

ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ
HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Bahar BIYIKLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Bahar BIYIKLI tarafından hazırlanan "**3-boyutlu Galilean Uzayında Yüzeyler Üzerindeki Helisler ve Karakterizasyonları**" adlı tez çalışması 18/08/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği (veya oy çokluğu)** ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri:

Başkan: Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK
Bolu Abant İzzet baysal Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlanmış olduğum "3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu ve tezin hazırlık aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan Bilimsel İntihal Tespit Programı'yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

18/08/2021

Bahar BIYIKLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Bahar BIYIKLI

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK

Bu tezde, 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey üzerinde yatan eğrinin Darboux çatısı kullanarak $k = 0, 1, 2$ için k -tip slant helislerin tanımı verildi. Eğrinin geodezik eğriliği k_g , normal eğriliği k_n ve geodezik torsiyonu τ_g kullanarak yüzey üzerinde yatan bir eğrinin, eksen izotropik olmayan bir 0-tip slant helis olması için gerek ve yeter koşul elde edildi. Ayrıca, eksenin ifadesi tanımlandı. Dahası, 3-boyutlu Galilean uzay $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey üzerinde bir 1-tip ve 2-tip slant helis olmadığı gösterildi.

2021, 23 sayfa

Anahtar Kelimeler: Slant helix, Darboux vector, Galilean uzay

ABSTRACT

Master of Science Thesis

HELICES ON SURFACES AND THEIR CHARACTERIZATIONS IN GALILEAN 3-SPACE

Bahar BIYIKLI

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Ufuk ÖZTÜRK

In this thesis, k -type slant helices lying on a surface in Galilean 3-space $\mathbb{G}_3$ according to their Darboux frame for $k \in \{0, 1, 2\}$ is defined. The necessary and the sufficient conditions for curve lying on a surface to be a 0-type slant helix with non-isophotes axes in terms of their geodesic curvature k_g , normal curvature k_n and geodesic torsion τ_g is obtained. Also, their axes is determined. Moreover, it is proved that there are no 1-type and 2-type slant helix in Galilean 3-space $\mathbb{G}_3$

2021, 23 pages

Key Words: Slant helix, Darboux vector, Galilean space

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK (Çankırı Karatekin Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı)'e ve çalışmalarım sırasında sonsuz desteğini esirgemeyen sevgili eşim ve değerli aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bahar BIYIKLI
Çankırı, Ağustos 2021



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. $\mathbb{G}_3$ de EĞRİLER TEORİSİ	7
3.1 $\mathbb{G}_3$ de Darboux çatısı.....	8
4. $\mathbb{G}_3$ UZAYINDA BİR YÜZEY ÜZERİNDEKİ k-TİP SLANT HE- LİSLER	11
4.1 0-tip slant helisler	12
4.2 1-tip slant helisler	17
4.3 2-tip slant helisler	19
KAYNAKLAR.....	21
ÖZGEÇMİŞ	22

1. GİRİŞ

Öklid olmayan geometri olarak genellikle hiperbolik ve eliptik geometri akla gelir. Riemann; Öklidyen, Hiperbolik ve Eliptik geometrilerinin birbiri ile alakalı olduğunu ancak bu geometrilerin birbirinden farklılık gösterdiğini belirtmiştir. Öklid olmayan geometrilerden biri olan Galilean geometrisi, Galile ile Einstein'ın görelilik kuramıyla ilgilidir ve tüm Klein geometrilerinin en basit ve en sadesidir. Bilindiği gibi Galile-Newton mekaniğin temel yasası olan atalet yasası: "Diğer cisimlerden yeterince uzaklaştırılmış olan bir cisim durmaya, yada düz bir çizgi üstündeki düzgün hareketine devam eder." şeklinde ifade edilebilir. Bu yasa sadece cisimlerin hareketi konusunda birşeyler belirtmekle kalmıyor, aynı zamanda mekanik tanımda hangi referans cisimlerinin yada koordinat sistemlerinin kullanabileceğininide gösteriyor.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ vx + y \end{bmatrix}$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\omega = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \omega' = \begin{bmatrix} x \\ vx + y \end{bmatrix}$$

ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu dönüşüm $\omega = (x, y)$ yi $v \in \mathbb{R}$ kadar Galile anlamında döndürmek demektir. Bu harekete Galile düzlemi $\mathbb{G}_2$ de *kırpma (SHEAR) hareketi* denir ve bu hareket Oy -eksenini (veya üzerindeki noktaları) değişmez bırakır. Ayrıca, $\mathbb{G}_2$ de Shear, öteleme ve dönmeyi içeren (genel) Galile hareketi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ v & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan bir dönüşümdür. Dolayısıyla, Galilean geometrisi, xOy -düzleminde

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = vx + y + b, \end{cases} \quad (1.1)$$

eşitlikleri ile verilen harekete sahip bir geometridir. (1.1) ile verilen hareket altında ya da buna denk olan

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = vx + y, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$$

eşitlikleri altında xOy -düzlemindeki şekillerin özellikleri değişmezdir (Yaglom 2012). Sonuç olarak, Galilean geometrisi bir doğru üzerindeki kayma ve ötelemenin klasik mekaniği olarak düşünülebilir.

Son yıllarda birçok yazar Galilean geometrisi ile ilgili birçok çalışma yapmıştır. Yaglom, 1979 senesinde yazdığı kitapta Galilean geometrisinin fiziksel temellerini ortaya koymuştur. 1984'te Röschel tarafından Galilean uzayı daha detaylı incelenmiştir.

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de, eğrisinin tanjant vektörü T ve normal vektörü N sabit bir vektör ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğriye, sırasıyla, *genel helis* ve *slant helis* denir (Struik 1961, Izumiya and Takeuchi 2004). Bir düzlem eğrisi üzerinde şekillendirilmiş silindirlerin jeodezikleridir (Lucas and Ortega-Yagües 2016). Galile uzayı $\mathbb{G}_3$ de ise genel helisler, konik eğriliği $\frac{\tau}{\kappa} \neq 0$ sabit olan eğrilere denir, burada $\kappa \neq 0$ ve τ , sırasıyla, eğrinin eğriliği ve burulmasıdır, (Röschel 1987). Özellikle, $a, b \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere $\mathbb{G}_3$ uzayında eğrilikleri $\tau(x) = \frac{b}{a}x$ ve $\kappa(x) = \frac{1}{a}x$ olan helisler bir koni üzerindedir ve koni üreteçlerinin izogonal yörüngeleri olma özelliğine sahiptir. Galile uzaylarında genel helislerin bazı karakterizasyonları (Ali 2012, Divjak and Milin-Šipuš 2002, Erjavec 2014, Ögrenmis *et al.* 2007, Nešović *et al.* 2018) ve (Küçükarslan Yüzbaşı and Yoon 2021) de bulunabilir.

Bu tezde, 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey üzerinde yatan eğrinin Darboux çatısı kullanarak $k = 0, 1, 2$ için k -tip slant helislerin tanımı verildi. Eğrinin geodezik eğriliği k_g , normal eğriliği k_n ve geodezik torsiyonu τ_g kullanarak yüzey üzerinde yatan bir eğrinin, eksenini izotropik olmayan bir 0-tip slant helis olması için gerek ve yeter koşul elde edildi. 1-tip slant helisler kavramı (Küçükarslan Yüzbaşı and Yoon 2021)'de tanımlanan izotropik eğriler kavramına karşılık gelmektedir. Ayrıca, 3-boyutlu Galilean uzay $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey üzerinde bir 1-tip ve 2-tip

slant helis olmadığı gösterildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

$\{x, y\}$ koordinat sistemi ile verilmiş bir düzlemi göz önüne alalım. (x, y) koordinatlarının t zamanına göre değişimini veren mekanik hareket

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t),\end{aligned}$$

formülleriyle verilir. $\{x, y\}$ koordinat sisteminin Ox ile Oy eksenlerinin bir α açısı kadar döndürülmesi ve O orjini O' noktasına ötelenmesiyle elde edilen yeni koordinat sistemine $\{x', y'\}$ diyelim. O halde, $\{x, y\}$ ile $\{x', y'\}$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada Ox – ve $O'x'$ –eksenleri arasındaki açının ölçüsü α ve yeni koordinat sisteminde O' nun koordinatları (a, b) ile gösterilmiştir.

Şimdi eğer $\{x, y\}$ nin O orjini v hızı ile $O'x'$ eksenine β açısı yapan I doğrusu boyunca ilerlerse, bu taktirde $\{x', y'\}$ ne göre O noktasının t zamanında $a(t)$ ve $b(t)$ koordinatları

$$\begin{aligned}a(t) &= a + v \cos \beta t, \\ b(t) &= b + v \sin \beta t,\end{aligned}$$

olup $t = 0$ da $\{x, y\}$ ye göre O nun koordinatları a ve b dir. Buradan $\{x', y'\}$ ve $\{x, y\}$ ye göre bir A noktasındaki (x', y') ve (x, y) koordinatları arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b,\end{aligned} \quad (2.2)$$

bulunur. Buda mekanik anlamlı tüm özelliklerin dönüşümler altında değişmeyen formler ile ifade edilebileceği demektir. Zamanın bütün mekanik kuralları sisteminde aynı olduğu düşünülürse, buna zaman orjiniindeki değişim,

$$t' = t + d$$

dönüşümde eklenebilir. Buradaki d yeni zaman sisteminde, eski zaman orjininin zamanıdır ($t = 0$ anında). Öyleyse

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta)t + a, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta)t + b,\end{aligned}$$

ve

$$t' = t + d,$$

elde edilir. Son verilen formül fizik uzay zamanda bir dönüşümdür. Bu şekildeki dönüşümlere *Galilei dönüşümleri* denir (Yaglom 2012).

Tanım 2.1 Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$, $\{w, f, I\}$ sıralı ideal şekline sahip 3-boyutlu projektif uzay $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de tanımlı bir Cayley-Klein uzayıdır. Burada, w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğrularının bir reel doğrusunu ve $I \in f$ ideal noktaların sabit eliptik evrimidir (Divjak 1997).

$\mathbb{G}_3$ uzayının bir reel modeli olarak, ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset \mathbb{G}_3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ ideale sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz. Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonunu, w ideal düzlemi $x_0 = 0$ ve f ideal doğrusunu $x_0 = x_1 = 0$ olmak üzere

$$\varepsilon : (0 : 0 : x_2 : x_3) \rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2),$$

dir.

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (1 : x : y : z)$$

ile tanımlı afin koordinatlarda $\mathbb{G}_3$ uzayının hareket grubu H_8 benzerlik grubu

$$\begin{cases} \bar{x} = a_{11} + a_{12}x, \\ \bar{y} = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos \varphi + a_{23}z \sin \varphi, \\ \bar{z} = a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin \varphi + a_{23}z \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.3)$$

formundadır. Burada, a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) ve φ birer gerçekte sayıdır. Özel olarak, $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galile uzayının $B_6 \subset H_8$ izometrilerinin hareket grubu elde edilir ve

$$B_6 \dots \dots \dots \begin{cases} x' = a + z, \\ y' = b + cx + y \cos \varphi + z \sin \varphi, \\ z' = d + ex - y \sin \varphi + z \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.4)$$

dir (Kamenarović 1991).

Uyarı 2.1 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de verilen hareket boyunca doğrular aşağıdaki şekilde dört sınıfa ayrılır.

- 1) *Reel non-izotropik doğrular*: f ideal doğrusunu kesmez
- 2) *Reel izotropik doğrular*: w ideal düzlemine ait olmayan, fakat f ideal doğrusunu kesen
- 3) *Reel olmayan non-izotropik doğrular*: f den başka w nin bütün doğrularıdır.
- 4) f _ideal doğrusu. (Kamenarović 1991)

Uyarı 2.2 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de noktalar

- (i) Esas noktalar (w üzerinde),
 - (ii) Mutlak olmayan ideal noktalar (f üzerinde olmayan)
 - (iii) Mutlak ideal (f üzerinde) noktalar
- olmak üzere üç sınıfa ayrılır (Röschel 1987).

Tanım 2.2 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de ortonormal baz $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ olmak üzere e_2 ile e_3 vektörlerine paralel olan düzlemlere, *Öklid düzlemler* ve e_2 ile e_3 vektörlerine paralel olmayan düzlemlere *genel durumdaki düzlemler* denir (Artıkbayev and Sokolov 1991).

Diğer bir ifade ile $\mathbb{G}_3$, 3–boyutlu Galilean uzayında $x = \text{sabit}$ düzlemi *Öklid düzlemi* denir. Çünkü, $\mathbb{G}_3$ uzayının indirgenmiş geometrisi Öklid dir. Aksi takdirde, $x = \text{sabit}$ düzlemine *izotropik düzlem* denir.

Her $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{G}_3$ için *skaler (iç) çarpım*

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} u_1 v_1 & , u_1 \neq 0 \text{ veya } v_1 \neq 0; \\ u_2 v_2 + u_3 v_3 & , u_1 = 0 \text{ ve } v_1 = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

ve skaler çarpma yardımıyla bir $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{G}_3$ vektörünün *normu*

$$\|u\| = \begin{cases} |u_1| & , u_1 \neq 0; \\ \sqrt{u_2^2 + u_3^2} & , u_1 = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca, $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{G}_3$ vektörlerinin *vektörel*

çarpıma

$$u \times_{\mathbb{G}} v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

ile tanımlıdır. Burada $e_2 = (0, 1, 0)$ ve $e_3 = (0, 0, 1)$ dir.

Tanım 2.3 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de izotropik olmayan iki birim vektör $a = (1, a_2, a_3)$ ve $b = (1, b_2, b_3)$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\varphi = \sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2},$$

dir. Diğer bir ifade ile; izotropik olmayan iki birim vektör arasındaki açının ölçüsü, vektör arasındaki uzaklık olarak tanımlanır (Röschel 1987).

Tanım 2.4 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir birim izotropik olmayan $x = (1, x_2, x_3)$ ve bir izotropik $y = (0, y_2, y_3)$ vektörleri aralarındaki açı ψ olmak üzere

$$\psi = \frac{x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{y_2^2 + y_3^2}}, \quad (2.8)$$

dir (Röschel 1987).

Tanım 2.5 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de izotropik iki vektör $c = (0, c_2, c_3)$ ve $d = (0, d_2, d_3)$ arasındaki açı ω , aralarındaki Öklid açısına eşittir. Yani,

$$\cos \omega = \frac{c_2 d_2 + c_3 d_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2} \sqrt{d_2^2 + d_3^2}}, \quad (2.9)$$

dir (Röschel 1987).

3. $\mathbb{G}_3$ DE EĞRİLER TEORİSİ

Tanım 3.1 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir eğri $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olsun. Eğer α eğrisinin bükülme noktası ve izotropik teğeti yoksa, yani; $\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) \neq 0$ ve $\dot{x}(t) \neq 0$ ise α ya *kabul edilebilir (admissible) eğri* denir.

Her kabul edilebilir (admissible) eğrinin parametrik ifadesi

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x)). \quad (3.1)$$

olup yay uzunluğu parametresi $ds = |\dot{x}(t)dt| = |dx|$ ile tanımlanır. Basit olması açısından, α eğrisinin yay uzunluğu parametresi olarak $ds = dx$ ve $s = x$ alabiliriz. α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ , sırasıyla,

$$\kappa(x) = \sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2}, \quad \tau(x) = \frac{y''(x)z'''(x) - y'''(x)z''(x)}{\kappa^2(x)}. \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca, α eğrisinin teğet vektörü T , asli normal vektörü N ve binormal vektörü B olmak üzere

$$\begin{aligned} T(x) &= (1, y'(x), z'(x)), \\ N(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x)), \\ B(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

dir. Buradan α eğrisinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \\ 0 & -\tau(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

olup

$$T \times N = B, \quad N \times B = 0, \quad B \times T = N, \quad (3.5)$$

dir. Dahası, (3.3) ve (3.4) eşitliklerini kullanarak

$$y''' = \frac{\kappa'}{\kappa} y'' - \tau z'', \quad z''' = \frac{\kappa'}{\kappa} z'' + \tau y'', \quad (3.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı α eğrisi boyunca hareket ettiğinde, Frenet çatısı bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. Bu eksenin doğrultusuna *Darboux vektörü* (*merkez düğüm*) denir ve

$$\begin{aligned} T'(x) &= D(x) \times T(x), \\ N'(x) &= D(x) \times N(x), \\ B'(x) &= D(x) \times B(x). \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan

$$D(x) = \tau(x)T(x) + \kappa(x)B(x). \quad (3.7)$$

vektörü ile ifade edilir.

Tanım 3.2 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir eğri φ ve $\{T, N, B\}$, φ boyunca pozitif Frenet çatısı olsun. Eğer κ ve τ , φ boyunca pozitif sabitlerse, bu taktirde φ ye Frenet çatısına göre bir *dairesel helis* denir (Ögrenmis *et al.* 2007).

Tanım 3.3 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de φ bir eğri ve $\{T, N, B\}$, φ boyunca Frenet çatısı olsun.

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

olacak şekilde φ eğrisine Frenet çatısına göre bir *genel helis* denir (Ögrenmis *et al.* 2007).

Tanım 3.4 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir φ eğrisinin normali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa φ eğrisine *slant helis* denir (Nešović *et al.* 2018).

3.1 $\mathbb{G}_3$ de Darboux çatısı

M , $\mathbb{G}_3$ uzayında C^2 -sınıfından bir yüzey ve parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{G}_3 \\ (u_1, u_2) &\longrightarrow X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

olsun. Burada, x, y ve z fonksiyonlarının u_i ($i = 1, 2$) ye göre kısmi türevlerini, sırasıyla, $x_{u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $y_{u_i} = \frac{\partial y}{\partial u_i}$ ve $z_{u_i} = \frac{\partial z}{\partial u_i}$ olarak göstereceğiz. Eğer bu yüzey için

$$X_{u_1} \neq 0, \quad X_{u_2} \neq 0, \quad X_{u_1} \times X_{u_2} \neq 0$$

şartları sağlanıyorsa bu regle yüzeye *regülerdir* denir (Divjak and Šipuš 2003). Ayrıca, M yüzeyinin birinci temel formu ds^2 nin matrisi

$$ds^2 = \begin{bmatrix} ds_1^2 & 0 \\ 0 & ds_2^2 \end{bmatrix},$$

şekilde verilir. Burada, X_{u_i} vektörlerinin yz -düzlemine $\tilde{X}_{u_i}$ izdüşümleri olmak üzere $i, j = 1, 2$ için $g_i = X_{u_i}$ ve $h_{ij} = \langle \tilde{X}_{u_i}, \tilde{X}_{u_j} \rangle$ olup $ds_1 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2$ ve $ds_2 = h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2$ dir.

Burada, M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$n = \frac{X_{u_1} \times_{\mathbb{G}} X_{u_2}}{\|X_{u_1} \times_{\mathbb{G}} X_{u_2}\|} = \frac{1}{w} (0, x_{u_2} z_{u_1} - x_{u_1} z_{u_2}, x_{u_1} y_{u_2} - x_{u_2} y_{u_1}),$$

ile tanımlı olup

$$w = \sqrt{(x_{u_2} z_{u_1} - x_{u_1} z_{u_2})^2 + (x_{u_1} y_{u_2} - x_{u_2} y_{u_1})^2}$$

dir.

$\mathbb{G}_3$ uzayında Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ile eğrilikleri $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ olan bir birim hız eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{G}_3$ olsun. Çatı vektörler alanları, eğrileri ve yüzeyleri incelemek için çok kullanışlı bir araç olmasına karşın M yüzeyi üzerindeki α eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı yüzeyinin geometrisini tanımlamak için yeterli değildir. Bu nedenle, α eğrisi ve M yüzeyinin geometrisi arasındaki ilişkiyi incelemek için α eğrisinin başka bir çatısına ihtiyacımız vardır. Bu çatıya, α eğrisinin *Galilean Darboux çatısı* denir ve $\{T, \zeta, \eta\}$ ile gösterilir. Burada, T, ζ ve η vektörleri, sırasıyla, α eğrisinin birim teğet vektör alanı ve α eğrisinin $\alpha(x)$ noktasındaki M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve $\zeta = \eta \times_{\mathbb{G}} T$ olan vektör alanıdır.

Dahası, α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ile Galilean Darboux çatısı $\{T, \zeta, \eta\}$ arasında

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix},$$

bir dönüşüm vardır. Burada, ϕ , M yüzeyinin normal vektörü η ile α nın binormal vektörü B arasındaki açıdır.

Diğer taraftan, α eğrisinin Galilean Darboux denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(x) \\ \zeta'(x) \\ \eta'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g(x) & \kappa_n(x) \\ 0 & 0 & \tau_g(x) \\ 0 & -\tau_g(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(x) \\ \zeta(x) \\ \eta(x) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

şekilde ifade edilir. Burada, κ_g , κ_n , ve τ_g fonksiyonlarına, sırasıyla, α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu denir (Şahin 2013).

Lemma 3.1 $\mathbb{G}_3$ uzayında bir yüzey M ve M üzerinde eğrilikleri κ_g , κ_n , ve τ_g olan birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. O halde,

- (i) α eğrisi M üzerinde bir geodezik eğridir $\iff \kappa_g = 0$;
 - (ii) α eğrisi M üzerinde bir asimptotik eğridir $\iff \kappa_n = 0$;
 - (iii) α eğrisi M üzerinde bir eğrilik çizgisidir $\iff \tau_g = 0$,
- (Şahin 2013).

4. $\mathbb{G}_3$ UZAYINDA BİR YÜZEY ÜZERİNDEKİ K-TİP SLANT HELİSLER

Bu bölümde, $\mathbb{G}_3$ uzayında bir M yüzey üzerinde $\{T, \zeta, \eta\}$ Darboux çatısını kullanarak k -tip slant helislerin tanımını vereceğiz. M yüzey üzerindeki bir eğrinin bir k -tip slant helis olması için gerekli ve yeterli koşulları eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu cinsinden vereceğiz. Ayrıca, helislerin, eksenlerinin vektörel ifadesini vereceğiz.

$\mathbb{G}_3$ uzayında $\mathbb{C}^2$ sınıfından bir yüzey M ve M nin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{G}_3 \\ (u_1, u_2) &\longrightarrow X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \end{aligned}$$

olsun. M yüzeyi üzerinde $\{T, \zeta, \eta\}$ Darboux çatılı birim hızlı bir eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

olmak üzere α eğrisinin parametrik ifadesi

$$\alpha(s) = X(u_1(s), u_2(s))$$

dir. O halde, α eğrisinin birim tanjant vektörü

$$T = \alpha'(s) = X_{u_1} \frac{du_1}{ds} + X_{u_2} \frac{du_2}{ds}$$

veya

$$T = \left(\underbrace{x_{u_1} \frac{du_1}{ds} + x_{u_2} \frac{du_2}{ds}}_{\frac{dx}{ds}}, \underbrace{y_{u_1} \frac{du_1}{ds} + y_{u_2} \frac{du_2}{ds}}_{\frac{dy}{ds}}, \underbrace{z_{u_1} \frac{du_1}{ds} + z_{u_2} \frac{du_2}{ds}}_{\frac{dz}{ds}} \right) \quad (4.1)$$

olarak yazabiliriz. Burada $X_{u_1} = \frac{\partial X}{\partial u_1} = (x_{u_1}, y_{u_1}, z_{u_1})$ ve $X_{u_2} = \frac{\partial X}{\partial u_2} = (x_{u_2}, y_{u_2}, z_{u_2})$ dir.

Ayrıca, T birim izotropik olmayan bir vektör olduğundan

$$\frac{dx}{ds} = x_{u_1} \frac{du_1}{ds} + x_{u_2} \frac{du_2}{ds} = 1$$

dir. Dahası, α eğrisinin Darboux vektörleri

$$\begin{aligned} T &= \left(1, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \\ \eta &= \frac{1}{w} (0, x_{u_2}z_{u_1} - x_{u_1}z_{u_2}, x_{u_1}y_{u_2} - x_{u_2}y_{u_1}) = (0, \eta_2, \eta_3) \\ \zeta &= \eta \times_{\mathbb{G}} T = (0, \eta_3, -\eta_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{x_{u_2}z_{u_1} - x_{u_1}z_{u_2}}{w} \big|_{\alpha(s)}, \\ \eta_3 &= \frac{x_{u_1}y_{u_2} - x_{u_2}y_{u_1}}{w} \big|_{\alpha(s)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dir. Şimdi

$$T = V_0, \quad \zeta = V_1, \quad \eta = V_2.$$

olmak üzere aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.1 $\mathbb{G}_3$ uzayında bir M yüzey üzerinde $\{V_0, V_1, V_2\}$ Darboux çatılı birim hızlı bir eğri α olsun. Eğer, $k = 0, 1, 2$ için $U \in \mathbb{G}_3$ sıfırdan farklı bir sabit vektör var ve V_k ile U arasındaki açı sabit ise α eğrisine bir k -tip *slant helis* ve U sabit vektörüne de *helisin eksenini* denir.

Burada, $k = 0, 1, 2$ için Darboux çatı vektörleri V_k ların sabit olması durumunu ele almayacağız. Çünkü, V_k lar sabit olduğunda herhangi bir sabit vektörle sabit açı yapacağı aşikardır. Şimdi, α eğrisinin 0-tip, 1-tip ve 2-tip slant helis olduğu durumları inceleyeceğiz.

4.1 0-tip slant helisler

Kabul edelim ki α eğrisi bir 0-tip slant helis olsun. O halde, Tanım 4.1 dan $\mathbb{G}_3$ uzayında sıfır olmayan sabit bir U vektörü vardır öyleki T ile U arasındaki açı sabittir. Burada, **A)** U birim izotropik olmayan vektör; **B)** U birim izotropik vektör olmak üzere iki durum vardır.

A) U birim izotropik olmayan vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü T de bir izotropik olmayan vektör olduğundan Tanım 2.3 dan $T = (1, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ ile $U = (1, u_2, u_3)$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\varphi^2 = \left(\frac{dy}{ds} - u_2\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} - u_3\right)^2 = c^2 = \text{sabit} \neq 0,$$

dir. Öyleyse

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ds} - u_2 &= c \sin \theta, \\ \frac{dz}{ds} - u_3 &= c \cos \theta,\end{aligned}\tag{4.4}$$

yazılabilir. Burada, $\theta = \theta(s)$ dir. Yukarıdaki ifadelerin s ye göre iki kez türevlerini alırsak

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} &= c\theta' \cos \theta, & \frac{d^2z}{ds^2} &= -c\theta' \sin \theta, \\ \frac{d^3y}{ds^3} &= c\theta'' \cos \theta - c(\theta')^2 \sin \theta, & \frac{d^3z}{ds^3} &= -c\theta'' \sin \theta - c(\theta')^2 \cos \theta,\end{aligned}\tag{4.5}$$

olarak elde edilir.(3.9) eşitliğinden

$$T' = \left(0, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right) = \kappa_g \zeta + \kappa_n \eta\tag{4.6}$$

olup (4.6) eşitliği kullanılarak

$$\left(0, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right) = \kappa_g (0, \eta_3, -\eta_2) + \kappa_n (0, \eta_2, \eta_3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \kappa_g \eta_3 + \kappa_n \eta_2\tag{4.7}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\kappa_g \eta_2 + \kappa_n \eta_3\tag{4.8}$$

dir. (4.7) ve (4.8) den

$$c\theta' \cos \theta = \kappa_n \eta_3 + \kappa_g \eta_2$$

$$-c\theta' \sin \theta = -\kappa_g \eta_2 + \kappa_n \eta_3$$

olup

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \frac{c}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} (\kappa_n \theta' \cos \theta + \kappa_g \theta' \sin \theta) \\ \eta_3 &= \frac{c}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} (\kappa_g \theta' \cos \theta - \kappa_n \theta' \sin \theta)\end{aligned}\tag{4.9}$$

bulunur. (4.6) eşitliğinin s ye göre türevi alınır ve (3.9) eşitliği kullanılırsa

$$T'' = (k_g' - k_n \tau_g) \zeta + (k_n' + k_g \tau_g) \eta$$

eşitliği elde edilir. (4.2) eşitliği kullanılarak yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{d^3 y}{ds^3} &= (\kappa'_n + \kappa_g \tau_g) \eta_2 + (\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) \eta_3 \\ \frac{d^3 z}{ds^3} &= -(\kappa'_g - \kappa_n \tau_g) \eta_2 + (\kappa'_n + \kappa_g \tau_g) \eta_3\end{aligned}\quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) eşitliklerinden

$$c\theta'' \cos \theta - c(\theta')^2 \sin \theta = \kappa'_n \eta_2 + \kappa'_g \eta_3 - \tau_g(-\kappa_g \eta_2 + \kappa_n \eta_3)$$

dir ve (4.8) eşitliğinden

$$c\theta'' \cos \theta - c(\theta')^2 \sin \theta = \kappa'_n \eta_2 + \kappa'_g \eta_3 + c\tau_g \theta' \sin \theta$$

olup (4.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}c\theta'' \cos \theta - c(\theta')^2 \sin \theta &= \frac{c\kappa'_n}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}(\kappa_n \theta' \cos \theta + \kappa_g \theta' \sin \theta) \\ &\quad + \frac{c\kappa'_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}(\kappa_g \theta' \cos \theta - \kappa_n \theta' \sin \theta)\end{aligned}$$

dir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$c\theta'' \cos \theta - c(\theta')^2 \sin \theta = c \frac{\kappa'_n \kappa_n + \kappa'_g \kappa_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \theta' \cos \theta + c \left(\frac{\kappa'_n \kappa_g + \kappa'_g \kappa_n}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} + \tau_g \right) \theta' \sin \theta$$

elde edilir. Burada, $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ katsayıları eşitlenirse

$$\theta'' = \frac{\kappa'_n \kappa_n + \kappa'_g \kappa_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \theta' \quad (4.11)$$

$$(\theta')^2 = - \left(\frac{\kappa'_n \kappa_g + \kappa'_g \kappa_n}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} + \tau_g \right) \theta' \quad (4.12)$$

bulunur. Eğer $\theta' = 0$ ise α eğrisinin tanjant vektörü $T = \text{sabit}$ dir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde, $\theta' \neq 0$ dir. Dolayısıyla, (4.12) eşitliğinden

$$\theta' = - \frac{\kappa'_n \kappa_g - \kappa'_g \kappa_n}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} - \tau_g$$

ve (4.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\theta'' &= \frac{\kappa'_n \kappa_n + \kappa'_g \kappa_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \theta' \\ \frac{\theta''}{\theta'} &= \frac{\kappa'_n \kappa_n + \kappa'_g \kappa_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \\ \ln \theta' &= \frac{1}{2} \ln (\kappa_g^2 + \kappa_n^2) + C_1 \\ \theta' &= A' \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}\end{aligned}\quad (4.13)$$

dir. Burada C_1 interpol sabiti olup $A \in \mathbb{R}^+$ dir. (4.13) eşitliklerinden

$$A(\kappa_g^2 + \kappa_n^2) = \frac{\kappa'_g \kappa_n - \kappa'_n \kappa_g}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} - \tau_g$$

veya

$$\frac{\kappa'_g \kappa_n - \kappa'_n \kappa_g}{(\kappa_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} = \text{sabit} = A \quad (4.14)$$

dir.

Karşıt olarak

$$\frac{\kappa'_g \kappa_n - \kappa'_n \kappa_g}{(\kappa_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} = \text{sabit} = A \in \mathbb{R}^+ \quad (4.15)$$

olsun. U birim izotropik olmayan bir vektör olmak üzere

$$U = T + \frac{1}{A} \left(\frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \zeta - \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \eta \right) \quad (4.16)$$

olsun. (4.16) ifadesinin s ye göre türevi alınır ve (3.9) ile verilen Darboux çatı denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} U' &= k_g \zeta + k_n \eta + \frac{1}{A} \left(k_g \frac{k'_n k_g - k'_g k_n}{(k_g^2 + k_n^2)^{3/2}} \zeta + \frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} (\tau_g \eta) - k'_n \frac{k'_g k_n - k'_n k_g}{(k_g^2 + k_n^2)^{3/2}} \eta - \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} (-\tau_g \zeta) \right) \\ &= k_g \zeta + k_n \eta + \frac{1}{A} \left(\frac{k'_g k_n - k'_n k_g}{(k_g^2 + k_n^2)^{3/2}} (-k_g \zeta - k_n \eta) - \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} (-k_g \zeta - k_n \eta) \right) \\ &= k_g \zeta + k_n \eta + \frac{1}{A} \left(\frac{k'_g k_n - k'_n k_g}{(k_g^2 + k_n^2)^{3/2}} - \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \right) (-k_g \zeta - k_n \eta) \end{aligned}$$

olup (4.15) ifadesinden

$$U' = k_g \zeta + k_n \eta - k_g \zeta - k_n \eta = 0$$

olarak buluruz. Böylece U bir sabit vektördür. O halde, Tanım 2.3 dan kolayca T ile U arasındaki φ açısının $\varphi = |A|$ olduğu görülür. Dolayısıyla Tanım 4.1 dan α eksen U olan bir 0-tip slant helistir.

Teorem 4.1 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey M ve M üzerinde $\{T, \zeta, \eta\}$ Darboux çatılı bir eğri α olsun. O halde α bir 0-tip slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\kappa'_g \kappa_n - \kappa'_n \kappa_g}{(\kappa_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}} = \text{sabit}$$

dir. Burada $\tau_g \neq 0$, $\kappa_g \neq 0$, ve $\kappa_n \neq 0$ dir.

Sonuç 4.1 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir yüzey M ve M üzerinde bir 0-tip slant helis α olsun. O halde α nın eksenini

$$U = T + \frac{1}{A} \left(\frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \zeta - \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \eta \right)$$

dır. Burada $A \in \mathbb{R}^+$ ve $A = \frac{\kappa'_g \kappa_n - \kappa'_n \kappa_g}{(\kappa_g^2 + \kappa_n^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}}$ dir.

B) U birim izotropik vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü T de bir izotropik vektör olduğundan Tanım 2.4 dan

$T = (1, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ ile $U = (0, u_2, u_3)$ arasındaki açı ψ olmak üzere

$$\psi = \frac{\frac{dy}{ds}u_2 + \frac{dz}{ds}u_3}{\underbrace{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}_1} = \frac{dy}{ds}u_2 + \frac{dz}{ds}u_3 = \text{sabit} \neq 0, \quad (4.17)$$

dir. Öyleyse

$$\frac{dy}{ds}u_2 + \frac{dz}{ds}u_3 = c$$

yazılabilir. Burada, $c \in \mathbb{R}_0$ dir. Yukarıdaki ifadelerin s ye göre türev alırsak

$$\frac{d^2y}{ds^2}u_2 + \frac{d^2z}{ds^2}u_3 = 0$$

olarak elde edilir. (4.6) ve (4.7) dan

$$(\kappa_n \eta_2 + \kappa_g \eta_3) u_2 + (-\kappa_g \eta_2 + \kappa_n \eta_3) u_3 = 0 \quad (4.18)$$

veya

$$(u_2 \kappa_n - u_3 \kappa_g) \eta_2 + (u_2 \kappa_g + u_3 \kappa_n) \eta_3 = 0$$

elde edilir. $\eta_2 \neq 0$ ve $\eta_3 \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} u_2 \kappa_n - u_3 \kappa_g = 0 \\ u_2 \kappa_g + u_3 \kappa_n = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

yazılabilir. Burada birinci denklemden

$$u_2 = \frac{\kappa_g}{\kappa_n} u_3, \quad \kappa_n \neq 0 \text{ ve } \kappa_g \neq 0$$

dir ve ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}{\kappa_n} \right) u_3 = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada $u_3 = 0$ ve $u_2 = 0$ elde edilir. Öyleyse $U = (0, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ dır. Dolayısıyla, bu bir çelişki olup kabultümüz yanlıştır. Diğer bir ifade ile, eksen izotropik $U = (0, u_2, u_3)$ olan bir T -slant helis yoktur.

Teorem 4.2 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de eksen izotropik vektör olan bir 0-tip slant helis yoktur.

4.2 1-tip slant helisler

A) U birim izotropik olmayan vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü ζ de bir izotropik olmayan vektör olduğundan Tanım 2.4 dan $\zeta = (0, \eta_3, -\eta_2)$ ile $U = (1, u_2, u_3)$ arasındaki açı ψ olmak üzere,

$$\psi = \frac{\eta_3 u_2 - \eta_2 u_3}{\underbrace{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}_1} = \text{sabit, ve } u_2, u_3 \in \mathbb{R}_0$$

dir. Burada, $\eta = (0, \eta_2, \eta_3)$, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olduğundan

$$\|\eta\| = \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} = 1 \quad (4.21)$$

dir. Öyleyse

$$\psi = \eta_3 u_2 - \eta_2 u_3 = c, \quad (4.22)$$

yazılabilir. (4.22) eşitliğinin s ye göre bir kez türevlerini alırsak

$$\eta_3' u_2 - \eta_2' u_3 = 0,$$

olup (3.9) ifadesinden

$$\begin{aligned} (\tau_g \eta_2) u_2 - (\tau_g \eta_3) u_3 &= 0, \\ (\tau_g u_2) \eta_2 - (\tau_g u_3) \eta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. $\zeta = (0, \eta_3, -\eta_2) \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} \tau_g u_2 = 0 \\ \tau_g u_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi elde ederiz. Burada,

1) $u_2 = 0, u_3 = 0$ ise $u_2^2 + u_3^2 = 1$ olmasıyla çelişir.

2) $\tau_g = 0$ ise ζ bir sabit vektör olacağından kabulümüzle çelişir. O halde eksen izotropik olmayan bir 1–tip slant helis yoktur.

$\overline{B}$) U birim izotropik vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü ζ de bir birim izotropik olmayan vektör olduğundan Tanım 2.5 den $\zeta = (0, \eta_3, -\eta_2)$ ile $U = (0, u_2, u_3)$ arasındaki açı ω olmak üzere

$$\cos \omega = \frac{\eta_3 u_2 - \eta_2 u_3}{\underbrace{\sqrt{-\eta_2^2 + \eta_3^2}}_1 \underbrace{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}_1} = \text{sabit} \neq 0, \text{ ve } u_2, u_3 \in \mathbb{R}_0$$

olup

$$\cos \omega = \eta_3 u_2 - \eta_2 u_3 = c = \text{sabit}, \quad (4.24)$$

yazılabilir. Burada, $c \in \mathbb{R}_0$ dir. Yukarıdaki ifadelerin s ye göre, bir, kez türevlerini alırsak;

$$\eta_3' u_2 - \eta_2' u_3 = 0, \quad (4.25)$$

olup (3.9) ifadesinden

$$\tau_g \eta_3 u_2 - \tau_g \eta_2 u_3 = 0,$$

veya

$$(\tau_g u_2) \eta_3 - (\tau_g u_3) \eta_2 = 0,$$

dır. Buradan

$$\begin{cases} u_2 \tau_g = 0 \\ u_3 \tau_g = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada,

1) $u_2 = 0, u_3 = 0$ ise $u_2^2 + u_3^2 = 1$ olmasıyla çelişir.

2) $\tau_g = 0$ ise ζ bir sabit vektör olacağından kabulümüzle çelişir. O halde eksen izotropik olmayan bir 1 – tip slant helis yoktur.

Öyleyse aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3 3–boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir M yüzey üzerinde bir 1 – tip slant helis yoktur.

4.3 2–tip slant helisler

$\tilde{\mathbf{A}}$) U birim izotropik olmayan vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü η de bir izotropik olmayan vektör olduğundan Tanım 2.4 dan $\eta = (0, \eta_2, \eta_3)$ ile $U = (1, u_2, u_3)$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\varphi = \frac{\eta_2 u_2 + \eta_3 u_3}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}} = \text{sabit}, \text{ ve } u_2, u_3 \in \mathbb{R}_0 \quad (4.26)$$

dir. Burada, $\eta = (0, \eta_2, \eta_3)$, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olduğundan

$$\|\eta\| = \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} = 1 \quad (4.27)$$

dir. Öyleyse

$$\varphi = \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 = \text{sabit} \quad (4.28)$$

yazılabilir. (4.28) eşitliğinin s ye göre bir kez türevlerini alırsak

$$\varphi' = \eta_2' u_2 + \eta_3' u_3 = 0,$$

olup (3.9) ifadesinden

$$\varphi' = (\tau_g u_2) \eta_3 - (\tau_g u_3) \eta_2 = 0,$$

elde edilir. $\eta = (0, \eta_2, \eta_3) \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} u_2 \tau_g = 0 \\ u_3 \tau_g = 0 \end{cases}$$

sistemi elde ederiz. Burada

- 1) $u_2 = 0, u_3 = 0$ ise $u_2^2 + u_3^2 = 1$ olmasıyla çelişir.
- 2) $\tau_g = 0$ ise η bir sabit vektör olacağından kabulümüzle çelişir. O halde eksenli izotropik olmayan bir 2–tip slant helis yoktur.

$\tilde{\mathbf{B}}$) U birim izotropik vektör:

α eğrisinin tanjant vektörü η de bir izotropik olmayan vektör olduğundan Tanım 2.5 den $\eta = (0, \eta_2, \eta_3)$ ile $U = (0, u_2, u_3)$ arasındaki açı β olmak üzere

$$\cos \beta = \frac{\eta_2 u_2 + \eta_3 u_3}{\underbrace{\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}}_1 \underbrace{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}_1} = \text{sabit} \neq 0, \text{ ve } u_2, u_3 \in \mathbb{R}_0$$

olup

$$\cos \beta = \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 = c = \text{sabit}, \quad (4.29)$$

yazılabilir. Burada, $c \in \mathbb{R}_0$ dir. Yukarıdaki ifadelerin s ye göre bir kez türevlerini alırsak;

$$\eta_2' u_2 + \eta_3' u_3 = 0,$$

olup (3.9) ifadesinden

$$\tau_g \eta_2 u_2 + \tau_g \eta_3 u_3 = 0, \quad (4.30)$$

veya

$$(\tau_g \eta_2) u_2 + (\tau_g \eta_3) u_3 = 0,$$

dir. Burada

$$\begin{cases} u_2 \tau_g = 0 \\ u_3 \tau_g = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $u_3 = 0$ ve $u_2 = 0$ elde edilir. Öyleyse $U = (0, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ dır. Dolayısıyla, bu bir çelişki olup kabulümüz yanlıştır. Diğer bir ifade ile, eksenli izotropik $U = (0, u_2, u_3)$ olan bir η -slant helis yoktur.

Teorem 4.4 3-boyutlu Galilean uzayı $\mathbb{G}_3$ de bir M yüzey üzerinde bir 2-tip slant helis yoktur.

KAYNAKLAR

- Ali, A.T. 2012. Position vectors of curves in the galilean space $\mathbb{G}_3$. *Matematički vesnik*, 64(249), 200-210.
- Artıkbayev, A. and Sokolov, D. 1991. *Geometria v Tselom v Ploskom Prostranstve-vremeni*. Taškent FAN, Özbekistan.
- Divjak, B. and Milin-Šipuš, Z. 2002. Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 98(3), 203-215.
- Divjak, B. 1997. *Geometrija pseudogalilejevih prostora*. Ph. D. Thesis, University of Zagreb, Croatia.
- Divjak, B. and Šipuš, Ž.M. 2003. Minding isometries of ruled surfaces in pseudo-Galilean space. *Journal of Geometry*, 77(1-2), 35-47.
- Erjavec, Z. 2014. On generalization of helices in the Galilean and the pseudo-Galilean space. *Journal of Mathematics Research*, 6(3), 39-50.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-164.
- Kamenarović, I., 1991. Margaret J. Pearson: Wang Fu and the Comments of a Recluse. *Bulletin de l'École française d'Extrême-Orient*, 78(1), pp.365-365.
- Küçükarslan Yüzbaşı, Z. and Yoon, D.W. 2021. On geometry of isophote curves in Galilean space. *AIMS Mathematics*, 6(1), 66-76.
- Lucas, P. and Ortega-Yagües, J.A. 2016. Slant helices in the Euclidean 3-space revisited. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 23(1), 133-150.
- Nešović, E., Öztürk, U. and Koç Öztürk, E. B. 2018. On T-Slant, N-Slant and B-Slant helices in galilean space $\mathbb{G}_3$. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 16(2), 187-199.
- Ögrenmis, A.O., Ergut, M. and Bektas, M. 2007. On the helices in the Galilean space $\mathbb{G}_3$. *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*, 31(2), 177-181.
- Röschel, O. 1987. *Die geometrie des Galileischen raumes*, volume 256 of *Berichte [Reports]*, Forschungszentrum Graz, Mathematisch-Statistische Sektion, Graz, 1987.
- Struik, D.J. 1961. *Differential geometry*, second ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Şahin, T. 2013. Intrinsic equations for a generalized relaxed elastic line on an oriented surface in the Galilean space. *Acta Mathematica Scientia*, 33(3), 701-711.
- Yaglom, I.M. 2012. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: An elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity*. Springer Science & Business Media.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bahar BIYIKLI

Yabancı Dili : Türkçe, İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Belen Lisesi (2009)

Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik bölümü (2016)

Yüksek Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (2021)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: -Çankırı Belediyesi, Fatih Sultan
Mehmet Çocuk Akademisi (2018-...)