

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Esra ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Esra ÜNAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, iki değişkenli ortogonal polinomların temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir aralıkta ortonormal olan polinomlar aracılığıyla, bir bölgede ortonormallik koşulunu sağlayan iki değişkenli polinomlar ele alınmıştır.

Ayrıca tek değişkenli klasik ortogonal polinomların farklı çarpımları yardımıyla iki değişkenli ortogonal polinom aileleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, iki değişkenli klasik Appell polinomları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, iki değişkenli homogen harmonik polinomların tanımları verilmiştir. Daha sonra iki değişkenli harmonik polinomların birim disk içinde ortogonalite özellikleri ve sağladıkları bazı eşitsizlikler incelenmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, bir çevre üzerinde ortogonal polinomların tanımı verildikten sonra harmonik polinomların bir çevre üzerinde ortogonalite özellikleri ve sağladıkları bazı eşitsizlikler incelenmiştir.

Haziran 2013, 117 sayfa

Anahtar Kelimeler : İki değişkenli ortogonal polinom, Çok değişkenli ortogonal polinom, Appell polinomları, Harmonik polinom, Bessel eşitsizliği.

ABSTRACT

Master Thesis

ORTHOGONAL POLYNOMIALS IN TWO VARIABLES

Esra ÜNAL

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ALTIN

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic properties of orthogonal polynomials in two variables are given.

In the third chapter, orthonormal polynomials in two variables over a domain have been examined with the help of orthonormal polynomials on an interval. Also, orthogonal polynomials have been obtained by means of different products of classical orthogonal polynomials.

In the fourth chapter, classical Appell polynomials in two variables have been studied.

In the fifth chapter, after definitions of homogen harmonic polynomials in two variables are given, orthogonalizations of harmonic polynomials in two variables and some inequalities that they hold are examined in unit disk.

In the final chapter, definition of orthogonal polynomials on a contour is given and then, it is analysed orthogonalization of harmonic polynomials on a contour and some inequalities which they hold.

June 2013, 117 pages

Key Words: Orthogonal polynomial in two variables, Orthogonal polynomial of several variables, Appell polynomials, Harmonic polynomial, Bessel inequality.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım süresince bana anlayış gösteren aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra ÜNAL

Ankara, Haziran 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ.....	2
2.1 Bir Bölgede İki Değişkenli Ortogonal Polinomlar.....	2
2.2 Temel Ortogonal Polinomlar.....	11
2.3 Monik Ortogonal Polinomlar.....	19
3. BİR BÖLGEDE ORTOGONALLIĞIN ÖZEL DURUMLARI VE BAZI ÖRNEKLERİ.....	25
3.1 Klasik Ortogonal Polinomların Farklı Çarpımları.....	25
3.2 Bir Aralık Üzerindeki Ortogonallikle Bir Bölgedeki Ortogonallik Arasındaki Çeşitli Bağlantılar.....	32
3.3 Bir Bölgedeki Ağırlık Fonksiyonunun Momentleri.....	40
4. KLASİK APPELL ORTOGONAL POLİNOMLARI.....	49
4.1 Appell Polinomları İçin Rodrigues Formülü.....	49
4.2 Appell Polinomlarının İki Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonlar Cinsinden İfadesi.....	62
4.3 Appell Polinomları İçin Diferensiyel Denklem.....	68
4.4 Appell Diferensiyel Denkleminin Özfonksiyonlarının Ortogonallığı.....	71
5. BİR BÖLGE ÜZERİNDE ORTOGONAL HARMONİK POLİNOMLAR.....	79
5.1 Harmonik Polinomlar.....	79
5.2 Christoffel-Darboux Formüllerinin Bir Analogu.....	84
5.3 Birim Disk İçinde Ortogonal Harmonik Polinomlar.....	89
6. BİR ÇEVRE ÜZERİNDE ORTOGONAL İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR.....	95
6.1 Temel Tanımlar ve Özellikler.....	95

6.2 Cebirsel Bir Eğri Üzerinde Ortogonal İki Değişkenli Polinomlar...	100
6.3 Bir Çevre Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar.....	110
KAYNAKLAR.....	115
ÖZGEÇMİŞ.....	117

SİMGELER DİZİNİ

$P_{nk}(x, y)$	Basamağı (n, k) olan iki değişkenli polinom
$H_n(x)$	Hermite polinomları
$L_n(x; \alpha)$	Laguerre polinomları
$P_n(x; \alpha, \beta)$	Jacobi polinomları
$\{F_{nk}(x, y)\}$	Temel ortonormal polinomların ailesi
$\{\Phi_{nk}(x, y)\}$	Monik ortogonal polinomların ailesi
$\{A_{nk}(x, y)\}$	Appell polinomlarının ailesi
(n, k)	$P_{nk}(x, y) \equiv P_{n,k}(x, y)$ cebirsel polinomunun derecesi
$h(x, y)$	Düzlemsel bir G bölgesinde ağırlık fonksiyonu
h_{nk}	$h(x, y)$ ağırlık fonksiyonunun kuvvet momentleri
Δ_{nk}	Gram determinantları
$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$u_n(x, y)$	n . dereceden iki değişkenli harmonik polinomların reel kısmı
$v_n(x, y)$	n . dereceden iki değişkenli harmonik polinomların imajiner kısmı
W_n	G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan n -yinci dereceden polinomların uzayı

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar teorisi ve bu teorinin sonuçları son yıllarda oldukça gelişmiştir. Bu polinomların kuantum mekaniği mühendislik, bilgisayar, matematiksel fizik ve istatistiğin uygulamalarında önemli bir yeri vardır. Bir çok teorik ve uygulamalı problem orthogonal polinomlar kullanılarak çözülebilir. Bir değişkenli klasik orthogonal polinomların ilk örnekleri A.M. Legendre, P.S. Laplace, J.L. Lagrange ve N.H. Abel tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rus matematikçi P.L. Chebychev, klasik orthogonal polinomların bazı özel durumlarını araştırmış ve orthogonal polinomların genel teorisini geliştirmiştir. Bir değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmaların önemli sonuçları C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre, T. Stieltjes, C. Posse, Yu. V. Sokhotskii ve Szegő (1939) tarafından verilmiştir.

Bir değişkenli orthogonal polinomlar yardımıyla, çok değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde de son yıllarda çalışmalar yapılmaktadır. 1881'de G. Orlov iki değişkenli bazı orthogonal polinomlar üzerinde çalışmalar yapmıştır. İki değişkenli Appell polinomlarının özellikleri Appell ve Kampe de Fariet (1926) tarafından incelenmiştir. 1938'de Jackson, bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre orthogonal olan iki değişkenli orthogonal polinomların en temel özelliklerini ele almıştır. Engeliş (1974)'de iki değişkenli bazı orthogonal polinom sınıfları için Rodrigues formülünü türetmiştir. Koornwinder (1975), Lyskova (1991), Dunkl ve XU (2001), Krall ve Sheffer (1967) iki değişkenli orthogonal polinomlar teorisinin sonuçları üzerinde detaylı çalışmalar yapmıştır.

Bu tez de, ilk olarak bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre orthogonal olan polinomlar incelenmiştir. Daha sonra bir aralık üzerinde orthogonal olan bir değişkenli polinomlar yardımıyla bir bölgede orthogonal olan polinomlar bulunmuştur. Klasik Appell orthogonal polinomları incelenmiştir. Harmonik polinomların bir bölgede ortogonallikleri ve sağladığı bazı eşitsizlikler ele alınmıştır. Son olarak bu bilgilerin ışığı altında Harmonik polinomların bir çevre üzerinde ortogonallikleri ve sağladığı eşitsizlikler incelenmiştir.

2. İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

2.1 Bir Bölgede İki Değişkenli Ortogonal Polinomlar

x ve y bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin çarpımıyla elde edilen monomiallerin kümesi

$$\{x^{n-k}y^k\}, \quad n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, n$$

olsun. n -yinci dereceden iki değişkenli cebirsel bir polinom

$$P_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms}^{(n,k)} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k c_{ns}^{(n,k)} x^{n-s} y^s \quad (2.1)$$

eşitliğiyle tanımlıdır. Burada

$$\{c_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, n$$

reel sabitler ve $c_{nk} \neq 0$ dır. n indisi, x ve y değişkenlerine göre polinomun toplam derecesini, k indisi de polinomdaki y değişkeninin en yüksek kuvvetini göstermektedir. Kolaylık olsun diye bu polinom (n, k) -yüncü basamaktan bir polinom olarak adlandırılır. Burada k indisi en fazla n ye eşit olabilir. $c_{nk}^{(n,k)}$ katsayısına bu polinomun başkatsayısı adı verilir. Şimdi (2.1) polinomunun terim sayısını bulalım. (2.1) deki birinci toplam

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

terim içermektedir. İkinci toplam ise $k + 1$ terim içermektedir. Bu durumda (2.1) polinomu

$$N(n, k) = \frac{n(n+1)}{2} + k + 1$$

terim içermektedir.

Lemma 2.1.1. Başkatsayıları sıfırdan farklı olan (n, k) -yıncı basamaktan bir polinom sistemi

$$\left. \begin{array}{l} P_{00}(x, y) \\ P_{10}(x, y), P_{11}(x, y) \\ P_{20}(x, y), P_{21}(x, y), P_{22}(x, y) \\ \dots \\ P_{n0}(x, y), P_{n1}(x, y), \dots, P_{n,k-1}(x, y), P_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

olarak verilsin. (n, k) -yıncı basamaktan herhangi bir $Q_{nk}(x, y)$ polinomu, (2.2) polinom sistemi yardımıyla

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (2.3)$$

şeklinde tek türlü ifade edilebilir (Suetin 1988).

İspat: (2.1) den $Q_{nk}(x, y)$ polinomu

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m b_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k b_{ns} x^{n-s} y^s$$

şeklinde gösterilebilir. Bu polinom daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} Q_{nk}(x, y) = & b_{00} + b_{10}x + b_{11}y + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 + \dots \\ & + b_{n0}x^n + b_{n1}x^{n-1}y + \dots + b_{n,k-1}x^{n-(k-1)}y^{k-1} + b_{nk}x^{n-k}y^k \end{aligned} \quad (2.4)$$

olarak yazılabilir. (2.2) deki her bir polinom (2.1) den açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{00}(x, y) &= c_{00}^{(0,0)} \\ P_{10}(x, y) &= c_{00}^{(1,0)} + c_{10}^{(1,0)}x \\ P_{11}(x, y) &= c_{00}^{(1,1)} + c_{10}^{(1,1)}x + c_{11}^{(1,1)}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \\
P_{nk}(x, y) &= c_{00}^{(n,k)} + c_{10}^{(n,k)}x + c_{11}^{(1,1)}y + \dots + c_{n0}^{(n,k)}x^n + \dots \\
& + c_{n,k-1}^{(n,k)}x^{n-(k-1)}y^{k-1} + c_{nk}^{(n,k)}x^n y^k
\end{aligned}$$

olurlar. Bu değerler (2.3) de yerine yazılıp (2.4) deki monomiallerle katsayıları kıyaslanırsa,

$$\begin{aligned}
b_{nk} &= a_{nk}c_{nk}^{(n,k)} \\
b_{n,k-1} &= a_{nk}c_{n,k-1}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{n,k-1}^{(n,k-1)} \\
b_{n,k-2} &= a_{nk}c_{n,k-2}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{n,k-2}^{(n,k-1)} + a_{n,k-2}c_{n,k-2}^{(n,k-2)} \\
& \dots \\
b_{00} &= a_{nk}c_{00}^{(n,k)} + a_{n,k-1}c_{00}^{(n,k-1)} + \dots + a_{00}c_{00}^{(0,0)}
\end{aligned}$$

lineer homogen olmayan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem $\{a_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı $\left\{\frac{n(n+1)}{2} + k + 1\right\}$ tane denklem içerir. (2.2) deki her polinomun, başkatsayısı sıfırdan farklı olduğundan, bu sistemin katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{nk}^{(n,k)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n,k-1}^{(n,k)} & c_{n,k-1}^{(n,k-1)} & 0 & \dots & 0 \\ c_{n,k-2}^{(n,k)} & c_{n,k-2}^{(n,k-1)} & c_{n,k-2}^{(n,k-2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{00}^{(n,k)} & c_{00}^{(n,k-1)} & c_{00}^{(n,k-2)} & \dots & c_{00}^{(0,0)} \end{vmatrix} \neq 0$$

olup $\{a_{ms}\}$ ler tek türlü olarak belirlenir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.1.1. xOy düzleminde, basit kapalı bir Γ eğrisi tarafından sınırlanan sonlu ve basit irtibatlı bir bölge G olsun. $h(x, y)$, G de tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulu geręeklenirse, bu fonksiyon G bölgesinde bir "ağırlık fonksiyonu" olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.2. $h(x, y)$, G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda G bölgesinde negatif olmayan, (n, k) -yıncı basamaktan ($n \geq 1$) herhangi bir $P_{nk}(x, y)$ polinomu için,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy > 0$$

dır (Suetin 1988).

İspat: $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu olduğundan, ağırlık fonksiyonunun tanımından dolayı negatif olmayan bir fonksiyondur. Yani $h(x, y) > 0$ dır. Ayrıca hipotezden $P_{nk}(x, y)$ negatif olmayan bir polinomdur. O halde $P_{nk}(x, y) h(x, y) \geq 0$ olduğundan,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy \geq 0 \quad (2.5)$$

dır.

Şimdi (2.5) in sıfır olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.6)$$

olsun. Lebesgue integralinden biliyoruz ki (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A ölçülebilir ise bu takdirde

$$\int_X |f| d\mu = 0 \iff \text{hemen hemen her yerde } f = 0$$

dır. O halde, $X = \mathbb{R}^2$, $A = B(\mathbb{R}^2)$, $\mu = \lambda$ için

$$\begin{aligned} \int_X |h(x, y) P_{nk}(x, y)| dx dy &= \iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy = 0 \\ &\iff \text{hemen hemen her yerde } h(x, y) P_{nk}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

dır.

$h(x, y) P_{nk}(x, y)$ çarpımında $h(x, y) = 0$ olursa,

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

ağırlık fonksiyonu olma koşulu ile çelişir. Diğer taraftan $P_{nk}(x, y) = 0$ olursa $P_{nk}(x, y)$ polinomunun (n, k) -yıncı basamaktan olması ile çelişir.

O halde (2.6) hiçbir zaman sıfıra eşit olamaz. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.2. Cebirsel bir polinom sistemi

$$\left. \begin{array}{l} F_{00}(x, y) \\ F_{10}(x, y), F_{11}(x, y) \\ F_{20}(x, y), F_{21}(x, y), F_{22}(x, y) \\ \dots \\ F_{n0}(x, y), F_{n1}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y), F_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

olarak verilsin. Bu polinom sistemi $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre aşağıdaki koşulları sağlarsa G bölgesinde "ortonormal bir polinom sistemi" olarak adlandırılır.

- i. Herbir $F_{nk}(x, y)$ polinomunun başkatsayısı pozitif olmalıdır.
- ii. (2.7) polinomları G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallik koşulunu sağlamalıdır. Yani

$$\begin{aligned} (F_{nk}, F_{ms}) &= \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy \\ &= \delta_{nm} \delta_{ks} \end{aligned} \quad (2.8)$$

iç çarpımı gerçekleşmelidir. Burada

$$\delta_{nm} \delta_{ks} = \begin{cases} 0 ; & (n, k) \neq (m, s) \\ 1 ; & (n, k) = (m, s) \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.1.1. Bir G bölgesinde tanımlanan herhangi bir ağırlık fonksiyonu $h(x, y)$ olsun. G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan bir tek $\{F_{nk}(x, y)\}$ polinom sistemi vardır (Suetin 1988).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. Sıfırıncı basamaktan keyfi bir polinom $F_{00}(x, y) = c_{00} > 0$ olarak alınır

$$\iint_G h(x, y) F_{00}^2(x, y) dx dy = \iint_G h(x, y) c_{00}^2 dx dy = 1$$

koşulu sağlanacak şekilde $F_{00}(x, y) = c_{00}$ polinomu tek olarak belirlenir. Şimdi de

$$F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n0}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y) \quad (2.9)$$

polinom kümesinin ortonormal bir küme oluşturduğunu kabul edelim ve bu küme ile ortonormal olacak şekilde (n, k) -yıncı basamaktan bir $F_{nk}(x, y)$ polinomunun olduğunu gösterelim.

Lemma 2.1.1 den $F_{nk}(x, y)$ polinomu

$$F_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} F_{ns}(x, y) + c_{nk} x^{n-k} y^k \quad (2.10)$$

formunda yazılabilir. (2.8) den $(n, k) \neq (m, s)$ için

$$(F_{nk}, F_{ms}) = \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} F_{ns}(x, y) + c_{nk} x^{n-k} y^k, F_{ms} \right) = 0$$

sağlanmalıdır. Burada (2.9) polinom kümesinin ortonormal olduğu göz önünde bulundurulursa

$$c_{ms} + c_{nk} (x^{n-k} y^k, F_{ms}) = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) deki iç çarpım A_{ms} ile gösterilirse

$$c_{ms} = -c_{nk} A_{ms}$$

olur. Bu değer (2.10) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_{nk}(x, y) &= c_{nk} \left[x^{n-k} y^k - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} F_{ms}(x, y) - \sum_{s=0}^{k-1} A_{ns} F_{ns}(x, y) \right] \\ &= c_{nk} \Phi_{nk}(x, y) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise (2.9) polinom sistemine ortogonal olan (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomunun sabit çarpan farkıyla tek olduğunu gösterir. Diğer yandan (2.8) deki ortonormallik koşulundan

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}^2(x, y) dx dy = 1$$

sağlanmalıdır. Buradan

$$c_{nk}^2 \iint_G h(x, y) \Phi_{nk}^2(x, y) dx dy = 1$$

olup $c_{nk} > 0$ koşulu altında bu katsayı tek türlü olarak belirlenir. Böylece G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan tek bir

$$\{F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n0}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y), F_{nk}(x, y)\}$$

polinom sistemi elde edilir. Şimdi bu teoremden yararlanarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.2. c_{nk} başkatsayısı sıfırdan farklı olan (n, k) -yıncı basamaktan bir polinom $F_{nk}(x, y)$ olsun. $F_{nk}(x, y)$ polinomunun, bir G bölgesinde tanımlı $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.12)$$

ifadesinin gerçekleşmesidir.

Burada $(p, q) < (n, k)$ olup $Q_{pq}(x, y)$ lar (n, k) -yıncı basamaktan daha düşük (p, q) -yuncu basamaktan herhangi bir polinomu göstermektedir.

İspat: $(\Rightarrow)$ G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre (n, k) -yıncı basamaktan ortogonal bir polinom $F_{nk}(x, y)$ olsun. Yani,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy = 0 \quad , \quad (n, k) \neq (m, s)$$

sağlansın. Lemma 2.1.1 den dolayı $Q_{pq}(x, y)$ polinomu, $\{F_{ms}(x, y)\}$ polinom ailesi yardımıyla ifade edilebileceğinden

$$Q_{pq}(x, y) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^q c_{ps} F_{ps}(x, y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifade (2.12) integralinde yerine yazılıp $\{F_{nk}(x, y)\}$ polinom ailesinin ortogonalliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) dx dy \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} \left\{ \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy \right\} \\ & \quad + \sum_{s=0}^q c_{ps} \left\{ \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ps}(x, y) dx dy \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir.

$(\Leftarrow)$ Tersine (n, k) -yıncı basamaktan daha düşük basamaklı herhangi bir $Q_{pq}(x, y)$ polinomu için (2.12) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Burada $Q_{pq}(x, y)$ polinomu yerine (2.9) ile verilen $F_{nk}(x, y)$ den daha düşük basamaklı

$$F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y)$$

polinomları alınabilir. Teorem (2.1.1) in ispatı gösterir ki, düşük basamaktan (2.9) polinomlarına ortogonal olan (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomu sabit çarpan farkıyla tektir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem 2.1.3. Bir G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomu,

$$F_{nk}(x, y) = Q_{ms}(x, y) H_{pq}(x, y); \quad m \geq 1, p \geq 1 \quad (2.13)$$

formunda iki polinomun çarpımı olarak yazılabilirse, $Q_{ms}(x, y)$ ve $H_{pq}(x, y)$ polinomları da aynı G bölgesinde kendi ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olurlar.

İspat: (m, s) -yıncı basamaktan daha düşük (r, l) -yıncı basamaktan keyfi bir polinom $K_{rl}(x, y)$ olsun.

Bu durumda $H_{pq}(x, y) K_{rl}(x, y)$ polinomunun basamağı (n, k) -yıncı basamaktan daha düşük olur. $F_{nk}(x, y)$ ortogonal bir polinom olduğundan, Teorem 2.1.2 den

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) H_{pq}(x, y) K_{rl}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.14)$$

sağlanır. Burada (2.13) eşitliği kullanılırsa, (2.14) den

$$\iint_G h(x, y) H_{pq}^2(x, y) Q_{ms}(x, y) K_{rl}(x, y) dx dy = 0$$

elde edilir. $K_{rl}(x, y)$, (m, s) -yıncı basamaktan daha düşük basamaklı keyfi bir polinom olduğundan, Teorem 2.1.2 den dolayı $Q_{ms}(x, y)$ polinomu

$$h_1(x, y) = h(x, y) H_{pq}^2(x, y)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Benzer şekilde, $H_{pq}(x, y)$ polinomunun G

bölgesinde

$$h_2(x, y) = h(x, y) Q_{ms}^2(x, y)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallığı de kolaylıkla gösterilebilir.

2.2 Temel Ortogonal Polinomlar

Bir değişkenli ortogonal polinomlar gibi iki değişkenli ortogonal polinomlarda ağırlık fonksiyonunun momentleri yardımıyla temsil edilebilir. Bir G bölgesinde herhangi bir $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonunun kuvvet momentleri,

$$h_{nk} = \iint_G h(x, y) x^{n-k} y^k dx dy; \quad n = 0, 1, \dots \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.15)$$

formülü ile tanımlanır. Bu momentlerin herbiri sonludur. Eğer G bölgesi sınırsız bir bölge ise $h(x, y)$ nin bir ağırlık fonksiyonu olabilmesi için

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulunun sağlanmasının yanı sıra h_{nk} momentleri de sonlu olmalıdır. (2.15) momentlerini

$$\left. \begin{array}{l} h_{00} \\ h_{10}, h_{11} \\ h_{20}, h_{21}, h_{22} \\ \dots \\ h_{n0}, h_{n1}, \dots, h_{n,n-1}, h_{nn} \\ \dots \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

formunda bir tablo ile göstermek daha uygundur. (2.16) kuvvet momentleri yardımıyla aşağıdaki determinantları tanımlamak mümkündür.

$$\Delta_{00} = h_{00}, \quad \Delta_{10} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ h_{10} & h_{20} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{20} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} \\ h_{20} & h_{30} & h_{31} & h_{40} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \dots & h_{n+1,0} & \dots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{n+1,1} & \dots & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \dots & h_{2n,0} & \dots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} & \dots & h_{2n,k-1} & \dots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ h_{nk} & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} & \dots & h_{2n,k} & \dots & h_{2n,2k-1} & h_{2n,2k} \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

Bu determinantları elde etmek için

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, x^{n-1}y, \dots, x^{n-k}y^k\} \quad (2.18)$$

lineer bağımsız fonksiyonlarının bir sistemini ele alalım. (2.15) formülü ile elde edilen momentler, (2.18) sistemindeki fonksiyonların iç çarpımıdır. (2.18) sisteminin her fonksiyonu aynı sistemin bir elemanı olan 1 ile çarpılıp $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinde integre edilirse, (2.15) den Δ_{nk} determinantının birinci satırını oluşturan momentler elde edilir. Δ_{nk} determinantının ikinci satırının elde edilebilmesi için (2.18) sisteminin her fonksiyonunun x ile çarpılıp G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlığına göre integre etmek gerekir. Bu şekilde devam edilerek, (2.18) sisteminin her fonksiyonu, aynı sistemin son elemanı olan $x^{n-k}y^k$ ile çarpılıp G bölgesinde integrallenirse determinantının son satırı elde edilmiş olur. Aynı işlemlerle Δ_{nk} determinantının sütunları da elde edilebilir. (2.17) determinantlarının hepsi (2.18) lineer bağımsız fonksiyon sisteminin "Gram Determinantları" olarak adlandırılır.

Lemma 2.2.1. Δ_{nk} , $n = 0, 1, \dots$; $k = 0, 1, \dots, n$ Gram determinantlarının herbiri sıfırdan farklıdır.

İspat: (2.18) lineer bağımsız fonksiyonlarının sistemi yeniden adlandırılırsa,

$$\{\vartheta_1(x, y), \vartheta_2(x, y), \dots, \vartheta_N(x, y)\}; \quad N = \frac{n(n+1)}{2} + k + 1 \quad (2.19)$$

sistemi elde edilir. Bu fonksiyon sistemine ilişkin Δ_{nk} determinantı,

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} (\vartheta_1, \vartheta_1) & (\vartheta_1, \vartheta_2) & \dots & (\vartheta_1, \vartheta_N) \\ (\vartheta_2, \vartheta_1) & (\vartheta_2, \vartheta_2) & \dots & (\vartheta_2, \vartheta_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vartheta_N, \vartheta_1) & (\vartheta_N, \vartheta_2) & \dots & (\vartheta_N, \vartheta_N) \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır. Kabul edelim ki, bu determinant sıfıra denk olsun. Bu durumda aşıkâr olmayan $\{d_m\}$, $m = 1, 2, \dots, N$ çözümlerine sahip

$$\sum_{m=1}^N (\vartheta_k, \vartheta_m) d_m = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

lineer homogen denklem sistemini ele alabiliriz. İç çarpımın lineerlik özelliğini kullanırsak, bu denklem sistemi

$$\left(\vartheta_k, \sum_{m=1}^N d_m \vartheta_m \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

formunda yazılabilir. (2.20) denklem sistemindeki herbir denklem d_k ile çarpılıp terim terim toplanırsa

$$\left(\sum_{k=1}^N d_k \vartheta_k, \sum_{m=1}^N d_m \vartheta_m \right) = 0$$

elde edilir. (2.8) den bu iç çarpım,

$$\iint_G h(x, y) \left[\sum_{m=1}^N d_m \vartheta_m \right]^2 dx dy = 0$$

olup

$$\sum_{m=1}^N d_m \vartheta_m = 0$$

ifadesi sağlanır. (2.19) fonksiyon sistemi lineer bağımsız olduğundan

$$d_m = 0 ; \quad m = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir ki bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla Δ_{nk} determinantları sıfırdan farklı olmalıdır.

Şimdi de Δ_{nk} Gram determinantları yardımıyla ortogonal polinomlar tanımlayalım. (2.17) determinantının son satırı (2.18) fonksiyonları ile yer değiştirilirse, (n, k) -yıncı basamaktan

$$P_{nk}(x, y) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n+1,0} & \dots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n+1,1} & \dots & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & \dots & h_{2n,0} & \dots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & \dots & h_{2n,k-1} & \dots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ 1 & x & \dots & x^n & \dots & x^{n-k+1}y^{k-1} & x^{n-k}y^k \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

polinomu elde edilir. Burada $k \geq 1$ ise bu polinomun başkatsayısı $\Delta_{n,k-1}$ olur. $k = 0$ için $P_{n0}(x, y)$ polinomu

$$P_{n0}(x, y) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n-1,0} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{n0} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n,0} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n+1,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,0} & h_{n,0} & \dots & h_{2(n-1),0} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & h_{2n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,n-1} & h_{n,n-1} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & \dots & h_{2(n-1),2(n-1)} & h_{2n-1,2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & \dots & y^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

şeklindedir. Bu polinomun sondan bir önceki satırı

$$h_{n-1,n-1}, h_{n,n-1}, h_{nn}, \dots, h_{2(n-1),2(n-1)}, h_{2n-1,2n-1}$$

olduğundan başkatsayısı $\Delta_{n-1,n-1}$ dir.

Lemma 2.2.2. (2.21) ile tanımlanan $P_{nk}(x, y)$ polinomu G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Burada $P_{nk}(x, y)$ (n, k) -yıncı basamaktan bir polinomdur.

İspat: (2.21) polinomu, (2.18) fonksiyon sisteminin ilk elemanı olan 1 ile çarpıldıktan sonra G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre integrallenir ve (2.15) formülü kullanılırsa, birinci ve son satırı aynı olan ve bu nedenle de değeri sıfır olan,

$$(P_{nk}(x, y), 1) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n+1,0} & \dots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & \dots & h_{2n,0} & \dots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & \dots & h_{2n,k-1} & \dots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,k-1} & h_{nk} \end{vmatrix} = 0$$

determinantı elde edilir (Suetin 1988).

(2.21) polinomu x ile çarpılıp benzer işlemler uygulanırsa bu durumda ikinci ve son satırı aynı olan bir determinant bulunur. Bu işlem, (2.18) deki son monomial hariç diğer

$$y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, \dots, x^{n-k+1}y^{k-1}$$

monomialleri içinde tekrarlanırsa, her bir durumda iki satırı aynı olan bir determinant elde edilir ve dolayısıyla bunların her biri sıfırdır. Bu ise $P_{nk}(x, y)$ polinomunun her bir

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, \dots, x^{n-k+1}y^{k-1}$$

monomialine ortogonal olduğunu gösterir. Buradan

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) x^{m-s} y^s dx dy = 0, \quad (m, s) < (n, k) \quad (2.23)$$

gerçeklenir ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.3. (2.21) ve (2.22) ile tanımlanan $P_{nk}(x, y)$ ve $P_{n0}(x, y)$ polinomların normları sırasıyla, $n \geq 1$ için

$$\|P_{nk}\| = (\Delta_{n,k-1} \Delta_{nk})^{\frac{1}{2}}; \quad k \geq 1 \quad (2.24)$$

$$\|P_{n0}\| = (\Delta_{n-1,n-1} \Delta_{n0})^{\frac{1}{2}}$$

dır.

İspat: (2.21) polinomu, (2.18) fonksiyon sisteminin son elemanı olan $x^{n-k}y^k$ ile çarpılıp $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinde integrallenirse,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) x^{n-k} y^k dx dy = \Delta_{nk} \quad (2.25)$$

eşitliği elde edilir. (2.21) determinantı ile tanımlanan $P_{nk}(x, y)$ polinomu

$$P_{nk}(x, y) = \Delta_{n,k-1} x^{n-k} y^k + R_{n,k-1}(x, y) \quad (2.26)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $R_{n,k-1}(x, y)$, (n, k) dan daha düşük basamaklı bir polinomdur. (2.26) polinomu

$$\|P_{nk}\|^2 = \iint_G h(x, y) P_{nk}^2(x, y) dx dy$$

integralinde dikkate alınır,

$$\|P_{nk}\|^2 = \iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) [\Delta_{n,k-1} x^{n-k} y^k + R_{n,k-1}(x, y)] dx dy$$

olarak yazılır. (2.23) ve (2.25) eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\|P_{nk}\| = (\Delta_{n,k-1} \Delta_{nk})^{\frac{1}{2}}$$

elde edilmiş olur. Benzer işlemler (2.22) polinomu için tekrarlanırsa,

$$\|P_{n0}\| = (\Delta_{n-1,n-1} \Delta_{n0})^{\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur.

Sonuç 2.2.1. (2.21) ve (2.24) eşitliklerinden yararlanılarak,

$$F_{nk}(x, y) = \frac{P_{nk}(x, y)}{\|P_{nk}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n,k-1} \Delta_{nk}}} P_{nk}(x, y) \quad (2.27)$$

formülü yardımıyla G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinomlar elde edilebilir.

Bu polinomların birkaçı açık olarak yazılırsa,

$$F_{00}(x, y) = \frac{P_{00}(x, y)}{\|P_{00}\|} = \frac{1}{\left[\iint_G h(x, y) dx dy \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(h_{00})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}}}$$

$$F_{10}(x, y) = \frac{P_{10}(x, y)}{\|P_{10}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}\Delta_{10}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$F_{11}(x, y) = \frac{P_{11}(x, y)}{\|P_{11}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{10}\Delta_{11}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

$$F_{20}(x, y) = \frac{P_{20}(x, y)}{\|P_{20}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{20}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} \\ 1 & x & y & x^2 \end{vmatrix}$$

$$F_{21}(x, y) = \frac{P_{21}(x, y)}{\|P_{21}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{20}\Delta_{21}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} & h_{21} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} & h_{31} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} & h_{32} \\ h_{20} & h_{30} & h_{31} & h_{40} & h_{41} \\ 1 & x & y & x^2 & xy \end{vmatrix}$$

olarak bulunurlar. (2.27) formülü, bir bölgedeki ağırlık fonksiyonunun kuvvet momentlerinin bilinmesi durumunda, keyfi sonlu sayıda ortonormal polinomun bulunmasına izin verir.

Tanım 2.2.1. (2.27) formülü ile tanımlanan polinomlara G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre "Temel Ortonormal Polinomlar" adı verilir. Burada

$$\{F_{n0}(x, y), F_{n1}(x, y), \dots, F_{n,n-1}(x, y), F_{nn}(x, y)\}$$

n -yinci dereceden temel ortonormal polinom sistemini oluşturur.

G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre temel ortonormal polinomların sistemi

$$\{F_{nk}(x, y)\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

formunda yazılabilir.

2.3 Monik Ortogonal Polinomlar

(2.18) fonksiyon sistemindeki

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ x, y \\ x^2, xy, y^2 \\ \dots \\ x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1} \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

monomialleri sabit tutularak, n -yinci dereceden keyfi bir $x^{n-k}y^k$ monomiali alınırsa

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{n-1}, \dots, y^{n-1}, x^{n-k}y^k\} \quad (2.29)$$

lineer bağımsız fonksiyon sistemi elde edilir. (2.29) monomialleri ve $\{A_{ms}\}$ reel katsayıları yardımıyla elde edilen n -yinci dereceden

$$\tilde{\Phi}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} x^{m-s} y^s \quad (2.30)$$

polinomu "monik polinom" olarak adlandırılır. Monik bir polinomun en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olmalıdır.

Lemma 2.3.1. $\{A_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı (2.30) polinomu,

$$\iint_G h(x, y) \tilde{\Phi}_{nk}(x, y) x^{p-q} y^q dx dy = 0 \quad (2.31)$$

$$p = 0, 1, \dots, n-1; \quad q = 0, 1, \dots, p$$

koşulları sağlanacak şekilde tek türlü belirlenebilir.

İspat: p ve q nun değerleri için (2.30) polinomu (2.31) de yerine yazılıp (2.15) momentleri kullanılırsa, (2.15) sistemi

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} h_{ms} &= -h_{nk} \\ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} h_{m+1,s} &= -h_{n+1,k} \\ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} h_{m+1,s+1} &= -h_{n+1,k+1} \\ &\dots \\ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} h_{m+n-1,n+s-1} &= -h_{2n-1,n+k-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

formuna indirgenir. Bu sistem $\{A_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı homogen olmayan bir denklem sistemidir. Bu sistemin katsayılar determinantı $\Delta_{n-1,n-1}$ olup bu determinant sıfırdan farklı ve pozitiftir. Böylece (2.32) denklem sistemi tek bir $\{A_{ms}\}$ çözümüne sahip olacağından, $\tilde{\Phi}_{nk}(x, y)$ polinomu tek türlü belirlenir. Bu lemmanın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.1. Bir G bölgesinde (2.30) ile tanımlanan $\tilde{\Phi}_{nk}(x, y)$ polinomu, (2.31) koşulu altında $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani, $\tilde{\Phi}_{nk}(x, y)$ polinomu, n -yinci dereceden daha düşük olan (2.28) polinom sistemindeki tüm monomallere ortogonaldır.

Tanım 2.3.1. (2.31) koşulunu sağlayan (2.30) monik ortogonal polinomu kendi normu ile bölünürse,

$$\Phi_{nk}(x, y) = \frac{\tilde{\Phi}_{nk}(x, y)}{\|\tilde{\Phi}_{nk}\|} = A_{nk} x^{n-k} y^k + R_{n-1}(x, y) \quad (2.33)$$

"monik ortonormal polinomu" elde edilir.

Burada $R_{n-1}(x, y)$, derecesi $(n-1)$ den büyük olmayan bir polinomdur.

Aşağıda monik ortogonal bir polinomun (2.21) ve (2.27) formüllerinde olduğu gibi ağırlık fonksiyonunun momentleri yardımıyla ifade edilebileceğini gösterelim. (2.29)

fonksiyon sistemi ele alınırsa, bu fonksiyon sisteminin Gram determinatları

$$\tilde{\Delta}_{nk} = \begin{vmatrix} h_{00} & \dots & h_{n-1,0} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{nk} \\ h_{10} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n+1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,0} & \dots & h_{2(n-1),0} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & h_{2n-1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,n-1} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & \dots & h_{2(n-1),2(n-1)} & h_{2n-1,n+k-1} \\ h_{nk} & \dots & h_{2n-1,k} & \dots & h_{2n-1,n+k-1} & h_{2n,2k} \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

formundadır. Lemma 2.2.1 e benzer yollarla bu Gram determinantlarının sıfırdan farklı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (2.34) determinantının son satırı (2.29) fonksiyon sistemiyle yer değiştirilirse, n -yinci dereceden

$$\tilde{P}_{nk}(x, y) = \begin{vmatrix} h_{00} & \dots & h_{n-1,0} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{nk} \\ h_{10} & \dots & h_{n0} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n+1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,0} & \dots & h_{2(n-1),0} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & h_{2n-1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,n-1} & \dots & h_{2(n-1),n-1} & \dots & h_{2(n-1),2(n-1)} & h_{2n-1,n+k-1} \\ 1 & \dots & x^{n-1} & \dots & y^{n-1} & x^{n-k}y^k \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun başkatsayısı $\Delta_{n-1,n-1}$ dir. Lemma 2.2.2 de olduğu gibi (2.35) polinomunun ortogonalliği, yani

$$\iint_G h(x, y) \tilde{P}_{nk}(x, y) x^{p-q} y^q dx dy = 0,$$

$$p = 0, 1, \dots, n-1; \quad q = 0, 1, \dots, p$$

koşulunun sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Lemma 2.2.3 den yararlanarak bu polinomların normu

$$\|\tilde{P}_{nk}\| = \sqrt{\Delta_{n-1, n-1} \tilde{\Delta}_{nk}}$$

olup

$$\Phi_{nk}(x, y) = \frac{\tilde{P}_{nk}(x, y)}{\|\tilde{P}_{nk}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1, n-1} \tilde{\Delta}_{nk}}} \tilde{P}_{nk}(x, y)$$

monik ortonormal polinomları elde edilir. Burada

$$\{\Phi_{n0}(x, y), \Phi_{n1}(x, y), \dots, \Phi_{n, n-1}(x, y), \Phi_{nn}(x, y)\} \quad (2.36)$$

n -yinci dereceden monik ortonormal polinom sistemini oluşturur. Bu polinomlar, düşük dereceli her polinoma ortogonal olmasına rağmen birbirleri ile ortogonal olmak zorunda değildirler. Buradan G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre monik ortonormal polinomların bir sistemi

$$\{\Phi_{nk}(x, y)\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.3.2. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(n+1)$ -inci basamaktan ortogonal bir matris

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

olsun.

Bu matris

$$\sum_{j=0}^n a_{mj}a_{kj} = \delta_{mk}; \quad m, k = 0, 1, \dots, n \quad (2.38)$$

koşulunu sağlamalıdır.

Teorem 2.3.2. (2.37) ortogonal matrisinin elemanları ve Temel ortogonal polinomlar yardımıyla elde edilen n -yinci dereceden bir polinom

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{mj}F_{nj}(x, y); \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (2.39)$$

olarak tanımlansın. O takdirde herhangi bir (2.37) matrisi için, (2.39) polinomları hem birbirleri ile hem de düşük dereceli bütün polinomlara ortogonal olurlar. Ayrıca bu polinomlar normlandırılabilirler.

İspat: $Q_{nm}(x, y)$ polinomu, temel ortogonal polinomların bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden düşük dereceli her polinoma ortogonalliği gerçekleşir. Şimdi de aynı dereceden (2.39) polinomlarının birbirleri ile ortogonal olduğunu gösterelim. (2.39) ifadesi integralde yerine yazılıp $\{F_{nj}(x, y)\}$ polinomlarının ortogonalliği kullanıldıktan sonra (2.38) göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) Q_{nm}(x, y) Q_{nk}(x, y) dx dy \\ &= \iint_G h(x, y) \sum_{j=0}^n a_{mj}F_{nj}(x, y) \sum_{p=0}^n a_{kp}F_{np}(x, y) dx dy \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n a_{mj}a_{kp} \iint_G h(x, y) F_{nj}(x, y) F_{np}(x, y) dx dy \\ &= \delta_{mk} \end{aligned}$$

bulunur ki bu da teoremi ispatlar. Şimdiye kadar anlatılanların bir sonucu olarak, bir G bölgesinde tanımlanan $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu, herhangi bir n sabiti için, n -yinci dereceden aşağıdaki ortogonal polinom sistemlerini belirler.

i. Temel ortogonal polinomlar

$$F_{n0}(x, y), F_{n1}(x, y), \dots, F_{nn}(x, y)$$

ii. Monik ortogonal polinomlar

$$\Phi_{n0}(x, y), \Phi_{n1}(x, y), \dots, \Phi_{nn}(x, y)$$

iii. (2.37) ortogonal matrisi ile belirlenen (2.39) formundaki ortogonal polinomlar.

$F_{nk}(x, y)$ temel ortogonal polinomu, (2.36) ile verilen monik ortogonal polinomlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Dolayısıyla (2.39) ile tanımlanan polinomlarda (2.36) monik ortogonal polinomlarının bir lineer kombinasyonu olur. Böylece yukarıda verilen ortogonal polinomlar, monik ortogonal polinomlar cinsinden ifade edilmiş olur.

3. BİR BÖLGEDE ORTOGONALLIĞIN ÖZEL DURUMLARI VE BAZI ÖRNEKLERİ

3.1 Klasik Ortogonal Polinomların Farklı Çarpımları

$\{P_n(x)\}$ polinomları, $h_1(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre (a, b) aralığında ortonormal polinomlar olsun. Yani,

$$\int_a^b h_1(x) P_n(x) P_k(x) dx = \delta_{nk} \quad (3.1)$$

sağlansın. Diğer yandan $\{\phi_m(y)\}$ lerde $h_2(y)$ ağırlık fonksiyonuna göre (c, d) aralığında ortonormal polinomlar olsun. Yani,

$$\int_c^d h_2(y) \phi_m(y) \phi_s(y) dy = \delta_{ms} \quad (3.2)$$

olsun. Bu iki aralık yardımıyla

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad c < y < d\}$$

bölgesi tanımlansın ve bu bölgedeki ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = h_1(x) h_2(y) \quad (3.3)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir olsun. $P_n(x)$ ve $\phi_m(y)$ polinomları ile tanımlanan iki değişkenli bir polinom

$$F_{nm}(x, y) = P_{n-m}(x) \phi_m(y), \quad n = 0, 1, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (3.4)$$

formunda alınabilir.

m ve n nin değerleri için, bu polinom ailesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} P_0(x) \phi_0(y) \\ P_1(x) \phi_0(y), P_0(x) \phi_1(y) \\ P_2(x) \phi_0(y), P_1(x) \phi_1(y), P_0(x) \phi_2(y) \\ \dots \\ P_n(x) \phi_0(y), P_{n-1}(x) \phi_1(y), P_{n-2}(x) \phi_2(y), \dots, P_0(x) \phi_n(y) \\ \dots \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Teorem 3.1.1. (3.5) polinomları, G bölgesinde (3.3) ağırlık fonksiyonuna gre ortonormal bir sistem oluşturur.

İspat: (3.1) ve (3.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) F_{nm}(x, y) F_{ks}(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d h_1(x) h_2(y) P_{n-m}(x) \phi_m(y) P_{k-s}(x) \phi_s(y) dy dx \\ &= \int_a^b h_1(x) P_{n-m}(x) P_{k-s}(x) dx \int_c^d h_2(y) \phi_m(y) \phi_s(y) dy \\ &= \delta_{n-m, k-s} \delta_{ms} \\ &= \begin{cases} 1, & (n, m) = (k, s) \\ 0, & (n, m) \neq (k, s) \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. şimdi bu durumun önemli bazı örneklerini aşağıda gösterelim.

1. $(-\infty, \infty)$ aralığında $h_1(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $H_n(x)$ Hermite polinomlarını ele alalım. Diğer yandan $(-\infty, \infty)$ aralığında $h_2(y) = e^{-y^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomlar da $H_m(y)$ Hermite polinomları olsun.

Dolayısıyla bu polinomlar yardımıyla elde edilen iki değişkenli polinomlar

$$F_{nm}(x, y) = H_{n-m}(x) H_m(y); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Teorem (3.1.1) den dolayı bu polinom ailesi,

$$G = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde $h(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Bu polinomlar "Hermite-Hermite polinomları" olarak adlandırılır. (3.6) da n yerine $n+m$ alınarak indis değişikliği yapılırsa,

$$F_{n+m,m}(x, y) = H_n(x) H_m(y); \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

polinomları elde edilir. (3.7) den Hermite-Hermite polinomlarının kümesi

$$\begin{aligned} & H_0(x) H_0(y) \\ & H_1(x) H_0(y), \quad H_0(x) H_1(y) \\ & H_2(x) H_0(y), \quad H_1(x) H_1(y), \quad H_0(x) H_2(y) \\ & \dots \\ & H_n(x) H_0(y), \quad H_{n-1}(x) H_1(y), \quad H_{n-2}(x) H_2(y), \dots, H_0(x) H_n(y) \\ & \dots \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $H_n(x)$ ve $H_m(y)$ Hermite polinomları sırasıyla

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (3.8)$$

$$H_m''(y) - 2yH_m'(y) + 2mH_m(y) = 0 \quad (3.9)$$

diferensiyel denklemlerini gerçeklerler. (3.8) denklemi $H_m(y)$ ile, (3.9) denklemi de $H_n(x)$ ile çarpılıp terim terime toplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_n(x) H_m(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_n(x) H_m(y)] - 2x \frac{\partial}{\partial x} [H_n(x) H_m(y)] \\ & - 2y \frac{\partial}{\partial y} [H_n(x) H_m(y)] + 2(n+m) [H_n(x) H_m(y)] = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Yani (3.7) polinomları, ikinci basamaktan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 2(n+m)u = 0 \quad (3.10)$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlar.

2. $(0, \infty)$ aralığında $h_1(x) = x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $L_n(x; \alpha)$

Laguerre polinomlarını göz önüne alalım.

Benzer şekilde $(0, \infty)$ aralığında $h_2(y) = y^\beta e^{-y}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $L_m(y; \beta)$ Laguerre polinomları olsun. Bu durumda

$$F_{n+m,m}(x, y) = L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta); \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

iki değişkenli polinomları

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

bölgesinde

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta e^{-x} e^{-y}; \quad \alpha > -1, \beta > -1$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olurlar. Bu polinomlar "Laguerre-Laguerre polinomları" olarak adlandırılır. Şimdi bu polinomların sağladığı diferensiyel denklemini bulalım.

Bir değişkenli $L_n(x; \alpha)$ ve $L_m(y; \beta)$ Laguerre polinomları sırasıyla

$$xL_n''(x; \alpha) + (1 + \alpha - x)L_n'(x; \alpha) + nL_n(x; \alpha) = 0 \quad (3.12)$$

ve

$$yL_m''(y; \beta) + (1 + \beta - y)L_m'(y; \beta) + mL_m(y; \beta) = 0 \quad (3.13)$$

denklemini sağlarlar. (3.12) denklemi $L_m(y; \beta)$ ile (3.13) denklemi de $L_n(x; \alpha)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta)] + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} [L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta)] \\ & + (1 + \alpha - x) \frac{\partial}{\partial x} [L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta)] + (1 + \beta - y) \frac{\partial}{\partial y} [L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta)] \\ & + (n + m) [L_n(x; \alpha) L_m(y; \beta)] = 0 \end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır.

Böylece (3.11) polinomlarının

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + \alpha - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \beta - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (n + m) u = 0$$

kısmi diferensiyel denklemini sağladığı görülür.

3. Önceki durumlara benzer şekilde

$$G = \{(x, y) : x > 0, \quad -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde $h(x, y) = x^\alpha e^{-x} e^{-\frac{y^2}{2}}$, $\alpha > -1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$F_{n+m,m}(x, y) = L_n(x; \alpha) H_m(y); \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Laguerre-Hermite polinomları tanımlanabilir. $H_m(y)$ Hermite polinomları

$$H_m''(y) - yH_m'(y) + mH_m(y) = 0 \quad (3.15)$$

diferensiyel denklemini gerçekler. (3.15) denklemi $L_n(x; \alpha)$ ile (3.12) denklemi $H_m(y)$ ile çarpılıp terim terim toplanırsa,

$$x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [L_n(x; \alpha) H_m(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [L_n(x; \alpha) H_m(y)] + (1 + \alpha - x) \frac{\partial}{\partial x} [L_n(x; \alpha) H_m(y)]$$

$$-y \frac{\partial}{\partial y} [L_n(x; \alpha) H_m(y)] + (n+m) [L_n(x; \alpha) H_m(y)] = 0$$

denklemini elde edilir. Buradan (3.14) polinomları

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + \alpha - x) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + (n+m) u = 0$$

kısmi diferensiyel denklemini gerçekler.

4. $(-1, 1)$ aralığında $h_1(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $P_n(x; \alpha, \beta)$ Jacobi polinomlarını ele alalım. Benzer şekilde $(-1, 1)$ aralığında $h_2(y) = (1-y)^\gamma (1+y)^\delta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan diğer bir polinom ailesi de $P_m(y; \gamma, \delta)$ olsun. Teorem 3.1.1 den

$$G = \{(x, y) : -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}$$

bölgesinde

$$h(x, y) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-y)^\gamma (1+y)^\delta$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$F_{n+m,m}(x, y) = P_n(x; \alpha, \beta) P_m(y; \gamma, \delta); \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3.16)$$

Jacobi-Jacobi polinomları tanımlanabilir. $P_n(x; \alpha, \beta)$ Jacobi polinomları

$$\begin{aligned} (1-x^2) P_n''(x; \alpha, \beta) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] P_n'(x; \alpha, \beta) \\ + n(n + \alpha + \beta + 1) P_n(x; \alpha, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlar. Diğer yandan $P_m(y; \gamma, \delta)$ polinomları da

$$\begin{aligned} (1-y^2) P_m''(y; \gamma, \delta) + [\delta - \gamma - (\gamma + \delta + 2)y] P_m'(y; \gamma, \delta) \\ + m(m + \gamma + \delta + 1) P_m(y; \gamma, \delta) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

denklemini gerçekler.

(3.17) denklemi $P_m(y; \gamma, \delta)$ ile (3.18) denklemi de $P_n(x; \alpha, \beta)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa, (3.16) polinomlarını gerçektelediği

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$[\delta - \gamma - (\gamma + \delta + 2)y] \frac{\partial u}{\partial y} + [n(n + \alpha + \beta + 1) + m(m + \gamma + \delta + 1)] u = 0$$

kısmi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametrelerinin uygun değerleri alınır, Chebyshev-Chebyshev polinomları, Chebyshev-Legendre polinomları ve Legendre-Legendre polinomları elde edilebilir.

5. Bir değişkenli Jacobi ve Hermite polinomları ele alınır,

$$G = \{(x, y) : -1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty\}$$

bölgesinde

$$h(x, y) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta e^{-\frac{y^2}{2}}; \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$F_{n+m,m}(x, y) = P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y); \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Jacobi-Hermite polinomları elde edilir. (3.17) ve (3.15) den

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y)] \\ & + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{\partial}{\partial x} [P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y)] \\ & - y \frac{\partial}{\partial y} [P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y)] + [n(n + \alpha + \beta + 1) + m] [P_n(x; \alpha, \beta) H_m(y)] = 0 \end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır. Buradan (3.19) polinomlarının sağladığı kısmi diferensiyel denklem

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + [n(n + \alpha + \beta + 1) + m] u = 0$$

olarak bulunur.

6. Bir boyutlu klasik Jacobi ve Laguerre ortogonal polinomlarının kombinasyonu olan

$$F_{n+m,m}(x, y) = P_n(x; \alpha, \beta) L_m(y; \gamma); \quad \gamma > -1, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1 \quad (3.20)$$

Jacobi-Laguerre polinomları,

$$h(x, y) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y^\gamma e^{-y}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$G = \{(x, y) : -1 < x < 1, \quad y > 0\}$$

bölgesinde ortogonal bir sistem oluşturur. (3.13) ve (3.17) dan, (3.20) polinomlarının

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \gamma - y) \frac{\partial u}{\partial y} \\ + [m + n(n + \alpha + \beta + 1)] u = 0 \end{aligned}$$

kısmi diferensiyel denklemini sağladığı görülür.

3.2 Bir Aralık Üzerindeki Ortogonalite ile Bir Bölgedeki Ortogonalite Arasındaki Çeşitli Bağlılıklar

Bu bölümde bir aralıkta ortonormal olan polinomlar aracılığıyla, bir bölgede ortonormalite koşulunu sağlayan iki değişkenli polinomlar elde edilecektir.

1. $\{P_n(t)\}$, $(-1, 1)$ aralığında çift bir fonksiyon olan $h_1(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal bir polinom ailesi olsun. Yani,

$$\int_{-1}^1 h_1(t) P_n(t) P_m(t) dt = \delta_{nm} \quad (3.21)$$

koşulu sağlansın. $|x| < 1$ koşulu altında x ler sabitlenerek, bu integralde

$$t = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \quad (3.22)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) P_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) P_m\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{nm} \quad (3.23)$$

formuna indirgenir. n -yinci dereceden $P_n(t)$ polinomu t nin kuvvetleri cinsinden

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad (3.24)$$

açılımına sahiptir. Burada (3.22) dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)^k \\ &= (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^n a_k y^k \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-k} \\ &= (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} R_n(x, y) \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. $h_1(t)$ ağırlık fonksiyonu çift olduğundan, (3.24) polinomu n çift ise t nin çift kuvvetlerini, n tek ise t nin tek kuvvetlerini içerir. İlk olarak, n çift olsun. Bu durumda (3.24) formülünde $a_{2s+1} = 0$ olup k lar çifttir. Dolayısıyla (3.25) eşitliğindeki diğer $n-k$ sayılarıda çift olur. Eğer n tek ise (3.24) formülünde $a_{2s} = 0$ olup k lar tek doğal sayıdır. Buradan (3.25) formülündeki $n-k$ indisleri yine çifttir. Böylece herhangi bir durumda, $R_n(x, y)$ polinomu x ve y ye bağlı n -yinci dereceden bir polinomdur.

Ayrıca (3.24) de $a_n \neq 0$ olduğundan $R_n(x, y)$ polinomu, y değişkenine göre de n -yinci derecedendir. (3.25) formülü (3.23) denkleminde göz önünde tutulursa,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) R_n(x, y) (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} R_m(x, y) (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{nm}$$

olup (3.23) denklemi

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) R_n(x, y) R_m(x, y) dy = (1-x^2)^{\frac{n+m+1}{2}} \delta_{nm} \quad (3.26)$$

formuna indirgenir. Eğer $n = m$ ise

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) R_m^2(x, y) dy = (1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}$$

eşitliği gerçekleşir. Benzer şekilde $\{Q_n(x; m)\}$ polinomları da

$$h_2(x) (1-x^2)^{m+\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

ağırlık fonksiyonuna göre $(-1, 1)$ aralığında ortonormal olsunlar. Bu durumda

$$\int_{-1}^1 h_2(x) (1-x^2)^{m+\frac{1}{2}} Q_n(x; m) Q_k(x; m) dx = \delta_{nk} \quad (3.28)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $Q_n(x; m)$ ve $R_m(x, y)$ polinomları yardımıyla tanımlanan iki değişkenli polinom ailesi

$$F_{n+m,m}(x, y) = Q_n(x; m) R_m(x, y) \quad (3.29)$$

olsun. (3.25) den bu polinomlar y -ye göre m -yinci dereceden, toplamda ise $(m+n)$ -yinci derecedendir.

(3.29) formundaki bu polinomlar,

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (3.30)$$

bölgesinde

$$h(x, y) = h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) h_2(x) \quad (3.31)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal bir sistem oluşturur. Bunu aşağıda gösterelim.

(3.29) ve (3.31) ifadelerini integralde yerine yazdıktan sonra (3.26) ve (3.28) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & (F_{n+m,m}(x, y), F_{k+s,s}(x, y)) \\ &= \iint_G h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) h_2(x) Q_n(x; m) R_m(x, y) Q_k(x; s) R_s(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; s) \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) R_m(x, y) R_s(x, y) dy \right] dx \\ &= \delta_{ms} \int_{-1}^1 h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; m) (1-x^2)^{m+\frac{1}{2}} dx \\ &= \begin{cases} 0 & , m \neq s \\ \int_{-1}^1 h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; s) (1-x^2)^{\frac{m+s+1}{2}} dx & , m = s \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , m \neq s \\ \delta_{nk} & , m = s \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , (n, m) \neq (k, s) \\ 1 & , (n, m) = (k, s) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

ifadesi elde edilir. Böylece (3.30) bölgesinde (3.31) ağırlık fonksiyonuna göre (3.29) polinomlarının ortonormalliği gerçekleşir.

2. Birinci elde edilen sonuç, $-1 \leq a \leq b \leq 1$ aralığına genelleştirilebilir. Birinci durumda tanımlanan $\{Q_n(x; m)\}$ polinomları, (a, b) aralığında (3.27) ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinom olarak alınır, bu durumda (3.29) formundaki polinomlar (3.31) ağırlık fonksiyonuna göre

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, \quad a < x < b\}$$

bölgesinde ortonormallik koşulunu gerçekler. Bunu görmek için, bu koşullar altında (3.32) eşitliğinde $(-1, 1)$ aralığı yerine (a, b) aralığını almak yeterlidir.

3. Birinci durumdaki gibi, $\{P_n(t)\}$ polinomu $(-1, 1)$ aralığında $h_1(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olsun. Yani (3.21) koşulu gerçekleştirilsin. $0 < x < a$, $0 < a \leq \infty$ koşulu altında x ler sabitlenerek,

$$t = \frac{y}{\sqrt{x}} \tag{3.33}$$

dönüşümü yapılırsa, (3.21) integrali

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) P_n\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) P_m\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \frac{dy}{\sqrt{x}} = \delta_{nm} \tag{3.34}$$

formuna indirgenir. Bu dönüşüm altında (3.24) eşitliği,

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^k \\ &= (x)^{\frac{-n}{2}} \sum_{k=0}^n a_k y^k (\sqrt{x})^{n-k} \\ &= (x)^{\frac{-n}{2}} R_n(x, y) \end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak yazılabilir. Burada $R_n(x, y)$ polinomu y değişkenine göre n -yinci derecedendir.

(3.35) formülü (3.34) denkleminde göz önünde tutulursa,

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right) R_n(x, y) (x)^{\frac{-n}{2}} R_m(x, y) (x)^{\frac{-m}{2}} \frac{dy}{\sqrt{x}} = \delta_{nm}$$

olup (3.34) denklemi

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right) R_n(x, y) R_m(x, y) dy = (x)^{\frac{n+m+1}{2}} \delta_{nm} \quad (3.36)$$

formuna indirgenir. Benzer şekilde $\{Q_n(x; m)\}$ polinomlarında, $0 < a \leq \infty$ aralığında

$$h_2(x) x^{m+\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olsun. Yani,

$$\int_0^a h_2(x) x^{m+\frac{1}{2}} Q_n(x; m) Q_s(x; m) dx = \delta_{ns} \quad (3.38)$$

eşitliği gerçeklensin. Buradan $Q_n(x; m)$ ve $R_m(x, y)$ polinomları ile tanımlanan iki değişkenli

$$F_{n+m,m}(x, y) = Q_n(x; m) R_m(x, y); \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3.39)$$

polinom ailesi ele alınabilir. Bu polinomlar,

$$G = \{(x, y) : y^2 < x < a\} \quad (3.40)$$

bölgesinde

$$h(x, y) = h_1 \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right) h_2(x) \quad (3.41)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal bir sistem teşkil eder. Bunu görmek için, (3.36), (3.38), (3.39) ve (3.41) eşitlikleri

$$(F_{n+m,m}(x, y), F_{k+s,s}(x, y)) = \iint_G h(x, y) F_{n+m,m}(x, y) F_{k+s,s}(x, y) dx dy$$

iç çarpımında göz önünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
& \iint_G h(x, y) F_{n+m, m}(x, y) F_{k+s, s}(x, y) dx dy \\
&= \iint_G h_1\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) h_2(x) Q_n(x; m) R_m(x, y) Q_k(x; s) R_s(x, y) dx dy \\
&= \int_0^a h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; s) \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} h_1\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) R_m(x, y) R_s(x, y) dy \right] dx \\
&= \delta_{ms} \int_0^a x^{\frac{m+s+1}{2}} h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; s) dx \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq s \\ \int_0^a x^{m+\frac{1}{2}} h_2(x) Q_n(x; m) Q_k(x; s) dx, & m = s \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq s \\ \delta_{nk}, & m = s \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & (n, m) \neq (k, s) \\ 1, & (n, m) = (k, s) \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.39) polinomlarının, (3.40) bölgesinde (3.41) ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallik koşulunu gerçeklediği görülür.

4. (3.21) integralinde $0 < x < 1$ koşulu altında x ler sabit tutularak,

$$t = \frac{y}{1-x} \quad (3.42)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, (3.21) integrali

$$\int_{-(1-x)}^{1-x} h_1\left(\frac{y}{1-x}\right) P_n\left(\frac{y}{1-x}\right) P_m\left(\frac{y}{1-x}\right) \frac{dy}{1-x} = \delta_{nm} \quad (3.43)$$

formuna indirgenir.

(3.24) eşitliğinde (3.42) formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
P_n \left(\frac{y}{1-x} \right) &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{y}{1-x} \right)^k \\
&= (1-x)^{-n} \sum_{k=0}^n a_k y^k (1-x)^{n-k} \\
&= (1-x)^{-n} R_n(x, y)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Burada $R_n(x, y)$ polinomu, $h_1(t)$ ağırlık fonksiyonu çift olmasa bile n -yinci dereceden cebirsel bir polinomdur. (3.44) eşitliği (3.43) de dikkate alınırsa

$$\int_{-(1-x)}^{1-x} h_1 \left(\frac{y}{1-x} \right) R_n(x, y) (1-x)^{-n} R_m(x, y) (1-x)^{-m} \frac{dy}{1-x} = \delta_{nm}$$

olup

$$\int_{-(1-x)}^{1-x} h_1 \left(\frac{y}{1-x} \right) R_n(x, y) R_m(x, y) dy = (1-x)^{m+n+1} \delta_{nm} \tag{3.45}$$

olarak elde edilir. Diğer yandan $\{Q_n(x; m)\}$ polinomları da $(0, 1)$ aralığında

$$h_2(x) (1-x)^{2m+1}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_0^1 h_2(x) (1-x)^{2m+1} Q_n(x; m) Q_s(x; m) dx = \delta_{ns} \tag{3.46}$$

koşulunu gerçekleyen ortonormal polinom ailesi olsun. Buradan, $Q_n(x; m)$ ve $R_m(x, y)$ polinomları yardımıyla tanımlanan iki değişkenli

$$F_{n+m,m}(x, y) = Q_n(x; m) R_m(x, y); \quad m, n = 0, 1, \dots \tag{3.47}$$

polinom ailesi

$$G = \{(x, y) : - (1 - x) < y < 1 - x, \quad 0 < x < 1\} \quad (3.48)$$

bölgesinde

$$h(x, y) = h_1\left(\frac{y}{1-x}\right) h_2(x) \quad (3.49)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallik koşulunu sağlayacaktır. Bunun gerçekleştiği (3.45), (3.46), (3.47) ve (3.49) eşitlikleri yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

3.3 Bir Bölgedeki Ağırlık Fonksiyonunun Momentleri

Kısım 2.2 ve Kısım 2.3 de, ağırlık fonksiyonunun momentleri yardımıyla determinant formunda ortonormal polinomlar elde etmiştik. Yani, ağırlık fonksiyonunun momentlerinin bilinmesi durumunda, ortogonallik bölgesinde sonlu sayıda ortogonal polinomun bulunabileceğini göstermiştik. Bu bölümde ise ağırlık fonksiyonunun bütün momentlerinin açıkça hesaplanabildiği ya da bilinen eşitliklerle gösterilebildiği farklı durumlar ele alınacaktır.

G bölgesinde tanımlanan ağırlık fonksiyonu $h(x, y)$ olsun. $h(x, y)$ nin momentleri,

$$h_{nk} = \iint_G h(x, y) x^{n-k} y^k dx dy; \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots$$

formülü ile belirlenir (Jackson 1936). Burada n yerine $n + k$ alınırsa bu integral

$$h_{n+k,k} = \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy; \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (3.50)$$

formuna dönüştür. Şimdi de bu integralin hesaplanabildiği bazı örnekleri ele alalım.

1. $G = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^p\}, \quad p \geq 0$ bölgesini ele alalım. Burada bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta; \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1 \quad (3.51)$$

olarak tanımlansın. $h(x, y) = x^\alpha y^\beta$ fonksiyonu G bölgesinde negatif olmayan bir fonksiyondur.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^p} x^\alpha y^\beta dy dx \\ &= \frac{1}{\beta + 1} \int_0^1 x^{\alpha + p(\beta + 1)} dx \\ &= \frac{1}{(\beta + 1)(\alpha + 1 + (\beta + 1))} \end{aligned}$$

olup bu integralin

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulunu sağlaması için $\alpha > -1$, $\beta > -1$ olmalıdır. Bu durumda Tanım 2.1.2 den dolayı $h(x, y)$, G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonudur. (3.50) formülünden,

$$\begin{aligned} h_{n+k,k} &= \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy \\ &= \iint_G x^\alpha y^\beta x^n y^k dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^p} x^{\alpha+n} y^{\beta+k} dy dx \\ &= \frac{1}{\beta + k + 1} \int_0^1 x^{\alpha+n+p(\beta+k+1)} dx \\ &= \frac{1}{(\beta + k + 1)(\alpha + n + 1 + p(\beta + k + 1))} \end{aligned}$$

olup $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonunun momentleri elde edilir.

2. Sınırlı olmayan bir

$$G = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < e^{-x}\}$$

bölgesinde aynı (3.51) ağırlık fonksiyonunu ele alalım. $h(x, y)$ G de negatif olmayan bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_0^{e^{-x}} x^\alpha y^\beta dy dx \\ &= \frac{1}{\beta + 1} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x(\beta+1)} dx \end{aligned} \quad (3.52)$$

integralinde $x(\beta + 1) = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve Gamma fonksiyonu kullanılırsa, (3.52) integrali

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_0^{e^{-x}} x^\alpha y^\beta dy dx \\ &= \frac{1}{(\beta + 1)^{\alpha+2}} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\beta + 1)^{\alpha+2}} \end{aligned}$$

formuna indirgenir. Bu integralin sonlu ve sıfırdan büyük olabilmesi için,

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu koşul altında, (3.50) formülünden bu fonksiyonun momentleri

$$\begin{aligned} h_{n+k,k} &= \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{e^{-x}} x^\alpha y^\beta x^n y^k dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-x}} x^{\alpha+n} y^{\beta+k} dy dx \\
&= \frac{1}{\beta+k+1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+n} e^{-x(\beta+k+1)} dx
\end{aligned}$$

olup burada $x(\beta+k+1) = t$ dönüşümü yapılır ve gamma fonksiyonundan yararlanılırsa

$$h_{n+k,k} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\beta+k+1)^{n+\alpha+2}}; \quad n, k = 0, 1, \dots$$

olarak bulunur. Elde edilen bu momentler sonlu olup, Tanım 2.1.2 den dolayı $h(x, y)$ G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

3. $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ bölgesini ele alalım. Burada bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} (1 - x^2 - y^2)^p; \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad p > -1$$

olarak tanımlansın. $h(x, y)$ fonksiyonu G bölgesinde negatif olmayan bir fonksiyondur. Yine,

$$\iint_G h(x, y) dx dy = \iint_G x^{\alpha} y^{\beta} (1 - x^2 - y^2)^p dx dy$$

integralinde

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

kutupsal koordinatları kullanılıp Beta fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\iint_G x^{\alpha} y^{\beta} (1 - x^2 - y^2)^p dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{\alpha+\beta+1} (\cos \phi)^{\alpha} (\sin \phi)^{\beta} (1 - \rho^2)^p d\phi d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \rho^{\alpha+\beta+1} (1-\rho^2)^p \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^\alpha (\sin \phi)^\beta d\phi \right] d\rho \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)} \int_0^1 \rho^{\alpha+\beta+1} (1-\rho^2)^p d\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\rho^2 = t$ dönüşümü yapıp elde edilen integralde tekrar Beta fonksiyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\iint_G x^\alpha y^\beta (1-x^2-y^2)^p dx dy \\
&= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha+\beta+4}{2}\right)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu sonucun sıfırdan büyük ve sonlu olabilmesi için

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad p > -1$$

gerçeklenmelidir. Böylece $h(x, y)$ fonksiyonunun G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu olduğu görülür. (3.50) den bu ağırlık fonksiyonunun $h_{n+k,k}$ momentleri, Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
h_{n+k,k} &= \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy \\
&= \iint_G x^{\alpha+n} y^{\beta+k} (1-x^2-y^2)^p dx dy \\
&= \int_0^1 \rho^{n+k+\alpha+\beta+1} (1-\rho^2)^p \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{\alpha+n} (\sin \phi)^{\beta+k} d\phi \right] d\rho \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+\beta+k}{2} + 1\right)} \int_0^1 \rho^{n+k+\alpha+\beta+1} (1-\rho^2)^p d\rho, \quad \rho^2 = u \\
&= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{2}\right) \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n+\beta+k}{2} + p + 2\right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4. $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ üçgensel bölgesini ele alalım. Bu bölgede bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta (1 - x - y)^\gamma; \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad \gamma > -1 \quad (3.53)$$

olsun. $h(x, y)$, G de negatif olmayan bir fonksiyondur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) dx dy &= \iint_G x^\alpha y^\beta (1 - x - y)^\gamma dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^\alpha y^\beta (1 - x - y)^\gamma dy dx \end{aligned}$$

integralinde

$$y = (1 - x)u \quad (3.54)$$

dönüşümü yapılır ve Beta fonksiyonundan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{1-x} x^\alpha y^\beta (1 - x - y)^\gamma dy dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha (1 - x)^{\beta+\gamma+1} \left[\int_0^1 u^\beta (1 - u)^\gamma du \right] dx \\ &= B(\alpha + 1, \beta + \gamma + 2) B(\beta + 1, \gamma + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 3)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu integralin

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulunu gerçeklemesi için $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\gamma > -1$ sağlanmalıdır. Buradan görülmektedir ki $h(x, y)$ fonksiyonu Tanım 2.1.2 yi gerçekler. Dolayısıyla $h(x, y)$, G de bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Şimdi de bu fonksiyonun momentlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
h_{n+k,k} &= \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy \\
&= \iint_G x^{\alpha+n} y^{\beta+k} (1-x-y)^\gamma dx dy \\
&= \int_0^1 x^{\alpha+n} \left[\int_0^{1-x} y^{\beta+k} (1-x-y)^\gamma dy \right] dx
\end{aligned}$$

integralinde (3.54) dönüşümü yapılır ve Beta integralinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
h_{n+k,k} &= \int_0^1 x^{\alpha+n} (1-x)^{\gamma+\beta+k+1} dx \int_0^1 u^{\beta+k} (1-u)^\gamma du \\
&= \frac{B(\alpha+n+1, \beta+\gamma+k+2) B(\beta+k+1, \gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+k+1) \Gamma(\gamma+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+k+1) \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+n+k+3)}
\end{aligned}$$

momentleri elde edilir. (3.53) ağırlık fonksiyonu ile G üçgensel bölgesinde tanımlanan polinomlar Appell polinomları olarak adlandırılır. İleriki bölümde Appell polinomları ayrıca ele alınacaktır.

5. Sınırlı olmayan bir

$$G = \{(x, y) : x^2 < y\}$$

bölgesinde $\alpha > -1$, $\beta > 0$ koşulları altında

$$h(x, y) = (y - x^2)^\alpha e^{-\beta y}$$

fonksiyonu tanımlansın. $h(x, y)$, G de negatif olmayan bir fonksiyondur. Diğer taraftan

$$\iint_G h(x, y) dx dy = \iint_G (y - x^2)^\alpha e^{-\beta y} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y - x^2)^{\alpha} e^{-\beta y} dx dy \\
&= 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \left[\int_0^{\sqrt{y}} (y - x^2)^{\alpha} dx \right] dy
\end{aligned}$$

olup bu integralde $x = u\sqrt{y}$ değişken değiştirmesi yapılrısa

$$\iint_G h(x, y) dx dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \left[\int_0^1 y^{\alpha+\frac{1}{2}} (1 - u^2)^{\alpha} du \right] dy \quad (3.55)$$

elde edilir. (3.55) ifadesi $u^2 = v$ dönüştümlü altında

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} y^{\alpha+\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (1 - v)^{\alpha} v^{-\frac{1}{2}} dv \right] dy$$

formuna indirgenir. Beta ve Gamma fonksiyonlarından

$$\iint_G h(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)}{\beta^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur. Bu değerin sonlu ve sıfırdan büyük olabilmesi için $\alpha > -1$ ve $\beta > 0$ koşulları sağlanmalıdır. Şimdi de (3.50) formülünden yararlanarak $h(x, y)$ -nin momentlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
h_{n+k,k} &= \iint_G h(x, y) x^n y^k dx dy \\
&= \iint_G (y - x^2)^{\alpha} e^{-\beta y} x^n y^k dx dy \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\beta y} y^k \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y - x^2)^{\alpha} x^n dx \right] dy \quad (3.56)
\end{aligned}$$

integralinde n tek ise içerdeki integral sıfır olarak bulunur.

Eğer n çift ise, bu durumda $n = 2m$ için (3.56) integrali

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\beta y} y^k \left[\int_0^{\sqrt{y}} (y - x^2)^{\alpha} x^{2m} dx \right] dy$$

olup buradan $x = \sqrt{uy}$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} y^{m+\alpha+k+\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (1-u)^{\alpha} u^{m-\frac{1}{2}} du \right] dy$$

elde edilir. Gamma ve Beta fonksiyonlarından yararlanılırsa, $h(x, y)$ nin momentleri $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$h_{n+k,k} = \begin{cases} 0, & n = 2m + 1 \\ \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+k+\alpha+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+\alpha+\frac{3}{2})\beta^{m+\alpha+k+\frac{3}{2}}}, & n = 2m \end{cases} ; \quad n, k = 0, 1, \dots$$

dir. $h_{n+k,k}$ lar sonlu olup $h(x, y)$, G de bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

4. KLASİK APPELL ORTOGONAL POLİNOMLARI

4.1 Appell Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Bu bölümde Appell polinomlarının başlıca özellikleri ele alınacaktır. Bu polinomlar Jacobi ortogonal polinomlarının iki değişkenli durumunun bir genişletilmesi olarak düşünülebilir. Üçgensel bir bölge

$$G = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \quad (4.1)$$

olmak üzere bu bölgede tanımlanan ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta} \quad (4.2)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > \alpha + \beta - 1 \quad (4.3)$$

olarak verilsin. İşlemleri daha kolay yapabilmek için

$$p = \gamma - \alpha - \beta > -1 \quad (4.4)$$

gösterimini ve

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) \quad (4.5)$$

Pochhammer sembolünü kullanalım. x ve y değişkenlerine bağlı

$$\begin{aligned} A_{mn}(x, y) &= A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \frac{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}{(\alpha)_n (\beta)_m (1-x-y)^p} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{(1-x-y)^{p+m+n}}{x^{1-n-\alpha} y^{1-m-\beta}} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Göstermeliyiz ki negatif olmayan m ve n tamsayıları için bu fonksiyon x ve y değişkenlerinin bir polinomudur. İki fonksiyonun çarpımlarının yüksek mertebeden türevleri, Leibnitz formülünden dolayı

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. (4.6) eşitliğinde x değişkenine göre n -yinci mertebeden kısmi türev alırken (4.7) formülü uygulanır ve (4.5) gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial x^n} [x^{\alpha+n-1} (1-x-y)^{p+m+n}] \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^{\alpha+n-1})^{(n-k)} [(1-x-y)^{p+m+n}]^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\dots(\alpha+n-n+k) x^{\alpha+k-1} \\ & \quad \times (p+n+m)(p+n+m-1)\dots(p+n+m-k+1) \\ & \quad \times (1-x-y)^{p+m+n-k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (p+n+m-k+1)_k \\ & \quad \times (-1)^k x^{\alpha+k-1} (1-x-y)^{p+m+n-k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) toplamı (4.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} [(1-x-y)^{p+m+n} x^{\alpha+n-1} y^{\beta+m-1}] \\ &= \frac{\partial^m}{\partial y^m} \left\{ \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x^n} [x^{\alpha+n-1} (1-x-y)^{p+m+n}] \right\} y^{\beta+m-1} \right\} \\ &= \frac{\partial^m}{\partial y^m} \left\{ y^{\beta+m-1} \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (p+n+m-k+1)_k \right. \\ & \quad \left. \times (-1)^k x^{\alpha+k-1} (1-x-y)^{p+m+n-k} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (p+n+m-k+1)_k (-1)^k x^{\alpha+k-1} \\ & \quad \times \frac{\partial^m}{\partial y^m} [y^{\beta+m-1} (1-x-y)^{p+m+n-k}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitliği gerçekleşir.

(4.7) formülü kullanılarak (4.9) da y -ye göre m -yinci mertebeden kısmi türev alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^m}{\partial y^m} \left[y^{\beta+m-1} (1-x-y)^{p+m+n-k} \right] \\
&= \sum_{s=0}^m C_m^s (y^{\beta+m-1})^{(m-s)} \left[(1-x-y)^{p+m+n-k} \right]^{(s)} \\
&= \sum_{s=0}^m C_m^s (\beta+m-1)(\beta+m-2) \dots (\beta+s) y^{\beta+s-1} \\
&\quad \times (-1)^s (p+n+m-k)(p+n+m-k-1) \dots (p+n+m-k-s+1) \\
&\quad \times (1-x-y)^{p+m+n-k-s} \\
&= \sum_{s=0}^m (-1)^s C_m^s (\beta+s)_{(m-s)} (p+n+m-k-s+1)_s y^{\beta+s-1} (1-x-y)^{p+m+n-k-s}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. Bu değer (4.9) da dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[(1-x-y)^{p+m+n} x^{\alpha+n-1} y^{\beta+m-1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m (-1)^{k+s} C_m^s C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (\beta+s)_{(m-s)} (p+n+m-k+1)_k \\
&\quad \times (p+n+m-k-s+1)_s x^{\alpha+k-1} y^{\beta+s-1} (1-x-y)^{p+m+n-k-s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (4.6) formülünde göz önünde bulundurulursa $A_{mn}(x, y)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y) &= \frac{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}{(\alpha)_n (\beta)_m (1-x-y)^p} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m C_m^s C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (\beta+s)_{m-s} \\
&\quad \times (-1)^{k+s} (p+n+m-k+1)_k (p+n+m-k-s+1)_s \\
&\quad \times x^{\alpha+k-1} y^{\beta+s-1} (1-x-y)^{p+m+n-k-s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y) &= \frac{1}{(\alpha)_n (\beta)_m} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m (-1)^{k+s} C_m^s C_n^k (\alpha+k)_{n-k} x^k y^s \\
&\quad \times (\beta+s)_{m-s} (p+n+m-k+1)_k \\
&\quad \times (p+n+m-k-s+1) (1-x-y)^{m+n-k-s} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

şekline indirgenir. Böylece görülür ki (4.6) ile verilen $A_{mn}(x, y)$ fonksiyonu x ve y ye göre bir polinomdur. Bu polinomlar Appell polinomları olarak adlandırılırlar. (4.6) formülü ise bu polinomlar için Rodrigues formülü adını alır. (4.11) formülü gösterir ki, Appell polinomlarının x ve y ye göre toplam derecesi $(n + m)$ dir. Şimdi de elde edilen (4.11) polinomunun katsayılarını yeniden düzenleyelim.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!}$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^k (-n)_k$$

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)$$

$$C_m^s = \binom{m}{s} = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} (-1)^s (-m)_s$$

$$\begin{aligned} & (p+n+m-k-s+1)_s (p+n+m-k+1)_k \\ = & (p+n+m-k-s+1)(p+n+m-k-s+2)\dots(p+n+m-k) \\ & \times (p+n+m-k+1)(p+n+m-k+2)\dots(p+n+m) \\ = & (p+n+m-k-s+1)_{k+s} \\ = & (-n-m-p+k+s-1)(-n-m-p+k+s-2)\dots(-n-m-p+k) \\ & \times (-n-m-p+k-1)(-n-m-p+k-2)\dots(-n-m-p)(-1)^{k+s} \\ = & (-1)^{k+s} (-n-m-p)_{k+s} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler dikkate alınrsa (4.11) formülündeki katsayılar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\alpha)_n (\beta)_m} (-1)^{k+s} C_m^s C_n^k (\alpha+k)_{n-k} (p+n+m-k+1)_k \\ & \times (p+n+m-k-s+1)_s (\beta+s)_{m-s} \\ = & \frac{1}{k!s! (\alpha)_n (\beta)_m} (-1)^{k+s} (-n)_k (-m)_s (-n-m-p)_{k+s} (\alpha+k)_{n-k} (\beta+s)_{m-s} \end{aligned} \quad (4.12)$$

formuna indirgenir. (4.5) notasyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha + k)_{n-k}}{(\alpha)_n} &= \frac{(\alpha + k)(\alpha + k + 1) \dots (\alpha + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)} \\
&= \frac{(\alpha + k)(\alpha + k + 1) \dots (\alpha + n - 1)}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1)(\alpha + k)(\alpha + k + 1) \dots (\alpha + n - 1)} \\
&= \frac{1}{(\alpha)_k}
\end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{(\beta + s)_{m-s}}{(\beta)_m} &= \frac{(\beta + s)(\beta + s + 1) \dots (\beta + s + m - s - 1)}{\beta(\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + s - 1)(\beta + s) \dots (\beta + m - 1)} \\
&= \frac{1}{(\beta)_s}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu son iki eşitlik (4.12) de kullanılırsa (4.12) ifadesi

$$\frac{(-1)^{k+s} (-n)_k (-m)_s (-n - m - p)_{k+s}}{k!s! (\alpha)_k (\beta)_s} = B_{ks}(n, m, p, \alpha, \beta) \quad (4.13)$$

şeklini alır. Bu açılımın (4.11) de yerine yazılmasıyla Appell polinomları

$$A_{mn}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m B_{ks}(n, m, p, \alpha, \beta) x^k y^s (1 - x - y)^{m+n-k-s} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. (4.14) ün düzenlenmesiyle bu polinomlar için bir başka eşitlik de

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^{k+s} (-n)_k (-m)_s (-n - m - p)_{k+s}}{k!s! (\alpha)_k (\beta)_s} x^k y^s (1 - x - y)^{m+n-k-s} \\
&= (1 - x - y)^{m+n} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m \frac{(-n)_k (-m)_s (-n - m - p)_{k+s}}{k!s! (\alpha)_k (\beta)_s} \\
&\quad \times \left(\frac{x}{x + y - 1} \right)^k \left(\frac{y}{x + y - 1} \right)^s \quad (4.15)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi de (4.6) Rodrigues formülünden yararlanarak Appell polinomlarının birkaçını hesaplayalım. (4.6) da m ve n ye değerler verilirse,

$n = m = 0$ için

$$A_{00}(x, y) = 1$$

$n = 1, m = 0$ için

$$\begin{aligned} A_{10}(x, y) &= \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{(\alpha)_1(\beta)_0(1-x-y)^p} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-x-y)^{p+1}}{x^{-\alpha}y^{1-\beta}} \right] \\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha(1-x-y)^p} [\alpha x^{\alpha-1}(1-x-y)^{p+1} - (p+1)(1-x-y)^p x^\alpha] \\ &= 1 - x - y - \frac{(p+1)}{\alpha} x \end{aligned}$$

$n = 0, m = 1$ için

$$\begin{aligned} A_{01}(x, y) &= \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{(\alpha)_0(\beta)_1(1-x-y)^p} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1-x-y)^{p+1}}{x^{1-\alpha}y^{-\beta}} \right] \\ &= \frac{y^{1-\beta}}{\beta(1-x-y)^p} [\beta y^{\beta-1}(1-x-y)^{p+1} - (p+1)(1-x-y)^p y^\beta] \\ &= 1 - x - y - (p+1) \frac{y}{\beta} \end{aligned}$$

$n = 1, m = 1$ için

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y) &= \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{(\alpha)_1(\beta)_1(1-x-y)^p} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [x^\alpha y^\beta (1-x-y)^{p+2}] \\ &= \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{\alpha\beta(1-x-y)^p} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha \left(\begin{array}{c} \beta y^{\beta-1}(1-x-y)^{p+2} \\ -y^\beta(p+2)(1-x-y)^{p+1} \end{array} \right) \right] \\ &= \frac{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{\alpha\beta(1-x-y)^p} \frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{array}{c} x^\alpha \beta y^{\beta-1}(1-x-y)^{p+2} \\ -x^\alpha y^\beta(p+2)(1-x-y)^{p+1} \end{array} \right] \\ &= \frac{1-x-y}{\alpha\beta} [\alpha\beta(1-x-y) - \beta(p+2)x - \alpha(p+2)y] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha\beta} (p+1)(p+2)xy \end{aligned}$$

polinomları elde edilir.

Benzer şekilde $A_{20}(x, y)$, $A_{02}(x, y)$ ve diğer polinomlarda hesaplanabilir. Bu polinomlar (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden yararlanılarakta bulunabilir.

Appell polinomlarını aşağıdaki gibi tablo halinde gösterebiliriz.

$$\left. \begin{array}{l} A_{00}(x, y) \\ A_{10}(x, y), A_{01}(x, y) \\ A_{20}(x, y), A_{11}(x, y), A_{02}(x, y) \\ \dots \\ A_{n0}(x, y), A_{n-1,1}(x, y), \dots, A_{0n}(x, y) \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Her bir gruptaki Appell polinomları aynı derecedendir. Ayrıca (4.16) tablosunun keyfi satırındaki bütün polinomlar, her bir değişkene göre aynı dereceden olup toplamda da aynı dereceye sahiptirler. Şimdi Appell polinomlarının ortogonalite özelliklerini (4.3) koşulları altında (4.2) ağırlık fonksiyonuna göre (4.1) bölgesi üzerinde inceleyelim. Göstermeliyiz ki $A_{mn}(x, y)$ Appell polinomları, toplam derecesi $N < n + m$ olan $P_N(x, y)$ polinomlarına ortogondur. (4.6) Rodrigues formülü nedeniyle (4.4) notasyonunu göz önüne alarak;

$$\begin{aligned} (P_N; A_{mn}) &= \iint_G h(x, y) P_N(x, y) A_{mn}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{(\alpha)_n (\beta)_m} \iint_G P_N(x, y) \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{(1-x-y)^{p+m+n}}{x^{1-n-\alpha} y^{1-m-\beta}} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadesini elde ederiz. (4.17) deki integral iki katlı integraller için bilinen Green teoremi yardımıyla hesaplanabilir. Aşağıdaki lemma bu integrallerin hesaplanmasında işimize yarayacaktır.

Lemma 4.1.1: Parçalı düzgün bir Γ eğrisi ile sınırlanan basit irtibatlı bir bölge G olsun. $f(x, y)$ ve $F(x, y)$, G bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. $F(x, y)$ ve $f(x, y)$ den herhangi biri için fonksiyonun $(m+n)$ -yinci basamaktan son karma türevi hariç kendisi ve diğer bütün türevleri Γ eğrisi üzerinde sıfır değerini alıyorsa, o takdirde

$$\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy = (-1)^n (-1)^m \iint_G F(x, y) \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy \quad (4.18)$$

dir.

İspat: Lemmanın ispatı için tümevarım yöntemini kullanalım. (4.18) eşitliğinin sol yanında $m = 0$, $n = 1$ alınır ve Leibnitz teoremi kullanılırsa, sol yanın eşiti olarak

$$\iint_G f(x, y) F_x(x, y) dx dy = \iint_G \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{x_0}^x f(t, y) F_t(t, y) dt \right] dx dy$$

elde edilir. Burada

$$f(t, y) = u$$

$$F_t(t, y) dt = dv$$

olarak bir kez kısmi integrasyon uygulanır ve türevler için Leibnitz teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \iint_G \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{x_0}^x f(t, y) F_t(t, y) dt \right] dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial x} \left[f(t, y) F(t, y) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f_t(t, y) F(t, y) dt \right] dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) F(x, y) - \int_{x_0}^x f_t(t, y) F(t, y) dt \right] dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) F(x, y)] dx dy - \iint_G f_x(x, y) F(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4.19)$$

olduğu görülür.

Green teoreminden dolayı

$$\iint_G \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) F(x, y)] dx dy = \int_{\Gamma} f(x, y) F(x, y) dy$$

olup bu eşitlik (4.19) da dikkate alınırsa,

$$\iint_G f(x, y) F_x(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} f(x, y) F(x, y) dy - \iint_G f_x(x, y) F(x, y) dx dy \quad (4.20)$$

elde edilir. Γ eğrisi üzerinde $F(x, y) = 0$ (veya $f(x, y) = 0$) sağlanırsa (4.20) integrali

$$\iint_G f(x, y) F_x(x, y) dx dy = - \iint_G f_x(x, y) F(x, y) dx dy$$

formuna indirgenir. Böylece (4.18) eşitliği $m = 0$, $n = 1$ için gerçekleşir. Benzer şekilde (4.18) eşitliğinin sol yanında $m = 1$, $n = 0$ durumu için bir kez kısmi integrasyon alınır ve türevler için Leibnitz teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) F_y(x, y) dx dy &= \iint_G \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{y_0}^y f(x, t) F_t(x, t) dt \right] dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial y} \left[f(x, t) F(x, t) \Big|_{y_0}^y - \int_{y_0}^y f_t(x, t) F(x, t) dt \right] dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) F(x, y)] dx dy - \iint_G f_y(x, y) F(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Green teoreminden,

$$\iint_G \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) F(x, y)] dx dy = - \int_{\Gamma} f(x, y) F(x, y) dx$$

olup bu eşitlik (4.21) de göz önünde tutulursa,

$$\iint_G f(x, y) F_y(x, y) dx dy = - \int_{\Gamma} f(x, y) F(x, y) dx - \iint_G f_y(x, y) F(x, y) dx dy \quad (4.22)$$

olduğu görülmür. Burada Γ eğrisi üzerinde $F(x, y) = 0$ (veya $f(x, y) = 0$) ifadesi gerçekleşirse

$$\iint_G f(x, y) F_y(x, y) dx dy = - \iint_G f_y(x, y) F(x, y) dx dy$$

elde edilmiş olur. Bu ise $m = 1, n = 0$ için (4.18) in sağlandığını gösterir.

Şimdi, tümevarım gereğince

$$\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx dy = (-1)^{n-1+m} \iint_G F(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx dy$$

olduğunu kabul ederek,

$$\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy = (-1)^n (-1)^m \iint_G F(x, y) \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy$$

olduğunu göstermeliyiz. (4.20) formülünden,

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy &= \int_{\Gamma} f(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dy \\ &\quad - \iint_G f_x(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx dy \end{aligned}$$

dir. Γ eğrisi üzerinde $\frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} = 0$ (veya $f(x, y) = 0$) ise

$$\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy = - \iint_G f_x(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx dy \quad (4.23)$$

olur. Burada n ve m tamsayılarından en az biri sıfırdan farklı ve $n + m \geq 1$ dir.

(4.23) eşitliğine tekrar (4.20) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy &= - \int_{\Gamma} f_x(x, y) \frac{\partial^{n-2+m} F(x, y)}{\partial x^{n-2} \partial y^m} dy \\ &+ \iint_G f_{xx}(x, y) \frac{\partial^{n-2+m} f(x, y)}{\partial x^{n-2} \partial y^m} dx dy \end{aligned}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek

$$\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy = (-1)^n (-1)^m \iint_G F(x, y) \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilmiş ve Lemma ispatlanmış olur.

Şimdi $\{A_{mn}(x, y)\}$ Appell polinomlarının (4.1) bölgesinde (4.2) ağırlık fonksiyonuna göre toplam dereceleri $N < n + m$ olan her bir $P_N(x, y)$ polinomuna ortogonal olduğunu gösterelim.

(4.6) Rodrigues formülünden

$$\begin{aligned} (P_N(x, y); A_{mn}(x, y)) &= \iint_G h(x, y) P_N(x, y) A_{mn}(x, y) dx dy \\ &= \iint_G h(x, y) P_N(x, y) \frac{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}{(\alpha)_n (\beta)_m (1-x-y)^p} \\ &\quad \times \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{(1-x-y)^{p+m+n}}{x^{1-n-\alpha} y^{1-m-\beta}} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.24)$$

olarak yazılabilir.

G bölgesinin sınırı

$$\Gamma : x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

eğrisi olup $n \geq 1$ için (4.20) den

$$\begin{aligned}
\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy &= \int_{\Gamma} f(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dy \\
&\quad - \iint_G f_x(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} f(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx dy
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitliği gerçekleşir. Burada

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= (1 - x - y)^{p+m+n} x^{n+\alpha-1} y^{m+\beta-1} \\
f(x, y) &= P_N(x, y)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m x^{\alpha+k} y^{\beta+s-1} (1 - x - y)^{p+m+n-k-s} (\beta + s)_{m-s} \\
&\quad \times (p + n + m - s - k + 1)_k (p + n + m - s + 1)_s \\
&\quad \times (\alpha + k + 1)_{n-k-1} C_m^s C_{n-1}^k (-1)^{k+s}
\end{aligned}$$

fonksiyonu $\alpha > 0$ ve $p > -1$ koşulları altında $x = 0$ doğrusu ve $x + y = 1$ doğrusu üzerinde sıfır değerini alır. Diğer yandan y eksenini üzerinde $dy = 0$ olduğundan (4.25) deki eğrisel integral sıfıra eşittir. Benzer şekilde $m \geq 1$ için (4.22) den

$$\begin{aligned}
&\iint_G f(x, y) \frac{\partial^{n+m} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx dy \\
&= - \int_{\Gamma} f(x, y) \frac{\partial^{n-1+m} F(x, y)}{\partial x^{n-1} \partial y^m} dx - \iint_G f_y(x, y) \frac{\partial^{n+m-1} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^{m-1}} dx dy
\end{aligned} \tag{4.27}$$

eşitliği sağlanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+m-1} F(x, y)}{\partial x^n \partial y^{m-1}} &= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{m-1} x^{\alpha+k-1} y^{\beta+s} (1-x-y)^{p+m+n-k-s} (\beta+s+1)_{m-s-1} \\
&\times (p+n+m-k+1)_k (p+n+m-s-k+1)_s \\
&\times (\alpha+k)_{n-k} C_{m-1}^s C_n^k (-1)^{k+s}
\end{aligned}$$

fonksiyonu $\beta > 0$ ve $p > -1$ koşulları altında $y = 0$ doğrusu ve $x + y = 1$ doğrusu üzerinde sıfır değerini alır. Diğer yandan x ekseninde $dx = 0$ olduğundan (4.27) deki eğrisel integral sıfır olur. Ardışık olarak (4.20) ve (4.22) formülleri uygulanırsa lemmanın sağlandığı görülür. Böylece lemmadan (4.24) eşitliği

$$(P_N, A_{mn}) = \frac{(-1)^{m+n}}{(\alpha)_n (\beta)_m} \iint_G F(x, y) \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} P_N(x, y) dx dy$$

şekline indirgenir. $P_N(x, y)$ polinomu

$$x^k y^s, \quad k + s \leq N$$

formunda monomialleri içeren bir polinom olduğundan $k + s < n + m$ için

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} P_N(x, y) = 0$$

gerçeklenir. Böylece $N < n + m$ için

$$(P_N, A_{mn}) = 0 \tag{4.28}$$

sağlanır. O halde $A_{mn}(x, y)$ polinomu düşük dereceli her $A_{ks}(x, y)$, $k + s < n + m$ polinomuna ortogonaldır. $k + s = n + m$ durumunda (4.28) in sağlanması gerekmez. Yani aynı dereceden Appell polinomları ortogonal olmak zorunda değildir.

4.2 Appell Polinomlarının İki Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonlar Cinsinden İfadesi

Bir değişkenli hipergeometrik fonksiyon, $F(a, b; \alpha; x)$ ile ifade edilir ve

$$F(a, b; \alpha; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(\alpha)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < 1 \quad (4.29)$$

kuvvet serisinin toplamı olarak tanımlanır.

Lemma 4.2.1. (4.29) hipergeometrik fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F(a, b; \alpha; x) &= \frac{1}{(1-x)^b} F\left(\alpha - a, b; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) \\ F(a, b; \alpha; x) &= \frac{1}{(1-x)^a} F\left(a, \alpha - b; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) \\ F(a, b; \alpha; x) &= (1-x)^{\alpha-a-b} F(\alpha - a, \alpha - b; \alpha; x) \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat: Binom açılımından

$$(1-x)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} (b)_n \frac{x^n}{n!} \quad (4.31)$$

gerçeklenir. (4.29) ve (4.31) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^b} F\left(\alpha - a, b; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha - a)_k (b)_k}{(\alpha)_k} \frac{(-1)^k x^k}{(1-x)^{k+b}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha - a)_k (b)_k (b+k)_n}{(\alpha)_k} \frac{(-1)^k}{k!n!} x^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha - a)_k (b)_{n+k}}{(\alpha)_k} \frac{(-1)^k}{k!n!} x^{n+k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada n yerine $n - k$ indis değiştirmesi yapılıp elde edilen ifadede

$$\frac{(-1)^k}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k}{n!} \quad k > n \text{ ise } (-n)_k = 0$$

özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^b} F\left(\alpha - a, b; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha - a)_k (b)_n (-n)_k}{(\alpha)_k k! n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\alpha - a)_k (1)^k}{(\alpha)_k k!} \right] (b)_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (\alpha - a)_k (1)^k}{(\alpha)_k k!} \right] (b)_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F(-n, \alpha - a; \alpha; 1) (b)_n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen son eşitlikte

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \quad (\text{Rainville 1965})$$

özelliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^b} F\left(\alpha - a, b; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} F(-n, \alpha - a; \alpha; 1) (b)_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(\alpha)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= F(a, b; \alpha; x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer iki eşitliğinde sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

İki değişkenli hipergeometrik fonksiyon, $F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y)$ ile ifade edilir ve

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_s (c)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s} \frac{x^k y^s}{k! s!}, \quad |x| + |y| < 1 \quad (4.32)$$

eşitliğiyle tanımlanır. a, b, c, α, β reel parametrelerini içeren bu fonksiyon "Hiper-geometrik Appell fonksiyonu" olarak adlandırılır.

Şimdi bu iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonu ele alalım.

Lemma 4.2.2. (4.29) hipergeometrik fonksiyonu ile (4.32) Appell fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(a, c+s; \alpha; x) y^s \quad (4.33)$$

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(b, c+k; \beta; y) x^k \quad (4.34)$$

İspat:

$$\begin{aligned} (c)_{k+s} &= c(c+1) \dots (c+s-1)(c+s) \dots (c+s+k-1) \\ &= (c)_s (c+s)_k \end{aligned}$$

eşitliği kullanılırsa (4.4) ifadesi

$$\begin{aligned} F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_s (c)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s} \frac{x^k y^s}{k! s!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c+s)_k}{(\alpha)_k} \frac{x^k}{k!} \right] y^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(a, c+s; \alpha; x) y^s \end{aligned}$$

formuna indirgenir. Benzer şekilde (4.4) de

$$\begin{aligned} (c)_{k+s} &= c(c+1) \dots (c+k-1)(c+k) \dots (c+k+s-1) \\ &= (c)_k (c+k)_s \end{aligned}$$

eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_s (c)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s} \frac{x^k y^s}{k! s!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c+k)_s}{(\beta)_s} \frac{y^s}{s!} \right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(b, c+k; \beta; y) x^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 4.2.3. (4.32) Appell hipergeometrik fonksiyonu için

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \frac{1}{(1-x)^c} F_2(\alpha - a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}) \quad (4.35)$$

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \frac{1}{(1-y)^c} F_2(a, \beta - b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}) \quad (4.36)$$

$$F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^c} F_2(\alpha - a, \beta - b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}) \quad (4.37)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.30) ve (4.33) den

$$\begin{aligned}
F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(a, c+s; \alpha; x) y^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} \frac{1}{(1-x)^{c+s}} F\left(\alpha - a, c+s; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) y^s \\
&= \frac{1}{(1-x)^c} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F\left(\alpha - a, c+s; \alpha; \frac{x}{x-1}\right) \left(\frac{y}{1-x}\right)^s \\
&= \frac{1}{(1-x)^c} F_2(\alpha - a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ki bu ise (4.35) yi gerçeğe çıkarır.

Benzer şekilde (4.30) ve (4.34) den

$$\begin{aligned}
F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(b, c+k; \beta; y) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} \frac{1}{(1-y)^{c+k}} F(\beta-b, c+k; \beta; \frac{y}{y-1}) x^k \\
&= \frac{1}{(1-y)^c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c)_k}{(\alpha)_k k!} F(\beta-b, c+k; \beta; \frac{y}{y-1}) \left(\frac{x}{1-y} \right)^k \\
&= \frac{1}{(1-y)^c} F_2(a, \beta-b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1})
\end{aligned}$$

olup (4.36) sağlanır. (4.35) eşitliğinin sağ tarafındaki hipergeometrik fonksiyona (4.36) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&F_2(\alpha-a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}) \\
&= \frac{1}{(1-\frac{y}{1-x})^c} F_2(\alpha-a, \beta-b, c; \alpha, \beta; \frac{\frac{x}{x-1}}{1-\frac{y}{1-x}}, \frac{\frac{y}{1-x}}{\frac{y}{1-x}-1}) \\
&= \frac{(1-x)^c}{(1-x-y)^c} F_2(\alpha-a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu eşitlik (4.35) nin sağ tarafında göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y) &= \frac{1}{(1-x)^c} F_2(\alpha-a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}) \\
&= \frac{1}{(1-x-y)^c} F_2(\alpha-a, \beta-b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1})
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece (4.37) unda sağlandığı görülür.

Teorem 4.2.1. $A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$ Appell polinomları, iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) &= (1-x-y)^{m+n} F_2(-n, -m, -n-m-p; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}) \\
&= (1-x-y)^{-p} F_2(\alpha+n, \beta+m, -n-m-p; \alpha, \beta; x, y)
\end{aligned}$$

açılımına sahiptir. Burada $p = \gamma - \alpha - \beta$ dır.

İspat: (4.37) da $a \rightarrow \alpha - a$, $b \rightarrow \beta - b$ indis değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} & F_2(\alpha - a, \beta - b, c; \alpha, \beta; x, y) \\ = & \frac{1}{(1 - x - y)^c} F_2(a, b, c; \alpha, \beta; \frac{x}{x + y - 1}, \frac{y}{x + y - 1}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

olarak bulunur. (4.32) Appell hipergeometrik fonksiyonunda

$$a = -n, \quad b = -m, \quad c = -n - m - p \quad (4.39)$$

alırsa

$$\begin{aligned} & F_2(-n, -m, -n - m - p; \alpha, \beta; x, y) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (-m)_s (-n - m - p)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s} \frac{x^k y^s}{k! s!} \end{aligned} \quad (4.40)$$

olur. m ve n negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} (-n)_k &= 0, \quad k > n \\ (-m)_s &= 0, \quad s > m \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Dolayısıyla (4.40) ifadesi

$$\begin{aligned} & F_2(-n, -m, -n - m - p; \alpha, \beta; x, y) \\ = & \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m \frac{(-n)_k (-m)_s (-n - m - p)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s} \frac{x^k y^s}{k! s!} \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklini alır. (4.39) koşulları altında (4.38) nun sağ tarafındaki hipergeometrik fonksiyona (4.41) formşlü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& F_2(-n, -m, -n - m - p; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m \frac{(-n)_k (-m)_s (-n-m-p)_{k+s}}{(\alpha)_k (\beta)_s k!s!} \left(\frac{x}{x+y-1} \right)^k \left(\frac{y}{x+y-1} \right)^s
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olarak elde edilir. (4.15) ve (4.42) eşitlikleri kıyaslanırsa,

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y) &= A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \\
&= (1-x-y)^{n+m} F_2(-n, -m, -n-m-p; \alpha, \beta; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1})
\end{aligned} \tag{4.43}$$

olduğu görülür ki bu da teoremi ispatlar. Bu ifadenin sağ tarafındaki hipergeometrik fonksiyona (4.38) formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
A_{mn}(x, y) &= A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \\
&= (1-x-y)^{-p} F_2(\alpha+n, \beta+m, -n-m-p; \alpha, \beta; x, y)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece elde edilen son iki formül yardımıyla, Appell polinomlarının iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebileceği gösterilmiş olur.

4.3 Appell Polinomları İçin Diferensiyel Denklem

Bir değişkenli

$$F(a, b; \alpha; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(\alpha)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < 1$$

hipergeometrik fonksiyonunun, $u = F(a, b; \alpha; x)$ olmak üzere

$$x(1-x) \frac{d^2 u}{dx^2} + [\alpha - (a+b+1)x] \frac{du}{dx} - abu = 0$$

Gauss diferensiyel denklemini sağladığı bilinmektedir. O halde, (4.33) deki $F(a, c + s; \alpha; x)$ fonksiyonu da

$$\begin{aligned} & x(1-x) F''(a, c + s; \alpha; x) + [\alpha - (a + c + s + 1)x] \\ & \times F'(a, c + s; \alpha; x) - a(c + s) F(a, c + s; \alpha; x) = 0 \end{aligned}$$

denklemini gerçekler. Bu denklemde herbir terim,

$$\frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} y^s$$

ile çarpıldıktan sonra s üzerinden 0 dan ∞ -a kadar toplam alınıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & x(1-x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F''(a, c + s; \alpha; x) y^s - xy \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F'(a, c + s; \alpha; x) s y^{s-1} \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} [\alpha - (a + c + 1)x] F'(a, c + s; \alpha; x) \\ & - ay \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(a, c + s; \alpha; x) s y^{s-1} \\ & - ac \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s (c)_s}{(\beta)_s s!} F(a, c + s; \alpha; x) y^s = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.33) ifadesi göz önünde bulundurularak

$$v = F_2(a, b, c; \alpha, \beta; x, y)$$

gösterimi kullanılırsa,

$$x(1-x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + [\alpha - (a + c + 1)x] \frac{\partial v}{\partial x} - ay \frac{\partial v}{\partial y} - acv = 0 \quad (4.45)$$

denklemine ulaşılır. Benzer şekilde $F(b, c + k; \beta; y)$ fonksiyonu da

$$\begin{aligned} & y(1-y) F''(b, c + k; \beta; y) + [\beta - (b + c + k + 1)y] \\ & \times F'(b, c + k; \beta; y) - b(c + k) F(b, c + k; \beta; y) = 0 \end{aligned}$$

denklemini gerçekler. Bu denklemde de herbir terim,

$$\frac{(a)_k (b)_k}{(\alpha)_k} x^k$$

ile çarpıldıktan sonra k üzerinden 0 dan ∞ -a kadar toplam alınıp düzenlenirse ve (4.34) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$y(1-y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + [\beta - (b+c+1)y] \frac{\partial v}{\partial y} - bx \frac{\partial v}{\partial x} - bcv = 0 \quad (4.46)$$

denklemine ulaşılır. (4.45) ve (4.46) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y(1-y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + [\alpha - (a+b+c+1)x] \frac{\partial v}{\partial x} \\ + [\beta - (a+b+c+1)y] \frac{\partial v}{\partial y} - c(a+b)v = 0 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.44) eşitliğindeki

$$w = F_2(\alpha+n, \beta+m, -n-m-p; \alpha, \beta; x, y) = (1-x-y)^p A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$$

fonksiyonu da

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + y(1-y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + [\alpha - (\alpha+\beta-p+1)] \frac{\partial w}{\partial x} \\ + [\beta - (\alpha+\beta-p+1)y] \frac{\partial w}{\partial y} - (-n-m-p)(\alpha+\beta+m+n) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

denklemini gerçekler. $p = \gamma - \alpha - \beta$ koşulu altında,

$$w = (1-x-y)^p A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$$

fonksiyonu ve türevleri (4.47) de yerlerine yazılıp gerekli dzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) - 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \\
& + y(1-y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) + [\alpha - (\gamma + 1)x] \frac{\partial}{\partial x} A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \\
& + [\beta - (\gamma + 1)y] \frac{\partial}{\partial y} A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) + (m+n)(m+n+\gamma) A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = 0
\end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır. Burada

$$u = A_{mn}(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$$

denilir ve

$$(m+n)(m+n+\gamma) = \lambda_{mn}$$

gösterimi kullanılırsa $A_{mn}(x, y)$ Appell polinomlarının sağladığı denklemin, yani Appell diferensiyel denkleminin

$$x(x-1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y(y-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [(\gamma+1)x - \alpha] \frac{\partial u}{\partial x} + [(\gamma+1)y - \beta] \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_{mn} u$$

olduğu görülür.

4.4 Appell Diferensiyel Denkleminin Özfonksiyonlarının Ortogonalliği

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları Appell diferensiyel denkleminin λ_{mn} ve λ_{pq} özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları olsunlar. Yani,

$$\begin{aligned}
& x(x-1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + y(y-1)u_{yy} + [(\gamma+1)x - \alpha]u_x \\
& + [(\gamma+1)y - \beta]u_y = \lambda_{mn}u
\end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{aligned}
& x(x-1)v_{xx} + 2xyv_{xy} + y(y-1)v_{yy} + [(\gamma+1)x - \alpha]v_x \\
& + [(\gamma+1)y - \beta]v_y = \lambda_{pq}v
\end{aligned} \tag{4.50}$$

denklemleri gerçeklensin. Burada, (4.49) denklemi v ile (4.50) denklemi de u ile çarpılır ve elde edilenler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} & x(x-1)(vu_{xx} - uv_{xx}) + 2xy(vu_{xy} - uv_{xy}) + y(y-1)(vu_{yy} - uv_{yy}) \\ & + [(\gamma+1)x - \alpha](vu_x - uv_x) + [(\gamma+1)y - \beta](vu_y - uv_y) = (\lambda_{mn} - \lambda_{pq})uv \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı,

$$h(x, y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma - \alpha - \beta > -1$$

ağırlık fonsiyonu ile çarpıldıktan sonra

$$G = \{(x, y) : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1\}$$

gensel bölgesinde terim terime integre edilirse,

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) x(x-1)(vu_{xx} - uv_{xx}) dx dy + 2 \iint_G h(x, y) xy(vu_{xy} - uv_{xy}) dx dy \\ & + \iint_G h(x, y) y(y-1)(vu_{yy} - uv_{yy}) dx dy \\ & + \iint_G h(x, y) [(\gamma+1)x - \alpha](vu_x - uv_x) dx dy \\ & + \iint_G h(x, y) [(\gamma+1)y - \beta](vu_y - uv_y) dx dy \\ & = (\lambda_{mn} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y) uv dx dy \end{aligned} \tag{4.51}$$

bulunur. şimdi, (4.51) n terimlerini oluşturan integralleri hesaplayalım.

$$\Gamma : x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

G blgesinin sınırı olmak üzere, Green teoreminin yardımıyla elde edilen (4.20) den dolayı

$$\begin{aligned}
& \iint_G h(x, y) x(x-1) (vu_{xx} - uv_{xx}) dx dy \\
&= \iint_G h(x, y) x(x-1) vu_{xx} dx dy - \iint_G h(x, y) x(x-1) uv_{xx} dx dy \\
&= \int_{\Gamma} h(x, y) x(x-1) vu_x dy - \iint_G u_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x(x-1) v] dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma} h(x, y) x(x-1) uv_x dy + \iint_G v_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x(x-1) u] dx dy \quad (4.52)
\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde Green teoreminin yardımıyla elde edilen (4.22) formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \iint_G h(x, y) xy (vu_{xy} - uv_{xy}) dx dy \\
&= \iint_G h(x, y) xyvu_{xy} dx dy - \iint_G h(x, y) xyuv_{xy} dx dy \\
&= - \int_{\Gamma} h(x, y) xyvu_x dx - \iint_G u_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xyv] dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} h(x, y) xyuv_x dx + \iint_G v_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xyu] dx dy \quad (4.53)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha > 0$ koşulu altında $x = 0$ koordinat eksenini üzerinde

$$h(x, y) x(x-1) = x^\alpha y^{\beta-1} (x-1) (1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

fonksiyonu sıfır ve $y = 0$ koordinat eksenini üzerinde de $dy = 0$ olduğundan, (4.52) deki eğrisel integraller x ve y koordinat eksenleri üzerinde sıfırdır.

Benzer şekilde, $\alpha > 0, \beta > 0$ koşulu altında $x = 0$ ve $y = 0$ koordinat ekseninde

$$h(x, y) xy = x^\alpha y^\beta (1 - x - y)^{\gamma - \alpha - \beta}$$

fonksiyonu sıfır değerini alır. (4.53) deki eğrisel integraller de x ve y koordinat eksenleri boyunca sıfırdır. Γ sınır eğrisinin bir parçasını oluşturan $x + y = 1$ doğrusunu L ile gösterirsek, L doğrusu üzerinde (4.52) deki eğrisel integraller

$$\begin{cases} \int_L h(x, y) x(x-1) v u_x dy = \int_L h(x, y) x(-y) v u_x d(1-x) = \int_L h(x, y) xy v u_x dx \\ \int_L h(x, y) x(x-1) u v_x dy = \int_L h(x, y) x(-y) u v_x d(1-x) = \int_L h(x, y) xy u v_x dx \end{cases} \quad (4.54)$$

formlarına dönüştürler. (4.54) ifadesi göz önünde tutularak (4.52) ve (4.53) taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) x(x-1) (v u_{xx} - u v_{xx}) dx dy + \iint_G h(x, y) xy (v u_{xy} - u v_{xy}) dx dy \\ &= \iint_G v_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x(x-1) u] dx dy - \iint_G u_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x(x-1) v] dx dy \\ & \quad + \iint_G v_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy u] dx dy - \iint_G u_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy v] dx dy \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.20) den dolayı,

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) xy (v u_{xy} - u v_{xy}) dx dy \\ &= \iint_G h(x, y) xy v u_{yx} dx dy - \iint_G h(x, y) xy u v_{yx} dx dy \\ &= \int_\Gamma h(x, y) xy v u_y dy - \iint_G u_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy v] dx dy \\ & \quad - \int_\Gamma h(x, y) xy u v_y dy + \iint_G v_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy u] dx dy \end{aligned} \quad (4.56)$$

gerçeklenir. (4.22) formülünden dolayı da,

$$\begin{aligned}
& \iint_G h(x, y) y (y - 1) (vu_{yy} - uv_{yy}) dx dy \\
&= \iint_G h(x, y) y (y - 1) vu_{yy} dx dy - \iint_G h(x, y) y (y - 1) uv_{yy} dx dy \\
&= - \int_{\Gamma} h(x, y) y (y - 1) vu_y dx - \iint_G u_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1) v] dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} h(x, y) y (y - 1) uv_y dx + \iint_G v_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1) u] dx dy
\end{aligned} \tag{4.57}$$

eşitliği sağlanır. Yukarıdaki (4.56) ve (4.57) daki eğrisel integraller $x = 0$ ve $y = 0$ koordinat eksenleri üzerinde sıfırdır ve $L : x + y = 1$ doğrusu üzerinde de,

$$\begin{cases} \int_L h(x, y) y (y - 1) uv_y dx = \int_L h(x, y) y (-x) uv_y d(1 - y) = \int_L h(x, y) xyuv_y dy \\ \int_L h(x, y) y (y - 1) vu_y dx = \int_L h(x, y) y (-x) vu_y d(1 - y) = \int_L h(x, y) xyvu_y dy \end{cases} \tag{4.58}$$

eşitlikleri gerçekleşir. (4.58) eşitlikleri dikkate alınarak, (4.56) ve (4.57) daki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
& \iint_G h(x, y) xy(vu_{xy} - uv_{xy}) dx dy + \iint_G h(x, y) y (y - 1) (vu_{yy} - uv_{yy}) dx dy \\
&= \iint_G v_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xyu] dx dy - \iint_G u_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xyv] dx dy \\
&\quad + \iint_G v_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1) u] dx dy - \iint_G u_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1) v] dx dy
\end{aligned} \tag{4.59}$$

elde edilir.

(4.55) ve (4.59) eşitlikleri (4.51) denkleminde göz önünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
& \iint_G \left\{ v_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x-1) u] - u_x \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x-1) v] + v_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy u] \right. \\
& - u_x \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy v] + v_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy u] - u_y \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy v] \\
& + v_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y-1) u] - u_y \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y-1) v] \\
& + v u_x h(x, y) [(\gamma+1)x - \alpha] - u v_x h(x, y) [(\gamma+1)x - \alpha] \\
& \left. + v u_y h(x, y) [(\gamma+1)y - \beta] - u v_y h(x, y) [(\gamma+1)y - \beta] \right\} dx dy \\
& = (\lambda_{mn} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{4.60}$$

eşitliğin sağlandığı görülür. (4.60) daki eşitliğin sol tarafındaki integral içindeki ifadelerde parantez içindeki çarpımlı ifadelerin kısmi türevlerini açarak yazarsak,

$$\begin{aligned}
& \iint_G \left\{ v_x u \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x-1)] - u_x v \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x-1)] + v_x u \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy] \right. \\
& - u_x v \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy] + v_y u \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy] - u_y v \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy] \\
& + v_y u \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y-1)] - u_y v \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y-1)] \\
& \left. + h(x, y) [(\gamma+1)x - \alpha] [v u_x - u v_x] + h(x, y) [(\gamma+1)y - \beta] [v u_y - u v_y] \right\} dx dy \\
& = (\lambda_{mn} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde ederiz. (4.61) de parantez içindeki toplamın G üçgensel bölgesinde sıfıra eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için toplamları

$$u_x v, \quad v_x u, \quad u_y v, \quad v_y u \tag{4.62}$$

çarpanlarına göre gruplandırmak ve bu çarpanların herbirinin katsayılarının sıfıra eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.62) çarpanlarının katsayıları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x - 1)] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy] + h(x, y) [(\gamma + 1) x - \alpha] \\
& \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) x (x - 1)] + \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) xy] - h(x, y) [(\gamma + 1) x - \alpha] \\
& -\frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1)] + h(x, y) [(\gamma + 1) y - \beta] \\
& \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) xy] + \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) y (y - 1)] + h(x, y) [(\gamma + 1) y - \beta]
\end{aligned}$$

dir. $h(x, y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-\alpha-\beta}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, yukarıdaki dört değerin herbirinin G de sıfıra eşit olduğu gösterilebilir. Bunlardan ilkinin, yani $u_x v$ nin katsayısının sıfıra eşit olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
& -h_x x (x - 1) - h x - h (x - 1) - h_y xy - h x + h [(\gamma + 1) x - \alpha] \\
= & -x (x - 1) \left[(\alpha - 1) x^{\alpha-2} y^{\beta-1} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta} \right. \\
& \left. - (\gamma - \alpha - \beta) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \right] \\
& - 3h x + h - xy \left[(\beta - 1) x^{\alpha-1} y^{\beta-2} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta} \right] \\
& + xy \left[(\gamma - \alpha - \beta) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1 - x - y)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \right] + h [(\gamma + 1) x - \alpha] \\
= & h \left[-(x - 1) (\alpha - 1) + \frac{x (x - 1) (\gamma - \alpha - \beta)}{1 - x - y} - 3x + 1 \right] \\
& + h \left[-x (\beta - 1) + \frac{xy (\gamma - \alpha - \beta)}{1 - x - y} + (\gamma + 1) x - \alpha \right] \\
= & h \left[x (\gamma - \alpha - \beta) + \frac{(\gamma - \alpha - \beta)}{1 - x - y} (x^2 - x + xy) \right] \\
= & h \left[\frac{(\gamma - \alpha - \beta)}{1 - x - y} (x - x^2 - xy + x^2 - x + xy) \right] \\
= & 0
\end{aligned}$$

Benzer şekilde uv_x, vu_y, uv_y nin katsayıları da sıfıra eşittir.

Sonuç olarak (4.61) eşitliği

$$(\lambda_{mn} - \lambda_{pq}) \iint_G h(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy = 0$$

formuna indirgenir. λ_{mn} ve λ_{pq} farklı özdeğerler olduğundan, $\lambda_{mn} - \lambda_{pq} \neq 0$ olup

$$\iint_G h(x, y) u(x, y) v(x, y) dx dy = 0$$

eşitliği sağlanır. Böylece Appell denkleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz-fonksiyonlarının G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal oldukları gösterilmiş olur.

5. BİR BÖLGE ÜZERİNDE ORTOGONAL HARMONİK POLİNOMLAR

Bu bölümde harmonik polinomların ortogonallığı incelenecektir.

5.1 Harmonik Polinomlar

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

Laplace denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. Burada önce bu denklemin polinom çözümleri incelenecek, sonra da bu polinom çözümlerin ortogonallığı hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 5.1.1. (5.1) denklemini sağlayan m -yinci dereceden herhangi bir $H_m(x, y)$ polinomu "harmonik polinom" olarak adlandırılır.

Bu polinomlar verilen bir dairenin içinde Laplace denklemini ve sınırı üzerinde de verilen sınır değerini sağlayan harmonik fonksiyonların bulunmasında yararlı olmaktadır. Özellikle birim yarıçaplı dairede bu tip fonksiyonların belirlenmesi önemlidir.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = x + iy$ kompleks değişkeni kullanılarak harmonik fonksiyonlar belirlenebilir. Örneğin, n bir doğal sayı olmak üzere

$$z^n = (x + iy)^n \quad \text{ve} \quad \bar{z}^n = (x - iy)^n$$

fonksiyonları iki değişkenli homogen harmonik polinomlar olup

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace denklemini sağlarlar.

İki değişkenli reel homogen harmonik polinomlar

$$\begin{aligned}\Re z^n &= u_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} \\ \Im z^n &= v_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}\end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar. Bu polinomların açık ifadesi

$$1, x, y, x^2 - y^2, 2xy, \dots, u_n(x, y), v_n(x, y), \dots \quad (5.2)$$

şeklindedir. $u_0 = 1, v_0 = 0$ olduğundan (5.2) sistemini

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde verilen bir sınır değerini sağlayan harmonik fonksiyonları bulurken, $(x + iy)^n$ ve $(x - iy)^n$ polinomları yerine bunların kutupsal koordinatlardaki ifadelerini kullanmak bize kolaylık sağlar. xOy düzleminde

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

dönüşümü ile tanımlanan (r, θ) kutupsal koordinatları kullanılırsa,

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\bar{z}^n = r^n e^{-in\theta} = r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

olarak elde edilir. Bu kompleks değerli fonksiyonlar harmonik olduğundan bunların reel ve sanal kısımları da Laplace denklemini sağlar. Yani,

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta = u_n(x, y) = \frac{1}{2} ((x + iy)^n + (x - iy)^n) \quad (5.4)$$

$$v_n(r, \theta) = r^n \sin n\theta = v_n(x, y) = \frac{1}{2i} ((x + iy)^n - (x - iy)^n) \quad (5.5)$$

polinomları n -yinci dereceden homogen harmonik polinomlardır. Şimdi (5.3) polinomlarının

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

birim dairesel bölgesinde ortogonal olduğunu ispatlayalım. (5.4) ve (5.5) formüllerinden

$$\iint_G u_n(x, y) v_k(x, y) dx dy = \int_0^1 r^{n+k+1} dr \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin k\theta d\theta = 0$$

dir. Benzer şekilde görülebilir ki, $n \neq k$ için

$$\iint_G u_n(x, y) u_k(x, y) dx dy = 0 \quad \text{ve} \quad \iint_G v_n(x, y) v_k(x, y) dx dy = 0$$

dır. Yani, (5.3) polinomları $h(x, y) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinde ortogonaldır. Şimdi bu polinomların normlarını hesaplayalım.

(5.4) den $n > 0$ için

$$\|u_n\|^2 = \iint_G u_n^2(x, y) dx dy = \int_0^1 r^{2n+1} dr \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

olur. Benzer şekilde (5.5) polinomlarının normları da hesaplanabilir. Bu durumda ortonormal homogen harmonik polinomlar

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \hat{u}_n(x, y) &= \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} u_n(x, y) \\ \hat{v}_n(x, y) &= \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} v_n(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler.

$r < 1$ için

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (5.6)$$

eşitliğiyle verilen Poisson integralı,

$$\lim_{r \rightarrow 1} v(r, \theta) = f(\theta) \quad (5.7)$$

koşulunu sağlayan harmonik bir fonksiyon olup, birim dairede Dirichlet probleminin çözümünü verir. Dirichlet problemi, birim dairede harmonik olan ve dairenin sınırı üzerinde sürekli bir f fonksiyonuna eşit olan bir $v(r, \theta)$ fonksiyonunun bulunması problemidir. Burada

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

ifadesi Poisson çekirdeği olarak bilinir ve

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \varphi) r^k \quad (5.8)$$

eşitliğinin gerçekleştiği aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \varphi) r^k \\ = & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r^k e^{ik(\theta - \varphi)} + r^k e^{-ik(\theta - \varphi)}) \\ = & 1 + r e^{i(\theta - \varphi)} \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{i(\theta - \varphi)})^k + r e^{-i(\theta - \varphi)} \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{-i(\theta - \varphi)})^k \\ = & 1 + \frac{r e^{i(\theta - \varphi)}}{1 - r e^{i(\theta - \varphi)}} + \frac{r e^{-i(\theta - \varphi)}}{1 - r e^{-i(\theta - \varphi)}} \\ = & \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} \end{aligned}$$

Buradan görülmektedir ki, Poisson çekirdeği harmonik polinomların sonsuz toplamı olarak yazılabilmektedir. O halde harmonik polinomlar yardımıyla, birim dairede Laplace denklemini sağlayan ve dairenin sınırı üzerinde de verilen sınır koşulunu gerçekleyen harmonik fonksiyonlar bulunabilmektedir.

Gerçekten (5.6) ile tanımlı $v(r, \theta)$ fonksiyonu harmonik bir fonksiyondur. Şimdi de bunun gerçekleştiğini göstereyim. İki boyutlu uzayda Laplace denkleminin dik koordinatlardaki ifadesi,

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

dır.

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r < \infty$ olmak üzere $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ dönüşümü ile (r, θ) kutupsal koordinatlarına geçilirse, Laplace denklemi

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 \quad (5.1.9)$$

formuna dönüştür. (5.8) deki toplam (5.6) eşitliğinde göz önünde tutulur ve gerekli türevler alınırsa (5.9) ifadesi

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} (k - k + k^2 - k^2) r^{k-2} \cos k(\theta - \varphi) \right) d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklini alır. Buradan (5.6) Poisson integralinin Laplace denklemini sağladığı görülür. Diğer yandan (5.7) sınır koşulunda gerçekleştiğini göstereyim. f sürekli ve 2π periyotlu bir fonksiyon olup f nin $[0, 2\pi]$ aralığındaki Fourier açılımı,

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

formundadır. Burada Fourier katsayıları,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi ; & k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi ; & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

şeklindedir.

(5.6) da (5.8) yerine yazılıp Fourier katsayıları göz önüne alınırsa

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k$$

olur ve

$$\lim_{r \rightarrow 1} v(r, \theta) = f(\theta)$$

sınır koşulunun sağlandığı kolaylıkla görülür (Askey 1975).

5.2 Christoffel-Darboux Formüllerinin Bir Analöğü

Bu kısımda homogen harmonik polinomların Fourier serilerinin kısmi toplamaları hesaplanacaktır.

$|q| < 1$ koşulu altında

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (5.10)$$

eşitliğini göz önüne alalım Bu eşitlikte

$$q = z\bar{\tau} = (x + iy)(\xi - i\eta) \quad (5.11)$$

alınır ve (5.4) ve (5.5) formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} q^k &= z^k (\bar{\tau})^k = [u_k(x, y) + iv_k(x, y)] [u_k(\xi, \eta) - iv_k(\xi, \eta)] \\ &= u_k(x, y) u_k(\xi, \eta) + v_k(x, y) v_k(\xi, \eta) \\ &\quad + i[v_k(x, y) u_k(\xi, \eta) - u_k(x, y) v_k(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (5.12)$$

olur. Ayrıca (5.11) den

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - (x + iy)(\xi - i\eta) \\ &= 1 - (x\xi + y\eta + i(y\xi - x\eta)) \\ &= (1 - x\xi - y\eta) + i(x\eta - y\xi) \end{aligned} \quad (5.13)$$

yazılabilir. Bu değeri eşleniği ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & (1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2 \\ = & 1 - 2(x\xi + y\eta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned} \quad (5.14)$$

bulunur.

Bu değeri $g(x, y, \xi, \eta)$ ile gösterelim. Kısalık için

$$u_k = u_k(x, y), \quad \tilde{u}_k = u_k(\xi, \eta) \quad (5.15)$$

$$v_k = v_k(x, y), \quad \tilde{v}_k = v_k(\xi, \eta) \quad (5.16)$$

notasyonlarımızı kullanalım. (5.10) eşitliğinde (5.12) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{k=1}^n q^k \\ = & 1 + \sum_{k=1}^n [u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k + i[v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k]] \\ = & 1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\ = & \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ = & \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - x\xi - y\eta) + i(x\eta - y\xi)} \\ = & (1 - q^{n+1}) \frac{[(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)]}{g(x, y, \xi, \eta)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. $k = n + 1$ için (5.12) yardımıyla kesrin payını hesaplayabiliriz. (5.17)

eşitliğinin reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı yazılırsa,

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \\ = & \frac{1}{g(x, y, \xi, \eta)} [(1 - u_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - v_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(1 - x\xi - y\eta) \\ & - (v_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(x\eta - y\xi)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&= -\frac{1}{g(x, y, \xi, \eta)} [(1 - u_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - v_{n+1} \tilde{v}_{n+1}) (x\eta - y\xi) \\
&\quad - (v_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} \tilde{v}_{n+1}) (1 - x\xi - y\eta)] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(5.10) eşitliğinin her iki yanının q ya göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
& 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} \\
&= \frac{-(n+1)q^n}{1-q} + \frac{1}{1-q} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad (5.20)
\end{aligned}$$

olur. (5.20) eşitliğinin sağ tarafındaki terimleri hesaplayalım. (5.12) ve (5.13) formüllerinden,

$$\begin{aligned}
\frac{-(n+1)q^n}{1-q} &= \frac{-(n+1)}{g(x, y, \xi, \eta)} [u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n + i(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)] \\
&\quad \times [(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)] \\
&= \frac{-(n+1)}{g(x, y, \xi, \eta)} [(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) (1 - x\xi - y\eta) \\
&\quad + (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) (x\eta - y\xi) \\
&\quad + i(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) (1 - x\xi - y\eta) \\
&\quad - i(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) (x\eta - y\xi)] \quad (5.21)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi (5.20) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi hesaplayalım. (5.12),

(5.13), (5.14) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-q} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) &= \frac{(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)}{g(x, y, \xi, \eta)} \\
&\quad \times \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g} \left\{ (1 - x\xi - y\eta) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right. \\
&\quad + (x\eta - y\xi) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad + i(1 - x\xi - y\eta) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad \left. - i(x\eta - y\xi) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right\} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.12) ve (5.13) yardımıyla (5.20) eşitliğinin sağ tarafı elde edilmiş olur.

(5.21) ve (5.22) eşitliklerini (5.20) de göz önüne alalım ve eşitliğin sol tarafını (5.12) yardımıyla farklı bir şekilde ifade edelim. Bu durumda eşitlikteki reel kısım hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) &= \frac{-(n+1)}{g} [(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) (1 - x\xi - y\eta) \\
&\quad (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) (x\eta - y\xi)] \\
&\quad + \frac{1}{g} \left\{ (1 - x\xi - y\eta) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right. \\
&\quad \left. + (x\eta - y\xi) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \right\} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.23) eşitliği basit dönüşümlerle

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) &= \frac{1}{g} \left[(1 - x\xi - y\eta) \sum_{k=1}^{n-1} (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right. \\
&\quad + (x\eta - y\xi) \sum_{k=1}^{n-1} (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad - n(1 - x\xi - y\eta) (u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \\
&\quad \left. - n(x\eta - y\xi) (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right] \quad (5.24)
\end{aligned}$$

formuna dönüşür.

Bu eşitliğin sağ tarafındaki kısmi toplamlar yerine (5.18) ve (5.19) formülleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) = & \left\{ \frac{1}{g} (1 - x\xi - y\eta) \frac{1}{g} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n) \right. \\
& \times (1 - x\xi - y\eta) \\
& - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) (x\eta - y\xi)] \\
& - (x\eta - y\xi) \frac{1}{g} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n) (x\eta - y\xi) \\
& (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) (1 - x\xi - y\eta)] \\
& - n (1 - x\xi - y\eta) (u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \\
& \left. - n (x\eta - y\xi) (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right\} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(5.24) ve (5.25) formülleri tek değişkenli ortogonal polinomlar için klasik Christoffel-Darboux formüllerinin analoğu ve genelleştirilmesidir (Suetin 1988). Ortonormal harmonik polinomların bilineer serilerinin kısmi toplamları bu eşitlikler yardımıyla ifade edilebilir. Bu formüllerde g , (5.14) toplamını göstermektedir, yani

$$g(x, y, \xi, \eta) = 1 - 2(x\xi + y\eta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) \quad (5.26)$$

dir. Eğer $M(x, y)$ ve $P(\xi, \eta)$ noktaları farklı ise, (5.14) formülünden, (5.26) fonksiyonu pozitiftir. Ayrıca M ve P noktaları çakışık ve birim disk içindeyse (5.13) ve (5.14) formülleri (5.26) fonksiyonunun pozitif olmasını gerektirir. Kabul edelim ki $M(x, y)$ noktası birim çember üzerinde olsun, yani $x^2 + y^2 = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda (5.26) formülünden

$$g(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

elde edilir.

Diğer taraftan aynı $x^2 + y^2 = 1$ koşulu altında

$$1 - x\xi - y\eta = x(x - \xi) + y(y - \eta)$$

$$x\eta - y\xi = (x - \xi)\eta - (y - \eta)\xi$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikleri göz önüne alarak,

$$\frac{|1 - x\xi - y\eta| (|x - \xi| + |y - \eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leq \frac{(|x - \xi| + |y - \eta|)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \leq 2 \quad (5.27)$$

$$\frac{|x\eta - y\xi| (|x - \xi| + |y - \eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leq \frac{(|x - \xi| + |y - \eta|)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \leq 2 \quad (5.28)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler $M(x, y)$ noktasının birim çember üzerinde ve $P(\xi, \eta)$ noktasının kapalı birim disk içinde değişken olması durumunda sağlanır.

5.3 Birim Disk İçinde Ortogonal Harmonik Polinomlar

Bir $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (5.29)$$

birim diski içinde tanımlı olsun. Dolayısıyla $h(x, y) > 0$ dır ve (5.29) bölgesinde integrallenebilirdir. Yani,

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulu sağlanır.

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (5.30)$$

homogen harmonik polinom sistemine $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalite metodunu uygulayarak, (5.29) bölgesi üzerinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (5.31)$$

bir harmonik polinom sistemi elde ederiz. (5.31) sistemi için ortonormallik koşulları

$$\begin{aligned}\iint_G h(x, y) A_n(x, y) A_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk} \\ \iint_G h(x, y) A_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= 0 \\ \iint_G h(x, y) B_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk}\end{aligned}$$

şeklindedir. Kabul edelim ki (5.31) polinomlarının ağırlık fonksiyonu sıfır tarafından düzgün sınırlı olsun ve Lipschitz koşulu sağlansın. Yani,

$$h(x, y) \geq c_1 > 0 \quad (5.32)$$

$$|h(x, y) - h(\xi, \eta)| \leq M_1 (|x - \xi| + |y - \eta|) \quad (5.33)$$

koşulları sağlansın. (5.32) ve (5.33) koşulları altında (5.31) polinomlarını ele alalım.

$B_n(x, y)$ polinomu (5.30) homogen harmonik polinomlarına göre

$$B_n(x, y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\alpha_k u_k(x, y) + \beta_k v_k(x, y)] \quad (5.34)$$

şeklinde yazılabilir. Burada katsayılar

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \beta_k &= \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) d\xi d\eta\end{aligned}$$

formülleri ile tanımlıdır. α_k, β_k katsayıları, (5.15) ve (5.16) notasyonları kullanılırsa (5.34) eşitliği

$$B_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.35)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \quad (5.36)$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} B_n(x, y) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{2(k+1)}{\pi} \left(\iint_G B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) u_k(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(k+1)}{\pi} \left(\iint_G B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) v_k(x, y) \right] \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) \left[\sum_{k=1}^n (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) \left[K_n(x, y, \xi, \eta) - \frac{1}{2} \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

yazabiliriz ki burada

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

dir. Bu ise (5.35) eşitliğidir. (5.35) eşitliğinde (5.36) eşitliği dikkate alınır ve son terim ayrı yazılırsa

$$\begin{aligned} B_n(x, y) &= \frac{2(n+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) (u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.37)$$

elde edilir. Öncelikle eşitliğin sağ tarafının ilk terimi için bir eşitsizlik elde edelim.

(5.32) den ve Cauchy, Schwarz, Bunyakowski eşitsizliğinden

$$\iint_G |B_n(\xi, \eta)| |\tilde{u}_n| d\xi d\eta \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \iint_G \sqrt{h(\xi, \eta)} |B_n(\xi, \eta)| |\tilde{u}_n| d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{\iint_G |u_n(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)c_1}}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

elde edilir. Bu durumda (5.37) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimin mutlak değeri

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi c_1}} (|u_n(x, y)| + |v_n(x, y)|) \tag{5.39}$$

değerini geçemez.

Şimdi eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim için bir eşitsizlik elde edelim. Ortogonalite koşulundan

$$\iint_G h(\xi, \eta) B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

olduğu dikkate alınırsa bu eşitlik

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\
&= \frac{2}{\pi h(x, y)} \iint_G [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \tag{5.40}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu integral bir önceki kısımda elde edilmiş olan Christoffel-Darboux formülleri yardımıyla hesaplanabilir. $K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)$ kısmi toplamı yerine ondan daha küçük olan

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k)$$

ifadesi alındıktan sonra integral içerisindeki ifade σ_n ile gösterilir ve (5.24) eşitliği dikkate alınırsa

$$\sigma_n = [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) \left[\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right]$$

$$\begin{aligned}
= & [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) \frac{1}{g} \left[(1 - x\xi - y\eta) \sum_{k=1}^{n-1} (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right. \\
& + (x\eta - y\xi) \sum_{k=1}^{n-1} (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) - n(1 - x\xi - y\eta) (u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \\
& \left. - n(x\eta - y\xi) (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right] \quad (5.41)
\end{aligned}$$

bulunur. Kabul edelim ki $M(x, y)$ noktası birim çemberin üzerinde bulunsun. Bu durumda (5.27) ve (5.28) eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler ve (5.33) koşulu kullanılarak (5.41) için

$$\begin{aligned}
|\sigma_n| \leq 2M_1 |B_n(\xi, \eta)| & \left[\sum_{k=1}^{n-1} (|u_k \tilde{u}_k| + |v_k \tilde{v}_k|) + \sum_{k=1}^{n-1} (|v_k \tilde{u}_k| + |u_k \tilde{v}_k|) \right. \\
& \left. + n(|u_n \tilde{u}_n| + |v_n \tilde{v}_n| + |v_n \tilde{u}_n| + |u_n \tilde{v}_n|) \right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliği terim terim integre ederek ve (5.38) eşitsizliği integrallere uygulanarak

$$\begin{aligned}
\iint_G |\sigma_n| d\xi d\eta & \leq M_1 \sqrt{\frac{2\pi}{c_1}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} (|u_k| + |v_k|) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} (|u_k| + |v_k|) + \frac{2n}{\sqrt{n+1}} (|u_n| + |v_n|) \right] \\
& \leq c_2 \sqrt{n+1} \quad (5.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen sonuçları kullanarak bu kısmın sonucunu aşağıdaki teoremden verelim.

Teorem 5.3.1. Eğer ağırlık fonksiyonu (5.32) ve (5.33) koşullarını sağlıyor ise bu durumda kapalı birim disk içinde (5.31) polinomları için

$$\begin{aligned}
|A_n(x, y)| & \leq c_3 \sqrt{n+1}, & x^2 + y^2 & \leq 1 \\
|B_n(x, y)| & \leq c_3 \sqrt{n+1}, & x^2 + y^2 & \leq 1
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlar (Suetin 1988).

İspat: (5.37) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|B_n(x, y)| &\leq \frac{2(n+1)}{\pi} \iint_G |B_n(\xi, \eta)| (|u_n \tilde{u}_n| + |v_n \tilde{v}_n|) d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \iint_G |B_n(\xi, \eta)| |K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)| d\xi d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada (5.39) ve (5.42) birlikte dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|B_n(x, y)| &\leq \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi c_1}} (|u_n(x, y)| + |v_n(x, y)|) + c_2 \sqrt{n+1} \\
&\leq c_3 \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

6. BİR ÇEVRE ÜZERİNDE ORTOGONAL İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

6.1 Temel Tanımlar ve Özellikler

s yay uzunluğu parametresi olmak üzere, düzgün bir Γ eğrisi

$$z = x + iy = \lambda(s) = x(s) + iy(s) \quad (6.1)$$

parametrik denklemlerle tanımlanmış olsun. İki değişkenli

$$h(x, y) = h(z) = h[x(s), y(s)] = h(s) \quad (6.2)$$

fonksiyonu, Γ eğrisi üzerinde pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon ise ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır. Yani $h(x, y)$ için

$$0 < \int_{\Gamma} h(x, y) ds = \int_0^1 h[x(s), y(s)] ds < \infty$$

koşulu sağlanmalıdır.

x ve y bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin çarpımıyla elde edilen monomiallerin kümesi,

$$\{x^{n-k}y^k\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.3)$$

olsun. (6.1) eğrisinin bulunduğu düzlemde iki durum söz konusudur. Eğer Γ eğrisi cebirsel ise, bu durumda (6.3) monomialleri eğri üzerinde lineer bağımlıdır, yani bu monomiallerin bazıları diğer monomialler cinsinden ifade edilebilir. Bu durum üzerinde bir sonraki kısımda durulacaktır. Eğer (6.1) eğrisi transandantal ise, bu durumda (6.3) monomialleri lineer bağımsızdır. Bu kısımda Γ eğrisinin transandantal olduğu kabul edilecektir.

İki değişkenli P_{nk} ve P_{ms} polinomları,

$$\int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) P_{ms}(x, y) ds = 0$$

koşulunu sağlıyor iseler, o takdirde bu polinomlara $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre Γ eğrisi üzerinde ortogonaldır denir.

Cebirsel bir polinom sistemi

$$\left. \begin{array}{l} P_{00}(x, y) \\ P_{10}(x, y), P_{11}(x, y) \\ P_{20}(x, y), P_{21}(x, y), P_{22}(x, y) \\ \dots \\ P_{n0}(x, y), P_{n1}(x, y), P_{n2}(x, y), \dots, P_{n,k-1}(x, y), P_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

olarak verilsin. Bu sistem aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre Γ eğrisi üzerinde ortonormaldir denir.

- i. Her bir $P_{nk}(x, y)$ polinomunun $c_{nk}^{(n,k)}$ başkatsayısı pozitif olmalıdır.
- ii. (6.4) polinomları

$$(P_{nk}, P_{ms}) = \int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) P_{ms}(x, y) ds = \delta_{nm} \delta_{ks}$$

ortonormallik koşulunu sağlamalıdır.

Aşağıda bir çevre üzerinde ortogonal polinomların bazı özellikleri ispatsız olarak verilecektir. Bu özelliklerin ispatları bir bölge üzerinde ortogonal olan polinomların ispatlarına benzer şekilde yapılabilir.

- 1. $h(x, y)$, transandantal bir Γ eğrisi üzerinde ağırlık fonksiyonu ise, bu durumda

Γ üzerinde negatif olmayan herhangi bir $Q_{nk}(x, y)$ cebirsel polinomu için

$$\int_{\Gamma} h(x, y) Q_{nk}(x, y) ds > 0 \quad , \quad n \geq 1$$

koşulu sağlanır.

2. Γ üzerinde herhangi bir $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu bir tek ortonormal polinom sistemi belirler.

3. Başkatsayısı $c_{nk}^{(n,k)} > 0$ olan bir $P_{nk}(x, y)$ polinomu verilmiş olsun. (n, k) -yıncı basamaktan $P_{nk}(x, y)$ polinomunun Γ eğrisi üzerinde ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $(p, q) < (n, k)$ herhangi bir $Q_{pq}(x, y)$ polinomu için,

$$\int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) ds = 0 \quad (6.5)$$

koşulunun sağlanmasıdır.

4.

$$\tilde{\Phi}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} x^{m-s} y^s \quad (6.6)$$

formundaki polinom "monik polinom" olarak adlandırılır.

$$\int_{\Gamma} h(x, y) \tilde{\Phi}_{nk}(x, y) x^{p-q} y^q ds = 0$$

koşulunu sağlayan (6.6) polinomuna "monik ortogonal polinom" denir.

5. $f(x, y)$, Γ eğrisi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun ve

$$\|f\|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} h(x, y) f^2(x, y) ds < \infty$$

koşulunu sağlasın. Bu tip fonksiyonların kümesi $L_2(h, \Gamma)$ ile gösterilecektir.

$f(x, y)$ fonksiyonlarının (6.4) ortogonal polinom sistemine bağılı Fourier serisi ve Fourier katsayıları

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (6.7)$$

$$a_{nk} = \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) P_{nk}(x, y) ds$$

formundadır. (6.7) serisinin kısmi toplamı

$$S_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (6.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi (6.7) serisi ve onun (6.8) kısmi toplamı için bir özellik verelim.

(6.7) serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \leq \|f\|_{\Gamma}^2$$

Bessel eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y) - S_n(x, y)]^2 ds \\ &= \int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y)]^2 ds \\ & \quad - 2 \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) S_n(x, y) ds \\ & \quad + \int_{\Gamma} h(x, y) [S_n(x, y)]^2 ds \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ yanındaki ikinci ve üçüncü integrallerin değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} h(x, y) [S_n(x, y)]^2 ds \\
&= \int_{\Gamma} h(x, y) \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \right]^2 ds \\
&= \int_{\Gamma} h(x, y) (a_{00} P_{00} + a_{10} P_{10} + \dots + a_{n0} P_{n0} + \dots + a_{nk} P_{nk})^2 ds \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \tag{6.10}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) S_n(x, y) ds \\
&= \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) \\
&\quad \times \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \right] ds \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \tag{6.11}
\end{aligned}$$

olarak elde edilirler. (6.10) ve (6.11) deki değerler (6.9) da yerlerine konulurlarsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y) - S_n(x, y)]^2 ds \\
&= \|f\|_{\Gamma}^2 - 2 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \right] \\
&\quad + \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\|f\|_{\Gamma}^2 \geq \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \leq \|f\|_{\Gamma}^2 \quad (6.12)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Burada (6.12) ifadesindeki seri yakınsaktır.

Yakınsak her serinin genel teriminin limiti sıfır olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \right) = 0$$

koşulu elde edilir.

6.2 Cebirsel Bir Eğri Üzerinde İki Değişkenli Ortogonal Polinomlar

Bu kısımda Γ çevresinin cebirsel bir eğri olması durumu ele alınacaktır. Kabul edelim ki bu eğrinin denklemi

$$x^{N-p}y^p = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{p-1} c_{Ns} x^{N-s} y^s \quad (6.13)$$

formunda olsun. Γ eğrisi (N, p) -yinci basamaktadır. (6.13) eşitliğinin sağ tarafını kısaca

$$x^{N-p}y^p = Q(x, y) \quad (6.14)$$

şeklinde ifade edelim. (6.14) eşitliği Γ eğrisi üzerinde sağlandığından, $\{x^{n-k}y^k\}$ monomial sistemi bu eğri üzerinde lineer bağımsız değildir. Şimdi bu problemi detaylı biçimde düşünelim. Monomiallerin kümesini

$$\left. \begin{array}{l}
1 \\
x, y \\
x^2, xy, y^2 \\
\ldots \\
x^N, x^{N-1}y, \ldots, x^{N-p}y^p, \ldots, xy^{N-1}, y^N \\
x^{N+1}, x^Ny, \ldots, x^{N+1-p}y^p, x^{N-p}y^{p+1}, \ldots, xy^N, y^{N+1} \\
\ldots
\end{array} \right\} \quad (6.15)$$

formunda ifade edelim. Γ eğrisi (6.14) eşitliği ile tanımlı olduğundan, tablo (6.15) deki ilk N bloktaki monomialler bu eğri üzerinde birbirleriyle lineer bağımsızdır. (6.14) eşitliğinden Γ eğrisi üzerindeki $x^{N-p}y^p$ monomiali tablo (6.15) deki kendisinden önce gelen monomiallerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir.

$\Gamma(m)$, basamağı m den büyük olmayan bütün monomialler kümesi olan W_m içinde basamağı m olan Γ eğrisi üzerinde lineer bağımsız monomiallerin sayısını gösterebilir. (6.14) eşitliği gerektirir ki basamağı N olan $N + 1$ monomial arasında mutlaka N tane lineer bağımsız monomial vardır, yani $\Gamma(N) = N$ dir.

Şimdi $\Gamma(N + 1)$ -i hesaplayalım.

(6.14) eşitliğini x ve y ile ayrı ayrı çarparak,

$$\left. \begin{array}{l}
x^{N+1-p}y^p = xQ(x, y) \\
x^{N-p}y^{p+1} = yQ(x, y)
\end{array} \right\} \quad (6.16)$$

şeklinde iki eşitlik elde edilir. Bu eşitlikler gösterir ki $N + 1$ indisli blokta Γ eğrisi üzerinde kendinden önceki monomialler cinsinden ifade edilebilen iki tane monomial vardır. Ayrıca $\Gamma(N + 1) = N$ elde ederiz. (6.16) eşitliği

$$\begin{aligned}
x^{N+2-p}y^p &= x^2Q(x, y) \\
x^{N+1-p}y^{p+1} &= xyQ(x, y) \\
x^{N-p}y^{p+2} &= y^2Q(x, y)
\end{aligned}$$

şeklinde Γ eğrisi üzerinde üç eşitliği gerektirir. Böylece $N + 2$ indisli blokta kendisinden önceki monomiallerle lineer bağımlı olan üç monomial vardır.

Buradan $\Gamma(N+2) = N$ elde edilir. Bu şekilde devam ederek elde edilen eşitlikleri x ve y ile çarparak

$$\Gamma(m) = N, \quad m \geq N \quad (6.17)$$

elde edilir. Bu durumda eğer Γ eğrisi derecesi N olan (6.13) cebirsel eşitliği ile tanımlı ise, (6.15) monomiallerinin her bloğu, N indisli bloktan başlayarak Γ eğrisi üzerinde yalnızca N tane lineer bağımsız monomial içerir. Bu nedenle lineer bağımlı

$$x^{m-p}y^p, x^{m-p-1}y^{p+1}, \dots, x^{N-p}y^{m-N+p} \quad (6.18)$$

monomiallerini m indisli blokta atlayabiliriz. Bu blokta yalnızca

$$x^m, x^{m-1}y, \dots, x^{m-(p-1)}y^{p-1}, x^{N-(p+1)}y^{m-N+p+1}, \dots, xy^{m-1}, y^m \quad (6.19)$$

monomialleri kalmaktadır.

Sonuç olarak (6.15) ile verilen tablo

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ x, y \\ x^2, xy, y^2 \\ \dots \\ x^{N-1}, x^{N-2}y, \dots, xy^{N-2}, y^{N-1} \\ x^N, \dots, x^{N-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+1}, \dots, y^N \\ x^{N+1}, \dots, x^{N-p+2}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+2}, \dots, y^{N+1} \\ \dots \\ x^m, \dots, x^{m-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{m-N+p+1}, \dots, y^m \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

formuna dönüştür. Bu monomial sistemi Γ eğrisi üzerinde lineer bağımsızdır ve N indisli bloktan itibaren her blok N tane monomial içerir. Cebirsel bir

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k c_{ns} x^{n-s} y^s \quad (6.21)$$

polinomu verilsin. Bu polinomu (6.13) eşitliği ile tanımlı Γ eğrisi üzerinde ele alarak, (6.21) toplamında (6.18) formundaki monomialler çıkarılabilir. Yani

$$c_{mp} = c_{m,p+1} = \dots = c_{m,m-N+p} = 0 \quad (6.22)$$

alınabilir. Kabul edelim ki $h(x, y)$, Γ eğrisi üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Ortogonalite metodunu (6.20) monomial sistemine uygulayarak, tablo (6.20)-ye benzer olarak $\{P_{nk}(x, y)\}$ ortogonal polinomların bir sistemini elde ederiz. Bu polinom sistemindeki k indisli blokta açıklık vardır. Fakat (6.22) koşulları her polinom için sağlanır. Şimdi bu duruma aşağıda bir kaç örnek verelim.

Örnek 1. Öncelikle Γ eğrisinin denklemi

$$y = Ax + B, \quad a \leq x \leq b \quad (6.23)$$

formülü ile tanımlı olsun. Bu durumda $N = 1$ dir ve tablo (6.15)-teki N indisli blokta 1 tane lineer bağımsız monomial vardır ki o da x tir. Dolayısıyla tablo (6.20) yalnızca 1. sütunu içerir, yani (6.23) doğrusu üzerinde $\{x^n\}$ lineer bağımsız sistemi vardır. (6.23) formülünden dikkate alınarak $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu tek değişkenli olarak

$$h(x, y) = h(x, Ax + B) = h_0(x), \quad a \leq x \leq b$$

formunda elde edilir. Ayrıca bu ortogonal polinomlar yalnızca x değişkenine bağlıdır ve ortogonalite aralığı $[a, b]$ dir. Şimdi Γ eğrisi

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (6.24)$$

birim çemberi olsun. Bu durumda tablo (6.15) deki 2 indisli blok yalnızca iki lineer bağımsız monomial içerir ki bunlar x^2 ve xy dir. $N = 2$ olduğundan, (6.20) tablosundaki her blok x^n ve $x^{n-1}y$ formunda iki polinom içerir. Bu nedenle tablo (6.20) nin tamamı

$$1, x, y, x^2, xy, x^3, x^2y, \dots, x^n, x^{n-1}y, \dots \quad (6.25)$$

formunda ifade edilebilir. Bu serinin $h(x, y) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre (6.24) birim çemberi üzerindeki ortogonallığından,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (6.26)$$

ortonormal polinom sistemini elde ederiz. Burada $\{A_n(x, y)\}$ çift indisli ortonormal polinomları göstermektedir, yani $A_n(x, y)$ polinomunun başkatsayısı $\alpha_n x^n$, $B_n(x, y)$ polinomunun başkatsayısı $\beta_n x^{n-1}y$ formundadır.

Şimdi,

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

koşulları altında (6.26) polinomları için

$$\left. \begin{aligned} A_n(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}} \\ B_n(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

formüllerinin doğru olduğunu ispatlayalım. Bunun için tümevarım metodunu kullanalım.

$A_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ seçilir ve (6.27) formülü göz önüne alınırsa (6.24) çemberi üzerinde

$$ds = d\varphi$$

olduğundan ve ortogonallık koşulundan

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A_1(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} A_1(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi) d\varphi \\ &= 2\pi \alpha_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\alpha_0 = 0$ elde edilir. $\alpha_0 = 0$ olduğu ortonormallik koşulunda göz önüne

alınırsa,

$$\int_0^{2\pi} [A_1 (\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha_1^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \alpha_1^2 \pi = 1$$

olur.

Buradan

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A_1 (\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\pi}}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\int_0^{2\pi} B_1 (\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) d\varphi = 2\pi a_0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} B_1 (\cos \varphi, \sin \varphi) A_1 (\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi = a_1 \sqrt{\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} [B_1 (\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \beta_1^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \beta_1^2 \pi = 1$$

olur.

Ortogonalite ve ortonormalite koşullarından $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ ve $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ elde edilir ki böylece $n = 1$ için (6.28) formülü ispatlanmış olur. (6.28) formülünün n için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. (6.27) koşulları altında

$$A_{n+1} (x, y) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^n [a_k A_k (x, y) + b_k B_k (x, y)] + a_{n+1} x^{n+1}$$

$$A_{n+1} (\cos \varphi, \sin \varphi) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \quad (6.29)$$

yazılabilir.

$$\cos^m \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \cos m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(m)} \cos k\varphi \quad (6.30)$$

özelliğini ve (6.29) ifadesini aşağıdaki integralde yerlerine yazıp $A_{n+1}(x, y)$ polinomlarının $A_0(x, y)$ polinomlarına ortogonal olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_0(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2\pi} d\varphi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) d\varphi + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^n} \cos(n+1)\varphi d\varphi \\ & \quad + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada tümevarım hipotezinide göz önünde tutarak eşitliğin sağ yanındaki integralleri hesaplırsak, (6.29) daki

$$a_0 = 0 \quad (6.31)$$

olarak bulunur. $A_{n+1}(x, y)$ polinomunun $A_k(x, y)$ polinomuna ortogonalliğinden

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \right] \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\ &= \left[\frac{a_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi d\varphi + \frac{b_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \cos k\varphi d\varphi \right] + \int_0^{2\pi} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \cos^{n+1} \varphi \cos k\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_k + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\varphi \cos k\varphi}{2^n} + c_k^{(n+1)} \cos^2 k\varphi \right] d\varphi \\
&= a_k + a_{n+1} c_k^{n+1} \sqrt{\pi} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.32}$$

elde edilir. (6.31) ve (6.32) birlikte ele alınırsa

$$a_k = -\sqrt{\pi} a_{n+1} c_k^{(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{6.33}$$

bulunur. Ayrıca

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) B_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 0$$

ortogonalite koşulundan

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} A_{n+1}(x, y) \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\
&= b_k + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \varphi \sin k\varphi d\varphi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.34}$$

olup $b_k = 0$ elde edilir. Bu durumda (6.29) formülünde, (6.30), (6.31), (6.33) ve (6.34) formülleri yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) &= -a_{n+1} \sum_{k=1}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \\
&= -a_{n+1} \sum_{k=1}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi + a_{n+1} \left[\frac{1}{2^n} \cos(n+1)\varphi + \sum_{k=0}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi \right] \\
&= \frac{a_{n+1}}{2^n} \cos(n+1)\varphi
\end{aligned} \tag{6.35}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^{2\pi} [A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = 1$$

ortonormallik koşulu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_{n+1}}{2^n} \cos(n+1)\varphi \right]^2 d\varphi \\ &= \frac{a_{n+1}^2}{2^{2n}} \pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \quad (6.36)$$

bulunur. (6.36) eşitliği (6.35) eşitliğinde yerine yazılırsa (6.28) eşitliğinin ilki $n+1$ için elde edilir. Aynı işlemler $B_{n+1}(x, y)$ polinomu içinde tekrar edilirse

$$\begin{aligned} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &\quad + \alpha_{n+1} \frac{\cos^{n+1} \varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_{n+1} \cos^n \varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.37)$$

olur.

Diğer taraftan (6.30) formülünün her iki tarafının türevi alınır

$$\cos^{m-1} \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \sin m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k^{(m)} \sin k\varphi \quad (6.38)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) B_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

ortogonallik koşulları kullanılırsa (6.37) ve (6.38) formüllerinden

$$\begin{aligned}\alpha_k &= 0, & k &= 1, 2, \dots, n+1 \\ \beta_k &= -\sqrt{\pi}\beta_{n+1}\lambda_k^{(n+1)}, & k &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{6.39}$$

Böylece (6.38) ve (6.39) eşitlikleri dikkate alınır (6.38) eşitliği

$$B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{\beta_{n+1}}{2^n} \sin(n+1)\varphi\tag{6.40}$$

formuna dönüştür.

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} [B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta_{n+1}}{2^n} \sin(n+1)\varphi \right]^2 d\varphi \\ &= \frac{\beta_{n+1}^2 \pi}{2^{2n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\tag{6.41}$$

bulunur.

(6.41) eşitliği (6.40) eşitliğinde dikkate alınarak $n+1$ için (6.28) formüllerinin ikincisi elde edilir. O halde (6.24) çemberi üzerindeki (6.27) sistemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

formunda ortonormal trigonometrik sistemine sahiptir.

6.3 Bir Çevre Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar

Bir önceki bölümdeki

$$\{u_0, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (6.42)$$

homogen harmonik polinomlarını yeniden ele alalım. Bu polinomlar

$$\gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \quad (6.43)$$

birim çemberi üzerinde

$$\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\} \quad (6.44)$$

şeklinde yazılabilir. O halde bu polinomların (6.43) çemberi üzerinde $h(\varphi) \equiv 1$ birim ağırlık fonksiyonuna göre ortonormalliklerinden,

$$\left\{1/\sqrt{2\pi}, u_n(x, y)/\sqrt{\pi}, v_n(x, y)/\sqrt{\pi}\right\} \quad (6.45)$$

homogen harmonik ortonormal polinom sistemi elde edilir. Derecesi n -yi geçmeyen herhangi bir $P_n(x, y)$ harmonik polinomu

$$P_n(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)] \quad (6.46)$$

formunda tek türlü ifade edilebilir.

Burada katsayılar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) ds \quad (6.47)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) ds \quad (6.48)$$

formülleri ile tanımlıdır. (6.43) çemberi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = h(\varphi) \quad (6.49)$$

ile tanımlı olsun. (6.42) sistemine (6.43) çemberi üzerinde (6.49) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalite metodu uygulanırsa,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (6.50)$$

ortonormal harmonik polinomların bir ailesi elde edilir. Diğer taraftan, (6.44) sistemine $[-\pi, \pi]$ aralığında (6.48) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalite metodunu uygulayarak

$$\{A_0, A_n(\varphi), B_n(\varphi)\} \quad (6.51)$$

ortonormal trigonometrik polinomların bir sistemi elde edilir. Kolaylıkla görülebilir ki (6.56) ve (6.51) sistemleri $x = \cos \varphi$ ve $y = \sin \varphi$ koşulları altında denktirler.

Şimdi bir önceki bölümdeki gösterimler ve bazı kısaltmalar kullanılarak (6.50) polinomları için özellikler elde edilecektir.

Bilineer serilerin kısmi toplamlarını

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \quad (6.52)$$

ile ifade edeceğiz. (5.18) eşitliğinden, (ξ, η) ve (x, y) noktalarının (6.43) çemberi üzerinde olması koşulu altında (6.52) fonksiyonu için

$$K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{2} = \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] \quad (6.53)$$

formülü sağlanır.

(6.47) ve (6.48) formüllerini kullanarak (6.46) formülüne benzer olarak $B_n(x, y)$ polinomu için

$$B_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) ds \quad (6.54)$$

gösterimi elde edilir. Gerçekten

$$B_n(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)]$$

formülünde a_0 , a_k , ve b_k katsayıları yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} B_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) ds + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) ds \right) u_k(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) ds \right) v_k(x, y) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) ds \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $B_n(x, y)$ polinomunun (6.49) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallığından

$$\int_{\gamma} h(\xi, \eta) B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) ds = 0 \quad (6.55)$$

koşulu sağlanır. Kısalık açısından, $z = x + iy$ ve $\tau = \xi + i\eta$ kompleks değişkenlerini kullanalım. (6.54) eşitliğinin her iki yanı $h(z)$ ile çarpılır (6.52) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} h(z) B_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} h(z) B_n(\tau) K_n(z, \tau) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} h(z) B_n(\tau) (K_{n-1}(z, \tau) + u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) ds \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan (6.55) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
h(z) B_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [h(z) - h(\tau)] K_{n-1}(z, \tau) ds \\
&\quad + h(z) \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [u_n(z) u_n(\tau) + v_n(z) v_n(\tau)] ds \quad (6.56)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Kabul edelim ki (6.49) ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) \geq h_0 > 0 \quad (6.57)$$

$$|h(x, y) - h(\xi, \eta)| \leq M(|x - \xi| + |y - \eta|) \quad (6.58)$$

koşullarını sağlasın.

(6.56) eşitliğinin sağ kısmındaki ilk terim için (6.53), (6.54), (5.27), (5.28) eşitsizlikleri ve Cauchy, Schwarz, Bunyakovski eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [h(z) - h(\tau)] K_{n-1}(z, \tau) ds \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| M(|x - \xi| + |y - \eta|) K_{n-1}(z, \tau) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| M(|x - \xi| + |y - \eta|) \\
&\quad \times \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) \\
&\quad \quad - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] ds \\
&\leq \frac{2M}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| |1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n - v_n \tilde{u}_n + u_n \tilde{v}_n| ds \\
&\leq \frac{10M}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} \quad (6.59)
\end{aligned}$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

Benzer şekilde (6.56) eşitliğinin sağ kısmındaki ikinci terim için (6.57) ve Cauchy, Schwarz, Bunyakovski eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left| h(z) \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n] ds \right| &\leq \frac{h(z)}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| |u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n| ds \\
&\leq \frac{2M}{\pi \sqrt{h_0}} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| \sqrt{h(\tau)} ds \\
&\leq \frac{2M}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} \quad (6.60)
\end{aligned}$$

tipinde bir eşitsizlik elde edilir. (6.59), (6.60) eşitsizlikleri ve $B_n(\tau)$ polinomunun $h(\tau)$ ağırlık fonksiyonu ile γ eğrisi üzerinde ortonormal olduğu, (6.56) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$h(z) |B_n(z)| \leq \frac{Mc_1}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} = \frac{Mc_1}{\pi \sqrt{h_0}}$$

olur. Benzer bir eşitsizlik $A_n(z)$ polinomu için de sağlanır. Buradan, eğer ağırlık fonksiyonu (6.57) ve (6.58) koşullarını sağlarsa bu durumda (6.50) ortonormal harmonik polinomları birim diskte düzgün sınırlıdır, yani

$$\begin{aligned}
|A_n(x, y)| &\leq c_2, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\
|B_n(x, y)| &\leq c_2, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (6.61)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Suetin 1988).

KAYNAKLAR

- Altin, A. and Aktas, R. 2010. A Class of polynomials in two variables *Mathematica Moravica (AMS-Math Review)* 14(1); 1-14.
- Appell, P. and Kampè de Fèriet, J. 1926. Fonctions hypergèometriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, 434 p., Paris.
- Askey, R. 1975. Orthogonal Polynomials and Special Functions, Society for Industrial and Applied Mathematics, 356 p., Philadelphia.
- Dunkl, C.F. and XU, Y. 2001. Orthogonal Polynomials of Several Variables Cambridge Univ. Pres, 389 p., New York.
- Engelis, G.K. 1974. On some two-dimensional analogues of classical orthogonal polynomials. *Latv. Mat. Ezhegodnik*, 15; 169-202.
- Jackson, D. 1936. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. *Duke Math. Journal*, 2; 423-434.
- Kornwinder, T.H. 1975. Two-Variable Analogues of the Classical Orthogonal Polynomials Theory and Appl. Spec. Funct., New York.
- Krall, H.L. and Sheffer, I.M. 1967. Orthogonal polynomials in two variables. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4; 325-376.
- Lyskova, A.S. 1991. Orthogonal polynomials in several variables. *Soviet Math. Dokl.* 43(19); 264-268.
- Rainville, E.D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, 377 p., New York.

Suetin, P.K. 1988. Orthogonal Polynomials in Two Variables Gordon and Breach Science Publishers, 348 p., Moscow.

Szegő, G. 1939. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, 403 p., New York. 195

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra ÜNAL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 10.11.1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kalaba Anadolu Lisesi (2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Eylül 2011 – Haziran 2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2013-...)