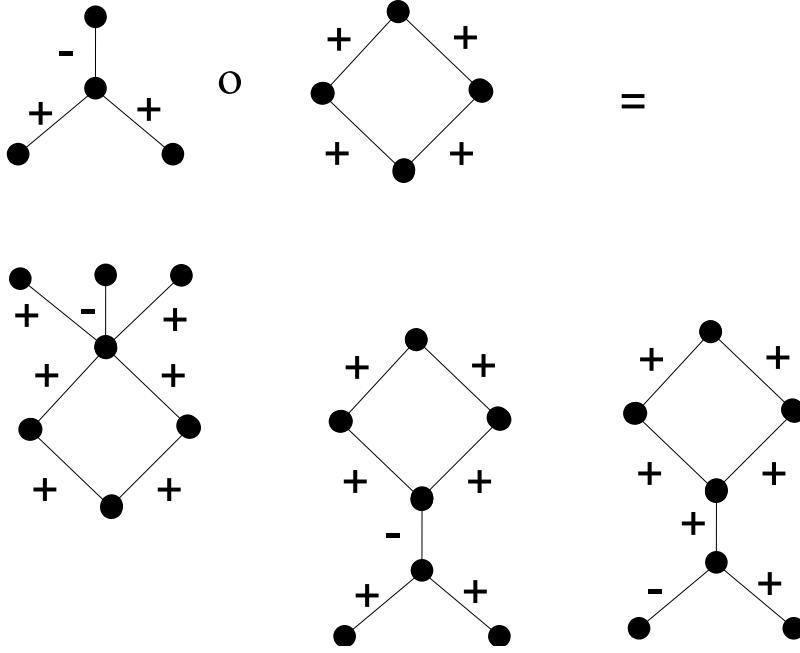
$$\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i \quad (63)$$

olduğu elde edilir. $k = 1$ durumu için $\lambda_{\max}(\Gamma\bar{\Gamma}) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma), \lambda_{\max}(\bar{\Gamma})\} + 1$ dir. Ayrıca, (62) ve (63) denklemlerinden, $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i \geq \sum_{i=1}^{2n-1} c_i$ and $\sum_{i=1}^{2n} b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i$ olduğu biliniyor. Böylelikle, $\lambda_{\min}(\Gamma\bar{\Gamma}) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma), \lambda_{\min}(\bar{\Gamma})\} + 1$ sonucuna ulaşılır. ■

4.3 İşaretli Grafların Laplasyen Matrisi İçin Coalescence İşlemi

G_1 grafinin bir tepesini, G_2 grafinin bir tepesi ile tek bir tepe gibi birleştirme işlemi coalescence işlemi olarak adlandırılır. Bu işlem işaretli graflar için de tanımlanabilir. Γ_1 ve Γ_2 işaretli graflar olmak üzere, iki graftan ayrı ayrı seçilen bir tepelyi, bu tepelere bitişik ayrıtların işaretleri korunacak şekilde tek

bir tepede birleştirme işlemine, işaretli grafların coalescence işlemi denir. Γ_1 ve Γ_2 graflarının coalescence işlemi, $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ile gösterilecektir. Coalescence işlemi sonucunda, $n_1 + n_2 - 1$ tepeli bir graf elde edilir. Diğer bir çok graf işleminin aksine, genelde tek bir graf elde edilmez. Şekil 4.2’de coalescence işlemi ile ilgili bir örnek verilmektedir.



Şekil 4.2: $(K_{1,3}, \sigma_1)$ ve $(C_4, +)$ graflarının bütün coalescence işlemleri

Önerme 4.10 Γ_1 ve Γ_2 işaretli graflarından en az bir tanesi dengeli olmak üzere, Γ_1 ve Γ_2 graflarının herhangi bir $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ coalescence işleminin sıfırdan farklı en büyük ve en küçük Laplasyen özdeğerleri

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\},$$

$$\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}$$

dir.

İspat. $\Gamma_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ olmak üzere, n_i tepeli ve m_i ayrıtlı graflar ve Q_1 ve Q_2 sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 graflarının tepe-ayrıt komşuluk matrisleri olsun. Grone

ve Merris'in ispatındakine benzer şekilde ((Grone and Merris, 1990), Theorem 1), aşağıdaki gibi matrisler oluşturulabilir.

$$K(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \begin{pmatrix} Q_1^t Q_1 & R \\ R^T & Q_2^t Q_2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$K(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \begin{pmatrix} Q_1^t Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^t Q_2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Burada R , $m_1 \times m_2$ matrisi temsil etmektedir. $K(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)$ ve $K(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ matrislerinin özdeğerlerine Teorem 4.1'de elde edilen sonuç uygulanırsa,

$$(\lambda(\Gamma_1), \lambda(\Gamma_2)) = \lambda(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \prec \lambda(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \quad (66)$$

olduğu elde edilir. Eğer, Γ_1 ve Γ_2 graflarının her ikisi de dengeli ise, $K(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)$ ve $K(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ matrislerinin, artmayacak düzende oluşturulmuş, sırasıyla b ve c olarak adlandırılan spektrumunun dizisi aşağıdaki gibidir:

$$b = (\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2), 0)$$

$$c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}, 0, 0)$$

(66) numaralı denklemden b dizisinin c dizisini majorize ettiği bilinmektedir.

Böylelikle,

$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq n_1 + n_2 - 1$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} b_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} c_i$$

dir. $k = 1$ için

$$\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}$$

elde edilir. Ayrıca, majorizasyon tanımını kullanarak, b ve c spektrum dizilerinin formundan ötürü,

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-2} b_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2-2} c_i$$

iken,

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-3} b_i \geq \sum_{i=1}^{n_1+n_2-3} c_i$$

olduğu açıkça görülür. Böylece,

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer Γ_1 veya Γ_2 graflarından bir tanesi dengesiz ise, $L(\Gamma_1)$ ve $L(\Gamma_2)$ matrislerinin sırasıyla b ve c diye adlandırılan artmayacak düzende oluşturulmuş spektrum dizisi aşağıdaki şekildedir:

$$b = (\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2))$$

$$c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}, 0)$$

Tekrar, (66) numaralı denklemden, b dizisinin c dizisini majorize ettiği bilgisi kullanarak, $k = 1$ durumu için

$$\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, b ve c dizilerinin formundan,

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} b_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} c_i$$

iken,

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-2} b_i \geq \sum_{i=1}^{n_1+n_2-2} c_i$$

olduğu açıkça görülür. Böylece,

$$\lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Önerme 4.11 Γ_1 ve Γ_2 sırasıyla n_1 ve n_2 tepeli dengesiz işaretli graflar olmak üzere, Γ_1 , Γ_2 ve herhangi bir coalescence operasyonu $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ’nın en büyük Laplasyen özdeğerleri

$$\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}$$

şeklindedir.

İspat. $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ grafinin $n_1 + n_2 - 1$ tepeli bir graf olduğunu biliniyor. Γ_1 ve Γ_2 graflarının, sırasıyla b ve c ile gösterilen, Laplasyen özdeğerlerinin dizileri aşağıdaki gibi artmayan sırada sıralansın:

$$b = (\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2))$$

$$c = (\max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}, \dots, \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\})$$

b ve c dizilerine, Teorem 4.1 uygulanarak

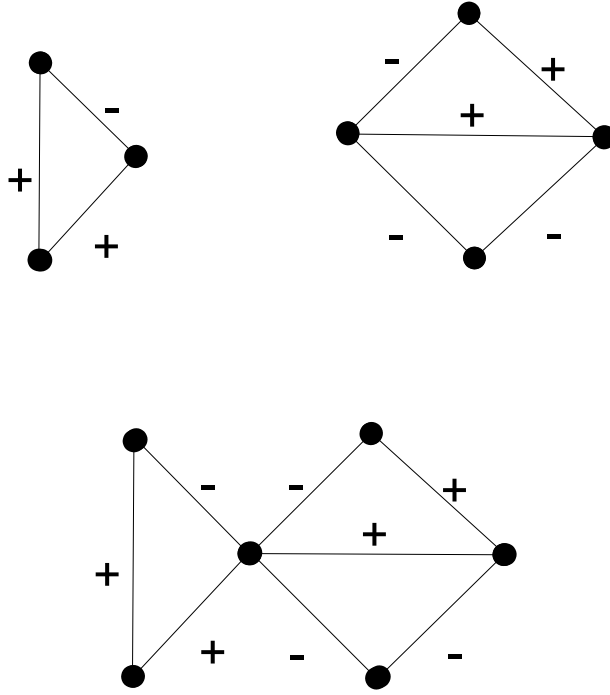
$$\sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad 1 \leq k \leq n_1 + n_2 - 1$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} b_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} c_i$$

olduğu elde edilir. $k = 1$ için, $\lambda_{\max}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \geq \max\{\lambda_{\max}(\Gamma_1), \lambda_{\max}(\Gamma_2)\}$ dir. ■

Yorum 4.5 Şekil 4.3, iki dengesiz işaretli grafin coalescence operasyonundan sonra, sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğerleri arasında, $\lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \leq \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}$ olmadığına dair bir aksi örnek sağlamaktadır. Çizelge 4.1’da görüldüğü gibi, $\lambda_{\min}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) > \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1), \lambda_{\min}(\Gamma_2)\}$ dir.



Şekil 4.3: Γ_1 ve Γ_2 işaretli grafları ve onların bir coalescence işlemi

$L(\Gamma_1)$	$L(\Gamma_2)$	$L(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)$
$\lambda_1 = 1$	$\bar{\lambda}_1 = 0.5858$	$\theta_1 = 0.7756$
$\lambda_2 = 1$	$\bar{\lambda}_2 = 1.2679$	$\theta_2 = 1$
$\lambda_3 = 4$	$\bar{\lambda}_3 = 3.4142$	$\theta_3 = 1.3567$
	$\bar{\lambda}_4 = 4.7321$	$\theta_4 = 2.6232$
		$\theta_4 = 3.8572$
		$\theta_4 = 6.3874$

Çizelge 4.1: Γ_1 , Γ_2 ve $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ graflarına ait sırasıyla λ_i , $\bar{\lambda}_i$ ve θ_i ile gösterilen Laplasyen spektrumlar.

5 İŞARET DERECELİ LAPLASYEN MATRİS

5.1 Tanımlar ve Genel Bilgiler

Bu bölümde, yeni bir Laplasyen matris tanımlanacaktır ve ortaya konulan bu yeni tanıma göre, matrisin spektrumu incelenecektir.

Tanım 5.1 $\Gamma=(G, \sigma)$ işaretli bir graf olmak üzere, $L_s(\Gamma)$ ile gösterilecek işaret dereceli Laplasyen matris

$$L_s(\Gamma) = D_s(\Gamma) - A_s(\Gamma)$$

şeklindedir. Burada $D_s(\Gamma)$, tepelerin işaret derecelerine göre tanımlanmış, diagonal işaret derece matrisi ve $A_s(\Gamma)$, bileşenleri $a_{ij}^\sigma = \sigma(i, j)a_{ij}$ şeklinde tanımlı, Γ işaretli grafının bitişiklik matrisidir.

$L_s(\Gamma)$ simetrik bir matristir ve satır toplamı sıfırdır. Matrisin satır toplamları 0 olduğundan, 0 her zaman bir özdeğerdir, fakat her zaman tek değildir. Buna göre $\mu_0 = 0, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ işaret dereceli Laplasyen spektrum olsun. İşaret dereceli Laplasyen matris tanımına göre, grafın tüm ayrıtları + ile işaretlendiğinde, işaret dereceli Laplasyen matris, $L_s(G, +) = L(G)$ formuna, tüm ayrıtlar - ile işaretlendiğinde $L_s(G, -) = -L(G)$ formuna dönüşür. İşaretsiz ve işaretli grafların Laplasyen matrisinde olduğu gibi, işaretli bir grafın, işaret dereceli Laplasyen matrisinin diagonal bileşenleri negatif değer alabileceğinden, komşuluk matrisi ve transpozisinin çarpımı şeklinde ifade edilemez. İşaret dereceli Laplasyen matris için, Dirichet toplamı ve Rayleigh oranı aşağıdaki şekildedir:

Lemma 5.1 (Dirichlet Toplamı) Γ , n tepeli işaretli bir graf, $L_s(\Gamma)$, işaret dereceli Laplasyen matris olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için:

$$x^T L_s(\Gamma) x = \sum_{ij \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (x_i - x_j)^2.$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
x^T L_s x &= \sum_{i \in V(\Gamma)} (d_i^+ - d_i^-) x_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(i, j) x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(i, j) x_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma(i, j) x_i x_j \\
&= \sum_{ij \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (x_i - x_j)^2
\end{aligned}$$

■

İşaretleli ve işaretsiz grafların Laplasyen özdeğerleri ile ilgili, alt ve üst sınırları belirlemede önemli role sahip olan, bir x vektörünün Rayleigh oranı, işaretleli Laplasyen matrisin özdeğerleri için de yazılabilir. Sıfırdan farklı en küçük ve en büyük özdeğer için,

$$\begin{aligned}
\mu_{\min}(\Gamma) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L_s x}{x^T x} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{ij \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
\mu_{\max}(\Gamma) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L_s x}{x^T x} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{ij \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}$$

dir.

Lemma 5.2 $\Gamma = (G, \sigma)$, $\sigma \neq +$, n tepeli dengeli işaretleli bir graf ve $L_s(\Gamma)$ işaret dereceli Laplasyen matrisi olsun. $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$, $L_s(\Gamma)$ matrisinin spektrumu ve $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$, sıfırdan farklı en küçük $\mu_{\min}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olmak üzere, eğer $(i, j) \in E^-$ ise $g_i g_j < 0$ ve $(i, j) \in E^+$ ise $g_i g_j > 0$ dır.

İspat. $L_s(\Gamma)$ matrisinin sıfırdan farklı en küçük özdeğeri $\mu_{\min}$ için Rayleigh oranı aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{\min}(\Gamma) = \inf_{g \in \mathbb{R}^n} \frac{\sum_{(i,j) \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (g_i - g_j)^2}{\sum_{i=1}^n g_i^2}$$

Buna göre, toplamın en küçük değeri alması, $\sum_{(i,j) \in E(\Gamma)} \sigma(i, j) (g_i - g_j)^2$ toplamının en küçük değerine ulaşması demektir. Buradan, $\sigma(i, j) = -$ olduğunda

g_i ve g_j zıt işaretli, $\sigma(i, j) = +$ olduğunda g_i ve g_j aynı işaretli olması gerekmektedir. Grafin dengeli olmadığı kabul edilsin. Graf dengeli olmadığı durumda, en az bir tane negatif C_k , $0 \leq k \leq n$, döngüsü içermektedir. Negatif bir döngüde, tek sayıda negatif ayırıt bulunmaktadır. Döngüdeki tepelere karşılık gelen özvektörün bileşenleri için, her bir $(i, j) \in E^-$ için $g_i g_j < 0$ ve her bir $(i, j) \in E^+$ için $g_i g_j > 0$ ise, $\prod_{i \in C_k} g_i^2 < 0$ dır. Bu çelişki, grafin dengesiz olarak kabul edilmesinden kaynaklanmaktadır. Graf dengeli olmak zorundadır.

■

Hou'nun işaretli graflar için tanımladığı Laplasyen matrisin özdeğerleri ile tanımlanan işaret dereceli Laplasyen matrisin özdeğerleri arasında ilişki kurmak amacıyla, kullanışlı bir araç olan Weyl eşitsizliği sıradaki lemmada verilsin.

Lemma 5.3 (*Horn et al., 1985*) A, B $n \times n$ reel simetrik matris olsun. $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her bir i için, $\lambda_i(A), \lambda_i(B), \lambda_i(A+B)$ matrislere ait özdeğerleri göstermek üzere,

$$\min_{r+s=i+1} \{\lambda_r(A) + \lambda_s(B)\} \geq \lambda_i(A+B) \geq \max_{r+s=i+n} \{\lambda_r(A) + \lambda_s(B)\}$$

dir.

Weyl'in eşitsizliğinden yararlanarak sıradaki sonuç elde edilir:

Teorem 5.1 Γ , n tepeli işaretli bir graf olsun. $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, sırasıyla $L_s(\Gamma)$ ve $L(\Gamma)$ matrislerinin Laplasyen spektrumu ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\lambda_n(\Gamma) - 2 \max_{j \in V} d_j^- \leq \mu_n(\Gamma) \quad (67)$$

ve

$$\lambda_1(\Gamma) - 2 \min_{j \in V} d_j^- \geq \mu_1(\Gamma) \quad (68)$$

dir

İspat. D^- , bileşenleri bir tepeye bitişik negatif ayrıt sayısı olan köşegen matris olmak üzere, $L_s(\Gamma) = L(\Gamma) - 2D^-$ olarak ifade edilir. Lemma 5.3 kullanılarak, (67) ve (68) eşitsizlikleri elde edilir. ■

5.2 Bazı Özel Graf Türleri için İşaret Dereceli Laplasyen Matrisin Spektrumu

Bu bölümde, yol, çevre, yıldız ve tam graf gibi bazı özel graf sınıflarının işaret dereceli Laplasyen spektrumu incelenecektir.

5.2.1 Tam graf (K_n)

$L_s(K_n, \sigma)$ Laplasyen matrisinin μ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. $f \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$L_s f = \mu f$$

olduğunu biliniyor.

- Öncelikle, $n \geq 4$ için, grafın bir negatif ayrıt içerdiği durum incelenirse: $V = \{1, 2, \dots, n\}$, K_n grafının tepeler kümesi ve $(1, 2) \in E^-$ olsun. Buna göre, $L_s f = \mu f$ eşitliğinde, 1 ve 2 tepelerine karşılık gelen satırları ele alınırsa;

$$\begin{aligned} (n-3)f_1 + f_2 - \sum_{i=3}^n f_i &= \mu f_1 \\ (n-3)f_2 + f_1 - \sum_{i=3}^n f_i &= \mu f_2 \end{aligned}$$

dir. $\sum_{i=1}^n f_i = 0$ olduğundan, $f_1 \neq f_2$ olacak şekilde, bir tane $\mu = (n-4)$ özdeğeri elde edilir. Benzer şekilde, işaret derecesi $n-1$ olan tepelere karşı gelen satırlar için;

$$(n-1)f_j - \sum_{i=1}^n f_i + f_j = \mu f_j$$

dir. Buradan, $(n-2)$ tane $\mu = n$ özdeğeri elde edilir.

- İki tane ayrık negatif ayrıt içeren tam grafları incelensin: $V = \{1, 2, \dots, n\}$ tepeler kümesi olmak üzere, $(1, 2) \in E^-$ ve $(n-1, n) \in E^-$ olsun. Buna göre, $(n-3)$ işaret derecesine sahip tepeler için

$$(n-3)f_1 + f_2 - \sum_{i=3}^n f_i = \mu f_1$$

$$(n-3)f_2 + f_1 - \sum_{i=3}^n f_i = \mu f_2$$

ve

$$(n-3)f_{n-1} + f_n - \sum_{i=1}^{n-2} f_i = \mu f_1$$

$$(n-3)f_n + f_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} f_i = \mu f_2$$

dir. Buradan $f_1 \neq f_2$ ve $f_{n-1} \neq f_n$ olmak üzere iki tane $\mu = (n-4)$ özdeğeri elde edilir. Benzer düşünce ile, $(n-1)$ tepe derecesine sahip tepeler için

$$(n-1)f_j - \sum_{i=1}^n f_i + f_j = \mu f_j$$

yazılması sonucunda $n-3$ tane $\mu = n$ özdeğeri elde edilir. L_s matrisinin formu gereği $\mu = 0$ da bir özdeğerdir.

- Benzer düşünce ile devam edilirse, $k \leq n/2$ olmak üzere $k \in \mathbb{Z}$ tane ayrık negatif işaretli ayrıt için spektrumu incelensin: Graftaki $(n-3)$ işaret dereceli tepeler için

$$(n-3)f_i + f_j - \sum_{i \sim k} f_k = \mu f_i$$

$$(n-3)f_j + f_i - \sum_{i \sim k} f_k = \mu f_j$$

dir. Böylece, k tane $\mu = (n-4)$ özdeğeri, $(n-1-k)$ tane $\mu = n$ özdeğeri ve 1 tane 0 özdeğeri elde edilir.

- $\delta = n-5$ durumu için incelenirse, $n-5$ işaret derecesine sahip tepeler için;

$$(n-5)f_i + f_j + f_k - \sum_{i \sim m} f_m = \mu f_i$$

dir. Buradan, $f_j + f_k = -f_i$ olduğunda $\mu = n-6$ bir özdeğerdir. Bu şekilde devam edilerek, $1 \leq k \leq n-1$ olmak üzere $\delta = n - (2k+1)$ minimum tepe derecesine sahip tam graflar için $\mu = n - (2k+2)$ bir işaret dereceli Laplasyen özdeğerdir.

5.2.2 Yıldız graf ($K_{1,n-1}$)

$0 \leq k \leq n-1$ olmak üzere, k tane negatif ayrıt içeren bir yıldız grafta, $1, -1$ ve $(n-1-2k)$ işaret derecesine sahip tepeler bulunabilir. $V = \{1, 2, \dots, n\}$ işaretli yıldız grafın tepeler kümesi, $\deg_s 1 = n-1-2k$ ve $S = \{2, 3, \dots, k+1\}$, 1 tepesine negatif ayrıt ile bağlı tepeler kümesi olmak üzere, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ özvektörüne karşılık gelen μ özdeğeri için

$$\begin{aligned} -x_i + x_1 &= \mu x_i \\ \sum_{i=2}^{k+1} x_i + (n-3)x_2 - \sum_{j=k+2}^n x_j &= \mu x_1 \end{aligned} \quad (69)$$

dir. Buradan, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ olması kullanılarak,

$$\mu_1 = \frac{-(1+2k-n) - \sqrt{(1+2k-n)^2 + 4n}}{2} < 0$$

ve

$$\mu_n = \frac{-(1+2k-n) + \sqrt{(1+2k-n)^2 + 4n}}{2}$$

özdeğerleri elde edilir. Ayrıca, $L_s(\Gamma)x = \mu x$ eşitliğinde, derecesi 1 olan tepelere karşılık gelen satırlar ele alındığında

$$-x_1 + x_i = \mu x_i$$

dir. Buradan, işaret dereceli Laplasyen matrisine ait, $x_1 = 0$ formundaki özvektörler için, grafta 1 derecesine sahip tepe sayısı $n-1-k > 0$ olmak üzere $n-2-k$ tane $\mu = 1$ özdeğeri, aynı şekilde (69) denklemini kullanarak -1 derecesine sahip tepe sayısı $k > 0$ olmak üzere $k-1$ tane $\mu = -1$ özdeğeri elde edilir. Yani burada dikkat edilmelidir ki, grafta hiç pozitif ayrıt yoksa, 1 özdeğeri, grafta hiç negatif ayrıt yoksa -1 özdeğeri elde edilemez.

5.2.3 Çevre graf (C_n)

$V = \{1, 2, \dots, n\}$ tepeler kümesine sahip çevre grafın işaret dereceli Laplasyen özdeğerleri için, öncelikle grafi 0 regüler veya -2 regüler olarak ele alılm. Bu tür n tepeli (n çift) 0 regüler işaretli çevre graflar için, işaret dereceli

Laplasyen matrisin özvektörü $f_k(i)$, $0 \leq k \leq n/2$ olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} f_k(i) &= \sin(2\pi ki/n) \text{ (i'nin etiketi çift ise)} \\ f_k(i) &= -\cos(2\pi ki/n) \text{ (i'nin etiketi tek ise)} \end{aligned}$$

Buna göre, çift sayı ile etiketli i tepesi için

$$\begin{aligned} \mu f_k(i) &= 0f_k(i) + f_k(i-1) - f_k(i+1) \\ &= 0 + \cos(2\pi k(i+1)/n) - \cos(2\pi k(i-1)/n) \\ &= -2\sin(2\pi ki/n) \sin(2\pi k/n) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde tek sayı ile etiketlenmiş i tepesi için

$$\begin{aligned} \mu f_k(i) &= 0f_k(i) + f_k(i-1) - f_k(i+1) \\ &= 0 + \sin(2\pi k(i+1)/n) - \sin(2\pi k(i-1)/n) \\ &= 2\cos(2\pi ki/n) \sin(2\pi k/n) \end{aligned}$$

dir. Buradan anlaşılır ki, 0 regüler bir çevre grafin özdeğeri, $f_k(i)$ özvektörüne karşılık gelen $-2\sin(2\pi k/n)$ dir. Ayrıca, aynı düşünce ile n tepeli (n çift) 0 regüler işaretli çevre grafin, işaret dereceli Laplasyen matrisin, aşağıdaki gibi tanımlanan özvektörü, $g_k(i)$ için $0 \leq k \leq n/2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_k(i) &= -\sin(2\pi ki/n) \text{ (i'nin etiketi çift ise)} \\ g_k(i) &= \cos(2\pi ki/n) \text{ (i'nin etiketi tek ise)} \end{aligned}$$

karşılık gelen özdeğer $\mu = 2\sin(2\pi k/n)$ dir. Benzer düşünce ile -2 regüler çevre graflar için, işaret dereceli Laplasyen matrisin özvektörleri, $0 \leq k \leq n/2$ olmak üzere,

$$x_k(i) = \sin(2\pi ki/n)$$

ve

$$y_k(i) = \cos(2\pi ki/n)$$

şeklindedir. Buradan, $V = 0, 1, \dots, n-1$ tepeler kümesi olmak üzere, 1 tepesi için

$$\begin{aligned} [L_s x_k]_1 &= -2x_k(1) + x_k(0) + x_k(2) \\ &= -2\sin(2\pi k/n) + 0 + \sin(4\pi k/n) \\ &= (2\cos(2\pi k/n) \cos(2\pi k/n) - 2) \sin(2\pi k/n) \end{aligned}$$

dir. Yani -2 regüler bir işaretli çevre grafin özdeğeri $2 \cos(2\pi k/n) - 2$ dir. O zaman, en az bir negatif ayrıt içeren, işaretli çevre graflar için minimum tepe derecesi $\delta = -2$ ise, en küçük özdeğer $\mu_1 \geq \min_{0 \leq k \leq n/2} 2 \cos(2\pi k/n) - 2$ ve minimum tepe derecesi $\delta = 0$ ise, en küçük özdeğer $\mu_1 \geq \min_{0 \leq k \leq n/2} \pm 2 \sin(2\pi k/n)$ dir.

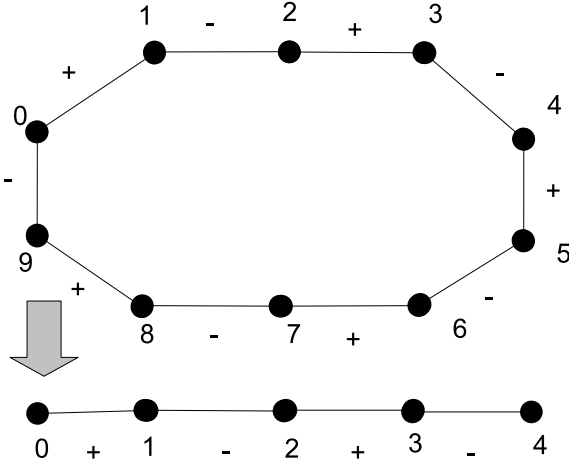
5.2.4 Yol graf (P_n)

İşaretsiz grafların Laplasyen spektrumunda olduğu gibi (Kelner, 2007), işaretli P_n yol grafinin işaretli dereceli Laplasyen spektrumunu incelerken, C_{2n} çevre grafindan yararlanılacaktır. P_n grafi, C_{2n} grafini tarafından içerilmektedir ve işaretsiz yol ve çevre grafların Laplasyen spektrumları aynıdır. -2 regüler işaretli bir çevre graf ele alınsın ve işaretli Laplasyen matrisinin özvektörü z , $0 \leq i < n$ olmak üzere $z(i) = z(2n-1-i)$ olduğu kabul edilsin. z özvektörünün ilk n bileşeni, $v(i)$ ile gösterilmek üzere, P_n grafi için,

$$\begin{aligned}
L_s(P_n)v(i) &= -2(v(i) - \sum v(i \text{ tepesinin } P_n \text{ grafindaki komşuları})) \\
&= -2(z(i) - \sum z(i \text{ tepesinin } C_{2n} \text{ grafindaki komşuları})) \\
&= -(z(i) - \sum z(i \text{ tepesinin } C_{2n} \text{ grafindaki komşuları})) - \\
&\quad (z(2n-i-1) - \sum z(2n-i-1 \text{ tepesinin } C_{2n} \text{ grafindaki komşuları})) \\
&= -\frac{1}{2}(L_s(C_{2n})z(i) + L_s(C_{2n})z(2n-i-1)) \\
&= -\frac{1}{2}(\mu z(i) + \mu z(2n-i-1)) \\
&= \mu z(i) \\
&= \mu v(i)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi, $i = 0$ durumu ele alınsın:

$$\begin{aligned}
L_s(P_n)v(0) &= -v(0) + v(1) \\
&= -2v(0) + v(1) + v(0) \\
&= -2z(0) + z(1) + z(0) \\
&= -2z(0) + z(1) + z(2n-1) \\
&= \mu z(0) \\
&= \mu v(0)
\end{aligned}$$



Şekil 5.1: 0 regüler Çevre graf ile yol graf arasındaki ilişki

dır. Böylece anlaşılır ki, v , -2 regüler P_n grafının, işaret derceli Laplasyen matrisinin özvektörüdür. v vektörünün varlığından söz edilirse, $0 \leq i < n$ olmak üzere, $z_k(i) = z_k(2n - 1 - i)$ olacak şekilde, $z_k(i) = \sin(\pi ki/n + \pi/2n)$, C_{2n} grafının özvektörüdür:

$$\begin{aligned}
 z_k(i) &= \sin(\pi ki/n + \pi/2n) \\
 &= \sin(\pi ki/n) \cos(\pi/2n) + \cos(\pi ki/n) \sin(\pi/2n) \\
 &= x_k(i) \cos(\pi/2n) + y_k(i) \sin(\pi/2n)
 \end{aligned}$$

Anlaşılır ki, z_k , x_k ve y_k vektörlerini gerer. Yani, z_k , C_{2n} grafının işaret derceli Laplasyen matrisinin özvektörüdür ve $z_k(i) = z_k(2n - 1 - i)$ eşitliğini sağlar. Benzer düşünce ile, 0 regüler C_{2n} grafından, P_n grafına geçilebilir, (Şekil 5.1). n tek olmak üzere, 0 regüler C_{2n} grafi ile, ayırıt işaretleri sırasıyla $+$ ve $-$ (veya sırasıyla $-$ ve $+$) ile işaretlenmiş, P_n grafının spektrumu aynıdır. n çift olmak üzere, yol grafın en küçük tepe derecesi, $\delta = -1$ ise $\text{spec} P_n = \text{spec} C_{2n} \setminus \{2\}$, $\delta = 0$ ise $\text{spec} P_n = \text{spec} C_{2n} \setminus \{-2\}$ dir. Böylece, graftaki pozitif ayırıt sayısı arttıkça spektrumdaki değerler artacak, negatif ayırıt sayısı arttıkça spektrumdaki değerler azalacaktır.

5.3 İşaret Dereceli Laplasyen Matrisin Spektrumunun Örüntü Sonuçları

Örüntü ile ilgili literatürde olan ve bu tez çalışmasında bulunan, işaretli grafların Normalize Laplasyen matrisinin spektrumu ile ilgili sonuçlar Bölüm 3’de ele alındı. Bu bölümde, işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumu ile ilgili örüntü sonuçları ele alınacaktır. Bulunan sonuçlar, Hou’nun işaretli graflar için tanımladığı Laplasyen matrisin spektrumuna ait sonuçlar ile kombine edilip, yeni sınır değerler elde edilecektir. İlk olarak, bu bölüm için gerekli olan birtakım önbilgiler verilsin:

$U, V(G)$ tepeler kümesinin, $0 \leq k \leq n$ olmak üzere k elemanlı bir alt kümesi olsun. $G - U$ alt grafi, G grafindan U ’daki bütün tepelerin ve bunlara bağlı ayrıtların silinmesi ile elde edilir. Aynı işlem, işaretli graflar için de, ayrıtların korunmak şartıyla tanımlanabilir. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, ile Laplasyen spektrum belirtilmek üzere, G ile $G - U$ graflarının Laplasyen spektrumunun arasında:

$$\lambda_i(G) - w_1 \geq \lambda_i(G - U) \geq \lambda_{i+k}(G) - w_2$$

ilişkisi vardır (Wu et al., 2010). Burada, $w_1 = \min_{v \in V \setminus U} \{|N_G(v) \cap U|\}$ ve $w_2 = \max_{v \in V \setminus U} \{|N_G(v) \cap U|\}$ dir.

$\bar{\lambda}_1 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_n$, Γ işaretli grafinin Laplasyen spektrumu olmak üzere, Γ ve $\Gamma - U$ işaretli grafları için, Laplasyen spektrum ilişkisi ele alınmadan önce, Lemma 5.3’de verilen, Weyl’in eşitsizliği ile Bölüm 3’de kullanılan Cauchy Interlacing teoremi hatırlanırsa:

Teorem 5.2 (*Cauchy Interlacing Theorem*) A , $n \times n$ reel simetrik matris, m , $1 \leq m \leq n$ olacak şekilde bir tam sayı ve A_m , $m \times m$ tipinde A ’nın esas altmatrisi olmak üzere, özdeğerler arasında

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(A_m) \geq \lambda_{i+n-m}(A), i = 1, 2, \dots, m$$

ilişkisi vardır.

Teorem 5.3 Γ , n tepeli, işaretli bir graf ve V , Γ grafının tepeler kümesi olsun. U , V tepeler kümesinin k elemanlı alt kümesi, $w_1 = \min_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U|$ ve $w_2 = \max_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U|$ olmak üzere, her $i = 1, \dots, n - k$, için:

$$\bar{\lambda}_i(\Gamma) - w_1 \geq \bar{\lambda}_i(\Gamma - U) \geq \bar{\lambda}_{i+k}(\Gamma) - w_2$$

dir.

İspat. $L(\Gamma)$ matrisinin, U kümesindeki tepelere ait satır ve sütun elemanlarının silinmesi ile elde edilmiş esas alt matrisi $L_U(\Gamma)$ ile gösterilsin. Cauchy Interlacing teoremi uygulanarak, $\bar{\lambda}_i(\Gamma) \geq \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma)) \geq \bar{\lambda}_{i+k}(\Gamma)$ ($i = 1, 2, \dots, n - k$) elde edilir. $D_U(\Gamma) = L_U(\Gamma) - L(\Gamma - U)$ olmak üzere, $D_U(\Gamma)$, her bir v tepesine karşılık gelen bileşeni $|N_\Gamma(v) \cap U|$ olacak şekilde bir köşegen matristir. Böylece, Lemma 5.3'i kullanarak, her bir ($i = 1, 2, \dots, n - k$) için;

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\Gamma - U) &= \bar{\lambda}_i(L(\Gamma - U)) = \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma) - D_U(\Gamma)) \\ &\leq \min_{r+s=i+1} \bar{\lambda}_r(L_U(\Gamma)) + \bar{\lambda}_s(-D_U(\Gamma)) \\ &\leq \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma)) + \bar{\lambda}_1(-D_U(\Gamma)) \\ &= \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma)) - \bar{\lambda}_{n-k}(D_U(\Gamma)) \\ &\leq \bar{\lambda}_i(\Gamma) - \min_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U| \end{aligned} \quad (70)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\Gamma - U) &\geq \max_{r+s=n-k+i} \bar{\lambda}_r(L_U(\Gamma)) + \bar{\lambda}_s(-D_U(\Gamma)) \\ &\geq \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma)) + \bar{\lambda}_{n-k}(-D_U(\Gamma)) \\ &= \bar{\lambda}_i(L_U(\Gamma)) - \bar{\lambda}_1(D_U(\Gamma)) \\ &\geq \bar{\lambda}_{i+k}(\Gamma) - \max_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U| \end{aligned} \quad (71)$$

dir. (70) ve (71) denklemlerinin birleşiminden ispat tamamlanır. ■

Gerekli bilgiler ve sonuçlar verildikten sonra, işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumu ile ilgili sıradaki sonuç verilebilir. $\Gamma = (G, \sigma)$, n tepeli, işaretli bir graf olmak üzere, $L_s(\Gamma)$ işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumu, artmayan sırada $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ şeklinde sıralansın. Buna göre;

Teorem 5.4 Γ işaretli bir graf ve V , n elemanlı tepeler kümesi olsun. U , V tepeler kümesinin k elemanlı alt kümesi, $d_1 = \min_{v \in V \setminus U} (\sum_{\substack{v \sim u \\ u \in U}} \sigma(u, v))$ ve $d_2 =$

$\max_{\substack{v \in V \setminus U \\ v \sim u \\ u \in U}} (\sum \sigma(u, v))$ olmak üzere, her $i = 1, \dots, n - k$, için

$$\mu_i(G) - d_1 \geq \mu_i(G - U) \geq \mu_{i+k}(G) - d_2$$

dir.

İspat. $L_s(\Gamma)$ matrisinin esas alt matrisi, $L_s(\Gamma)$ matrisinden U kümesindeki tepelere karşılık gelen satır ve sütunların silinmesi ile elde edilmiş, $L_s^U(\Gamma)$ ile gösterilen $n - k \times n - k$ tipindeki matris olsun. Cauchy interlacing teorem uygulanarak,

$$\mu_i(\Gamma) \geq \mu_i(L_s^U(\Gamma)) \geq \mu_{i+k}(\Gamma), i = 1, \dots, n - k$$

eşitsizliği elde edilir. $D_s^U(\Gamma) = L_s^U(\Gamma) - L_s(\Gamma - U)$ olmak üzere $D_s^U(\Gamma)$ köşegen matrisinin $v \in V \setminus U$ tepesine karşılık gelen bileşenleri $\sum_{u \in U} \sigma(u, v)$ şeklindedir. Böylece, Lemma 5.3 ve Cauchy Interlacing Teoremi kullanılarak;

$$\begin{aligned} \mu_i(\Gamma - U) &= \mu_i(L_s(\Gamma - U)) = \mu_i(L_s^U(\Gamma) - D_s^U(\Gamma)) \\ &\leq \min_{r+s=i+1} \{\mu_r(L_s^U(\Gamma)) + \mu_s(-D_s^U(\Gamma))\} \\ &\leq \mu_i(L_s^U(\Gamma)) + \mu_1(-D_s^U(\Gamma)) \\ &= \mu_i(L_s^U(\Gamma)) - \mu_{n-k}(D_s^U(\Gamma)) \\ &\leq \mu_i(\Gamma) - \min_{\substack{v \in V \setminus U \\ u \in U}} \sum \sigma(u, v) \end{aligned} \quad (72)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mu_i(\Gamma - U) &= \mu_i(L_s(\Gamma - U)) = \mu_i(L_s^U(\Gamma) - D_s^U(\Gamma)) \\ &\geq \max_{r+s=i+n} \{\mu_r(L_s^U(\Gamma)) + \mu_s(-D_s^U(\Gamma))\} \\ &\geq \mu_i(L_s^U(\Gamma)) + \mu_{n-k}(-D_s^U(\Gamma)) \\ &= \mu_i(L_s^U(\Gamma)) - \mu_1(D_s^U(\Gamma)) \\ &\geq \mu_{i+k}(\Gamma) - \max_{\substack{v \in V \setminus U \\ u \in U}} \sum \sigma(u, v) \end{aligned} \quad (73)$$

dir. (72) ve (73) denklemlerinin birleşiminden sonuca ulaşılmış olur. ■

Yorum 5.1 Teorem 5.4'de tanımlanan d_1 ve d_2 , $d_1 = \min_{v \in V \setminus U} \{|N_\Gamma^+(v) \cap U| - |N_\Gamma^-(v) \cap U|\}$ ve $d_2 = \max_{v \in V \setminus U} \{|N_\Gamma^+(v) \cap U| - |N_\Gamma^-(v) \cap U|\}$ şeklinde de ifade edilebilir.

5.4 İşaret Dereceli Laplasyen Matris ve İşaretli Grafların Laplasyen Matrisinin Spektrum İlişkisi

Bu bölümde, işaretli grafların Laplasyen matrisinin ve bu tezde tanımlanan, işaret dereceli Laplasyen matrisin spektrumlarının karışımı ile ilgili bir örüntü sonucu verilecektir. $D^-(\Gamma)$ matrisi, bileşenleri grafin tepelerine bitişik negatif ayrıt sayısı olan bir köşegen matris olmak üzere, işaretli grafların Laplasyen matrisi ile işaret dereceli Laplasyen matris arasındaki ilişki:

$$L(\Gamma) = L_s(\Gamma) + 2D^-(\Gamma)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{\lambda}_1 \geq \dots \geq \bar{\lambda}_n$ ve $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ sırasıyla $L(\Gamma)$ ve $L_s(\Gamma)$ matrislerinin spektrumları olmak üzere, matrislerin arasındaki ilişkiden yararlanarak aşağıdaki sonuç verilir:

Teorem 5.5 Γ , n tepeli işaretli bir graf, V tepeler kümesi, U , V tepeler kümesinin, k elemanlı bir alt kümesi olsun. d_j^- , j tepesine bitişik negatif ayrıt sayısı, $w_1 = \min_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U|$ ve $w_2 = \max_{v \in V \setminus U} |N_\Gamma(v) \cap U|$ olmak üzere, her $i = 1, \dots, n - k$, için:

$$\mu_i(\Gamma) + 2\max_{j \in V} d_j^- - w_1 \geq \bar{\lambda}_i(\Gamma - U) \geq \mu_{i+k}(\Gamma) + 2\min_{j \in V} d_j^- - w_2 \quad (74)$$

dir.

İspat. Teorem 5.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\Gamma - U) &\geq \bar{\lambda}_{i+k}(\Gamma) - w_2 \\ &= \bar{\lambda}_{i+k}(L(\Gamma)) - w_2 \\ &= \bar{\lambda}_{i+k}(L_s(\Gamma) + 2D^-(\Gamma)) - w_2 \\ &\geq \max_{r+s=n+i+k} \mu_r(L_s(\Gamma)) + 2\mu_s(D^-(\Gamma)) - w_2 \\ &\geq \mu_{i+k}(\Gamma) + 2\bar{\lambda}_n(D^-(\Gamma)) - w_2 \\ &\geq \mu_{i+k}(\Gamma) + 2\min_{j \in V} d_j^- - w_2 \end{aligned} \quad (75)$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_i(\Gamma - U) &\leq \bar{\lambda}_i(\Gamma) - w_1 \\
&= \bar{\lambda}_i(L(\Gamma)) - w_1 \\
&= \bar{\lambda}_i(L_s(\Gamma) + 2D^-(\Gamma)) - w_1 \\
&\leq \min_{r+s=i+1} \mu_r(L_s(\Gamma)) + 2\mu_s(D^-(\Gamma)) - w_1 \\
&\leq \mu_i(\Gamma) + 2\bar{\lambda}_1(D^-(\Gamma)) - w_1 \\
&\leq \mu_i(\Gamma) + 2\max_{j \in V} d_j^- - w_1
\end{aligned} \tag{76}$$

elde edilir. (75) ve (76) denklemlerinden, (74) sonucuna ulaşılr. ■

6 SONUÇ

Bu tezin ikinci bölümünde gerekli altyapı hazırlanıp, tezin üçüncü bölümünde, işaretli graftan ayırıt atma ve tepe büzme işlemlerinden sonra, normalize Laplasyen spektrumların örüntü oluşturduğu ispatlanmıştır. Ardışık büzme işleminin iyi tanımlı olabilmesi için, baskınlık sayısından yararlanılmıştır. İyi tanımlı ardışık büzme ve tepe çoğaltma işlemlerinden sonra, grafların normalize Laplasyen spektrumların örüntü oluşturduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, motif ve tepe çoğaltma işlemlerinin 1 özdeğeri ile ilişkisi gösterilmiştir. Tezin üçüncü bölümünden, (Atay and Tunçel, 2013) çalışması hazırlanmıştır. Tezin dördüncü bölümünde, işaretli graflar için tamamlayıcı prizmalar işlemi tanımlanmıştır. Join, coalescence ve tamamlayıcı prizma işlemleri sonrası oluşan grafin, en büyük ve en küçük Laplasyen özdeğerleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Tezin son bölümünde, köşegen elemanlarında bir tepenin işaret dereceleri olacak şekilde oluşturulmuş Laplasyen matris tanımı verilmiştir. Bu yeni tanımlanan matrisin spektrumuna ait sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abreu, N.M.M.**, 2007, Old and New Results on Algebraic Connectivity of Graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 423, 53–73.
- Anderson, W.N. and Morley, T.D.**, 1985, Eigenvalues of the Laplacian matrix of a graph, *Linear and Multilinear Algebra*, 18, 141–145.
- Aouchiche, M., Hansen P. and Stevanović, D.**, 2010, A sharp upper bound on algebraic connectivity using domination number, *Linear Alg. and its Appl.*, 432, 2879–2893.
- Atay, F.M. and Büyükoğlu, T.**, 2005, Graph operations and synchronization of complex networks, *Physical Review E*, 72, 016217.
- Atay, F.M. and Tunçel, H.**, 2013, On the spectrum of Normalized Laplacian of Signed Graphs: Interlacing, Contraction, Replication, *Linear Algebra and its Appl.* (submitted).
- Banerjee, A. and Jost, J.**, 2008, On the spectrum of the normalized graph Laplacian, *Linear algebra and its applications*, 428, 3015–3022.
- Beineke, L.W. and Wilson, R.J.**, 2004, On the spectrum of the normalized graph Laplacian, *Linear algebra and its applications*, 428, 3015–3022.
- Biggs, N.**, 1993, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 205p.
- Buckley, F. and Harary, F.**, 1990, Distance in Graphs, *Perseus Books*, New York, 352p.
- Cameron, P.J., Seidel, J.J. and Tsaranov, S.V.**, 1994, Signed graphs, root lattices and Coxeter groups, *J. of Algebra*, 164, 173–209.
- Chaiken, S.**, 1982, A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 3, 319–329.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Chaiken, S and Kleitman, D.J.**, 1978, Matrix tree theorems, *J. Combin. Theory Ser. A*, 24, 377–381.
- Chartrand, G. and Lesniak, L.**, 2005, Graphs and Digraphs, Chapman Hall/ CRC, Boca Raton, 386p.
- Chen, G., Davis, G., Hall, F., Li, Z., Patel, K. and Steward, M.**, 2004, An interlacing result on normalized Laplacians, *SIAM J. Discrete Math.* 18, 353–361.
- Chung, F.R.K.**, 1997, Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 207p.
- Cvetković, D. M., Doob, M. and Sachs, H.**, 1979, Spectra of Graphs, Academic, New York, 368p.
- Cvetković, D. M., Doob, M., Gutman, I. and Torĝasev A.**, 1988, Recent Results in the Theory of Graph Spectra, North-Holland, Amsterdam.
- Fiedler, M.**, 1973, Algebraic Connectivity of Graphs, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol 23(2), 298-305.
- Forsman, W.C.**, 1976, Graph theory and the statistics and dynamics of polymer chains, *J. Chem. Phys.*, 65, 4111–4115.
- Germina, K.A. and Shahul Hameed, K.**, 2010, On signed paths, signed cycles and their energies, *Applied Mathematical Science*, 4, 3455–3466.
- Germina, K.A., Shahul Hameed, K. and T. Zaslavsky**, 2011, On products and line graphs of signed graphs, their eigenvalues and energy, *Linear Algebra App.*, 435, 2432–2450.
- Godsil, C. and Royle, G.**, 2001, Algebraic graph theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 464p.
- Grone, R. and Merris, R.**, 1990, Coalescence, majorization, edge valuations and the Laplacian spectra of graphs, *Linear Multilinear Algebra*, 27 139–146.
- Gutman, I.**, 1978, Graph-theoretical formulation of Forsman’s equations, *J. Chem. Phys.*, 68, 1321–1322.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Haemers, W.H.**, 1995, Interlacing eigenvalues and graphs, *Linear Algebra Appl.*, 226/228, 593–616.
- Harary, F.**, 1953, On the notion of balanced in a signed graph, *Michigan Math. J.* , 2, 143–146.
- Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J.**, 1998, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Decker, New York.
- Haynes, T.W., Henning, M.A. and van der Merwe, L.C.**, 2009, Domination and total domination in complementary prisms, *J. Comb. Optim.*, 18, 23–27.
- Van Den Heuvel, J.**, 1995, Hamilton cycles and eigenvalues of graphs, *Linear Algebra Appl.*, 226/228, 723–730.
- Horn, R.A. and Johnson, C.R.**, 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- Hou, Y.P., Li, J.S. and Pan, Y.L.**, 2003, On the Laplacian eigenvalues of the signed graphs, *Linear and Multilinear Algebra*, 51, 21–30.
- Hou, Y.P.**, 2005, Bounds for the least Laplacian eigenvalue of a signed graph, *Acta Mathematica Sinica, Eng. Series*, 21, 995–960.
- Kelner, J.** *Spectra of Some Common Graphs*,
http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-409-topics-in-theoretical-computer-science-and-algorithmists-toolkit-fall-2009/lecture-notes/MIT18_409F09_scribe2.pdf (2007)(Erişim tarihi: 29 Mayıs 2013)
- Kirchhoff G.** Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. J. Phys. Chem.*, 72, 497–508.
- Kunegis, J., Schmidt, S., Lommatzsch, A., Lerner, J., De Luca, E.W. and Albayrak, S.**, 2010, Spectral Analysis of Signed Graphs for Clustering, Prediction and Visualization, *SIAM Conference on Data Mining 2010*, 559–570.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Li, J. and Zhang, X.**, 1998 On the Laplacian eigenvalues of a graph, *Linear Algebra and its Applications*, 285, 305–307.
- Li, C.K.**, 2006, A short proof of interlacing inequalities on normalized Laplacians, *Linear Alg. Appl.*, 414, 425–427.
- Li, H.H. and Li, J.S.**, 2008, An upper bound on the Laplacian spectral radius of the signed graphs, *Discuss. Math. Graph Theory*, 28(2), 345–359.
- Li, H.H. and Li, J.S.**, 2008, An upper bound on Laplacian spectral radius of the signed graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28, 345–359.
- Li, H.H. and Li, J.S.**, 2009, Note on normalized Laplacian eigenvalues of signed graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 44, 153–162.
- Li, H.H. and Li, J.S.**, 2011, Note on the normalized Laplacian Spectra, *Taiwanese. Journal of Mathematics*, 15(1), 129–139.
- Lu, M., Liu, H., Tian, F.**, 2007, Laplacian spectral bounds for clique and independence numbers of graphs, *Journal of Comb. Theory, Series B*, 97, 726–732.
- Lu, M., Zhang, L., Tian, F.**, 2007, Lower bounds of the Laplacian spectrum of graphs based on diameter, *Linear Alg. and its Appl.*, 420, 400–406.
- Marshall, A.W. and Olkin, I.**, 1979, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York.
- Merris, R.**, 1998, A note on Laplacian graph eigenvalues, *Linear Algebra and its Applications*, 285, 33–35.
- Merris, R.**, 1994, Laplacian Matrix of Graphs: A Survey, *Linear Algebra and its Applications*, 197/198(1), 146–176.
- Merris, R.**, 1998, Laplacian graph eigenvectors, *Linear Algebra and its Applications*, 278, 221–236.
- Mohar, B.**, 1989, Isoperimetric numbers of graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 47, 274–291.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Mohar, B.**, 1991, The Laplacian spectrum of graphs, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, 2, 871–898.
- Mohar, B.**, 1997, Some applications of Laplace eigenvalues of graphs, *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*, Kluwer, 225–275.
- Stevanović, D., Aouchiche, M. and Hansen, P.**, 2008, On the spectral radius of graphs with a given domination number, *Linear Alg. and its Appl.*, 428, 1854–1864.
- Wu, B., Shao, J. and Yuan, X.**, 2010, *Chinese Annals of Mathematics*, 31(2), 231–236.
- Zaslavsky, T.**, 1982, Signed graphs, *Discrete Appl. Math.*, 4, 47–74.

ÖZGEÇMİS

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Hande TUNÇEL
- Adres : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
35100, Bornova, İzmir
- Dogum Tarihi: 20.07.1983
- Dogum Yeri : Bornova/İzmir

Öğrenim Durumu

- 2000-2005 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programı
- 2005-2007 : Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Programı
- 2008- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı Doktora Programı

Aldığı Görevler

- 2013 - ... : Öğretim Görevlisi,
Dokuz Eylül Üniversitesi, Deniz Ulaştırma İşl. Mühendisliği, İzmir, Türkiye.
- 2011 - 2012: Ziyaretçi Araştırmacı,
Max Planck Institute, for Mathematics in the Science, Leipzig, Almanya.

- 2005 - 2011: Araştırma Görevlisi,
İzmir Ekonomi Üniversitesi Matematik Bölümü, İzmir, Türkiye.

Yapılan Çalışmalar

- Tuncel H., Turaci T., Vatansever B., *On The Average Lower Domination Number and Some Results of Complementary Prisms and Graph Join*, Miskolc Mathematical Notes, (submitted)
- Atay F., Tuncel H., *On the spectrum of Normalized Laplacian of Signed Graphs: Interlacing, Contraction, Replication*, Linear Algebra and its Appl. (submitted)
- Atay F., Tuncel H., Graph Operations and Laplacian Eigenvalues of Signed Graphs (preparing)

Sunulan Uluslararası Bildiriler

- Pınar Dünder, Hande Tunçel *Positioning of Energy Source via Distance in Graph*, 2nd International Conference on Nuclear and Renewable Energy Resources, 4-7 July 2010, Ankara, Turkey.
- Pınar Dünder, Hande Tunçel, Onur Kılınççeker *A Graph Coloring Approach to Airline Crew Scheduling Problem*, International Conference of Mathematical Sciences, 04-10 August, 2009, Istanbul, Turkey.

BURSLAR ve ÖDÜLLER

- 2009-2013 TÜBİTAK Bilim Adami Arastirma Grubu tarafından verilen Yurtiçi Doktora Bursu