



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZAYIFÇA SÜREKLİLİĞİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

BUKET SALTİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü

DANIŞMAN
Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2021



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZAYIFÇA SÜREKLİLİĞİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

BUKET SALTİK

(520917009)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü

DANIŞMAN
Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2021

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi
Buket SALTİK'ın "Zayıfça Sürekliliğin Bazı Genelleştirmeleri" başlıklı
tez çalışması, 02.09.2021 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından
başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Uğur ŞENGÜL (Danışman)

Marmara Üniversitesi(İMZA).....

Doç.Dr. Ayşe Füsün NURCAN (Üye)

Marmara Üniversitesi(İMZA).....

Dr. Öğr. Üyesi Nigar TUNCER (Üye)

Bilgi Üniversitesi(İMZA).....

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
sayılı kararı ile Buket SALTİK'ın Teorik Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans
derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Bülent EKİCİ

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL yönetiminde yapılmış ve Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur. Bu konuyu bana veren ve çalışma süresince değerli katkılarıyla yardımını esirgemeyen, her konuda yönlendiren hoşgörü ve sabır gösteren değerli hocam Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL'e teşekkür ederim.

Eylül 2021

Buket SALTİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALARI	v
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. θ -Açık Kümeler ve Faint Süreklilik Kavramı	1
1.2. Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar, Temel Bilgiler	8
BÖLÜM 2. FAINTLY (θ_μ, λ) -SÜREKLİ FONKSİYON	15
2.1. Faintly (θ_μ, λ) -Sürekliliğin Karakterizasyonları	15
2.2. Faintly (θ_μ, λ) -Sürekliliğin Özellikleri	18
2.3. $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -Kapalı Grafikler	23
BÖLÜM 3. FAINTLY $(\mu g, \lambda)$ -SÜREKLİ FONKSİYON	27
3.1. Faintly $(\mu g, \lambda)$ -Sürekliliğin Karakterizasyonları	27
3.2. Faintly $(\mu g, \lambda)$ -Sürekliliğin Özellikleri	30
BÖLÜM 4. FAINTLY (δ_μ, λ) -SÜREKLİ FONKSİYON	35
4.1. Faintly (δ_μ, λ) -Sürekliliğin Karakterizasyonları	35
4.2. Faintly (δ_μ, λ) -Sürekliliğin Özellikleri	38
4.3. (δ_μ, λ) -Kapalı Grafikler	43
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

ZAYIFÇA SÜREKLİLİĞİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Velicko tarafından tanımlanan topolojik uzayların θ -modifikasyonundan hareketle tanımlanan θ -açık küme kavramı aracılığıyla Paul Long tarafından faint süreklilik kavramı tanıtılmıştır. Bu fonksiyon tipinin çeşitli genelleştirilmiş açık küme tiplerinin kullanan farklı varyasyonları oldukça çalışılmış hatta bu varyasyonların genelleştirilmeleri de yapılmıştır. Çalışmada bu genelleştirmelerin özel bir durumu ve farklı genellemeleri elde etmeye çalışıldı.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez çalışmamız için gereken ön bilgi ve kavramlar verildi. Konunun gelişiminde çalışılmış bazı genelleştirilmiş açık küme tipleri ve bazı özel süreklilik kavramları hatırlatılarak, θ -açık kümeler ve faint süreklilik özetlenmiştir.

Genelleştirilmiş açık küme tiplerinin çoğu genelleştirilmiş bir topoloji oluşturduğundan faint süreklilik kavramlarının genellemesi için Roy tarafından bu kavram kullanılmıştır. Bu çalışmayı takip ederek bazı sonuçlar elde etmeye çalışılmıştır. Csaszar tarafından verilmiş genelleştirilmiş topoloji kavramı ile ilgili ihtiyaç duyulacak temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, faintly (θ_μ, λ) -Sürekli Fonksiyon kavramı, bu kavramın karakterizasyonları ve diğer özellikleri verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde sırasıyla, faintly $(\mu g, \lambda)$ -sürekliliği ve faintly (δ_μ, λ) -sürekliliği tanımları verilerek, diğer özellikleri incelenmiştir.

ABSTRACT

SOME GENERALIZATIONS OF FAINT CONTINUITY

Faint continuity concept is written by Paul Long through the concept of θ -open sets defined by the θ -modification of topological spaces defined by Velicko. The different variations of this function type using various generalized open set types have been studied. Generalizations of these variations have also been made. In this study, a special case of these generalizations and different generalizations were tried to be obtained.

This study consists of four chapters.

In the first part, preliminary information and concepts required for our thesis study were given. In the development of the subject that have been studied some generalized open set types and some special continuity concepts reminded θ -open sets and faint continuous summarized.

Since most generalized open set types form generalized topologies, this concept was used by Roy to generalize the concepts of faint continuity. Following this study, some results were tried to be obtained. Basic information about the concept of generalized topology given by Csaszar has been given.

In the second chapter, the concept of faintly-continuous function, the characterizations of this concept and another properties have been given.

In the third chapter and in fourth chapter by giving the definitions of respectively faintly $(\mu g, \lambda)$ -continuity and faintly (δ_μ, λ) -continuity, other properties are examined.

SEMBOLLER VE KISALTMALARI

$\wedge$ ve

$\vee$ veya

$A \setminus B$ fark kümesi

π_α α -ıncı izdüşüm fonksiyonu

$\prod X_\alpha$ X_α kümelerinin Kartezyen çarpımı

(X, τ) Topolojik uzay $A \subseteq X$ için;

$c\ell A$ Topolojik uzayda A nın kapanışı,

$\text{Int}(A)$ Topolojik uzayda A nın içi,

$c\ell_\theta A$ topolojik uzayda A nın θ -yığılma noktalarının kümesi

GT Genelleştirilmiş topolojik uzay

(X, μ) Genelleştirilmiş topolojik uzay $A \subseteq X$ için;

$i_\mu A$ genelleştirilmiş topolojik uzayda A nın içi,

$c_\mu A$ genelleştirilmiş topolojik uzayda A nın kapanışı,

$c_{\theta_\mu}(A)$ A yı içeren θ_μ -kapalı kümelerin arakesiti,

$i_{\theta_\mu}(A)$ A da kapsanan θ_μ -açık kümelerin birleşimi,

$\gamma_{\theta_\mu}(A)$ genelleştirilmiş topolojik uzayda A nın θ_μ -yığılma noktalarının kümesi,

$i_{\mu g}(A)$ A da kapsanan μg -açık kümelerin birleşimi,

$c_{\mu g}(A)$ A yı kapsayan μg -kapalı kümelerin arakesiti

BÖLÜM 1.

1.1. θ -Açık Kümeler ve Faint Süreklilik Kavramı

Topolojik uzayların θ - ve δ - modifikasyonunu ilk olarak Velicko tanıtmış ve çalışmıştır, bu kavramdan yola çıkarak Paul E. Long ve Larry L. Herrington θ -açık kümeler vasıtasıyla faint sürekliliği tanıtmış, özelliklerini çalışmıştır. Bu süreklilik kavramı farklı genelleştirilmiş açık küme tipleri kullanılarak sayısız çalışmaya konu edilmiştir. ([1],[4],[7],[11],[12],[13],[20],[21],[22],[26],[27],[30],[32],[34],[40]) Bu bölümde, topolojik uzaylarda bazı genelleştirilmiş açık küme tiplerinin tanımları, θ -açık kümeler ve bunun farklı genellemelerinin tanımlarını vererek θ -açık kümeler ile ilgili temel bazı kavram ve teoremleri özetleyeceğiz.

Tanım 1.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren tüm kapalı kümelerin kesişimine (A yı içeren en küçük kapalı küme) A nın kapanışı denir ve $c\ell A$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın içerdiği tüm açık kümelerin birleşimine (A nın içerdiği en büyük alt küme) A nın içi denir ve $\text{int}A$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. [17] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subseteq \text{int}(c\ell(A))$ ise, A ön-açık alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.4. [14] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subseteq c\ell(\text{int}(A))$ ise, A yarı-açık alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.5. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A alt kümesi $A \subseteq \text{cl}(\text{int}(c\ell(A)))$ şartını gerçekleştiriyor ise, yarı-ön açık [3] (β -açık) [24] alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.6. [2] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subseteq c\ell(\text{int}(A)) \cup \text{int}(c\ell(A))$ şartı gerçekleştiriyor ise A , b-açık alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.1.7. [3] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren yarı-kapalı kümelerin kesişimi A nın yarı-kapanışı olarak tanımlanır ve $sc\ell(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.8. [3] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren ön-kapalı kümelerin kesişimi A nın ön-kapanışı olarak tanımlanır ve $pc\ell(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9. [3] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren yarı-ön-kapalı kümelerin kesişimi A nın yarı-ön-kapanışı olarak tanımlanır ve $\beta c\ell(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.10. [2] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren b -kapalı kümelerin kesişimi A nın b -kapanışı olarak tanımlanır ve $bc\ell(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. [39] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in X$, x noktasını içeren her U açık kümesi için $c\ell U \cap A \neq \emptyset$ şartı sağlanıyorsa, A nın θ -yığılma noktası [H. Velicko] olarak isimlendirilir. A nın θ yığılma noktalarının kümesi A nın θ -kapanışı olarak isimlendirilir ve $c\ell_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer $A = c\ell_\theta A$ ise A kümesi θ -kapalı alt küme [39] olarak isimlendirilir. A. Csaszar $c\ell_\theta A$ yerine $\gamma_\tau(A)$ gösterilişini kullanmış ve $c\ell_\theta A$ gösterilişinin A kümesini içeren θ -kapalı kümelerin arakesiti için kullanılmasının daha uygun olduğunu belirtmiştir. θ -kapalı kümenin bütünleyeni θ -açık küme olarak isimlendirilir. A da kapsanan tüm θ -açık kümelerin birleşimi A nın θ -içi olarak isimlendirilir ve $int_\theta A$ ile gösterilir

Tanım 1.1.12. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Benzer şekilde $x \in X$, x i içeren her U yarı-açık (sırasıyla ön-açık, yarı-ön-açık, b -açık) kümesi için $sc\ell U \cap A \neq \emptyset$, (sırasıyla $pc\ell U \cap A \neq \emptyset$, $\beta c\ell U \cap A \neq \emptyset$, $bc\ell U \cap A \neq \emptyset$) şartı sağlanıyorsa, A nın yarı- θ -yığılma [16], (sırasıyla ön- θ -yığılma [9], yarı-ön- θ -yığılma [25], b - θ -yığılma [28]) noktası olarak isimlendirilir. A nın yarı- θ -yığılma (sırasıyla ön- θ -yığılma, yarı-ön- θ -yığılma, b - θ -yığılma) noktalarının kümesi A nın yarı- θ -kapanışı [16] (sırasıyla ön- θ -kapanışı [9], yarı-ön- θ -kapanışı [25], b - θ -kapanışı [28]) olarak isimlendirilir ve $sc\ell_\theta(A)$, (sırasıyla $pc\ell_\theta(A)$, $\beta c\ell_\theta(A)$, $bc\ell_\theta(A)$) ile gösterilir.

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ için, A nın θ -kapanışı; $\forall x \in X$ için x in her kapalı komşuluğu ile A nın arakesiti boştan farklı bir küme olarak tanımlanır ve $c\ell_\theta A$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.13. Eğer $sc\ell_\theta A = A$ şartı sağlanırsa, (sırasıyla gösterimleri; $A = pcl_\theta A$, $A = \beta c\ell_\theta A$, $A = bc\ell_\theta A$) A yarı- θ -kapalı (sırasıyla ön- θ -kapalı, β - θ -kapalı, b- θ -kapalı) olarak isimlendirilir. Yarı- θ -kapalı [16] (sırasıyla ön- θ -kapalı [19] , β - θ -kapalı [25], b- θ -kapalı [28]) kümenin bütünleyeni yarı- θ -açık [16] (sırasıyla ön- θ -açık [9] , β - θ -açık [25], b- θ -açık [28]) küme olarak isimlendirilir.

(X, τ) topolojik uzayında tüm yarı-açık (sırasıyla ön-açık, β -açık, b-açık), kümelerin topluluğu $SO(X)$ (sırasıyla $PO(X)$, $\beta O(X)$, $BO(X)$ ya da $\gamma O(X)$) ile gösterilir.

Tanım 1.1.14. (θ -iç) [15] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın θ -içi ($=Int_\theta A$); A nın, A da kapsanan kapalı komşuluklara sahip noktalarının kümesine eşittir. $X \setminus F \in \tau$ ise F topolojide kapalı olduğundan $Int_\theta A$ aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$$Int_\theta A = \{x \in A : (\exists F : (x \in F \subseteq A) \wedge (X \setminus F \in \tau))\}$$

Tanım 1.1.15. [15] Bir $A \subset X$ kümesinin θ -içinin tanımı aracılığıyla (X, τ) üzerinde yarı regüler topoloji ile ilişkili yeni bir topoloji tanımlanacaktır. Yarı-regüler topoloji τ_s ile gösterilir ve (X, τ) üzerindeki tüm regüler açık kümelerin ailesini taban kabul eden topolojidir. Hatırlatma olarak bir A kümesi regüler açık ise $Int(c\ell(A)) = A$ sağlanır. Özel olarak herhangi bir A kümesi için $Int(c\ell(A))$ daima regüler-açıktır.

Tanım 1.1.16. [15] (X, τ) da bir U açık kümesi eğer $Int_\theta U = U$ ise, θ -açık küme olarak isimlendirilir.

θ -kapalı kümelerin tanımından hareketle bir θ -açık kümenin tümleyeni θ -kapalıdır ve θ -kapalı kümenin tümleyeni θ -açıktır [39]. θ -kapalı kümelerin kesişimleri θ -kapalıdır. θ -kapalı kümelerin sonlu birleşimleri yine θ -kapalıdır. Böylece θ -açık kümelerin sonlu kesişimleri ve keyfi birleşimleri θ -açıktır. Sonuç olarak (X, τ) da θ -açık kümelerin topluluğu X üzerinde τ_θ topolojisi oluşturur. Sonuçta $\tau = \tau_\theta$ için gerek ve yeter şart (X, τ) regüler olmasıdır.

Teorem 1.1.17. [15] X bir topolojik uzay olsun. Eğer $V \subset X$ alt kümesi θ -açık ve $x \in V$ ise o zaman $x \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde regüler açık U kümesi vardır.

İspat: V, θ -açık olduğundan $x \in V$ ise $x \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde açık U kümesi vardır. Fakat $Int(c\ell(U)) = U^*$ kümesi regüler açıktır ve

$$c\ell(U^*) = c\ell(Int(c\ell(U))) \subset c\ell(U) \subset V$$

olduğundan $x \in U^* \subset c\ell(U^*) \subset V$ sağlanır. $\square$

Teorem 1.1.17 nin Sonucu: V kümesinin θ -açık olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in V$ için $x \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde regüler açık U kümesi var olmasıdır.

Teorem 1.1.17 ye göre herhangi bir topolojik uzayda $\tau_\theta \subset \tau_s$ sağlanır. Ters yöndeki kapsama doğru olmak zorunda değildir.

Teorem 1.1.18. [15] $A \subset X$ alt kümesi, θ -kapalı ve $x \notin A$ olsun. O zaman x noktasını ve A kümesini ayıran regüler açık kümeler vardır.

İspat: $X \setminus A$, θ -açık kümedir ve x i içerir Teorem 1.1.17 den $x \in U \subset c\ell(U) \subset X \setminus A$ gerçekleyen regüler açık $U (= Int(c\ell(U)))$ kümesi vardır.

$$c\ell(U) \subset X \setminus A \Rightarrow A \subset X \setminus c\ell(U) \text{ ve}$$

$$X \setminus c\ell(U) \subset c\ell(X \setminus c\ell(U)), X \setminus c\ell(U) \text{ açık olduğundan}$$

$$(X \setminus c\ell(U)) = Int(X \setminus c\ell(U)) \subset Int(c\ell(X \setminus c\ell(U)))$$

$\Rightarrow$

$$A \subset X \setminus c\ell(U) \subset Int(c\ell(X \setminus c\ell(U)))$$

geçerlidir ve $Int(c\ell(X \setminus c\ell(U)))$ regüler açıktır. Ayrıca

$$X \setminus c\ell(U) \subset X \setminus U \Rightarrow c\ell(X \setminus c\ell(U)) \subset c\ell(X \setminus U) = X \setminus U$$

$\Rightarrow$

$$Int(c\ell(X \setminus c\ell(U))) \subset c\ell(X \setminus c\ell(U)) \subset X \setminus U$$

olduğundan

$$Int(c\ell(X \setminus c\ell(U))) \cap U \subset (X \setminus U) \cap U = \emptyset$$

gerçeklenir, yani $\text{Int}(c\ell(X - c\ell(U)))$ boştan farklı ve regüler açıktır, A yı içerir ve U dan ayrıktır. $\square$

Tanım 1.1.19. [38] (Hemen Hemen Regüler Uzak) Bir (X, τ) uzakı ve bu uzakda seçilen $\forall x \in X, (\notin A)$ nokta ve (noktayı içermeyen) regüler kapalı küme çiftine, $x \in U$ ve $A \subset V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık küme çifti karşı getirilebiliyorsa hemen hemen regüler uzak olarak isimlendirilir.

Teorem 1.1.20. [15] X hemen hemen regüler olsun. O zaman X teki her regüler açık küme θ -açıktır.

İspat: X hemen hemen regüler olduğundan, [38] de Teorem 2.2 ye göre X de her regüler açık V kümesi ve $x \in V$ için $x \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde regüler açık bir U kümesi vardır. Böylece V nin her noktası V de içeren kapalı bir komşuluğa sahiptir. $(V, \theta$ -açıktır.) $\square$

Teorem 1.1.20 nin Sonucu: (X, τ) hemen hemen regüler ise $\tau_s = \tau_\theta$ dır.

İspat: Teorem 1.1.20 den $\tau_s \subset \tau_\theta$ sağlanır ve Teorem 1.1.17 den $\tau_\theta \subset \tau_s$ dir ve böylece $\tau_s = \tau_\theta$ dır. $\square$

Teorem 1.1.21 [15] (X, τ) uzakının hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart $\tau_s = \tau_\theta$ olmasıdır.

İspat: (X, τ) hemen hemen regüler ise $\tau_s = \tau_\theta$ dır (Teorem 1.1.20 nin sonucundan). Tersine $\tau_s = \tau_\theta$ ise $V, (X, \tau)$ da regüler açık bir küme ve $x \in V$ olsun. O zaman V kümesi θ -açıktır ve Teorem 1.1.17 den $x \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde regüler açık bir U kümesi vardır. Sonuç olarak (X, τ) [38] de Teorem 2.2 den hemen hemen regülerdir. $\square$

Teorem 1.1.22. [15] (X, τ) ve (Y, ϕ) iki topolojik uzak olsun. Eğer $U \subset X$ ve $V \subset Y, \theta$ -açık ise, o zaman $U \times V, X \times Y$ de θ -açıktır.

İspat: $(x, y) \in U \times V$ olsun. O zaman U ve V kümeleri θ -açık olduğundan, $x \in U_1 \subset c\ell(U_1) \subset U$ ve $y \in V_1 \subset c\ell(V_1) \subset V$ olacak şekilde U_1 ve V_1 açık kümeleri vardır, Böylece

$$(x, y) \in c\ell(U_1) \times c\ell(V_1) = c\ell(U_1 \times V_1) \subset U \times V.$$

gerçeklenir. Sonuç olarak $U \times V$ nin her noktası $U \times V$ de içeren kapalı bir komşuluğa sahiptir, bu da $U \times V$ nin, θ -açık olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 1.1.23. [15] $W, \prod X_\alpha$ çarpım uzayında θ -açık küme olsun. O zaman her $\pi_\alpha(W)$ θ -açıktır.

İspat: $y_\alpha \in \pi_\alpha(W)$ ve $\{y_\alpha\}, \pi_\alpha(\{y_\alpha\}) = y_\alpha$ olacak şekilde W de bir nokta olsun. W, θ -açık olduğundan

$$\{y_\alpha\} \in U \subset c\ell(U) = c\ell(U_{\alpha_1}) \times c\ell(U_{\alpha_2}) \times \dots c\ell(U_{\alpha_n}) \times \prod X_\alpha \subset W$$

olacak şekilde bir

$$U = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \dots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} X_\alpha \subset W$$

açık kümesi vardır. Bir $1 \leq j \leq n$ için $a = a_j$ almak genelliği bozmaz, böylece

$$y_\alpha \in \pi_\alpha(c\ell(U)) = c\ell(U_{\alpha_j}) \subset \pi_\alpha(W)$$

sağlanır ve sonuç olarak $\pi_\alpha(W)$ nin her noktası $\pi_\alpha(W)$ da uzanan kapalı bir komşuluğa sahip olduğundan $\pi_\alpha(W)$ θ -açıktır. $\square$

Teorem 1.1.24. [15] $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu hem açık hem kapalı ise o zaman f, θ -açık kümeleri korur.

İspat: U, X de θ -açık ve $y \in f(U)$ olsun. $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in U$ vardır ve U, θ -açık olduğundan $x \in U_0 \subset c\ell(U_0) \subset U$ olacak şekilde U_0 açık kümesi vardır. Böylece

$$f(x) = y \in f(U_0) \subset f(c\ell(U_0)) \subset f(U)$$

sağlanır f hem açık hem de kapalı fonksiyon olduğundan

$$c\ell(f(U_0)) \subset c\ell(f(c\ell(U_0))) = f(c\ell(U_0))$$

gerçeklenir, yani $f(U_0)$ kapanışı, $f(U)$ da içeren bir açık kümedir.

Sonuç olarak $f(U), \theta$ -açıktır. $\square$

Teorem 1.1.25. [15] $f : X \rightarrow Y$ sürekli olsun. Eğer $V \subset Y, \theta$ -açık ise $f^{-1}(V), X$ de θ -açıktır.

İspat: $x \in f^{-1}(V)$ olsun. O zaman $f(x) \in V$ ve V, θ -açık olduğundan $f(x) \in U \subset c\ell(U) \subset V$ olacak şekilde açık U açık kümesi vardır. Böylece

$$x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(c\ell(U)) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow$$

$$x \in f^{-1}(U) \subset c\ell(f^{-1}(U)) \subset c\ell(f^{-1}(c\ell(U))) = f^{-1}(c\ell(U)) \subset f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(U) \subset c\ell(f^{-1}(U)) \subset f^{-1}(V)$$

geçerlidir. f in sürekliliğinden $f^{-1}(U)$, kapanışı $f^{-1}(V)$ de kapsanan açık bir kümedir, yani $f^{-1}(V)$ θ -aşıktır. $\square$

Tanım 1.1.26. [15] (Faintly-Süreklî Fonksiyon) X ve Y iki topolojik uzay olsun $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, $f(x)$ i içeren her bir θ -açık V kümesine karşılık x i içeren U -açık kümesi $f(U) \subset V$ olacak şekilde varsa, x noktasında faintly-süreklidir. Eğer $f, \forall x \in X$ noktasında bu koşulu gerçekleştiriyorsa f fonksiyonuna faintly-süreklî (kısaca f.s.) fonksiyon denir.

Teorem 1.1.27. [15] $f: X \rightarrow Y$ verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- a) $f: X \rightarrow (Y, \tau)$ f.s.
- b) $f: X \rightarrow (Y, \tau_\theta)$ süreklidir.
- c) (Y, τ) da her θ -açık kümenin ters görüntüsü X de açıktır.
- d) (Y, τ) da her θ -kapalı kümenin ters görüntüsü X de kapalıdır.

İspat:

a) $\Rightarrow$ c): V, Y de θ -açık küme ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(x) \in V$ ve f f. s. olduğundan X de x i içeren U -açık kümesi $f(U) \subset V$ olacak şekilde vardır. O zaman $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ bu ise $f^{-1}(V)$ nin her noktası iç nokta demektir, yani $f^{-1}(V)$ açıktır.

a) $\Rightarrow$ b): $x \in X$ ve V, Y de $f(x)$ i içeren bir τ_θ -açık küme olsun, yani $V \in \tau_\theta$ ise, V $f(x)$ i içeren bir θ -açık bir kümedir, (a) dan X de x i içeren bir U -açık kümesi $f(U) \subset V$ olacak şekilde vardır. x keyfi seçildiğinden f her noktada süreklî olma koşulunu gerçekler, yani $f: X \rightarrow (Y, \tau_\theta)$ süreklidir.

b) $\Rightarrow$ c): V Y de θ -açık küme ise, $V \in \tau_\theta$ dır ve (b) den $f: X \rightarrow (Y, \tau_\theta)$ süreklî olduğundan $f^{-1}(V)$, X de açıktır.

c)⇒d): F, Y de bir θ -kapalı küme olsun. $Y \setminus F$ bir, θ -açık küme olduğundan, (c) den $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ açık alt kümedir, dolayısıyla $f^{-1}(F)$ kapalıdır.

d)⇒a): $x \in X$ ve V, Y de $f(x)$ i içeren bir θ -açık küme olsun. $Y \setminus V, Y$ de θ -kapalıdır. (d) den $f^{-1}(Y \setminus V), X$ de kapalı ve $X \setminus f^{-1}(V)$ ise X de açıktır. $x \in U = f^{-1}(V)$ için x i içeren açık bir kümedir ve $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ geçerlidir. f, x noktasında faintly sürekli ise x , keyfi seçildiğinden f fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında bu koşulu gerçekleştiriyor demektir. O halde f fonksiyonu f. s. dir. $\square$

1.2.Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar

Topolojik uzay kavramı da farklı yaklaşımlarla genelleştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan biri Csaszar'ın genelleştirilmiş topoloji kavramıdır.

Tanım 1.2.1. [5] $X \neq \emptyset$ ve $\exp X, X$ in kuvvet kümesi olmak üzere

$\mu(\subseteq \exp X)$ alt ailesi $\emptyset \in \mu$ ve $\forall \mathcal{G} \subseteq \mu$ için $\cup \mathcal{G} \in \mu$ gerçekleştiriyorsa X üzerinde genelleştirilmiş topoloji (GT) ya da genelleştirilmiş topolojik uzay olarak isimlendirilir.

Bazı genelleştirilmiş açık küme tipleri (b-açık kümeler gibi) bir genelleştirilmiş topoloji oluşturur. Süreklilik tiplerinin unifikasyonu için ilk kez Csaszar tarafından tanıtılan genelleştirilmiş topoloji kavramı kullanılabilir.

Bir X kümesi üzerindeki μ genelleştirilmiş topolojisi ile birlikte genelleştirilmiş topolojik uzaydır. (kısaca GTS) ve (X, μ) ile gösterilir.

$A \subset X$ olsun. A da içeren μ -açık kümelerin birleşimi $i_\mu A$ ile gösterilir. (A da içeren en büyük μ -açık küme) ve A yı içeren tüm μ -kapalı kümelerin kesişimi ise $c_\mu A$ ile gösterilir. Ayrıca $i_\mu(X - A) = X - c_\mu A$ eşitliği sağlanır.

c_μ ve i_μ , monoton ve idempotent küme işlemci olmak üzere;

$\gamma : \exp X \rightarrow \exp X$ küme işlemcisinin ;

(a) monoton olması için γk : $A \subset B \subset X$ için $\gamma(A) \subset \gamma(B)$ olmasıdır;

(b) idempotent olması için gyk: $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$ olmasıdır. c_μ ve i_μ , monoton ve idempotent küme işlemcileridir.

Lemma 1.2.2. [6] Eğer μ , X üzerinde GT, $A \subset X$, $x \in X$ ise $x \in c_\mu A$ için gyk:

$x \in M \in \mu \Rightarrow M \cap A \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir.

İspat.

$B := \{x \in X : x \in M \in \mu \Rightarrow M \cap A \neq \emptyset\}$

tanımlansın. $A \subset B$ geçerlidir, ayrıca $X \setminus B \in \mu$ gerçekleşir, çünkü

$x \in X \setminus B$ için gyk: $(\exists M_x \in \mu : (x \in M_x) \wedge (M_x \cap A = \emptyset)) (\Rightarrow x \notin A \Rightarrow X \setminus B \subset X \setminus A \Rightarrow A \subset B)$

olmasıdır, bu durumda da $\forall y \in M_x \Rightarrow y \in X \setminus B$ elde edilir, yani

$X \setminus B = \bigcup_{x \in X \setminus B} M_x \in \mu$

geçerlidir. Son olarak eğer $A \subset Q$ ve Q ; μ -kapalı ise $X \setminus Q \in \mu$ ve $(X \setminus Q) \cap A = \emptyset$ olmaktadır, dolayısıyla $X \setminus Q \subset X \setminus B$, $B \subset Q$ geçerlidir. O halde B , A yı içeren en küçük μ -kapalı kümedir, yani $B = c_\mu A$ eşitliği sağlanır.

$\exists U \in \mu : (x \in U) \wedge (A \cap U = \emptyset)$ gerçeklensin. Bu durumda $C = X \setminus U$ kümesi A kümesini içeren ama x noktasını içermeyen bir μ -kapalı kümedir yani $A \subseteq c_\mu A \subseteq C = X \setminus U$ ve $x \notin c_\mu A$ gerçekleşir.

Ayrıca $c_\mu(X \setminus A) = X \setminus A = X \setminus i_\mu(A)$ geçerlidir. $\square$

Tanım 1.2.3. [6] μ , boştan farklı X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. $\theta_\mu = \{A \subset X : \text{eğer } x \in A \text{ ise } x \in M \subset c_\mu(M) \subset A \text{ şartını gerçekleyen bir } M \in \mu \text{ var}\}$ şeklinde tanımlansın.

Önerme 1.2.4. [6] θ_μ ailesi X üzerinde bir genelleştirilmiş topolojidir.

İspat.

$\emptyset \in \theta_\mu$ açıktır. Her $\alpha \in \Delta$ için $A_\alpha \in \theta_\mu$ olmak üzere $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ olsun.

$x \in A \Rightarrow \exists \alpha \in \Delta : x \in A_\alpha \Rightarrow \exists M_\alpha \in \mu : x \in M_\alpha \subset c_\mu(M_\alpha) \subset A_\alpha \subset A \Rightarrow A \in \theta_\mu.$

θ_μ ailesine ait kümeler θ_μ -açık olarak adlandırılır ve θ_μ -açık kümenin bütünleyeni θ_μ -kapalı küme olarak adlandırılır. $\square$

Uyarı 1.2.5. [21] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay, $M_\mu = \bigcup \{U : U \in \mu\}$ olsun. $X \notin \mu$ ise $X \setminus M_\mu \neq \emptyset$ olur ve her μ -kapalı küme $X \setminus M_\mu$ kümesini kapsamak zorundadır. Dolayısıyla boştan farklı μ -açık kümenin (X, μ) de açık keyfi bir μ -açık kümenin kapanışını kapsaması mümkün değildir. Dolayısıyla $X \notin \mu$ gerçekleyen bir GT de boş kümeden farklı bir θ_μ -açık küme yoktur. Yani (X, μ) bir GT, $X \notin \mu$ ise $\emptyset \neq U \in \mu$ gerçekleyen U kümesi için $U \in \theta_\mu$ şartını sağlaması mümkün değildir:

$U \in \theta_\mu \Rightarrow x \in U$ ise $x \in M \subset c_\mu(M) \subset U$ gerçekleyen bir $M \in \mu$ var olmalı ama

$U \subset M_\mu \Rightarrow X \setminus M_\mu \subset X \setminus U$

$X \setminus M_\mu \subset c_\mu(M) \subset U \Rightarrow (X \setminus M_\mu) \cap (X \setminus U) \subset U \cap (X \setminus U) = \emptyset$

çelişkisi elde edilir.

Önerme 1.2.6. [6] δ_μ ailesi X üzerinde bir genelleştirilmiş topolojidir.

İspat.

$\emptyset \in \theta_\mu$ açıktır. Her $\alpha \in \Delta$ için $A_\alpha \in \delta_\mu$ olmak üzere $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ olsun.

$x \in A \Rightarrow \exists \alpha \in \Delta : x \in A_\alpha \Rightarrow$

$\exists Q_\alpha : (Q_\alpha \text{ } \mu\text{-kapalı}) \wedge (x \in i_\mu(Q_\alpha) \subset Q_\alpha \subset A_\alpha \subset A) \Rightarrow A \in \delta_\mu. \square$

Teorem 1.2.7. [6] $\theta_\mu \subset \delta_\mu \subset \mu$ gerçekleşir.

İspat.

$A \in \theta_\mu$ olsun. Bu durumda $x \in A$ için bir $M \in \mu$, $x \in M \subset c_\mu(M) \subset A$ gerçeklenmek üzere vardır.

Bu durumda $Q = c_\mu(M)$ μ -kapalıdır ve $M \subset Q$ olduğu aşıkardır (açıktır), dolayısıyla $M \subset i_\mu(Q)$ ve

$x \in i_\mu(Q) \subset Q \subset A$ gerçekleşir, yani $A \in \delta_\mu$ geçerlidir.

$A \in \delta_\mu$ olsun. Bu durumda $x \in A$ için bir μ -kapalı Q_x , $x \in i_\mu(Q_x) \subset Q_x \subset A$ gerçeklenmek üzere vardır. Bu durumda $i_\mu(Q_x) \in \mu$ olduğundan $A = \bigcup_{x \in A} i_\mu(Q_x) \in \mu$ geçerlidir.

$M \in \mu$, $x \in M \subset c_\mu(M) \subset A$ gerçeklenmek üzere vardır. Bu durumda $Q = c_\mu(M)$ μ -kapalıdır ve $M \subset Q$ olduğu aşıkardır, $M \subset i_\mu(Q)$ dolayısıyla

$x \in i_\mu(Q) \subset Q \subset A$ gerçeklenir, yani $A \in \delta_\mu$

$\Rightarrow A \in \theta_\mu$ için $A_\alpha \in \delta_\mu$ olmak üzere $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ olsun.

$x \in A \Rightarrow \exists \alpha \in \Delta: x \in A_\alpha \Rightarrow$

$\exists Q_\alpha : (Q_\alpha \text{ } \mu\text{-kapalı}) \wedge (x \in i_\mu(Q_\alpha) \subset Q_\alpha \subset A_\alpha \subset A) \Rightarrow A \in \delta_\mu. \square$

δ_μ nün Diğer Özellikleri

Tanım 1.2.8. [6] μ , $X (\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde bir GT olsun. $S \subseteq X$ alalım. S kümesi eğer;

$S = i_\mu c_\mu S$ eşitliğini sağlıyorsa μ -regüler açık (kısaca μ -açık) alt küme,

$S = c_\mu i_\mu S$ eşitliğini sağlıyorsa μ -regüler kapalı (kısaca μ -kapalı) alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 1.2.9. [6] μ , $X (\neq \emptyset)$ kümesi üzerinde bir GT olsun.

Császár $\delta_\mu \subseteq 2^X$ alt ailesini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$S \in \delta_\mu$ için $gyk: S \subseteq X$ ve eğer $x \in S$ ise μ -kapalı W kümesinin $x \in i_\mu(W) \subseteq W \subseteq S$ gerçeklenmek üzere var olmasıdır.

Lemma 1.2.10. [6] Eğer W μ -kapalı ise, $i_\mu(W)$ μ -açıktır.

İspat.

$R = i_\mu(W)$ tanımlayalım. $R \subseteq W$ olduğundan $R \subseteq c_\mu(R) \subseteq W$ ve $R \in \mu$ olduğundan

$R \subseteq i_\mu c_\mu(R) \subseteq i_\mu W = R$ geçerlidir. Böylece $R = i_\mu c_\mu(R)$ eşitliği elde edilir. $\square$

Lemma 1.2.11. [6] Eğer $M \in \mu$ ise, $c_\mu(M)$ μ -kapalıdır.

İspat.

$Q = c_\mu(M)$ olsun. Bu durumda $M \subseteq Q \Rightarrow M \subseteq i_\mu(Q) \subseteq Q$ ve Q μ -kapalı olduğundan

$Q = c_\mu(M) \subseteq c_\mu i_\mu(Q) \subseteq c_\mu(Q) = Q$

gerçeklenir. O halde $Q = c_\mu i_\mu(Q)$ gerçeklenir. $\square$

Teorem 1.2.12. [6] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı için δ_μ ailesi μ -açık kümelerin birleşimlerinin ailesi ile çakışır.

İspat.

Eğer R μ -açık ise, $R = i_\mu c_\mu(R)$ geçerlidir, $x \in R$ ise bu μ -kapalı $Q = c_\mu(R)$ kümesi için $x \in i_\mu(Q) = R \subseteq R$ gerçekleştiğinden $R \in \delta_\mu$ sonucunu verir. δ_μ bir GT olduğundan, μ -açık kümelerin birleşimleri δ_μ ye aittir.

Eğer $D \in \delta_\mu$ ve $x \in D$ ise bir μ -kapalı Q_x alt kümesi için $x \in i_\mu(Q_x) = Q_x \subseteq D$ gerçekleşir, bu durumda $i_\mu(Q_x)$, μ -açıktır. 1.2.10 dan $D = \bigcup_{x \in D} i_\mu(Q_x)$ elde edilir. $\square$

Teorem 1.2.13. [6] $S \subseteq X$, $x \in X$, $x \in c_{\delta_\mu} S$ için gyk: x noktasını içeren her μ -açık U kümesi için $U \cap S \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir.

İspat.

δ_μ yine bir GT olduğundan $x \in c_{\delta_\mu} S$ için gyk: x noktasını içeren her $U \in \delta_\mu$ kümesi için $U \cap S \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir. Bu koşulun gerçekleşmesi için de gerek ve yeter koşul x noktasını içeren her μ -açık W kümesi için $W \cap S \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir. $\square$

Önerme 1.2.14. [6] $A \subseteq X$ alt kümesinin δ_μ - kapalı olması için gyk $A = c_{\delta_\mu} A$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

θ_μ nün Diğer Özellikleri

μ , X kümesi üzerinde GT, $A \subseteq X$ olsun. θ_μ - kapalı kümeleri nasıl karakterize edilir? Bunun için $\gamma_\mu(A)$ kümesini ($x \in M \in \mu \Rightarrow c_\mu(M) \cap A \neq \emptyset$) şartını gerçekleyen $x \in X$ noktalarının kümesi olarak tanımlayalım.

Lemma 1.2.15. [6] $\gamma_\mu : \exp X \rightarrow \exp X$ küme işlemcisi monotoniktir.

İspat.

$A \subseteq B \subseteq X$ farzedelim. Eğer $x \in \gamma_\mu(A)$ ise ($x \in M \in \mu \Rightarrow c_\mu(M) \cap A \neq \emptyset$) gerçekleşir, dolayısıyla $c_\mu(M) \cap B \neq \emptyset$ ve $x \in \gamma_\mu(B)$ yani $\gamma_\mu(A) \subseteq \gamma_\mu(B)$ geçerlidir. $\square$

Lemma 1.2.16. [6] $A \subseteq X$ için $A \subseteq \gamma_\mu(A)$ olmaktadır.

İspat.

$x \in A$ ve $x \in M \in \mu$ ise $x \in c_\mu(M) \cap A$ sağlanır. $\square$

Lemma 1.2.17. [6] $A = \gamma_\mu(A) \Leftrightarrow \gamma_\mu(A) \subseteq A$.

Teorem 1.2.18. [6] $A \subseteq X$ alt kümesinin θ_μ - kapalı olması için gerek: $A = \gamma_\mu(A)$ olmasıdır.

İspat.

$A: \theta_\mu$ -kapalı $\Leftrightarrow X \setminus A \in \theta_\mu$

$\Leftrightarrow x \in X \setminus A \Rightarrow (\exists M \in \mu : (x \in M \subseteq c_\mu(M) \subseteq X \setminus A))$

$\Leftrightarrow (x \in X \setminus A \Rightarrow (\exists M \in \mu : (x \in M) \wedge (c_\mu(M) \cap A = \emptyset)))$

$\Leftrightarrow (x \in X \setminus A \Rightarrow x \notin \gamma_\mu(A))$

$\Leftrightarrow X \setminus A \subseteq X \setminus \gamma_\mu(A)$

$\Leftrightarrow \gamma_\mu(A) \subseteq A$ ve $A \subseteq \gamma_\mu(A)$ her zaman doğru olduğundan 1.2.17 den $A = \gamma_\mu(A)$ elde edilir. $\square$

Lemma 1.2.19. [6] $A \subseteq X$ alt kümesi için $\gamma_\mu(A) \subseteq c_{\theta_\mu}(A)$ olmaktadır.

İspat. $x \notin c_{\theta_\mu}(A) \Rightarrow x \in X \setminus c_{\theta_\mu}(A) \Rightarrow \exists T \in \theta_\mu : (x \in T) \wedge (T \cap A = \emptyset)$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\exists M \in \mu: x \in M \subseteq c_\mu(M) \subseteq T$ ve $c_\mu(M) \cap A = \emptyset$ sağlanır, sonuç olarak $x \notin \gamma_\mu(A)$ geçerlidir. $\square$

Uyarı 1.2.20. [6] Bu Lemmanın ifadesindeki $\subseteq, =$ ile değiştirilemez.

Örnek 1.2.21. [6] $X = \{k, l, m\}$ ve $\mu = \{\emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}, X\}$ gözönüne alınsın, μ bir topolojidir.

$\theta_\mu = \{\emptyset, X\}$ ve $\theta_\mu \subseteq \mu$ dür. $A = \{k\}$ için

$k \in A \in \mu$ ve $c_\mu(A) = \{k, m\} \not\subseteq A$

$k \in M \in \mu \Rightarrow A \subseteq M$ ve $c_\mu(A) \not\subseteq A \Rightarrow A \notin \theta_\mu$.

Benzer şekilde $B = \{l\}$ için $l \in B \in \mu$ ve $c_\mu(B) = \{l, m\} \not\subseteq B$ ve

$l \in M \in \mu \Rightarrow B \subseteq M$ ve $c_\mu(B) \not\subseteq B \Rightarrow B \notin \theta_\mu$.

$C = \{k, l\}$ için $k \in C$, $k \in A \in \mu$ ve $c_\mu(A) = \{k, m\} \not\subset C$ ve

$k \in M \in \mu \Rightarrow A \subseteq M$ ve $c_\mu(M) \supset c_\mu(A)$, $c_\mu(M) \not\subset C \Rightarrow C \notin \theta_\mu$

$\emptyset \in \theta_\mu$

ve

$X \in \theta_\mu$, çünkü $x \in X$ için $x \in X \in \mu$ ve $c_\mu(X) = X \subseteq X$

elde edilir.

$A = \{k\}$ için $c_{\theta_\mu}(A) = X$ geçerlidir, ama $l \in B \in \mu$ iken $c_\mu(B) = \{l, m\}$, A ile boş arakesite sahip olduğundan $l \notin \gamma_\mu(A)$ dolayısıyla $\gamma_\mu(A) \neq X$ sağlanır.

Not 1.2.22. Bu kavramlarla ilgili bazı notasyonlar aşağıda listelenmiştir:

$c_{\theta_\mu}(A) = \bigcap \{F \subset X : F \text{ } \theta_\mu\text{-kapalı ve } A \subset F\}$ [19]

$i_{\theta_\mu}(A) = \bigcup \{V \subset X : V \text{ } \theta_\mu\text{-açık ve } V \subset A\}$ [19]

$\iota_{\theta_\mu}(A) = \{x \in X : \text{bir } U \in \mu \text{ için } x \in U \text{ ve } c_\mu(U) \subset A\}$ [32]

$\gamma_\mu(A) = \{x \in X : x \text{ i içeren her } M \in \mu \text{ için } c_\mu(M) \cap A \neq \emptyset\}$ [32]

BÖLÜM 2.

2.1. Faintly (θ_μ, λ) - Sürekli Fonksiyonlar

Faint süreklilik farklı genelleştirilmiş açık küme tipleri kullanılarak çok sayıda makalede genelleştirilmiştir. Alaa. M. F. AL. Jumaili b-açık ve β -açık kümelerin θ -modifikasyonlarını kullanarak faint b- θ -süreklilik ve faint β - θ -süreklilik kavramını tanıtmıştır. Velicko tarafından çalışılan topolojik uzayların δ - ve θ -modifikasyonu kavramı Csaszar tarafından genelleştirilmiş topolojik uzaylara taşınmıştır. Genelleştirilmiş kapalı küme kavramını genelleştirilmiş topolojik uzaylara taşıyan kişi ise Roy'dur. Bilinen genelleştirilmiş süreklilik tiplerinin genelleştirilmiş topolojik uzaylara taşınması da yeni bir araştırma alanıdır. Bu çalışmada öncelikle $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -sürekli (=faintly (θ_μ, λ) -sürekli) fonksiyon (T. Noiri ve V. Popa'nın quasi θ -süreklilik kavramının genelleştirilmesi) kavramı ve özellikleri incelenmiştir. $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -süreklilik, faint b- θ -süreklilik ve faint β - θ -süreklilik kavramlarının genelleştirilmiş topolojik uzaylara genelleştirilmesi ve W. K. Min'in $(\theta(\mu_1, \mu_2), \theta(\sigma_1, \sigma_2))$ -süreklilik kavramının [20] özel durumu olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 2.1.1. (Faintly (θ_μ, λ) -sürekli fonksiyon): (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu, $x \in X$ noktasında $f(x)$ i içeren her bir θ_λ -açık V kümesine karşı X de x i içeren θ_μ -açık U kümesi $f(U) \subset V$ olacak şekilde varsa, faintly (θ_μ, λ) -sürekli fonksiyon (kısaca $(f, (\theta_\mu, \lambda)$ -s.) (ya da $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -sürekli fonksiyon) olarak isimlendirilir. Eğer f her $x \in X$ noktasında bu koşulu gerçekleştiriyorsa $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $f, (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olarak isimlendirilir.

Karakterizasyon

Teorem 2.1.2. (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun. Bir $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $f, f, (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyondur ;
- (ii) Y nin her θ_λ -açık V kümesi için, $f^{-1}(V)$, X de θ_μ -açıktır;
- (iii) Y nin her θ_λ -kapalı F kümesi için, $f^{-1}(F)$, X de θ_μ -kapalıdır;

- (iv) Her $A \subseteq X$ için, $f(c_{\theta_\mu}(A)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ sağlanır;
- (v) Her $B \subseteq Y$ için, $c_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$ sağlanır;

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): V, Y de θ -açık küme ($V \in \theta_\lambda$) ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(x) \in V$ ve f ($\theta_\mu, \theta_\lambda$)-sürekli olduğundan, X de x i içeren θ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde vardır. O zaman

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur. Sonuçta $f^{-1}(V) = i_{\theta_\mu}(f^{-1}(V)) \in \theta_\mu$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : F, Y de θ -kapalı $\Rightarrow Y - F, Y$ de θ -açık olur.

(ii) $\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) \in \theta_\mu$ geçerlidir. $X \setminus (X \setminus f^{-1}(F)) = f^{-1}(F) \theta_\mu$ -kapalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $f(c_{\theta_\mu}(A)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ olduğunu gösterelim:

her $A \subseteq X$ için $f(A) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ ve $c_{\theta_\lambda}(f(A))$ Y de θ -kapalı iii) den $f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))$; X de θ_μ -kapalıdır.

$$\begin{aligned} f(A) \subseteq c_{\theta_\mu}(f(A)) &\Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A))) \\ &\Rightarrow c_{\theta_\mu}(A) \subseteq c_{\theta_\mu}(f^{-1}(f(A))) \\ &\subseteq c_{\theta_\mu}(f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))) = f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A))) \\ &\Rightarrow c_{\theta_\mu}(A) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A))) \\ &\Rightarrow f(c_{\theta_\mu}(A)) \subseteq f(f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A)) \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v): $c_{\theta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f^{-1}(B))$ olduğunu gösterelim:

$B \subseteq Y$ olsun. (iv) den

$$\begin{aligned} f(c_{\theta_\mu}(f^{-1}(B))) &\subseteq c_{\theta_\lambda}(f(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(B) \\ &\Rightarrow f(c_{\theta_\mu}(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(B) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(f\left(c_{\theta_{\mu}}\left(f^{-1}(B)\right)\right)\right) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_{\lambda}}(B))$$

$$\Rightarrow c_{\theta_{\mu}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_{\lambda}}(B))$$

elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (i): $x \in X$ ve V, Y nin $f(x)$ i içeren bir θ_{λ} -açık alt kümesi olsun. $Y \setminus V$, Y de θ_{λ} -kapalı olduğundan, (v) den

$$c_{\theta_{\mu}}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_{\lambda}}(Y \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus V) \Rightarrow$$

$$c_{\theta_{\mu}}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subseteq f^{-1}(Y \setminus V) \text{ elde edilir.}$$

Böylece $f^{-1}(Y \setminus V)$, X de θ_{μ} -kapalıdır ve $f^{-1}(V)$, x i içeren bir θ_{μ} -açık kümedir. Sonuç olarak $U = f^{-1}(V)$ için $f(U) \subseteq V$ sağlanır, bu da gösterir ki f , $f. (\theta_{\mu}, \lambda)$ -s.

fonksiyondur . $\square$

Uyarı 2.1.3. (Y, λ) güçlü GT değilse $\theta_{\lambda} = \{\emptyset\}$ eşitliği sağlanır, dolayısıyla (X, μ) ve (Y, λ) iki GT ve $Y \notin \lambda$ ise her $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $f. (\theta_{\mu}, \lambda)$ -s. fonksiyondur , çünkü $\theta_{\lambda} = \{\emptyset\}$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \theta_{\mu}$ olmaktadır.

2.2. Faintly (θ_μ, λ) - Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Tanım 2.2.1. Bir (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı verilsin. X ten alınan her farklı x, y nokta çiftine karşılık, $x \in U$ ve $y \in V$ şartlarını gerçekleyen U, V ayrık, θ_μ -açık küme çifti bulunabiliyorsa (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı $\theta_\mu - T_2$ uzayı olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$; $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s., birebir ve $(Y, \lambda) \theta_\lambda - T_2$ uzayı ise $(X, \mu); \theta_\mu - T_2$ uzayıdır.

İspat: $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. O halde $f(x)$ ve $f(y)$ Y de iki farklı nokta olur. (Y, λ) , $\theta_\lambda - T_2$ uzayı olduğundan $f(x) \in U$ ve $f(y) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ şartlarını gerçekleyen ayrık θ_λ -açık U ve V küme çifti vardır. Teorem 2.1.2 den $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$; X de θ_μ -açık kümelerdir. $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olduğu açıktır. Yani (X, μ) nün $\theta_\mu - T_2$ uzayı olduğu görülür. $\square$

Tanım 2.2.3 (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı;

$i_1)$ [29] Her μ -kapalı F kümesi, $\forall x \notin F$ kapalı küme ve ona ait olmayan nokta çiftine karşılık μ -açık ayrık U ve V kümeleri $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde varsa μ -regüler olarak,

$i_2)$ Her θ_μ -kapalı F kümesi ve $\forall x \notin F$ için θ_μ -açık ayrık U ve V kümeleri $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde varsa θ_μ -regüler olarak,

$i_3)$ [8] Herhangi ayrık F ve K μ -kapalı kümelerine karşı iki μ -açık, ayrık U ve V kümeleri $F \subseteq U$ ve $K \subseteq V$ olacak şekilde varsa μ -normal olarak tanımlanır.

$i_4)$ Her ayrık F ve K θ_μ -kapalı alt küme çiftine karşılık alt kümelerini içeren iki ayrık θ_μ -açık ayrık U ve V kümeleri $F \subseteq U$ ve $K \subseteq V$ olacak şekilde varsa θ_μ -normal olarak isimlendirilir.

Tanım 2.2.4. (X, σ) topolojik uzayı;

$i_1)$: her F θ_σ -kapalı kümesi ve $\forall x \notin F$ için $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde θ_σ -açık ayrık U ve V kümeleri varsa θ_σ -regüler olarak,

$i_2)$ Her ayrık F ve K θ_σ -kapalı alt küme çiftine karşılık iki ayrık U ve V θ_σ -açık küme çifti $F \subseteq U$ ve $K \subseteq V$ olacak şekilde varsa θ_σ -normal olarak isimlendirilir.

Roy' un "On Faintly Continuous Functions Via Generalized Topology" makalesinden hareketle aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 2.2.5. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu, eğer X teki her θ_μ -açık V kümesi için $f(V) \in \theta_\lambda$ ise, $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık fonksiyon olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.6. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s., $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık ve bijektif bir fonksiyon ve (X, μ) , θ_μ -regüler ise, (Y, λ) θ_λ -regülerdir.

İspat:

F, Y de θ_λ -kapalı bir küme olsun ve $y \notin F$, $y = f(x)$ olsun. Teorem 2.1.2 den $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(F)$, X te θ_μ -kapalıdır.

$f^{-1}(y) = x \notin f^{-1}(F)$ olduğundan (X, μ) nün θ_μ -regülerliğinden ayrık ve θ_μ -açık U ve V kümeleri $f^{-1}(F) \subseteq U$ ve $x \in V$ olacak şekilde vardır. Böylece

$$F = f(f^{-1}(F)) \subseteq f(U), \quad y = f(x) \in f(V) \text{ ve } f(U) \cap f(V) = \emptyset$$

elde edilir. $f, (\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık, $f(U)$ ve $f(V)$, (Y, λ) da θ_λ -açık olduğundan (Y, λ) , θ_λ -regülerdir. $\square$

Teorem 2.2.7 (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon, $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık ve bijektif fonksiyon ise ve (X, μ) , θ_μ -normal ise (Y, λ) , θ_λ -normaldir.

İspat:

F_1 ve F_2 , (Y, λ) nın iki ayrık θ_λ -kapalı alt kümesi olsun. $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ s. fonksiyon olduğundan Teorem 2.1.2 den $f^{-1}(F_1)$ ve $f^{-1}(F_2)$, X te iki θ_μ -kapalı alt kümedir. $K_1 = f^{-1}(F_1)$ ve $K_2 = f^{-1}(F_2)$ olsun. O zaman K_1 ve K_2 , (X, μ) nün iki ayrık θ_μ -kapalı alt kümesidir. (X, μ) , θ_μ -normal olduğundan $K_1 \subseteq U$ ve $K_2 \subseteq V$ olacak şekilde iki ayrık U ve V θ_μ -açık kümesi vardır. f , bijektif ve $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -açık fonksiyon olduğundan $F_1 = f(K_1) = f(f^{-1}(F_1)) \subseteq f(U)$, $F_2 = f(f^{-1}(F_2)) \subseteq f(V)$, (Y, λ) da $f(U)$ ve $f(V)$ ayrık ve θ_λ -açık kümeler ve $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ olduğundan (Y, λ) , θ_λ -normaldir. $\square$

Tanım 2.2.8. (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı göz önüne alınsın, X uzayı, boştan farklı ayırık θ_μ -açık kümelerin birleşimi olarak yazılamazsa, θ_μ -bağlantılı uzay olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.9 (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu üzerine bir $f. (\theta_\mu, \lambda)$ s. fonksiyon ve (X, θ_μ) , θ_μ -bağlantılı ise (Y, λ) , θ_λ -bağlantılıdır.

İspat: Farzedelim ki (Y, λ) , θ_λ -bağlantılı olmasın. O zaman Y uzayı boştan farklı ayırık θ_λ -açık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. $(Y = V_1 \cup V_2)$. Sonuç olarak X , ayırık θ_λ -açık kümelerin ters görüntülerinin birleşimi olarak yazılabilir.

$$(f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = X)$$

ve

$$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset \text{ dir.}$$

f , örten olduğundan $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$ boştan farklı ve $f. (\theta_\mu, \lambda)$ s. fonksiyon olduğundan aynı zamanda θ_μ -açıktır. Böylece, (X, μ) , θ_μ -bağlantılı değildir. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için iddiamızdan vazgeçmeliyiz, yani (Y, λ) , θ_λ -bağlantılıdır. $\square$

Tanım 2.2.10. $(\theta_\mu$ -kompakt): (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, X in θ_μ -açık kümelerden oluşan her örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahipse (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı θ_μ -kompakt genelleştirilmiş topolojik uzay olarak isimlendirilir. X in bir A alt kümesinin θ_μ -açık kümelerle her örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahip ise A θ_μ -kompakt alt küme olarak isimlendirilir.

Tanım 2.2.11. $(\theta_\sigma$ -kompaktlık): (Y, σ) topolojik uzayında $A(\subseteq Y)$ nin θ_σ -açık kümelerle her açık örtülüğü sonlu alt örtülüğe sahip ise A alt kümesi θ_σ -kompakt alt küme olarak isimlendirilir. $A=Y$ için tanım gerçekleşiyorsa (Y, σ) topolojik uzayı θ_σ -kompakt uzay olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.12. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $f. (\theta_\mu, \lambda)$ s. fonksiyon ve A , (X, μ) da θ_μ -kompakt alt küme ise $f(A)$ da (Y, λ) 'da θ_λ -kompakt alt kümedir.

İspat:

$A, (X, \mu)$ 'da θ_μ -kompakt alt küme olsun. $\{V_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ ise Y de $f(A)$ nın θ_λ -açık kümelerle bir örtülüğü olsun. O zaman $\forall x \in A$ için $f(x) \in V_{\alpha_x}$ olacak şekilde $\alpha_x \in \Delta$ vardır. $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f(U_x) \subseteq V_{\alpha_x}$ olacak şekilde x i içeren θ_μ -açık U_x kümesi vardır. $(U_x \in \theta_\mu)$ O zaman (X, μ) nün θ_μ -açık kümelerinin $\{U_x: x \in A\}$ ailesi, A nın örtülüğüdür. $A, (X, \mu)$ de θ_μ -kompakt alt küme olduğundan

$$A \subseteq \bigcup \{U_{x_i}: i = 1, 2, \dots, n, x_i \in A\}$$

olacak şekilde sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ noktaları vardır. Böylece

$$f(A) \subseteq \bigcup \{f(U_{x_i}): i = 1, 2, \dots, n, x_i \in A\} \subseteq \bigcup \{V_{\alpha(x_i)}: i = 1, 2, \dots, n, x_i \in A\}$$

geçerlidir. Bu da gösterir ki $f(A), (Y, \lambda)$ da θ_λ -kompakt alt kümedir. $\square$

Tanım 2.2.13. (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının $A \subseteq X$ alt kümesi için A nın θ_μ -sınırı $Fr_{\theta_\mu}(A)$ ile gösterilir ve $Fr_{\theta_\mu}(A) = c_{\theta_\mu}(A) \cap c_{\theta_\mu}(X \setminus A)$ ile tanımlanır.

Teorem 2.2.14. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT, (X, μ) μ -regüler olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olmadığı $x \in X$ noktalarının kümesi, (Y, λ) nın $f(x)$ i içeren θ_λ -açık kümelerinin ters görüntülerinin θ_μ -sınırlarının birleşimleridir.

İspat: Varsayalım ki $f, x \in X$ te $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olmasın.

Bu durumda $f(x)$ i içeren Y nin bir θ_λ -açık V kümesi, x i içeren her bir θ_μ -açık U kümesi için

$f(U) \not\subseteq V$ olacak şekilde vardır. Sonuç olarak x i içeren her θ_μ -açık U kümesi için

$$U \cap (X \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu durumda $x \in c_{\theta_\mu}(X \setminus f^{-1}(V))$ geçerlidir. Diğer yandan

$x \in f^{-1}(V) \subseteq c_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$ dir ve $x \in Fr_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$ dir.

$f(x)$ i içeren θ_λ -açık V kümesi için $x \in Fr_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$ olsun. $f, x \in X$ te $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s.

fonsiyon olsaydı, x i içeren θ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq V$ gerçeklenmek üzere var olurdu.

Bu

$$U \subseteq f^{-1}(V)$$

ve

$$x \in f^{-1}(V) = i_{\theta_\mu}(f^{-1}(V)) \left(= X \setminus c_{\theta_\mu}(X \setminus f^{-1}(V)) \right) \subseteq X \setminus Fr_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$$

çelişkisini verir. Sonuç olarak $f(x)$ i içeren θ_λ -açık V kümesi için $f, x \in Fr_{\theta_\mu}(f^{-1}(V))$

noktasında $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon değildir. $\square$



2.3. $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -Kapalı Grafik

Tanım 2.3.1. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ grafiğine, her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x i içeren θ_μ -açık U kümesi ve y yi içeren θ_λ -açık V kümesi $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde varsa, faintly θ_μ -kapalı - $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı - grafiğe sahiptir denir.

Lemma 2.3.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin (faintly) $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı olması için gerek ve yeter şart: her $(x, y) \in (X, Y) \setminus G(f)$ için x i içeren θ_μ -açık U kümesi ve y yi içeren θ_λ -açık V kümesinin $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde var olmasıdır.

Teorem 2.3.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu faintly θ_μ -kapalı $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı $G(f)$ grafiğine sahip olsun. $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon birebir bir fonksiyon ise, $(X, \mu), \theta_\mu-T_2$ dir.

İspat:

x ve y , X de iki farklı nokta olsun. f birebir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ dir. Bu durumda $(x, f(y)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ geçerlidir. Lemma 2.3.2 den X de x i içeren θ_μ -açık U kümesi ve Y de $f(y)$ yi içeren θ_λ -açık V kümesi $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Sonuç olarak

$$U \cap f^{-1}(V) = \emptyset \text{ ve } y \notin U$$

sağlanır. $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan y yi içeren θ_μ -açık W kümesi $f(W) \subseteq V$ olacak şekilde vardır. Böylece

$$f(U) \cap f(W) = \emptyset$$

olur. f , birebir olduğundan $U \cap W = \emptyset$ elde edilir, bu da (X, μ) nün $\theta_\mu-T_2$ uzayı olduğunu gösterir. $\square$

Tanım 2.3.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği, her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x i içeren $U \in \theta_\mu$ ve Y de y yi içeren λ -açık V kümesi,

$$(U \times c_\mu(V)) \cap G(f) = \emptyset$$

olacak şekilde varsa, güçlü θ_μ -kapalı (ya da güçlü (θ_μ, λ) -kapalı) grafiğe sahip olarak isimlendirilir.

Lemma 2.3.5. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin güçlü θ_μ -kapalı (güçlü (θ_μ, λ) -kapalı) olması için gerek ve yeter şart: her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x i içeren $U \in \theta_\mu$ ve y yi içeren Y de λ -açık V kümesinin $f(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ olacak şekilde var olmasıdır.

Teorem 2.3.6. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun grafiği $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı ise $G(f)$ güçlü (θ_μ, λ) -kapalıdır.

İspat:

$x \in X$ ve $y \neq f(x)$ olsun. O zaman $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olur. Lemma 2.3.2 den X de x i içeren θ_μ -açık U kümesi ve Y de y yi içeren θ_λ -açık V kümesi $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde vardır. V , θ_λ -açık olduğundan $y \in V_0 \subseteq c_\mu(V_0) \subseteq V$ olacak şekilde y yi içeren Y de λ -açık V_0 kümesi vardır. Böylece $f(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ elde edilir. Lemma 3.2.5 ten $G(f)$ güçlü (θ_μ, λ) -kapalıdır. $\square$

Teorem 2.3.7. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği güçlü θ_μ -kapalı ve f örten fonksiyon ise (Y, λ) λ - T_2 uzayıdır.

İspat:

y_1 ve y_2 ; Y nin iki farklı noktası olsun. f örten olduğundan $f(x_1) = y_1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ vardır ve sonuç olarak $(x_1, y_2) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ sağlanır. $G(f)$ güçlü θ_μ -kapalı olduğundan X de x_1 i içeren θ_μ -açık U kümesi ve Y de y_2 yi içeren λ -açık V kümesi $f(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Bu yüzden

$$y_1 = f(x_1) \in f(U) \subseteq Y \setminus c_\mu(V)$$

elde edilir ve bu durumda

$$y_1 \in H, H \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde Y de bir H λ -açık kümesi vardır. Üstelik $y_2 \in V$ ve V , Y de λ -açıktır.

Dolayısıyla (Y, λ) bir λ - T_2 uzayıdır. $\square$

Teorem 2.3.8. (X, μ) bir GT, (Y, σ) bir topolojik uzay olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonunun grafiği $G(f)$ $(\theta_\mu, \theta_\sigma)$ –kapalı grafiğe sahip ise, (X, μ) nün her θ_μ -kompakt K alt kümesi için $f(K)$, (Y, σ) ’ da σ -kapalı alt kümedir.

İspat:

Varsayalım ki $y \notin f(K)$ olsun. $\forall x \in K$ için $(x, y) \notin G(f)$ dir. Lemma 2.3.2 den $G(f)$ $(\theta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı olduğundan X ’ de x i içeren θ_μ -açık U_x kümesi ve Y ’ de y yi içeren θ_λ -açık V_x kümesi $f(U_x) \cap V_x = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $\{U_x : x \in K\}$ ailesi K için θ_μ -açık kümelerden oluşan bir örtülüdür. K ise (X, μ) nün θ_μ -kompakt alt kümesi olduğundan, K nın sonlu bir K_0 alt kümesi $K \subseteq \cup \{U_x : x \in K_0\}$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $y \in V = \cap \{V_x : x \in K_0\} \in \sigma$ geçerlidir ((Y, σ) bir topolojik uzay). Bu ise bize

$$f(K) \cap V \subseteq (\cup \{f(U_x) : x \in K_0\}) \cap V \subseteq \cup [f(U_x) \cap V : x \in K_0] = \emptyset$$

verir.

$$y \notin c\ell(f(K)) \Rightarrow c\ell(f(K)) \subseteq f(K) \Rightarrow c\ell(f(K)) = f(K)$$

geçerlidir. Bu da, $f(K)$ nın σ -kapalı olduğunu gösterir. $\square$

Karşılaştırmalar

Tanım 2.3.9. [24] (Weakly (μ, λ) -süreklî fonksiyon): (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu, $\forall x \in X$ ve $f(x)$ i içeren her bir λ -açık W kümesine karşılık x i içeren μ -açık U kümesi $f(U) \subset c_\lambda(W)$ olacak şekilde varsa, weakly (μ, λ) -süreklî fonksiyon (kısaca w. (μ, λ) -s. fonksiyon) olarak isimlendirilir.

Teorem 2.3.10. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu w. (μ, λ) -s. fonksiyon ise f , $f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyondur.

İspat: $V \in \theta_\lambda$, $x \in f^{-1}(V)$ olsun. Bu durumda $V \in \theta_\lambda$ olduğundan W λ -açık kümesi $f(x) \in W \subseteq c_\lambda(W) \subseteq V$ olacak şekilde vardır. f , w. (μ, λ) -s. fonksiyon olduğundan, x i içeren μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq c_\lambda(W) \subseteq V$ gerçekleşmek üzere vardır ve $f^{-1}(c_\lambda(W))$ μ -kapalıdır ([24] Theorem 3.2.(5)) dolayısıyla

$$f(U) \subseteq c_\lambda(W) \subseteq V$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(c_\lambda(W)) \subseteq f^{-1}(V) \\
&\Rightarrow x \in U \subseteq c_\mu(U) \subseteq f^{-1}(c_\lambda(W)) = c_\mu(f^{-1}(c_\lambda(W))) \subseteq f^{-1}(V) \\
&\Rightarrow f^{-1}(V) \in \theta_\mu
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Sonuç olarak $f, f. (\theta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekle gösterilmiştir:

Örnek 2.3.11. [15] $X = \{0,1\}, Y = \{a,b,c\},$

$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}, \quad \sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

verilsin. Bu durumda $\theta_\tau = \{X, \emptyset\}, \theta_\sigma = \{Y, \emptyset\}$ şeklindedir.

$f=\{(0,a),(1,b)\}$ ile tanımlanan $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu faintly (θ_τ, σ) -sürekli (kısaca f. (θ_τ, σ) -s.) ama weakly (τ, σ) -sürekli (kısaca w. (τ, σ) -s.) değildir.

BÖLÜM 3.

3.1. Faintly $(\mu g, \lambda)$ -Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümün amacı N Karthikeyan ve N Rajesh'in faintly g -sürekli fonksiyonunu genelleştirilmiş topolojik uzaylara taşıyarak bu fonksiyon tipinin karakterizasyonlarını ve özelliklerini elde etmektir. Bundan dolayı genelleştirilmiş topolojik uzaylar arasında faintly $(\mu g, \lambda)$ – sürekli fonksiyon kavramı tanımlanmıştır.

N. Karthikeyan'in makalesinden hareketle aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Faintly $(\mu g, \lambda)$ -Sürekli Fonksiyon

Tanım 3.1.1. [29] Bir (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesine, A yı kapsayan her $U \in \mu$ kümesi için $c_\mu(A) \subset U$ koşulu gerçekleşiyorsa, μg -kapalı küme denir. (μ -genelleştirilmiş kapalı küme) μg -kapalı kümenin bütünleyeni μg -açık küme olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.2. (X, μ) ve (Y, λ) iki GTS olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonuna, her $V \subset Y$ θ -açık (θ_λ -açık) alt kümesi için $f^{-1}(V) \subset X$ μg -açık ise, faintly $(\mu g, \lambda)$ -sürekli (kısaca f . $(\mu g, \lambda)$ -s.) fonksiyon denir.

Uyarı 3.1.3. (Y, λ) güçlü GT değilse [21] Lemma 2.4.2 den $\theta_\lambda = \{\emptyset\}$ geçerlidir, dolayısıyla (X, μ) ve (Y, λ) iki GT ve $Y \notin \lambda$ ise her $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu f . $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur, çünkü $\theta_\lambda = \{\emptyset\}$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mu$, her μ -açık küme μg -açık olduğundan $f^{-1}(\emptyset)$ μg -açıktır.

Karakterizasyon

Teorem 3.1.4. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ iki GTS ve $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. f, f . $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur ,
- ii. (Y, λ) uzayında her θ_λ -kapalı kümenin ters görüntüsü μg -kapalıdır.

Kanıt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $M, (Y, \lambda)$ uzayında θ_λ -kapalı küme olsun. $Y \setminus M$; θ_λ -açık ve (i) den

$f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(M)$ μg -açıktır. O halde $f^{-1}(M)$ μg -kapalıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $U \in \theta_\lambda$ olsun. $Y \setminus U$ θ_λ -kapalıdır ve (ii) den $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ μg -kapalıdır dolayısıyla

$f^{-1}(U)$ μg -açıktır, yani f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Not: (X, μ) bir genelleştirilmiş topoloji, $A \subseteq X$ için $i_{\mu g}A = \bigcup \{U : U \subseteq A, U \text{ } \mu g\text{-açık}\}$ ve $X \setminus i_{\mu g}A = c_{\mu g}(X \setminus A)$ eşitlikleri geçerlidir. $i_{\mu g}A$; μg -açık olmak zorunda değildir, $c_{\mu g}A$ da μg -kapalı olmak zorunda değildir.

Teorem 3.1.5. (X, μ) , (Y, λ) iki GT ve μg -açık kümeler keyfi birleşim altında kapalı ise $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- (i) f , f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur ,
- (ii) (Y, λ) uzayındaki her θ_λ -kapalı kümenin ters görüntüsü μg -kapalıdır,
- (iii) Her $x \in X$ ve $f(x)$ ' i içeren her $V \subseteq Y$ θ_λ -açık alt kümesi için, $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \subseteq X$ μg -açık kümesi vardır,
- (iv) Her $A \subseteq X$ için $f(c_{\mu g}(A)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ olur,
- (v) Her $B \subseteq Y$ için $c_{\mu g}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$ olur.

Kanıt.

(i) $\Rightarrow$ (iii): $x \in X$ ve $f(x) \in V$, B θ_λ -açık olsun. (i) den, $f^{-1}(V)$ μg -açıktır. $U = f^{-1}(V)$ yazılsın. Buradan, $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (i): V ; θ_λ -açık ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(x) \in V$ olduğundan, (iii) den $x \in U_x$ ve $f(U_x) \subseteq V$ olacak şekilde bir μg -açık U_x kümesi vardır. Buradan, $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$ bulunur. x keyfi seçildiğinden $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ ve hipotezden μg -açık kümeler birleşim altında kapalı olduğundan $f^{-1}(V)$; μg -açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Teorem 3.1.4 den elde edilir.

(i) $\Rightarrow$ (iv): $A \subseteq X$ olsun. $y \notin c_{\theta_\lambda}(f(A))$ farz edelim. Bu durumda y noktasını içeren θ_λ -kapalı F kümesi $f(A) \cap F = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Böylece $f^{-1}(F)$, μg -kapalı,

$A \cap f^{-1}(F) = \emptyset$ ve $c_{\mu g}(A) \cap f^{-1}(F) = \emptyset$ geçerlidir. Dolayısıyla $f(c_{\mu g}(A)) \cap F = \emptyset$ ve $y \notin f(c_{\mu g}(A))$, bağıntılarından $f(c_{\mu g}(A)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v): $B \subset Y$ olsun. (iv) de $A = f^{-1}(B)$ alınır

$$f(c_{\mu g}(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(B)$$

ve buradan

$$c_{\mu g}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(f(c_{\mu g}(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$$

elde edilir. Bu ise $c_{\mu g}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$ bağıntısını verir.

(v) $\Rightarrow$ (ii): V, θ_λ -açık olsun. (v) den, $c_{\mu g}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(Y \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus V)$ ve

$$c_{\mu g}(f^{-1}(Y \setminus V)) = X \setminus i_{\mu g}(f^{-1}(V)) \subseteq X \setminus f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) \subseteq i_{\mu g}(f^{-1}(V)) (\subseteq f^{-1}(M))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = i_{\mu g}(f^{-1}(V))$$

bulunur, μg -açık kümeler birleşim altında kapalı olduğundan $f^{-1}(V)$, (X, μ) ' de μg -açıktır. $\square$

Tanım 3.1.6. [36] (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonuna, her $M \subset Y$ λ -kapalı alt kümesi için $f^{-1}(M) \subset X$ μg -kapalı ise, $(\mu g, \lambda)$ -sürekli (kısaca $(\mu g, \lambda)$ -s.) fonksiyon denir.

Teorem 3.1.7. Her $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon f , $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur.

Kanıt. (X, μ) ve (Y, λ) iki GT, $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon, $V (\subseteq Y)$, θ_λ -açık alt küme olsun. $\theta_\lambda \subseteq \lambda$ olduğundan $V \in \lambda$ ve $Y \setminus V$: λ -kapalı, $f : (\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$: μg -kapalı, $f^{-1}(V)$: μg -açık ve f de f , $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Uyarı 3.1.8. Bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 3.1.9. $\mathbb{R}$ üzerinde $\mu = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\}$ ve $\lambda = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{3\}\}$

genelleştirilmiş topolojik uzayları göz önüne alınsın. $f : (\mathbb{R}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \lambda)$ idantik fonksiyonu f , $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur, fakat $f^{-1}(\{3\})$: μg -kapalı olmadığından $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon değildir.

3.2. Faintly $(\mu g, \lambda)$ -Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Tanım 3.2.1. [29] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her μg -kapalı küme μ -kapalı ise, μ - $T_{1/2}$ uzayı denir.

Tanım 3.2.2. (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonuna, $V(\subseteq Y)$, θ_λ -açık alt kümesi için $f^{-1}(V)$ μ -açık ise, faintly (μ, λ) -sürekli (kısaca f (μ, λ) -s.) fonksiyon denir.

Teorem 3.2.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT ve $(X, \mu); \mu$ - $T_{1/2}$ uzayı olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon olması için gyk: f (μ, λ) -s. fonksiyon olmasıdır.

Kanıt $\Rightarrow (X, \mu)$ ve (Y, λ) iki GT, ve $(X, \mu); \mu$ - $T_{1/2}$ uzayı olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon, $V(\subseteq Y)$, θ_λ -açık alt küme olsun. $Y \setminus V$ θ_λ -kapalı ve f f $(\mu g, \lambda)$ -s.

fonksiyon olduğundan $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ μg -kapalı ve (X, μ) μ - $T_{1/2}$ uzayı olduğundan $X \setminus f^{-1}(V)$ μ -kapalı, dolayısıyla $f^{-1}(V)$ μ -açık ve $f : f$ (μ, λ) -s. fonksiyondur.

$\Leftarrow f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ f (μ, λ) -s. fonksiyon, $V(\subseteq Y)$, θ_λ -açık alt küme olsun. f ; f (μ, λ) -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$ μ -açık ve her μ -açık küme μg -açık olduğundan f , f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Tanım 3.2.4. [22] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay ve $M_\mu = \cup \{U : U \in \mu\}$ olsun. X 'e, $x \in M_\mu$ ve $x \notin F$ şartlarını gerçekleyen μ -kapalı F kümesine karşı $U, V \in \mu$ kümeleri $x \in U$, $F \cap M_\mu \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ gerçeklenmek üzere bulunabiliyorsa, G -regüler denir.

Teorem 3.2.5. [22] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. X in G -regüler olması için gyk $x \in M_\mu$ ve x' i içeren μ -açık U kümesi için $x \in V \subseteq c_\mu V \cap M_\mu \subseteq U$ olacak şekilde x' i içeren μ -açık V kümesi vardır.

Lemma 3.2.6. [20] Lemma 4.10. a göre (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer (X, μ) G -regüler ve güçlü GT $(X \in \mu)$ ise her μ -açık küme θ -açıktır.

Kanıt.

U , X de μ -açık küme olsun. $\forall x \in U$ için teoreme göre $x \in V \subseteq c_\mu V \cap M_\mu \subseteq U$ olacak şekilde μ -açık V kümesi vardır. X , güçlü GT olduğundan $x \in V \subseteq c_\mu V \subseteq U$ sağlanır. Böylece U , θ -açıktır. $\square$

Teorem 3.2.7. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ f $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon, (Y, λ) G -regüler ve güçlü GT olsun. Bu durumda f , $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur.

Kanıt.

$V \in \lambda$ olsun. (Y, λ) G -regüler ve güçlü GT olduğundan $V \in \theta_\lambda$ dır, f f. $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$ μg -açıktır ve dolayısıyla f , $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Tanım 3.2.8. [36] $(X, \mu), (Y, \lambda)$ iki GTS olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonuna, her $F \subset Y$ λg -kapalı kümesi için $f^{-1}(F) \subset X$ μg -kapalı oluyorsa, $(\mu g, \lambda g)$ -irresolute fonksiyon denir.

Teorem 3.2.9. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ ve (Z, ν) GT leri alınsın. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $(\mu g, \lambda g)$ -irresolute ve $g : (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu faintly $(\lambda g, \nu)$ -sürekli (kısaca $(\lambda g, \nu)$ -s.) ise, $g \circ f : (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu faintly $(\mu g, \nu)$ -sürekli (kısaca f. $(\mu g, \nu)$ -s.) fonksiyondur.

Kanıt.

$V \in \theta_\nu$ kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(V) \subset Y$ λg -açıktır ve f , $(\mu g, \lambda g)$ -irresolute olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \subseteq X$ μg -açık dolayısıyla $g \circ f$, f. $(\mu g, \nu)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Teorem 3.2.10. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ ve (Z, ν) GT leri alınsın. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu f. $(\mu g, \lambda)$ -s. fonksiyon ve $g : (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu $(\theta_\lambda, \theta_\nu)$ -s. (=quasi (λ, ν) -sürekli) ise, $g \circ f : (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu f. $(\mu g, \nu)$ -s. fonksiyondur.

Kanıt.

$V \in \theta_\nu$ kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(V) \in \theta_\lambda$ ve böylece

$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \subset X$ μg -açık olduğundan, $g \circ f$ f. $(\mu g, \nu)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Tanım 3.2.11. [36] (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, $X = A \cup B$ olacak şekilde A, B μg -açık, boştan farklı, ayrık kümeleri varsa, μg -bağılantısız denir. μg -bağılantısız olmayan X uzayına μg -bağılantılı denir.

Teorem 3.2.12. (X, μ) μg -bağılantılı, $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f. $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon ise, (Y, ν) ν -bağılantılıdır.

Kanıt.

(X, μ) μg -bağılantılı, $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f. $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon, fakat (Y, ν) ν -bağılantılı olmasın. Bu durumda ν -açık, boştan farklı, ayrık A ve B kümeleri $Y = A \cup B$ olacak şekilde vardır. Bu durumda A ve B kümeleri hem ν -açık hem de ν -kapalıdır, dolayısıyla her ikisi de θ_ν açıktır. f üzerine fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca f f. $(\mu g, \nu)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ μg -açıktır. Bununla birlikte

$$f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset,$$

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

geçerlidir. Bu ise X in μg -bağılantısız olması çelişkisini verir. Yani (Y, ν) ν -bağılantılıdır. $\square$

Tanım 3.2.13. [35] (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, X in μg -açık kümelerden oluşan her örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü varsa, μg -kompakt genelleştirilmiş topolojik uzay denir.

Teorem 3.2.14. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon, (X, μ)

μg -kompakt bir uzay ise (Y, ν) θ_ν -kompakt uzaydır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f $(\mu g, \nu)$ -s., üzerine fonksiyon ve (X, μ) μg -kompakt olsun. Y nin $\{V_\beta; \beta \in \Omega\}$ θ_ν -açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \Omega\}$ X in μg -açık örtülüşüdür ve böylece $X = \bigcup \{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \Omega_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\Omega_0 \subset \Omega$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y = \bigcup \{V_\beta; \beta \in \Omega_0\}$ şeklindedir ve Y , θ_ν -kompakttır. $\square$

Tanım 3.2.15. [35] (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, X in

- i) μg -açık (θ_μ -açık) kümelerden oluşan her sayılabilir örtülüşü sonlu bir alt örtülüşe sahipse sayılabilir μg -kompakt (sayılabilir θ_μ -kompakt) genelleştirilmiş topolojik uzay
- ii) μg -açık (θ_μ -açık) kümelerden oluşan her açık örtülüşü sayılabilir bir alt örtülüşe sahipse μg -Lindelöf (sayılabilir θ_μ -Lindelöf) genelleştirilmiş topolojik uzay denir.

Teorem 3.2.16. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) Eğer X μg -Lindelöf ise Y θ_μ -Lindelöftür.
- ii) Eğer X sayılabilir μg -kompakt ise Y sayılabilir θ_μ -kompakttır.

Kanıt.

- i) $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon ve (X, μ) μg -Lindelöf olsun. Y nin $\{V_\beta; \beta \in \Omega\}$ θ_ν -açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \Omega\}$ X in μg -açık örtülüşüdür ve böylece $X = \bigcup \{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \Omega_0\}$ olacak şekilde sayılabilir bir $\Omega_0 \subset \Omega$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y = \bigcup \{V_\beta; \beta \in \Omega_0\}$ şeklindedir ve Y , θ_ν -Lindelöftür.
- ii) $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f $(\mu g, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon ve (X, μ) sayılabilir

μg -kompakt olsun. Y nin $\{V_i; i \in \mathbb{N}\}$ θ_v -açık sayılabilir örtülüşü alınsın. O halde,

$\{f^{-1}(V_i); i \in \mathbb{N}\}$, X in μg -açık örtülüşüdür ve böylece $X = \bigcup \{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \mathbb{N}_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y = \bigcup \{V_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ şeklindedir ve Y θ_v - Lindelöftür. $\square$

Tanım 3.2.17. [35] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için μg -açık U ve V kümeleri $x \in U$, $y \notin U$ ve $x \notin V$, $y \in V$ olacak şekilde bulunabilirse, μg - T_1 uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 3.2.18. [35] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için μg -açık, ayrık U ve V kümeleri $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde bulunabilirse, μg - T_2 uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 3.2.19. [4] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, her $x, y \in X$ ($x \neq y$) nokta çiftine karşılık θ_μ -açık V_1 ve V_2 kümeleri $x \in V_1$, $y \notin V_1$ ve $x \notin V_2$, $y \in V_2$ gerçekleşmek üzere varsa (yani bu noktaların her birisinin, diğerini içermeyen θ_μ - açık komşuluğu varsa), θ_μ - T_1 uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 3.2.20. [4] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, her $x, y \in X$ ($x \neq y$) nokta çiftine karşılık θ_μ -açık V_1 ve V_2 kümeleri $x \in V_1$, $y \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gerçekleşmek üzere varsa (yani her farklı nokta çifti için, farklı noktaların ayrık, θ_μ - açık komşuluğu varsa), θ_μ - T_2 (Tanım 2.2.1) uzayı olarak isimlendirilir.

Teorem 3.2.21. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . $(\mu g, \nu)$ -s., 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) θ_v - T_1 uzayı ise (X, μ) ; μg - T_1 uzayıdır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . $(\mu g, \nu)$ -s., 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) ; θ_v - T_1 uzayı olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için θ_v -açık V_1 ve V_2 kümeleri $f(x) \in V_1$, $f(y) \notin V_1$ ve $f(x) \notin V_2$, $f(y) \in V_2$ olacak şekilde vardır. f ; f . $(\mu g, \nu)$ -s. olduğundan $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$, (X, μ) nün $x \in f^{-1}(V_1)$, $y \notin f^{-1}(V_1)$ ve $f(x) \notin f^{-1}(V_2)$, $y \in f^{-1}(V_2)$ gerçekleyen μg -açık alt kümeleri olduğundan (X, μ) ; μg - T_1 uzayıdır. $\square$

Teorem 3.2.22. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . $(\mu g, \nu)$ -s., 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) ; θ_v - T_2 uzayı ise (X, μ) ; μg - T_2 uzayıdır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f. $(\mu g, \nu)$ -s., 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) , θ_ν - T_2 uzayı olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için ayırık, θ_ν -açık V_1 ve V_2 kümeleri $f(x) \in V_1$ ve $f(y) \in V_2$ olacak şekilde vardır. f , f . $(\mu g, \nu)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$; (X, μ) nün $x \in f^{-1}(V_1)$ ve $y \in f^{-1}(V_2)$ gerçekleyen μg -açık ve ayırık alt kümeleri olduğundan (X, μ) μg - T_2 uzayıdır. $\square$



BÖLÜM 4.

4.1. Faintly (δ_μ, λ) -Sürekli Fonksiyonlar

Santoro'nun $\theta\delta$ -sürekli fonksiyon kavramı [33] U. Şengül tarafından iki-genelleştirilmiş topolojik uzaylara $(\delta_{\mu_1, \mu_2}, \theta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli fonksiyon olarak [37] genelleştirilmiştir. $\theta\delta$ -sürekli fonksiyon kavramının genelleştirilmiş topolojik uzaylara genellemesi, $(\delta_{\mu_1, \mu_2}, \theta_{\lambda_1, \lambda_2})$ -sürekli fonksiyon kavramının özel durumu olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1.1. $((\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -Sürekli Fonksiyon=faintly (δ_μ, λ) -Sürekli Fonksiyon): (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu, $x \in X$ noktasında $f(x)$ i içeren her bir θ_λ -açık V kümesine karşı X de x i içeren δ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde varsa, faintly (δ_μ, λ) -sürekli (kısaca f. (δ_μ, λ) -s.) fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer f her $x \in X$ noktasında bu koşulu gerçekleştiriyorsa, $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu f. (δ_μ, λ) -s. fonksiyon olarak isimlendirilir.

Bu tanım Jafari ve arkadaşının tanımladığı faintly δ - β -sürekli kavramının bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Karakterizasyon

Teorem 4.1.2. (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun Bir $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) f ; f. (δ_μ, λ) -s. fonksiyondur;
- (ii) Y nin her θ_λ -açık V kümesi için, $f^{-1}(V)$, X de δ_μ -açıktır;
- (iii) Y nin her θ_λ -kapalı F kümesi için, $f^{-1}(F)$, X de δ_μ -kapalıdır;
- (iv) Her $A \subseteq X$ için, $f(c_{\delta_\mu}(A))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ sağlanır;
- (v) Her $B \subseteq Y$ için, $c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$ sağlanır;

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): V , Y de θ_λ -açık küme ($V \in \theta_\lambda$) ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(x) \in V$ ve f f. (δ_μ, λ) -s. fonksiyon olduğundan X de x i içeren δ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde vardır. O zaman

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur. Sonuçta $f^{-1}(V) = i_{\delta_\mu}(f^{-1}(V)) \in \delta_\mu$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : F, Y de θ_λ -kapalı $\Rightarrow Y - F, Y$ de θ_λ -açık olur.

(ii) $\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F) \in \delta_\mu$ geçerlidir. $X \setminus (X \setminus f^{-1}(F)) = f^{-1}(F) \in \delta_\mu$ kapalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $f(c_{\delta_\mu}(A)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ olduğunu gösterelim:

her $A \subseteq X$ için $f(A) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$ ve $c_{\theta_\lambda}(f(A))$, Y de θ_λ -kapalı olması sebebiyle iii) den $f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))$, X ' de δ_μ -kapalıdır.

$$f(A) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A)) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))$$

$$\Rightarrow c_{\delta_\mu}(A) \subseteq c_{\delta_\mu}(f^{-1}(f(A)))$$

$$\subseteq c_{\delta_\mu}(f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))) = f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))$$

$$\Rightarrow c_{\delta_\mu}(A) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))$$

$$\Rightarrow f(c_{\delta_\mu}(A)) \subseteq f(f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(f(A)))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(A))$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) : $c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f^{-1}(B))$ olduğunu gösterelim:

$B \subseteq Y$ olsun. (iv)den,

$$f(c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(f(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(B)$$

$$\Rightarrow f(c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B))) \subseteq c_{\theta_\lambda}(B)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$$

$$\Rightarrow c_{\delta_\mu}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(B))$$

elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (i): $x \in X$ ve V, Y nin $f(x)$ i içeren bir θ_λ -açık alt kümesi olsun. $Y \setminus V, Y$ de θ_λ -kapalı olduğundan, (v) den

$$c_{\delta_\mu}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subseteq f^{-1}(c_{\theta_\lambda}(Y \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus V) \Rightarrow$$

$$c_{\delta_\mu}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subseteq f^{-1}(Y \setminus V).$$

Böylece $f^{-1}(Y \setminus V)$, X de δ_μ -kapalıdır ve $f^{-1}(V)$, x i içeren bir δ_μ -açık kümedir. Sonuç olarak $U = f^{-1}(V)$ için $f(U) \subseteq V$ sağlanır, bu da f in, f . (δ_μ, λ) -s. fonksiyon olduğunu gösterir. $\square$

Tanım 4.1.3. [22] (X, μ) ve (Y, λ) iki GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu, her bir $V \subset Y$ δ_λ -açık alt kümesi için $f^{-1}(V) \subset X$ δ_μ -açık ise, $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -sürekli (kısaca $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s.) fonksiyon olarak isimlendirilir.

Teorem 4.1.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. fonksiyon ise f . (δ_μ, λ) -s. fonksiyondur.

İspat. f , $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. fonksiyon ve $V \in \theta_\lambda$ olsun, $\theta_\lambda \subseteq \delta_\lambda$ ve bu durumda $V \in \delta_\lambda$ ve f , $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V) \in \delta_\mu$ geçerlidir, yani f f . (δ_μ, λ) -s. fonksiyondur. $\square$

Not: Ters gerektirme doğru olmak zorunda değildir:

Örnek 4.1.5. [22] $X = \{a, b, c, d\}$,

$$\mu = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\},$$

$$\lambda = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olsun.

$f: (X, \mu) \rightarrow (X, \lambda)$ idantik fonksiyonu $(\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. fonksiyon değildir, $\{a\}$ kümesi λ -açık olduğu halde $f^{-1}(\{a\}) = \{a\} \notin \delta_\mu$, ama f . (δ_μ, λ) -s. fonksiyondur çünkü (X, λ) güçlü GT olmadığından $\theta_\lambda = \{\emptyset\}$ ve $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \theta_\mu$.

Teorem 4.1.6. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ ve (Z, ν) GT leri alınsın. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu f . (δ_μ, λ) -s. ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu $(\theta_\lambda, \theta_\nu)$ -s. (faintly (θ_λ, ν) -sürekli) ise, $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu faintly (δ_μ, ν) -sürekli (kısaca f . (δ_μ, ν) -s.) fonksiyondur.

Kanıt.

$V \in \theta_\nu$ kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(V) \in \theta_\lambda$ ve böylece

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \subset X \text{ } \delta_\mu \text{ -açık olduğundan, } g \circ f \text{ } f. (\delta_\mu, \nu)\text{-s. fonksiyondur. } \square$$

4.2. Faintly (δ_μ, λ) -Süreklı Fonksiyonların Özellikleri

Tanım 4.2.1. (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının $A \subseteq X$ alt kümesi için A nın δ_μ -sınırı $Fr_{\delta_\mu}(A)$ ile gösterilir ve $Fr_{\delta_\mu}(A) = c_{\delta_\mu}(A) \cap c_{\delta_\mu}(X \setminus A)$ ile tanımlanır.

Teorem 4.2.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s. olmadığı $x \in X$ noktalarının kümesi, (Y, λ) nın $f(x)$ ' i içeren θ_λ -açık kümelerinin ters görüntülerinin δ_μ -sınırlarının birleşimleridir.

İspat: Varsayalım ki $f, x \in X$ te $f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s. olmasın. Bu durumda $f(x)$ i içeren Y nin bir θ_λ -açık V kümesi, x 'i içeren her bir δ_μ -açık U kümesi için $f(U) \not\subseteq V$ olacak şekilde vardır. Sonuç olarak x 'i içeren her δ_μ -açık U kümesi için

$$U \cap (X \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu durumda $x \in c_{\delta_\mu}(X \setminus f^{-1}(V))$ geçerlidir. Diğer yandan $x \in f^{-1}(V) \subseteq c_{\delta_\mu}(f^{-1}(V))$ dir ve $x \in Fr_{\delta_\mu}(f^{-1}(V))$ dir.

$f(x)$ 'i içeren θ_λ -açık V kümesi için $x \in Fr_{\delta_\mu}(f^{-1}(V))$ olsun. $f, x \in X$ te $f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olsaydı x ' i içeren δ_μ -açık U kümesi $f(U) \subseteq V$ gerçekleşmek üzere var olurdu. Bu

$$U \subseteq f^{-1}(V)$$

ve

$$x \in f^{-1}(V) = i_{\delta_\mu}(f^{-1}(V)) \left(= X \setminus c_{\delta_\mu}(X \setminus f^{-1}(V)) \right) \subseteq X \setminus Fr_{\delta_\mu}(f^{-1}(V))$$

çelişkisini verir. Sonuç olarak $f(x)$ 'i içeren θ_λ -açık V kümesi için $f, x \in Fr_{\delta_\mu}(f^{-1}(V))$ noktasında $f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon değildir. $\square$

Tanım 4.2.3. (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, $X = A \cup B$ olacak şekilde A, B δ_μ - açık, boştan farklı, ayrık kümeleri varsa, δ_μ -bağlantısız denir. δ_μ -bağlantısız olmayan X uzayına δ_μ -bağlantılı denir.

Teorem 4.2.4. (X, μ) δ_μ -bağlantılı, $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f. (\delta_\mu, \nu)$ -s. ve üzerine fonksiyon ise, (Y, ν) ν -bağlantılıdır.

Kanıt.

(X, μ) δ_μ -bağılantılı, $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f. (\delta_\mu, \nu)$ -s. , üzerine fonksiyon,

fakat (Y, ν) ν -bağılantılı olmasın. Bu durumda ν -açık, boştan farklı, ayrık A ve B kümeleri $Y=A \cup B$ olacak şekilde vardır. Bu durumda A ve B kümeleri hem ν -açık hem de ν -kapalıdır, dolayısıyla her ikisi de θ_ν açıktır. f üzerine fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca f $f. (\delta_\mu, \nu)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ δ_μ -açık, ayrıca

$$f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset,$$

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

olmaktadır, bu ise X in δ_μ -bağılantısız olması çelişkisini verir. Bu yüzden (Y, ν) ν -bağılantılıdır.

□

Tanım 4.2.5. (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, X in μ_r -açık kümelerden oluşan her örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü varsa neredeyse kompakt (nearly compact) genelleştirilmiş topolojik uzay denir.

Teorem 4.2.6. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f. (\delta_\mu, \nu)$ -s. , üzerine fonksiyon ve (X, μ) neredeyse kompakt bir uzay ise , (Y, ν) θ_ν -kompakt uzaydır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f. (\delta_\mu, \nu)$ -s. , üzerine fonksiyon ve (X, μ) neredeyse kompakt olsun. Y nin $\{V_\beta; \beta \in \Omega\}$ θ_ν -açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(V_\beta); \beta \in \Omega\}$, X in δ_μ -açık örtülüşü, dolayısıyla elemanları μ_r -açık kümelerin birleşimlerinden oluşan bir örtülüştür, bu ailenin birleşimi μ_r -açık kümelerin birleşimlerinden ibarettir. $\beta \in \Omega$ için $f^{-1}(V_\beta)$ 'ya μ_r -açık kümelerin $\Delta(f^{-1}(V_\beta))$

kümesi ile indisli bir $\{U_\alpha | \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\}$ ailesi karşı gelir, bu durumda

$$\exists \{U_\alpha; \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\} : f^{-1}(V_\beta) = \bigcup \{U_\alpha | \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\}$$

$$\Rightarrow X = \bigcup \{f^{-1}(V_\beta) | \beta \in \Omega\} = \bigcup \left\{ \bigcup \{U_\alpha | \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\} \mid \beta \in \Omega \right\}$$

yani X elemanları μ_r -açık kümelerin birleşimlerinden oluşan bir örtülüşe sahiptir, X neredeyse kompakt olduğundan bu örtülüş sonlu bir $\{U_{\alpha(1)}, \dots, U_{\alpha(n)}\}$ alt örtülüşüne sahiptir, $i \in \{1, \dots, n\}$ için $f^{-1}(V_{\beta(1)}), \dots, f^{-1}(V_{\beta(n)})$ sonlu ailesi $U_{\alpha(i)} \subseteq f^{-1}(V_{\beta(i)}) (\beta(i) \in \Omega)$ olacak şekilde vardır.

$$X = U_{\alpha(1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(n)} \subseteq f^{-1}(V_{\beta(1)}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\beta(n)}) (\subseteq X) \text{ olduğundan}$$

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\beta(i)})\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\beta(n)}$$

$Y = \bigcup \{V_{\beta(i)} : \beta(i) \in \Delta, i \in \{1, \dots, n\}\}$ gerçektir. Bu da Y, θ_v -kompakt demektir. $\square$

Tanım 4.2.7. [31] (X, μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, μ -açık kümelerden oluşan her açık örtülüğü sayılabilir bir alt örtülüğe sahipse neredeyse Lindelöf genelleştirilmiş topolojik uzay denir.

Teorem 4.2.8. [31] $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f, (\delta_\mu, \nu)$ -s. , üzerine fonksiyon ve (X, μ) neredeyse Lindelöf bir uzay ise, (Y, ν) θ_v -Lindelöf uzaydır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f, (\delta_\mu, \nu)$ -s. , üzerine fonksiyon ve (X, μ) neredeyse Lindelöf olsun. Y nin $\{V_\beta : \beta \in \Omega\}$ θ_v -açık örtülüğü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(V_\beta) : \beta \in \Omega\}$, X in δ_μ -açık örtülüğü, elemanları μ -açık kümelerin birleşimlerinden oluşan bir örtülüştür, bu ailenin birleşimi μ -açık kümelerin birleşimlerinden ibarettir. $\beta \in \Omega$ için $f^{-1}(V_\beta)$ ' ya μ -açık kümelerin

$\Delta(f^{-1}(V_\beta))$ kümesi ile indisli bir $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\}$ ailesi karşı gelir, bu durumda

$$\exists \{U_\alpha : \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\} : f^{-1}(V_\beta) = \bigcup \{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\}$$

$$\Rightarrow X = \bigcup \{f^{-1}(V_\beta) \mid \beta \in \Delta\} = \bigcup \left\{ \bigcup \{U_\alpha \mid \alpha \in \Delta(f^{-1}(V_\beta))\} \mid \beta \in \Delta \right\}$$

yani X , elemanları μ -açık kümelerin birleşimlerinden oluşan bir örtülüğe sahiptir, X neredeyse Lindelöf olduğundan bu örtülük sayılabilir bir $\{U_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ alt örtülüğüne sahiptir, $n \in \mathbb{N}$ için $\{f^{-1}(V_{\beta(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayılabilir ailesi $U_{\alpha(n)} \subseteq f^{-1}(V_{\beta(n)}) (\beta(n) \in \Delta)$ olacak şekilde vardır.

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha(n)} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_{\beta(n)}) (\subseteq X) \text{ olduğundan } Y = f(X) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_{\beta(n)})\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\beta(n)}$$

yani

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\beta(n)} (\beta(n) \in \Delta, n \in \mathbb{N}) \text{ gerçektir. Bu ise } Y \text{'nin, } \theta_v \text{-Lindelöf olduğunu gösterir. } \square$$

Teorem 4.2.9. [22] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Eğer (X, μ) G -regüler ve güçlü $GT(X \in \mu)$ ise her μ -açık küme δ_μ -açıktır.

İspat.

A, X' de μ -açık olsun. $\forall x \in A$ için [22] den $x \in V \subseteq c_\mu V \cap M_\mu \subseteq U$ olacak şekilde μ -açık V kümesi vardır. Bu da $x \in V \subseteq i_\mu c_\mu V \cap V \subseteq i_\mu c_\mu V \cap (c_\mu V \cap M_\mu) \subseteq A$ olduğunu gösterir.

$i_\mu c_\mu V \cap M_\mu = i_\mu c_\mu V$ ve $i_\mu c_\mu V$ μ -açık [6] olduğundan, A, δ_μ -açıktır. $\square$

Teorem 4.2.10. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ $f, (\delta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon ve (Y, λ) G -regüler ve güçlü GT olsun. Bu durumda $f, (\delta_\mu, \lambda)$ -s. dir.

Kanıt.

$V \in \lambda$ olsun. (Y, λ) , G -regüler ve güçlü GT olduğundan $V \in \theta_\lambda$ dir, f $f, (\delta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$ δ_μ -açıktır ve dolayısıyla $f, (\delta_\mu, \lambda)$ -s. dir. $\square$

Teorem 4.2.11. $(X, \mu), (Y, \lambda)$ ve (Z, ν) GT leri alınsın. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $((\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. ve $g: (Y, \lambda) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu faintly (δ_λ, ν) -sürekli (kısaca $f, (\delta_\lambda, \nu)$ -s.) ise, $g \circ f: (X, \mu) \rightarrow (Z, \nu)$ fonksiyonu $f, (\delta_\mu, \nu)$ -s. fonksiyondur.

Kanıt.

$V \in \theta_\nu$ kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(V) \subset Y$ δ_λ -açıktır ve $f, (\delta_\mu, \delta_\lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \subseteq X$ δ_μ -açık dolayısıyla $g \circ f, f, (\delta_\mu, \nu)$ -s. fonksiyondur. $\square$

Tanım 4.2.12. (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, her $x, y \in X$ ($x \neq y$) nokta çiftine karşılık δ_μ -açık V_1 ve V_2 kümeleri $x \in V_1, y \notin V_1$ ve $x \notin V_2, y \in V_2$ gerçekleşmek üzere varsa (yani bu noktaların her birisinin, diğerini içermeyen δ_μ -açık komşuluğu varsa), $\delta_\mu - T_1$ uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 4.2.13. (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı, her $x, y \in X$ ($x \neq y$) nokta çiftine karşılık δ_μ -açık V_1 ve V_2 kümeleri $x \in V_1, y \in V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gerçekleşmek üzere varsa (yani her farklı nokta çifti için, farklı noktaların ayrık, δ_μ -açık komşuluğu varsa), $\delta_\mu - T_2$ uzayı olarak isimlendirilir.

Teorem 4.2.14. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ $f, (\delta_\mu, \nu)$ -s. , 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) $\theta_\nu - T_1$ uzayı ise (X, μ) $\delta_\mu - T_1$ uzayıdır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . (δ_μ, ν) -s. , 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) $\theta_\nu - T_1$ uzayı olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için θ_ν -açık V_1 ve V_2 kümeleri $f(x) \in V_1$, $f(y) \notin V_1$ ve $f(x) \notin V_2$, $f(y) \in V_2$ olacak şekilde vardır. f f . (δ_μ, ν) -s. ve $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$, (X, μ) nün $x \in f^{-1}(V_1)$, $y \notin f^{-1}(V_1)$ ve $f(x) \notin f^{-1}(V_2)$, $y \in f^{-1}(V_2)$ gerçekleyen δ_μ -açık alt kümeleri olduğundan (X, μ) $\delta_\mu - T_1$ uzayıdır. $\square$

Teorem 4.2.15. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . (δ_μ, ν) -s. , 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) $\theta_\nu - T_2$ uzayı ise (X, μ) $\delta_\mu - T_2$ uzayıdır.

Kanıt.

$f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ f . (δ_μ, ν) -s. , 1-1 fonksiyon ve (Y, ν) $\theta_\nu - T_2$ uzayı olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için ayrık, θ_ν -açık V_1 ve V_2 kümeleri $f(x) \in V_1$ ve $f(y) \in V_2$ olacak şekilde vardır. f f . (δ_μ, ν) -s. ve $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$ (X, μ) nün $x \in f^{-1}(V_1)$ ve $y \in f^{-1}(V_2)$ şartlarını gerçekleyen δ_μ -açık, ayrık alt kümeleri olduğundan (X, μ) $\delta_\mu - T_2$ uzayıdır. $\square$

4.3. $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -Kapalı Grafik

Tanım 4.3.1. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ grafiğine, her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x i içeren δ_μ -açık U kümesi ve y yi içeren θ_λ -açık V kümesi $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde varsa, faintly δ_μ -kapalı - $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı - grafiğe sahiptir denir.

Lemma 4.3.2. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin (faintly) $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı olması için gerek ve yeter şart: her $(x, y) \in (X, Y) \setminus G(f)$ için x i içeren δ_μ -açık U kümesi ve y yi içeren θ_λ -açık V kümesinin $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde var olmasıdır.

Teorem 4.3.3. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu faintly δ_μ -kapalı $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ - kapalı $G(f)$ grafiğine sahip olsun. $f, f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s., birebir bir fonksiyon ise, $(X, \mu), \delta_\mu-T_2$ uzayıdır.

İspat:

x ve y , X de iki farklı nokta olsun. f birebir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ dir. Bu durumda $(x, f(y)) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ geçerlidir. Lemma 4.3.2 den X' de x i içeren δ_μ -açık U kümesi ve Y' de $f(y)$ yi içeren θ_λ -açık V kümesi $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Sonuç olarak

$$U \cap f^{-1}(V) = \emptyset \text{ ve } y \notin U$$

sağlanır. $f, f. (\delta_\mu, \lambda)$ -s. fonksiyon olduğundan x i içeren δ_μ -açık W kümesi $f(W) \subseteq V$ olacak şekilde vardır. Böylece

$$f(U) \cap f(W) = \emptyset$$

ve f , birebir olduğundan $U \cap W = \emptyset$ elde edilir, bu da (X, μ) nün $\delta_\mu-T_2$ uzayı olduğunu gösterir. $\square$

Tanım 4.3.4. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği, her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x i içeren $U \in \delta_\mu$ ve Y' de y yi içeren λ -açık V kümesi,

$$(U \times c_\mu(V)) \cap G(f) = \emptyset$$

yani $(U \times c_\mu(V)) \subset (X \times Y) \setminus G(f)$

olacak şekilde varsa, güçlü δ_μ -kapalı (ya da güçlü (δ_μ, λ) -kapalı) grafiğe sahip olarak isimlendirilir.

Lemma 4.3.5. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin güçlü δ_μ -kapalı (güçlü (δ_μ, λ) -kapalı) olması için gerek ve yeter şart: her $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ için x ' i içeren $U \in \delta_\mu$ ve y ' yi içeren Y' de λ -açık V kümesinin $f(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ olacak şekilde var olmasıdır.

Teorem 4.3.6. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonunun grafiği $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı ise $G(f)$ güçlü (δ_μ, λ) -kapalıdır.

İspat:

$x \in X$ ve $y \neq f(x)$ olsun. O zaman $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olur. Lemma 4.3.2 den X' de x ' i içeren δ_μ -açık U kümesi ve Y' de y ' yi içeren θ_λ -açık V kümesi $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde vardır. V , θ_λ -açık olduğundan $y \in V_0 \subseteq c_\mu(V_0) \subseteq V$ olacak şekilde y ' yi içeren Y' de λ -açık V_0 kümesi vardır. Böylece $f(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ elde edilir. Lemma 4.3.5 ten $G(f)$ güçlü (δ_μ, λ) -kapalıdır. $\square$

Teorem 4.3.7. (X, μ) ve (Y, λ) birer GT olsun. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ fonksiyonu $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -s. fonksiyon ve (Y, λ) , $\theta_\lambda - T_2$ uzayı ise $G(f)$, $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalıdır.

İspat: $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G(f)$ olsun. O halde $f(x) \neq y$ olur. (Y, λ) , $\theta_\lambda - T_2$ uzayı olduğundan $f(x) \in V$, $y \in W$ olacak şekilde θ_λ -açık V ve W kümeleri, $V \cap W = \emptyset$ gerçekleşmek üzere vardır. f f. $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ - s. fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V) \in \delta_\mu$ ($f^{-1}(V)$ δ_μ -açıktır.) $U = f^{-1}(W)$ olsun. O zaman $f(U) \subset W$ ve dolayısıyla $f(U) \cap V = \emptyset$ sağlanır. Bu da $G(f)$ 'in, $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 4.3.8. $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \lambda)$ f. $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -s. fonksiyon ve (Y, λ) , $\theta_\mu - T_2$ uzayı ise o zaman f güçlü $(\delta_\mu, \theta_\lambda)$ -kapalı grafiğe sahiptir.

Kaynaklar.

- [1] Alaa. M. F. AL. Jumaili, Xiao-Song Yang, On Faintly SP- θ (Semi-Pre- θ)-Continuous Functions, ICMMS 2012: Mathematical Modelling and Scientific Computation pp 22-31
- [2] Andrijevic D., On b-open sets, Mat, Vesnik., 48(1996), 59-64
- [3] Andrijevic D., Semi-Preopen Sets, ibid. 39 (1986), 24-32
- [4] Csaszar, 1. A., Separation axioms for generalized topologies, Acta Math. Hungar., 104 (2004), 63--69.
- [5] Csaszar, 2. A., Generalized Topology Generalized Continuity, Acta Math. Hungar., 96(4) (2002), 351--357.
- [6] Csaszar, 3. A., δ - and θ -modifications of generalized topologies, Acta Math. Hungar., 120 (2008), 275--279.
- [7] Csaszar, 4. A. and Makai, E., Further remarks on δ - and θ - modifications, Acta Math. Hungar., 123 (2009), 223--228.
- [8] Csaszar, 5. A., Normal Generalized Topologies, Acta Math. Hungar. 115, no. 4 (2007), 309-313.
- [9] Doutchev J., M. Ganster, and T. Noiri, On p-closed spaces, internat. J. Math. Sci., 24(3), (2000), 203-212
- [10] Jafari S. On Faintly δ - β -Continuous Functions January (2009) 54D10, 1-7
- [11] Jafari S. T. Noiri, N. Rajesh and M. L. Thivagar, Another generalization of closed sets, Kochi J. of Math., 3(2008), 25-38.
- [12] Karthikeyan N, N Rajesh , On Faintly g-Continuous Functions, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 92 No. 5 2014, 777-784
- [13] Levine N, Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19(1970), 89-96.
- [14] Levine N, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 36-41.

- [15] Long P. E. , and L. L. Herrington, The T_θ -topology and faintly continuous functions, Kyungpook Math. J., 22(1982), 7-14
- [16] Maio G. Di and T. Noiri, Weak and strong forms of irresolute functions, Rend. Circ. Mat. Palermo, 18(2), (1988), 255-273
- [17] Mashhour A. S. , M. E. Abd-El Monsef, and S. N. El-Deeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, (1982), 47-53
- [18] Min, 1. W.K., A note on δ - and θ -modifications, Acta Math. Hungar., 132 (2011), no. 1-2, 107–112.
- [19] Min, 2. W. K. , A Note On $\theta(g, g')$ - Continuity On Generalized Topological Spaces, Acta Math. Hungar., 125(4) (2009) 387-393
- [20] Min, 3. W. K. , 3. Mixed θ -continuity on generalized topological spaces, Mathematical and Computer Modelling, Volume 54, Issues 11–12, December 2011, Pages 2597-2601, <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.032>
- [21] Min, 4. W.K., Remarks on θ -open sets in generalized topological spaces, Applied Mathematics Letters, Volume 24, Issue 2, February 2011, Pages 165-168, <https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.08.038>
- [22] Min, 5. W.K., (δ, δ') -Continuity On Generalized Topological Spaces, Acta Math Hungar., 129(4) (2010), 350-356
- [23] Min, 6. W.K., Weak Continuity On Generalized Topological Spaces, Acta Math Hungar., 124(1-2) (2009), 73-81
- [24] M. E. Abd El-Monsef, El-Deeb S. N., and R. A. Mahmoud, β -open sets and β -continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., 12, (1983), 77-90
- [25] Noiri T. and V. Popa, Strongly θ - β -continuous functions, J. Pure Math., 19, (2002), 31-39
- [26] Noiri T. , Valeriu Popa, Faintly m-continuous functions Chaos, Solitons & Fractals, Volume 19, Issue 5, March 2004, Pages 1147-1159
- [27] Noiri T. , Valeriu Popa, V., Weak forms of faint continuity, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Nouvelle Série, Vol. 34 (82), No. 3 (1990), pp. 263-270

- [28] Park J. H. , Strongly θ - b -continuous functions, Acta Math Hungar., 110, (2006), 347-359
- [29] ROY B. 1. On a type of generalized open sets Applied General Topology, Volume 12, No.2, 2011, 163-173.
- [30] ROY B. 2. On faintly continuous functions via generalized topology, Chinese Journal of Mathematics, Volume 2013, Article ID 412391, 6 pages
<http://dx.doi.org/10.1155/2013/412391>
- [31] ROY B. 3. On Nearly Lindelöf Spaces via Generalized Topology, Volume 38, No.1, 2019, 49-57.
- [32] ROY B. 4. Unification on strongly θ -continuous functions Seria Matematica-Informatica LI, 2, (2013), 115-123
- [33] Santoro, G., On $\theta\delta$ -continuous functions. Zb. Rad. No. 6, part 2 (1992), 259–268.)
- [34] Sarsak M. S. , On μ -compact spaces, Questions and answers in general topology, 31 (2013), 49-57.
- [35] Sengül, U. S.N. Dünder, Contra $(\mu g, \lambda)$ -Continuous Functions, Fasciculi Mathematici, (2017), 133-144
- [36] Sengül, U. S.N. Dünder, On Some New Classes of Generalized Continuous functions, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 11, 2016, no. 10, 471-478,
doi.org/10.12988/ijcms.2016.6955
- [37] Sengül, U. More on δ - and θ -modifications, CREAT. MATH. INFORM.30(2021), No. 1, 89 – 96
- [38] Signal M.K., and S. P. Arya, On almost regular spaces Glasnik mat (24)--1969 pp. 89—99
- [39] Velicko, N. V., H-closed topological spaces, Mat.Sbornik, 70(112) (1966), 98--112.
- [40] Tyagi B.K. , Harsh V. S.Chauhan, On generalized closed sets in generalized topological spaces, CUBO, Vol.18, No 01, (27–45). December 2016, <http://dx.doi.org/10.4067/S0719-06462016000100003>

ÖZGEÇMİŞ

Adım Buket Saltık. İlkokulu, ortaokulu ve liseyi İstanbul’da okudum. 2011 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2016 yılında özel kurumda öğretmenlik yapmaya başladım. Farklı kurumlarda çalıştım. 2 yıl önce başladığım başka özel okulda görevimi sürdürmekteyim.

Yabancı dilim İngilizcedir.

