

**ELASTİSİTE TEORİSİ DENKLEMLERİNİN
MİKROMEKANİĞE UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

Osman BULUT

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

MAYIS 2013

**ELASTİSİTE TEORİSİ DENKLEMLERİNİN
MİKROMEKANİĞE UYGULANMASI**

DOKTORA TEZİ

**Osman BULUT
(501072016)**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Necla KADIOĞLU

MAYIS 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501072016 numaralı Doktora Öğrencisi **Osman BULUT**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ELASTİSİTE TEORİSİ DENKLEMLERİNİN MİKROMEKANİĞE UYGULANMASI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Necla KADIOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : **Doç. Dr. Şenol ATAÖĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Reha ARTAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Deniz GÜNEY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Arif N. GÜLLÜOĞLU
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Ünal ALDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç Dr. Cihan DEMİR
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **10 Nisan 2013**
Savunma Tarihi : **24 Mayıs 2013**

Anneme ve babama,

ÖNSÖZ

Herhangi bir yapının tasarımı sırasında kullanılacak malzemede olması en çok istenilen özellikler, sağlamlık, yapının estetiğine uygunluk ve ucuzluktur. Ucuzluğu, kolay elde edilebilirlik diye yorumlayarak birinci sıraya çıkarmak mümkünse de, yapının kullanım ve önemine bağlı olarak sağlamlık vazgeçilemez bir özelliktir. Malzemenin yapıda uygulanması ile ortaya çıkan görüntünün estetikliği ise yapının kullanılabilirliğini birinci dereceden etkileyen bir faktördür. Birbirlerine tercih edilmek istenmeyen bu özelliklerin hepsinin de belirli bir düzeyde bulunduğu optimum bir çözüm, gelişen ve çoğalan ihtiyaçları ile birlikte insanlık tarafından sürdürülen, devamlı bir araştırma konusudur. Bu anlamda mekanik, bu işin önemli bir kısmı olan dayanım problemini yüklenmiştir. Ne var ki, mekanikte kurulan teoriler makro boyutta işlerken, mikro boyuttaki belirsizlik devam etmektedir.

Kompozit malzemelerin üretilmesi, bahsi geçen optimum malzeme arayışında insana önemli bir kapı açmıştır. Farklı yöntemlerle üretilen birçok kompozit malzeme, hem sağlamlığı, hem ucuzluğu, hem de estetikliği belli bir seviyeye çıkarmıştır. Günümüzde kompozitler, tasarım esnasında en çok tercih edilen malzemelerdendir.

Bu çalışma, yukarıda belirtilen iki konu açısından da bir öneme sahip olabilir. Zira içerisine mikron mertebeye sahip eklentiler katılan bir malzemenin, bu mertebedeki değişikliklerle nasıl davrandığını gözlemeye yönelik çalışmaları içermekle birlikte, bu yolla oluşturulan bir kompozitin malzeme katsayılarının belirlenmesine yarayacak bağıntılar sunmaktadır. Bağıntıların analitik çözümleme ile elde edilmesinin yanında, bunların deneyler ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırmasının yapılması da çalışmaya ait özelliklerdendir.

Bu çalışma esnasında engin bilgi birikimi ve tecrübeleri ile doktora çalışmam boyunca sabırla beni eğiten ve yönlendiren, çok değerli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Necla Kadioğlu'na; sürekli yanımda bulduğum, problemlere pozitif bakış açısı kazandıran çok değerli tez eş danışmanım Sayın Doç. Dr. Şenol Ataoğlu'na teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca özellikle deney çalışmalarında bana hayranlık duyduğum güzellikte fikirler verip, çalışmamı destekleyen Sayın Prof. Dr. Arif Nihat Güllüoğlu'na teşekkürlerimi sunarım. Yine, çalışmamın olumlu yönde ilerlemesine destek veren değerli jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Reha Artan ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Deniz Güney'e teşekkür ederim. Deney çalışmalarında destek veren ve bizzat çalışan Sayın Araş. Gör. Dr. Metin Yüksek, Sayın Araş. Gör. Erhan Sancak ve Sayın Araş. Gör. İsmail Topçu'ya; ayrıca deney malzemelerini temin konusundaki yardımlarından ötürü

Dokuz Kimya'dan Sayın Hakan Sıcakyüz'e de teşekkür ederim. Tez sürecindeki araştırmalarım için verdiği destekten dolayı İTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri birimine teşekkür ederim. Son olarak bütün çalışmalarım boyunca sabırla bana katlanan ve zor anlarımı paylaşan kıymetli eşime de minnettarlığımı sunarım.

Mayıs 2013

Osman BULUT
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
SEMBOL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Problemin Tanımı	2
2. PARÇACIK İÇEREN BİR KOMPOZİT CİSMİN MALZEME SABİT- LERİNİN ANALİTİK YOLLA BULUNMASI.....	5
2.1 Efektif Bulk Modülünün Belirlenmesi	5
2.1.1 Küresel bir cismin, hidrostatik çekme halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması.....	5
2.1.2 Tek küresel parçacık içeren bir küresel cismin, hidrostatik çekme halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması	11
2.1.3 Efektif Bulk modülü ifadesinin elde edilmesi	15
2.1.4 Sayısal bir uygulama	16
2.2 Efektif Kayma Modülünün Belirlenmesi	17
2.2.1 Küresel bir cismin, basit kayma halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması.....	17
2.2.2 Tek küresel parçacık içeren bir küresel cismin, basit kayma halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması	23
2.2.3 Efektif cisim için iş ve kayma modülü ifadesi	29
2.2.4 Sayısal çözüm ile sonuçlar	30
3. İNCE LİFLER İÇEREN KOMPOZİT CİSMİN KAYMA MODÜLÜNÜN ANALİTİK YOLLA BULUNMASI.....	33
3.1 Silindirik Bir Cismin Kendi Eksenine Etrafında Burulması	33
3.2 Tek İnce Lif İçeren Silindirik Bir Cismin Kendi Eksenine Etrafında Burulması	39
3.3 Efektif Kayma Modülünün Hesaplanması	42
3.4 Sayısal Bir Uygulama.....	43
3.5 İnce Lifler İçeren Kompozitin Mikropolar Malzeme Olarak Ele Alınması ...	43
3.5.1 Mikropolar teori.....	44
3.5.2 Efektif cismin basit burulma halinde toplam şekil değiştirme işinin mikropolar teori kullanılarak hesaplanması ve mikropolar malzeme katsayıları arasındaki ilişkinin elde edilmesi.....	46

4. DENEYSEL ÇALIŞMALAR	51
4.1 Numunelerin Hazırlanması.....	51
4.2 Basit Çekme Testinin Uygulanması	54
4.3 Deney Sonuçlarının Yorumlanması	56
5. SONUÇLAR.....	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	63

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1: Efektif cisim için teori ve deneyden elde edilen kayma modülüne ait sonuçlar.	58
--	----

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: (a) Heterojen malzemede matris ve partiküller, (b) Heterojen malzemeye eşdeğer fiktif malzeme.	3
Şekil 1.2	: (a) Parçacık içeren temsili hacim elemanı, (b) Efektif cisim.	4
Şekil 1.3	: (a) Lif içeren temsili hacim elemanı, (b) Efektif cisim.	4
Şekil 2.1	: Küresel koordinat takımında birim normal vektörler.	6
Şekil 2.2	: τ_o hidrostatik çekme gerilmesine maruz küresel bir cisim.	7
Şekil 2.3	: Hidrostatik çekme halinde küresel parçacık içeren temsili hacim elemanı.	12
Şekil 2.4	: Küresel parçacık içeren kompozitin Bulk modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.	16
Şekil 2.5	: Küresel parçacık içeren kompozitin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.	30
Şekil 2.6	: Küresel parçacık içeren kompozitin Poisson oranının hacim konsantrasyonu ile değişimi.	31
Şekil 3.1	: h yüksekliğinde, b yarıçaplı, M_0 burulma momenti etkileyen silindir.	33
Şekil 3.2	: Silindirik koordinat takımında birim normal vektörler.	34
Şekil 3.3	: r yarıçaplı, dz yüksekliğinde silindirik hacim elemanı.	35
Şekil 3.4	: Burulma momentine maruz tek ince lif içeren silindirik cisim.	40
Şekil 3.5	: Silindirik lif içeren kompozit cismin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.	43
Şekil 3.6	: Lifli ve parçacıklı kompozit cismin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.	44
Şekil 3.7	: Mikropolar cisimden alınan bir diferansiyel hacim elemanı üzerinde gerilme ve gerilme-çifti bileşenleri.	45
Şekil 4.1	: Numune hazırlanması için kullanılan paslanmaz çelikten imal edilmiş kalıp.	51
Şekil 4.2	: %1 ve %1.5 oranında konulan liflerin kesitte yerleşimlerinin şeması	52
Şekil 4.3	: Kalıp üzerinde liflerin yerleşimine ait fotolar.	53
Şekil 4.4	: Numunenin infüzyon yöntemi ile dökülmesi için oluşturulan düzenek	53
Şekil 4.5	: Hava konveksiyonlu dijital kontrollü fırın.	54
Şekil 4.6	: Basit çekme için numunenin bağlantısı.	54
Şekil 4.7	: Sadece polyester ile imal edilmiş numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği	55
Şekil 4.8	: %1 lif içeren kompozit numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği	55

Şekil 4.9	: %1.5 lif içeren kompozit numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği	56
Şekil 4.10	: Deneysel ve teorik sonuçların karşılaştırılması	58

SEMBOL LİSTESİ

a, b	: Yarıçaplar
$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$	: Mikropolar malzeme sabitleri
K^M, μ^M	: Matrise ait Bulk ve kayma modülü
K^P, μ^P	: Eklenti maddesine ait Bulk ve kayma modülü
K^*, μ^*	: Fiktif malzemeye ait Bulk ve kayma modülü
$\mathbf{u}$	: Yer değiştirme vektörü
u_r, u_θ, u_φ	: Yer değiştirme vektörünün radyal, θ ve φ doğrultularındaki bileşenleri
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$	: Küresel koordinat takımının birim vektörleri
r, θ, φ	: Küresel koordinat takımında değişkenler
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Şekil değiştirme tansörü
τ_o	: Hidrostatik çekme gerilmesi
λ, μ	: Lamé sabitleri
δ_{ij}	: Kronecker deltası
$\boldsymbol{\tau}$	: Gerilme tansörü
A, B, C, D	: İntegral katsayıları
dV	: Diferansiyel hacim elemanı
V	: Toplam hacim
U	: Toplam şekil değiştirme enerjisi
c	: Hacim konsantrasyonu
E, ν	: Elastisite modülü ve Poisson oranı
$\mathbf{n}$	: Birim dış normal vektörü
ω	: Küresel harmonik fonksiyon
$\mathbf{r}$	: Konum vektörü
α_1, α_2	: Harmonik fonksiyon çözümünde katsayıları
$\mathbf{T}$	: Yüzey gerilme vektörü
f	: Bulk modülünün kayma modülüne oranı
x_1, x_2, x_3	: Kartezyen koordinat takımı değişkenleri
h	: Silindirin yüksekliği
$\mathbf{M}_0$	: Burulma momenti vektörü
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	: Silindirik koordinat takımının birim vektörleri
r, φ, z	: Silindirik koordinat takımında değişkenler
M_z	: z doğrultusundaki burulma momenti vektörü
$\gamma_\varphi, \gamma_{a\varphi}$	: Kayma açısı vektörünün bileşenleri
$\mathbf{m}$	: Birim alana düşen burulma momenti
μ_{ij}	: Gerilme çifti bileşenleri
$\boldsymbol{\phi}$	: mikro dönme vektörü
$\boldsymbol{\gamma}$	: Asimetrik şekil değiştirme tansörü
κ	: Burulma tansörü
ε_{kij}	: Permütasyon sembolü

ELASTİSİTE TEORİSİ DENKLEMLERİNİN MİKROMEKANİĞE UYGULANMASI

ÖZET

Bu çalışmada, lineer-elastik, homojen ve izotrop malzeme kabulü altında, yarıçapı mikron mertebesinde olan küresel parçacıklar veya kesit alanının yarıçapı mikron mertebesinde olan silindirik geometriye sahip lifler içeren kompozitlerin elastik sabitlerini veren ifadeler elde edilmeye çalışılmıştır. Burada, kompoziti oluşturan matris malzemesinin elastik özellikleri, buna eklenen katkı maddesininkilere göre çok düşüktür. Ayrıca katkı malzemesinin hacminin, toplam kompozitin hacmine oranının düşük olduğu durumlar göz önüne alınmıştır. İlgili kompozitin mikro yapısı seviyesinde yapılacak değişikliklerle mekanik davranışındaki değişim araştırılmıştır. Bu amaçla, yapılan kabuller çerçevesinde kompozit malzemeden alınan temsili hacim elemanının değişik gerilme hallerine maruz olması durumunda, üzerinde biriken toplam şekil değiştirme işleri hesaplanmıştır. İlgilenilen hacim elemanına eş değer, fiktif hacim elemanı için aynı iş hesapları yapılmıştır. Bu hesaplar yapılırken başlangıçta, bilinen klasik elastisite teorisi denklemleri kullanılmıştır. Bilindiği gibi klasik elastisitede dış etkilere maruz bir cisimde iç kuvvet, gerilme tansörü ile açıklanır. Başka bir deyişle, cismin içerisindeki bir nokta üç doğrultuda ötelenme yapar ki, bu ötelenmeler yer değiştirme vektörünü tanımlar. Mikropolar elastisitede ise ötelenmenin yanında mikro dönmeler de tanımlanmaktadır. Ayrıca gerilme tansörünün yanında gerilme-çifti tansörü de ortaya çıkar. Buna ek olarak, gerilme tansörü klasik elastitede simetrikken, mikropolar elastisitede simetrik olmayabilir. Bu çalışmada, buna ait bir uygulama da yapılmıştır. Ayrıca teorik olarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması açısından deneysel olarak yapılan çalışmalar da son kısımda yer almaktadır.

Küresel parçacıklar içeren bir kompozitin Bulk modülü ifadesinin elde edilebilmesi için b yarıçaplı küresel cisimde hidrostatik çekme problemi ele alınmıştır. Klasik elastisite denklemleri kullanılarak, cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi hesaplanmıştır. İkinci olarak, eş merkezli, a ve b yarıçaplı iç içe iki kürenin, aynı gerilme hali için üzerlerinde biriken toplam şekil değiştirme işleri hesaplanmıştır. Ele alınan bu son problem, küresel parçacık içeren kompozit cisimden alınan temsili hacim elemanına karşı gelmektedir. İlk problemde ele alınan cisim ise bu hacim elemanına eş değer fiktif bir malzeme olarak düşünülmüştür. Hesaplanan işlerin eşitlenmesi ile kompozit cismin Bulk modülüne karşı gelen efektif Bulk modülünün ifadesi, matrisin ve parçacığın elastik sabitleri ile kompozitin hacim konsantrasyonuna bağlı olarak elde edilmiştir.

Aynı tür kompozitin kayma modülünü hesaplamak için bahsedilen tek küresel cismin ve iç içe iki küresel cismin, basit kayma haline maruz oldukları durumda toplam şekil değiştirme işleri hesaplanmıştır. Buradan, bir önceki problemde uygulanan yöntemle,

kompozitin kayma modülünün hacim konsantrasyonuna bağlı değişimi belli bir matris ve partikül malzemesi için elde edilmiştir.

Lif katkılı kompozitin kayma modülü hesabı için ele alınan problem, silindirik cismin kendi eksenine etrafında basit burulmasıdır. Buradan, silindirik tek cisimde ve iç içe iki silindirik cisimde biriken toplam iş ifadeleri klasik elastisite denklemleri kullanılarak elde edilmiş ve aynı yöntemle kompozite ait kayma modülü ifadesi elde edilmiştir.

Son olarak ele alınan problemde, fiktif malzeme olarak düşünülen tek silindirik cisim, mikropolar olarak düşünülmüş ve simetrik olmayan elastisite teorisi denklemleri kullanılmıştır. Ele alınan problem yine basit burulmadır. Burada hesaplanan iş, iç içe iki silindirik cisim için bir önceki problemde hesaplanan işe eşitlenerek, malzemenin mikropolar katsayıları olan β ve γ arasında bir bağıntı elde edilmiştir.

Deneyssel olarak yapılan çalışmalarda matris malzemesi olarak polyeşter seçilmiştir. Katkı maddesi olarak silindirik lif için Kevlar lifler kullanılmıştır. Deney numunelerinin hazırlanması için silindirik geometride hazırlanan kalıba öncelikle sadece polyeşter dökülerek numuneler elde edilmiştir. Sonra lifler yerleştirilerek döküm yapılmıştır. Bunlara ait %1 ve %1.5 hacim konsantrasyonunda iki numune hazırlanmıştır. Ardından bunların basit çekme testleri yapılarak elastisite modülleri ve Poisson oranları elde edilmiştir. Buradan fiktif malzemeye ait Bulk modülü ve kayma modülü elde edilmiştir.

AN APPLICATION OF THE THEORY OF ELASTICITY IN MICROMECHANICS

SUMMARY

In this study, under the assumptions of linear-elastic, homogeneous, and isotropic materials, the expressions of the elastic constants of the composites including spherical particles having radius in micron order or thin cylindrical fibers having radius in micron level, have been obtained. Here, the elastic constants of matrix material are very lower than those of particles or fibers. Additionally, it is considered that the ratio of the volume of inclusion to the volume of composite is small. The mechanical behaviours of associated composites have been observed while changings have been occuring on micro-structure of it. For this purpose, the strain energies, which belong to the different states of stress, have been calculated on the representative volume element of the composite material. Similar strain energies have also been calculated on effective volume elements which are assumed to be equivalent to the volume elements mentioned above. During these calculations, firstly, the equations of the classical theory of elasticity have been used.

In the classical elasticity, as it is known, the transfer of loadings in a body which is subjected an effect is occured through a surface element dA situated in the interior of the body by only the stress vector. In other words, the degree of freedom of a differential volume element in the interior of the body is three which are displacements along three independent directions. However, according to the micropolar theory, volume elements have got abilities of rotation. This means, the degree of freedom is six and the transfer of loading is occured not only by the stress vector but also by the stress-couple vector. So, the stress and the strain tensors are not symmetric any more. In this study, a problem has been solved using to this last theory.

As an application to this type of the composite materials, experimental studies have been added in the last chapter. The results from experiments are compared with those from theoretical solutions.

To obtain the expression of the Bulk modulus of a composite including spherical particles, firstly, hydrostatic tension problem for a single spherical body having radius b has been solved. Here, only one component of the displacement vector $\mathbf{u}$ is different from zero in spherical coordinates which is in the radial direction. So, the components of the stress and the strain tensors are expressed in terms of this component. The equilibrium equations are reduced to a single differential equation of which dependent variable is radial displacement while independent variable is radial distance from origin. The solution of this equation involves two integration constants which can be calculated by boundary conditions. Using this displacement expression the components of the strain and stress tensors are calculated. The strain energy accumulated in spherical volume can be calculated by these tensors.

As the second step, two nested spherical bodies whose centroids are positioned at the same point have been considered. They have radii a and b . The state of stress is hydrostatic tension again. The expression in terms of unknown constants which has been obtained in the previous problem for radial displacement component is re-written for the inner and the outer sphere, separately. In this new problem, the number of unknown constants is two times of that in the previous problem. The number of boundary conditions is equal to the that of unknown. From the solution of these equations, constants are obtained. The stress and the strain tensors have been written and the total energy, which is the total of the energies accumulated in both of two materials, has been calculated.

Here, the second body having two different materials represents the representative volume element of the composite including spherical particles. The single spherical body, which has been defined in the first step, has been thought as an effective single material which is equivalent to this representative volume element of the composite. The calculated strain energies have been equalized based on the equivalence of two bodies. So, the expression of the Bulk modulus of associated composite has been obtained in the terms of the elastic constants of matrix and particles, and the volume ratio or concentration.

The total strain energy accumulated in two sphere model has been equalized to the strain energy of a single sphere made from the effective material under simple shear, to calculate the shear modulus of the composite. For this problem, the displacement vector has been written as the combination of the three types solutions of spherical harmonics to solve a single sphere. Here, there are six unknown constants for the single sphere. The strain and the stress components have been obtained by writing three boundary conditions related to the stress components on the spherical surface. Besides the displacement vector must be finite at the origin. Using this condition, three solutions can be omitted. Number of the equations are nine while number of the remaining unknown coefficients is three. But if these equations are examined, the real number of the linear independent equations comes out as three. Solving these equations, the displacement vector, the strain and the stress tensors, and the strain energy of the single sphere have been calculated.

For two nested spheres, the solution involves 12 unknown constants. Three of them can be eliminated from the condition written at the origin. In addition to three conditions related the surface traction components at the outer spherical body, there are six more conditions written on the common spherical boundary of two materials. Three of them, displacement components, are equal on this boundary. Last three equations which indicates surface traction vectors are also equal on this boundary for both materials. At first, on spherical boundaries, 27 equations have been obtained. But only nine of them linearly independent. Obtaining an alpha numeric solution is difficult. To handle this difficulty, a numerical solution has been made for a specific value of concentration. It must be emphasized that the shear moduli of two different materials must be known. But the strain energy has been obtained for composite in the closed form in the terms of remaining unknown coefficients.

Equating two strain energies obtained above and using numerical solution, a curve has been plotted representing the effective shear modulus as a function of concentration.

The problem of simple torsion of a cylindrical body with respect to its own axis is considered for calculation of the shear modulus of a fiber reinforced composite. Here, the expressions of the total strain energies on the single cylindrical body and two nested cylindrical bodies have been obtained using the classical theory of elasticity. So, following the same method as previous problems the expression of the shear modulus of composite material has been obtained.

As the last problem, the single cylindrical body which was thought as effective material can be considered as micropolar material. Here, the equations of the theory of asymmetric elasticity have been used. The problem has been simple torsion again. In the micropolar theory, six material constants occur when the constitutive equations are written. In addition to μ and λ from the classical theory of elasticity, there are α , β , γ , and ε constants. A special material whose some constants, α and ε , are zero has been considered in here. In this condition, the stress and the strain tensors are symmetric again. Because the analogy between them, the problem of the axial normal force acting on the top and the bottom surfaces of cylindrical body has been considered instead of the problem of torsion of it. It can be understood that the problem is rotational symmetric. The calculated energy here has been equalized to the energy of the previous two nested cylindrical bodies. So, the relation between β and γ which are micropolar constants of material has been obtained.

In the experimental studies, the matrix material has been chosen as a type of poliester. As the inclusion, a type of kevlar has been used for cylindrical fibers. Firstly, only poliester has been molded. After that, composite samples have been prepared. Two samples which have the volume ratio of 1% and 1.5% have been prepared. Simple tension test of these samples have been achieved and moduli of elasticity and Poisson's ratios have been obtained for each sample. The experimental results has been plotted and compared with those from the analytical calculations.

1. GİRİŞ

Yapıların analizinde kullanılan sürekli ortamlar mekaniği, malzemelerin boşluksuz ve bunların bulunduğu hacmi tam olarak kapladığını varsaymaktadır. Ele aldığı herhangi bir cisimden alınacak parçalarda, sürekli daha küçüğe gidilerek elde edilecek sonsuz küçük elemanın, başlangıçtaki bütün haldeki cisim ile aynı malzeme özelliklerine sahip olduğunu kabul eder. Bu modellemede, malzemelerin atomlardan oluştuğunun göz ardı edilmesi, atomlar arası mesafelerin cismin boyutlarına göre çok küçük olmasından dolayı doğru olarak kabul edilebilir. Ancak son zamanlarda yapılan çalışmalar ortaya koymaktadırlar ki; mikro yapı ve bu boyuttaki etkileşimler, cismin özelliklerini etkilemektedirler. Yani malzemelerin makro özelliklerinden olan mekanik özellikler, mikro yapıyla yakından ilgilidir. Bu sebeple analiz sırasında, Nobel ödüllü Richard Feynman 'ın 1959 'da Kaliforniya Teknoloji Enstitüsü 'nde yaptığı konuşmada belirttiği, alttaki çok sayıda oda, görmezden gelinemez.

Bu gerekliliğin bir sonucu olarak ortaya çıkan nanomekanik veya mikromekanik, en azından bir boyutu $1\mu m$ 'den küçük olan cisimlerin yani nanometre veya mikrometre ölçekteki nesnelerin mekanik davranışlarının incelendiği alandır. Büyük boyutlar için elde edilmiş ve doğrulukla uygulanabilen elastisite denklemlerinin bu alanda uygulanması ve sonuçlarının irdelenmesi, nano veya mikron mertebesindeki etkileşimlerin mekanik davranışlara etkisinin modellenmesi adına büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmada, bir malzemenin mikro yapısı seviyesinde yapılacak bir değişikliğin makro boyuttaki mekanik özelliklere ait sonuçlarının gözlenebilmesi için, bu malzemeye mikron mertebesinde boyuta sahip eklentiler yapılarak oluşturulacak kompozitler ele alınmıştır. Kompozit malzemeler son zamanlarda tasarımcıların en çok tercih ettiği malzeme türlerinden birisidir. Zira yapıların, estetiğini yitirmeden mekanik özelliklerinin iyileştirilmesi isteği, maliyetlerinin artmasıyla, kompozitleri alternatif olarak sunmuştur. Kompozit malzeme üretiminde amaç, dış etkilere karşı

daha dayanıksız olsa bile elde edilmesi, işlenmesi ve şekil verilmesi daha kolay olan malzemelerin, yüksek mekanik özellikli, uygun malzemelerle takviye edilerek tüm mekanik özelliklerinin ilk hallerine göre daha iyi olmalarını sağlamaktır.

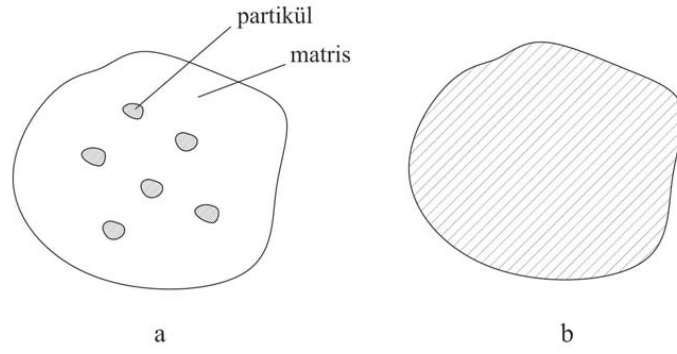
Bu çalışma kapsamında, içerisinde mikron mertebede boyuta sahip parçacık veya lif bulunduran kompozit malzemelerin elastik özellikleri incelenmiştir. Ele alınan kompozitler düşük miktarda katkı maddesi içeren, böylece parçacıkların veya liflerin birbirleri ile etkileşmediği ve bu katkı maddelerinin kompozit içerisinde homojen dağılım gösterdiği türdedir. Ayrıca kompozitin içerisine katılan katkı malzemesinin elastik özellikleri, matris malzemesininkine göre çok daha yüksek olacaktır. Yine bu çalışma kapsamında ele alınan tüm malzemelerin, lineer-elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilecektir.

1.1 Problemin Tanımı

Sabitleri bilinen bir malzeme içerisine, özellikleri bilinen başka bir malzemeye ait partiküllerin veya iplikçiklerden oluşan lif formundaki eklentilerin yerleştirilmesi ile elde edilen karışım, heterojen malzeme olarak kabul edilebilir ki bu tarz heterojen malzemeler bu çalışma kapsamında ele alınacak kompozit malzemelerdir. Bu heterojen malzemenin malzeme sabitlerinin her iki malzemeye ait malzeme sabitlerinden farklı olacağı açıktır.

Heterojen malzemede parçacık veya lif hacim yoğunluğunun uniform bir dağılım gösterdiği kabul edilirse bu heterojen malzeme, fiktif bir malzemeye eş değer olarak değerlendirilebilir (Şekil 1.1) Böylece problem, bu fiktif malzemenin elastik sabitlerinin bulunması problemi olur.

Ele alınan heterojen malzeme iki ayrı malzemedan oluşmaktadır. Bunlardan hacmin büyük kısmını oluşturan malzemeye matris, diğer malzeme olarak mikron mertebede çapa sahip küresel formda olduğu kabul edilenlere partikül veya parçacık, en kesit yarıçapı mikron mertebede olan, silindir şeklinde olduğu düşünülen iplikçik formundakilere ise lif denilmiştir. Matris malzemesine, eklenti maddesine ve fiktif malzemeye ait Bulk ve kayma modülleri sırasıyla K^M , μ^M , K^P , μ^P , K^* , μ^* sembolleri ile gösterilecektir. Burada matris malzemesinin elastik özellikleri,



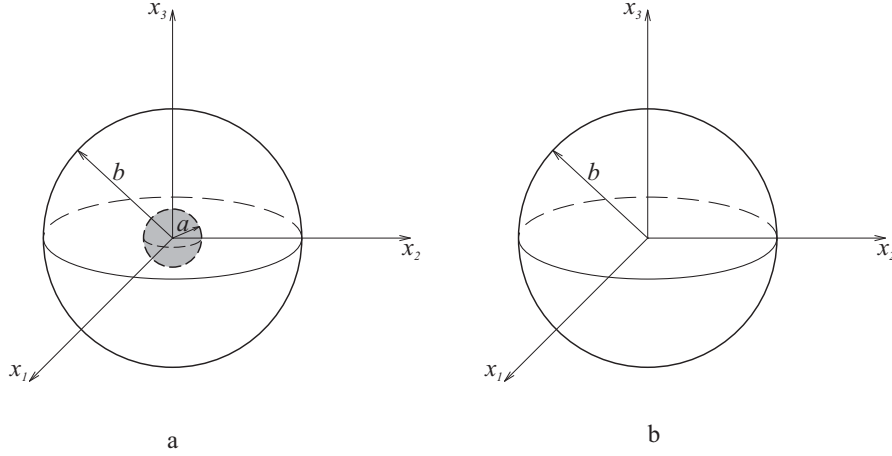
Şekil 1.1: (a) Heterojen malzemede matris ve partiküller, (b) Heterojen malzemeye eşdeğer fiktif malzeme.

eklenti malzemesinin elastik özelliklerine göre çok düşüktür. Karışım oluşturulurken partiküllerin veya liflerin matrise göre hacim oranı çok küçük olsa bile, fiktif malzemenin elastik özelliklerinin matrisinkilere göre daha iyi olması beklenmektedir.

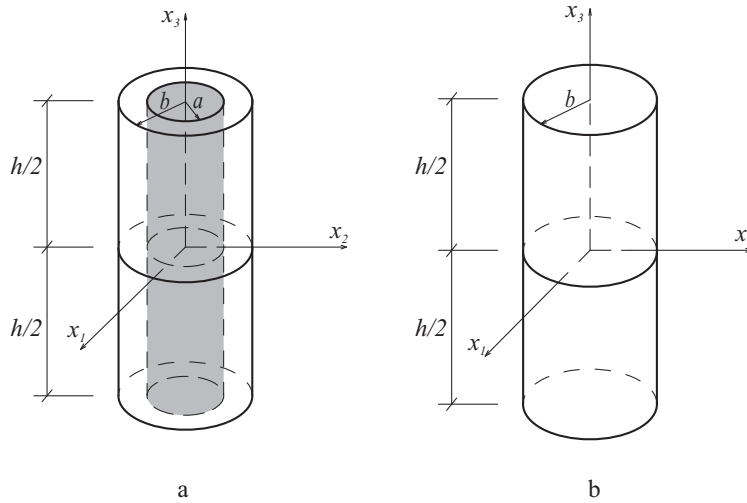
Eklenti maddesi hacim yoğunluğunun az olduğu heterojen malzeme için bu parçacıkların veya liflerin birbirleriyle etkileşmediği düşünülmektedir. Böylece, parçacıkların şekillerinin küresel ve liflerin şekillerinin silindir olduğu kabulü altında, matrisin tamamını düşünmek yerine her biri tek bir partikül içeren küresel kompozit elemanlar veya her biri silindirik formda tek iplikçik içeren silindirik kompozit elemanlar ele alınır. Bu, problemi tek bir kompozit eleman üzerinde inceleme imkanı sağlar. Bu elemanlar, temsili hacim elemanı olarak isimlendirilmektedir [1, 2]. Dolayısıyla ele alınacak iki tür problemden ilki, bahsedilen kabuller altında, herhangi bir gerilme veya şekil değiştirme haline maruz b yarıçaplı küresel bir matris içerisinde, bununla eş merkezli, a yarıçaplı küresel bir parçacıktan oluşan kompozit malzemenin malzeme katsayılarının bulunmasıdır. İkincisi ise, aynı kabullerle, yine herhangi bir gerilme veya şekil değiştirme haline maruz b yarıçaplı silindirik bir matris içerisinde, bununla eş merkezli, a yarıçaplı silindirik bir liften oluşan kompozit malzemenin malzeme katsayılarının bulunmasıdır.

Kompozit cisim belirli bir gerilme veya şekil değiştirme etkisi altında belirli bir davranış sergiler. Bu sebeple tek partikül içeren heterojen hacim elemanı, yapılan fiktif malzeme tanımlaması da göz önünde bulundurularak, kendisi ile aynı etki altında aynı davranışı gösteren, b yarıçaplı tek bir küresel cisim ile eşdeğerdir. Aynı şekilde tek lif içeren heterojen hacim elemanı da b yarıçaplı tek bir silindirik

cisim ile eşdeğerdir. Bu cisimlere efektif cisim denilecektir (Şekil 1.2, 1.3). Bahsedilen kompozit malzemelerin elastik sabitlerinin belirlenebilmesi için, matris ile tek parçacıktan oluşan küresel cismin veya matris ile tek liften oluşan silindirik cismin, değişik gerilme etkileri altında, üzerlerinde biriken toplam şekil değiştirme işinin, ilgili efektif cismin ilgili gerilme haline maruz olması durumunda üzerlerinde biriken işle eşitliği kullanılacaktır. Burada ele alınan küresel parçacıklar içeren bir kompozitin elastik sabitlerinin tayini aynı metotla Hashin tarafından yapılmış ancak o, toplam işi hesaplamak yerine farklı bir hesap yaparak katsayılar için alt ve üst limitleri tayin etmeye çalışmıştır. Bunun özellikle kayma modülü hesabında ortaya çıkan çok uzun ifadelerin makalenin yazıldığı tarihte hesaplanmasının çok uzun olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.



Şekil 1.2: (a) Parçacık içeren temsili hacim elemanı, (b) Efektif cisim.



Şekil 1.3: (a) Lif içeren temsili hacim elemanı, (b) Efektif cisim.

2. PARÇACIK İÇEREN BİR KOMPOZİT CİSMİN MALZEME SABİTLERİNİN ANALİTİK YOLLA BULUNMASI

Bu bölümdeki problemlerde ele alınacak cisim, önceki bölümde açıklandığı üzere, b yarıçaplı bir küresel matrisin içerisinde, bununla eş merkezli, a yarıçaplı tek partikülün oluşturduğu temsili hacim elemanı ile buna eş değer olduğu varsayılan b yarıçaplı tek küresel efektif cisimdir. Bu cisimlerin hidrostatik çekme ve basit kayma hallerine maruz olmaları durumunda üzerlerinde biriken toplam şekil değiştime işleri klasik elastisite teorisi denklemleri kullanılarak hesaplanmıştır. Buradan, Bulk modülü ve kayma modülüne ait ifadeler elde edilmiştir. Hesaplarda, cismin dönel simetrik geometrisine en uygun olan küresel koordinat takımı kullanılmıştır.

2.1 Efektif Bulk Modülünün Belirlenmesi

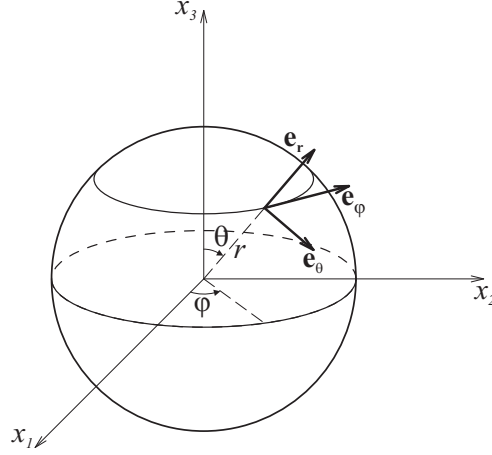
2.1.1 Küresel bir cismin, hidrostatik çekme halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması

Küresel koordinat takımında, yer değiştirme vektörü $\mathbf{u}$ ve bu vektörün bileşenleri ile $\boldsymbol{\epsilon}$ şekil değiştirme tansörünün bileşenleri arasındaki bağıntılar sırasıyla

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \right) \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \\ \epsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılırlar [3, 4]. Burada, u_r , u_θ ve u_φ yer değiştirme vektörünün sırasıyla radyal, θ ve φ doğrultusundaki bileşenleridir. $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_\varphi$ sırasıyla bu doğrultulardaki birim normal vektörlerini göstermektedirler (Şekil 2.1). Burada ∂ , kısmi türevi göstermektedir.



Şekil 2.1: Küresel koordinat takımında birim normal vektörler.

Burada ayrıca $\boldsymbol{\epsilon}$, şekil değiştirme matrisi

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{r\varphi} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\varphi} \\ \epsilon_{\varphi r} & \epsilon_{\varphi\theta} & \epsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

şeklinde belirtilir.

Ele alınan cisim τ_o hidrostatik çekme gerilmesi altındadır (Şekil 2.2).

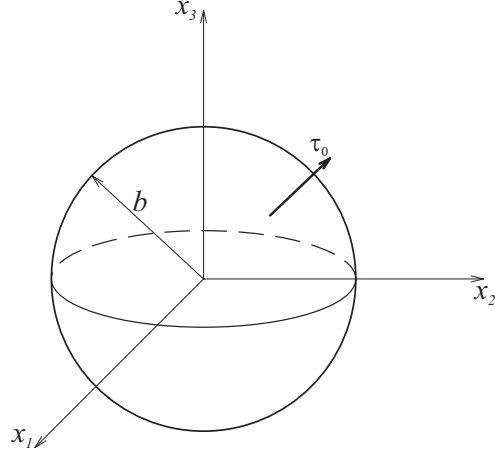
Gerilme halinden ve cismin geometrisine ait dönel simetriden dolayı, yer değiştirmenin yalnızca radyal bileşeni sıfırdan farklı olur. Ayrıca bu bileşenin, θ ve φ 'den bağımsız olduğu açıktır. Başka bir deyişle u_r , yalnızca r değişkenine bağlıdır. Bu, (2.1) 'de verilen vektörle (2.2) bağıntılarında yazılırsa

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r, \quad u_\theta = u_\varphi = 0 \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\theta\varphi} = 0 \quad (2.4)$$

sonuçları bulunur.



Şekil 2.2: τ_0 hidrostatik çekme gerilmesine maruz küresel bir cisim.

Elastisite teorisinde gerilme bileşenlerini şekil değiştirme bileşenleri cinsinden veren bağıntı

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada λ ve μ , Lamé sabitleridir. i ve j indisleri bileşenin satır ve sütun etiketidir ve r, θ, φ olabilir. Ayrıca tekrarlanan indis üzerinde toplama uylayımı vardır. δ_{ij} ise Kronecker deltasıdır ve

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. (2.5) bağıntısında (2.4) sonuçları kullanılarak

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r} \\ \tau_{\theta\theta} &= \tau_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde gerilme bileşenleri yazılır. Şekil değiştirme tansörünün bileşenlerini yer değiştirme bileşenleri cinsinden veren bağıntı

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada $\nabla \mathbf{u}$, yer değıştirmenin gradyanı ve $(\nabla \mathbf{u})^T$, bunun transpozesisidir. Buradaki ∇ , del operatörü olarak isimlendirilir ve küresel koordinatlarda

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (2.9)$$

olarak yazılır.

Kütle kuvvetlerinin sıfır olması durumunda denge denklemleri ise

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.10)$$

olarak yazılır. Bu ifade ikinci dereceden bir tansör olan gerilme tansörünün diverjansı olarak isimlendirilir ve sonucu üç adet homojen diferansiyel denklemi verir. (2.8) bağıntısı, (2.5) 'de yerine konulursa ve elde edilen ifade, (2.10) 'da verilen denge denkleminde yerine yerleştirilirse bu, yer değıştirme bileşenleri cinsinden,

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

olarak bulunur. Burada

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.12)$$

dönüşümü kullanılırsa, denge denklemi kapalı formda yer değıştirme vektörü cinsinden

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

olarak yazılır. Burada $\nabla \cdot \mathbf{u}$, bir $\mathbf{u}$ vektörünün diverjansını belirtir ve silindirik koordinatlarda

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi \quad (2.14)$$

şeklinde yazılır ve sonucu bir skaler büyüklüktür. Skaler bir büyüklüğün gradyanı ise

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (2.15)$$

olarak yazılır. Ayrıca $\nabla \times \mathbf{u}$ ise, bir $\mathbf{u}$ vektörünün rotasyoneli olarak isimlendirilir ve yine bu koordinat takımında

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} = & \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(u_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklindedir [1].

(2.3) 'de verilen $\mathbf{u}$ yer değiştirme vektörü, (2.13) denkleminde yerine konulursa denge denklemi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} \right) = 0 \quad (2.17)$$

şeklini alır. Bu diferansiyel denklem düzenlenirse aslında Euler-Cauchy tipi bir diferansiyel denklem olduğu görülür. Bunun çözümü için

$$u_r = r^m \quad (2.18)$$

dönüşümü yapılırsa

$$m(m-1)r^m + 2mr^m - 2r^m = 0 \quad (2.19)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin iki kökü $m_{1,2} = 1, -2$ şeklindedir. Buradan (2.17) denkleminin çözümü

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2} \quad (2.20)$$

olur. Bu çözümün b yarıçaplı kürenin her yerinde geçerli olması için, $r=0$ da u_r nin sonlu olması gerekir; ki bu

$$B = 0 \quad (2.21)$$

olmasını gerektirir. (2.3), (2.4) ve (2.7) numaralı denklemlerde, elde edilen (2.20) sonucu, (2.21) düşünülerek, yerine konulursa

$$u_r = Ar \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A \quad (2.23)$$

$$\tau_{rr} = \lambda(3A) + 2\mu A = 3KA$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = 3KA \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada K , Bulk modülüdür ve

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (2.25)$$

olarak belirtilir.

Küresel cismin dış yüzeyinde, birim normal vektör radyal doğrultudadır. Dolayısıyla yüzey gerilme vektörü yazılırsa, bu vektörün bileşenlerinden sadece τ_{rr} sıfırdan farklı olur ve τ_o 'a eşittir. Bu yazılırsa A integral sabiti

$$\begin{aligned} \tau_{rr}(r=b) &= 3KA = \tau_o \\ A &= \frac{\tau_o}{3K} \end{aligned} \quad (2.26)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bulunan bu sonuç (2.22), (2.23) ve (2.24) denklemlerinde yazılırsa, gerilme haline ait yer değiştirme, gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\tau_o}{3K} r \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\tau_o}{3K} \\ \tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} &= \tau_o \end{aligned} \quad (2.27)$$

olarak bulunur.

Hacmi V olan, lineer-elastik, homojen ve izotrop bir cisim için şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2.28)$$

integrali ile hesaplanır. Burada, dV diferansiyel hacim elemanını göstermektedir ve küresel koordinat takımında

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (2.29)$$

olarak yazılır. (2.28) integrali küresel koordinatlarda açık olarak yazılıp hesaplanırsa toplam şekil değiştirme işi

$$U = \frac{1}{2} \int_{r=0}^b \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\tau_{rr} \epsilon_{rr} + \tau_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi} \epsilon_{\varphi\varphi}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (2.30)$$

$$U = \frac{2}{3K} \pi b^3 \tau_0^2 \quad (2.31)$$

olarak veya cismin hacmi

$$V = \frac{4}{3} \pi b^3 \quad (2.32)$$

olduğundan

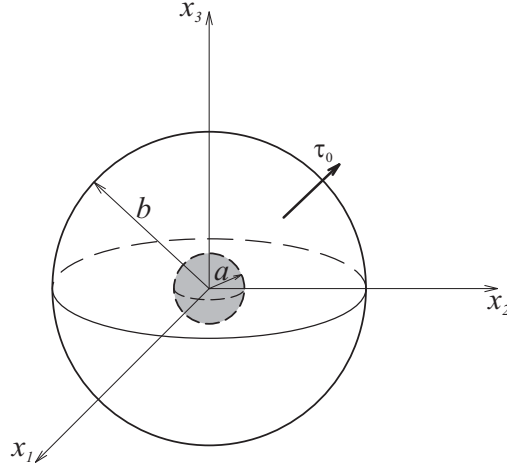
$$U = \frac{1}{2K} V \tau_0^2 \quad (2.33)$$

şeklinde elde edilir.

2.1.2 Tek küresel parçacık içeren bir küresel cismin, hidrostatik çekme halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması

Şimdi b yarıçaplı, küresel bir matrisin içine a yarıçaplı bir küresel parçacığın, eş merkezli olarak yerleştirildiği ve bunun hidrostatik çekme haline maruz olduğu düşünülecektir (Şekil 2.3).

Matris ve partikül için yer değiştirme alanı, önceki problemde hesaplanan (2.20) çözümü kullanılarak,



Şekil 2.3: Hidrostatik çekme halinde küresel parçacık içeren temsili hacim elemanı.

$$u_r^P = A^P r + \frac{B^P}{r^2} \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.34)$$

$$u_r^M = A^M r + \frac{B^M}{r^2} \quad a \leq r \leq b \quad (2.35)$$

şeklinde yazılır. Burada üzerinde P harfi bulunan büyüklükler partiküle, M harfi bulunan büyüklükler matrise aittir. $r = 0$ 'da yerdeğiştirme alanının sonlu olması gerektiğinden

$$B^P = 0 \quad (2.36)$$

bulunur. Böylece, önceki problemde anlatıldığı üzere, yer değiştirme vektörünün sıfırdan farklı tek bileşeni olan radyal bileşeni

$$u_r^P = A^P r \quad (2.37)$$

$$u_r^M = A^M r + \frac{B^M}{r^2} \quad (2.38)$$

olur. Bu iki yer değiştirme alanı için şekil değiştirme ve gerilme tansörlerinin bileşenleri önceki bölümde tek küre için yapılan çözümde elde edilen (2.4) ve (2.7) bağıntılarından faydalanılarak

$$\varepsilon_{rr}^P = \varepsilon_{\theta\theta}^P = \varepsilon_{\varphi\varphi}^P = A^P \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_{rr}^M = A^M - \frac{2B^M}{r^3} \quad \varepsilon_{\theta\theta}^M = \varepsilon_{\varphi\varphi}^M = A^M + \frac{B^M}{r^3} \quad (2.40)$$

$$\tau_{rr}^P = \tau_{\theta\theta}^P = \tau_{\varphi\varphi}^P = (3\lambda^P + 2\mu^P)A^P = 3K^P A^P \quad (2.41)$$

$$\tau_{rr}^M = 3K^M A^M + B^M \left(-\frac{4\mu^M}{r^3} \right) \quad (2.42)$$

$$\tau_{\theta\theta}^M = \tau_{\varphi\varphi}^M = 3K^M A^M + B^M \left(\frac{2\mu^M}{r^3} \right) \quad (2.43)$$

şeklinde elde edilirler. Problemin sınır koşulları dıştaki kürenin yüzeyinde yüzey gerilme vektörünün dış gerilmeye eşitliğinden bir, iki kürenin ortak yüzeyinde ise yer değiştirmeler ve gerilmelerin sürekliliğinden de iki olmak üzere toplam üç tanedir ve bu koşullar

$$r = b \text{ 'de } \tau_{rr}^M = \tau_o \quad (2.44)$$

$$r = a \text{ 'da } u_{rr}^M = u_{rr}^P \quad (2.45)$$

$$r = a \text{ 'da } \tau_{rr}^M = \tau_{rr}^P \quad (2.46)$$

olarak yazılırlar. Bu sınır koşulları (2.37), (2.38), (2.41) ve (2.42) eşitlikleri kullanılarak yeniden yazılırsa

$$A^M(3K^M) + B^M \left(-\frac{4\mu^M}{b^3} \right) = \tau_o \quad (2.47)$$

$$A^M(a) + \frac{B^M}{a^2} - A^P a = 0 \quad (2.48)$$

$$A^M(3K^M) + B^M \left(-\frac{4\mu^M}{a^3} \right) - A^P(3K^P) = 0 \quad (2.49)$$

denklemleri elde edilir.

Kompozit cismin toplam hacmi

$$V = \frac{4}{3}\pi b^3 \quad (2.50)$$

şeklinde ve partikülün hacmi

$$V^P = \frac{4}{3}\pi a^3 \quad (2.51)$$

şeklindedir. Bu iki hacmin birbirine oranı

$$c = \frac{V^P}{V} = \frac{a^3}{b^3} \quad (2.52)$$

şeklinde bir c sabitiyle gösterilsin. Burada c , eklenen parçacığın hacim konsantrasyonu olarak tanımlanır.

(2.47), (2.48) ve (2.49) denklemlerinde, (2.52) 'de ifade edilen dönüşüm yapılarak, bunların oluşturduğu takımın çözümü

$$D = \frac{B^M}{a^3} \quad (2.53)$$

dönüşümü de yapılarak

$$D = \tau_o \frac{K^M - K^P}{4\mu^M[K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P} \quad (2.54)$$

$$A^P = \tau_o \frac{(4\mu^M + 3K^M)}{3\{4\mu^M[K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P\}} \quad (2.55)$$

$$A^M = \tau_o \frac{(3K^P + 4\mu^M)}{3\{4\mu^M[K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P\}} \quad (2.56)$$

şeklinde bulunur. Birleşimde biriken toplam şekil değiştirme işini veren

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\{ \varepsilon_{rr}^P \tau_{rr}^P + \varepsilon_{\theta\theta}^P \tau_{\theta\theta}^P + \varepsilon_{\varphi\varphi}^P \tau_{\varphi\varphi}^P \right\} d\varphi \\ + \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\{ \varepsilon_{rr}^M \tau_{rr}^M + \varepsilon_{\theta\theta}^M \tau_{\theta\theta}^M + \varepsilon_{\varphi\varphi}^M \tau_{\varphi\varphi}^M \right\} d\varphi \quad (2.57)$$

ifadesinde (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) ve (2.43) denklemleri yerlerine konulur ve düzenlenirse

$$U = \frac{9}{2} V c K^P (A^P)^2 + 2\pi \left[9K^M (A^M)^2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + 4\mu^M (B^M)^2 \left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3} \right) \right] \quad (2.58)$$

bulunur. Burada

$$4\pi \frac{b^3 - a^3}{3} = V(1 - c) \quad (2.59)$$

$$B^M = D a^3 \quad (2.60)$$

yazılarak bu kompozit cisimde şekil değiştirme işi

$$U = \frac{9}{2} V c K^P (A^P)^2 + \frac{9}{2} V K^M (A^M)^2 (1 - c) + 6 V \mu^M D^2 (-c^2 + c) \quad (2.61)$$

olarak (2.54-2.56) denklemlerinde verilen katsayılar cinsinden elde edilir.

2.1.3 Efektif Bulk modülü ifadesinin elde edilmesi

Efektif cisim yukarıda anlatıldığı gibi temsili hacim elemanına eş değer, küresel tek bir cisimdir. Burada çözülen kompozit cisme eş değer cisim, b yarıçaplı küredir. Bu yüzden ilk çözülen problemde elde edilen (2.33) denklemindeki iş ifadesi aslında efektif cisimde hidrostatik gerilme halinde biriken toplam şekil değiştirme işini belirtir. Bu ifade efektif cisim için tekrar yazılırsa

$$U^* = \frac{1}{2K^*} V_o \tau_o^2 \quad (2.62)$$

olur. Burada V_o parçacık içermeyen homojen malzemenin toplam hacmidir ve elbette değeri V ile aynıdır. (2.61) 'de elde edilen iş ifadesi ise kompozit cisimden alınan temsili hacim elemanına aittir. Burada hesaplanan U ile efektif cisim için bulunan U^* eşitlenerek düzenlenirse efektif bulk modülü K^* (2.54), (2.55) ve (2.56) 'da verilen D , A^P ve A^M cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{1}{K^*} = \frac{1}{\tau_o^2} \{ 9c K^P (A^P)^2 + (1 - c) [9K^M (A^M)^2 + 12\mu^M D^2 c] \} \quad (2.63)$$

Bu ifade incelendiğinde efektif cismin Bulk modülünün partikülün kayma modülünden bağımsız olduğu görülür.

2.1.4 Sayısal bir uygulama

Matris ve partikül için elastisite modülü ve Poisson oranı sırasıyla

$$E^M = 206842.71 \times 10^6 Pa, \quad \nu^M = 0.3 \quad (2.64)$$

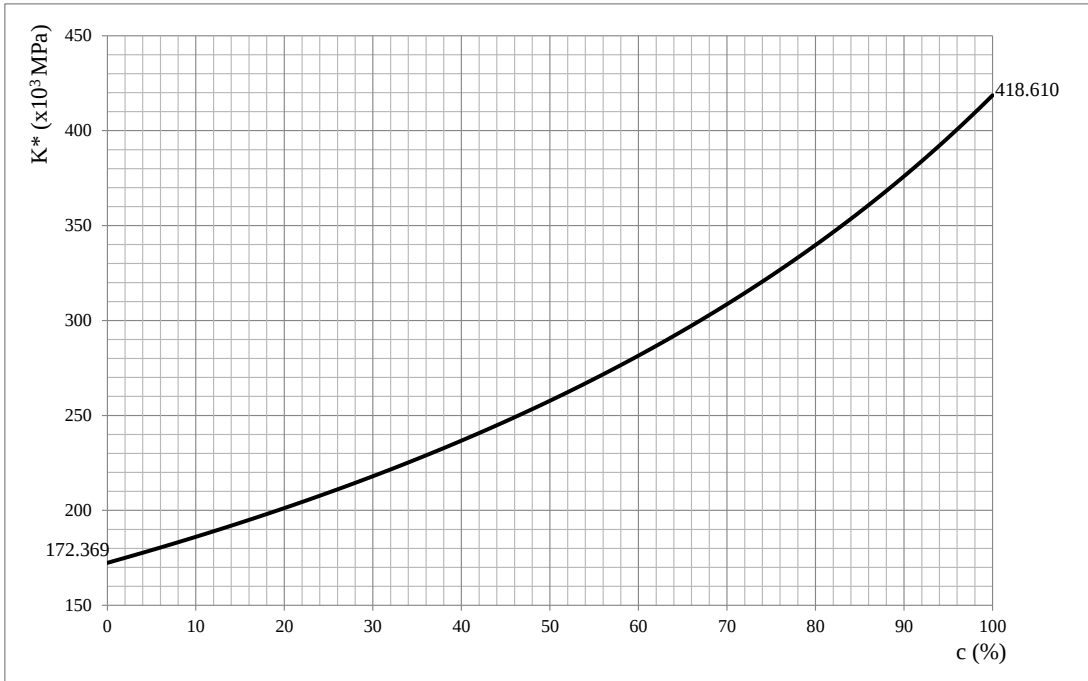
$$E^P = 703265.24 \times 10^6 Pa, \quad \nu^P = 0.22 \quad (2.65)$$

olan malzemeler seçilsin. Bu durumda bu malzemelere ait Bulk ve kayma modülleri sırasıyla

$$K^M = 172368.93 \times 10^6 Pa, \quad \mu^M = 79554.89 \times 10^6 Pa \quad (2.66)$$

$$K^P = 418610.26 \times 10^6 Pa, \quad \mu^P = 288223.46 \times 10^6 Pa \quad (2.67)$$

olarak elde edilir. (2.63) 'de verilen efektif Bulk modülüne ait bağıntı kullanılarak, bu modülün hacim konsantrasyonuna bağlı değişimi aşağıdaki grafikte çizilmiştir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4: Küresel parçacık içeren kompozitin Bulk modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.

Buradaki grafikte türevinin eğimi artan bir eğri görülmektedir. %0 ve %100'lük konsantrasyon için efektif Bulk modülü, sırasıyla matrisin ve partikülün Bulk modülüne eşittir.

2.2 Efektif Kayma Modülünün Belirlenmesi

2.2.1 Küresel bir cismin, basit kayma halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması

$r = b$ yarıçaplı küre, düzlem basit kayma etkisi altında olsun. Burada çözüm kartezyen koordinatlarda yapılmıştır; ancak ele alınan cismin geometrisine uygunluk sağlaması açısından kartezyen koordinat bileşenleri küresel koordinatlar cinsinden ifade edilerek hesaplar yapılmıştır. Bu durumda gerilme tansörü $\boldsymbol{\tau}$ ve $r = b$ 'de birim dış normal $\mathbf{n}$,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_o & 0 \\ \tau_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

şeklinde yazılır. Buradan kürenin dış yüzeyindeki yüzey gerilmesi

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_o \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

olarak bulunur.

Problemin geometrisine ve sınır koşullarına uygunluğundan dolayı küresel harmonikler kullanılarak çözüme ulaşılmaya çalışılacaktır. Bunun için $\mathbf{u}$ yerdeğiştirme vektörünün bir ω fonksiyonun gradyanından türetildiği düşünülebilir [2], [3]. ω fonksiyonu bu çözüm yolu için küresel harmonik fonksiyon olarak isimlendirilir ve problemde verilen basit kayma hali için

$$\omega = x_1 x_2 r^n \quad (2.70)$$

olarak belirlenir. Buna göre üç tip küresel harmonik fonksiyon çözümü mevcuttur.

1. tip : $\mathbf{u} = r^2 \nabla \omega + \alpha \mathbf{r} \omega$

2. tip : $\mathbf{u} = \nabla \omega$

3. tip : $\mathbf{u} = \mathbf{r} \times \nabla \omega$

Burada $\mathbf{e}_i$, kartezyen koordinatlarda birim normal vektör olmak üzere, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) olarak belirtilir. Ayrıca buradaki r , konum vektörünün şiddetini göstermekte olup

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.71)$$

şeklinde hesaplanır. α ise bir sabittir.

Bu çözümlerden elde edilen yer değiştirme vektörlerinin (2.13) 'deki denge deklemini sağlamaları gerekmektedir. Her tipteki çözümde ω yerine konulur ve (2.13) denklemi bunlar için ayrı ayrı çözülürse, denklemi sağlayan n için iki farklı sonuç bulunur. Bunlar

$$n_1 = 0 \quad n_2 = -5 \quad (2.72)$$

değerleridir. Sonuç olarak (2.69) sınır koşulunu sağlayacak yerdeğiştirme alanı küresel harmonikler kullanılarak belirtilen üç tip çözümün bir kombinasyonu olarak

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3 + \mathbf{u}^4 + \mathbf{u}^5 + \mathbf{u}^6 \quad (2.73)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{u}$ lar birinci, ikinci ve üçüncü tip küresel harmonik çözüm için n 'nin iki değerine ait bulunan yer değiştirmelerdir ve kapalı formda aşağıdaki şekilde yazılırlar:

$$\mathbf{u}^1 = D_1 \left[r^2 \nabla (x_1 x_2) + \alpha_1 \mathbf{r} x_1 x_2 \right] \quad (2.74)$$

$$\mathbf{u}^2 = D_2 \left[r^2 \nabla \frac{x_1 x_2}{r^5} + \alpha_2 \mathbf{r} \frac{x_1 x_2}{r^5} \right] \quad (2.75)$$

$$\mathbf{u}^3 = D_3 \nabla (x_1 x_2) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{u}^4 = D_4 \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \quad (2.77)$$

$$\mathbf{u}^5 = D_5 [\mathbf{r} \times \nabla(x_1 x_2)] \quad (2.78)$$

$$\mathbf{u}^6 = D_6 \left[\mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \right] \quad (2.79)$$

Burada D katsayıları integral sabitleridir. Birinci tip çözüm için n 'nin iki farklı değerine ait α_1 ve α_2 katsayılarının hesabı, yine (2.13) denklemi kullanılarak yapılır. Öncelikle birinci tip çözüm için $n = 0$ a ait (2.74) denkleminde verilen yer değiştirme ifadesi, denge denkleminde yerine konulup, elastik sabitleri λ ve μ olan bir küresel cisim için çözüm yapılırsa

$$\alpha_1 = -\frac{4\lambda + 14\mu}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.80)$$

bulunur. Aynı işlem, birinci tip çözümde $n = -5$ için (2.75) denkleminde verilen yer değiştirme ifadesi ile yapılırsa

$$\alpha_2 = \frac{3\lambda + 8\mu}{\mu} \quad (2.81)$$

olarak elde edilir.

(2.73) numaralı denklemde kapalı formda yazılan çözümün, ele alınan küresel cismin her yerinde geçerli olması gerekir. Bunun için yer değiştirmeler sonlu olmalıdır. (2.75), (2.77) ve (2.79) 'da verilen $\mathbf{u}$ ifadelerininse $r = 0$ için sonlu olmayacakları açıktır. Dolayısıyla bunların (2.75), (2.77) ve (2.79) çözümlerinde verilen katsayıları

$$D_2 = D_4 = D_6 = 0 \quad (2.82)$$

olmalıdır. Şimdi (2.73) denkleminde kalan terimler, (2.74), (2.76), (2.78) 'daki ifadeler ve (2.80) ile (2.82) 'deki sonuçlar kullanılarak açık biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1 &= D_1 [(r^2 x_2 + \alpha_1 x_1^2 x_2) \mathbf{e}_1 + (r^2 x_1 + \alpha_1 x_1 x_2^2) \mathbf{e}_2 + \alpha_1 x_1 x_2 x_3 \mathbf{e}_3] \\ \mathbf{u}^3 &= D_3 [x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2] \\ \mathbf{u}^5 &= D_5 [-x_1 x_3 \mathbf{e}_1 + x_2 x_3 \mathbf{e}_2 + (x_1^2 - x_2^2) \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (2.83)$$

elde edilir. Bundan sonra yer değiştirme ifadelerinden, her tipteki çözüm için Şekil değiştirme tansörleri elde edilecektir. Bunun için, ϵ^1 , ϵ^3 , ϵ^5 sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tipte $n = 0$ çözümüne ait Şekil değiştirme matrislerini göstermek üzere, λ ve μ elastik katsayılı küresel bir cisimde bu tansörlerin elemanları (2.8) ve (2.83) kullanılarak

$$\epsilon_{11}^1 = D_1 \frac{2x_1x_2(\lambda - 7\mu)}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.84)$$

$$\epsilon_{22}^1 = D_1 \frac{2x_1x_2(\lambda - 7\mu)}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.85)$$

$$\epsilon_{33}^1 = -D_1 \frac{2x_1x_2(2\lambda + 7\mu)}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.86)$$

$$\epsilon_{12}^1 = \epsilon_{21}^1 = D_1 \frac{(x_1^2 + x_2^2)(8\lambda + 7\mu) + x_3^2(5\lambda + 7\mu)}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.87)$$

$$\epsilon_{13}^1 = \epsilon_{31}^1 = D_1 \frac{3\lambda x_2x_3}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.88)$$

$$\epsilon_{23}^1 = \epsilon_{32}^1 = D_1 \frac{3\lambda x_1x_3}{5\lambda + 7\mu} \quad (2.89)$$

$$\epsilon_{12}^3 = \epsilon_{21}^3 = D_3 \quad (2.90)$$

$$\epsilon_{11}^3 = \epsilon_{22}^3 = \epsilon_{33}^3 = \epsilon_{13}^3 = \epsilon_{31}^3 = \epsilon_{23}^3 = \epsilon_{32}^3 = 0 \quad (2.91)$$

$$\epsilon_{11}^5 = -D_5x_3 \quad (2.92)$$

$$\epsilon_{22}^5 = D_5x_3 \quad (2.93)$$

$$\epsilon_{33}^5 = 0 \quad (2.94)$$

$$\epsilon_{12}^5 = \epsilon_{21}^5 = 0 \quad (2.95)$$

$$\epsilon_{13}^5 = \epsilon_{31}^5 = D_5 \frac{x_1}{2} \quad (2.96)$$

$$\epsilon_{23}^5 = \epsilon_{32}^5 = -D_5 \frac{x_2}{2} \quad (2.97)$$

şeklinde hesaplanır. Sonuçta Şekil değiştirme tansörü yukarıda elemanları verilen tansörlerin toplamıdır. Sembolik olarak bu,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^1 & \epsilon_{12}^1 & \epsilon_{13}^1 \\ \epsilon_{21}^1 & \epsilon_{22}^1 & \epsilon_{23}^1 \\ \epsilon_{31}^1 & \epsilon_{32}^1 & \epsilon_{33}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^3 & \epsilon_{12}^3 & \epsilon_{13}^3 \\ \epsilon_{21}^3 & \epsilon_{22}^3 & \epsilon_{23}^3 \\ \epsilon_{31}^3 & \epsilon_{32}^3 & \epsilon_{33}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^5 & \epsilon_{12}^5 & \epsilon_{13}^5 \\ \epsilon_{21}^5 & \epsilon_{22}^5 & \epsilon_{23}^5 \\ \epsilon_{31}^5 & \epsilon_{32}^5 & \epsilon_{33}^5 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

olarak yazılır. İlgili gerilme bileşenleri, yukarıda bulunan şekil değiştirme bileşenleri ve (2.5) denklemini kullanılarak

$$\tau_{11}^1 = -D_1 \frac{2\mu x_1 x_2 (19\lambda + 14\mu)}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.99)$$

$$\tau_{22}^1 = -D_1 \frac{2\mu x_1 x_2 (19\lambda + 14\mu)}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.100)$$

$$\tau_{33}^1 = -D_1 \frac{2\mu x_1 x_2 (25\lambda + 14\mu)}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.101)$$

$$\tau_{12}^1 = \tau_{21}^1 = D_1 \frac{2\mu [(8\lambda + 7\mu)(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2(5\lambda + 7\mu)]}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.102)$$

$$\tau_{13}^1 = \tau_{31}^1 = D_1 \frac{6\lambda \mu x_2 x_3}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.103)$$

$$\tau_{23}^1 = \tau_{32}^1 = D_1 \frac{6\lambda \mu x_1 x_3}{(5\lambda + 7\mu)} \quad (2.104)$$

$$\tau_{12}^3 = \tau_{21}^3 = 2D_3 \mu \quad (2.105)$$

$$\tau_{11}^3 = \tau_{22}^3 = \tau_{33}^3 = \tau_{13}^3 = \tau_{31}^3 = \tau_{23}^3 = \tau_{32}^3 = 0 \quad (2.106)$$

$$\tau_{11}^5 = -2D_5 \mu x_3 \quad (2.107)$$

$$\tau_{22}^5 = 2D_5 \mu x_3 \quad (2.108)$$

$$\tau_{33}^5 = 0 \quad (2.109)$$

$$\tau_{12}^5 = \tau_{21}^5 = 0 \quad (2.110)$$

$$\tau_{13}^5 = \tau_{31}^5 = D_5 \mu x_1 \quad (2.111)$$

$$\tau_{23}^5 = \tau_{32}^5 = -D_5 \mu x_2 \quad (2.112)$$

olarak hesaplanırlar. Burada gerilme tansörü de yukarıda elemanları yazılan tansörlerin toplamıdır ve

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^1 + \boldsymbol{\tau}^3 + \boldsymbol{\tau}^5 \quad (2.113)$$

şeklinde gösterilir. Bu cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi (2.30) bağıntısından farklı olarak kartezyen bileşenler cinsinden hesaplanan şekil değişimi işi yoğunluğunun küresel hacim üzerinde integrali alınarak hesaplanacaktır. Bu hesap sırasında sonuç integral alınırken kartezyen koordinatlar yerine

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\
x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\
x_3 &= r \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.114}$$

şeklinde verilen küresel koordinatlardaki karşılıkları kullanılacaktır. Bu ifadenin açık yazılımı

$$U = \frac{1}{2} \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\left(\tau_{ij}^1 + \tau_{ij}^3 + \tau_{ij}^5 \right) \left(\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^3 + \varepsilon_{ij}^5 \right) \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \tag{2.115}$$

şeklinde olur. Böylece integral sabitleri hesaplanmadan önce cisim üzerinde biriken şekil değiştirme işi

$$\begin{aligned}
U = \frac{4\pi\mu}{5(5\lambda + 7\mu)^2} [14b^5 D_1 D_3 (\lambda + \mu)(5\lambda + 7\mu) + \frac{5}{3} b^3 (5\lambda + 7\mu)^2 (D_3^2 + \frac{D_5^2 b^2}{2}) \\
+ \frac{1}{7} b^7 D_1^2 (263\lambda^2 + 784\lambda\mu + 441\mu^2)] \tag{2.116}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Şimdi D_1 , D_3 ve D_5 katsayıları hesaplanacaktır. (2.99 - 2.112) 'de verilen gerilmeler, b yarıçaplı küresel cisim için, $r = b$ 'de yazılarak (2.69) numaralı denklemde belirtilen yüzey gerilme vektörüne eşitlenirse

$$\mathbf{T} = \left\{ D_1 \boldsymbol{\tau}^1(b, \theta, \varphi) + D_3 \boldsymbol{\tau}^3(b, \theta, \varphi) + D_5 \boldsymbol{\tau}^5(b, \theta, \varphi) \right\} \cdot \mathbf{n} = \tau_o \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.117}$$

denklem takımı elde edilir. Burada üç denklem olmasına rağmen, her denklemde θ ve φ nin lineer bağımsız fonksiyonlarının katsayıları eşitlenirse dokuz denklem elde edilir. Ancak bunlar üç lineer bağımsız denklemin tekrarlanması olarak ortaya çıkar. Bu üç denklem çözülürse

$$D_1 = 0, \quad D_3 = \frac{\tau_o}{2\mu}, \quad D_5 = 0 \tag{2.118}$$

bulunur. Bu durumda $r = b$ yarıçaplı basit kayma etkisi altındaki kürede biriken iş, (2.116) denklemi kullanılarak

$$U = \frac{\tau_o^2}{3\mu} \pi b^3 \quad (2.119)$$

şeklinde elde edilir.

2.2.2 Tek küresel parçacık içeren bir küresel cismin, basit kayma halinde, şekil değiştirme işinin hesaplanması

Bu bölümde kompozit malzemeden alınan temsili hacim elemanında düzlem basit kayma hali altındaki toplam şekil değiştirme işi hesaplanacaktır. Cisimde yüzey gerilmesi (2.69) 'da verildiği gibidir. Bir önceki bölümde tek küresel cisim için yapılan çözümde olduğu gibi küresel harmoniklerdeki üç tip çözüm kullanılarak yer değiştirme alanları, matris ve partikül için

$$\mathbf{u}^M = \mathbf{u}^{1M} + \mathbf{u}^{2M} + \mathbf{u}^{3M} + \mathbf{u}^{4M} + \mathbf{u}^{5M} + \mathbf{u}^{6M} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{u}^P = \mathbf{u}^{1P} + \mathbf{u}^{2P} + \mathbf{u}^{3P} + \mathbf{u}^{4P} + \mathbf{u}^{5P} + \mathbf{u}^{6P} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{u}^{1M} = B_1 \left[r^2 \nabla (x_1 x_2) + \alpha_1 \mathbf{r} x_1 x_2 \right] \quad (2.122)$$

$$\mathbf{u}^{2M} = B_2 \left[r^2 \nabla \frac{x_1 x_2}{r^5} + \alpha_2 \mathbf{r} \frac{x_1 x_2}{r^5} \right] \quad (2.123)$$

$$\mathbf{u}^{3M} = B_3 \nabla (x_1 x_2) \quad (2.124)$$

$$\mathbf{u}^{4M} = B_4 \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \quad (2.125)$$

$$\mathbf{u}^{5M} = B_5 \left[\mathbf{r} \times \nabla (x_1 x_2) \right] \quad (2.126)$$

$$\mathbf{u}^{6M} = B_6 \left[\mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \right] \quad (2.127)$$

$$\mathbf{u}^{1P} = A_1 \left[r^2 \nabla (x_1 x_2) + \alpha_1 \mathbf{r} x_1 x_2 \right] \quad (2.128)$$

$$\mathbf{u}^{2P} = A_2 \left[r^2 \nabla \frac{x_1 x_2}{r^5} + \alpha_2 \mathbf{r} \frac{x_1 x_2}{r^5} \right] \quad (2.129)$$

$$\mathbf{u}^{3P} = A_3 \nabla (x_1 x_2) \quad (2.130)$$

$$\mathbf{u}^{4P} = A_4 \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \quad (2.131)$$

$$\mathbf{u}^{5P} = A_5 \left[\mathbf{r} \times \nabla (x_1 x_2) \right] \quad (2.132)$$

$$\mathbf{u}^{6P} = A_6 \left[\mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{x_1 x_2}{r^5} \right) \right] \quad (2.133)$$

şeklinde yazılır. Burada üstünde M olan terimler matrise, P olan terimler partiküle aittir. Her tip çözüme ait n nin iki kökü için yer değiştirme ifadeleri (2.74-2.79) eşitliklerindeki gibi alınmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, r nin değer aralığı, partikül için sıfırdan a ya kadarken, matris için bu aralık a dan b ye kadardır. Ayrıca α_1 ve α_2 değerleri de önceki bölümde çözülen problemdekiler ile aynı olacaktır ve bunlar (2.80) ile (2.81) numaralı denklemlerde verilmiştir.

Burada ele alınan problemde toplam on iki adet bilinmeyen vardır. Bunlar $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ve $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ integral sabitleridir. Partikülde $r = 0$ 'da yer değiştirmenin sonlu olması için

$$A_2 = A_4 = A_6 = 0 \quad (2.134)$$

olmalıdır. Böylece belirlenmesi gereken bilinmeyen sayısı dokuza iner. Bu katsayılar şimdi belirlenmeyecek, öncelikle bilinmeyen katsayılar cinsinden şekil değiştirme ve gerilme ifadeleri yazılacaktır. Daha sonra problemin sınır koşulları yazılarak katsayıların hesabında kullanılacak denklem takımları elde edilecektir. Bundan sonraki aşamada toplam sistemde biriken şekil değişimi işi bu katsayılar cinsinden hesaplanacaktır.

ϵ^{iP} , $\mathbf{u}^{iP}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), partiküle ait şekil değiştirme tansörlerini göstermek üzere, bu tansörlerin elemanları bir önceki problemde olduğu gibi, (2.8) bağıntısı kullanılarak

$$\epsilon_{11}^{1P} = A_1 \frac{2x_1 x_2 (\lambda^P - 7\mu^P)}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.135)$$

$$\epsilon_{22}^{1P} = A_1 \frac{2x_1 x_2 (\lambda^P - 7\mu^P)}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.136)$$

$$\epsilon_{33}^{1P} = -A_1 \frac{2x_1 x_2 (2\lambda^P + 7\mu^P)}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.137)$$

$$\epsilon_{12}^{1P} = \epsilon_{21}^{1P} = A_1 \frac{(8\lambda^P + 7\mu^P)(x_1^2 + x_2^2) + (5\lambda^P + 7\mu^P)x_3^2}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.138)$$

$$\epsilon_{13}^{1P} = \epsilon_{31}^{1P} = A_1 \frac{3\lambda^P x_2 x_3}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.139)$$

$$\epsilon_{23}^{1P} = \epsilon_{23}^{1P} = A_1 \frac{3\lambda^P x_1 x_3}{(5\lambda^P + 7\mu^P)} \quad (2.140)$$

$$\epsilon_{11}^{2P} = A_2 \frac{3x_1 x_2 [(x_2^2 + x_3^2)(2\lambda^P + \mu^P) - x_1^2(3\lambda^P + 4\mu^P)]}{\mu^P r^7} \quad (2.141)$$

$$\epsilon_{22}^{2P} = A_2 \frac{3x_1 x_2 [(x_1^2 + x_3^2)(2\lambda^P + \mu^P) - x_2^2(3\lambda^P + 4\mu^P)]}{\mu^P r^7} \quad (2.142)$$

$$\epsilon_{33}^{2P} = A_2 \frac{3x_1 x_2 (\lambda^P + \mu^P)(x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2)}{\mu^P r^7} \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^{2P} = \epsilon_{21}^{2P} = & \frac{A_2}{2\mu^P r^7} \{x_1^4(3\lambda^P + 2\mu^P) + x_1^2[x_3^2(3\lambda^P + 4\mu^P) \\ & - 2x_2^2(12\lambda^P + 13\mu^P)] + x_2^4(3\lambda^P + 2\mu^P) + x_2^2 x_3^2(3\lambda^P + 4\mu^P) + 2\mu^P x_3^4\} \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\epsilon_{13}^{2P} = \epsilon_{31}^{2P} = \frac{A_2}{2\mu^P r^7} \{3x_2 x_3 [\lambda^P(x_2^2 + x_3^2) - x_1^2(9\lambda^P + 10\mu^P)]\} \quad (2.145)$$

$$\epsilon_{23}^{2P} = \epsilon_{32}^{2P} = \frac{A_2}{2\mu^P r^7} \{3x_1 x_3 [\lambda^P x_1^2 - x_2^2(9\lambda^P + 10\mu^P) + \lambda x_3^2]\} \quad (2.146)$$

$$\epsilon_{12}^{3P} = \epsilon_{21}^{3P} = A_3 \quad (2.147)$$

$$\epsilon_{11}^{3P} = \epsilon_{22}^{3P} = \epsilon_{33}^{3P} = \epsilon_{13}^{3P} = \epsilon_{31}^{3P} = \epsilon_{23}^{3P} = \epsilon_{32}^{3P} = 0 \quad (2.148)$$

$$\epsilon_{11}^{4P} = A_4 \frac{5x_1 x_2 [4x_1^2 - 3(x_2^2 + x_3^2)]}{r^9} \quad (2.149)$$

$$\epsilon_{22}^{4P} = -A_4 \frac{5x_1 x_2 (3x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2)}{r^9} \quad (2.150)$$

$$\epsilon_{33}^{4P} = -A_4 \frac{5x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2)}{r^9} \quad (2.151)$$

$$\epsilon_{12}^{4P} = \epsilon_{21}^{4P} = -A_4 \frac{4x_1^4 + 3x_2^2(x_3^2 - 9x_2^2) + 4x_2^4 + 3x_2^2 x_3^2 - x_3^4}{r^9} \quad (2.152)$$

$$\epsilon_{13}^{4P} = \epsilon_{31}^{4P} = A_4 \frac{5x_2 x_3 (6x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{r^9} \quad (2.153)$$

$$\epsilon_{23}^{4P} = \epsilon_{32}^{4P} = -A_4 \frac{5x_1 x_3 (x_1^2 - 6x_2^2 + x_3^2)}{r^9} \quad (2.154)$$

$$\epsilon_{11}^{5P} = -A_5 x_3 \quad (2.155)$$

$$\epsilon_{22}^{5P} = A_5 x_3 \quad (2.156)$$

$$\epsilon_{33}^{5P} = 0 \quad (2.157)$$

$$\epsilon_{12}^{5P} = \epsilon_{21}^{5P} = 0 \quad (2.158)$$

$$\epsilon_{13}^{5P} = \epsilon_{31}^{5P} = A_5 \frac{x_1}{2} \quad (2.159)$$

$$\epsilon_{23}^{5P} = \epsilon_{32}^{5P} = -A_5 \frac{x_2}{2} \quad (2.160)$$

$$\epsilon_{11}^{6P} = A_6 \frac{x_3(4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}{r^7} \quad (2.161)$$

$$\epsilon_{22}^{6P} = A_6 \frac{x_3(x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2)}{r^7} \quad (2.162)$$

$$\epsilon_{33}^{6P} = A_6 \frac{5x_3(x_2^2 - x_1^2)}{r^7} \quad (2.163)$$

$$\epsilon_{12}^{6P} = \epsilon_{21}^{6P} = 0 \quad (2.164)$$

$$\epsilon_{13}^{6P} = \epsilon_{31}^{6P} = A_6 \frac{x_1[3(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1^2]}{r^7} \quad (2.165)$$

$$\epsilon_{23}^{6P} = \epsilon_{32}^{6P} = -A_6 \frac{x_2(3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2)}{r^7} \quad (2.166)$$

şeklinde hesaplanırlar. Partikül için şekil değiştirme tansörü önceki problemde olduğu gibi yukarıda bileşenleri verilen tansörlerin toplamı ile bulunur. Aynı ifadelerde A_i katsayıları yerine B_i katsayıları konulur ve λ^P, μ^P yerine λ^M, μ^M kullanılırsa matrise ait şekil değiştirme tansörleri olan ϵ^{iM} ($i = 1, 2, \dots, 6$) 'ler elde edilir.

Şekil değiştirme ifadelerinden gerilme ifadelerine geçebilmek için (2.5) numaralı denklem kullanılarak partiküle ve matrise ait τ^{iP} ve τ^{iM} ($i = 1, 2, \dots, 6$) gerilme tansörleri elde edilir. Bu ifadeler çok uzun olduğu için buraya yazılmamıştır.

Bundan sonra, denklemlerdeki bilinmeyen integral katsayılarını bulmak için sınır şartları yazılacaktır. Ancak öncelikle kartezyen koordinatlardaki bileşenler küresel koordinatlar cinsinden (2.114) dönüşümü kullanılarak yazılmıştır. Yüzey gerilmesinin üç bileşeninin ve yer değiştirme vektörünün üç bileşeninin matris ve partikülün ara yüzeyinde eşitliği birinci ve ikinci grup sınır koşulunu oluşturur. Matrisin dış yüzeyindeki yüzey gerilmesinin (2.69) 'da verilen değere eşit olması ise üçüncü sınır koşuludur. Böylece birinci grup sınır koşulu $r = a$ 'da

$$\mathbf{u}^P(r = a) = \mathbf{u}^M(r = a) \quad (2.167)$$

şeklinde. Burada üç denklem olmasına rağmen, her denklemde θ ve φ nin lineer bağımsız fonksiyonlarının katsayıları eşitlenirse dokuz adet denklem elde edilir. Ancak bunlar üç lineer bağımsız denklemin tekrarlanması olarak ortaya çıkar. Bunlar

$$B_5a^2 + \frac{B_6}{a^3} = A_5a^2 \quad (2.168)$$

$$\frac{2A_1a^3(2\lambda^P + 7\mu^P)}{5\lambda^P + 7\mu^P} = \frac{2B_1a^3(2\lambda^M + 7\mu^M)}{(5\lambda^M + 7\mu^M)} - \frac{3B_2(\lambda^M + \mu^M)}{a^2\mu^M} + \frac{5B_4}{a^4} \quad (2.169)$$

$$A_1a^7 + A_3a^5 = B_1a^7 + B_2a^2 + B_3a^5 + B_4 \quad (2.170)$$

olarak bulunurlar.

İkinci grup sınır koşulu $r = a$ 'da

$$\tau^P(r = a) = \tau^M(r = a) \quad (2.171)$$

şeklindedir. Burada da üç denklem olmasına rağmen, her denklemde θ ve φ nin lineer bağımsız fonksiyonlarının katsayıları eşitlenirse dokuz denklem elde edilir. Ancak bunlar yine üç lineer bağımsız denklemin tekrarlanması olarak ortaya çıkar. Bunlarsa

$$\frac{\mu^M(B_5a^5 - 4B_6)}{a^5} = A_5\mu^P \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \frac{2A_1a^2\mu^P(19\lambda^P + 14\mu^P)}{5\lambda^P + 7\mu^P} &= \frac{2B_1a^2\mu^M(19\lambda^M + 14\mu^M)}{(5\lambda^M + 7\mu^M)} \\ &+ \frac{24B_2(\lambda^M + \mu^M)}{a^3} - \frac{40B_4\mu^M}{a^5} \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} 2A_3\mu^P + \frac{2A_1a^2\mu^P(8\lambda^P + 7\mu^P)}{5\lambda^P + 7\mu^P} &= \frac{2B_1a^2\mu^M(8\lambda^M + 7\mu^M)}{5\lambda^M + 7\mu^M} - \frac{B_2(3\lambda^M + 2\mu^M)}{a^3} \\ &+ \frac{2\mu^M(B_3a^5 - 4B_4)}{a^5} \end{aligned} \quad (2.174)$$

eşitlikleridir. Sınır koşulu olarak yazılabilecek son denklem grubu ise matris yüzeyinde yani $r = b$ 'de

$$\tau^M(r = b) = \mathbf{T} \quad (2.175)$$

denklemleridir. Burada da yine önceki sınır şartlarında olduğu gibi sonuçta üç lineer bağımsız denklem elde edilir. Bunlar da

$$4B_6 - B_5b^5 = 0 \quad (2.176)$$

$$2B_1b^7\mu^M(8\lambda^M + 7\mu^M) + (5\lambda^M + 7\mu^M)[B_2b^2(3\lambda^M + 2\mu^M) + 2B_3b^5\mu^M - 8B_4\mu^M] = (5\lambda^M + 7\mu^M)b^5\tau_o \quad (2.177)$$

$$B_1b^7\mu^M(19\lambda^M + 14\mu^M) + 4(5\lambda^M + 7\mu^M)[3B_2b^2(\lambda^M + \mu^M) - 5B_4\mu^M] = 0 \quad (2.178)$$

denklemleridir. (2.168), (2.172) ve (2.176) denklemleri çözülürse,

$$A_5 = B_5 = B_6 = 0 \quad (2.179)$$

bulunur.

Geriye kalan altı katsayıyı hesaplanmadan önce,

$$U = \frac{1}{2} \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [(\tau_{ij}^{1P} + \tau_{ij}^{3P})(\epsilon_{ij}^{1P} + \epsilon_{ij}^{3P})] r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ + \frac{1}{2} \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [(\tau_{ij}^{1M} + \tau_{ij}^{2M} + \tau_{ij}^{3M} + \tau_{ij}^{4M})(\epsilon_{ij}^{1M} + \epsilon_{ij}^{2M} + \epsilon_{ij}^{3M} + \epsilon_{ij}^{4M})] r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (2.180)$$

bağıntısı kullanılarak sıfırdan farklı katsayılar cinsinden toplam iş hesaplanacaktır. Bu bağıntıdaki partikülde biriken işi ifade eden ilk terim U^P ile ve matriste biriken işi gösteren ikinci terim U^M ile gösterilip bunlar sırasıyla hesaplanırsa

$$U^P = \frac{4\pi\mu^P}{5(5\lambda^P + 7\mu^P)^2} [14a^5 A_1 A_3 (\lambda^P + \mu^P)(5\lambda^P + 7\mu^P) + \frac{5}{3} a^3 A_3^2 (5\lambda^P + 7\mu^P)^2 \\ + \frac{1}{7} a^7 A_1^2 (263(\lambda^P)^2 + 784\lambda^P \mu^P + 441(\mu^P)^2)] \quad (2.181)$$

$$\begin{aligned}
U^M = \frac{2\pi}{315a^7b^7\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)^2} \{ & -1764a^{12}b^7B_1B_3(\mu^M)^2(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M) \\
& -210a^{10}b^7B_3^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2+1760b^7B_4^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& -2112a^2b^7B_2B_4\mu^M(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& -18a^9b^7B_1B_2\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)(-27(\lambda^M)^2+204\lambda^M\mu^M+196(\mu^M)^2) \\
& +3a^4b^7B_2^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+664\lambda^M\mu^M+436(\mu^M)^2) \\
& -18a^{14}b^7B_1^2(\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+784\lambda^M\mu^M+441(\mu^M)^2) \\
& +a^7[1764b^{12}B_1B_3(\mu^M)^2(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M) \\
& +210b^{10}B_3^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2-1760B_4^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& +2112b^2B_2B_4\mu^M(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& +18b^9B_1B_2\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)(-27(\lambda^M)^2+204\lambda^M\mu^M+196(\mu^M)^2) \\
& -3b^4B_2^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+664\lambda^M\mu^M+436(\mu^M)^2) \\
& +18b^{14}B_1^2(\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+784\lambda^M\mu^M+441(\mu^M)^2)] \} \quad (2.182)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

2.2.3 Efektif cisim için iş ve kayma modülü ifadesi

Efektif cisim, b yarıçaplı, küresel bir cisimdir. Bundan dolayı basit kayma halinde bu cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi (2.119) 'da verilen ifadede μ yerine μ^* konularak

$$U = \frac{\tau_o^2}{3\mu^*} \pi b^3 \quad (2.183)$$

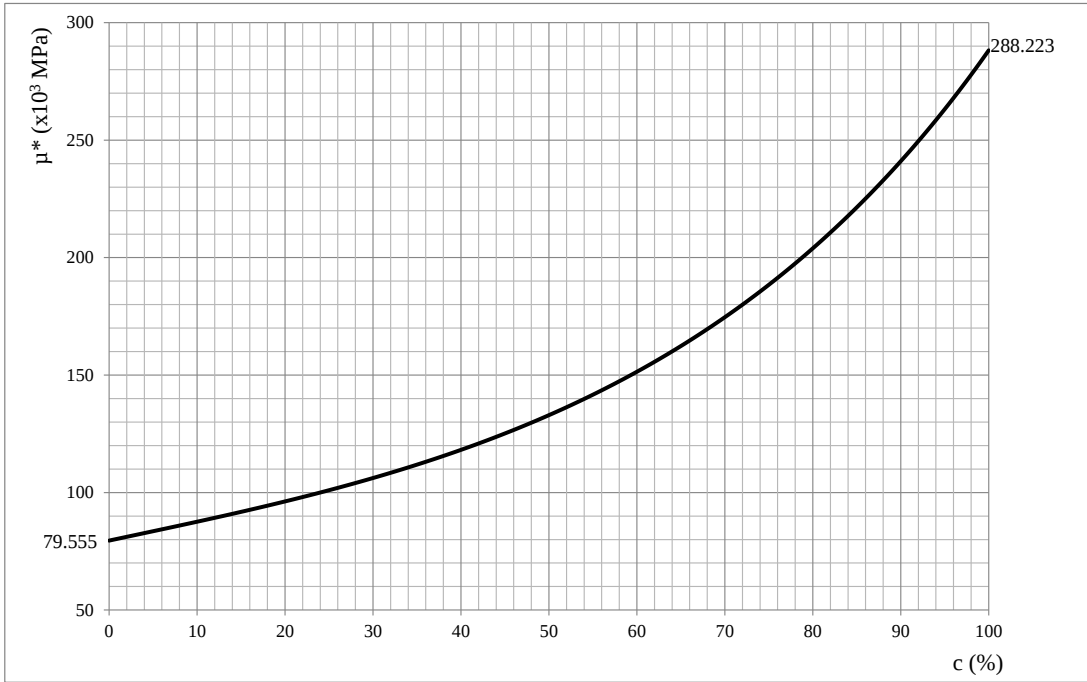
şeklinde elde edilir.

Bundan sonra (2.27) denklemi ile (2.181) ve (2.182) denklemlerinin toplamı birbirine eşitlenip buradan μ^* ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade bilinmeyen altı katsayı cinsinden bulunmuştur. Katsayıların hesabı için (2.169), (2.170), (2.173), (2.174), (2.177) ve (2.178) numaralı denklemlerin oluşturduğu takım çözümlmelidir. Analitik çözüm yerine denklemler sayısal olarak çözülecektir.

Bu denklemler incelendiğinde, katsayı değerlerinin $c = a^3/b^3$ hacim konsantrasyonuna göre değiştiği görülmektedir.

2.2.4 Sayısal çözüm ile sonuçlar

Matris ve partikül için önceki sayısal uygulamada seçilen malzemeler göz önüne alınsın. Bunların elastisite modülü, Poisson oranı, Bulk ve kayma modülleri sırasıyla (2.64 - 2.67) ifadelerinde verilmiştir. Bunlar ile, (2.169), (2.170), (2.173), (2.174), (2.177) ve (2.178) denklemlerinin oluşturduğu takım sabit bir c değeri için çözülerek önce katsayılar ve bunlara bağlı olarak şekil değişimi işi ve en sonunda da bu iş efektif malzemenin işine eşitlenerek kompozitin μ^* efektif kayma modülü bulunmuştur. Bu işlem c 'nin 0 - 1 aralığında %1 lik artışları için tekrarlanarak $\mu^* - c$ eğrisi çizilmiştir (Şekil 2.5). Bunun için bir Fortran 'da yazılmıştır.



Şekil 2.5: Küresel parçacık içeren kompozitin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.

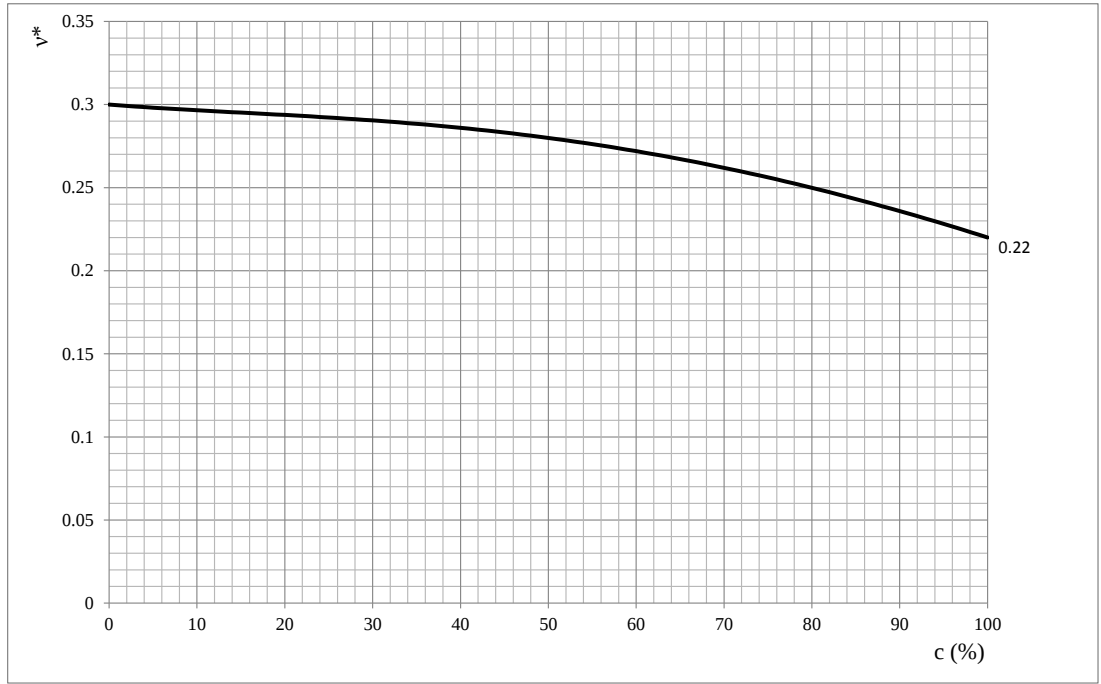
Bu grafikte de yine türevinin eğimi artan bir eğri görülmektedir.

Küresel efektif cisme ait önceki bölümde elde edilen Bulk modülü ile burada elde edilen kayma modülü kullanılarak efektif poisson oranının da konsantrasyon ile değişimi elde edilmiştir. Bunun için Poisson oranını, Bulk ve kayma modülü cinsinden

ifade etmek yeterlidir. Bulk modülünün kayma modülüne oranı K/μ ye eğer f dersek, Poisson oranı

$$\nu = \frac{3f - 2}{6f + 2} \quad (2.184)$$

şeklinde yazılır. Buna göre efektif malzemenin Poisson oranının hacim konsantrasyonu ile değişimi grafikte verilmiştir (Şekil 2.6).



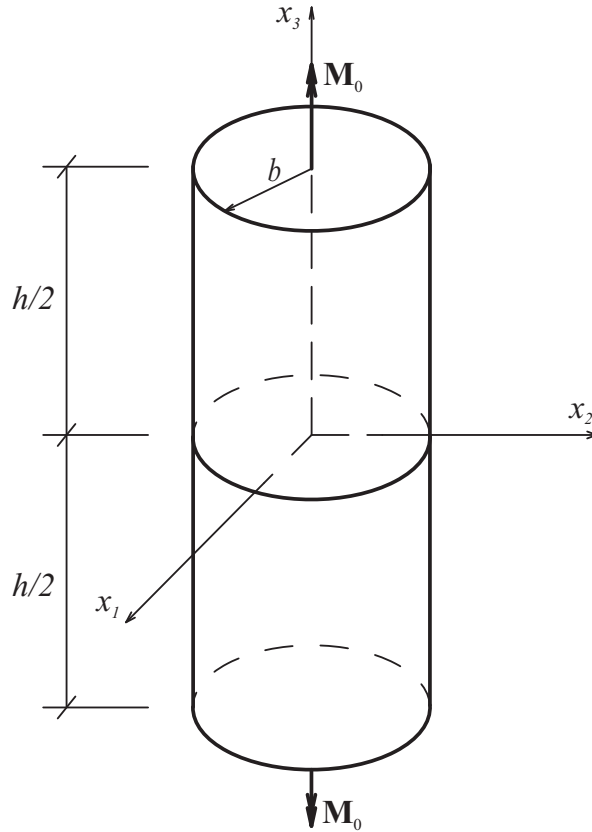
Şekil 2.6: Küresel parçacık içeren kompozitin Poisson oranının hacim konsantrasyonu ile değişimi.

Grafikten görüldüğü üzere efektif Poisson oranı konsantrasyon artışı ile düşmektedir.

3. İNCE LİFLER İÇEREN KOMPOZİT CİSMİN KAYMA MODÜLÜNÜN ANALİTİK YOLLA BULUNMASI

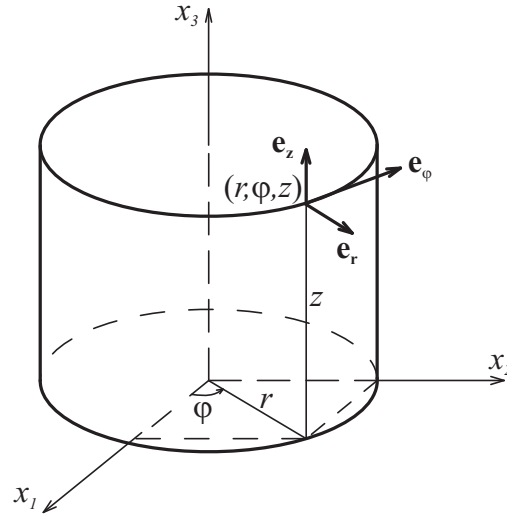
3.1 Silindirik Bir Cismin Kendi Eksenine Etrafında Burulması

Bu problemde, x_3 eksenine etrafında burulma momenti etkisindeki silindirik bir cisim ele alınacak ve problem silindirik koordinatlarda incelenecektir. Problemde ele alınan h yüksekliğinde, b yarıçaplı, üst ve alt yüzeylerine kendi eksenine doğrultusunda $\mathbf{M}_0$ burulma momenti etkileyen silindirik cisim ile silindirik koordinat takımındaki birim vektörler sırasıyla gösterilmiştir (Şekil 3.1, 3.2).



Şekil 3.1: h yüksekliğinde, b yarıçaplı, $\mathbf{M}_0$ burulma momenti etkileyen silindir.

Gerilme tensörü $\boldsymbol{\tau}$, bu problem için silindirik koordinatlarda



Şekil 3.2: Silindirik koordinat takımında birim normal vektörler.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{r\phi} & 0 \\ \tau_{\phi r} & 0 & \tau_{\phi z} \\ 0 & \tau_{z\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklindedir ve problemin bütün bilinmeyenleri ϕ değişkeninden bağımsızdır. Sadece x_3 doğrultusunda moment söz konusu olduğundan, sonsuz küçük bir elemanda bu doğrultuda moment dengesi yazılmaya çalışılacaktır. Bunun için eksen x_3 eksenine olan, r yarıçaplı, orijine olan uzaklığı z olan, dz yüksekliğinde bir eleman ve bunun üzerine etkiyen gerilmeler göz önüne alınsın (Şekil 3.3).

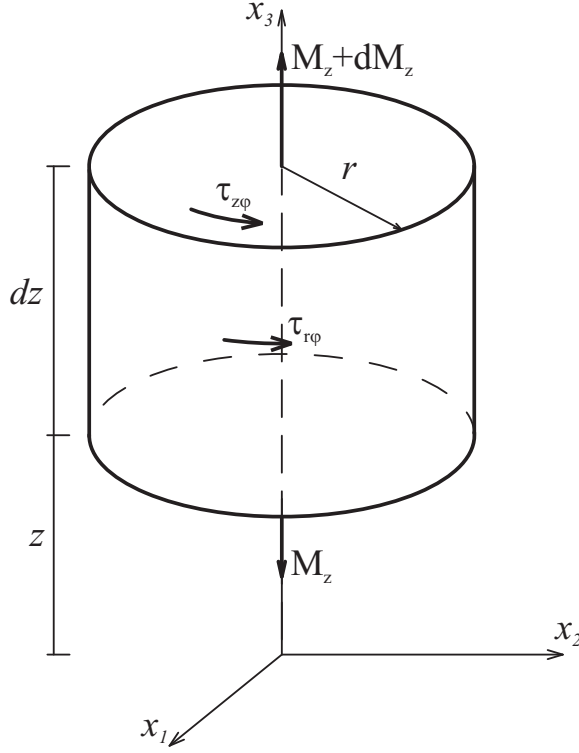
Bu elemanın eksen koordinatları z ve $z + dz$ olan alt ve üst yüzeylerine $\tau_{z\phi}$, r 'nin sabit olduğu yan yüzeyine $\tau_{r\phi}$ kayma gerilmeleri etkir. Elemandaki $M_z(r, z)$ momenti, üst yüzeydeki $\tau_{z\phi}$ kayma gerilmelerinin etkidiği yüzeyin merkezine göre oluşturduğu momentlerin bileşkesidir. Bu yazılırsa

$$M_z(r, z) = 2\pi \int_0^r \tau_{z\phi}(\xi, z) \xi^2 d\xi \quad (3.2)$$

ifadesi bulunur. Bu ifade r ye göre türetilip düzenlenirse

$$\tau_{z\phi}(r, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial r} \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir.



Şekil 3.3: r yarıçaplı, dz yüksekliğinde silindirik hacim elemanı.

Eleman üzerindeki momentin z doğrultusundaki değişimi de varsayılacağından, elemanın bu doğrultudaki moment dengesi yazılırsa diğer gerilme bileşeni

$$M_z + dM_z - M_z + \tau_{r\phi} 2\pi r dz r = 0 \rightarrow \tau_{r\phi} = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial z} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir.

Silindirik koordinatlarda şekil değiştirme bileşenleri ile yer değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar, problemde sadece $u_\phi(r, z)$ yer değiştirme bileşeninin sıfırdan farklı olduğu düşünülerek

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\phi\phi} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{r\phi} \quad (3.6)$$

$$\epsilon_{z\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{z\phi} \quad (3.7)$$

$$\epsilon_{rz} = 0 \quad (3.8)$$

olarak yazılır. Burada $\gamma_{r\phi}$ ve $\gamma_{z\phi}$ kayma açılarıdır ve bunun üçüncü bileşeni olan γ_{rz} sıfırdır. Sıfırdan farklı gerilme bileşenleri ise Hooke bağıntısından

$$\tau_{z\phi} = \mu \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} \quad (3.9)$$

$$\tau_{r\phi} = \mu \left(\frac{\partial u_{\phi}}{\partial r} - \frac{u_{\phi}}{r} \right) \quad (3.10)$$

olarak elde edilirler. (3.3) ve (3.4) denklemleri sırasıyla (3.9) ve (3.10) ifadelerine eşitlenirse

$$\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial r} = \mu \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial u_{\phi}}{\partial r} - \frac{u_{\phi}}{r} \right) \quad (3.12)$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden ilki r , ikincisi z değişkenlerine göre türetilip u_{ϕ} yer değiştirme bileşeni yok edilirse, elemana etkiyen burulma momenti için

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial M_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

diferansiyel denklemi bulunur. B bir sabiti göstermek üzere, $M = B$ bu denklemin bir çözümüdür. Bu denklemin diğer çözümü için

$$z = R \cos \theta, \quad r = R \sin \theta, \quad \phi = \phi' \quad (3.14)$$

şeklinde (R, θ, ϕ') küresel koordinatlara geçilirse (3.13) denklemi

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial R^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial M_z}{\partial R} - \frac{3 \cot \theta}{R^2} \frac{\partial M_z}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.15)$$

şekline gelir. Bu denklemin çözümünün

$$M_z = R^n M_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

şeklinde bir seri olduğu varsayılabilir. Buradaki M_n

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial \theta^2} - 3 \cot \theta \frac{\partial M_n}{\partial \theta} + n(n-3)M_n = 0 \quad (3.17)$$

denklemini sağlar. Burada

$$M_n = F_n \sin^2 \theta \quad (3.18)$$

dönüşümü yapılır ve denklem düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial F_n}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + F_n \left(-2 - 4 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + n(n-3) \right) = 0 \quad (3.19)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$v = \cos \theta \quad (3.20)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dv}{d\theta} = -\sin \theta = -\sqrt{1-v^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} = -v \quad (3.22)$$

$$\frac{dF_n}{d\theta} = \frac{dF_n}{dv} \frac{dv}{d\theta} = \frac{dF_n}{dv} \left(-\sqrt{1-v^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 F_n}{d\theta^2} = \frac{d^2 F_n}{dv^2} \left(\frac{dv}{d\theta} \right)^2 + \frac{dF_n}{dv} \frac{d^2 v}{d\theta^2} = \frac{d^2 F_n}{dv^2} (1-v^2) + \frac{dF_n}{dv} (-v) \quad (3.24)$$

eşitlikleri elde edilip bunlar (3.19) denkleminde yerleştirilirse

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial \theta^2} (1-v^2) - 2v \frac{\partial F_n}{\partial \theta} + F_n \left((n-1)(n-2) - \frac{4}{1-v^2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

denklemini bulunur. Bu, mertebesi iki olan $(n-2)$. dereceden Legendre polinomudur ve buradaki F_n için birinci tip çözüm, P_{n-2}^2 ile gösterilip

$$F_n = P_{n-2}^2 = (1-v^2) \frac{d^2}{dv^2} (P_{n-2}), \quad n-2 \geq 2 \quad (3.26)$$

şeklinde hesaplanır. Burada P_{n-2} ise

$$\frac{\partial^2 P_{n-2}}{\partial \theta^2} (1 - v^2) - 2v \frac{\partial P_{n-2}}{\partial \theta} + P_{n-2} ((n-1)(n-2)) = 0 \quad (3.27)$$

denklemini sağlar [4]. $n = 4$ için

$$P_2 = \frac{1}{2} (3v^2 - 1) \quad (3.28)$$

$$F_4 = P_2^2 = (1 - v^2) \frac{d^2}{dv^2} (P_2) \quad (3.29)$$

şeklinde alınacak tek terim denklemi sağlar. Dolayısıyla (3.18) ifadesinden M_4 elde edilerek, (3.14) ve (3.20) dönüşümleri ile geri dönülerek (3.16) denklemi bir C integral sabiti de kullanılarak yazılırsa

$$M_z = CR^4 \sin^4 \theta + B = Cr^4 + B \quad (3.30)$$

bulunur. (3.25) denkleminin ikinci tip çözümü Q_{n-2} , logaritmik olduğu için hesaba katılmamıştır. Ayrıca $r = 0$ için M_z sıfır olacağından B sabiti sıfırdır.

Ele alınan silindirin alt ve üst yüzeylerine etkiyen $\mathbf{M}_0$ burulma momentinin birim alana düşen miktarına $\mathbf{m}$ denilsin. Başka bir deyişle bu cismin alt ve üst yüzeylerinde z doğrultusunda etkiyen $\mathbf{m}$, yüzeyde yayılı burulma momentinin bileşkesi $\mathbf{M}_0$ olsun. Böyle bir tanımlama yapmadaki amaç, ele alınan problemi ileride mikropolar teori ile çözümlerken, burada elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini sağlamaktır. Bu,

$$M_0 = m\pi b^2 \quad (3.31)$$

şeklinde yazılır. (3.30) 'da verilen M_z ifadesi $r = b$ için M_0 'ı verecektir. Buradan bilinmeyen katsayı

$$Cb^4 = m\pi b^2 \rightarrow C = \frac{m\pi}{b^2} \quad (3.32)$$

olarak bulunur. Böylece ilgili kayma gerilmesi bileşenleri (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılarak

$$\tau_{z\varphi} = \frac{2mr}{b^2} \quad (3.33)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (3.34)$$

ve sıfırdan farklı kayma açısı bileşeni Hooke bağıntısından

$$\gamma_{z\varphi} = \frac{2mr}{\mu b^2} \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. Silindirde biriken toplam şekil değiştirme işi ise

$$U = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{z\varphi} \gamma_{z\varphi} r d\varphi dr dz \quad (3.36)$$

hacim integralinin hesabı ile

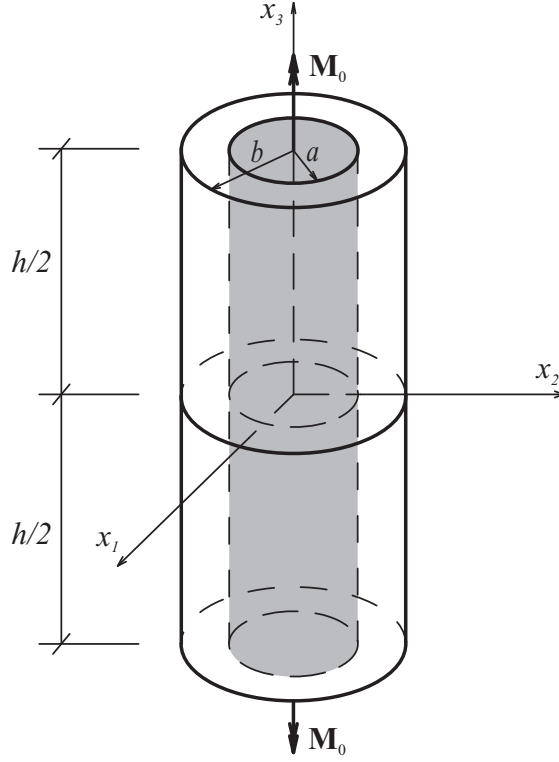
$$U = \frac{\pi h m^2}{\mu} \quad (3.37)$$

şeklinde hesaplanır.

3.2 Tek İnce Lif İçeren Silindirik Bir Cismin Kendi Eksenini Etrafında Burulması

Şimdi eksenleri ve uzunlukları aynı, farklı malzemeden yapılmış, birlikte çalışan iç içe iki silindirde aynı problem ele alınacaktır (Şekil 3.4). Bu, aslında içerisinde tek doğrultuda yönlendirilmiş, birbirlerine paralel, ince lifler içeren kompozit malzemeden alınan temsili hacim elemanıdır. İçteki silindirik parçanın lif, bunun etrafını kaplayan kısmın ise matris olduğu düşünülmektedir. Burada aslında temsili hacim elemanına etkiyen toplam burulma momenti $\mathbf{M}_0$ olmasına karşın, önceki kısımda açıklandığı üzere, yüzeyde yayılı moment olan $\mathbf{m}$ ile hesaplar yapılacaktır. Bir kesitte içteki silindirin taşıdığı burulma momenti $\mathbf{M}^P$, dıştaki matrisin taşıdığı burulma momenti $\mathbf{M}^M$ ile, bunlara ait gerilmelerse sırasıyla $\boldsymbol{\tau}^P$ ve $\boldsymbol{\tau}^M$ ile gösterileceklerdir. Yine üzerinde P indisi bulunan elastik katsayılar içteki, M indisi bulunanlar ise dıştaki malzemeye aittir.

İçteki silindirin aldığı $\mathbf{M}^P$ momenti ve sıfırdan farklı gerilme bileşeni $\tau_{z\varphi}^P$; (3.3), (3.7) ve (3.30) ifadeleri kullanılarak,



Şekil 3.4: Burulma momentine maruz tek ince lif içeren silindirik cisim.

$$M^P(r, z) = C^P r^4, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (3.38)$$

$$\tau_{z\varphi}^P(r, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M^P}{\partial r} = \frac{2C^P r}{\pi} = \mu^P \gamma_{z\varphi}^P \quad (3.39)$$

olarak yazılırken içi boş olan dıştaki silindirde

$$M^M(r, z) = C^M r^4 + D^M, \quad (a \leq r \leq b) \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir. Bundaki kayma gerilmeleri ise

$$\tau_{z\varphi}^M(r, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M^M}{\partial r} = \frac{2C^M r}{\pi} = \mu^M \gamma_{z\varphi}^M \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir. Bu kayma gerilmelerinin bileşkesi $M_0 = m\pi b^2$ momentini verecektir. Bu yazılırsa

$$\int_0^a 2\pi \tau_{z\varphi}^P r^2 dr + \int_a^b 2\pi \tau_{z\varphi}^M r^2 dr = M_0 \quad (3.42)$$

eşitliğinden

$$C^P a^4 + C^M (b^4 - a^4) = M_0 \quad (3.43)$$

denklemleri elde edilir. (3.39) ve (3.41) 'de bulunan gerilme ifadeleri (3.9) denkleminde eşitlenirse sırasıyla

$$\tau_{z\varphi}^P(r, z) = \frac{2C^P r}{\pi} = \mu^P \frac{\partial u_\varphi^P}{\partial z} \quad (3.44)$$

$$\tau_{z\varphi}^M(r, z) = \frac{2C^M r}{\pi} = \mu^M \frac{\partial u_\varphi^M}{\partial z} \quad (3.45)$$

denklemleri elde edilir. Buradan yer değiştirmeler hesaplanırsa

$$u_\varphi^P = \frac{2C^P r}{\pi \mu^P} z + f_1(r) \quad (3.46)$$

$$u_\varphi^M = \frac{2C^M r}{\pi \mu^M} z + f_2(r) \quad (3.47)$$

bulunur. u_φ^P ve u_φ^M bileşenleri $z = 0$ 'da $U_\varphi^M = U_\varphi^P = 0$ olacağından

$$f_1(r) = f_2(r) = 0 \quad (3.48)$$

olur. $r = a$ da

$$u_\varphi^P = u_\varphi^M \quad (3.49)$$

eşitliğinden

$$\frac{C^P}{C^M} = \frac{\mu^P}{\mu^M} \rightarrow C^P = C^M \frac{\mu^P}{\mu^M} \quad (3.50)$$

bulunur. (3.43) ve (3.50) denklemlerinden katsayılar

$$C^P = \frac{M_0 \mu^P}{\mu^P a^4 + \mu^M (b^4 - a^4)} \quad (3.51)$$

$$C^M = \frac{M_0 \mu^M}{\mu^P a^4 + \mu^M (b^4 - a^4)} \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. İç içe iki silindirden oluşan cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi

$$U = \frac{1}{2} 2\pi h \left[\int_0^a \tau_{z\phi}^P \gamma_{z\phi}^P dr + \int_a^b \tau_{z\phi}^M \gamma_{z\phi}^M dr \right] \quad (3.53)$$

denkleminde (3.39), (3.41), (3.51) ve (3.52) denklemleri kullanılarak

$$U = \frac{b^4 m^2 \pi h}{a^4 (\mu^P - \mu^M) + b^4 \mu^M} \quad (3.54)$$

şeklinde hesaplanır.

3.3 Efektif Kayma Modülünün Hesaplanması

Efektif cisim, bir önceki bölümde ele alınan kompozit silindirik cisme eş değer bir silindirik cisimdir. Dolayısıyla yukarıda çözülen burulma momentine maruz bir silindirde hesaplanan toplam şekil değiştirme işinin ifadesi efektif cisim için kayma modülü efektif olanı ile değiştirilerek aynen kullanılabilir. Dolayısıyla efektif cisimde toplam iş (3.37) 'de verilen ifadede μ yerine μ^* konularak elde edilir. Bununla temsili hacim elemanı için hesaplanan ve (3.54) 'de verilen iş ifadesi eşitlenirse

$$\frac{\pi h m^2}{\mu^*} = \frac{b^4 m^2 \pi h}{a^4 (\mu^P - \mu^M) + b^4 \mu^M} \quad (3.55)$$

denkleminde μ^* çekilerek efektif kayma modülü

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{b^4}{a^4 \mu^P + (b^4 - a^4) \mu^M} \quad (3.56)$$

olarak bulunur. İç içe iki silindirik malzemeden oluşan kompozit malzemede hacim konsantrasyonu c

$$c = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = c b^2 \quad (3.57)$$

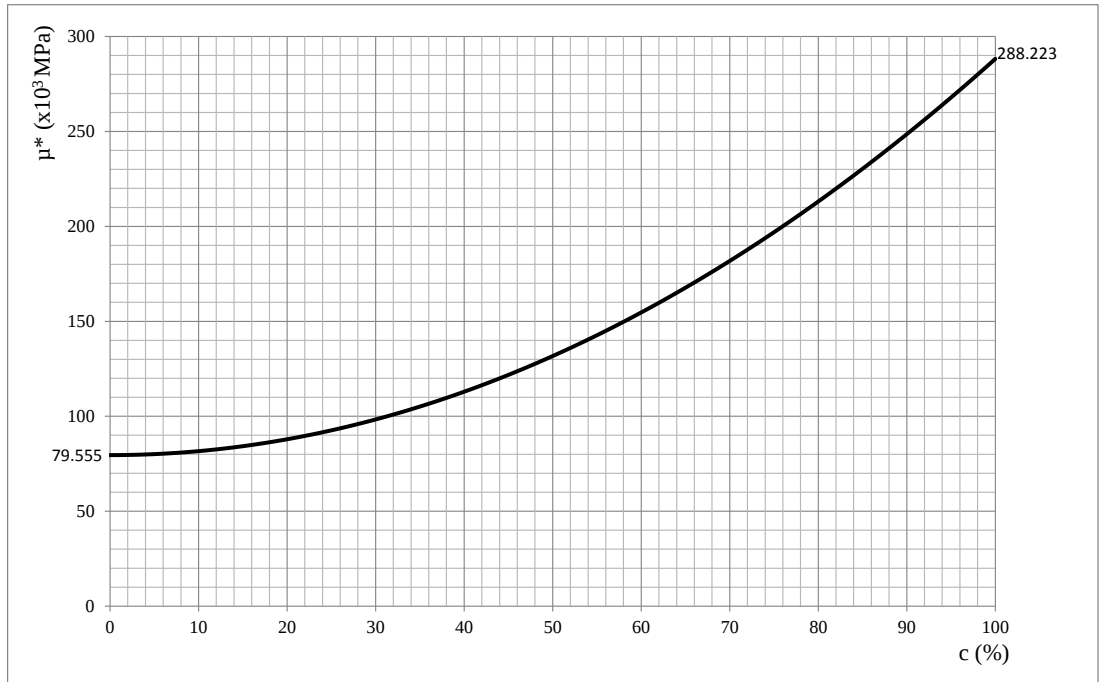
şeklinde tanımlanarak (3.56) denklemi düzenlenirse

$$\mu^* = \mu^P c^2 + \mu^M (1 - c^2) \quad (3.58)$$

denklemi elde edilir.

3.4 Sayısal Bir Uygulama

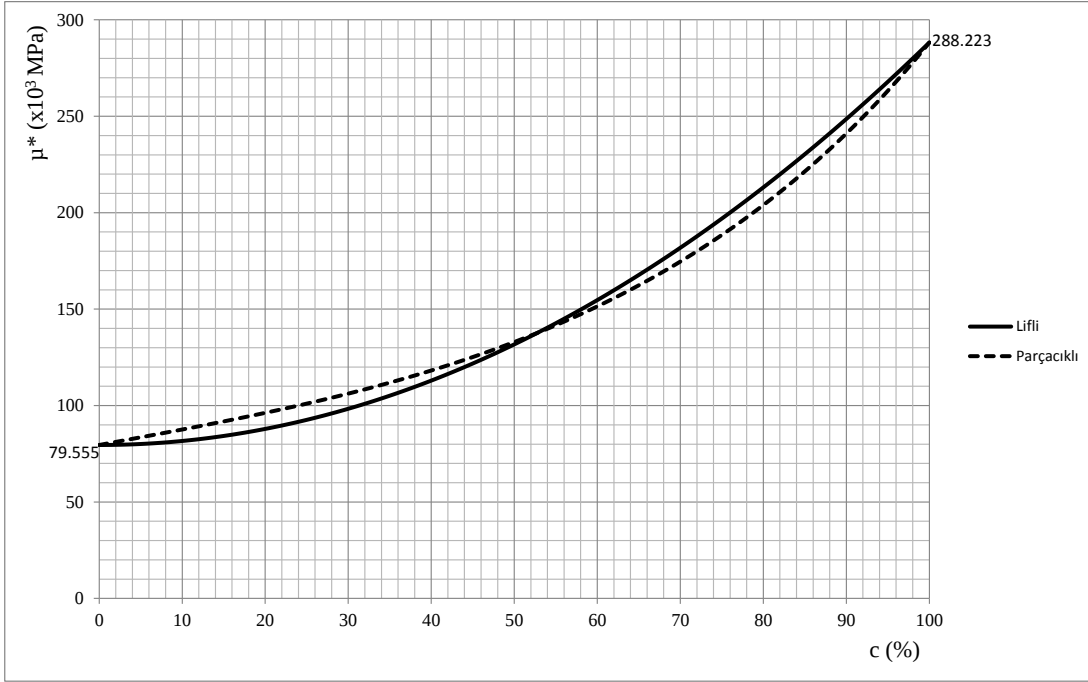
Matris ile life ait kayma modülleri önceki uygulamalarda olduğu gibi (2.66) ve (2.67) 'de belirtilen kayma modülleri olarak seçilsin. Bu durumda (3.58) 'de verilen denklem kullanılarak efektif cismin kayma modülü μ^* 'ın ile hacim konsantrasyonu c 'ye bağlı değişimi çizilmiştir (Şekil 3.5). Ayrıca lifli kompozit ile parçacık içeren kompozitin kayma modüllerinin hacim konsantrasyonu ile değişimi grafiği de çizilmiştir (Şekil 3.6).



Şekil 3.5: Silindirik lif içeren kompozit cismin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.

3.5 İnce Lifler İçeren Kompozitin Mikropolar Malzeme Olarak Ele Alınması

Burada temsili hacim elemanına denk olan efektif cismin malzemesinin mikropolar olduğu düşünülecektir. Aslında bununla, matris ve parçacıkların oluşturduğu kompozit



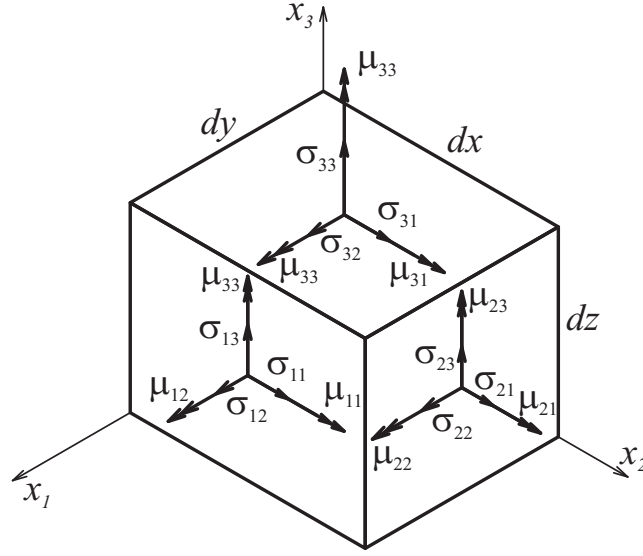
Şekil 3.6: Lifli ve parçacıklı kompozit cismin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi.

elemanın davranışını eksik modelleme kaygısını giderme hedeflenmektedir. Zira oluşacak kompozit elemanda, eklenen parçacıklar çok küçük olduğundan, bilinen elastisite teorisinde göz önünde bulundurulmayan parçacıkların dönme etkilerini de hesaplara eklemek yerinde olacaktır. Dolayısıyla efektif cisme ait gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerinin hesabı için mikropolar teorideki denklemler kullanılacaktır.

3.5.1 Mikropolar teori

Mikropolar teori, malzemede oluşan etkinin, bir noktadan başka bir noktaya sadece gerilme bileşenleri ile değil bunlarla birlikte parçacıkların mikro dönmelerinden kaynaklanan gerilme-çiftleri bileşenleri ile de aktarıldığını belirtir. Bu teoriye uygunluk gösteren cisme mikropolar cisim denilir. Mikropolar bir cisimden alınan dx , dy , dz boyutlarına sahip dikdörtgenler prizması şeklindeki bir diferansiyel hacim elemanının yüzeylerinde gerilme bileşenleri τ_{ij} ile birlikte gerilme-çifti bileşenleri μ_{ij} de bulunacaktır (Şekil 3.7).

Bu elemanda herhangi bir noktaya göre moment dengesi yazılırsa, klasik elastisite teorisinde elde edilen kayma gerilmelerinin eşitliğinin sağlanmadığı görülür. Böylece



Şekil 3.7: Mikropolar cisimden alınan bir diferansiyel hacim elemanı üzerinde gerilme ve gerilme-çifti bileşenleri.

gerilme ve şekil değiştirme halini tanımlayan tansörlerin mikropolar teoride simetrik olmadığı anlaşılmış olur.

Mikropolar bir malzemede u yer değiştirme vektörüne ilave olarak ϕ mikro dönme vektörü de tanımlanmaktadır. Bu malzemede zamana bağlı olmayan denge denklemleri, kütle kuvvetlerinin sıfır olması durumunda

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \phi = 0 \quad (3.59)$$

$$(\beta + 2\gamma) \nabla \nabla \cdot \phi - (\gamma + \varepsilon) \nabla \times \nabla \times \phi + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \phi = 0 \quad (3.60)$$

şeklindedir. Burada α , β , γ , λ , μ , ε malzeme sabitleridir. Ayrıca asimetrik şekil değiştirme tansörü γ ve burulma tansörü κ , $\mathbf{u}$ ve ϕ vektörlerinin bileşenleri cinsinden

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \varepsilon_{kij} \phi_k \quad (3.61)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \quad (3.62)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada ε_{kij} permütasyon sembolüdür.

Mikropolar malzemede ayrıca gerilme tansörü $\boldsymbol{\tau}$ ve gerilme çifti tansörü $\mathbf{M}$ 'nin bileşenleri ise

$$\tau_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} \quad (3.63)$$

$$M_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij} \quad (3.64)$$

şeklindedir [9, 10].

3.5.2 Efektif cismin basit burulma halinde toplam şekil değiştirme işinin mikropolar teori kullanılarak hesaplanması ve mikropolar malzeme katsayıları arasındaki ilişkinin elde edilmesi

Küresel cisimde üzerinde yayılı burulma yüzey momenti bulunması halinde kayma gerilmelerinde bir tekillik gözlenmiştir. Bu tekillik sonucu etkilememesine rağmen aynı problemi tekillik göstermeyen bir geometriye sahip cisimde çözmenin uygun olacağı düşünülmüştür. Bu sebeple efektif cisimde mikropolar teori ile iş yalnızca silindirik cisimde hesaplanmıştır. Ancak burada mikropolar malzeme katsayıları α ve ε 'un sıfır olduğu özel bir malzeme kullanılmıştır.

$$\alpha = \varepsilon = 0 \quad (3.65)$$

Bu durumda gerek $\boldsymbol{\tau}$, gerekse $\boldsymbol{\mu}$ tansörleri simetrik tansörler olurlar ve $\mathbf{u}$ ile $\boldsymbol{\phi}$ 'nin sağladıkları denklemler

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

$$(\beta + 2\gamma)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} - \gamma\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

şeklinde birbirlerinden ayrılırlar. Problemi çözerken (3.66) ve (3.67) denklemleri arasındaki analogi kullanılacaktır.

Burada çözülecek olan problem, seçilen tür mikropolar malzemeden yapılmış b yarı çaplı, h yüksekliğinde bir silindirdir ve eksen takımı önceki problemlerde olduğu gibi alınmıştır (Şekil 3.1).

Problem silindirik koordinatlarda çözülecektir. Sınır koşulları, $\mathbf{m}$ yüzey gerilme çifti vektörü olmak üzere

$$z = \frac{h}{2} \text{ de, } \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$z = -\frac{h}{2} \text{ de, } \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$r = b \text{ de, } \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

şeklinde yazılır. Bu problem için yukarıda belirtilen analogiden dolayı önce aynı silindire alt ve üst yüzeylerine sabit, z doğrultusunda normal gerilme etkimesi halinin düşünülmesi gerekmektedir. Bu durumda problem döneel simetriktir ve φ 'den bağımsızdır. Ayrıca,

$$u_\varphi = 0 \quad (3.71)$$

olur. Aynı durumu mevcut probleme uygularsak mikro dönme vektörü

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_r \\ 0 \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

şeklinde olur ve ϕ_r ile ϕ_z bileşenleri φ değişkeninden bağımsızdır. Bu durumda mikro dönme ile ilgili denge denklemleri (3.67) denkleminde

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.73)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} \right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (3.74)$$

şeklinde iki denkleme indirgenir. Gerilme-çifti tansörü ise

$$\mathbf{M} = \gamma \begin{bmatrix} 2\frac{\partial\phi_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial\phi_z}{\partial r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial z} \\ 0 & 2\frac{\phi_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial\phi_z}{\partial r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial z} & 0 & 2\frac{\partial\phi_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

şeklinde yazılır. Burada Δ ,

$$\Delta = \frac{\partial\phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{\partial\phi_z}{\partial z} \quad (3.76)$$

olarak tanımlanmıştır.

(3.68)-(3.70) ifadeleri ile verilen sınır koşulları (3.75) eşitliği kullanılarak

$$r = a' da \quad \beta\Delta + 2\gamma\frac{\partial\phi_r}{\partial r} = 0 \quad (3.77)$$

$$r = a' da \quad \frac{\partial\phi_r}{\partial z} + \frac{\partial\phi_z}{\partial r} = 0 \quad (3.78)$$

$$z = \frac{h'}{2} de \quad \frac{\partial\phi_r}{\partial z} + \frac{\partial\phi_z}{\partial r} = 0 \quad (3.79)$$

$$z = \frac{h'}{2} de \quad \beta\Delta + 2\gamma\frac{\partial\phi_z}{\partial z} = m \quad (3.80)$$

şeklinde elde edilirler. Bu denklemler

$$\phi_r = Ar \quad (3.81)$$

$$\phi_z = Bz \quad (3.82)$$

ile sağlanır. Bu ifadeler (3.77 - 3.80) denklemlerinde kullanılırsa

$$B = m \frac{\beta + \gamma}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \quad (3.83)$$

$$A = -m \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma + 3\beta)} \quad (3.84)$$

şeklinde iki katsayı da tayin edilir. Bulunan katsayılar (3.62), (3.75) ve (3.76) denklemlerinde kullanılarak

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{M} = 2\gamma \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2A+B & 0 & 0 \\ 0 & 2A+B & 0 \\ 0 & 0 & 2A+B \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

eşitlikleri elde edilir.

Cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi (3.83 - 3.86) denklemleri kullanılarak hesaplanırsa

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^b \kappa_{ij} M_{ij} r dr \quad (3.87)$$

$$U = \pi h b^2 m^2 \frac{\beta + \gamma}{2\gamma(2\gamma + 3\beta)} \quad (3.88)$$

sonucu bulunur. Bu ifade, (3.54) 'e eşitlenir ve düzenlenirse

$$\frac{\beta + \gamma}{2\gamma(2\gamma + 3\beta)} = \frac{b^2}{a^4(\mu^P - \mu^M) + b^4\mu^M} \quad (3.89)$$

şeklinde β ve γ katsayıları arasında bir ilişki bulunur. Buradan fiktif mikropolar malzemede katsayıların boyutlarla ilişkili olduğu sonucu çıkar. Eğer (3.89) ifadesinde

$$\beta = \beta' b^2, \quad \gamma = \gamma' b^2 \quad (3.90)$$

tanımlaması yapılırsa γ ve β katsayıları arasında

$$\frac{\beta' + \gamma'}{2\gamma'(2\gamma' + 3\beta')} = \frac{1}{c^4(\mu^P - \mu^M) + \mu^M} \quad (3.91)$$

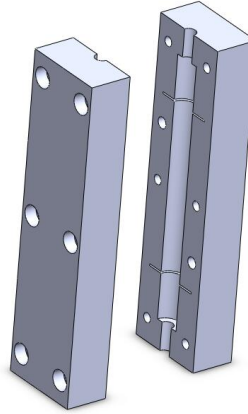
bağıntısı elde edilir.

4. DENEYSEL ÇALIŞMALAR

Önceki bölümlerde yapılan teorik çalışmaların pratik ile desteklenmesi amacıyla basit çekmeye maruz silindirik kompozit numunelerin deneyleri yapılmıştır. Yapılan deneylerde kullanılan numuneler mikron mertebede çapa sahip lifler içermektedir. Burada matris malzemesi olarak polyester, lif olarak da Kevlar iplikçiklerin oluşturduğu demetler kullanılmıştır. Bu seçimde matris malzemesinin elastik özelliklerinin katkı malzemesininkilere göre çok küçük olması kabulü esas alınmıştır.

4.1 Numunelerin Hazırlanması

Öncelikle numunelerin dökümü için şekilde çizimleri görülen kalıp imal ettirilmiştir. Kalıp paslanmaz çelik malzemedendir olup, 22 mm çapında silindirik bir numune hazırlamak için tasarlanmıştır (Şekil 4.1).



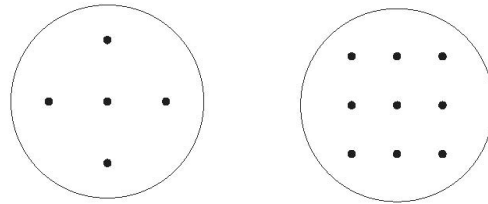
Şekil 4.1: Numune hazırlanması için kullanılan paslanmaz çelikten imal edilmiş kalıp

Bu şekilde görüldüğü gibi, döküm esnasında kayma olmaması için kalıp pimlerle merkezlenmiş ve altı adet vida ile sabitlenmiştir. Bu şekilde sabitlenen iki parçanın oluşturduğu kalıbın bir tarafındaki delikten polyester dökülerek numune elde edilecektir.

Polyester olarak, Türkiye 'de üretilen Poliya markasının ürettiği Polipol 336 kodlu RTM tipi polyester kullanılmıştır. Ürünün, teknik bülteninde, post kür işlemi sonrası sertleştikten sonra, standart numunesine ait çekme dayanımı 64 MPa, elastisite modülü 2801 MPa, kopma uzama oranı %2.8 olarak verilmektedir. Ancak bu özellikler bu malzemeden elde edilen her numune için sağlanamaz.

Öncelikle saf matris malzemesinin elastik özelliklerini görmek amacıyla katkısız numuneler dökülmüştür. Bunların hazırlanması, yukarıda belirtilen polyesterin içerisine ağırlıkça %0.05 oranında kobalt, %0.25 oranında da Metil-Etil-Keton(MEK) 'dan oluşan katılaştırıcının oda sıcaklığında katılması şeklinde olmuştur. MEK 'in düşük oranda katılması, kürleşmenin ekzotermik olması dolayısıyla reaksiyon sürerken termal gerilmeler sonucu numunenin çatlamasını veya deforme olmasını engelleme kaygısından kaynaklanmaktadır. Bunun için, literatürde belirtilen bir değer bulunamamasından dolayı, oranlar azar azar arttırılmış ve elde edilen numunelerde istenen durum kontrol edilmiştir.

Sonrasında hacimce %1 ve %1.5 oranında Kevlar lif içeren kompozit numuneler hazırlanmıştır. Matris malzemesi olan polyesterin hazırlanması için yukarıda belirtilen oranlar kullanılmıştır. Liflerin yerleşimi için elek teli kullanılmış, bu elek teli uygun ölçülerde kesilip elde edilen parçalar kalıpta bu amaçla oluşturulmuş boşluklara sabitlenmişlerdir. Ardından iki elek arasında lifler birbirlerine ve silindir eksenine paralel şekilde konumlandırılmışlardır. Liflerin yerleşimlerinin kesit görünüşü şematik olarak gösterilmiştir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2: %1 ve %1.5 oranında konulan liflerin kesitte yerleşimlerinin şeması

Numunelerden birinin hazırlanışı sırasında çekilen ve liflerin yerleşimini gösteren fotoğraflar da verilmiştir (Şekil 4.3).

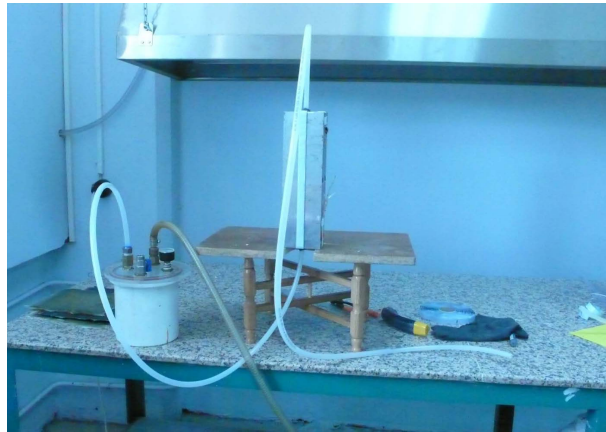
Saf polyesterden oluşan numune hazırlanırken, sıvı haldeki polyesteri, bunun içerisine kobalt ve katılaştırıcı katıldıktan sonra, kalıp dik pozisyonda iken kalıbın üst



Şekil 4.3: Kalıp üzerinde liflerin yerleşimine ait fotolar

tarafındaki delikten dökmek yeterli olmuştur. Ancak lifli numunelerde sıvı polyesterin elek aralarından geçmesi ve tam yerleşmesi için infüzyon yöntemi kullanılmıştır. Buna ait düzeneğin fotoğrafı görülmektedir (Şekil 4.4).

Dökümü yapılan numuneler yaklaşık bir ay süre ile kürleşmeye bırakılmıştır. Çünkü daha çabuk katılaşma durumunda numunelerde termal gerilmeler oluşmaktadır. Ayrıca bu süreç içerisinde numunelere post kür olarak isimlendirilebilecek bir fırınlama işlemi yapılmaktadır. Bu işlem, numuneyi 70 santigrat dereceye kadar yavaş yavaş ısıtıp,



Şekil 4.4: Numunenin infüzyon yöntemi ile dökülmesi için oluşturulan düzenek



Şekil 4.5: Hava konveksiyonlu dijital kontrollü fırın

yaklaşık 1 saat beklettikten sonra yavaş yavaş soğutma şeklindedir. Bunun için MTI marka hava konveksiyonlu dijital kontrollü fırın kullanılmıştır (şekil 4.5).

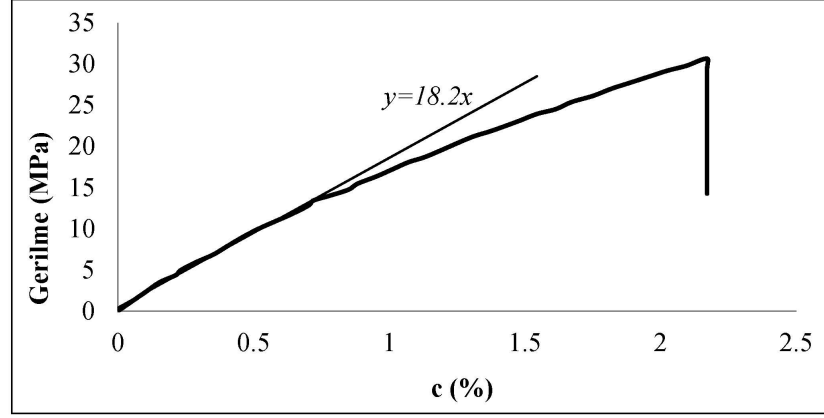
4.2 Basit Çekme Testinin Uygulanması

Hazırlanan numunelerin Instron 8802 cihazında basit çekme testleri yapılmıştır (Şekil 4.6). Bu testler sonucunda alınan datalarla gerilme-şekil değiştirme ilişkilerini gösteren grafikler çizilip elastisite modülleri hesaplanmıştır.



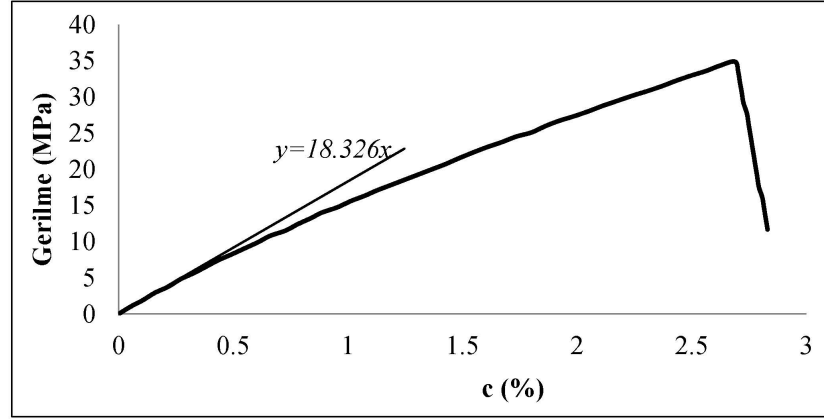
Şekil 4.6: Basit çekme için numunenin bağlanması

Şekilde sadece polyester ile imal edilen numunenin çekme testi sonucunda elde edilen gerilme-şekil değiştirme grafiği görülmektedir (şekil 4.7). Grafik üzerinde, bunun başlangıç kısmına teğet çizilmiş ve denklemi üzerine yazılmıştır. Böylece numuneye ait elastisite modülü belirlenmiştir.



Şekil 4.7: Sadece polyester ile imal edilmiş numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği

İçerisine hacimsel olarak %1 ve %1.5 oranlarında kevlar lif konularak dökülen numunelerin çekme testi sonucunda elde edilen gerilme-şekil değiştirme grafikleri sırasıyla gösterilmiştir (Şekil 4.8 ve 4.9).



Şekil 4.8: %1 lif içeren kompozit numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği

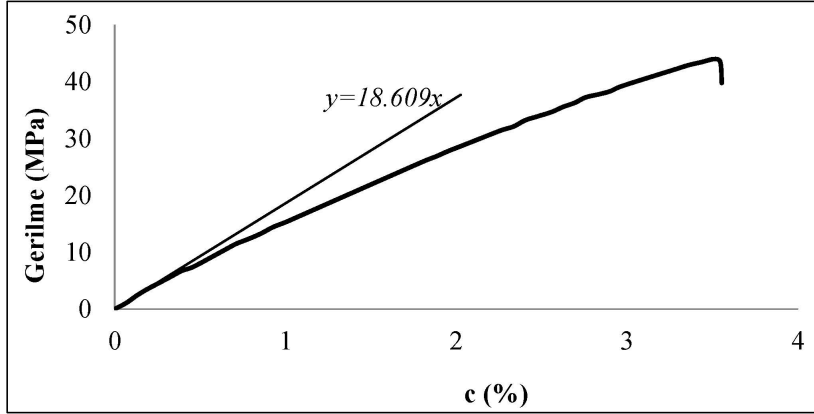
Verilen bu grafiklerden de görülebileceği gibi sadece polyesterden oluşan, %1 lif içeren ve %1.5 lif içeren numunelere ait elastisite modülleri sırasıyla

$$E^M = 1820 \text{ MPa} \quad (4.1)$$

$$E_1^* = 1832.6 \text{ MPa} \quad (4.2)$$

$$E_{1.5}^* = 1860.9 \text{ MPa} \quad (4.3)$$

olarak elde edilirler. Burada üzerinde M bulunan matrise ait, $*$ bulunan kompozite ait elastisite modülünü ifade eder. 1 ve 1.5 indisi ise kompozite katılan lifin hacminin toplam kompozit hacmine oranını ifade eder.



Şekil 4.9: %1.5 lif içeren kompozit numuneye ait gerilme-şekil değiştirme grafiği

Deneyler sırasında ayrıca numunelerin Poisson oranı ölçülmüştür. Bunun için çaptaki değişim miktarı ilk çapa bölünerek elde edilen eksene dik doğrultudaki şekil değiştirme, boyca uzama miktarı ilk boya bölünerek elde edilen eksen doğrultusundaki şekil değiştirmeye bölünmüştür. Sembolik olarak bu bağıntı

$$\nu = -\frac{\epsilon_{rr}}{\epsilon_{zz}} \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır. Numunelere ait Poisson oranları

$$\nu^M = 0.27, \quad \nu_1^* = 0.25, \quad \nu_{1.5}^* = 0.23 \quad (4.5)$$

olarak bulunmuştur.

4.3 Deney Sonuçlarının Yorumlanması

Test edilen numuneler ince lif içeren kompozit türündedir. Bu sebeple silindirik bir matris içerisinde tek bir liften oluşan temsili hacim elemanına eşdeğer efektif cismin kayma modülünün hesaplanması için (3.58) bağıntısı kullanılmalıdır. Bunun için matris ile lifin kayma modüllerine ihtiyaç vardır.

Matrise ait elastisite modülü ve Poisson oranı deneyden elde edilmiş ve bunların değerleri sırasıyla (4.1) ve (4.5) ifadelerinde verilmiştir. Numunelerin içerisine konulan Kevlar life ait malzeme sabitlerinin değerleri literatürden

$$E^P = 10^5 MPa, \quad \nu^P = 0.33 \quad (4.6)$$

olarak alınmıştır. Buna göre

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.7)$$

bağıntısı kullanılarak matris ve lif için kayma modülleri sırasıyla

$$\mu^M = 716.535 MPa \quad (4.8)$$

$$\mu^P = 37593.98 MPa \quad (4.9)$$

olarak hesaplanmıştır. Böylece (3.58) denklemi kullanılarak hacimce %1 ve %1.5 lif içeren numunelere ait kayma modülleri, sırasıyla

$$\mu_{t1}^* = 720.223 MPa \quad (4.10)$$

$$\mu_{t1.5}^* = 724.833 MPa \quad (4.11)$$

olarak hesaplanmıştır.

Deneyden elde edilen sonuçlara göre, (4.2), (4.3) ve (4.5) 'de verilen değerler kullanılarak (4.7) bağıntısı kullanılırsa %1 ve %1.5 lif içeren numunelere ait kayma modülleri

$$\mu_{d1}^* = 733.04 MPa \quad (4.12)$$

$$\mu_{d1.5}^* = 756.46 MPa \quad (4.13)$$

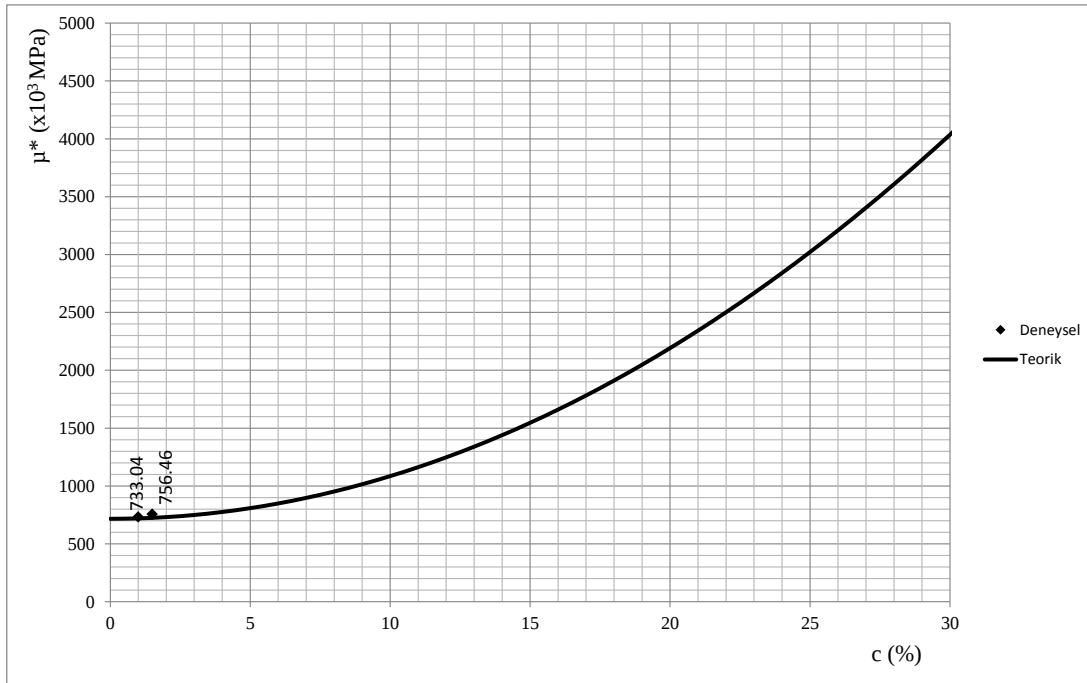
olarak bulunur. Burada indisinde d bulunanlar deney ile bulunan sonuçları, t bulunanlarsa teorik yöntemle bulunan sonuçları göstermektedir. Elde edilen sonuçlar tablo halinde verilmiştir (Çizelge 4.1).

Çizelge 4.1: Efektif cisim için teori ve deneyden elde edilen kayma modülüne ait sonuçlar.

Karışım oranı	Teoriden (MPa)	Deneyden (MPa)	Hata oranı (%)
%1 Lif	720.223	733.04	1.75
%1.5 Lif	724.833	756.46	4.18

Burada görüldüğü üzere, deneyden ve teoriden elde edilen sonuçlar arasında ortalama %2.97 'lık bir hata bulunmaktadır. Deneyde yapılabilecek hatalara dayanarak, bunun kabul edilebilir olduğu düşünülmektedir.

Buna göre kayma modülünün hacim oranına göre değişimi teorik ve deneyden elde edilen verilere dayanarak şekilde çizilmiştir (Şekil 4.10).



Şekil 4.10: DeneySEL ve teorik sonuçların karşılaştırılması

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik özellikleri zayıf bulunan ve bir ana malzemenin içerisine dayanımı daha yüksek olan ikinci bir malzemenin az miktarda katılması ile elde edilen ve kompozit adı verilen bileşik bir malzemenin elastik özellikleri, teorik ve deneysel olarak hesaplanmaya çalışılmıştır. Ele alınan kompozitler iki tiptir. Birincisinde ana malzemeye küresel parçacıklar, ikincisinde ise ince uzun lifler eklenmektedir. Ana malzeme matris olarak isimlendirilmektedir. Küresel parçacıklar için deney yapma imkanı bulunamamış ve ince uzun lifler içeren kompozit için deneysel sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Küresel partikül için elde edilen teorik sonuçlar literatürde bulunan [5] 'de verilen deneysel sonuçlarla uyum içerisinde.

Küresel partikül içeren kompozitin önce Bulk sonra kayma modülü matris ve partikül malzemelerinin Bulk ve kayma modülleri ve partikülün matris içindeki hacim konsantrasyonuna bağlı olarak bulunmuştur. Hesabın başlangıç noktası kompozitin tümü yerine ona eş değer olan temsili bir hacim elemanının alınmasıdır [5]. Burada küresel partiküller durumunda Hashin 'in bahsedilen makalesinde ele aldığı temsili hacim elemanı kullanılmıştır. Bulk modülü bu makaledeki yöntemle hesaplanmış, kayma modülü hesabında ilave bir çözüm eklenmiştir. Ayrıca Bulk ve kayma modüllerini alt ve üstten sınırlamak yerine bir konsantrasyon değeri için tek değer olarak hesaplanmıştır.

Uzun silindirik lifler halinde ise farklı bir temsili hacim elemanı alınmış ve kayma modülü yine aynı yolla her konsantrasyon için tek değer olarak bulunmuştur. Düşük hacim oranları için partikül içeren kompozitin kayma modülü daha yüksek olmaktadır.

Buradaki sonuçları deneysel olarak doğrulamak için eldeki olanaklar çerçevesinde polyeester içine ince uzun kevlar liflerin yerleştirilmesi ile bir kompozit elde edilmeye çalışılmıştır. Kullanılan polyeester malzemesinde katılma zamanına bağlı olarak farklı elastik özellikler ortaya çıkmakta ve maalesef malzeme özellikleri de zamanla değişmektedir. Sağlıklı sonuçlar ancak aynı anda saf malzemenin ve kompozitin

oluşturulması ile mümkün olmaktadır. Bu şekilde hazırlanan  numune, ki bunlardan biri saf malzemedir, en fazla %2.97 fazla sonuç vermektedir. Bu da teorik sonuçların rahatlıkla kullanılabilirliğini kanıtlamaktadır. Malzeme katılaştırma imkanları artarsa daha başarılı kompozitler elde edilebileceği açıktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Hashin, Z.** (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials, *Journal of Applied Mechanics*, 29, 143-150.
- [2] **Eshelby, J. D.** (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society*, 241, 376-396.
- [3] **Malvern, L. E.** (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. USA, Prentice-Hall.
- [4] **Sadd, M. H.** (2005). *Elasticity : theory, applications, and numerics*. USA, Elsevier.
- [5] **Moon, P. ve Spencer, D. E.** (1961). *Field theory handbook*. Berlin, Springer-Verlag
- [6] **Love, A. E. H.** (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York, Dover Publication.
- [7] **Abramowitz, M. ve Stegun, I. A.** (1965). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York, Dover Publications.
- [8] **Barber, J. R.** (2004). *Elasticity*. New York, Academic Publishers.
- [9] **Nowacki, W.** (1986). *Theory of asymmetric elasticity*. USA, Pergamon Press.
- [10] **Hadjesfandiari, A. ve Dargush, G. F.** (2011). Couple stress theory for solids, *International Journal of Solids and Structures*, 48, 2496-2510.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Osman BULUT

E-Posta: buluto@itu.edu.tr

Lisans: İTÜ İnşaat Fakültesi-2005

Y. Lisans: İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği-2007