

33871

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

33871

KİSMİ ENDOMORFİZMA YAKIN HALKALARI

Necat GÖRENTAŞ

-DOKTORA TEZİ-

Yönetici: Prof.Dr.Abdurrahim YILMAZ

VAN-1994

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KİSMİ ENDOMORFİZMA YAKIN HALKALARI

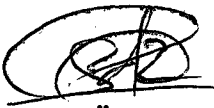
Necat GÖRENTAŞ

-DOKTORA TEZİ-

JÜRİ ÜYELERİ


BAŞKAN

Prof. Dr. Fethi GALLIAP



ÜYE

Prof. Dr. İsmail TOK


ÜYE

Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ

Tez Kabul Tarihi

17/06/1994

ÖZ

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, TIB , D üzerinde sonlu ranklı bir modülün homojen fonksiyon kaynağı verildi. Homojen fonksiyonların kısmi endomorfizma olma durumları incelenerek çeşitli örnekler verildi ve Maxson'un (1992) de açık soru olarak bıraktığı iki problemin çözümü çeşitli şekillerde ele alındı.

ABSTRACT

We give a source of homogeneous functions of a module of finite rank over a principal ideal domain.

Having investigated the possibility of homogeneous maps being piecewise endomorphisms we give some examples and approach to the problems posed by Maxson (1992) in small ranks.

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamız için gerekli olan genel tanımlar, teoremler ve önermeler detaya girilmeden verilmiştir.

İkinci bölüm dört kesimden oluşmaktadır. Bu bölümde y -halkalar, invaryant y -halkalar ve homojen fonksiyon y -halkalarının tanımı, özellikleri ve bu halkalarla ilgili çeşitli örnekler verildi. Daha sonra bir TİB, D üzerinde sonlu ranklı bir modülün homojen fonksiyon kaynağı verildi. Son kesimde $M_R(R^2)$ nin halka olma durumu incelendi.

Üçüncü bölüm bir kesimden meydana gelmektedir. Bu kesimde (Maxson, 1990,1991) de incelemeye başladığı kısmi endomorfizma y -halkalarının özeti yapılarak $M_R(G)$ nin G nin muayen alt modüllerinden endomorfizma olarak temsil olunabilen $f \in M_R(G)$ homojen fonksiyonların oluşturduğu alt y -halkalar ile bu alt y -halkaların kısmi endomorfizma olma durumları incelendi. Ayrıca (Maxson, 1991) de $M_D(D^n)=N$ eşitliğinin TİB ler üzerine keyfi modüller için doğru olup olmadığı ile ilgili sorunun çözümüne yaklaşmak için $N=M_R(G)$ eşitliğinin olmasının gerekmediği iki duruma ait örnekler verilmiştir.

Son bölüm üç kısımdan meydana gelmektedir. Bu bölümde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{P}$ nin G için örtü teşkil ettiği ve $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ olacak şekilde bir R -Modül G için

$\text{End}_R(G)=\text{PE}_R(G,\mathcal{M})$ ile $\text{End}_R(G)=\text{PE}_R(G,\mathcal{P})$ eşitliğinin mümkün olduğu komütatif Noetherian y -halkalarının (Maxson and Walt, 1991) de başlatılan karakterizasyonun bir özeti yapılarak (Maxson, 1992) de açık soru olarak bıraktığı iki problemin çözümüne çeşitli şekillerde yaklaşılarak (Maxson , 1992) de $n=2,3,\dots$ için $P\mathcal{F}_2 \subseteq P\mathcal{F}_n$ bağıntısının doğru olup olmadığı sorusu $n=3$ için incelendi.

SUMMARY

This work consists of four chapters. Having given some basic facts and definitions without going into details in the first chapter, we introduce near-rings, invariant near-rings and examine some of their properties in the second chapter. We also give some examples and propositions on the source of the near-rings of homogeneous functions of a module over some principal ideal domains in this chapter.

Having criticized the papers of Maxson (1990,1992) on the near-rings of piecewise endomorphisms we examine the homogeneous functions $f \in M_R(G)$ which can be represented piecewise as an endomorphism on some given types of submodules G in the third chapter. We also give examples to approach to the solution of the question as to whether the equality $M_D(D^n) = N$ holds on arbitrary modules over principal ideal domains.

In the last chapter we give a summary of the characterization given by (Maxson and Walt, 1992) of the commutative Noetherian near-rings for which the equalities $\text{End}_R(G) = \text{PE}_R(G, \mathcal{M})$ and $\text{End}_R(G) = \text{PE}_R(G, \mathcal{P})$ hold, and exhibit some examples and partial solutions to the questions posed in (Maxson, 1992).

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince göstermiş olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı kıymetli hocam, Prof.Dr. Abdurrahim YILMAZ'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZ/ABSTRACT.....	i
ÖZET.....	ii
SUMMARY.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1.BÖLÜM: ÖN BİLGİLER.....	1
1.1.Tanımlar ve Temel Özellikler.....	1
1.2.Modüller.....	3
2.BÖLÜM: YAKIN-HALKALAR(NEAR-RINGS).....	6
2.1.Yakın Halkaların Tanım ve Özellikleri.....	6
2.2. İnvariant y -Halkalar.....	8
2.3.Homojen Fonksiyon Yakın-Halkalar.....	11
2.4. $M_R(R^2)$ nin Halka Olmama Durumları.....	19
3.BÖLÜM: KISMİ ENDOMORFİZMALAR OLARAK HOMOJEN FONKSİYONLAR.....	20
3.1.Örtülerce Tanımlanan Kısmi Endomorfizmalar.....	20
4.BÖLÜM: KISMİ ENDOMORFİZMA YAKIN HALKALARI.....	31
4.1.Kısmi Endomorfizmalar.....	30
4.2. $End_R(G) = PE_R(G, \mathcal{M})$ ve $M_R(G) = PE_R(G, \mathcal{P})$ Durumları	32
4.3. $P\mathcal{F}_n$ Halkalar Ailesi.....	40
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER DİZİNİ

$A(M)$	M -modülünün sıfırlayanı(annihilatör)
$\text{End}_R G$	G nin endomorfizmalar kümesi
$I(S, G)$	(S, G) ile belirlenen invaryant y -halkası
$GF(2)$	2-elamanlı Galois cismi
$GL(n, F)$	Genel Lineer Grup
M	Modül
$\mathcal{M}$	Maksimal alt modüller ailesi
md -modül	Maksimal devirli modül
mda	Maksimal devirli alt modül
$M(G)$	G den G ye tüm fonksiyonlar
$M_n(F)$	F cismi üzerinde matris halkası
N_0	N , y -halkasının sıfır - simetrik kısmı
N_s	N , y -halkasının sabit kısmı
$\mathcal{P}$	Maksimal devirli alt modüller ailesi
$PE_R(G, \mathcal{C})$	G , R -modülünün $\mathcal{C}$ örtüsünce belirlenen kısmi endomorfizma y -halkası
$T\mathcal{C}B$	Tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi
TIB	Temel ideal bölgesi
TIH	Temel ideal halkası

1.BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

1.1.Tanımlar ve Temel Özellikler

1.1.1.Tanım: G bir grup ve S bir küme olsun. Eğer $s \in S$ ve $g_1, g_2 \in G$ için

$$(g_1 \cdot g_2)s = g_1(g_2 \cdot s) \quad \text{ve} \quad 1 \cdot s = s$$

olacak şekilde bir $G \times S \rightarrow S$, $(g, s) \mapsto gs$ fonksiyonu varsa G grubu S kümesine etkir denir.

1.1.2. Tanım: $(G_1, \cdot)$ ve $(G_2, *)$ iki grup olsun. Eğer bir $G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ fonksiyonu

$$(1) (g_1 \cdot g'_1)g_2 = g_1(g'_1 g_2) \quad \forall \quad g_1, g'_1 \in G_1, g_2 \in G_2$$

$$(2) g_1(g_2 * g'_2) = (g_1 g_2) * (g_1 g'_2) \quad \forall \quad g_1 \in G_1, g_2, g'_2 \in G_2$$

$$(3) 1_{G_1} g' = g' \quad \forall \quad g' \in G_2$$

şartlarını sağlarsa G_1 grubu G_2 grubuna etkir denir.

1.1.3.Tanım: Bir grup işlemi ve bir topoloji ile birlikte bir G kümesine, eğer

$$f : G \times G \rightarrow G, f(a, b) = ab \quad \text{ve}$$

$$g : G \rightarrow G, g(a) = a^{-1}$$

ile tanımlanan dönüşümler sürekli ise, G ye bir topolojik grup denir. Burada f ve g nin sürekliliği G nin topolojisi ile dir.

1.1.4.Tanım: R bir halka olsun. R nin aşık ar ideallerinin dışında idealler yoksa R ye bir basit halka denir.

1.1.5.Tanım: $R_1, R_2, \dots, R_n$ ler birer basit halka olsun. Eğer $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ halka direkt toplamı ise R ye bir yarı-basit halka denir.

1.1.6.Tanım: R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer

(i) $a^2 = a$ ise a ya idempotent,

(ii) $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya bir nilpotent eleman denir.

1.1.7. Tanım: Sıfır bölensiz, birimli değişmeli bir halkaya bir tamlık (integral) bölgesi denir.

1.1.8. Tanım: A, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan bütün ideallerinin kesişimine, A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale temel ideal denir ve (a) ile gösterilir.

1.1.9.Tanım: Her ideali temel olan bir tamlık bölgesine bir temel ideal bölgesi (TİB) denir.

1.1.10. Tanım: Her ideali temel ideal olan bir halkaya temel ideal halkası (TİH) denir.

1.1.11.Tanım: R nin her

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

sağ, ideallerinin azalan dizisi sonlu bir adımda durursa; yani, bir n sayısı için $I_n = I_{n+1} = \dots$ ise R ye bir Artinian halka denir.

1.1.12. Tanım: R nin her

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

sağ ideallerinin artan dizisi sonlu adımda durursa, R ye bir Noetherian halka denir.

1.1.13.Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası Noether fakat Artin değildir.

1.1.14.Örnek: $M_n(F)$ matris halkası hem Noetherian hem de Artinian bir halkadır.

1.1.15.Tanım: R bir integral bölgesi olsun. R de sıfırdan farklı, birimsel olmayan her öge indirgenemez öğelerin tek türlü bir çarpımı ve her indirgenemez öge asal ise R ye bir tek türlü çarpanlara ayırma bölgesi (TÇB) denir.

1.1.16.Önerme: R , TİB ise R , TÇB dir.

1.1.17. Tanım: $I \subset R$ bir ideal olsun. R nin I yi ihtiva eden bir öz ideali yoksa, I ya R nin bir maksimal ideali denir.

1.1.18.Tanım: R bir halka ve $I (I \neq R)$ R nin bir ideali olsun. Eğer R/I bir tamlık bölgesi ise I ya R nin bir asal ideali denir. Bu tanım şuna denktir: $x, y \in R$ olmak üzere

$xy \in I \Rightarrow x \in I$ veya $y \in I$ ise I asaldir.

1.1.19.Örnek: Her $p \in \mathbb{Z}$ asalı bir $(p) = p\mathbb{Z}$ asal ideali üretir.

1.1.20.Örnek: $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de bir $c \in [0,1]$ için $f(c) = 0$ olan f fonksiyonları bir maksimal-idealdir.

1.2.Modüller

1.2.1.Tanım: R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli bir grup olsun. Her $r, s \in R$ ve $a, b \in M$ için

$M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu var ve

$(a, r) \rightarrow ar$

(i) $(a+b)r = ar+br$, (ii) $a(r+s) = ar+as$, (iii) $a(rs) = (ar)s$

şartları sağlanıyorsa M ye bir sağ R -modül denir. Şayet R birimli ve her $a \in M$ için $a \cdot 1_R = a$ ise M ye üniter sağ R -modül denir.

1.2.2.Örnek: Her vektör uzayı tanımlı olduğu cisim üzerinde hem sağ ve hem de sol bir modüldür.

1.2.3.Tanım: Eğer M bir sağ R -modül ise

$$A(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\} \subset R$$

R nin bir sağ ideali olup bu ideale M nin sağ sıfırlayanı (annihilatör) denir.

1.2.4.Tanım: M ve N iki sağ R -modül, $f: M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$1) \forall x, y \in M \text{ için } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$2) \forall x \in M \text{ ve } \forall a \in R \text{ için } f(xa) = f(x)a$$

ise f ye M den N ye bir R -modül homomorfizması denir.

1.2.5.Tanım: M bir sağ R -modül, $M' \subseteq M$ bir alt grup olsun. Eğer her $x \in M'$, $a \in R$ için $xa \in M'$ ise M' ye M nin bir alt modülü denir.

1.2.6. Tanım: G bir sağ R -modül, $f: G \rightarrow G$ bir fonksiyon olsun. $\forall r \in R$ ve $a \in G$ için $f(ar) = f(a)r$ ise f ye bir homojen fonksiyon denir.

1.2.7. Tanım: V bir F -vektör uzayı olsun. $\forall u, v \in V$ ve $r \in F$ için

$$\text{End}_R V = \{f: V \rightarrow V, f(u+v) = f(u) + f(v), f(rv) = rf(v)\}$$

kümesine V nin endomorfizmalar (Lineer transformasyon) kümesi denir. $\text{End}_R V$, fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında bir halkadır. Bu halkaya V nin endomorfizmalar halkası denir.

1.2.8.Tanım: G bir R -modül ve $M \subset G$ bir alt-modül olsun. $M \subset N \subset G$ olacak şekilde bir N alt-modül yoksa M ye G nin bir maksimal alt modülü denir. G nin maksimal alt-modüller ailesini $\mathcal{M}$ ile gösteriyoruz.

1.1.9.Tanım: G bir R - modül olsun. Her $x \in G$, G de bir $(x) \subset G$ devirli alt-modül üretir. Eğer $(x) \subset (y) \subset G$ olacak biçimde bir (y) devirli alt-modülü yoksa (x) e G nin bir maksimal devirli alt-modülü denir. G nin maksimal devirli alt modüller ailesini (mda) yı $\mathcal{P}$ ile gösteriyoruz.

1.2.10 Tanım: G bir grup ve V bir vektör uzay olsun. $\sigma: G \rightarrow GL(V)$ grup homomorfizmalarına G nin representasyonu, $g \in G$ için $\sigma(g)$ yi herhangi bir bazda temsil eden matrisin izine (birinci köşegen elemanlarının toplamı) g nin karakteri denir.

1.2.11 Tanım: Bir G grubu X kümesine etkisin. Her $x \in X$ için $x = \{gx | g \in G\} \subset X$ altkümesine x in bu etki altındaki yörüngesi (denklik sınıfı) denir.

1.2.11.Örnek: G grubu $X=G$ ye eşlenikle etkir: $\forall g, x \in G$ için $x^g = g^{-1}xg$, x in g ile eşleniği olmak üzere,

$$(x^{g_1})^{g_2} = g_2^{-1} (g_1^{-1} x g_1) g_2 = (g_1 g_2)^{-1} x (g_1 g_2) = x^{g_1 g_2} \text{ ve } x^1 = 1^{-1} x 1 = x$$

olduğundan verilen işlem bir etki olup $x \in G$ nin bu etki altındaki yörüngesi

$\bar{x} = \{g^{-1}xg | g \in G\}$, x in eşlenik sınıfıdır.

2.BÖLÜM

YAKIN-HALKALAR (NEAR-RINGS)

2.1. Yakın Halkaların Tanım ve Özellikleri

Halkalar teorisinin temel sonuçlarından birisi, bir abelyen grubun endomorfizmaları kümesinin fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında bir halka olduğu ve ayrıca her halkanın bu şekilde oluşan bir halkanın bir alt halkasına izomorf olduğudur. Eğer sözü edilen grup abelyen değilse bu grubun endomorfizmaları toplama altında kapalı olmadığından endomorfizmalar bir halka teşkil etmez. Burada near-ring denilen ve tüm halkalar sınıfını kapsayan bir yakın halkalar kavramı doğmuştur.

2.1.1.Tanım: Üzerinde toplama $+$, ve çarpma $\cdot$ ikili işlemleri tanımlı olan bir $N=(N,+, \cdot)$ sistemi şu üç şartı sağlarsa N ye bir yakın-halka (near- ring) denir.

(i) $(N, +)$ sistemi bir gruptur (Abelyen olması gerekmez, N nin nötr elemanı 0 (sıfır) dır.)

(ii) $(N, \cdot)$ sistemi bir yarı-gruptur.

(iii) $\forall a, b, c \in N$ için $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

bu tanımda bir sağ y-halkası verilmiş olmaktadır. (iii) yerine,

(iii)' $\forall a, b, c \in N$, için $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

şartı getirildiğinde bir sol y-halkası tanımlanmış olur.

2.1.2.Örnekler (Pilz, 1983): $(G,+)$ nötr elemanı sıfır olan bir grup , T bir topolojik grup, V bir vektör uzay ve R bir komutatif birimli halka ise, fonksiyon toplama, $+$, ve fonksiyon bileşke, $\circ$, işlemleri altında aşağıdakiler birer y-halkadır.

(a) $M(G) = \{f: G \rightarrow G\}$, G den G ye tüm fonksiyonlar

$$(b) M_0(G) = \{ f \in M(G) \mid f(0) = 0 \}$$

$$(c) M_{\text{sür}}(T) = \{ f \in M(T) \mid f, T \text{ de sürekli} \}$$

$$(d) M_{\text{aff}}(V) = \{ f \in M(V) \mid f, V \text{ de affine fonksiyondur} \}$$

$$(e) R[x] = \{ f \mid f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_n x^n : n \in \mathbb{N}, x \text{ bir değişken}, a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$(f) R[[x]] = \{ f \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid x \text{ bir değişken}, a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$(g) M_s(G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f \text{ sabit} \}$$

$$(h) M_{\text{tür}}(\mathbb{R}) = \{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ türevli} \}$$

2.1.3. Örnek: $M_{\text{int}}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ integralli} \}$ kümesi yukardaki işlemler altında bir y-halkası teşkil etmez; mesalâ, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ için $(g \circ f)(x) = e^{2x} \in M_{\text{int}}(\mathbb{R})$ fakat $(f \circ g)(x) = e^{x^2} \notin M_{\text{int}}(\mathbb{R})$ dir.

Her halkanın bir y-halka (sağ, sol) olduğu açıktır. Ayrıca herhangi bir $(G, +)$ grubunda $\forall a, b \in G$ için $a * b = a$ olarak tanımlandığında bir $(G, +, *)$ sağ y-halka, $a * b = b$ olarak tanımlandığında bir $(G, +, *)$ sol y-halkası elde edilir. Yani her grup bir y-halka yapılabilir.

2.1.4. Tanım: N bir y-halka olsun. Eğer $\forall a \in N$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ise N ye sıfır- simetrik bir y-halka denir.

Eğer $\forall a \in N$ için $a i = i a = a$ olacak şekilde bir $i \in N$ elemanı varsa N ye birimli bir y- halka denir.

2.1.5 Önerme(Pilz, 1983): N bir sağ y-halka ise $\forall n, n' \in \mathbb{N}$ için

$$(i) 0n = 0$$

(ii) $(-n)n' = -nn'$ dir.

2.1.6. Örnek: Bir sağ y-halkada $n0=0$ ve $n(-n') = -nn'$ eşitlikleri geçerli olmayabilir. Örneğin, $M(G)$ de $fo0=0$ eşitliği f nin orjinden geçmesiyle, $fo0= f(0)=0$; $fo(-f') = -fof'$ eşitliği ise f' nin bir tek fonksiyon ($f'(-x) = -f'(x)$) olmasıyla mümkündür.

2.1.7. Tanım: N bir sağ y-halka olsun.

(a) $N_0 = \{ n \in N \mid n0=0 \} \subseteq N$ alt kümesine N nin sıfır- simetrik kısmı,

(b) $N_s = \{ n \in N \mid n0=n \} = \{ n \in N \mid \forall n' \in N \text{ için } nn'=n \} \subseteq N$ alt kümesine de N nin sabit kısmı denir.

N_0 ve N_s , N nin alt y-halkalarıdır. N bir halka ise $N_0=N$ ve $N_s=\{0\}$ dir.

2.1.8 Örnek:

$$(M(G))_0 = M_0(G) \text{ ve } (M(G))_s = M_s(G)$$

$$(IR[x])_0 = \{ a_1x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in IR \} \text{ ve } (IR[x])_s = \{ a_0 \mid a_0 \in IR \}$$

$$(M_s(G))_0 = \{0\}, (M_s(G))_s = M_s(G) \text{ ve } (M_0(G))_s = \{0\},$$

$(M_{tür}(IR))_0 =$ Orjinden geçen fonksiyonlar, ve $(M_{tür}(IR))_s =$ sabit fonksiyonlar dir.

2.2.İnvaryant y-Halkalar

$(G,+)$ abelyen olması gerekmeyen, birim elemanı sıfır olan bir grup ve S de G ye etkiyen bir grup olsun ve bu etki (S,G) ile belirtilsin.

$$I(S,G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f\sigma(x) = f(x), \forall x \in G, \sigma \in S \} \subset M(G)$$

fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında bir y-halkası olup $I(S, G)$ ye (S, G) ile belirlenen invaryant y-halkası denir. $I(S, G)$, $M(G) = \{f: G \rightarrow G\}$ nin bir alt y-halkası olup $M(G)$ nin G de sabit değer alan N_s sabit fonksiyonlarının y-halkasını kapsar; $S = \{\text{birim}\}$ iken $I(S, G) = M(G)$ ve $S \neq \{\text{birim}\}$ olduğu durumda $I(S, G)$, 0-simetrik değil ve birim elemanı bulunmaz.

2.2.1 Örnek: $G = (\mathbb{R}, +)$, $S = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ olduğuna göre S ve S nin her alt grubu G ye bilinen çarpma ile etkir. Aşağıda S nin çeşitli alt gruplarının belirlediği invaryant y-halkaları gösterilmiştir.

$$(a) S = \{1\} \text{ için } I(\{1\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$(b) S = \{1, -1\} \text{ için } I(\{1, -1\}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$$

$$(c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \text{ için } I(S, \mathbb{R}) = \{f_{abc} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\};$$

$$f_{abc}(x) = \begin{cases} a & ; x < 0 \\ b & ; x = 0 \\ c & ; x > 0 \end{cases}$$

$$(d) S = \mathbb{R}^* \text{ için } I(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) = \{f_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}\};$$

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} a & ; x = 0 \\ b & ; x \neq 0 \end{cases}$$

(e) $p > 0$ bir reel sayı, $S = \langle p \rangle = \{\dots, p^{-2}, p^{-1}, 1, p^1, p^2, \dots\}$, p nin ürettiği çarpımsal grup olsun. S nin G ye etkisini $p^k x = x + kp$ ile tanımlayalım $k \in \mathbb{Z}$. Bu durumda $I(S, \mathbb{R})$, temel periyodu p olan periyodik fonksiyonlardır.

Bu örneklere ek olarak şu genellemeyi yapabiliriz.

E, G de bir denklik bağıntısı olsun.

$I(E, G) = \{f: G \rightarrow G \mid f, E \text{ nin her denklik sınıfında sabit}\}$ nin G^G de bir alt y-halkası olduğu hemen görülebilir. Ayrıca E, G de bir denklik bağıntısı ise, G deki yörüngeleri E nin G deki denklik sınıflarına eşit olacak şekilde bir σ permütasyonu tanımlanırsa $S = \langle \sigma \rangle$ permütasyon grubunun G ye etkisindeki yörüngeler E nin denklik sınıflarına eşittir. Bu durumda $I(E, G) = I(S, G)$ olduğu açıktır. G nin her ϕ fonksiyonu G yi şu şekilde parçalar:

$\phi: G \rightarrow G$ bir fonksiyon olsun. $x, y \in G$ için

$x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$, bağıntısı G de bir E_ϕ denklik bağıntısı olup G yi denklik sınıflarına ayırır. Bu durumda $I(E_\phi, G)$ yine G^G nin bir alt y-halkası olup $\phi \in I(E_\phi, G)$ olduğu görülür.

G/E , G nin E ile belirlenen denklik sınıflar kümesi ve $\eta: G \rightarrow G/E, x \rightarrow E(x) = (x \text{ in denklik sınıfı})$ doğal dönüşümü olsun. $M = \{f \mid f: G/E \rightarrow G\}$ kümesini gözönüne alalım. Fonksiyon toplama ve $f * g = f \circ g$ işlemleri altında $(M, +, *)$ bir y-halka olup $(M, +, *) = I(E, G)$ dir (Maxson, 1993).

2.2.2.Örnek: $S = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}, \mathbb{R}^2$ üzerine

$S \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, [\rho, (x_1, x_2)] \rightarrow (x_1, x_2)^\rho = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ işlemi ile etkir ve

$I(S, \mathbb{R}^2) = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f, \text{ orijin merkezli çemberlerde sabit}\}$ bir invaryant y-halkadır.

2.2.3. Örnek: $G = M_n(F), S = GL(n, F)$ için $S \times G \rightarrow G; (p, x) \rightarrow px$ işlemi ile bir grup etkisi olup, $I(S, G) = \{f: M_n(F) \rightarrow M_n(F) \mid f(px) = f(x) \quad \forall p \in GL(n, F)\}$ bir invaryant y-halkadır.

2.2.4. Örnek. E bir G grubunda iç otomorfizmaların belirlediği eşlenik bağıntısı olsun. Bu durumda S, G nin iç otomorfizmaları grubudur. G nin bir K cismi üzerine bir ρ

representasyonu verilmişse $I(S, G)$, ρ representasyon karakterleri tarafından üretilen y -halkasını kapsar.

2.2.5.Örnek: $G = M_n(F)$, $S = S_n$ olsun. $S_n \times G \rightarrow G$; $(\sigma, (a_{ij})) \rightarrow (a_{ij})^\sigma = a_{\sigma^{-1}(i)j}$ satırların yer değiştirmesiyle elde edilen matris işlemi ile S, G üzerine bir grup etkisi yapar ve

(a_{ij}) nin satırlarının yer değişimiyle oluşan sınıf $\overline{(a_{ij})}$ ise ,

$I(S_n, M_n(F)) = \{f: M_n(F) \rightarrow M_n(F) \mid f, \overline{(a_{ij})} \text{ de sabit} \}$ bir invaryant y -halkadır.

2.3.Homojen Fonksiyon Yakın-Halkaları

R birimli bir halka ve G bir üniter sağ R -Modül olsun.

$M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(ar) = f(a)r; r \in R, a \in G\} \subset G^G$, homojen fonksiyonlar alt kümesi olsun.

2.3.1. Önerme: $M_R(G)$ ve G^G birer y -halka olup $M_R(G)$, G^G nin sıfır - simetrik bir alt y -halkasıdır.

İspat: $f, g \in M_R(G)$ için $f(rx) = rf(x)$, $g(rx) = rg(x)$ dir. ($r \in R$).

$$(f+g)(rx) = f(rx) + g(rx) = rf(x) + rg(x)$$

$$= r(f(x) + g(x))$$

$$= r[(f+g)(x)]$$

olduğundan $f+g \in M_R(G)$ ve

$$(fg)(rx) = f(g(rx)) = f(rg(x))$$

$$= r(fg)(x) \Rightarrow fg \in M_R(G) \text{ dir.}$$

2.3.2. Örnek: Her $T: G \rightarrow G$, R endomorfizması bir homojen fonksiyon olup, bunlar homojen fonksiyonların en özel türleridir: $\text{End}_R(G) \subseteq M_R(G)$.

2.3.3. Örnek: $\text{rank}_R G > 1$, $T \in \text{End}_R(G)$ ve $y_0 \in G$ sabit bir eleman olsun.

$$f(x) = \begin{cases} T(x) & ; \quad x \neq y_0 \text{ ise} \\ 0 & ; \quad x = y_0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $f: G \rightarrow G$ fonksiyonu homojen olup, $T(y_0) \neq 0$ ise,

$f(x+y_0) = T(x+y_0) = T(x) + T(y_0) \neq T(x)$ iken $f(x) + f(y_0) = T(x)$ olduğundan $f \notin \text{End}_R(G)$ dir.

2.3.4. Örnek: $G=V$ bir K cismi üzerine bir vektör uzay, $T: V \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm ve W bir alt uzay olsun.

$$f(x) = \begin{cases} T(x) & ; \quad x \in W \\ 0 & ; \quad x \notin W \end{cases}$$

ile tanımlı $f: V \rightarrow V$ fonksiyonu homojen olup lineer değildir.

2.3.5. Örnek: $M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ olduğunu görelim.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ homojen ise $f(0)=0$ ve $f(rx) = rf(x) \quad \forall r, x \in \mathbb{R}$, olacağından bir $a \in \mathbb{R}$ için $f, f_a(x) = ax$ biçiminde tanımlanmalıdır.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $f_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$ olduğundan $f_a \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ dir.

$$\psi: \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(f_a) = a$$

bir izomorfizma olup $M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ dir.

2.3.6. Örnek: $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \subset M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ dir.

$f \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ ve $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bir vektör olsun. $f(u)=u'$ ise $f(\mathbb{R}u) = \mathbb{R} f(u) = \mathbb{R}u'$

olduğundan $f, \mathbb{R}^2$ nin 1-boyutlu alt uzaylarını (orjinden geçen doğruları) birbirine dönüştürür.

Her $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ için $f(r_1u + r_2u) = f((r_1+r_2)u) = (r_1+r_2)f(u) = r_1(f(u)) + r_2 f(u) = f(r_1u) + f(r_2u)$ olduğundan $f, \mathbb{R}^2$ nin her devirli alt uzayında lineerdir. Yani; A bir 2×2 matris olmak üzere $f(u) = Au$ dur. Buna göre, f nin herhangi farklı iki alt uzaydaki temsil matrisi farklı ise f homojen fonksiyonu lineer olmaz; çünkü

$f(u) = Au, f(v) = Bv$ ve $A \neq B$ ise $u+v \notin \langle u \rangle = \mathbb{R}u, u+v \notin \langle v \rangle = \mathbb{R}v$ olduğundan bir $C, 2 \times 2$ matrisi için

$f(u+v) = C(u+v) = Cu + Cv = Au + Bv = f(u) + f(v)$ eşitliği mevcut olmayabilir; örneğin $0 \neq u, v \in \mathbb{R}; U = \mathbb{R}u, V = \mathbb{R}v$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in U & \text{ise} \\ 2x; & x \in V & \text{ise} \\ 0; & x \notin U, x \in V & \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $f \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$: fakat

$f(u+v) = 0$ ve $f(u) + f(v) = u + 2v$ olduğundan, $f \notin \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ dir. Burada $f|_U = I, f|_V = 2I$ ve f nin diğer altuzaylardaki matrisleri sıfır dır.

Sonuç olarak, bir $f \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu lineerdir, ancak ve ancak f nin $\mathbb{R}^2$ nin her bir alt uzayındaki temsil matrisi benzerlik dışında bir tek matrisdir.

Benzer şekilde her $f \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonun, $\mathbb{R}^3$ ün bir boyutlu her $\mathbb{R}$ - alt uzayına kısıtlanışının farklı bir matrisle temsili vardır. f nin 2-boyutlu alt uzaylara (düzlemler) kısıtlanışı ise, düzlemlerde de sonsuz çoklukta doğru olduğundan, sonsuz

çoklukta matrisle temsil olunur. Dolayısıyla tüm bu temsil matrislerinin birbirine eşit olduğu durumda f lineer olur. Aynı şey $\mathbb{R}^n$ için de geçerlidir.

Bir TİB, D üzerine sonlu ranklı bir modülün homojen fonksiyon kaynaklarının tümü aşağıda verilmektedir.

D bir TİB olmak üzere, genelde D^n ($n > 2$) durumu D^2 durumu ile temel olarak aynı olduğundan yalnızca, D^2 durumunu inceleyelim.

$\alpha \in D^2$ olsun. Eğer herhangi bir $\beta \in D^2$ için

$\alpha r = \beta s \neq 0 \Rightarrow \beta = \alpha t$ ($r, s, t \in D$) ise α , D^2 de bir üretendir denir. Buna göre,

α, D^2 de bir üretendir $\Leftrightarrow [\alpha D \cap \beta D \neq \{0\} \Rightarrow \beta D \subseteq \alpha D]$

olup

aşağıdaki vektörler, $\forall d \in D$ için D^2 de birer üretendir:

(1) $(d, 1)$; (2) $(1, d)$; (3) $(d+1, d)$

$d=0$ için yukarıdaki vektörler $(0, 1)$, $(1, 0)$ olup üretendir.

$d \neq 0$ için $\alpha D \cap \beta D \neq \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (r, s \in D)$

buradan $dr = xs$, $r = ys$ olup $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} y$ dir.

(2) aynı şekilde gösterilir.

(3) için $\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s$ den $dr + r = xs$, $dr = ys$ ve $ys + r = xs \Rightarrow r = (x-y)s$ olur ve

$\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} (x-y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ bulunur.

$S \subseteq D^2$ bir alt küme olsun. Eğer her $\alpha \in S$ bir üreten ve $\alpha, \beta \in S$ için $\alpha D \subseteq \beta D \Rightarrow \alpha = \beta$ gerektirmesi varsa S ye D^2 de bir üreten kümesi denir. Böyle üreten kümeleri kullanarak $M_D(D^2)$ deki fonksiyonlar şöyle oluşturulabilir:

S, D^2 nin tüm üretenler kümesi olsun ve S yi $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ herhangi bir ayrışım olarak yazalım. $T_k \subset D^2$ her hangi alt kümeler, $\phi_k : S_k \rightarrow T_k$ herhangi fonksiyonlar ve A_k, B_k ler de herhangi 2×2 matrisler olmak üzere

$$f_k : D^2 \rightarrow D^2, f_k(\gamma) = \begin{cases} A_k \phi_k(\alpha) r & ; \quad \gamma = \alpha r \text{ bir } \alpha \in S_k, r \in D \text{ ise} \\ B_k \gamma & ; \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonları homojen olup, lineer değildir. Yukarıda yazdığımız homojen fonksiyonda $A_k = I$ birim matris $B_k = 0$ sıfır matris ve S nin birim ayrışımı alındığında $k=1$ olup (Maxson and Walt, 1991) deki

$$f(\gamma) = \begin{cases} \phi(\alpha) r & ; \quad \gamma = \alpha r \text{ bir } \alpha \in S, r \in D \text{ ise} \\ 0 & ; \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

homojen fonksiyonları elde edilir. Yukarıdaki homojen fonksiyonların birer endomorfizmaya dönüşmeleri ise şöyledir:

Her $k=1,2,\dots$ için $S_k = S = T_k$ ve ϕ_k birim fonksiyon olarak alındığında her $\gamma \in D^2$ vektörü bir $\alpha \in S, r \in D$ için $\gamma = \alpha r$ olarak yazılacağından

$$f_k(\gamma) = A_k \alpha r = A_k \gamma$$

ve f_k bir endomorfizma olur.

2.4. $M_R(R^2)$ 'nin Halka Olma Durumları

Bu kesime $M_R(R^2)$ y-halkasının yapısı ile ilgili bir kaç sonuçla giriyoruz. Bunun için de $M_R(R^2)$ nin bir y-halka olup fakat bir halka olmadığı durumu ile ilgili en temel şartı veren bir önerme yazalım.

2.4.1. Önerme: G bir sağ R -modül ve $G = H \oplus K$; H ve K , G nin R -altmodülleri ve $f \in M_R(G)$ olsun. Eğer bir $0 \neq a \in H$ ve $0 \neq b \in K$ için $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ ise f , $M_R(G)$ nin bir dağılımlı elemanı değildir. Dolayısıyla $M_R(G)$ bir halka değildir.

İspat: $G = H \oplus K$ direkt toplam ayrışımına karşılık gelen idempotentler e_H ve e_K ise

$e_H, e_K \in M_R(G)$ olup $e_H + e_K =$ birim fonksiyon ($M_R(G)$ nin birimi) dur. $f(e_H + e_K) = f$ fakat

$$\begin{aligned} (fe_H + fe_K)(a+b) &= (fe_H)(a+b) + (fe_K)(a+b) \\ &= f(e_H(a+b)) + f(e_K(a+b)) \\ &= f(a) + f(b) \neq f(a+b) \end{aligned}$$

olup $f(e_H + e_K) \neq fe_H + fe_K$ dir.

2.4.2. Önerme: G bir sağ R -modül ve $G = H \oplus K$, G nin aşikar olmayan bir direkt toplam ayrışımı olsun. Eğer G nin aşağıdaki şartlara uyan bir $X \neq \emptyset$ alt kümesi varsa $M_R(G)$ bir halka değildir.

(i) $0 \notin X, X \neq G^*; G^* = G \setminus \{0\}$

(ii) $x \in X$ ise $\forall r \in R$ için $rx \in X \cup \{0\}$

(iii) $rx \in X, r \in R$ ise $x \in X$ dir.

İspat: $f: G \rightarrow G$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in X \quad \text{ise} \\ 0 & ; \quad x \notin X \quad \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $x \in X$ ve $r \in R$ için (ii) den $xr \in X$ veya $xr=0 \notin X$ dir.

$$xr \in X \text{ ise } f(xr) = xr = f(x)r,$$

$$xr = 0 \text{ ise } f(xr) = 0 = 0.r = f(x)r$$

olup $f \in M_R(G)$ dir. $a \in H$, $b \in K$ elemanları $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ olacak biçimde seçilip f nin $M_R(G)$ de dağılımsız bir fonksiyon olduğu görülerek 2.4.1.den $M_R(G)$ bir halka olmadığı görülecektir.

1.Durum: $H \cap X = \emptyset$, $K \cap X = \emptyset$ olsun. $x \in X$ elemanı $x = a+b$, $a \in H$, $b \in K$ olarak yazılır. Buna göre

$$a \notin X, b \notin X \text{ olduğundan } f(a) = f(b) = 0 \text{ olup}$$

$$f(a+b) = f(x) = x \neq 0 = f(a) + f(b) \text{ dir.}$$

2.Durum: $H \cap X \neq \emptyset$, $K \cap X = \emptyset$ olsun. $a \in H \cap X$ ve $0 \neq b \in K$ için

$$f(a+b) = \begin{cases} a+b & ; \quad a+b \in X \quad \text{ise} \\ 0 & ; \quad a+b \notin X \quad \text{ise} \end{cases}$$

iken $f(a) + f(b) = a+0 = 0$ dir.

3.Durum: $H \cap X \neq \emptyset$, $K \cap X \neq \emptyset$ olsun $H \cup K \subseteq X \cup 0$ ise $X \neq G^*$ olduğundan bir $y = a+b \in G^* \setminus X$, $a \in H$, $b \in K$ elemanı vardır. Buna göre $f(a+b) = 0 \neq a+b = f(a)+f(b)$. Ayrıca $H \not\subseteq X \cup \{0\}$ olduğu durumda $a \in H^* \setminus X$ ve $b \in K \cap X$ alalım.

Buna göre

$$f(a+b) = \begin{cases} a+b & ; a+b \in X \\ 0 & ; a+b \notin X \end{cases} \begin{matrix} \text{ise} \\ \text{ise} \end{matrix}$$

iken $f(a) + f(b) = 0 + b = b$ ve $f(a) + f(b) \neq f(a+b)$ dir.

Halka olmayan $M_R(G)$ lerin oluşumu için 2.4.2.nin şartlarına uygun bir $X \subset G$ altkümesi bulmanın yeterli olduğu böylece görüldü. Böyle bir X altkümesi bulmanın bir metodu şu tanımla verilmektedir.

2.4.3.Tanım: G de bir $\sim$ bağıntısı şöyle tanımlanıyor:

$0 \sim 0$ ve $x, y \in G^*$ için $x \sim y \Leftrightarrow \exists c_i \in G^* ; (i = 1, 2, \dots, n)$ öyle ki $x = c_1, y = c_n$ ve

$c_i R c_{i+1} R \neq 0$. $\sim$, G de bir denklik bağıntısı olup $G/\sim$ denklik sınıflarına G nin bileşenleri denir. Eğer G^* tek başına bir denklik sınıfı ise G ye R -bağılantılıdır denir. Eğer G , R -bağılantılı değilse G nin sıfırdan farklı tüm X bileşenleri 2.4.2. nin koşullarını sağlar ve $M_R(G)$ bir halka olamaz. Bu durumda şu sonuç elde edilir. (Maxson and Walt, 1991)

2.4.4.Sonuç: G bir sağ R -modül ve $G = H \oplus K$, G nin aşıkarak olmayan bir direkt toplam ayrışımı olsun. $M_R(G)$ bir halka ise G , R -bağılantılıdır.

2.4.5.Örnek: D bir tamlik bölgesi (değişmeli olması gerekmez) ise $M_D(D^2)$ bir halka değildir. Çünkü bu durumda

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s, \quad (r, s \in R)$$

$\Leftrightarrow ar = s, br = 0 \Leftrightarrow b = 0, a \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{in denklik sınıfı} = X = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \mid a \neq 0 \right\} \subset D^2,$$

$G = D^2$ de sıfırdan farklı bir bileşen olup $X \neq D^2$ dir. Sonuç 2.4.1 den çıkar.

2.4.6.Önerme: R bir halka; P , R nin sıfırdan farklı bir öz asal ideali ve

$$\text{Sıf}_R(P) = \{r \in R \mid rx=0 \ \forall \ x \in P\} \neq 0$$

ise $M_R(R^2)$ bir halka değildir.

İspat: $d \in \text{Sıf}_R(P)$, $d \neq 0$ ve $C = R \setminus P$ çarpımsal kapalı küme olsun.

$f: R^2 \rightarrow R^2$ yi

$$f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} da \\ 0 \end{bmatrix} & ; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in C^2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & ; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \notin C^2 \end{cases} \quad \text{ise}$$

olarak tanımlıyalım. f nin homojen olduğu aşağıdaki şekilde görülür.

$$(i) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in C^2 \text{ ve } r \in C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} ar \\ br \end{bmatrix} \in C^2 \Rightarrow f \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} r \right) = \begin{bmatrix} dar \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da \\ 0 \end{bmatrix} r = \left(f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) r$$

$$(ii) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in C^2, p \in P \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} p \right) = f \left(\begin{bmatrix} ap \\ bp \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da \\ 0 \end{bmatrix} p = \left(f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) p$$

$$(iii) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \notin C^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} r \in C^2, \forall r \in R$$

$$f \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} r \right) = f \begin{bmatrix} ar \\ br \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} r = \left(f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) r;$$

o halde $f \in M_R(R^2)$ dir. Diğer yandan

$$f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ fakat } f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup f dağılımlı bir eleman değildir; dolayısıyla 2.4.1 den $M_R(R^2)$ bir halka değildir.

3. BÖLÜM

KISMİ ENDOMORFİZMALAR OLARAK HOMOJEN FONKSİYONLAR

3.1.Örtülerce Tanımlanan Kısmi Endomorfizmalar

R birimli bir halka ve G bir üniter sağ R -modül ise

$$M_R(G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f(ar) = f(a)r, r \in R, a \in G \}$$

n in birimli bir sıfır - simetrik y -halka olduğu 2. bölümde görüldü.

Bu bölümde $M_R(G)$, G nin muayen alt modüllerinde, endomorfizma olarak temsil olunabilen $f \in M_R(G)$ homojen fonksiyonların oluşturduğu alt y -halkaları ile bu alt y -halkalarının kısmi endomorfizma olma durumlarını inceleyeceğiz.

3.1.1. Tanım: $M_R(G)$ ye (R, G) çifti ile belirlenen homojen fonksiyonlar y -halkası denir.

3.1.2. Tanım: $S = \text{End}_R(G)$ ve $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$, G nin bir alt modüller ailesi olsun. Eğer

$$(i) \cup \mathcal{C} = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha = G,$$

$$(ii) \text{ Her } s \in S \text{ ve } C_\alpha \in \mathcal{C} \text{ için } s(C_\alpha) \subseteq C_\beta \text{ olacak biçimde bir } \beta \in A \text{ vardır,}$$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{C}$ ye G nin bir örtüsü denir.

3.1.1. Önerme: G nin her $\mathcal{C}$ örtüsü $M_R(G)$ nin

$$N = \text{PE}_R(G, \mathcal{C}) = \{ f \in M_R(G) : \forall \alpha \in A \text{ için } f|_{C_\alpha}, \text{ bir } s \in S \text{ ye genişler} \}$$

ile gösterilen bir alt y -halkasını belirler.

İspat: $f, g \in N$ olsun. N nin tanımından; $\forall \alpha, g|_{C_\alpha} = \psi \in \text{End}_R(G)$ ise, $g(C_\alpha) = \psi(C_\alpha) \subseteq C_\beta$ olacak biçimde bir β vardır. $f|_{C_\beta} = \varphi \in \text{End}_R(G)$ ise,

$$(f + g)|_{C_\alpha} = f|_{C_\alpha} + g|_{C_\alpha} = \phi + \psi \in \text{End}_R(G) \Rightarrow f + g \in N,$$

$$(f \circ g)(c_\alpha) = f(g(c_\alpha)) = f(\psi(c_\alpha)) = \phi(\psi(c_\alpha)) = (\phi\psi)(c_\alpha) \in \text{End}_R(G) \Rightarrow f \circ g \in N \text{ olur.}$$

3.1.4. Tanım: $M_R(G)$ nin yukarıda verilen $\text{PE}_R(G, C)$ alt y-halkasına G , R -modülünün C örtüsüne belirlenen kısmi endomorfizmalar y-halkası denir

Kısmi endomorfizma y-halkaları Maxson (1990,1991) de incelenmeye başlanmış olup G nin her C örtüsü için

$$\text{End}_R(G) \subseteq \text{PE}_R(G, C) \subseteq M_R(G)$$

bağıntılarının doğruluğu hemen görülür.

G nin devirli bir R -modül olduğunu kabul edelim; yani uygun bir $u \in G$ için $G = uR$ dir.

$f \in M_R(G)$ ise $\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$f(ur_1 + ur_2) = f[u(r_1 + r_2)] = f(u)(r_1 + r_2) = f(u)r_1 + f(u)r_2 = f(ur_1) + f(ur_2)$$

olup f , G nin bir endomorfizması; dolayısıyla $M_R(G) = \text{End}_R(G)$ dir. Öyle ise homojen olup da endomorfizma olmayan bir fonksiyon ancak devirli olmayan modüller için sözkonusudur. Bundan böyle G nin devirli olmadığını varsayacağız.

3.1.5. Tanım: $C = \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ve $D = \{D_\beta \mid \beta \in B\}$, G nin herhangi iki örtüsü olsun.

(i) $\forall \alpha \in A$ için $C_\alpha = D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta \in B$ varsa $C \subseteq D$,

(ii) $\forall \alpha \in A$ için $C_\alpha \subseteq D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta \in B$ varsa $C \leq D$

yazılır.

3.1.6. Önerme: $C \subseteq D$ veya $C \leq D$ ise $\text{PE}_R(G, D) \subseteq \text{PE}_R(G, C)$ dir.

İspat: $C \subseteq D$ olduğunda $C \leq D$ sağlanır. O halde yalnızca $C \leq D$ durumunu ele almak yeterlidir. $f \in \text{PE}_R(G, D)$ olsun.

$C \leq D$ olduğundan $\forall \alpha \in A$ için $C_\alpha \subseteq D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta \in B$ vardır.

$f|_{C_\alpha} = (f|_{D_\beta})|_{C_\alpha}$ ve $f|_{D_\beta}$, S nin bir elemanına genişletilebildiğinden $f|_{C_\alpha}$ da S nin bir elemanına genişletilebilir; yani $f \in \text{PE}_R(G, C)$ dir.

$\mathcal{P}$: Maksimal devirli alt modüller ailesini,

$\mathcal{M}$: Maksimal altmodüller ailesini gösterebilir.

Örneğin; $G = F^m$; $m > 2$ için

$\mathcal{P} = \{ \text{1- boyutlu alt uzaylar ailesi} \},$

$\mathcal{M} = \{ \text{m-1 boyutlu altuzaylar ailesi} \}$ olup

$\mathcal{P} \neq \mathcal{M}$ dir.

Bundan böyle $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{M}$ ye atıf yapılırken bu ailelerin daima G_R için birer örtü oluşturduğunu kabul edeceğiz.

3.1.7. Önerme: $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{M}$ yukarıdaki gibi tanımlansın. Eğer C devirli alt modüllerin örtüsü ise bu durumda $\text{PE}_R(G, \mathcal{P}) = \text{PE}_R(G, C)$ dir. Eğer A , G nin öz altmodülleri örtüsü ise $\text{PE}_R(G, \mathcal{M}) = \text{PE}_R(G, A)$ dir.

İspat: $\mathcal{P} \subseteq C$ ve $C \leq \mathcal{P}$ ve aynı şekilde $\mathcal{M} \subseteq A$ ve $A \leq \mathcal{M}$ olduğundan sonuç 3.1.6 dan çıkar.

3.1.8. Önerme: Eğer C ve D , G_R nin örtüleri ise $C \cup D$ de G nin bir örtüsüdür. Ayrıca $C \leq D$ ise $\text{PE}_R(G, D) = \text{PE}_R(G, C \cup D)$ dir.

İspat: $C \leq D \Rightarrow C \cup D \leq D$, $D \leq C \cup D$ olduğundan $PE_R(G, D) = PE_R(G, C \cup D)$ olup sonuç 3.1.6 dan çıkar.

3.1.9. Örnek: $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $G = \mathbb{Z}^n$, ($n \geq 2$) n -ranklı serbest $\mathbb{Z}$ -modül ve $C = \{G_\alpha\}$, G nin maksimal devirli altmodüllerinden oluşan bir örtüsü olsun. $f \in M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n)$ alalım. f homojen olduğundan, f nin G nin devirli altmodülleri üzerindeki etkisi bu altmodüllerin birer tabanı üzerindeki etkisiyle tek türlü belirlenir. $f, G_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mathbb{Z}$

üzerindeki etkisi

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ile belirlensin. G_α maksimal devirli bir altmodül olduğundan $Ebob(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ olup,

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 1$ olacak biçimde $a_i \in \mathbb{Z}$ vardır. Son eşitlikten

$c_i = c_i a_1 x_1 + \dots + c_i a_n x_n$ olup

$$f(X) = f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 a_1 & c_1 a_2 & \dots & c_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n a_1 & c_n a_2 & \dots & c_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX$$

dir. O halde f nin G üzerindeki etkisi A matrisi ile belli olur. G_α maksimal devirli bir altmodül olarak değiştiğinde A matrisinin de değişeceği aşıkardır.

$\hat{f}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\hat{f}(x) = AX$ ile tanımlı $\hat{f}$, G nin bir endomorfizması olup $\hat{f}$ nin G_α ya kısıtlanması olan $\hat{f}|_{G_\alpha}$, G nin A nın tanımladığı endomorfizmaya genişlediği görülmektedir.

Buna göre her $\hat{f} \in M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n)$ homojen fonksiyon $\mathbb{Z}^n$ nin şu anlamda bir kısmi endomorfizmasıdır:

Her $G_\alpha \in \mathcal{C}$ için $f|_{G_\alpha} = \hat{f}$ olacak biçimde bir $\hat{f} \in \text{End}_Z(Z^n)$ vardır. O halde aşağıdaki genel durum söz konusudur. $\mathcal{C} = \{G_\alpha\}$, G nin maksimal devirli altmodüllerinden oluşan bir örtüsü ve $N = \{f \in M_R(G) : f|_{G_\alpha} ; G \text{ nin bir endomorfizmasına genişletilebilir}\}$ olsun N , $M_R(G)$ nin bir y -alt halkası olup, N ye $(R, G, \mathcal{C})$ üçlüsü tarafından belirlenen kısmi endomorfizmalar y -halkası denir (Maxson, 1990) de N nin hangi durumda $M_R(G)$ ye eşit olduğu sorulmaktadır. Maxson (1990) da D nin TIB (Temel ideal bölgesi) ve G nin sonlu n -ranklı bir serbest D -modül olması durumunda $M_D(D^n) = N$ eşitliği gösterilmiş ve Maxson (1990) da TIB ler üzerinde keyfi modüller için (sonsuz ranklı) sonucun doğru olup olmadığı bir açık soru olarak bırakılmıştır. Aşağıda N nin $M_R(G)$ ye eşit olmasının gerekmediği iki duruma ait örnekler verilmiştir.

3.1.10.Örnek: $R = Z[x]$, $G = (Z[x])^3$ ve $\mathcal{C}$, G nin maksimal devirli alt modüllerinden oluşan bir örtü olsun

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix} Z[x] \in \mathcal{C} \text{ olup}$$

$$f \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k & ; \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix} k ; & k \in Z[x] \text{ ise} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & ; \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix} k ; & k \in Z[x] \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $f \in M_R(G)$ dir. Ancak bu f yi

$$\delta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olacak biçimde bir } \delta \in \text{End}_R(G) \text{ ye genişletemeyiz;}$$

çünkü $X \in (Z[x])^3$ için $\delta(X) = AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olacak biçimde bir $A = [A_{ij}(x)] \in M_3(Z[x])$

matrisini oluşturan ve sabit olmayan polinomlar mevcut değildir. O halde $N \not\subseteq M_R(G)$ dir. Bu örnekteki $Z[x]$ bölgesi bir TİB değildir.

Halka ve modülün sonlu olduğu ve halkanın bir TİH olmadığı duruma ait bir örnek de şöyledir.

3.1.11.Örnek. $GF(2)$, 2 - elemanlı Galois cismi olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in GF(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

değişmeli halkasını ve R -üzerinde

$$G = [GF(2)]^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in GF(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

modülünü göz önüne alalım. Burada her $f \in M_R(G)$ ve her v için $f(Rv) \subseteq Rv$ dir. Böylece $f(v) = rv$, $r \in R$ olur.

Her $f, g \in M_R(G)$ ve her $v \in G$ için

$$\begin{aligned} [(f(g+h))(v)] &= f[(g+h)(v)] = f[g(v) + h(v)] = f(r_1v + r_2v) = f[(r_1+r_2)v] \\ &= (r_1 + r_2) f(v) = r_1 f(v) + r_2 f(v) = f(r_1v) + f(r_2v) \\ &= f[(g(v))] + f[h(v)] \\ &= (fg+fh)(v) \end{aligned}$$

olduğundan $M_R(G)$ bir halkadır. $\{e_1, e_2, e_3\}$, G nin $GF(2)$ cismi üzerindeki standart tabanı

ise herhangi $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in G$ vektörü $e_1 + e_2 + e_3$, e_2 veya e_3 ün bir R katında bulunur. Yani

$$G = R(e_1 + e_2 + e_3) \cup Re_2 \cup Re_3 \text{ olup}$$

$$R(e_1 + e_2 + e_3) = \left\{ \begin{bmatrix} a + b + c \\ a \\ a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in GF(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Re_2 = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in GF(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Re_3 = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in GF(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ve $R(e_1 + e_2 + e_3) \cap Re_2 \cap Re_3 = \{0, e_1\}$ dir. Buna göre,

$f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_2) = f(e_3) = e_1$ ile verilen $f: G \rightarrow G$ fonksiyonu $M_R(G)$ nin bir elemanını belirler. $v \in G$ için $v = r(e_1 + e_2 + e_3)$, $v = re_2$ veya $v = re_3$, olup $f(v) = re_1$, $r \in R$ dir.

Burada

$$C_\alpha = R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_\beta = R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_\gamma = R \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ler maksimal devirli altmodüllerdir. Aynı zamanda C_α , C_β , C_γ lar maksimal altmodüller;

yani $\mathcal{M} = \mathcal{P}$ dir. $f \in M_R(G)$ ve $f(0) = 0$, $f(x) = re_1$, $\forall x \in G$ için

$f: G \rightarrow G$ ve $f|_{C_\alpha}: C_\alpha \rightarrow G$ kısıtlanış fonksiyonu
 $x \rightarrow e_1$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= f\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = e_1 \\ f\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] + f\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] &= e_1 + e_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq f\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] + f\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$$

olduğundan $f \in M_R(G)$ fakat $f \notin PE_R(G, \mathcal{P})$ dir. Böylece $PE_R(G, \mathcal{P}) \subseteq M_R(G)$ olur.

3.1.12.Örnek: $R=Z$ olsun. $G= (Z[x])^3$; Z TIB si üzerine sonsuz ranklı bir modüldür.

3.1.10. daki maksimal devirli altmodül ve bu altmodüle göre tanımlı f homojen fonksiyonu göz önüne alındığında bu altmodül üzerinde aynı etkiyi gösteren bir

$\delta \in \text{End}_Z(G)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile belirlenebilir. Çünkü $X \in (Z[x])^3$ için $\delta(X) = AX$ ile verilen $\delta \in \text{End}_Z(G)$ olup,

$$\delta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \delta|_{G_\alpha} = f \text{ dir.}$$

3.1.13. Örnek: $R=Z$, $G= Z^\infty$ (sonsuz ranklı, serbest Z -modül), $\mathcal{C}=\{G_\alpha\}$, G nin maksimal devirli alt modüllerinin bir örtüsü olsun ve $f \in M_Z(Z^\infty)$ verilsin.

$G_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)^t Z$ maksimal $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}^+$ öyle ki

$\text{Ebob}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = 1$; yani

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in Z$$

sayıları bulunabilir; öyle ki

$$a_{i_1} x_{i_1} + a_{i_2} x_{i_2} + \dots + a_{i_n} x_{i_n} = 1 \text{ dır.}$$

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] = f(X) = [c_1, c_2, \dots, c_n, \dots]$$

ise $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$c_j = a_{i_1} x_{i_1} c_j + a_{i_2} x_{i_2} c_j + \dots + a_{i_n} x_{i_n} c_j$$

olduğundan

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & a_{i_1} c_1 & 0 \dots 0 & a_{i_2} c_1 & 0 \dots 0 & a_{i_n} c_1 & 0 \dots \\ 0 \dots 0 & a_{i_1} c_2 & 0 \dots 0 & a_{i_2} c_2 & 0 \dots 0 & a_{i_n} c_2 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & a_{i_1} c_n & 0 \dots 0 & a_{i_2} c_n & 0 \dots 0 & a_{i_n} c_n & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \\ \vdots \end{bmatrix} = AX$$

dir.

$\beta: Z^\infty \rightarrow Z^\infty$ yi $\beta(x) = AX$ olarak tanımlarsak $\beta \in \text{End}_Z(Z^\infty)$ ve $\beta|_{G_\alpha} = f$ olduğu açıktır.

f nin Z^∞ a genişlemesi yalnız bir şekilde olmayıp gerçekten sonsuz çoklukta yapılabilir.

Çünkü X vektörünün aralarında asal olan bileşenleri sonsuz şekilde seçilebilir.

Son olarak sayılamaz sonsuz rank durumunda $N = M_R(G)$ eşitliğinin olabileceğini gösteren bir örnek verelim.

3.1.14.Örnek: (Görentaş ve Yıldız, 1993): $R = \mathbb{R}$ reel cisim, $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ olsun. $\mathbb{R}$ yarıbasit (semi-simple) bir halka olduğundan G de yarı basit bir R -modül olup rankı sayılamaz sonsuzdur.

Her $0 \neq f \in G$ ögesi bir maksimal devirli $\mathbb{R}f$ alt modül üretir ve bu maksimal devirli alt modüller G nin bir $\mathcal{C}$ örtüsünü oluşturur. Örneğin,

$$G = R \sin x \in \mathcal{C} \text{ olup, } F: G \rightarrow G;$$

$$F(f(x)) = \begin{cases} r \cos x & ; \\ 0 & ; \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x) = r \sin x \in G_\alpha \text{ ise} \\ f \notin G_\alpha \text{ ise,} \end{matrix}$$

ile tanımlı $F \in M_R(G)$ fakat, $F \notin \text{End}_R(G)$ dır.

$F|_{G_\alpha} : G_\alpha \rightarrow G_\alpha$ kısıtlanış fonksiyon G_α nın bir endomorfizmasıdır:

$$\begin{aligned} F|_{G_\alpha} (r_1 \sin x + r_2 \sin x) &= F|_{G_\alpha} [(r_1 + r_2) \sin x] = (r_1 + r_2) \cos x = r_1 \cos x + r_2 \cos x \\ &= F|_{G_\alpha} (r_1 \sin x) + F|_{G_\alpha} (r_2 \sin x). \end{aligned}$$

G yarıbasit olduğundan, G nin sadece bir G' altmodülü vardır; Öyle ki $G = IR \sin x + G'$.

$\hat{F}: G \rightarrow G$ yi

$\hat{F}[r \sin x + g(x)] = F(r \sin x) = r \cos x$ olarak tanımlıyalım, ($g \in G'$)

$$\begin{aligned} \hat{F}[r_1 \sin x + g_1(x) + r_2 \sin x + g_2(x)] &= \hat{F}[(r_1 + r_2) \sin x + (g_1 + g_2)(x)] \\ &= F[(r_1 + r_2) \sin x] = (r_1 + r_2) \cos x \\ &= r_1 \cos x + r_2 \cos x \\ &= F(r_1 \sin x) + F(r_2 \sin x) \\ &= \hat{F}[r_1 \sin x + g_1(x)] + \hat{F}[r_2 \sin x + g_2(x)] \end{aligned}$$

olduğundan $\hat{F}$ bir endomorfizma olup, $\hat{F}|_{G_\alpha} = F$ dir.

$\bar{G}$, G nin sonsuz türevli fonksiyonlardan oluşan alt modülü olsun. $\bar{G}$ de yarıbasit olup; G_1 , $IR \sin x$ in $\bar{G}$ deki direkt tümleyeni olmak üzere, $\bar{G} = IR \sin x \oplus G_1$, yazalım. Yukarıdaki $\hat{F}$ yi $\bar{G}$ de düşündüğümüzde,

$$\hat{F}[r \sin x + g(x)] = r \cos x, (g(x) \in G_1)$$

olduğundan $\hat{F}$, F yi $\bar{G}$ nin bir endomorfizmasına genişletir.

$D: \overline{G} \rightarrow \overline{G}; D(f(x)) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ile verilen türev dönüşümü de F yi $\overline{G}$ ye genişletir; ancak $D[r\sin x + g(x)] = r\cos x + g'(x)$ olup $D \neq \hat{F}$ dir. Bu ise genişlemenin birden fazla olabileceğini gösterir.



4.BÖLÜM

KİSMİ ENDOMORFİZMA YAKIN-HALKALARI

Bu bölümde $M_R(G)$ de G nin belirli altmodüllerde endomorfizmalar olarak temsil olunabilen $f \in M_R(G)$ homojen fonksiyonlarının oluşturdukları alt y -halkaları çeşitli örneklerle incelemeye devam edeceğiz. Bu bölümde asıl amaç Maxson (1992) da açık sorular olarak yer alan iki problemin çözümüne çeşitli şekilde yaklaşmaktır.

4.1.Kısmi Endomorfizmalar

R birimli bir halka, G bir üniter sağ R -modül ise fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında

$$M_R(G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f(ar) = f(a)r, r \in R, a \in G \}$$

kümesinin birimli sıfır-simetrik bir yakın halka olduğu 2.bölümde görüldü.

4.1.1. Tanım: G nin her C örtüsü için

$$PE_R(G, C) = \{ f \in M_R(G) : f|_{G_\alpha}, \text{ bir } s \in S = \text{End}_R(G) \text{ ye genişler} \}$$

kümesi $M_R(G)$ nin bir alt y -halkası olup $PE_R(G, C)$ ye R -modül G nin C örtüsüne belirlenen kısmı endomorfizmalar y -halkası denir. Kısmı endomorfizma yakın halkaları (Maxson, 1990), (Maxson and Vander Walt, 1991), (Maxson and Vander Walt, 1992) ve (Maxson, 1992) de incelenmeye başlanmıştır. G nin her C örtüsü için,

$$\text{End}_R(G) \subseteq PE_R(G, C) \subseteq M_R(G)$$

bağıntılarının doğruluğu açıktır. Aşağıdaki örnekte C nin $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ olması durumunda

$\text{End}_R(G) = PE_R(G, \mathcal{M})$, $M_R(G) = PE_R(G, \mathcal{N})$ fakat $M_R(G) \neq \text{End}_R(G)$ olabileceği görülmektedir.

4.1.2.Örnek (Maxson, 1992): F bir cisim V sonlu boyutlu bir F -vektör uzay, $V=F^m$, $m > 2$ olsun. C_i , V nin, i -boyutlu altuzaylarından oluşan örtüsü, $(0 < i < m)$ ise $\mathcal{M}=C_{m-1}$ ve $\mathcal{J}=C_1$ dir. (Maxson 1990, Te.II) de $PE_F(V, C_1) = M_F(V)$ olduğu gösterilmiştir.

Her $i > 1$ için $f \in PE_F(V, C_i)$ olsun. Herhangi iki $u, v \in V$ vektörü için $u, v \in C$ olacak şekilde bir $C \in C_i$ altuzayı vardır. $f \in PE_F(V, C_i)$ olduğundan $f|_C$, V nin bir endomorfizmasına genişletilebilir; yani $f(u+v) = f(u) + f(v)$ dir. Her $i > 1$ için $End_F(V) = PE_F(V, C_i)$ dir. (Maxson and Walt, 1991) de $M_F(V)$ nin bir halka olmadığı gözlenebilir. Buna göre

$$End_F(V) = PE_F(V, \mathcal{M}) = PE_F(V, C_{m-2}) = \dots = PE_F(V, C_2) \subset PE_F(V, C_1) = M_F(V)$$

olur.

4.2. $End_R(G) = PE_R(G, \mathcal{M})$ ve $M_R(G) = PE_R(G, \mathcal{J})$ Durumları

Bu kesimde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{J}$ özel örtüleri üzerinde durularak bilinen bazı sonuçların bir özetini veriyoruz.

4.2.1.Önerme: G bir yarı-basit R -modül olsun. Bu durumda $PE_R(G, \mathcal{J}) = M_R(G)$ ve $\mathcal{M} \neq \mathcal{J}$ ise $PE_R(G, \mathcal{M}) = End_R(G)$ dir.

İspat: $C = \{a_\alpha R\}$, $\alpha \in A$ bütün devirli altmodüllerin örtüsü ve $f \in M_R(G)$ olsun.

Her $a_\alpha R \in C$ için $f|_{a_\alpha R} : a_\alpha R \rightarrow G$

bir homomorfizmadır:

$$f(a_\alpha r_1 + a_\alpha r_2) = f[a_\alpha(r_1 + r_2)] = f(a_\alpha)(r_1 + r_2) = f(a_\alpha)r_1 + f(a_\alpha)r_2 = f(a_\alpha r_1) + f(a_\alpha r_2)$$

G yarı-basit olduğundan, $G = a_\alpha R \oplus K_\alpha$ olacak şekilde G nin bir K_α altmodülü vardır.

$f|_{a_\alpha R}$, G nin bir R -endomorfizmasına

$\sigma_\alpha(a_\alpha r + k) = f(a_\alpha r)$, $r \in R$, $k \in K_\alpha$ ile genişletilebilir. 3.1.7. den $M_R(G) \subseteq PE_R(G, \mathcal{P})$ dir. Böylece $M_R(G) = PE_R(G, \mathcal{P})$ eşitliği görülür.

$\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ ve $H \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$ olsun. Yine G yarı-basit olduğundan G nin uygun bir K altmodülü için $G = H \oplus K$ yazılır. $g = h + k \in G$ için $hR \subset H$ olduğundan $hR + kR \leq G$ bir öz altmodüldür. O halde $hR + kR$, $\mathcal{M}$ de bir maksimal altmodül tarafından kapsanır ve $f \in PE_R(G, \mathcal{M})$ için $f(h+k) = f(h) + f(k)$ dir.

$x = x_1 + x_2$ ve $y = y_1 + y_2$, G de herhangi iki eleman olsun. Bu durumda da ,

$$f(x+y) = f(x_1+y_1 + x_2+y_2) = f(x_1+y_1) + f(x_2+y_2)$$

dir. $x_1R + y_1R \subset G$ ve $x_2R + y_2R \subset G$ olduğundan

$$f(x+y) = f(x_1) + f(y_1) + f(x_2) + f(y_2) = f(x_1+x_2) + f(y_1+y_2) = f(x) + f(y) \text{ olup,}$$

$f \in \text{End}_R(G)$ dir. $\text{End}_R(G) \subseteq PE_R(G, \mathcal{M})$ bağıntısı her zaman doğru olduğundan

$$PE_R(G, \mathcal{M}) = \text{End}_R(G)$$

olur. R bir yarı-basit halka; yani R sonlu sayıda basit Artinian halkaların bir direkt toplamı ise her R -modül G de yarı-basit olacağından şu sonuç elde edilir.

4.2.2.Sonuç: R yarı-basit bir halka ise $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{M}$ nin birer örtü olduğu her md-modül G için

$$PE_R(G, \mathcal{P}) = M_R(G)$$

ve $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ olması durumunda $PE_R(G, \mathcal{M}) = \text{End}_R(G)$ dir.

4.2.1. ve 4.2.2. de $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ şartı kalktığında $PE_R(G, \mathcal{M}) = \text{End}_R(G)$ eşitliği olmayabilir.

4.2.3. Örnek: $R = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}^2$ için $\mathcal{M} = \mathcal{P}$ (orjinden geçen doğrular ailesi) olup,

$W = \{(x, x) \mid x \in IR\} \in \mathcal{P} = \mathcal{M}$ dir.

$$f(u) = \begin{cases} u & ; \quad u \in W \\ 0 & ; \quad u \notin W \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ise} \\ \text{ise} \end{matrix}$$

ile tanımlı $f \in M_{IR}(IR^2)$ olup $f \notin \text{End}_{IR}(IR^2)$ dir. (Fuchs et al, 1991) de her R -modül G için $M_R(G)$ y -halkasının bir halka ; yani $M_R(G) = \text{End}_R(G)$ olduğu tüm R -halkalarının ailesi $\mathcal{R}$ ile gösterilmiş olup, bu ailenin en iyi bilinen örnekleri, tipi 2×2 veya daha büyük matris halkaları ile bunların keyfi direkt çarpımları olarak bulunmuştur. Buna göre 4.2.2. deki yarı-basit R - halkasının matris halkalarının direkt toplamı olarak yazılışında her bir bileşen matrisin türü en az 2×2 ise $R \in \mathcal{R}$ olup $\text{End}_R(G) \subseteq \text{PE}_R(G, \mathcal{C}) \subseteq M_R(G)$ bağıntılarından G nin her $\mathcal{C}$ örtüsü için $\text{PE}_R(G, \mathcal{C}) = \text{End}_R(G)$ olduğu görülür. R nin direkt toplam ayrışımındaki matris halkalarından herhangi birinin türü 1×1 ise $\text{PE}_R(G, \mathcal{C}) = \text{End}_R(G)$ eşitliği olmayabilir. 4.1.2. böyle bir duruma ait bir örnektir.

Bu kesimin geri kalan kısmında $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{P}$ nin G için birer örtü teşkil ettiği ve $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ olacak biçimdeki her R -modül G için $\text{End}_R(G) = \text{PE}_R(G, \mathcal{M})$ eşitliğinin mümkün olduğu komutatif Noetherien R halkalarının (Maxson and Walt, 1992) tarafından başlatılan karakterizasyonunun bir özetini vereceğiz. Bu karakterizasyon aşağıdaki önermeler dizisi kapsamında yapılmıştır.

4.2.3. Önerme: $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$, $\alpha \in A$, G nin bir örtüsü ve her $\alpha \in A$ için $C_\alpha \neq G$ ve $S = \text{End}_R G$ olsun.

$\alpha \in A$ için $K_\alpha = \bigcup_{C_\beta \not\subset C_\alpha} (C_\beta \cap C_\alpha)$ ve G nin her T alt kümesi için

$$\mathcal{L}_s(T) = \{s \in S \mid sx = 0, \forall x \in T\},$$

T nin sol sıfırlayıcısı olsun. Eğer bir $\alpha \in A$ için

$$\mathcal{L}_s(C_\alpha) \neq \mathcal{L}_s(K_\alpha) \quad \text{ise} \quad \text{PE}_R(G, \mathcal{C}) \neq \text{End}_R(G)$$

dır.

İspat: $K_\alpha \subseteq C_\alpha$ olduğundan $\mathcal{L}_s(C_\alpha) \subseteq \mathcal{L}_s(K_\alpha)$ dır.

$\alpha_0 \in A$ elamanını $\mathcal{L}_s(C_{\alpha_0}) \neq \mathcal{L}_s(K_{\alpha_0})$ olacak şekilde seçelim.

Buna göre $x_0 \in C_{\alpha_0} \setminus K_{\alpha_0}$ elemanı bir $s_0 \in \mathcal{L}_s(K_{\alpha_0})$ için $s_0 x_0 \neq 0$ olacak şekilde bulunabilir. $x \in G$ için $f: G \rightarrow G$ yi

$$f(x) = \begin{cases} s_0 x & , \quad x \in C_{\alpha_0} \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad x \notin C_{\alpha_0} \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $f \in \text{PE}_R(G, C)$ olduğunu görmek için (Maxson and Walt 1991) den, bir $t = \{t_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in A} S$, fonksiyonunu her $\alpha, \beta \in A$ için $t_\alpha - t_\beta \in \mathcal{L}_s(C_\alpha \cap C_\beta)$ ve $f(x) = t_\alpha(x)$

, $x \in C_\alpha$ olacak şekilde bulmak yeter. Bunun için $t = \{t_\alpha\}$ yi

$$t_\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad C_\alpha \subseteq C_{\alpha_0} \quad \text{ise} \\ s_0 & , \quad C_\alpha \subseteq C_{\alpha_0} \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $t_\alpha - t_\beta \in \mathcal{L}_s(C_\alpha \cap C_\beta)$ olduğunu görelim. $(C_\alpha \not\subseteq C_{\alpha_0})$ ve $(C_\beta \not\subseteq C_{\alpha_0})$ ise $t_\alpha - t_\beta = 0 \in \mathcal{L}_s(C_\alpha \cap C_\beta)$ olup, $C_\alpha \subseteq C_{\alpha_0}$ ve $C_\beta \subseteq C_{\alpha_0}$ ise $t_\alpha - t_\beta = s_0 - s_0 = 0 \in \mathcal{L}_s(C_\alpha \cap C_\beta)$ olur. Son olarak $C_\alpha \not\subseteq C_{\alpha_0}$ ve $C_\beta \subseteq C_{\alpha_0}$ ise $C_\alpha \not\subseteq C_{\alpha_0}$ olduğundan $C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \subseteq K_{\alpha_0}$ olup bunun sonucu olarak $C_\alpha \cap C_\beta \subseteq K_{\alpha_0}$ elde edilir. Buna göre $\mathcal{L}_s(K_{\alpha_0}) \subseteq \mathcal{L}_s(C_\alpha \cap C_\beta)$ bulunur.

$f(x) = t_\alpha(x)$, $x \in C_\alpha$ olduğu f nin tanımından görülür $\text{PE}_R(G, C) \neq \text{End}_R(G)$ olduğunu göstermek için f nin lineer olmadığını görmek yeter, $C_{\alpha_0} \neq G$ olduğundan bir $\alpha \in G \setminus C_{\alpha_0}$ elemanı var olup $x_0 = x_0 - a + a$ yazılır. $a \notin C_{\alpha_0}$ olduğundan $x_0 - a \notin C_{\alpha_0}$ olup

$$f(x_0 - a) + f(a) = 0 \text{ iken } f(x_0 - a + a) = f(x_0) = s_0 x_0 \neq 0 \text{ dır.}$$

4.2.4. Önerme: R bir komütatif halka; M , R nin bir maksimal ideali

ve $M^2 \neq M$ olsun. Buna göre $K = \begin{bmatrix} R/M^2 \\ M/M^2 \end{bmatrix}$, R -modül $(R/M^2)^2$ nin bir maksimal altmodülü olup, H , $(R/M^2)^2$ nin $H \neq K$ olacak biçimdeki herhangi bir maksimal altmodülü ise $H \cap K \subseteq \begin{bmatrix} R/M^2 \\ M/M^2 \end{bmatrix}$ dir.

İspat: K nın $(R/M^2)^2$ nin bir maksimal altmodülü olduğu açıktır. $H \neq K$ olduğundan $b \notin M$ olacak şekilde bir $\begin{bmatrix} a + M^2 \\ b + M^2 \end{bmatrix} \in H$ vardır. R/M bir cisim olduğundan $bc-1=m' \in M$ olacak şekilde bir $c \in R$ bulunur. O halde $bc + M^2 = 1 + m' + M^2$ dir.

Fakat her $m \in M$ için

$$\begin{bmatrix} a + M^2 \\ b + M^2 \end{bmatrix} cm = \begin{bmatrix} acm + M^2 \\ bcm + M^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acm + M^2 \\ m + m'm + M^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acm + M^2 \\ m + M^2 \end{bmatrix}$$

dir.

Öte yandan $H \cap K \not\subseteq \begin{bmatrix} R/M^2 \\ M/M^2 \end{bmatrix}$ ise bir $d \notin M/M^2$ için bir $\begin{bmatrix} d + M^2 \\ m + M^2 \end{bmatrix} \in H \cap K$ elemanı vardır. Yukarıdaki gibi bir $r \in R$ vardır; öyleki $dr + M^2 = 1 + m'' + M^2$, $m'' \in M$ ve buradan her $m \in M$ için

$$\begin{bmatrix} d + M^2 \\ m + M^2 \end{bmatrix} rm = \begin{bmatrix} m + M^2 \\ 0 + M^2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Buradan $H \supseteq \begin{bmatrix} M/M^2 \\ M^2 \end{bmatrix}$ olduğu görülür. Bu ve yukarıdakilerden $H \supseteq (M/M^2)^2$ olur ki, buradan $H=K$ çelişkisi çıkar.

4.2.5. Teorem: R bir komütatif halka olsun. $\mathcal{M}$ nin bir örtü olduğu her $m \in R$ -modül G için $PE_R(G, \mathcal{M}) = \text{End}_R(G)$ ise R nin her M maksimal ideali için $M^2 = M$ dir.

İspat: 4.2.3.ü 4.2.4. deki duruma uygulayarak R nin bir komütatif halka ve M nin R de $M^2 \neq M$ olacak biçimde bir maksimal ideali olarak alalım: 4.2.4 den $G=(R/M^2)^2$ bir R -modül olup $C_{\alpha_0} = \begin{bmatrix} R/M^2 \\ M/M^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ dir. Ayrıca $C_\beta \not\subseteq C_{\alpha_0}$ olacak biçimdeki

her $C_\beta \in \mathcal{M}$ için $C_\beta \cap C_{\alpha_0} \subseteq (M/M^2)^2$ olup

$$K\alpha_0 = \bigcup_{\substack{C_\beta \in \mathcal{M} \\ C_\beta \neq C_{\alpha_0}}} (C_\beta \cap C_{\alpha_0}) \subseteq (M/M^2)^2 \text{ dir. } S = \text{End}_R(R/M^2) = M_2(R/M^2),$$

(R/M^2) üzerindeki 2×2 matrisler halkasıdır.

$$\begin{bmatrix} m + M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}_S(K_{\alpha_0}), \text{ fakat } \begin{bmatrix} m + M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{L}_S(C_{\alpha_0}) \text{ dir.}$$

O halde 4.2.3. den

$$\text{PE}_R((R/M^2)^2, \mathcal{M}) \neq \text{End}_R[(R/M^2)^2]$$

dir.

4.2.5.in karşıtı doğru değildir. 4.1.2. de olduğu gibi F bir cisim, V bir F -uzay ve $\dim_F V = 2$ ise $\mathcal{M} = \mathcal{P}$ ve $\text{End}_F(V) \subsetneq \text{PE}_F(V, \mathcal{M}) = M_F(V)$ dir. Oysa, F nin tek maksimal ideali $M = (0)$ olup $M^2 = M$ dir.

$\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$ ve bunların birer örtü teşkil ettiği her R -modül G için $\text{End}_R(G) = \text{PE}_R(G, \mathcal{M})$ eşitliğinin mümkün olduğu tüm komütatif Noetherian halkaların (Maxson 1992) tarafından yapılan karakterizasyonu şu teoremle verilmiştir.

4.2.6. Teorem: R birimli bir komutatif halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- 1) R cisimlerin direkt toplamıdır;
- 2) R Artinian ve R nin her M maksimal ideali için $M^2 = M$ dir.
- 3) R Noetherian ve R nin her M maksimal ideali için $M^2 = M$ dir.

4) R Noetherian ve $M \neq \emptyset$ olmak üzere her md-modül G için $\text{End}_R(G) = \text{PE}_R(G, M)$ dir.

5) R Noetherian ve $M \neq \emptyset$ olmak üzere her md-modül G için $\text{PE}_R(G, M)$ bir halkadır.

Maxson(1990) da D nin TİB ve G nin sonlu ranklı bir serbest D -modül olması durumunda $\text{PE}_D(G, \emptyset) = M_D(G)$ olduğu gösterilmiş; sonra bu sonuç komutatif TİH lere (Maxson and Walt, 1992) da aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

4.2.7. Teorem: R bir TİH ve G sonlu üretilmiş bir R -modül ve $\emptyset$, G nin maksimal devirli altmodüllerinin örtüsü ise $M_R(G) = \text{PE}_R(G, \emptyset)$ dir.

Bu teoremin karşınının tamlık bölgeleri için doğru olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Yani D bir tamlık bölgesi ve sonlu üretilmiş her D -modül G için

$M_D(G) = \text{PE}_D(G, \emptyset)$ eşitliği varsa, D bir TİB midir? Bu sorunun cevabı Noetherien tek türlü çarpımlara ayırma bölgeleri (TÇB= UFD) için şu şekilde verilmiştir.

4.2.8. Teorem: D bir Noetherien TÇB olsun. Bu durumda her sonlu üretilen D -modül G için

$$\text{PE}_D(G, \emptyset) = M_D(G) \Leftrightarrow D \text{ bir TİB dir.}$$

İspat: D bir TİH ise $\text{PE}_D(G, \emptyset) = M_D(G)$ eşitliği 4.2.7. nin bir sonucudur.

D bir Noetherian TÇB ve sonlu üretilen her D -modül G için $\text{PE}_D(G, \emptyset) = M_D(G)$ olduğunu varsayalım ve D nin bir TİB olduğunu görelim. D Noetherian olduğundan her I ideali sonlu üretilmiş olup, $I = aD + bD$ nin bir temel ideali olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için ebob $(a, b) = d$; $a = a_1d$, $b = b_1d$ olsun. ebob $(a_1, b_1) = 1$ olduğundan $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, D^2 de bir maksimal devirli altmodül (mda) üretir. $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ D de bir mda ve

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} D \cap \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} D \neq \{0\} ; \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} c_1 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} c_2 \text{ olsun.}$$

c_1 ve c_2 nin terslenmeyen bir ortak çarpanının olmadığını varsayabiliriz. $a_1 c_1 = a_2 c_2$ ve

$b_1 c_1 = b_2 c_2$ den $c_2 \mid a_1$ ve $c_2 \mid b_1$ olup $(a_1, b_1) = 1$ olduğundan c_2 bir birimsel (ünit) olup, burada $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} D$ dir. Buna göre D^2 de kesişimi $\{0\}$ dan farklı olan mda lar

çakışmakta olup, D^2 nin mda ları birbirinden ayrıdır. Bunun sonucu olarak $M_D(D^2)$ 'deki f

fonksiyonlarını, D^2 'nin mda larının üretenleri üzerinde tanımlıyarak belirtebiliriz. Örneğin

$f \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $f \in M_D(D^2)$ vardır. $PE_D(D^2, \mathcal{D}) = M_D(D^2)$ eşitliği

verildiğinden, $f \in PE_D(D^2, \mathcal{D})$ olup $PE_D(D^2, \mathcal{D})$ nin tanımından bir $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(D)$

matrisi var ve bu A ile f nin etkisi $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} D$ de çakışır; yani A ile f bu mda da aynı

değeri alırlar. Buna göre $f \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ den

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_1 + a_{12}b_1 \\ a_{21}a_1 + a_{22}b_1 \end{bmatrix}$$

olup

$$1 = a_{11}a_1 + a_{12}b_1 \text{ den } d = a_{11}da_1 + a_{12}db_1 = a_{11}a + a_{12}b \quad \text{ve}$$

$$dD = (a_{11}a + a_{12}b)D = a_{11}aD + a_{12}bD = a(a_{11}D) + b(a_{12}D) \subset aD + bD \text{ olur.}$$

öte yandan,

$$a = a_1d \Rightarrow aD \subset a_1dD = d(a_1D) \subset dD$$

$$b = b_1d \Rightarrow bD \subset b_1dD = d(b_1D) \subset dD$$

olduğundan $aD + bD \subset dD$ olup $I = aD + dD$ bulunur.

4.3. $\mathcal{PF}_n$ Halkalar Ailesi

Bu kesimde D yi bir (komutatif) tamlık bölgesi aldığımızda $n=2,3,4,\dots$ için

$\mathcal{PF}_n = \{D \text{ tamlık bölgeleri} \mid (M_D(D^n) = PE_D(D^n, \mathcal{P}))\}$ sınıfının kısmi bir karakterizasyonunu elde edeceğiz. Bunun için önce $M_D(D^2) = PE_D(D^2, \mathcal{P})$ eşitliğinin ne zaman mümkün olduğu sorusuyla ilgileneceğiz

4.3.1. Tanım: $a, b \in D$ birimsel olmayan ortak katları bulunmayan elemanlar olmak üzere

$\mathcal{K}_1(a,b) = \{c \in D \mid \exists d \in D, ad = bc\}$ ve $\mathcal{K}_2(a,b) = \{d \in D \mid \exists c \in D, cd = bc\}$ şeklinde tanımlanır.

4.3.2.Önerme: $\mathcal{K}_1(a,b)$ ve $\mathcal{K}_2(a,b)$, D nin idealleri olup

$\mathcal{K}_1(a,b) \supseteq aD$ ve $\mathcal{K}_2(a,b) \supseteq aD$ dir.

İspat: $c \in \mathcal{K}_2(a,b)$ olsun. Tanım gereği $c_1, c_2 \in D$ için bir $d_1, d_2 \in D$ vardır; öyle ki

$$ad_1 = bc_1, \quad d_1 = bc_2$$

buradan $a(d_1 + d_2) = b(c_1 + c_2)$ olup $c_1 + c_2 \in \mathcal{K}_1(a,b)$ dir. $r \in D, c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ olsun. $ad = bc \Rightarrow a(rd) = b(rc)$ olduğundan $rc \in \mathcal{K}_1(a,b)$ dir. Böylece $\mathcal{K}_1(a,b)$ bir idealdir. Benzer şekilde $\mathcal{K}_2(a,b)$ nin de bir ideal olduğu görülür.

Her $c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ için $(aD:c) = \{u \in D \mid uc \in aD\}$, D nin bir ideali olup $\mathcal{K}_1(a,b) = (aD:bD)$ olduğu açıktır. $I(a,b) = \bigcap_{c \in \mathcal{K}_1(a,b)} (aD:c)$ olarak alınırsa $(aD:c) = (aD:cD)$ olduğundan

$$I(a,b) = \bigcap_{c \in \mathcal{K}_1(a,b)} (aD:cD) \text{ olur.}$$

4.3.3.Önerme: a,b yukarıdaki gibi ise $I(a,b) \supseteq aD + bD$ dir. Ayrıca,

$$aD+bD = D \Leftrightarrow \mathcal{K}_1(a,b) = aD \text{ dir.}$$

İspat: $c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ olsun $a \in (aD:c)$ oluşu açıktır. $bc = ad$ olduğundan $b \in (aD:c)$ olup ilk ifade doğrulanır.

$\mathcal{K}_1(a,b) = aD$ alalım ve $c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ olsun. Buradan her $y \in D$ için $yc \in aD$ olup $D \subseteq I(a,b)$ dir. Karşıt olarak, $aD \subseteq \mathcal{K}_1(a,b)$ olduğu biliniyor. $c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ olsun. $1 \in I(a,b)$ olduğundan $1.c \in aD$ olup $\mathcal{K}_1(a,b) \subseteq aD$ dir. Aşağıdaki iki önerme kolayca ispatlanabilir.

4.3.5.Önerme:

(i) bir $0 \neq c \in \mathcal{K}_1(a,b)$ vardır $\Leftrightarrow (a,b)^t D \cap (c,d)^t D \neq \{0\}$ olacak şekilde bir $d \neq 0$ vardır.

(ii) $0 \neq d \in \mathcal{K}_2(a,b)$ vardır $\Leftrightarrow (a,b)^t D \cap (c,d)^t D \neq \{0\}$ olacak şekilde $0 \neq c$ vardır

4.3.6. Önerme: $f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ olmak üzere bir $f \in M_D(D^2)$ vardır $\Leftrightarrow \{x,y\} \subseteq I(a,b)$ dir.

4.3.7. Teorem: Aşağıdakiler denktir.

(i) $PE_D(D^2, \mathcal{K}) = M_D(D^2)$;

(ii) Her $a,b \in D \setminus \{0\}$ için $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} D$ bir mda olacak şekilde $I(a,b) = aD + bD$ dir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $x \in I(a,b)$ olsun. 4.3.6.dan $f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $f \in M_D(D^2)$ vardır.

Hipotezden, $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $A \in M_2(D^2)$ vardır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ den}$$

$a_{11}a + a_{12}b = x \in aD + bD$ olur. 4.3.4. den $I(a,b) \supseteq aD + bD$ dir.

Böylece $I(a,b) = aD + bD$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $PE_D(D^2, \mathcal{K}) \subseteq M_D(D^2)$ olduğundan

$M_D(D^2) \subseteq PE_D(D^2, \mathcal{P})$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $f \in M_D(D^2)$ olsun. 4.3.6. dan

$\{x, y\} \subseteq I(a, b)$ yazılır. Böylece $x = a_{11}a + a_{12}b$ ve $y = a_{21}a + a_{22}b$ olacak şekilde

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in D$ vardır. $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ olduğundan $f, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} D$ üzerinde bir matris ile temsil edilir. Böylece $f \in PE_D(D^2, \mathcal{P})$ olur.

4.3.8.Önerme: Her $a, b \in D \setminus \{0\}$ için $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} D$, mda olmak üzere $I(a, b) = D$ olacak şekilde D

bir Noetherian bölge olsun. Bu durumda $PE_D(D^2, \mathcal{P}) = M_D(D^2) \Leftrightarrow D$ TİB dir.

İspat: $\Rightarrow$ D Noetherian ve $0 \neq a, b \in D$ için $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} D$, mda olacak şekilde $I(a, b) = D$ olsun.

$PE_D(D^2, \mathcal{P}) = M_D(D^2)$ ise D nin TİB olduğunu göstereceğiz. Bunun için $a_1, a_2 \in D \setminus \{0\}$ için $a_1D + a_2D$ idealinin temel olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer a_1, a_2 nin birimsel olmayan d_1 gibi bir ortak katı varsa $a_1 = d_1 a_1'$, $a_2 = d_1 a_2'$ ve

$a_1 = d_1 a_1'$ den $a_1D \subset a_1'D$ olur. Aynı şekilde a_1, a_2' gibi birimsel olmayan bir ortak kat varsa $a_1D \subset a_1'D \subset a_1''D$ olacak şekilde $a_1'' \in D$ bulunur. D Noetherian olduğundan bu zincir bir noktada durmak zorundadır. Böylece $a_1 = db_1$, $a_2 = db_2$ yazılır. ebob $(b_1, b_2) = d$, D de birimdir. Bu durumda

$a_1D + a_2D = db_1D + db_2D \subset dD$ olur. $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} D$ bir mda ve $PE_D(D^2, \mathcal{P}) = M_D(D^2)$ olduğundan

4.3.7. den $D = I(b_1, b_2) = b_1D + b_2D$ yazılır. b_1, b_2 aralarında asal olduğundan $1 = b_1c_1 + b_2c_2, d = b_1c_1d + b_2c_2d = db_1c_1 + db_2c_2 = a_1c_1 + a_2c_2 \in a_1D + a_2D$, böylece D bir TİB olur.

4.3.7 nin başka bir uygulaması olarak şu sonucu yazalım.

4.3.9. Sonuç: D bir tamlık bölgesi, $p \in D$ bir asal eleman ve $0 \neq b \in D$ olsun; öyle ki

$$pD \subsetneq pD + bD \subsetneq D$$

Bu durumda $PE_D(D^2, \mathcal{P}) \neq M_D(D^2)$ dır.

İspat: p bir asal ve $pD \subsetneq pD + bD$ olduğundan $\begin{bmatrix} p \\ d \end{bmatrix} D, D^2$ de bir mda dır. Çünkü $\begin{bmatrix} p \\ d \end{bmatrix} D$ bir mda olmasaydı $(p, d) = p$ olup, $d = kd$, $k \in D$ olarak yazılabilirdi. Bu durumda da $dD = pkD \subseteq pD$ olup $pD + dD = pD$ eşitliği verilene aykırıdır. $c \in \mathcal{K}_1(p, b)$ olsun. Bir $d \in D$ için $pd = bc$ ve $p|bc$ olur. Fakat p, b yi bölmediğinden $p|c$ olup $c \in pD$; yani $\mathcal{K}_1(p, b) = pD$ yazılır. 4.3.3. den $PE_D(D^2, \mathcal{P}) \neq M_D(D^2)$ dir. (Maxson and Walt, 1992) de bir örnek ile $M_D(D^2) \neq PE_D(D^2, \mathcal{P})$ olan D tamlık bölgelerinin varlığını gösterir.

(Maxson, 1992) da $n=2,3,4,\dots$ için

$$\mathcal{PF}_n = \{ D \text{ tamlık bölgeleri} \mid M_D(D^2) = PE_D(D^2, \mathcal{P}) \}$$

tamlık bölgeleri sınıfı tanımlanmıştır. 4.3.9. kullanılarak $\mathcal{PF}_2$ ye ait olmayan üç örnek şöyledir.

4.3.10. Örnek: F bir cisim $J = \{f \in F[X, Y] \mid f(0, Y) = 0\}$; $F[X, Y]$ nin bir temel idealidir. Bu ideal asal fakat maksimal değildir; çünkü $F[X, Y]/J \cong F[Y]$ cisim değildir.

Yani $J \subsetneq (J, Y^2) \subsetneq F[X, Y]$ dir. Böylece $J \notin \mathcal{PF}_2$ dir.

4.3.11. Örnek: F bir cisim ise $F[X, Y]$ polinom halkalarında X , maksimal olmayan bir asal ideal üretir. O halde 4.3.9 den $F[X, Y] \notin \mathcal{PF}_2$. Her iki örnekteki bölge bir TİB değildir.

Noetherian tek türlü çarpanlara ayrılabilme bölgeleri sınıfına inildiğinde $n = 2, 3, \dots$ için 4.2.8. den

$$D \in \mathcal{PF}_n \Leftrightarrow D, \text{ TİB}$$

olup. $\mathcal{PF}_n$ ye ait Noetherian bölgelerin TİB olması gerektiği anlaşılır.

4.3.12.Örnek: $D=\mathbb{Z}_2[x^2, x^3]$ tamlık bölgesinde $p=x^2$ bir asal eleman olup

$x^2D \subset x^2D+x^3D \subset D$ ve x^2 bir maksimal ideal üretmez. O halde 4.3.9 dan

$PE_D(D^2, \mathcal{P}) \neq M_D(D^2)$ olup $D \notin \mathcal{PF}_2$ dir.

$\mathcal{PF}_n$ lerin kendi aralarında ilişkisi şöyle verilebilir.

4.3.13. Teorem: $n \geq m$ için $\mathcal{PF}_n \subseteq \mathcal{PF}_m$ dir.

İspat: D bir tamlık bölgesi ve $D \in \mathcal{PF}_m$ olsun. $D \in \mathcal{PF}_n$ olduğunu göstermek yeter.

$D \in \mathcal{PF}_m$ olduğundan bir $f \in M_D(D^m)$ için $f \in PE_D(D^m, \mathcal{P})$ dir. Bunun anlamı, bir

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} D \in D^m$, mda için $f|_A$ kısıtlanmış homojen fonksiyonu $M_m(D)$ den bir matrisle temsil olunamaz.

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, D^m de bir mda ürettiğinden $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü de D^n de bir mda üretir. Ayrıca $r \neq 0 \neq s$

için $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} s \Rightarrow b_{m+1} = \dots = b_n = 0$ olduğundan f yi bir $\hat{f} \in M_D(D^n)$ ye

genişletebiliriz, yani $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ biçimindeki vektörlerce üretilen mda larda $\hat{f} = f$ ve diğer

mda larda $\hat{f} = 0$ dir.

$D \notin P\mathcal{F}_n$ olduğundan f , A üzerinde bir matrisle temsil olunamaz. Dolayısıyla $\hat{f}$ da A üzerinde bir matrisle temsil olunamaz. O halde $D \notin P\mathcal{F}_n$ dir.

Burada her n için $P\mathcal{F}_n \subseteq P\mathcal{F}_2$ olduğu açıktır.

4.3.14.Sonuç: D bir Noetherian TÇB ise aşağıdakiler denktir.

- 1) Her $n \in \{2, 3, \dots\}$ için $D \in P\mathcal{F}_n$;
- 2) $D \in P\mathcal{F}_n$ olacak şekilde $n \in \{2, 3, \dots\}$ vardır;
- 3) D bir TİB dir.

İspat:

$3 \Rightarrow 1$: 4.3.7 den , D bir TİB ise her $n = 2, 3, \dots$ için $D \in P\mathcal{F}_n$ dir.

$1 \Rightarrow 2$: aşıkardır.

$2 \Rightarrow 3$: 4.3.13 den çıkar

(Maxson and Walt, 1992) da $n=2, 3, \dots$ için $P\mathcal{F}_2 \subseteq P\mathcal{F}_n$ bağıntısının doğru olup olmadığı sorulmaktadır. Çalışmamızın bu son kısmında bu bağıntının $n=3$ olması durumunda doğru olup olmadığını araştıracağız.

$D \in P\mathcal{F}_2$ ve $G_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ D , D^2 de bir mda ve $f: D^3 \rightarrow D^3$ bir homojen fonksiyon

olsun, ve $f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ olarak verilsin. (x_1, x_2, x_3) ün herhangi iki bileşeni, söz gelimi, x_1

ile x_2 , D de aralarında asal ise bu durumda $G_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ D , D^2 de bir mda dır. Şimdi G_{α_1} de

$f_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ile verilen $f_1: D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonu homojen olup $f_1 \in M_D(D^2)$ dir. $D \in$

$\mathcal{PF}_2$ olduğundan $M_D(D^2) = PE_D(D^2, \mathcal{P})$ eşitliği vardır. Dolayısıyla

$f_1 \in M_D(D^2) = PE_D(D^2, \mathcal{P})$ dir. $f_1 \in PE_D(D^2, \mathcal{P})$ ve $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D, D^2$ için bir mda olduğundan

$f_1, M_2(D)$ den bir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi ile temsil edilir:

$$f_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Uygun $a_1, a_2 \in D$ için $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$ olup $a_1c_3x_1 + a_2c_3x_2 = c_3$ dir.

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ a_1c_3 & a_2c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ve $f, M_3(D)$ den bir matrisle temsil olunur.

(x_1, x_2, x_3) ün diğer bileşen çiftleri olan (x_1, x_3) ile (x_2, x_3) den herhangi biri aralarında asal olduğunda yukarıdakine benzer şekilde f nin $M_3(D)$ den bir matrisle temsil olunacağı gösterilebilir. Ancak, (x_1, x_2, x_3) ün aralarında asal herhangi bir bileşen çifti yoksa (örneğin D de farklı p_1, p_2, p_3 asalları için $(p_1, p_2, p_1p_3, p_2p_3)$ vektörü gibi) bu durumda f yi bir 3×3 matrisle temsil etmek yukarıdaki gibi kolay gözükmemektedir. Dolayısıyla

$\mathcal{PF}_2 \subseteq \mathcal{PF}_3$ bağıntısının bile doğruluğu yeni bir araştırma konusu olacaktır.

KAYNAKLAR

- Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1973. Rings and categories of Modules, Graduate Texts in Math. vol. 13, New York. Heidelberg, Berlin, springer-verlag.
- Fuchs, P. Maxson, C.J., and Pilz, G. 1991. On rings for which homogeneous maps are linear, Proc.Amer. Math. Soc. 112, 1-7.
- Jacobson, N. 1943. The theory of Rings, surveys, vol 2. Amer. Math. Soc. Providence.
- Jacobson, N. 1964. Structure of rings. Amer. Math. Soc. collage publ. vol. 37, Amer. Math. Soc. Providence, RI
- Görentaş, N. ve YILDIZ, M. 1993. VI. Ulusal Matematik Sempozyumu. Gazi Magosa, Kıbrıs.
- L.H. Rowen, 1988. Ring theory, vol. I. Math. vol. 127, Academic press. San Diego.
- Maxson, C.J. and Smith, K.C. 1979. Simple near-ring centralizers of finite rings, Proc. Amer. Math. Soc. 75, 8-12.
- Maxson, C.J. 1985. Near-rings associated with generalized translation structures, Journal of Geometry, 24, 175-193.
- Maxson, C.J. 1990. Piecewise Endomorphisms of PID Modules, Results in Mathematics Vol. 18, 125-132.
- Maxson, C.J. and Smith, K.C. 1990. Centralizer near-rings that are endomorphism rings, Proc. Amer. Math. Soc. 80, 189-195.
- Maxson, C.J. and Wyk. L. Van, 1990. Near-ring of invariants, results in Mathematics vol. 18.

- Maxson, C.J. and Vander Walt, A.P.S. 1991. Centralizer near-rings over free ring modules, journal Austr.Math. Soc. 50, 279-296.
- Maxson, C.J. and Vander Walt, A.P.J. 1991. Piecewise endomorphisms of ring modules. Questions Math. 14, 419-431.
- Maxson, C.J. and Fuchs. P. 1991. centralizer near-rings determined by PID Modules Arch. Math. Vol. 56, 146-147.
- Maxson, C.J. and Vander Walt, A.P.J. 1992. Homogeneous maps as piecewise endomorphisms, communications in Algebra, 20(9), 2755-2776.
- Maxson, C.J., 1992. Near-rings of piecewise Endomorphism Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien verlag B.G. Taubner, Stuttgart, 177-187.
- Maxson, C.J. and van der Walt, A.P.J. 1992. Piecewise endomorphisms of rings Modules. communications in Algebra, 20(9), 2860-2869.
- Maxson, C.J. 1993. Near-rings of Invariants II, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 117, No: 1.
- Pilz, G.F. 1983. Near-rings 2nd ed. North Holland, Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında Van'ın Gevaş ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini Gevaş'ta tamamladı. 1983 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 1987 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Akyazıya öğretmen olarak atandı. 1988 yılında mezun olduğu Üniversitede araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1990 yılında yüksek lisansını tamamladı ve doktora başladı. 15.4.1994'de Gevaş Meslek Yüksekokulu Müdürlüğünü tedviren yürütmek üzere atandı. Evli ve üç çocuk babasıdır.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM
DOKÜMANTASYON MERKEZİ