



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANA BİLİM DALI**

KÜTRİT DURUMLARI İÇİN BAZI KUANTUM HATA DÜZELTME KODLARININ İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Hala SAİD

Danışman
Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

SAMSUN
2021

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANA BİLİM DALI**



**KÜTRİT DURUMLARI İÇİN BAZI KUANTUM HATA DÜZELTME
KODLARININ İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Hala SAID

Danışman

Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

SAMSUN
2021

TEZ KABUL VE ONAYI

Hala SAID tarafından, **Prof. Dr. Azmi GENÇTEN** danışmanlığında hazırlanan **“Kütrit durumları için bazı kuantum hata düzeltme kodlarının incelenmesi”** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 1.7.2021 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	İmza	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fizik Ana Bilim Dalı		☐ Kabul
			☐ Ret
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Azmi GENÇTEN Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fizik Ana Bilim Dalı		☐ Kabul
			☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Selçuk ÇAKMAK Samsun Üniversitesi Yazılım Mühendisliği Ana Bilim Dalı		☐ Kabul
			☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

ONAY

... / ... / ...

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

01/07/2021

Hala SAİD

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: Kütrit durumları için bazı kuantum hata düzeltme kodlarının incelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 15.06.2021 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 12

Tek kaynak oranı : % 3 çıkmıştır.

01/07/2021

Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

ÖZET

KÜTRİT DURUMLARI İÇİN BAZI KUANTUM HATA DÜZELTME KODLARININ İNCELENMESİ

Hala SAİD

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Fizik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Temmuz/2021

Danışman: Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Kuantum hata düzeltme kodlarının (QECC) çoğu, iki boyutlu alt sistemler-kuantum bitleri veya kısa kübitlerden oluşan kuantum sistemleri için oluşturulmuştur. Bu çalışmanın amacı, kübitler yerine üç temel duruma sahip olan kütritleri kullanmaktır. Kuantum hata düzeltme dört ana adımdan oluşur: kodlama, hata algılama, hata düzeltme ve kod çözme.

Bu tezde, dört kuantum hata düzeltme kodu önerilmiştir. İlk önce üç kütrit trit-çevirme kuantum hata düzeltme koduyla başlanmıştır. Bu kod, döngüsel (kaydırma) hatalar olarak adlandırılan iki tür trit-çevirme hatasını düzeltebilir: saat yönünde kaydırma X_1 ve saat yönünün tersine kaydırma X_2 . İkinci kod, üç kütrit faz çevirmeli kuantum hata düzeltme kodudur. Bu kod için ayrıca Z_1 ve Z_2 olarak adlandırılan iki tip faz çevirme mümkündür. Üçüncü kod, dokuz kütrit kuantum hata düzeltme kodudur. Bu kod, üç kütrit trit-çevirme ve faz-çevirme kodların birleşimidir. Bu nedenle trit-çevirme, faz-çevirme ve hem trit- hem de faz-çevirme hatalarını düzeltebilir. Bu kodların hatayı (varsa) tespit etmesi için $CNOT$ ve $CNOT^{-1}$ kapıları ve yardımcı kütritler yardımıyla hangi kütrit'in bozuk olduğunu bilmek için bir ölçüm yapıyoruz. Ardından, hatayı düzeltmek için, bozulmakta olan kütrit üzerinde hatanın tersini uygularız. Son kod, beş kütrit kuantum hata düzeltme kodudur. Bu kod için, hatayı kodlamak ve tespit etmek için stabilizatör jeneratörlerini kullandık. Böylece, kübitler için var olan kuantum hata düzeltme kodlarının modifikasyonu, ilk defa bu tezde üç-kütritlik, dokuz-kütritlik ve beş-kütritlik kuantum hata düzeltme kodları geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Kuantum hata düzeltme, kübit, kütrit, kodlama, hata algılama, hata düzeltme, kod çözme, trit-çevirme, faz çevirme, $CNOT$ ve $CNOT^{-1}$ kapıları

ABSTRACT

AN INVESTIGATION OF SOME QUANTUM ERROR CORRECTION CODES FOR QUTRIT STATES

Hala SAID

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Physics

MSc, July/2021

Supervisor: Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Most quantum error-correction codes (QECC) have been constructed for quantum systems that are composed of two-dimensional subsystems-quantum bits or short qubits. The aim of this thesis is to use the qutrits instead of qubits in which they have three basis states. Quantum error correction consists of four major steps: encoding, error detection, error recovery, and decoding.

In this thesis, four quantum error correction codes are proposed. First we start by three qutrit trit-flip quantum error correction code. This code can correct two types of trit-flip errors in which called cyclic (shift) errors: clockwise-shift X_1 and anticlockwise-shift X_2 . The second code is three qutrit phase-flip quantum error correction code. For this code also two types of phase flip are possible called Z_1 and Z_2 . The third code is nine-qutrit quantum error correction code. This code is the combination of three qutrit trit-flip and phase-flip codes. Therefore it can correct trit-flip, phase-flip and both trit- and phase- flip errors. For these codes to detect the error (if there exists), we perform a measurement in order to know which qutrit was corrupted with the help of $CNOT$ and $CNOT^{-1}$ gates and ancillary qutrits. Then, to recover the error we apply the inverse of the error on the qutrit being corrupted. The last code is about five qutrit quantum error correction code. For this code we used the stabilizer generators to encode and detect the errors. So, by the modification of quantum error correction codes for qubits, three-qutrit, nine-qutrit and five-qutrit quantum error correction codes are developed and applied first in this thesis.

Keywords: . Quantum error correction, Qubits, Qutrits, encoding, error detection, error recovery, decoding, trit-flip error, phase-flip error, $CNOT$ and $CNOT^{-1}$ gates

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez yazım çalışmalarım süresince gerekli yönlendirmeleri yaparak tecrübelerinden yararlanma imkânı bulduğum, çalışmam boyunca hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan, her zaman yakın ilgi gördüğüm, araştırmamın her safhasında hoşgörüsünü benden esirgemeyen Danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Azmi GENÇTEN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında sabırları, ilgileri, anlayışları ile hep yanımda olan her düştüğümde kaldıran, her durumda benimle gurur duyan, emeklerini asla ödemeyeceğim canım annem, babam ve kardeşlerime canı gönülden teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca çalışmalarımın yürütülmesinde her zaman yanımda olan, yardım ve desteklerini esirgemeyen ekip arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Hala SAİD

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	.iii
ABSTRACT.....	.iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	.v
İÇİNDEKİLER.....	.vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	.vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	.viii
TABLolar DİZİNİ.....	.ix
1.GİRİŞ.....	1
2.KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Kuantum Mekanikinin Postülatları.....	5
2.2. Kuantum Bilgi İşleme.....	6
2.2.1. Kübitler.....	6
2.2.2. Kuantum Mantık Kapıları.....	8
2.2.3. Kuantum Mantık Devreleri.....	13
2.2.4. Kütritler	14
2.3. Hata Düzeltme.....	18
2.3.1 Klasik Hata Düzeltme	19
2.3.2. Kuantum Hata Düzeltme	21
2.4. Üç ve Dokuz Kübitlik Kuantum Hata Düzeltme Kodları.....	23
2.4.1. Üç Kübitlik Bit-Çevirme Kodu.....	23
2.4.2. Üç Kübitlik Faz Çevirme Kodu	25
2.4.3. Dokuz Kübitlik Shor Kodu.....	27
2.5. Sabitleyici Kuantum Hata Düzeltme Kodları	29
2.5.1. Sabitleyici Kuantum Hata Düzeltme Gösterimi	31
2.5.2. Yedi Kübitlik Steane Kuantum Hata Düzeltme Kodu	32
2.5.3. Beş Kübitlik Kuantum Hata Düzeltme Kodu	38
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	42
3.1. Kuantum Mantık Devrelerinin Analizi	42
3.2. Kütritler İçin Genelleştirilmiş Pauli Operatörleri.....	43
3.3. Küritlerde Özdeşlikler	44
4.BULGULAR VE TARTIŞMA.....	47
4.1. Üç Kütritlik Kuantum Hata Düzeltme Kodları	47
4.1.1. Üç Kütritlik Trit-Çevirme Kuantum Hata Düzeltme Kodu.....	47
4.1.2. Üç Kütritlik Faz-Çevirme Kuantum Hata Düzeltme Kodu.....	51

4.2. Dokuz Kütritik Kuantum Hata Düzeltme Kodu.....	54
4.3. Beş Kütritik Kuantum Hata Düzeltme Kodu	61
5.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	68
KAYNAKLAR.....	71



SİMGELER VE KISALTMALAR

QECC: Kuantum hata düzeltme kodu

CNOT: Kontrollü-değil

SWAP: Değiş-tokuş

CCNOT: Kontrol kontrol-değil

CSWAP: Kontrollü değiş-tokuş

H: Hadamard

LUT: Arama tablosu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir kübit'in Bloch Küresi üzerindeki geometrik temsili	7
Şekil 2.2. $CNOT_a$ ve $CNOT_b$ mantık kapıları şeması	11
Şekil 2.3. $SWAP$ mantık kapısı	12
Şekil 2.4. $CCNOT$ mantık kapısı.	13
Şekil 2.5. $CSWAP$ mantık kapısı	13
Şekil 2.6. Kuantum dolanıklık oluşturma devresi	14
Şekil 2.7. Klasik bit çevirme kanalı.....	19
Şekil 2.8. Üç kübitlik kodlamayı gerçekleştirmek için bir devre	24
Şekil 2.9. Üç kübit çevirmeli kod hata algılama ve düzeltme devresi.....	25
Şekil 2.10. Kod çözme devresi.....	25
Şekil 2.11. Üç kübitlik faz çevirme kodlama devresi	26
Şekil 2.12. Üç kübitlik faz çevirmeli hata düzeltme ve kod çözme devresi	27
Şekil 2.13. Dokuz kübitlik Shor kod kodlama devresi	28
Şekil 2.14. Dokuz kübitlik Shor kodu için hata düzeltme ve kod çözme devresi	29
Şekil 2.15. Bir $CNOT$ kapısı ile Hadamard-konjuge Z kapısının özdeşliği	30
Şekil 2.16. Üç kübitlik sabitleyeci hata düzeltme	30
Şekil 2.17. Steane'in kodu için kodlama devresi.....	33
Şekil 2.18. Steane kodunun jeneratörlerini ölçmek için devre şeması	37
Şekil 2.19. Beş kübitlik hata düzeltme kodunun kodlama devresi	38
Şekil 2.20. Beş kübitlik kodun sendrom ölçümü için kuantum devresi.....	40
Şekil 3.1 (a) Seri bağlı kuantum devresi, (b) Paralel bağlı kuantum devresi	42
Şekil 3.2. Küritlerde $CNOT_a^{-1}(3)$ ile $CNOT_a^2(3)$ arasındaki özdeşlik.....	45
Şekil 3.3. Küritlerde $CNOT$ lar arasındaki özdeşlik	46
Şekil 3.4. Küritlerde $CNOT$ lar arasındaki özdeşlik	46
Şekil 4.1. Üç küritlik trit-çevirmeli kodlama devresi	48
Şekil 4.2. Üç küritlik trit-çevirmeli hata algılama ve düzeltme devresi	49
Şekil 4.3. Üç küritlik çevirmeli kod çözme devresi.....	51
Şekil 4.4. Üç küritlik faz çevirmeli kod kodlama devresi.....	52
Şekil 4.5. Üç küritlik faz çevirme kodunun hata düzeltme ve kod çözme devresi....	53
Şekil 4.6. Dokuz küritlik Shor kodlama devresi.	56
Şekil 4.7. Dokuz küritlik hata bilirlleme, düzeltme ve kod çözme devresi	57
Şekil 4.8. Beş küritlik kodun sendrom ölçümü için kuantum devresi	67

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Tek kübitlik bazı mantık kapılarının sembol ve matrisleri.....	10
Tablo 2.2. Bell durumlarının elde edilmesi.	14
Tablo 2.3. Üç kübitlik bit çevirmeli kod LUT	24
Tablo 2.4. Üç kübit bit çevirme kodu için sendrom arama tablosu.....	31
Tablo 2.5. Yedi kübitlik kod sözcükleri üzerine uygulanan operatörler kümesi.....	33
Tablo 2.6. Steane yedi kübit kodu için tek hata operatörleri ve her operatörle komütatif olmayan jeneratör (ler).....	35
Tablo 2.7. Steane kodunun sendrom araması işlemleri	36
Tablo 2.8. Steane'nin yedi kübitlik kodu için tekli hatalar ve ilgili sendromlar	36
Tablo 2.9. Beş kübitlik kod için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri.....	40
Tablo 2.10. Beş kübitlik kodun sendrom aramasının işlemleri.....	41
Tablo 2.11. Beş kübitlik kodun tek hataları ve bunlara karşılık gelen sendromları ...	41
Tablo 3.1. Kütritler için genelleştirilmiş Pauli operatörleri	44
Tablo 4.1. Üç kütritlik trit çevirme kodu arama tablosu	50
Tablo 4.2. Üç kütrit faz çevirmeli kod Arama Tablosu	54
Tablo 4.3. Dokuz kütritlik ikinci aşama Arama Tablosu	61
Tablo 4.4. Beş kütritlik sabitleyici jeneratörleri	62
Tablo 4.5. Beş kütritlik kod için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri.....	65
Tablo 4.6. Beş kütritlik kodun sendrom aramasının işlemleri	66
Tablo 4.7. Beş kütritlik kodun tek hataları ve bunlara karşılık gelen sendromları.....	67

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniği, atomlar ve atom altı parçacıklar ölçeğinde doğanın fiziksel özelliklerinin bir tanımını sağlayan fizikte temel bir teoridir. Kuantum kimyası, kuantum alan teorisi, kuantum teknolojisi ve kuantum bilgi bilimi dahil olmak üzere tüm bunlar kuantum mekaniğini kullanır. Kuantum mekaniği, bilimsel teorilerimizin eşzamanlı olarak en başarılı ve en gizemli olanı olma gibi ilginç bir ayrıcalığa sahiptir. 1900'den 1930'lara kadar dikkate değer bir şekilde uyum içinde geliştirilmiştir ve daha sonra uygulanmaya başlanmıştır. Kuantum mekaniği klasik fizikle açıklanamayan siyah cisim ışımasının Max Planck tarafından 1900 yılında açıklanmasıyla başlamıştır. Daha sonra Albert Einstein 1905'de Fotoelektrik olayı açıklamıştır. Erken kuantum teorisi, 1920'lerin ortalarında Niels Bohr, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born ve diğerleri tarafından derinlemesine yeniden tasarlanmıştır. Böylece kuantum mekaniğinin temel prensipleri ve teorisi 1930 lara kadar anlaşılmıştır. Daha sonra 1947 de transistörün keşfiyle teknolojideki uygulamaları başlamıştır. Günümüze kadar olan teknolojik gelişmeler kuantum mekaniğinden kaynaklanır.

İlk defa kuantum bilgisayar fikri 1980 yılında Benioff tarafından ileri sürülmüştür (Benioff, 1980). Daha sonra Feynman 1982 yılında hiçbir klasik bilgisayarın üstel bir yavaşlama olmadan belirli kuantum olaylarını simüle edemeyeceğini düşünmüş ve böylece kuantum mekaniksel etkilerin hesaplamaya gerçekten yeni bir şeyler katması gerektiğini anlamıştır (Feynman 1982). 1985 yılında, Feynman'ın fikirleri, bir kuantum Turing makinesinin anlatıldığı ufuk açıcı bir makalede Deutsch tarafından detaylı olarak açıklanmıştır (Deutsch, 1985). Kuantum bilgisayarlarla ilgili alana genellikle kuantum hesaplama denir ve bilgisayar biliminde umut verici bir alan olarak kabul edilir. Kuantum bilgisayarlar, hesaplamaları geleneksel olanlardan çok farklı gerçekleştirerek kuantum mekaniği teorisine dayanarak hesaplama yapar. Kuantum bilgisayarın, kuantum fiziği bilimine dayanan bir tür yeni cihaz olduğu söylenebilir. Kuantum fiziği, atomlar, elektronlar ve fotonlar gibi temel parçacıkların davranışını tanımlar. Yani kuantum bilgisayar, bu parçacıkların davranışını kontrol ederek, normal bilgisayarlarımızdan tamamen farklı bir şekilde çalışır. Pek çok açıdan modern teknoloji, kuantum etkilerinin önemli

olduğu bir ölçekte işlemektedir. Kuantum bilgisayarların belirli hesaplama görevlerini klasik bilgisayarlardan katlanarak daha hızlı gerçekleştirmesi bekleniyor.

Özellikle, Deutsch, kuantum mekaniğindeki süperpozisyon ilkesine dayanan kuantum paralellik tekniğini tanıttı. Bu yöntemle bir kuantum Turing makinesi, aynı bant üzerindeki birçok girdiyi kodlayabilir ve tüm girdiler üzerinde aynı anda bir hesaplama yapabilir. Ayrıca, kuantum bilgisayarların, klasik bilgisayarların ancak çok verimsiz bir şekilde gerçekleştirebileceği belirli hesaplama türlerini gerçekleştirebileceği öne sürülmüştür. En çarpıcı ilerlemelerden biri Shor tarafından 1994 yılında yapıldı (Shor, 1994). Shor Kuantum paralelizmin gücünü kullanarak, kuantum bilgisayarlarda asal çarpanlara ayırma için bir polinom-zaman algoritması keşfetti. 1996'da Grover, kuantum hesaplama için bir arama algoritması geliştirdi (Grover, 1996). Veritabanı araması ve birincil çarpanlara ayırma, sırasıyla bilgisayar bilimi ve kriptografide merkezi problemler olduğundan ve bunlar için kuantum algoritmaları klasik olanlardan çok daha hızlı olduğundan Shor ve Grover'ın çalışmaları, kuantum hesaplama yoğun bir araştırmayı teşvik etti. O zamandan beri, kuantum hesaplama son derece heyecan verici ve hızla büyüyen bir araştırma alanı oldu. Kuantum bilgisayarlardaki temel bilgi birimi kübit olarak adlandırılır. Hem 0 hem de 1 durumlarının çakıştığı süperpozisyon durumlarına dayanır. Şu anki bilgisayarlar bilgiyi yalnızca 0 ve 1 değerine sahip olabilen bir bit aracılığıyla temsil eder. Öte yandan, kuantum bilgisayarlar bitlerden daha fazla bilgiyi temsil edebilen kübitleri kullanır.

Gürültü, bilgi işleme sistemlerinin büyük bir belasıdır. Mümkün olduğunda sistemlerimizi gürültüyü tamamen engelleyecek şekilde kurarız ve bunun mümkün olmadığı durumlarda gürültünün etkilerine karşı korumaya çalışırız. Pratikte gürültüden korunmak için kullanılan tekniklerin detayları bazen oldukça karmaşıktır. Ancak temel ilkeler kolayca anlaşılabilir. Temel fikir, bir mesajı gürültünün etkilerine karşı korumak istiyorsak, mesaja bazı ilave bilgiler ekleyerek mesajı kodlamamız gerektiğidir. Bu şekilde, kodlanmış mesajdaki bilgilerin bir kısmı gürültü ile bozulsa bile, kodlanmış mesajda, orijinal mesajdaki tüm bilgilerin kurtarılması için mesajın kurtarılması veya

kodunun çözülmesi yeterli olacaktır. Bu şekilde mesajın kurtarılmasına hata düzeltme denir.

Önce klasik bilgisayarda hata düzeltmenin nasıl olduğuna bakalım. Örneğin, gürültülü bilgiyi bir klasik iletişim kanalı aracılığıyla bir konumdan diğerine göndermek istediğimizi varsayalım. Kanaldaki gürültünün etkisiyle, bit $p > 0$ olasılığıyla hatalı iletilir. Hatasız iletilme olasılığı ise $(1-p)$ olur. Böyle bir kanal, ikili simetrik kanal olarak bilinir. Bit'i ikili simetrik kanaldaki gürültünün etkilerine karşı korumanın yolu, korumak istediğimiz biti kendisinin üç kopyasıyla değiştirmektir: 000 ve 111 bit dizileri, sırasıyla 0 ve 1 rolünü oynadıklarından bazen mantıksal 0 ve mantıksal 1 olarak anılır. Şimdi üç biti de kanaldan gönderiyoruz. Alıcının kanalın sonunda üç bit çıkar ve alıcının orijinal bitin değerinin ne olduğuna karar vermesi gerekir.

Şimdi kuantum hata düzeltme hakkında konuşmaya geçiyoruz. Kuantum durumlarını gürültünün etkilerine karşı korumak için, benzer ilkelere dayanan kuantum hata düzeltme kodları geliştirilmiştir (Devitt ve ark, 2013; Lidar ve Brun, 2013; Marinescu, 2011; Djordjevic, 2012). Klasik bilgi ile kuantum bilgisi arasında bu tür kuantum hata düzeltme kodlarını mümkün kılmak için yeni fikirlerin sunulmasını gerektiren bazı önemli farklılıklar vardır.

Kuantum sistemleri doğal olarak çok değerlidir. Çok değerli kuantum hesaplama, daha az kaynak kullanarak daha büyük bir arama alanını temsil etme yeteneği nedeniyle önem kazanmaktadır (Gokhale ve ark, 2019). Çok değerli kuantum sistemlerinin, belirli kriptografik protokollerde (Bechmann-Pasquinucci, 2000) ve arama algoritmalarında (Wong, 2015) ikili kuantum sistemlerinden daha iyi performans gösterebildiği bilinmektedir. Üçlü bir kuantum sistemi (veya kütrit), en basit çok değerli sistemdir. Büyük veriler üzerinde yukarıda bahsedilen algoritmaları gerçekleştirebilen büyük ölçekli kuantum bilgisayarların varlığı, hata ile engellenmektedir. Kübitler, süperpozisyonu hızla yok eden çevre ile etkileşime girer. Bu nedenle, büyük ölçekli kuantum hesaplama, hata düzeltmeyi zorunlu kılar. Kuantum hata düzeltmesi (QEC), kübit sistemleri için kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır (Roffe, 2019; Devitt ve ark, 2013). Literatürde, kübitlerde kuantum hata düzeltme için dokuz kübit, yedi kübit ve beş kübit kodlar mevcuttur (Shor, 1995; Steane, 1996a; Laflamme, 1996). Bu kodlar bit çevirme, faz çevirme ve hem bit çevirme

hem de faz çevirme hatalarını düzeltebilir. Üç kübitlik bit çevirme ve faz çevirme kodunun birleşimi bize dokuz kübitlik kodu verir. Dokuz kübit kodu, dokuz kübitten birindeki bit çevirme ve faz çevirme hatalarını düzeltebilir. Aynı zamanda aynı kübit üzerinde eş zamanlı bit ve faz çevirme hatasını düzeltmemize de olanak tanır. Yedi kübit ve beş kübit kodu, stabilizatör kodlarıdır (Gottesman, 1997). Bu kodların hataları tespit etmesi ve düzeltilmesi için bu kodların stabilizatör jeneratörleri kullanılır. Kütrit sistemleri için ise yalnızca birkaç kuantum hata düzeltme kodu (QECC) çalışması mevcuttur (Majumdar, 2018).

Bu tez çalışmasında, kuramsal temeller bölümünde kuantum mekaniğinin postülatları verildikten sonra kuantum bilgi işleme süreçlerinde bize yardımcı olacak kübit kavramı, tek ve iki kübitlik durumlar, bazı kuantum mantık kapı ve devreleri, kütrit kavramı, kütritlerle ilgili bazı kuantum mantık kapıları verilmiştir. Ayrıca kuantum bilgi işleme açısından kuantum hata düzeltme, üç kübitlik bit çevirme ve faz çevirme kuantum hata düzeltme kodları, dokuz kübitlik kuantum hata düzeltme kodu, yedi kübitlik kuantum hata düzeltme kodu ve beş kübitlik kuantum hata düzeltme kodu gibi konular tanıtılmıştır. Materyal ve yöntem bölümünde kuantum mantık devrelerinin analiz edilmesinde seri ve paralel bağlı devreler, genelleştirilmiş Pauli operatörleri ve özdeşlikler verilerek kütritler için oluşturulmuştur.

Bulgular ve tartışma bölümünde ilk olarak üç kütritlik trit çevirme ve faz çevirme kuantum hata düzeltme kodları incelenmiştir. İkinci olarak dokuz kütritlik kuantum hata düzeltme kodu önerilmiştir. İlk defa bu çalışmada üç kübitlik kuantum hata düzeltme kodunun modifikasyonu ile üç kütritlik kuantum hata düzeltme devresi önerilmiştir. Benzer şekilde dokuz kütritlik kuantum hata düzeltme devresi geliştirilmiştir. Bu iki devrenin doğru çalıştığı gösterilmiştir. Son olarak beş kütritlik kuantum hata düzeltme kodu incelenmiştir. Beş kütritlik kuantum hata düzeltmede, kübitler için var olan stabilizer kodları küritlere uyarlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kuantum Mekaniğinin Postülatları

Kuantum mekaniğinin temelini 4 postülat oluşturmaktadır. Bunlar:

Durum uzayı Postülatı: Bir kuantum sistemi S , Hilbert uzayı H ile tanımlanır. Bir durumun normleştirilmiş bir vektörü $|\psi\rangle$ olarak ifade edilir. Durum vektörü, fiziksel bir sistemin fiziksel durumlarını temsil eder. En basit kuantum sistemlerinden biri, durum uzayı Hilbert uzayı H olan bir kuantum bitidir.

Gelişim Postülatı: Kapalı bir kuantum sisteminin durumunun gelişimi, üniter bir operatör tarafından açıklanmaktadır. Yani, kapalı sistemin herhangi bir evrimi için üniter bir U operatörü vardır. Öyle ki sistemin başlangıç durumu $|\psi\rangle_i$ ise, o zaman gelişimden sonra sistemin durumu

$$|\psi\rangle_f = U|\psi\rangle_i \quad (2.1)$$

olarak yazılır. Kuantum hesaplamaların tersine çevrilebilirliği, aslında kuantum gelişiminin birlik olmasına dayanmaktadır. Kuantum fiziğinde, kapalı bir kuantum sisteminin sürekli zamanla gelişimi, Schrödinger denkleminde gelir:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

Burada $\hbar$ Planck sabiti ve $H(t)$ kuantum sisteminin Hamiltoniyenidir.

Sistemlerin Kompozisyon Postülatı: İki fiziksel sistem tek bir birleşik sistem olarak ele alındığında, birleşik fiziksel sistemin durum uzayı, bileşen alt sistemlerinin durum uzaylarının $H_A \otimes H_B$ şeklinde tensör çarpımından elde edilir. İlk sistem $|\psi\rangle_A$ durumunda ve ikinci sistem $|\psi\rangle_B$ durumunda ise, birleşik sistemin durumu

$$|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (2.3)$$

olur.

Ölçüm postülatı: Bir A sistemi için bir H_A durum uzayının belirli bir ortonormal temeli $B = \{|\phi_i\rangle\}$ için, $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$ durumu verildiğinde, temel B 'ye göre H_A sistemi üzerinde bir Von Neumann ölçümü gerçekleştirmek mümkündür.

$|\alpha_i|^2$ olasılıkla bir i etiketi çıkarır ve sistemi $|\varphi_i\rangle$ durumunda bırakır.

2.2. Kuantum Bilgi İşleme

2.2.1. Kübitler

Bit, klasik hesaplamanın ve klasik bilginin temel kavramıdır. Kuantum hesaplama ve kuantum bilgileri, kuantum bit veya kısaca kübit gibi benzer bir kavram üzerine inşa edilmiştir (Lloyd, 1995; Schumacher, 1995). Yani, kuantum bilgisayarlarda bir kübitin oynadığı rol, klasik bilgisayarlardaki bit ile aynıdır. Klasik bir bitin durumu (0 veya 1) olduğu gibi, bir kübit de bir duruma sahiptir. Bir kübit için iki olası durum, tahmin edebileceğiniz gibi klasik bit için 0 ve 1 durumlarına karşılık gelen $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarıdır. Bitler ve kübitler arasındaki fark, bir kübitin 0 veya 1 dışında süperpozisyon durumunda da olabilmesidir. Süperpozisyon durumu aşağıdaki gibi yazılır:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.4)$$

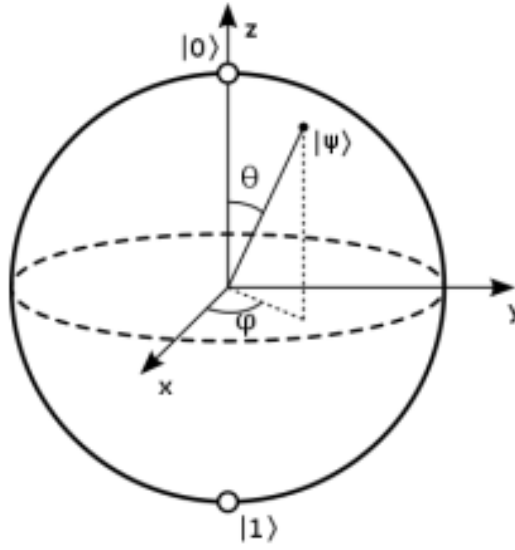
Burada α ve β katsayıları olasılık genlikleri olarak adlandırılır ve $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ olacak şekilde normalizedir. Bir kübitte, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ temel durumlarının matris temsilleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Bu ikisine iki seviyeli bir sistemin hesaplama temeli diyoruz. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ olduğundan, Denklem (2.4)

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.6)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu denklemde yer alan kutupsal açı $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ ve azimutal açı $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ aralıklarında değerler almaktadırlar. Bu denklem Şekil 2.1.'de gösterildiği gibi üç boyutlu birim küresi üzerinde bir nokta tanımlar. Bu küre genellikle **Bloch küresi** olarak adlandırılır (Kaye ve ark, 2007). Tek bir kübitin durumunu görselleştirmek için yararlı bir araç sağlar ve genellikle kuantum hesaplama ve kuantum bilgisi hakkındaki fikirler için mükemmel bir test ortamı görevi görür.



Şekil 2.1. Bir kübit'in Bloch Küresi üzerindeki geometrik temsili

Çok kübitlik durumlarda kübitlerin tensör çarpımı $\otimes$ olarak tanımlanır. İlk kübitin durumu $|\phi\rangle$ ve ikinci kübitin durumu $|\psi\rangle$ olsun. Sonra, bu iki kübitlik sistemin durumu $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ olur. N kübit için 2^N durumu vardır. Bunlar aşağıdaki gibidir:

$$|00\dots 00\rangle, |00\dots 01\rangle, \dots, |11\dots 11\rangle \quad (2.7)$$

Her birisi hesaplama temel durumu olarak adlandırılır. Bundan böyle $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$ için $|00\dots 0\rangle$ yazılacaktır. A ve B iki boyutlu sütun vektörleri ise, tensör ürünü $A \otimes B$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Böylece iki kübitlik 4 durum aşağıdaki gibi elde edilir:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

2.2.2. Kuantum Mantık Kapıları

1988'de Deutsch, hesaplaması kuantum mekaniği ile gerçekleştirilen Deutsch (Deutsch,1989) bir kuantum kapısı teorisi önerdi. Bu nedenle kavramsal olarak klasik mantık kapısından farklıdır, ancak onu simüle edebilir. Feynman'da (Feynman, 1985) benzer bir kuantum kapıları teorisi geliştirdi. Yukarıda gösterildiği gibi, kuantum bilgisayarlardaki durum bir kübit olarak ifade edilebilir. Bu nedenle, kübit, temel durumdaki bir bite karşılık gelir. Kuantum bilgi teorisinde, kuantum mekaniği ile elde edilen Pauli matrisleri, bilgi işleme süreçlerini gerçekleştirmek için kuantum mantık kapıları olarak kullanılır. İnceleyeceğimiz ilk üç operatör Pauli matrisleridir.

Klasik bilgisayar devreleri, tellerden ve mantık kapılarından oluşur. Kablolar, devre etrafında bilgi taşımak için kullanılırken, mantık kapıları bilgiyi bir formdan diğerine dönüştürerek manipülasyonlar gerçekleştirir. Örneğin, işlemi $0 \rightarrow 1$ ve $1 \rightarrow 0$ olan doğruluk tablosu tarafından tanımlanan klasik tek bitli mantık kapısı (*NOT*-kapısı) düşünün. Böyle bir süreç, *NOT* kapısı kuantum analogu için iyi bir aday olacaktır.

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.11)$$

durumuna *NOT* kapısı uygulandığında

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \quad (2.12)$$

haline dönüşür.

Kuantum kapılarının doğrusallığından doğrudan gelen matris biçiminde kuantum *NOT* kapısını temsil etmenin uygun bir yolu vardır. Kuantum *NOT* kapısını temsil etmek için aşağıdaki gibi bir *X* matrisi tanımladığımızı varsayalım:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

X matrisini $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ kubitlerine uygularsak

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad X|1\rangle = |0\rangle \quad (2.14)$$

olur. X operatörünün uygulaması genel olarak

$$X|j\rangle = |j \oplus 1\rangle \quad (2.15)$$

şeklindedir. Burada $j \in \{0,1\}$. $\oplus$ mod-2'ye göre toplama işlemidir.

Kuantum bilgi teorisinde kullanılan ancak klasik bilgi teorisinde benzerleri olmayan başka bir kapı, Pauli-Y mantık kapısı olarak adlandırılır.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Pauli Z operatörü, faz rotasyon operatörü olarak da bilinir ve matris gösterimi aşağıdaki gibi temsil edilir:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Yaygın olarak kullanılan bir başka tek kubitlik mantık kapısı

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

olarak verilen Hadamard kapısıdır. Hadamard mantık kapısının $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ üzerindeki etkileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (2.19)$$

$$H|1\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.20)$$

$|+\rangle$ ve $|-\rangle$, Hadamard temeli olarak adlandırılır ve bazen ölçümlerde kullanılır.

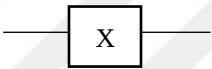
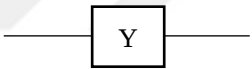
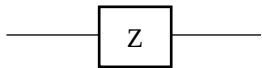
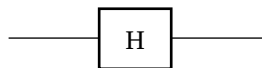
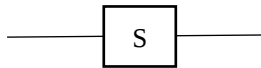
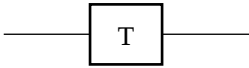
Kuantum bilgi teorisinde dalga fonksiyonunda faz oluşturmak için kullanılan iki faz kapısı mevcuttur. Bunlardan birincisi S harfi ile gösterilen S-Faz kapısı ve ikincisi T harfi ile gösterilen $T - \frac{\pi}{8}$ Faz kapısıdır. Bu faz kapıları:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

şeklinde. Bazı tek kübitlik mantık kapılarının sembol ve matrisleri Tablo 2.1’de verilmiştir.

Tablo 2.1. Tek kübitlik bazı mantık kapılarının sembol ve matrisleri

Mantık kapısı	Devre sembolü	Matris temsili
Pauli-X		$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Pauli-Y		$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Pauli-Z		$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Hadamard		$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
S-Faz		$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
T-Faz		$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$

Bu kapılar, girişlerin ve çıkışların yalnızca bir kübit olduğu tek kübitlik kapılardır. Çoklu kübit kapıları arasında olan *CNOT* kapısı çok kullanışlıdır. *CNOT* kapısı, kübitlerden birinin kontrol kübiti ve diğerinin hedef kübit olarak seçildiği iki kübitlik bir mantık kapısıdır. Kontrol kübiti $|0\rangle$ durumundaysa, hedef kübit değişmez.

Bununla birlikte, kontrol kütüti $|1\rangle$ durumundaysa, *NOT* işlemi (X) hedef kütüite uygulanır. İki kütüitlik $|ab\rangle$ durumuna uygulanacak iki çeşit *CNOT* mantık kapısı vardır. Bunlar birinci kütüitin kontrol, ikinci kütüitin hedef olduğu $CNOT_a$ ve ikinci kütüitin kontrol, birinci kütüitin hedef olduğu $CNOT_b$ kapılarıdır. Bunların uygulanması

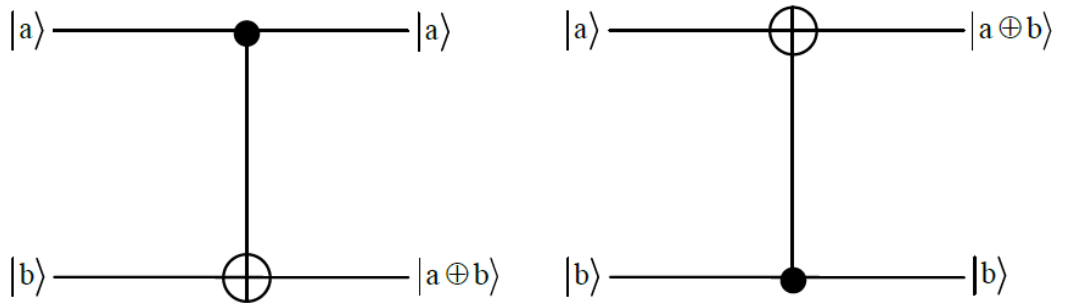
$$CNOT_a|a,b\rangle=|a,b\oplus a\rangle \quad (2.23a)$$

$$CNOT_b|a,b\rangle=|a\oplus b,b\rangle \quad (2.24b)$$

şeklindedir. Bu denklemlerde $\oplus$ işlemi mod 2'ye göre toplama işlemidir. Bu ifadelerin matrisleri aşağıdaki gibi olur.

$$CNOT_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad CNOT_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Bu kapılarının devrelerdeki gösterimleri Şekil 2.2 de verilmiştir.

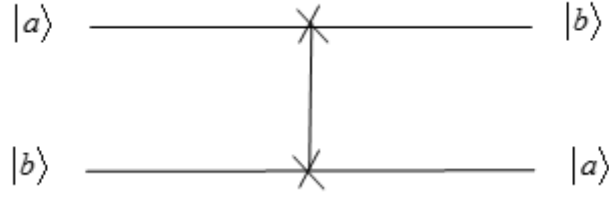


Şekil 2.2. $CNOT_a$ ve $CNOT_b$ mantık kapıları şeması

En çok kullanılan bir diğeri iki kütüitlik mantık kapısı da *SWAP* mantık kapısıdır. İki kütüitlik *SWAP* mantık kapısı uygulandığında kütüitlerin yerleri değışir. Bu kapıyı aşağıdaki matris ile temsil edebilmektedir.

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

SWAP kapısının devre şeması Şekil 2.3'te verilmiştir:



Şekil 2.3. SWAP mantık kapısı

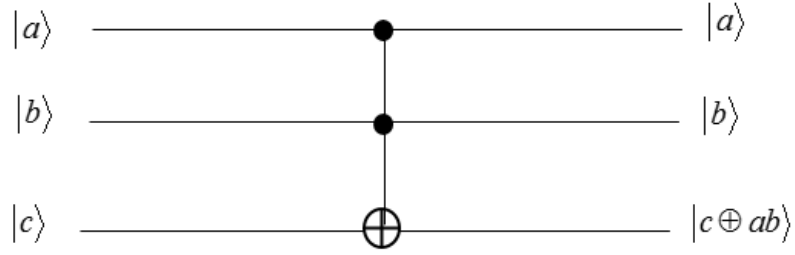
Hem tek hem de iki kubitlik bazı mantık kapılarını inceledikten sonra 3-kubitlik mantık kapılarını ele alalım. Toffoli mantık kapısı *CCNOT* mantık kapısı olarak da bilinir. Tıpkı *CNOT* operatöründe olduğu gibi, kontrol ve hedef kubitlerimiz vardır. Bu durumda, ilk iki kubit kontrol ve üçüncüsü hedef kubitlerdir. Hedef kubitini değiştirebilmemiz için her iki kontrol kubitini de $|1\rangle$ durumunda olmalıdır. Bu kapıyı aşağıdaki şekilde uygulayabiliriz:

$$CCNOT|a,b,c\rangle = |a,b,c \oplus ab\rangle \quad (2.27)$$

CCNOT mantık kapısının matris gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$CCNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Toffoli kapısının devrelerdeki gösterimi Şekil 2.4 de verilmiştir.

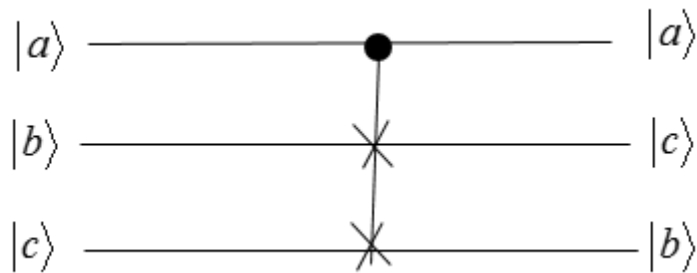


Şekil 2.4. *CCNOT* mantık kapısı.

CSWAP kapısı olarak da bilinen Fredkin kapısının, ilk kübitti kontrol ve diğer ikisi hedef kübitlerdir. İlk kübit $|0\rangle$ durumundaysa hiçbir şey değişmez ve eğer $|1\rangle$ durumunda ise diğer iki kübiti yerleri değişir. Bu kapıyı temsil eden matris şu şekildedir:

$$CSWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

CSWAP mantık kapının şeması Şekil 2.5'teki gibidir.



Şekil 2.5. *CSWAP* mantık kapısı

2.2.3. Kuantum Mantık Devreleri

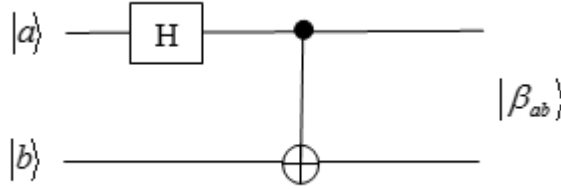
Kuantum mantık devrelerinde soldan sağa doğru ilerlenir. Devredeki her satır, kuantum devresindeki bir teli temsil eder. Bu telin fiziksel bir kabloya karşılık gelmesi

gerekmez; bunun yerine zamanın geçişine veya uzayda bir konumdan diğerine hareket eden bir foton - bir ışık parçacığı gibi fiziksel bir parçacığa karşılık gelebilir.

Şekil 2.6.'de gösterilen kuantum dolanıklık oluşturma devresini ele alalım. Burada Hadamard kapısı ve ardından bir *CNOT* kapısı vardır. Bu devrede iki kubitlik dolanık durumları elde edilir. Elde edilen iki kubitlik dolanık durumlar Tablo 2.2'de verilmiştir. Bu dolanık durumlar Bell durumları veya bazen EPR durumları veya EPR çiftleri olarak bilinir. Bu Bell durumları

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0, y\rangle + (-1)^x |1, \bar{y}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.30)$$

şeklinde verilen ifade ile de elde edilir. Bu denklemde $\bar{y}$, y'nin değildir.



Şekil 2.6. Kuantum dolanıklık oluşturma devresi

Tablo 2.2. Bell durumlarının elde edilmesi

Giriş, $ ab\rangle$	Çıkış, $CNOT_a[H ab\rangle]$
$ 00\rangle$	$(00\rangle + 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{00}\rangle$
$ 01\rangle$	$(01\rangle + 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{01}\rangle$
$ 10\rangle$	$(00\rangle - 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{10}\rangle$
$ 11\rangle$	$(01\rangle - 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{11}\rangle$

2.2.4. Kütritler

Bir kuantum dit veya bir küdit, $d \geq 2$ olduğu d-düzeyinde bir kuantum sistemidir. $d = 3$ durumu kütrit olarak tanımlanır. Genel bir üçlü kuantum durumu (kütrit) şu şekilde temsil edilir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \quad (2.31)$$

Burada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ durumlarına karşılık gelen matris gösterimi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

d-boyutlu tek-küditlik X ve Z Pauli operatörleri (Gottesman, 1999):

$$X = \sum_{j=0}^{d-1} |(j+1) \bmod d\rangle \langle j|, \quad Z = \sum_{j=0}^{d-1} w^j |j\rangle \langle j| \quad (2.33)$$

olarak tanımlanır. Burada $w = e^{i\frac{2\pi}{d}}$ dir. Bu tanımdan, X ve Z'nin izsiz Hermit olmayan üniter operatörlerdir. Değişim bağıntısına $XZ = w^{-1}ZX$ şeklinde uyarlar ve $X^d = Z^d = I$ dir.

d=3 durumunda iki tür X Pauli operatörü vardır:

$$X_1 = \sum_{j=0}^{3-1} |(j+1) \bmod 3\rangle \langle j| = |1\rangle \langle 0| + |2\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34a)$$

$$X_2 = \sum_{j=0}^{3-1} |(j-1) \bmod 3\rangle \langle j| = |2\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35b)$$

X_1 ve X_2 'nin $|\psi\rangle$ durumu üzerindeki etkisi matematiksel olarak aşağıdaki gibidir:

$$X_1|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|0\rangle \quad (2.36a)$$

$$X_2|\psi\rangle = \alpha|2\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|1\rangle \quad (2.37b)$$

ayrıca, Z Pauli operatörleri için de

$$Z_1 = |0\rangle \langle 0| + w|1\rangle \langle 1| + w^2|2\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix} \quad (2.38a)$$

$$Z_2 = |0\rangle \langle 0| + w^2|1\rangle \langle 1| + w|2\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \quad (2.39b)$$

gibi iki çeşidi yazılabilir. Z_1 ve Z_2 'nin $|\psi\rangle$ durumu üzerindeki etkisi matematiksel olarak şu şekilde temsil edilebilir:

$$Z_1|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta w|1\rangle + \gamma w^2|2\rangle \quad (2.40a)$$

$$Z_2|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta w^2|1\rangle + \gamma w|2\rangle \quad (2.41b)$$

Herhangi bir kütitler için Hadamard kapısı H , faz kapısı S ve kontrollü-NOT kapısı $CNOT(3)$ gibi temel kapılarda bahsedebiliriz (Gottesman, 1999; Clark, 2006). d boyutlu Hadamard kapısı Deklem 2.36 daki aşağıdaki gibidir:

$$H|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w^{jk} |k\rangle \quad (2.42)$$

Tamlık için, d boyutlu S ve $CNOT(3)$ kapıları şu şekilde verilir:

$$S|j\rangle = w^{\frac{j(j-1)}{2}} |j\rangle \quad (2.43)$$

$$CNOT(d)|j,k\rangle = |j, (k+j) \bmod d\rangle \quad (2.44)$$

3 boyutlu sistem için Hadamard mantık kapısı matris gösterimini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Burada $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $w^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = w^*$ ve $1 + w + w^2 = 0$ dır. Hadamard mantık kapısı $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ üzerindeki etkileri aşağıda elde edilmiştir:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \quad (2.46a)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle) \quad (2.47b)$$

$$H|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle) \quad (2.48c)$$

Tek kütitlik Hadamard mantık kapısının tersi kendisinden farklıdır ve

$$H^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

olarak elde edilir. İki kütürlük kontrollü-DEĞİL mantık kapıları $CNOT_a(3)$ ve $CNOT_b(3)$:

$$CNOT_a(3)|a,b\rangle = |a, b \oplus a \bmod 3\rangle \quad (2.50a)$$

$$CNOT_b(3)|a,b\rangle = |a \oplus b, b \bmod 3\rangle \quad (2.51b)$$

şeklinde yazılır. Bu $CNOT_a(3)$ ve $CNOT_b(3)$ mantık kapılarının 9x9'luk matris ifadeleri

$$CNOT_a(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$CNOT_b(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

olur. Kütbitler için kontrollü-NOT mantık kapılarının tersleri kendilerine eşittir. Ancak kütürlükler için eşit değildir ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$CNOT_a(3)^{-1}|a,b\rangle = |a, (b-a) \bmod 3\rangle \quad (2.54a)$$

$$CNOT_b(3)^{-1}|a,b\rangle = |(a-b), b \bmod 3\rangle \quad (2.55b)$$

Bu kapılarının matris gösterimleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$CNOT_a(3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$CNOT_b(3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

2.3. Hata Düzeltme

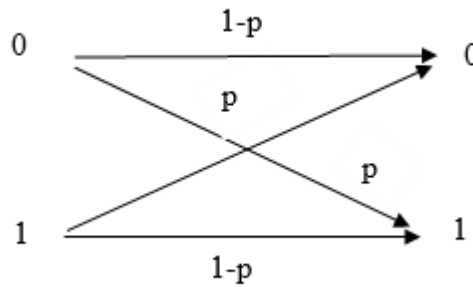
Matematiksel hesaplamalarda işlemlerin tam ve hatasız yapılacağı varsayımıyla algoritmalar tasarlanır ve analizleri yapılır. Bir hesaplama modeli uygulayan fiziksel cihazlar kusurludur ve sınırlı hassasiyete sahiptir. Örneğin, bir fiziksel devre kartına dijital bir sinyal uygulandığında, ortamdaki istenmeyen elektrik gürültüsü bileşenlerin beklenenden farklı davranmasına neden olabilir ve voltaj seviyelerinin (bit değerleri) değişmesine neden olabilir. Bu hata kaynakları kontrol edilmeli veya eksiklikler telafi edilmelidir. Aksi takdirde ortaya çıkan verimlilik kaybı bilgi işleme cihazının gücünü azaltabilir. Bir hesaplama adımı p olasılığı ile başarılı olursa, o zaman t sıralı adımları içeren bir hesaplama, p^t olarak üssel olarak azalan bir başarı olasılığına sahip olacaktır. Hata kaynaklarını ortadan kaldırmak imkansız olsa da, makul miktarda ek kaynak kullanarak hataları düzeltmeye izin verecek şemalar tasarlanabilmektedir. Çoğu klasik dijital bilgi işlem cihazı, hataların tespiti ve düzeltilmesi için hata düzeltme kodlarını kullanır. Hata düzeltme kodları teorisinin kendisi matematiksel bir soyutlamadır, ancak gerçekçi cihazların kusurlu ve belirsiz olmasının getirdiği hataları açık bir şekilde açıklayan bir teoridir. Bu teorisinin, mühendislerin hatalara karşı dirençli

bilgi işlem cihazları oluşturmalarına izin vermede son derece etkili olduğu kanıtlanmıştır. Kuantum bilgisayarlar, klasik dijital bilgisayarlara göre hatalara daha duyarlıdır çünkü kuantum mekanik sistemler daha hassastır ve kontrol edilmesi daha zordur.

2.3.1. Klasik Hata Düzeltme

Klasik bir ortamda hata düzeltme için temel adımları ele alarak başlanmaktadır. Bu adımlardan üçüne odaklanılacaktır: (a) hata modelinin karakterizasyonu, (b) kodlama yoluyla genişlemenin sağlanması ve (c) bir hata düzeltme prosedürü. Daha sonra bu adımların kuantum hata düzeltmesi için oldukça doğal bir şekilde genelleştirildiği görülecektir. Bu bölümün geri kalanında, klasik bilgi bitlerinin (klasik bir bilgisayarda veya bir yerden başka bir yere iletilmesinin) hataların etkilerinden nasıl korunabileceğini tartışacağız.

Bilgiyi hatalara karşı korumanın ilk adımı, korumaya çalıştığı hataların doğasını anlamaktır. Böyle bir anlayış, bir *hata modeli* ile ifade edilir. Burada bit kümesinin gelişimi açıklanmaktadır. Bitlerin depolandıklarında veya bilgisayarın bir noktasından diğerine hareket ettirildiklerinde meydana gelen gelişim veya dönüşüm bir kanal boyunca olur. Kaydedilen veya hareket ettirilen bitlerde hatalar meydana geldiğinde, kanal bu hataların bir açıklamasını sağlar. Hata düzeltme yöntemlerini anlamak için, öncelikle bir kanal aracılığıyla bit göndermenin daha basit durumunu düşünmek çok yararlıdır. En basit klasik hata modeli, bit çevirme kanalıdır. Bu modelde, bir bitin durumu p olasılığı ile ters çevrilir ve $1-p$ olasılığından etkilenmez. Bit çevirme kanalı Şekil 2.7'de gösterilmektedir.



Şekil 2.7. Klasik bit çevirme kanalı

Kodlama: Bir hata modelinin açıklamasına sahip olduğumuzda, bilgileri bu hatalara karşı sağlam bir şekilde kodlamak isteriz. Bu, korumak istediğimiz mantıksal bitlere bir dizi ekstra bit ekleyerek yapılabilir ve böylelikle elde edilen dizgeyi

kodlanmış bir bite dönüştürür. Kodlanmış bir bite karşılık gelen bit dizisine kod sözcüğü denir. Kod sözcükleri kümesi 0 ve 1 olası iki bit değerinin her biri için bir kod olarak adlandırılır. Kod sözcükleri, temsil ettikleri mantıksal bitlere biraz fazlalık eklemek üzere tasarlanmıştır. Fazlalığın arkasındaki temel fikir, hatalar bir kod sözcüğündeki bazı bitleri bozsa bile, kalan bitler, mantıksal bitin kurtarılabilmesi için yeterli bilgi içermesidir. Yukarıdaki şema, n bitlik mantıksal dizileri doğrudan kodlamak için kolayca genelleştirilebilir. N bitlik mantıksal bir b dizisi, m yardımcı bitler eklenerek ve sonra ortaya çıkan dizgeyi bir $(n + m)$ bit kod sözcüğüne dönüştürerek kodlanabilir. Mantıksal dizgileri b kendi kod sözcükleriyle eşleştirme işlemine kodlama işlemi denir. Bir devrede, başlangıçta 0 durumunda olan bazı yardımcı bitler ekleyerek ve ardından bazı kapılar uygulayarak kodlama gerçekleştirilebilir.

Bir hata düzeltmenin bir sonraki aşaması, orijinal mesajı geri almak için kurtarma işlemi ve kod çözmedir. Bir dizi bit çevirme hatasına maruz kalan kod sözcüğünü kurtararak ilk mesajı kurtarmamız gerekir. Kurtarma işlemi, her bitin değerini diğer ikisiyle karşılaştırarak ve çoğunluk bitlerinin değerine dayalı olarak çevrilmiş biti tahmin etmeye çalışarak yapılabilir. Örneğin, 101 kelimesi alınırsa, ikinci bitin çevrildiği ve 1'e geri döndüğünde, ilk kod sözcüğü 111 elde edildiği ve bu nedenle mesajın 1 olması gerektiği varsayılabilir. Bozuk biti belirlemek için bit değerlerini karşılaştırmak klasik hesaplamada mümkün olsa da, kuantum mekaniğinin getirdiği kısıtlamalar nedeniyle kuantum hata düzeltmesinde bunu yapamayacağız ve bu çalışmanın sonuçlarını genişletmek istediğimiz için kuantum kodlamaya başka bir şema geliştirmeliyiz. Bir bitlik çevirmenin gerçekleştiğini varsaydığımız sürece, bit paritelerini hesaplayarak çevrilen biti belirleyebiliriz. Bu şekilde, iki bitin değerleri uyuştüğünde parite sıfır (çift) olacaktır ve uyuşmadığında bir (tek) olacaktır. Örneğin, alınan kelime 100 ise, birinci ve üçüncü bitlerin yanı sıra birinci ve ikinci bitlerin paritesi 1'dir, bu da ilk bitin diğer ikisinden farklı olduğunu ve bu nedenle tersine çevrilmesi gerektiğini gösterir. Hesaplanan paritelere sendrom denir ve kuantum hata düzeltmesinin yanı sıra klasik hata düzeltme kodlarının incelenmesi boyunca önemli bir rol oynar. Bir devre şemasında, sendrom ölçümü *CNOT* kapıları tarafından gösterilir. Sıfıra başlatılan ek ancilla bitleri, sendrom ölçümü için ayrılmıştır. Gördüğümüz gibi, sendromu hesaplama fikri temelde bit değerleri arasında yaptığımız karşılaştırmaya dayanmaktadır.

2.3.2. Kuantum Hata Düzeltme

Kuantum hata düzeltmesi, esasen klasik hata düzeltmesinden daha karmaşıktır. Kuantum hata düzeltme kodlarını oluşturmanın bazı belirgin zorlukları vardır (La Guardia, 2020). İlk durum, iyi bilinen Klonlama yok teoreminde gördüğümüz gibi, kubitleri kopyalamanın imkansızlığıdır (Gottesman, 2010). İkinci görünür zorluk, kuantum hataları kümesinin sürekli olması ve bir kubit, iki temel durumun herhangi bir süperpozisyonunda olabilmesidir. Bu nedenle, ilk bakışta, kuantum kodunun sonsuz sayıda farklı hata türünü düzeltmesi gerektiği görülmektedir. Üçüncü zorluk, kubit ölçümlerinin kuantum bilgisini yok etmesidir.

Klasik hesaplama için hata modellerini tartıştığımızda, genel olarak hataların bitleri bağımsız olarak etkileyebileceğini ve bu nedenle hata modellerinin farklı bitlerdeki hatalar arasındaki herhangi bir korelasyonu hesaba katması gerektiğini belirtmektedir. Aynı şey kuantum bitlerindeki hatalar için de geçerlidir. Kubitleri bağımsız olarak etkileyen hataların kodlarını tanımlamak daha basit hale gelmiş ve neyse ki, hata düzeltme için önemli kavramlar bu sınırlı hata modelleri altında anlaşılır olmuştur (Kaye ve ark, 2007). Bu nedenle, teoriyi genel durumda sunacağız, ancak örneklerimiz yalnızca bağımsız olarak tek kubitlerde hataların meydana geldiği hata modellerini ele alacaktır. Gelişimi istenen kubit olandan farklı olduğunda, bir kubit üzerinde hatalar meydana gelir. Bu fark, kubitler üzerindeki kesin olmayan kontrol nedeniyle veya kubitlerin bir çevre ile etkileşimi nedeniyle ortaya çıkabilir. "Çevre" ile, incelenen kubitin dışındaki her şey kastedilmektedir. Bir "kuantum kanalı", belirli bir ortamda kubitlerin çevrelerinden nasıl etkilendiğinin resmi bir açıklamasıdır. $|0\rangle$ durumunda bir kubitin, $|E\rangle$ durumunda bir çevre ile etkileşime giren genel gelişimi, formun bir süperpozisyon durumunu verecektir:

$$|0\rangle|E\rangle \rightarrow |0\rangle|E_0^0\rangle + |1\rangle|E_0^1\rangle \quad (2.58)$$

Benzer şekilde, çevre $|E\rangle$ durumundayken kubit başlangıçta $|1\rangle$ durumunda olduğunda, aşağıdaki gibi yazılır:

$$|1\rangle|E\rangle \rightarrow |0\rangle|E_1^0\rangle + |1\rangle|E_1^1\rangle \quad (2.59)$$

Daha genel olarak, genel saf haldeki bir kubit, E durumundaki çevre ile etkileşime girdiğinde, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|E\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle|E_0^0\rangle + \alpha|1\rangle|E_0^1\rangle + \beta|0\rangle|E_1^0\rangle + \beta|1\rangle|E_1^1\rangle \quad (2.60)$$

Etkileşimden sonraki durumu şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \alpha|0\rangle|E_0^0\rangle + \alpha|1\rangle|E_0^1\rangle + \beta|0\rangle|E_1^0\rangle + \beta|1\rangle|E_1^1\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(|E_0^0\rangle + |E_1^1\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(|E_0^0\rangle - |E_1^1\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(|E_0^1\rangle + |E_1^0\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(|E_0^1\rangle - |E_1^0\rangle) \end{aligned} \quad (2.61)$$

$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ olsun. O zaman aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = I|\psi\rangle \quad (2.62)$$

$$\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle = Z|\psi\rangle \quad (2.63)$$

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = X|\psi\rangle \quad (2.64)$$

$$\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle = XZ|\psi\rangle \quad (2.65)$$

ve durum ile çevre arasındaki etkileşim şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle|E\rangle &\rightarrow \frac{1}{2}(I|\psi\rangle)(|E_0^0\rangle + |E_1^1\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(Z|\psi\rangle)(|E_0^0\rangle - |E_1^1\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(X|\psi\rangle)(|E_0^1\rangle + |E_1^0\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(XZ|\psi\rangle)(|E_0^1\rangle - |E_1^0\rangle) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Bu, bir çevre ile önemsiz bir şekilde etkileşime girip girmediğine bakılmaksızın, tek bir kubit üzerinde meydana gelebilecek en genel gelişimi temsil eder.

Şimdi de kodlamanın nasıl olduğuna bakalım. Potansiyel hataların bir tanımını yaptıktan sonra, kuantum sistemimizin mantıksal durumlarını bu hatalara karşı korumanın bir yolunu bulmalıyız. Klasik durumda olduğu gibi, mantıksal durumlara bir yardımcı ekleyerek elimizdeki sistemi genişletebiliriz. Genelliği kaybetmeden, yardımcı kubitlerimizin $|00...0\rangle$ olarak başlatıldığını varsayacağız. Daha sonra, birleşik durumları $|\psi\rangle \otimes |00...0\rangle$ bazı kodlanmış durumları $|\psi_{enc}\rangle$ olarak yazılabilir.

Bir kuantum hata düzeltme kodu için ilk fikir olarak, klasik olarak yapılanı aynen yapmak ve her kubitin sadece üç kopyasını çıkarmak cazip gelebilir. Klonlama yok teoreminin ışığında, kuantum hatası düzeltilmesi için bir kodlama şeması tasarlamak için farklı bir ilke kullanmamız gerekecektir. Kuantum hata düzeltilmesi için kodlama, kodlamak istediğimiz duruma etki eden, belirli bir başlangıç durumunda bazı sabit sayıda kubitin yardımcı kubitler ile girilen bir üniter operatör U_{enc} aracılığıyla uygulanmalıdır. Kodlamak istediğimiz durum bir kubit durumu $|\psi\rangle$ ise ve yardımcı kubitler başlangıçta $|00...0\rangle$ durumundaysa, kodlamanın sonucu kod sözcüğü durumudur:

$$|\psi_{enc}\rangle = U_{enc} |\psi\rangle |00...0\rangle \quad (2.67)$$

2.4. Üç ve Dokuz Kubitlik Kuantum Hata Düzeltme Kodları

2.4.1. Üç Kubitlik Bit-Çevirme Kodu

Klonlama yok teoremi, bu kubitin üç kopyasından oluşan bir kod sözcüğü ile bir kübityi kodlayan üç kubit kuantum tekrarlama kodunu uygulamamızı engeller. Ancak, fikir, bit çevirme hatalarını düzeltmek için kullanılabilecek üç kubitlik bir kod verecek şekilde biraz değiştirilebilir. Başlangıçta ilgilendiğimiz hata modeli, bit çevirme kanalıdır:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \rho_f = (1-p)|\psi\rangle\langle\psi| + pX|\psi\rangle\langle\psi|X. \quad (2.68)$$

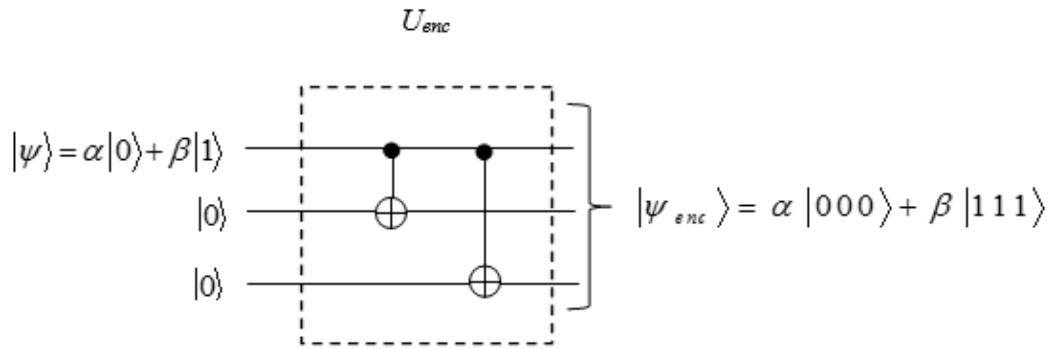
Üç kubit bit çevirme kodu, yardımcı kubitlerin eklenmesi ve her mantıksal kubitin üç fiziksel kubitlik bir kod sözcüğü ile kodlanması aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle \rightarrow \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \quad (2.69)$$

Başka bir deyişle, kodlama, 0 temel durumu ile $|000\rangle$ 'ın ve 1 temel durumu ile $|111\rangle$ 'in eşleşmesiyle oluşur. Bu kodlama işlemini, durumu daha büyük 8 boyutlu bir uzayı,

2 boyutlu bir alt uzayına indirmek olarak düşünebiliriz. Bu prosedürün basit bir tekrar kuralı olmadığı unutulmamalıdır. Üç kübitlik kod için kodlama prosedürünü gerçekleştiren bir devre Şekil 2.8'de gösterilmektedir.

Klasik üç bit tekraralama kodunda olduğu gibi, sendrom (parite) ölçümü, devreye sokulan iki yardımcı bit kullanılarak yapılır. Daha sonra birinci ve ikinci kübitlerin yanı sıra mod iki'ye göre toplama işleminin yapıldığı ikinci ve üçüncü kübitlerin eklenmesiyle parite ölçümünün sonuçları elde edilecektir. Bu şekilde, hatanın konumu tespit edilir ve ters çevrilmiş kübit geri çevrilerek hata düzeltilir. Bu işlemleri yapıldığı üç kübitlik çevirmeli kod hata algılama ve düzeltme devresi Şekil 2.9 da gösterilmiştir.



Şekil 2.8. Üç kübitlik kodlamayı gerçekleştirmek için bir devre

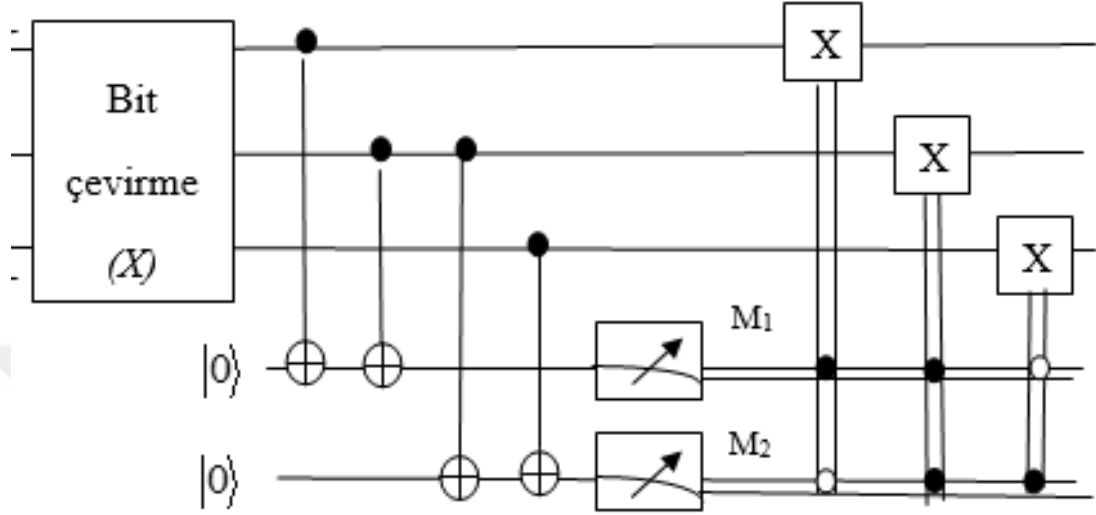
Tablo 2.3. Üç kübitlik bit çevirmeli kod LUT

Bozuk kübit	Hata operatörü	Kübit durumu	M ₁	M ₂
Hata yok	$I \otimes I \otimes I$	$\alpha 000\rangle + \beta 111\rangle$	0	0
İlk kübit	$X \otimes I \otimes I$	$\alpha 100\rangle + \beta 011\rangle$	1	0
İkinci kübit	$I \otimes X \otimes I$	$\alpha 010\rangle + \beta 101\rangle$	1	1
Üçüncü kübit	$I \otimes I \otimes X$	$\alpha 001\rangle + \beta 110\rangle$	0	1

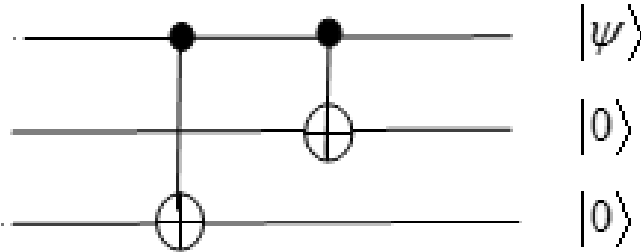
Tablo 2.3'te bozuk kübit, hata operatörleri, giriş kübiti ve ölçümler verilmiştir.

Bu kodda, ayırt edilebilir sendromlar bizi hatanın meydana geldiği kübite götürür. Sendrom ölçümü daha önce olduğu gibi *CNOT* kapıları kullanılarak gerçekleştirilir. Daha sonra, bu ölçümün sonucu kullanılacaktır. Tabloya baktığımızda, her iki parite 1'e eşit olduğunda, ikinci kübitin ters çevrilmesi gerektiği sonucuna varabiliriz. Bu, bir Toffoli kapı uygulamanın ikinci kübitteki hatayı düzeltebileceği anlamına gelir. Diğer iki kübit için, kontrol tellerinden biri sıfıra koşullandırılmalıdır.

Yani, tellerdeki değer uyuşmadığında, tabloya göre birinci veya üçüncü kubitin çevrilmesi gerekir. Hatayı düzelttikten sonra, Şekil 2.10'da gösterildiği gibi, karşılık gelen kodlayıcıdaki öğelerin sırasını tersine çevirerek kod çözme işlemini gerçekleştiriyoruz.



Şekil 2.9. Üç kubitlik çevirmeli kod hata algılama ve düzeltme devresi



Şekil 2.10. Kod çözme devresi

2.4.2. Üç Kubitlik Faz Çevirme Kodu

Kubitlerde bit çevirme (X) hataları dışında hatalar olabilir; ayrıca faz çevirme (Z) hatalarına da maruz kalabilirler. Sadece faz hatalarının indüklendiği durum için

$$|\psi\rangle|E\rangle \rightarrow \frac{1}{2}|\psi\rangle(|E_0^0\rangle + |E_1^1\rangle) + \frac{1}{2}Z|\psi\rangle(|E_0^0\rangle - |E_1^1\rangle) \quad (2.70)$$

şeklinde yazılır. Klasik dijital bilgide faz hatası yoktur, ancak neyse ki bir faz çevirme hatasını bir bit çevirme hatasına dönüştürmek kolaydır. Bu da üç kubitlik bit çevirme kodunu faz çevirme hatalarını düzeltmek için uyarlayabileceğimiz anlamına gelir. Bunu yapmak için, bunun yerine diyagonal baz olarak Hadamard bazı kullanılabilir.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.71)$$

Bu temelde, faz çevirme operatörü Z, sıradan bir kübit-flip operatörü gibi davranır. Çünkü yeni bir baz durumdaki işlemler

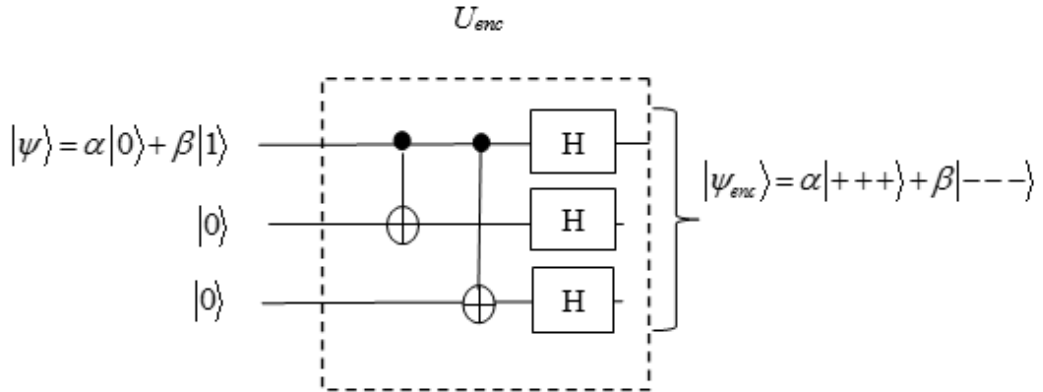
$$Z|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle + Z|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \quad (2.72)$$

$$Z|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle - Z|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \quad (2.73)$$

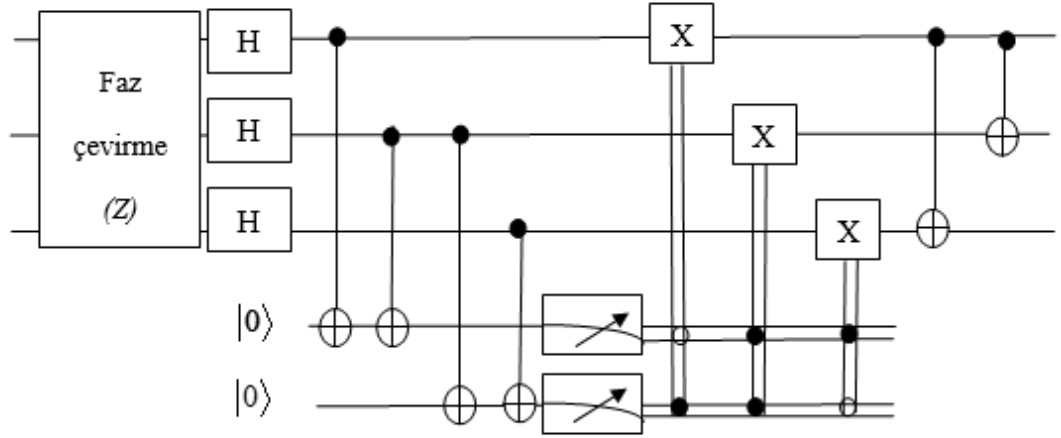
şeklinde olur. Yani $|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$ ve $|1\rangle \rightarrow |-- - \rangle$ olarak kodlanmıştır. Bu kurala göre, genel bir kübit durumu şu şekilde kodlanır:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle \rightarrow \alpha|+++ \rangle + \beta|-- - \rangle \quad (2.74)$$

Kodlama, hata tespiti ve kurtarma için gerekli işlemler, üç kübitlik bit çevirme kodunda olduğu gibi, yalnızca $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ bazında gerçekleştirilir. Hadamard mantık kapısı hesaplama bazından Hadamard bazına ve Hadamard bazından hesaplama bazına dönüşüm yapmaktadır. Çünkü kübitlerde Hadamard'ın tersi kendisine eşittir. Üç kübitlik faz çevirme kodunun kodlaması Şekil 2.10'da gösterilmiştir. Faz çevirme hata modeli, Hadamard kapıları modeli tarafından birleştirilen bit çevirme hatasına eşdeğer olduğu gibi, faz çevirme kurtarma ve bit çevirme kurtarma işleminin de Hadamard kapılarının birleşimine kadar aynı olduğu Şekil 2.11 de görülmektedir.



Şekil 2.11. Üç kübitlik faz çevirme kodlama devresi



Şekil 2.12. Üç kübitlik faz çevirmeli hata düzeltme ve kod çözme devresi

2.4.3. Dokuz Kübitlik Shor Kodu

Üç-kübit bit-çevirme ve faz-çevirme kodları, dokuz kübitten herhangi birinde bit-çevirme veya faz-çevirme hatalarını düzelten dokuz kübitlik bir kod vermek için birleştirilebilir (Shor, 1995). Ayrıca, aşağıda daha ayrıntılı olarak açıkladığımız gibi, aynı kübit üzerinde eşzamanlı bit ve faz ters çevirmeyi düzeltmemize de izin verir. Bu nedenle, bu kod genel bir tek kübitlik hatayı düzeltmeye izin verir.

Şekil 2.13'de gösterilen Shor kodunun kodlanması iki aşamadan oluşmaktadır. İlk olarak, her bir kübit, üç kübit faz çevirme kodundaki gibi kodlanır:

$$|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle \quad (2.75)$$

$$|1\rangle \rightarrow |-- - \rangle \quad (2.76)$$

İkinci aşamada ise, faz çevirmeli kodlayıcıdan her kübiti daha fazla kodlamak için kübit çevirmeli kodlayıcı kullanılmaktadır:

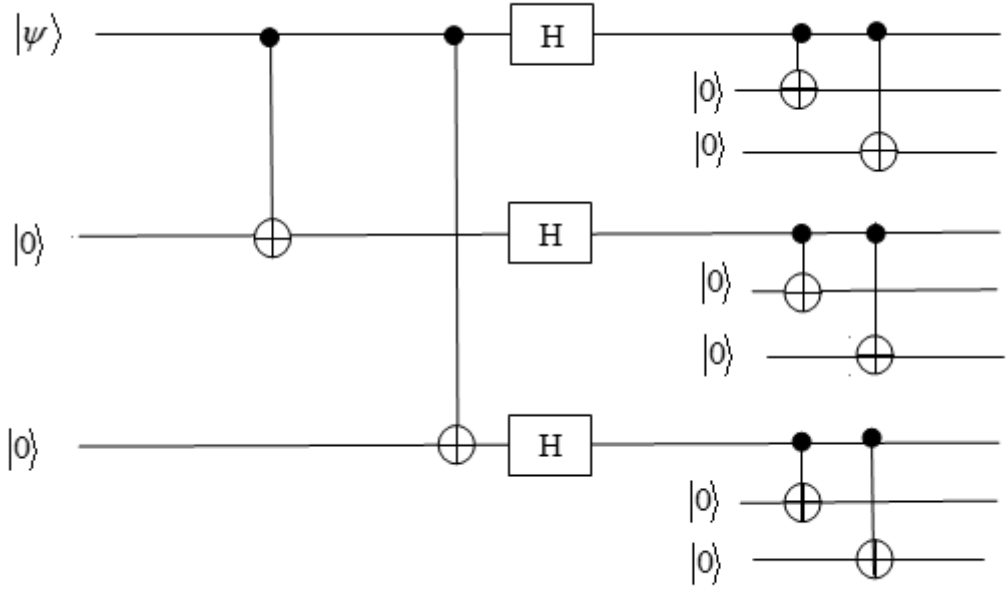
$$|+\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.77)$$

$$|-\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) \quad (2.78)$$

Daha sonra iki tane temel kodlanmış durum aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$|\bar{0}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.79)$$

$$|\bar{1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle) \quad (2.80)$$



Şekil 2.13. Dokuz kübitlik Shor kod kodlama devresi

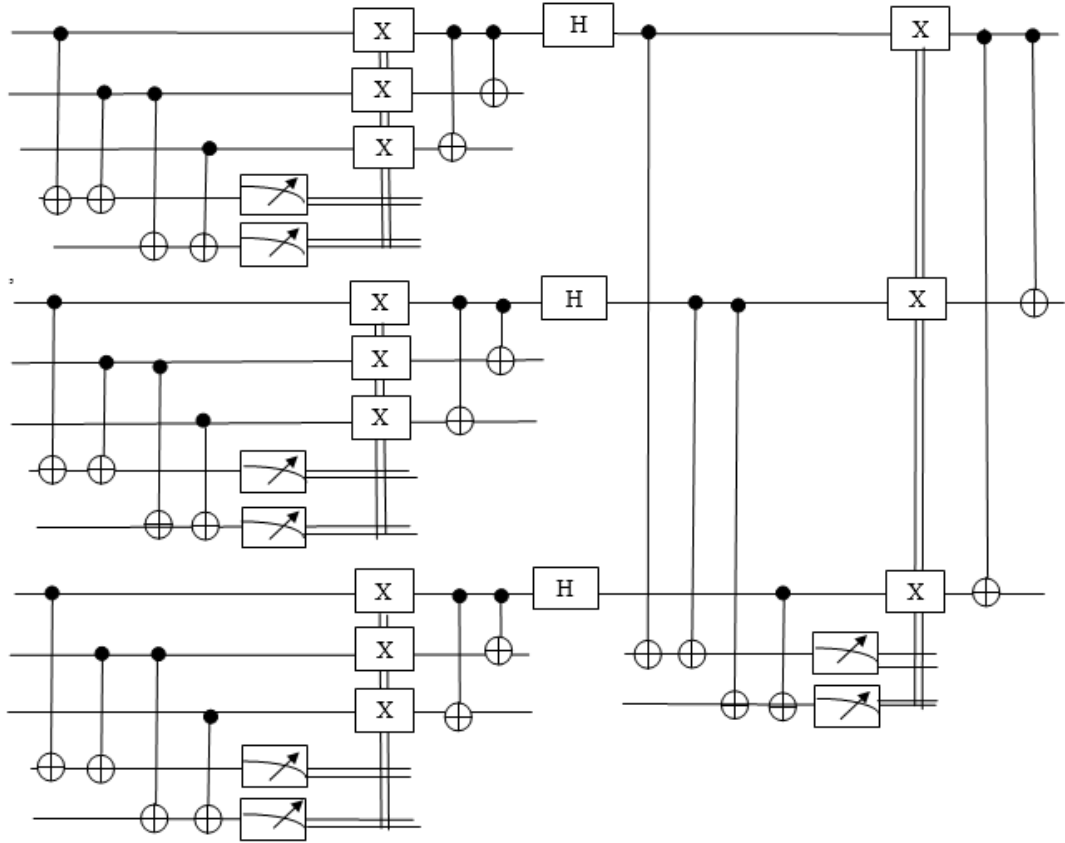
Şekil 2.14'deki devreden de görülebileceği gibi, Shor'un dokuz kübitlik hata düzeltmesi ve kod çözücüsü iki aşamadan oluşmaktadır: İlk aşama, üç adet üç kübit bit çevirme detektörü, kurtarma ve kod çözücü devreleri ve ardından hesaplama temelli dönüşümü gerçekleştirmek için üç Hadamard kapısından oluşur. Bu üç blok, dokuz kübitten herhangi birinde tek bir bit çevirme hatasını düzeltir. Bu düzeltme her $(|000\rangle \pm |111\rangle)$ üçlüsünün içinde gerçekleşir.

Ve ikinci aşama, ek bir üç kübitlik bit çevirme hata detektörü, kurtarma ve kod çözücü devresini içerir. İkinci bloğun görevi, tek bir faz çevirme hatasını düzeltmektir. Başka bir deyişle, devrenin ikinci aşaması $(\alpha|+++\rangle \pm \beta|---\rangle)$ 'deki işaretlerdeki herhangi bir değişiklik olup olmadığını kontrol eder. Ve sonra Z, Hadamard bazında bir bit-çevirme gibi davrandığından, bunu bir bit-çevirme hatasıymış gibi ele alır. Bu kodun tam olarak tespit edemediği şey, faz çevirme hatasının ilk aşamada nerede bulunduğu. Bu, Shor kodunun bir dezavantajı olarak görülmemelidir. Faz dönüşümünün gerçekleştiği yerde tam kübit hakkında bilgi eksikliğine rağmen bu kodun çalışmasının nedeni, Z hatasının $|000\rangle$ ve $|111\rangle$ 'in göreceli fazını $e^{i\pi}$ faktörü ile etkilemesine dayanmaktadır. Bu faz kayması, $|111\rangle$ durumunun işaretinin değişmesine neden olur. Ancak $|000\rangle$ durumu bundan etkilenmez. Bu nedenle, blok

içindeki diğer herhangi bir kübitin işaretini değiştirerek bunu tersine çevirmek mümkündür. Örnek olarak

$$(|000\rangle + |111\rangle) \xrightarrow{\text{Faz-çevirme}} (|000\rangle - |111\rangle) \xrightarrow{\text{Kurtarma}} (|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.81)$$

durumu verilebilir. Bu kod, kod sözcüklerini aynı hatalı kübit ile eşleştiren birden fazla hata olduğundan dejenere kod olarak adlandırılır. Shor kodu, yalnızca X ve Z'nin bir ürünü olduğu için küresel faz i göz ardı edilerek tek bir Y hatasını da düzeltebilir. Her biri farklı bir blokta meydana gelen en fazla üç bit çevirme hatası düzeltilebilmektedir. Ancak belirli bir blok içinde birden fazla hata meydana gelirse bunları düzeltmede başarısız olduğu için çoklu bir hata düzeltme kodu değildir.



Şekil 2.14. Dokuz kübitlik Shor kodu için hata düzeltme ve kod çözme devresi

2.5. Sabitleyici Kuantum Hata Düzeltme Kodları

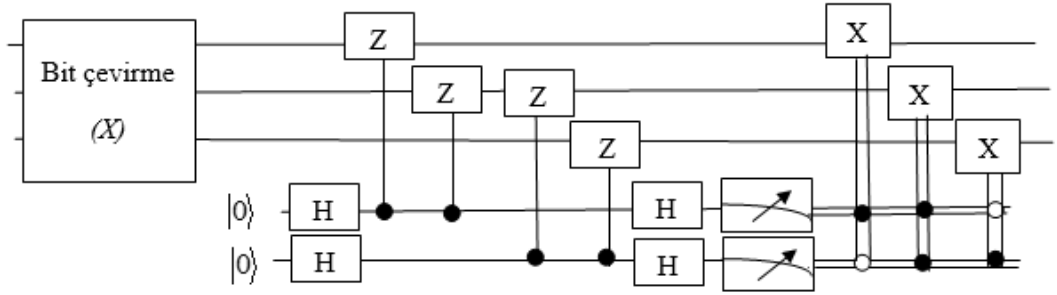
Bu bölümde, daha geniş bir kodlama olan sabitleyici kodların yapısı incelenectir (Gottesman, 1997). Sabitleyici kodların kullanımı, hata sendromunu ölçtüğümüzde gerçekleşir. Sendrom ölçümü yapmak zorunda olduğumuz önceki durumlarda, hata operatörlerinin kod sözcükleri üzerindeki etkisi ölçülür. Ancak sabitleyici

formalizminde, bu operatörlerin sabitleyici grubun oluşturucuları adı verilen diğer bazı operatörler üzerindeki etkisi ölçülür. Bu etki, göreceğimiz gibi, hata operatörlerinin ve sabitleştirici jeneratörlerinin komutasyonu veya anti-komütasyonudur. Bu durumda kullanacak özdeşlik Şekil 2.15 te verilmiştir.



Şekil 2.15. Bir *CNOT* kapısı ile Hadamard-konjuge *Z* kapısının özdeşliği

CNOT kapsında hesaplama bazında ikinci kübitin ölçülmesi, sağda verilen devrede gözlemlenebilir *Z*'nin ölçülmesine eşdeğerdir. Dolayısıyla, üç kübit tekrarlama kodunu kullanarak bit çevirme hatasını düzeltmek için devre şeması Şekil 2.16' daki devreye dönüşür.



Şekil 2.16. Üç kübitlik sabitleyeci hata düzeltme

Şimdi, sendromları ölçmek, bu gözlenebilirleri ölçmeye dönüştürülmüştür:

$$Z \otimes Z \otimes I \quad (2.82)$$

$$I \otimes Z \otimes Z \quad (2.83)$$

Bunlar Pauli grubunun operatörlerinden oluşur ve bu nedenle kod sözcükleri $\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$ özdeğeri +1 olan bu operatörlerin öz durumlarıdır. Hata operatörleri aynı zamanda Pauli operatörlerinin, *X* ve *I* tensör çarpımıdır ve hata operatörlerinden etkilenen kod sözcükleri hala Denklemler 2.72 ve 2.73 deki operatörlerin öz durumlarıdır. Ancak bu sefer özdeğerler (+1) veya (-1) olur. Tablo 2.4'de kod sözcükleri tek veya hiç hata operatörüne maruz kalmadığında, sendrom operatörlerinin

$(Z \otimes Z \otimes I, I \otimes Z \otimes Z)$ özdeğerlerini kullanan iki eşleşme arasındaki $[\pm 1, \pm 1]$ sonuçları göstermektedir.

Tablo 2.4. Üç kübit bit çevirme kodu için sendrom arama tablosu

	$Z \otimes Z \otimes I$	$I \otimes Z \otimes Z$
$I \otimes I \otimes I$	+1	+1
$X \otimes I \otimes I$	-1	+1
$I \otimes X \otimes I$	-1	-1
$I \otimes I \otimes X$	+1	-1

Bu sonuçlar, tek bir hata olması veya hiç hata olmaması koşuluyla hatanın yerini bulmamıza yardımcı olur. Sonuçlar ayrıca, sendrom operatörleri gibi, hatalar Pauli operatörlerinin tensör ürünü tarafından oluşturulduğu sürece, sendrom operatörlerinin ve hata operatörlerinin komütatörlerinin hesaplanmasıyla da elde edilebilir. Operatörler, sabitleyeciler adı verilen bir grup oluşturur ve operatörlerin kendilerine sabitleyeciler grubunun jeneratörleri adı verilir. Jeneratörleri veya başka bir deyişle bunların hatalı durumlar üzerindeki etkisini ölçme sendromu verir.

Faz çevirme hatası için, kontrollü Z operatörü şekil 2.15'tekine benzer Hadamard ve CNOT kapılarının bir kombinasyonu ile değiştirilebilir. Böylece stabilizatör grubunun jeneratörleri

$$X \otimes X \otimes I \quad (2.84)$$

$$I \otimes X \otimes X \quad (2.85)$$

şekline olacaktır.

2.5.1. Sabitleyici Kuantum Hata Düzeltme Gösterimi

Sabitleyici gösterimi, bir $[n, k, d]$ kuantum kodunun alternatif bir tanımını sağlar. Bu gösterimde n = bir kod sözcüğün uzunluğu, k = bilgi simgelerinin sayısı ve d = kodun mesafesidir. Burada aşağıdaki gösterimler kullanacaktır:

- $|\psi_i\rangle$ bir kod sözcüğüdür.
- M , kod sözcüklerini stabilize eden operatörler grubunun bir üyesidir,
 $M|\psi_i\rangle = (+1)|\psi_i\rangle.$

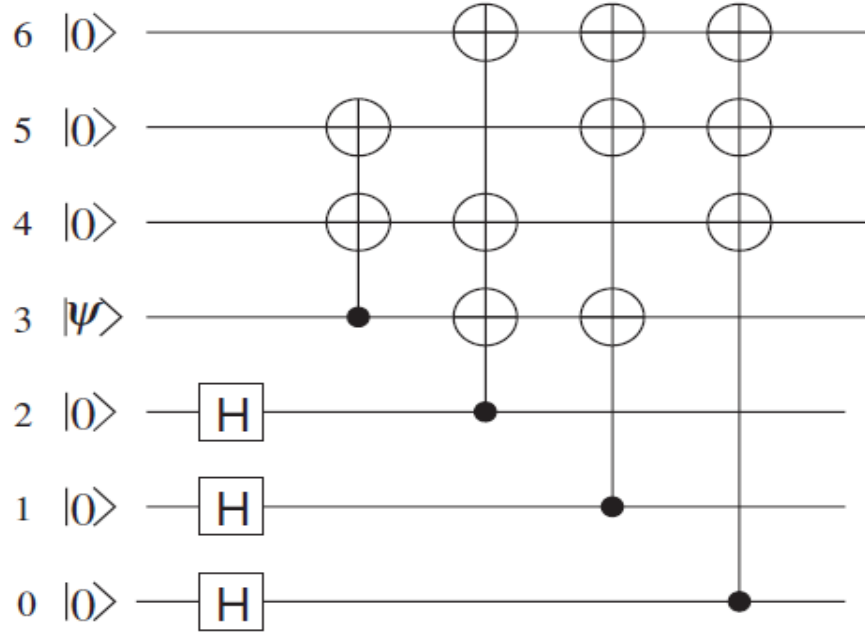
- E bir hata operatörüdür. Bazen bir bit çevirme hatası X, bir faz çevirme hatası, Z veya bir bit ve faz çevirme hatası, Y olabilir. Kübit k için hata operatörü $E_{x|y|z}^k$ şeklinde yazılır.

İki operatör, M ve E'nin antikomütatörü, $\{M, E\} = 0$ ise $M(E|\psi_i\rangle) = (-1)(E|\psi_i\rangle)$ olur. Bu, $(E|\psi_i\rangle)$ 'nin özdeğer (-1)' e karşılık gelen M'nin bir özvektörü olduğu anlamına gelir. E hatasını $(E|\psi_i\rangle)$ durumuna uyguladıktan sonra orijinal kod sözcüğü $|\psi_i\rangle$ üzerinde M'yi ölçerek E hatasını tespit ederiz.

Bir $[n, k, d]$ kodunun sabitleyicisi S, Pauli grubu P'nin bir Abelian alt grubudur. $M_i \in S$ 'in ölçüsü, M_i 'nin I 'den farklı elemanlarının sayısıdır.

2.5.2. Yedi Kübitlik Steane Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Steane tarafından keşfedilen bu kod, en basit CSS kodudur (Steane, 1996a; Steane, 1996b; Steane, 1997; Steane, 1998). Steane kodu, tek bir mantıksal kübiti yedi fiziksel kübitlik bir blok olarak kodlayarak çalışır ve bir bit-çevirme veya faz-çevirme hatasını düzeltir. Steane'in yaklaşımı, Şekil 2.17'de gösterildiği gibi H_2 'yi H_2^7 'ye gömerek iki boyutlu Hilbert uzayında H_2 'yi rastgele bir duruma kodlamaktır. Yedi kübitlik kuantum hata düzeltmesi $[[n, k, d]] = [[7, 1, 3]]$ şeklinde gösterilir.



Şekil 2.17. Steane'in kodu için kodlama devresi

Bu kodun mantıksal kubitleri aşağıdaki gibidir:

$$|0\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{8}}(|0000000\rangle + |1110001\rangle + |1101010\rangle + |0011011\rangle + |1011100\rangle + |0101101\rangle + |0110110\rangle + |1000111\rangle) \quad (2.79)$$

$$|1\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{8}}(|1111111\rangle + |0001110\rangle + |0010101\rangle + |1100100\rangle + |0100011\rangle + |1010010\rangle + |1001001\rangle + |0111000\rangle) \quad (2.80)$$

Yedi kubitlik kod sözcükleri üzerine uygulanan operatörler kümesi Tablo 2.5 te verilmiştir.

Tablo 2.5. Yedi kubitlik kod sözcükleri üzerine uygulanan operatörler kümesi

Operatör/kübit	1	2	3	4	5	6	7
M_1	Z	I	I	I	Z	Z	Z
M_2	I	Z	I	Z	I	Z	Z
M_3	I	I	Z	Z	Z	I	Z
M_4	X	I	I	I	X	X	X
M_5	I	X	I	X	I	X	X
M_6	I	I	X	X	X	I	X

Altı operatör, $\langle M_1, M_2, \dots, M_6 \rangle$, yedi kübitlik hata düzeltme kodunu stabilize eden operatör grubu P'yi oluştururlar. Steane kodunun jeneratörlerini ölçmek için devre şeması Şekil 2.18 de verilmiştir. Mantıksal kübitler, $|0\rangle_L$ ve $|1\rangle_L$, altı operatörün özvektörleridir ve özdeğerleri (+1)'e eşittir:

$$M_j |0\rangle_L = (+1)|0\rangle_L \quad ve \quad M_j |1\rangle_L = (+1)|1\rangle_L \quad 1 \leq j \leq 6 \quad (2.81)$$

Örneğin, $|0\rangle_L$, $\lambda = +1$ özdeğerine karşılık gelen M_4 'in bir özvektörüdür:

$$M_4 |0\rangle_L = (+1)|0\rangle_L \quad (2.82)$$

M_4 operatörü, yedi kübitlik bir durumun birinci, beşinci, altıncı ve yedinci kübitlerini çevirir ve kalan üçünü değiştirmeden bırakır:

$$M_4 |0\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{8}} (|1000111\rangle + |0110110\rangle + |0101101\rangle + |1011100\rangle + |0011011\rangle + |1101010\rangle + |1110001\rangle + |0000000\rangle) \quad (2.83)$$

$E_x^{(1)}$ ve $E_x^{(5)}$, sırasıyla yedi kübitlik bir kod sözcüğün birinci ve beşinci kübitinin tek bir bit-çevirme hatasını açıklayan iki operatör olsun:

$$E_x^{(1)} = X^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes I^{(5)} \otimes I^{(6)} \otimes I^{(7)} \quad (2.84)$$

$$E_x^{(5)} = I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes X^{(5)} \otimes I^{(6)} \otimes I^{(7)} \quad (2.85)$$

Her iki operatör de

$$M_1 = Z^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes Z^{(5)} \otimes Z^{(6)} \otimes Z^{(7)} \quad (2.86)$$

ile komütatif değildir. Örneğin,

$$\begin{aligned} M_1 E_x^{(1)} &= (Z^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes Z^{(5)} \otimes Z^{(6)} \otimes Z^{(7)}) \\ &\quad (X^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes I^{(5)} \otimes I^{(6)} \otimes I^{(7)}) \\ &= (Z^{(1)} X^{(1)}) \otimes (I^{(2)} I^{(2)}) \otimes (I^{(3)} I^{(3)}) \\ &\quad \otimes (I^{(4)} I^{(4)}) \otimes (Z^{(5)} I^{(5)}) \otimes (Z^{(6)} I^{(6)}) \otimes (Z^{(7)} I^{(7)}) \\ &= -(X^{(1)} Z^{(1)}) \otimes I^{(2)} \otimes I^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes Z^{(5)} \otimes Z^{(6)} \otimes Z^{(7)} \\ &= -E_x^{(1)} M_1 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Önceki türetmemizden şunu yazabiliriz:

$$M_1 E_x^{(1)} |0\rangle_L = -E_x^{(1)} M_1 |0\rangle_L = -E_x^{(1)} [M_1 |0\rangle_L] = (-) E_x^{(1)} |0\rangle_L \quad (2.88)$$

Bu, $E_x^{(1)} |0\rangle_L$ 'nin sabitleyici M_1 'nin özdeğeri $\lambda = -1$ olan bir özvektörü olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, $E_x^{(1)} |1\rangle_L$, $E_x^{(5)} |0\rangle_L$, ve $E_x^{(5)} |1\rangle_L$, özdeğerleri -1'e eşit olan M_1 sabitleyicinin özvektörleridir. Böylece M_1 , Steane kodunun yedi kübitlik durumunun 1. ve 2. kübitlerinde tek bit çevirme hatalarını tespit etmek için kullanılabilir. Tablo 2.6, Steane kodu için her bir operatörle komütatif olmayan eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri özetlemektedir. Tablo 2.7 de Steane kodunun sendrom aramasının işlemleri verilmiştir. Tablo 2.8, tek hataları ve aynı kod için karşılık gelen sendromları göstermektedir. Alt simgeler, hataların konumlarını gösterir; bir bit çevirme hatası X_{1-7} olarak belirtilir; X_{1-7} olarak bir faz çevirme hatası; Y_{1-7} olarak bir bit-çevirme ve bir faz-çevirme kombinasyonu olur.

Tablo 2.6. Steane yedi kübit kodu için tek hata operatörleri ve her operatörle komütatif olmayan jeneratör (ler)

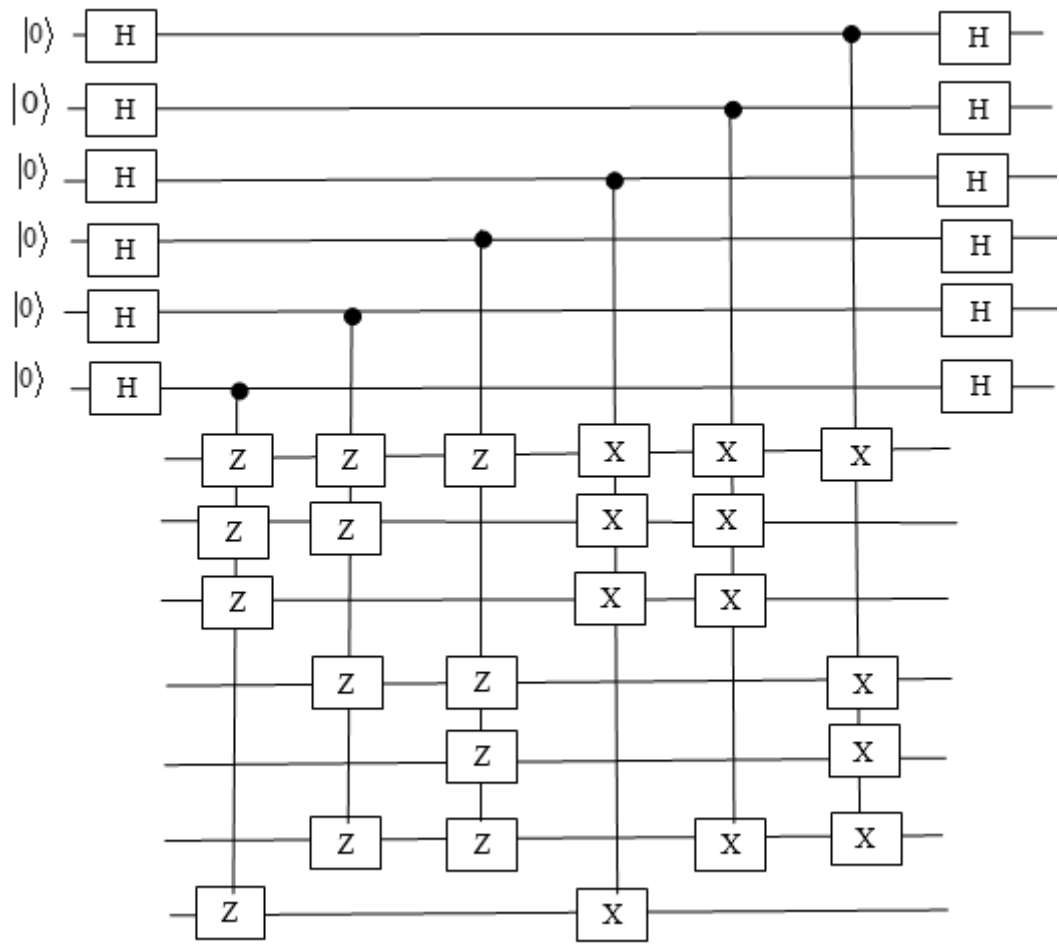
Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler
X_1	M_1	Z_1	M_4	Y_1	M_1, M_4
X_2	M_2	Z_2	M_5	Y_2	M_2, M_5
X_3	M_3	Z_3	M_6	Y_3	M_3, M_6
X_4	M_2, M_3	Z_4	M_5, M_6	Y_4	M_2, M_3, M_5, M_6
X_5	M_1, M_3	Z_5	M_4, M_6	Y_5	M_1, M_3, M_4, M_6
X_6	M_1, M_2	Z_6	M_4, M_5	Y_6	M_1, M_2, M_4, M_5
X_7	M_1, M_2, M_3	Z_7	M_4, M_5, M_6	Y_7	$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

Tablo 2.7. Steane kodunun sendrom araması işlemleri

	<i>XIIIXXX</i>	<i>IXIXIXX</i>	<i>IIXXXIX</i>	<i>ZIIIZZZ</i>	<i>IZIZIZZ</i>	<i>IIZZZIZ</i>
<i>IIIIIII</i>	+1	+1	+1	+1	+1	+1
<i>XIIIIII</i>	+1	+1	+1	-1	+1	+1
<i>IXIIIII</i>	+1	+1	+1	+1	-1	+1
<i>IIXIIII</i>	+1	+1	+1	+1	+1	-1
<i>IIIXIII</i>	+1	+1	+1	+1	-1	-1
<i>IIIXII</i>	+1	+1	+1	+1	-1	-1
<i>IIIIIXI</i>	+1	+1	+1	-1	-1	+1
<i>IIIIIX</i>	+1	+1	+1	-1	-1	-1

Tablo 2.8. Steane'nin yedi kübitlik kodu için tekli hatalar ve ilgili sendromlar

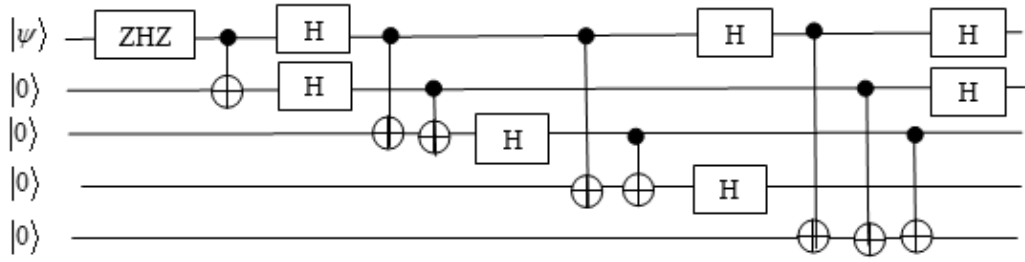
Hata	Sendrom $a_{1 \rightarrow 6}$	Hata	Sendrom $a_{1 \rightarrow 6}$	Hata	Sendrom $a_{1 \rightarrow 6}$
X_1	000100	Z_1	100000	Y_1	100100
X_2	000010	Z_2	010000	Y_2	010010
X_3	000001	Z_3	001000	Y_3	001001
X_4	000011	Z_4	011000	Y_4	011011
X_5	000101	Z_5	101000	Y_5	101101
X_6	000110	Z_6	110000	Y_6	110110
X_7	000111	Z_7	111000	Y_7	111111



Şekil 2.18. Steane kodunun jeneratörlerini ölçmek için devre şeması

2.5.3. Beş Kübitlik Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Mükemmel bir kuantum hata düzeltme kodu, H_{2^5} 'de dolanık durumlar olarak $|0\rangle_L$ ve $|1\rangle_L$ 'i kodlamak için en küçük boyutlu Hilbert uzayını kullanan bir koddur. Mükemmel bir kuantum hata düzeltme kodu Laflamme ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır (Laflamme, 1996). Şekil 2.19 'deki devre, herhangi bir ölçüm geçidi kullanmadan genel 1 kübitlik durumu 5 kübitlik bir kod durumuna kodlar.



Şekil 2.19. Beş kübitlik hata düzeltme kodunun kodlama devresi

Mantıksal kübitler şunlardır:

$$\begin{aligned} |0\rangle_L = \frac{1}{4} & (-|01001\rangle + |10001\rangle + |00011\rangle - |11011\rangle + |00000\rangle \\ & + |11000\rangle - |01010\rangle - |10010\rangle - |00101\rangle + |00110\rangle \\ & - |10100\rangle + |01100\rangle - |11110\rangle - |11101\rangle - |01111\rangle - |10111\rangle) \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} |1\rangle_L = \frac{1}{4} & (|00111\rangle + |11111\rangle - |01101\rangle - |10101\rangle + |01110\rangle \\ & - |10110\rangle - |00100\rangle + |11100\rangle - |01011\rangle + |10011\rangle - |00001\rangle \\ & + |11001\rangle - |00010\rangle - |11010\rangle - |01000\rangle - |10000\rangle) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Beş kübitlik kod, CSS olmayan kodlardır, bu kodun oluşturucuları yalnızca X veya Z'yi içermez. CSS kodlarının aksine, beş kübitlik kod, yalnızca X veya yalnızca Z'den oluşan ayrı oluşturuculara sahip değildir. Beş kübit, kodun tek bir hatayı algılayıp düzeltebilmesi için minimum kübit sayısıdır. Bu kodun sabitleyicisi S , dört jeneratörden oluşan bir grup M tarafından tanımlanır:

$$M = \langle M_1, M_2, M_3, M_4 \rangle \quad (2.91)$$

$$M_1 = I \otimes Z \otimes X \otimes X \otimes Z \quad (2.92)$$

$$M_2 = Z \otimes I \otimes Z \otimes X \otimes X \quad (2.93)$$

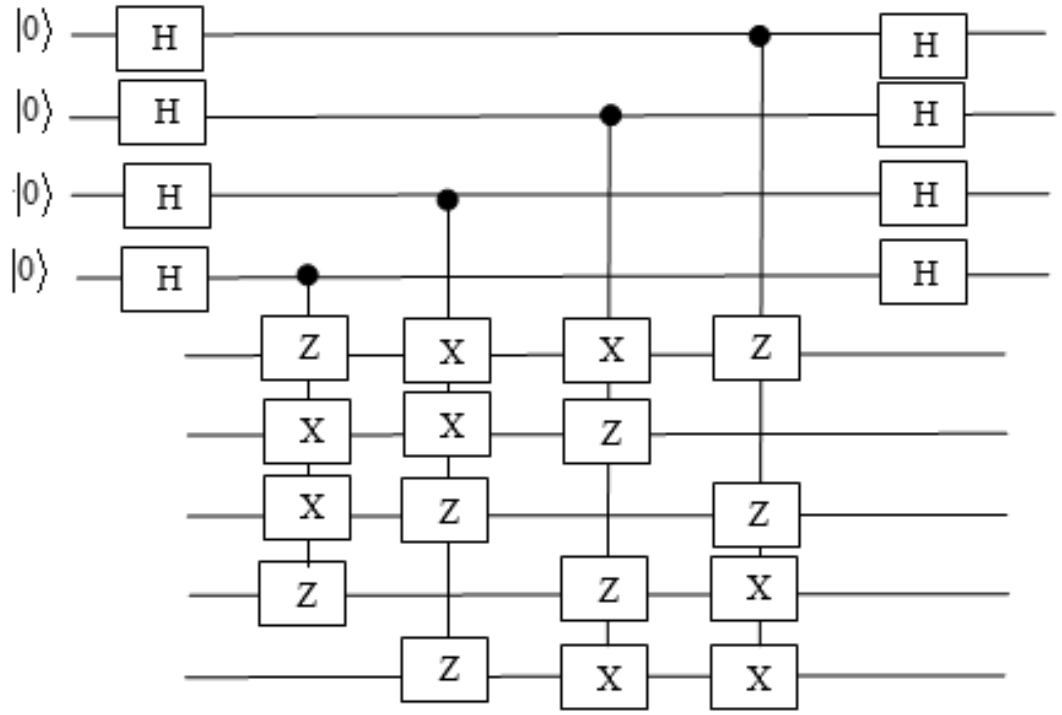
$$M_3 = X \otimes Z \otimes I \otimes Z \otimes X \quad (2.94)$$

$$M_4 = X \otimes X \otimes Z \otimes I \otimes Z \quad (2.95)$$

$|0\rangle_L$ ve $|1\rangle_L$ kod sözcükleri, sabitleyicinin özdeğerleri (+1) olan özvektörlerdir;

$$M_j |0\rangle_L = (+1) |0\rangle_L \quad \text{ve} \quad M_j |1\rangle_L = (+1) |1\rangle_L, \quad 1 \leq j \leq 4. \quad (2.96)$$

Sendromu hesaplama devresi Şekil 2.20'de gösterilmektedir. Sendrom, her biri dört jeneratörden biri olan $M_1 M_2 M_3 M_4$ kullanılarak ölçülen dört yardımcı kübiti, $a_1 a_2 a_3 a_4$ 'den oluşur. Örneğin, M_2 ile X_1 antikomüttür. Bu nedenle, ilk kübit üzerinde bir bit çevirme hatası tespit edilebilir. M_3 ve M_4 ile Z_1 antikomüttür. Böylece, birinci kübitin bir faz çevirme hatası da tespit edilebilir. Bu 15 hatanın her biri S'nin farklı alt kümeleriyle ters gittiğinden, hataları ayrı ayrı ayırt edip sonra düzeltebilmektedir. Beş kübitlik kod herhangi bir tek kübit hatasını düzeltebilir. Ancak iki kübitlik hataları düzeltemez. Tablo 2.9 da beş kübitlik kod için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri özetlenmektedir. Tablo 2.10 de Beş kübitlik kodun sendrom aramasının işlemleri verilmiştir. Tablo 2.11 de beş kübitlik kodun tek hataları ve bunlara karşılık gelen sendromları gösterilmektedir.



Şekil 2.20. Beş kübitlik kodun sendrom ölçümü için kuantum devresi

Tablo 2.9. Beş kübitlik kod için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri

Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler
X_1	M_2	Z_1	M_3, M_4	Y_1	M_2, M_3, M_4
X_2	M_1, M_3	Z_2	M_4	Y_2	M_1, M_3, M_4
X_3	M_2, M_4	Z_3	M_1	Y_3	M_1, M_2, M_4
X_4	M_3	Z_4	M_1, M_2	Y_4	M_1, M_2, M_3
X_5	M_1, M_4	Z_5	M_2, M_3	Y_5	M_1, M_2, M_3, M_4

Tablo 2.10. Beş kübitlik kodun sendrom aramasının işlemleri

	$IZXXZ$	$ZIZXX$	$XZIZX$	$XXZIZ$
$IIII$	+1	+1	+1	+1
$XIII$	+1	-1	+1	+1
$IXII$	-1	+1	-1	+1
$IIXI$	+1	-1	+1	-1
$IIIX$	+1	+1	-1	+1
$IIIX$	-1	+1	+1	-1

Tablo 2.11. Beş kübitlik kodun tek hataları ve bunlara karşılık gelen sendromları

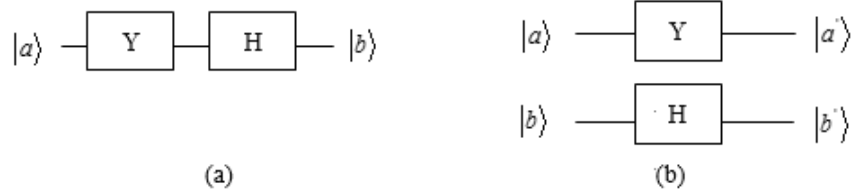
Hata	Sendrom $a_1a_2a_3a_4$	Hata	Sendrom $a_1a_2a_3a_4$	Hata	Sendrom $a_1a_2a_3a_4$
X_1	0100	Z_1	0011	Y_1	0111
X_2	1010	Z_2	0001	Y_2	1011
X_3	0101	Z_3	1000	Y_3	1101
X_4	0010	Z_4	1100	Y_4	1110
X_5	1001	Z_5	0110	Y_5	1111

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kuantum Mantık Devrelerinin Analizi

Kantum bilgi işleme sürecisinde birden çok mantık kapısı kullanılarak elde edilen bir kuantum devresinin analiz edilmesi önemli bir aşama oluşturmaktadır. Bir kuantum devre diyagramı, karmaşık bir çoklu-kübit kuantum hesaplamasının daha basit, genellikle 1-kübit ve 2-kübit kuantum kapıları dizisine nasıl ayrıştırılabileceğinin görsel bir temsilini sağlamaktadır. Herhangi bir n-kübit devresi, n kübite karşılık gelen n yatay çizgiden oluşmaktadır. Devredeki mantık kapıları soldan sağa uygulanmalıdır (Williams, 2010). Devre diyagramı soldan sağa doğru ifade edilir. Mantık kapılarının matrisleri sağdan sola doğru çarpılmaktadır. Çarpma işlemini doğru uygulamak için, durum vektörü operatörün sağ tarafında olacak şekilde işlem yapılır (Viamontes,2007).

Bir kuantum mantık devresinde, mantık kapıları ve çoklu kübit ifadeleri, tensör çarpımı kullanılarak ifade edilebilmektedir. Şekil 3.1a'daki gibi seri bağlı devrelerde normal matris çarpım işlemi yani nokta çarpım yapılırken, Şekil 3.1b'deki gibi paralel bağlı bir devrede tensör çarpımı (direk çarpım) yapılmaktadır.



Şekil 3.1 (a) Seri bağlı kuantum mantık devresi, (b) Paralel bağlı kuantum mantık devresi

Şekil 3.1a'daki seri bağlı kuantum mantık devresine Hadamard ve Pauli Y mantık kapılarını örnek olarak $|0\rangle$ durumu için uygulayalım:

$$\begin{aligned}
(Y.H)|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} i \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} i \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} i (-|0\rangle + |1\rangle)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Şekil 3.1b'deki paralel bağlı kuantum mantık devresine Hadamard ve Pauli Y mantık kapılarını örnek olarak $|00\rangle$ durumu için uygulayalım:

$$\begin{aligned}
(Y \otimes H)|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & -i & i \\ i & i & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} i (|10\rangle + |11\rangle)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2. Kütritler İçin Genelleştirilmiş Pauli Operatörleri

Genelleştirilmiş Pauli operatörleri, kuantum teorisinde önemli bir rol oynar. Genelleştirilmiş Pauli spin matrislerinin yapısı, yarı-basit Lie cebirleri teorisinde, kuantum mekaniğinde, kuantum teorisinde ve kuantum hesaplamasında (üniter hata tabanları, kuantum hata düzeltilmesi) yaygın olarak kullanılmıştır. Boyutu d olan genelleştirilmiş Pauli matrisleri, d boyutlarında genelleştirilmiş bir Pauli grubu oluşturmaya hizmet edebilir (Kibler, 2008). Sıradan Pauli matrislerinin kapsadığı sıradan Pauli grubunu genelleyen bir grup. Genelleştirilmiş Pauli operatörlerinin denklemi aşağıda verilmiştir:

$$U_{nm} = X^n Z^m \tag{3.3}$$

Bu ifadede $n, m = 0, 1, 2, \dots, (d-1)$. Operatörler U_{nm} üniterdir. Kütritler için, X^1, X^2, Z^1 ve Z^2 'nin sırasıyla X_1, X_2, Z_1 ve Z_2 'ye karşılık geldiği söylenebilir. Bunlarla ilgili ayrıntılı bilgi bölüm 2.4' te verilmiştir. Denklem 3.3 e göre kütritler için dokuz tane genelleştirilmiş Pauli operatörlerinin matris temsilleri Tablo 3.1'deki gibi oluşturulabilir. Bu dokuz operatör, üçlü sistemler için kuantum hata düzeltme kodlarında hata operatörleri olarak kullanılır.

Tablo 3.1. Kütritler için genelleştirilmiş Pauli operatörleri

$U_{00} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$U_{01} = Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix}$	$U_{02} = Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$
$U_{10} = X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{11} = X_1 Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix}$	$U_{12} = X_1 Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \end{pmatrix}$
$U_{20} = X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{21} = X_2 Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{22} = X_2 Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

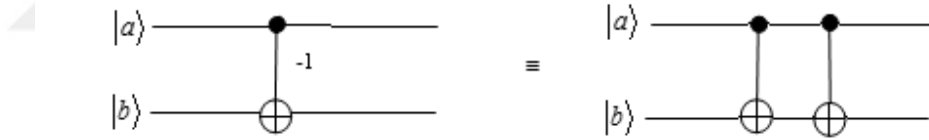
3.3. Kütritlerde Özdeşlikler

Basit matris çarpımıyla, kubitler için $HZH \equiv HZH^{-1} \equiv X$ ve $HZH \equiv H^{-1}ZH^{-1} \equiv X$ özdeşlikleri yazılabilir. Ancak kütritler için durum farklıdır. Çünkü Hadamard kapısının tersi kendisine eşit değildir. Ayrıca iki tür X-Pauli ve Z Pauli operatörleri vardır. Buna göre kütritlerde aşağıdaki özdeşlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 HZ_1 H^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
HZ_2H^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & w^2 & w \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X_1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Küditlerde ($d \geq 3$) H_d ve $CNOT_a(d)$ kuantum mantık kapılarının tersleri kendilerine eşit olmadığını biliyoruz. Bu durum bölüm 2’de ele alınmıştır. Genel olarak $CNOT_a(d)$ ile $CNOT_a^{-1}(d)$ arasında $CNOT_a^{-1}(d) \equiv CNOT_a^{d-1}(d)$ özdeşliği geçerlidir. Küditlerde ($d=3$) bu özdeşlik $CNOT_a^{-1}(3) \equiv CNOT_a^2(3)$ olarak yazılır. Bu özdeşlik Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Küditlerde $CNOT_a^{-1}(3)$ ile $CNOT_a^2(3)$ arasındaki özdeşlik

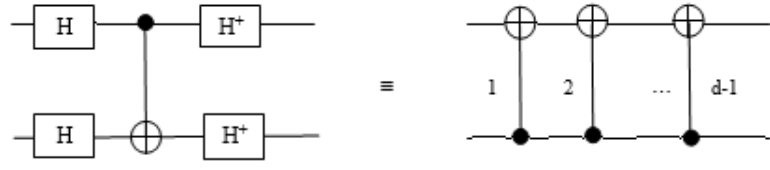
İki küditlik $CNOT_a(d)$ ve $CNOT_b(d)$ arasında Şekil 3.3’te verildiği gibi:

$$(H_d \otimes H_d) CNOT_a(d) (H_d^{-1} \otimes H_d^{-1}) \equiv CNOT_b^{d-1}(d) \tag{3.6}$$

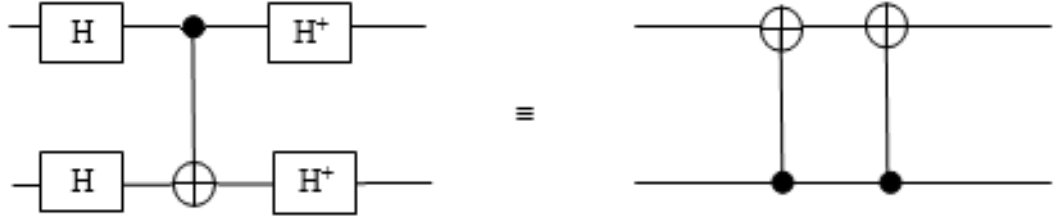
şeklinde bir özdeşlik yazılabilir (Terzi, 2019). Bu özdeşliğin küditlere uygulanması:

$$(H_3 \otimes H_3) CNOT_a(3) (H_3^{-1} \otimes H_3^{-1}) \equiv CNOT_b^2(3) \tag{3.7}$$

olarak yazılır. Küditler için bu özdeşlik Şekil 3.4’de verilmiştir (Terzi, 2019).



Şekil 3.3. Küditlerde CNOT lar arasındaki özdeşlik (Terzi, 2019)



Şekil 3.4. Kütritlerde *CNOT* lar arasındaki özdeşlik (Terzi, 2019)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Kuantum sistemleri, doğaları gereği çok değerlidir ve çok değerli kuantum bilgisayarlar, bazı kriptografik protokollerde (Bechmann-Pasquinucci, 2000) arama algoritmalarında (Wong, 2015) ve makine öğreniminde (Adhikary, 2020) ikili benzerlerinden daha iyi performans gösterebilir. Çok değerli sistemler için QECC, kübit sistemleri için QECC yapısından doğrudan taşınabilir (Chau, 1997). Bildiğimiz kadarıyla, daha düşük boyutlu bir sistemden hareketle, belirli bir yüksek boyutlu kuantum sistemi için açıkça daha verimli QECC oluşturmanın mümkün olup olmadığı bilinmemektedir. Ancak daha yüksek boyutlu sistemler için kuantum hata düzeltme kodu, genel olarak, doğrudan kübit sistemleri kodlarından oluşturulabilir.

Kuantum hata düzeltme kodlarının (QECC) çoğu, iki boyutlu alt sistemlerden oluşan kuantum sistemleri için oluşturulmuştur (La Guardia, 2020). Bu çalışmada kübit yerine kütrit kullanılacaktır. Üçlü bir kuantum sistemi (kütrit), en basit çok değerli sistemdir. Kuantum üçlü sistemin gürültülü ortamda pratik uygulaması için, sistemdeki hataları düzeltmek çok önemlidir. Literatürde, kübitlerde hata düzeltmesi için 9-kübit, 7-kübit ve 5-kübit kodları mevcuttur. Bununla birlikte, bildiğimiz kadarıyla, üçlü kuantum sistemleri için hata düzeltme kodları ile ilgili az çalışma vardır. Daha yüksek boyutlu hata düzeltme için girişimlerde bulunulmuş, ancak bunlar ya $(2*2)$ boyutlu hataları ya da $(d*d)$ boyutlu hataları dikkate almışlardır. Bunlarla ilgili hiçbir açık devre sunulmamıştır. Bu çalışmada, $(3*3)$ boyutlu hataları göz önünde bulundurarak kütritlerin kuantum hata düzeltmesi için farklı kuantum hata düzeltme kodları incelenmiştir. Bunlar üç kütritlik kuantum hata düzeltme, dokuz kütritlik kuantum hata düzeltme ve beş kütritlik kuantum hata düzeltme kodlarıdır.

4.1. Üç Kütritlik Kuantum Hata Düzeltme Kodları

4.1.1. Üç Kütritlik Trit-Çevirme Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Trit-çevirme hatalarını düzeltmek için kullanılabilecek üç-kütrit trit-çevirme kodu fikri, başlangıçta ilgilendiğimiz hata modeli trit-çevirme kanalıdır. Bu kanala döngüsel (kaydırmalı) kanal denir. Üçlü sistemler için, iki tür kaydırma mümkündür - saat yönünde kaydırma $X_1(0 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$ ve saat yönünün tersine kaydırma $X_2(0 \leftarrow 1 \leftarrow 2)$. Bu kod için dikkate alınan hata modeli aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon = \delta \mathbf{I}_3 + \sum_{i=1}^2 \mu_i X_i \quad (4.1)$$

Bu ifadede $\mathbf{I}_3$ (3×3) birim matris ve X_i trit- çevirme hatalarıdır. Saat yönünde kaydırma ve saat yönünün tersine kaydırma hataları, sırasıyla aşağıdaki gibi $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$ durumuna etki eder:

$$X_1|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|0\rangle \quad (4.2)$$

$$X_2|\psi\rangle = \alpha|2\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|1\rangle \quad (4.3)$$

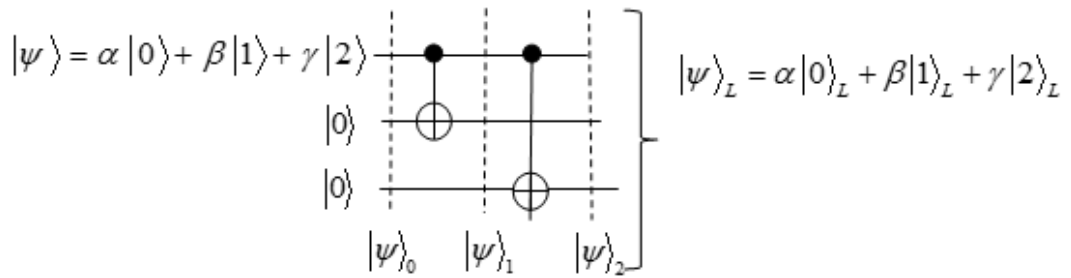
Üç kütrit trit çevirme kodu, yardımcı kütritlerin eklenmesi ve her mantıksal kütritin üç fiziksel kütritten oluşan bir kod sözcüğü ile kodlanmasıyla elde edilir. Başka bir deyişle, bu kodun kodlanması, $|0\rangle \rightarrow |000\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |111\rangle$ ve $|2\rangle \rightarrow |222\rangle$ eşleşmeleriyle olur. Bu kodlama işlemini, durumu daha büyük $3^3 = 27$ boyutlu bir uzayın 3 boyutlu bir alt uzayına indirgenmesi olarak düşünebiliriz. Üç kütritlik kod için kodlama prosedürünü gerçekleştiren bir devre Şekil 4.1'de gösterilmektedir. Bu şekilde adım adım gidildiği zaman

$$|\psi\rangle_0 = |\psi\rangle|00\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle \quad (4.4)$$

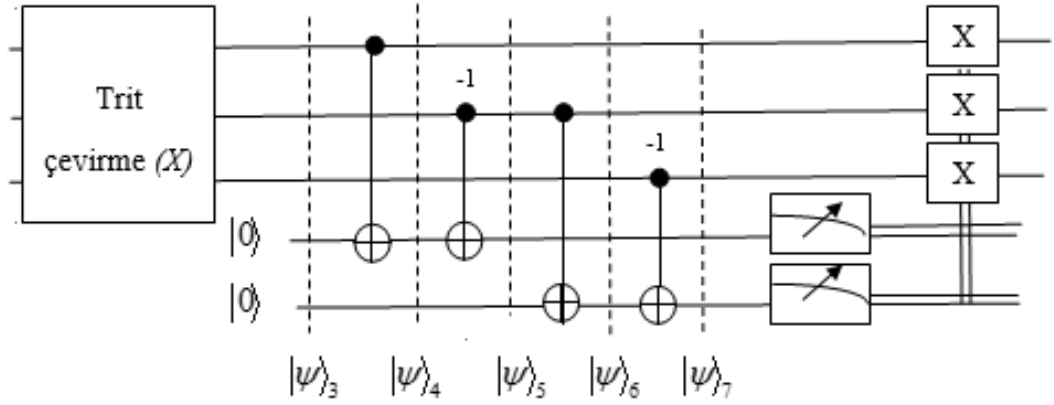
$$|\psi\rangle_1 = \alpha|000\rangle + \beta|110\rangle + \gamma|220\rangle \quad (4.5)$$

$$|\psi\rangle_2 = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L + \gamma|2\rangle_L = |\psi\rangle_L \quad (4.6)$$

olur.



Şekil 4.1. Üç kütritlik trit-çevirmeli kodlama devresi



Şekil 4.2. Üç kütritlik trit-çevirmeli hata algılama ve düzeltme devresi

Şekil 4.2’de gösterildiği gibi kütritlerin hata düzeltilmesi, 2. bölümde kubitler için gördüğümüzle aynı olacak şekilde iki adımdan oluşur. İlk adım, başlangıçta her ikisi de $|0\rangle$ durumunda olan iki ek yardımcı kütrit gerektiren hata algılama adımıdır. Her iki yardımcı kütrit, başlangıçtaki üç kütrit tarafından kontrol edilen $CNOT(3)$ ve $CNOT(3)^{-1}$ kapı çiftleri tarafından hedeflenir. $CNOT(3)$ ve $CNOT(3)^{-1}$ kapıları uygulandıktan sonra her yardımcı ölçülür ve yardımcı cihazlardaki ölçümlerin sonuçları hata sendromunu belirler. Tablo 4.1’de verilen durumlara göre hata olayını belirleriz.

Kütrit durumları için algılama sürecinin nasıl çalıştığını görelim. Saat yönünün tersine kayma hatasının ilk kütritte olduğunu varsayarsak hatalı durum

$$|\psi\rangle_E = \alpha|200\rangle + \beta|011\rangle + \gamma|122\rangle \quad (4.7)$$

olur. Hata belirleme adımlarıyla

$$|\psi\rangle_3 = |\psi\rangle_E |00\rangle = \alpha|200\rangle|00\rangle + \beta|011\rangle|00\rangle + \gamma|122\rangle|00\rangle \quad (4.8)$$

$$|\psi\rangle_4 = \alpha|200\rangle|20\rangle + \beta|011\rangle|00\rangle + \gamma|122\rangle|10\rangle \quad (4.9)$$

$$|\psi\rangle_5 = \alpha|200\rangle|20\rangle + \beta|011\rangle|20\rangle + \gamma|122\rangle|20\rangle \quad (4.10)$$

$$|\psi\rangle_6 = \alpha|200\rangle|20\rangle + \beta|011\rangle|21\rangle + \gamma|122\rangle|22\rangle \quad (4.11)$$

$$|\psi\rangle_7 = \alpha|200\rangle|20\rangle + \beta|011\rangle|20\rangle + \gamma|122\rangle|20\rangle \quad (4.12)$$

elde edilir. Tablo 4.1'e göre sendrom ölçümü, ilk kütritte hatanın oluştuğunu gösteren $M_1=2$ and $M_2=0$ sonucunu verir. İkinci adım, hata kurtarma adımındır. Burada ilk kütrite X_1^1 işlemini uygulayarak hatasız durumuna geri çevrilir:

$$X_1^1|\psi\rangle_E = \alpha X_1^1|200\rangle + \beta X_1^1|011\rangle + \gamma X_1^1|122\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \quad (4.13)$$

Tablo 4.1. Üç kütritik trit çevirme kodu arama tablosu

Bozuk kütrit	Hata operatörü	Kütrit durumu	M_1	M_2	Düzeltilme operatörü
Hata yok	$I \otimes I \otimes I$	$\alpha 000\rangle + \beta 111\rangle + \gamma 222\rangle$	0	0	$I \otimes I \otimes I$
1. kütrit	$X_1 \otimes I \otimes I$	$\alpha 100\rangle + \beta 211\rangle + \gamma 022\rangle$	1	0	$X_2 \otimes I \otimes I$
2. kütrit	$I \otimes X_1 \otimes I$	$\alpha 010\rangle + \beta 121\rangle + \gamma 202\rangle$	2	1	$I \otimes X_2 \otimes I$
3. kütrit	$I \otimes I \otimes X_1$	$\alpha 001\rangle + \beta 112\rangle + \gamma 220\rangle$	0	2	$I \otimes I \otimes X_2$
1. kütrit	$X_2 \otimes I \otimes I$	$\alpha 200\rangle + \beta 011\rangle + \gamma 122\rangle$	2	0	$X_1 \otimes I \otimes I$
2. kütrit	$I \otimes X_2 \otimes I$	$\alpha 020\rangle + \beta 101\rangle + \gamma 212\rangle$	1	2	$I \otimes X_1 \otimes I$
3. kütrit	$I \otimes I \otimes X_2$	$\alpha 002\rangle + \beta 110\rangle + \gamma 221\rangle$	0	1	$I \otimes I \otimes X_1$

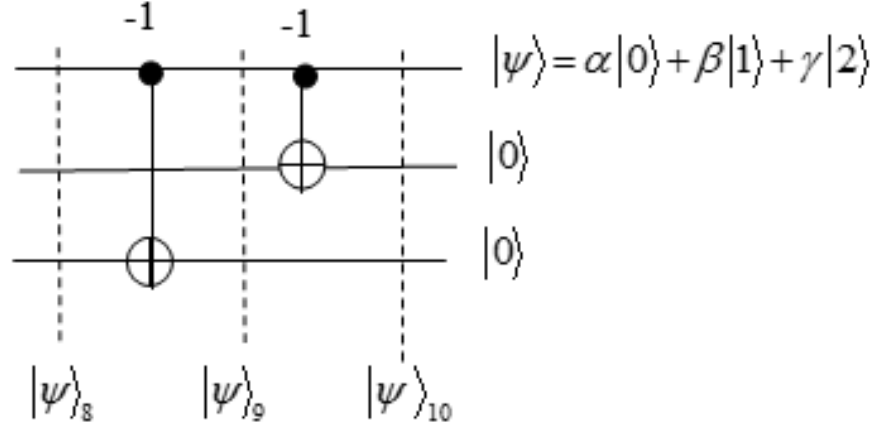
Şekil 4.3'te gösterildiği gibi, son adımda kodlamanın kaldırılması gerçekleştirilmektedir. Kütritlerde CNOT kapılarını tersi kendilerine eşit olmadığı için kodlamanın çözülmesi $CNOT^{-1}(3)$ kullanılarak yapılır. Böylece:

$$|\psi\rangle_8 = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \quad (4.14)$$

$$|\psi\rangle_9 = \alpha|000\rangle + \beta|110\rangle + \gamma|220\rangle \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{10} &= \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle \\ &= \alpha|0\rangle|00\rangle + \beta|1\rangle|00\rangle + \gamma|2\rangle|00\rangle = |\psi\rangle|00\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

olur. Üç kütritik trit çevirme kuantum hata düzeltme işleminin başarılı bir şekilde uygulandığı bir örnekle gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Üç kütritlik çevirmeli kod çözme devresi

4.1.2. Üç Kütritlik Faz-Çevirme Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Kütrit'ler, trit-çevirme (X) hataları dışında faz çevirme (Z) hatalarına da maruz kalabilirler. Bu kodun hata modeli şu şekilde temsil edilir:

$$\mathcal{E} = \delta \mathbf{I}_3 + \sum_{j=1}^2 \eta_j Z_j \quad (4.17)$$

Bu ifadede $\mathbf{I}_3$ (3×3) birim matrisi ve Z_j faz çevirme hatalarıdır. Bu kodda iki tür faz çevirme hatası Z_1 ve Z_2 mümkündür. Bu faz çevirme hatalarının hatasız durum $|\psi\rangle$ üzerindeki etkisi matematiksel olarak şu şekilde temsil edilebilir:

$$Z_1 |\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta c |1\rangle + \gamma c^2 |2\rangle \quad (4.18)$$

$$Z_2 |\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta c^2 |1\rangle + \gamma c |2\rangle \quad (4.19)$$

Bölüm 2'den, bu hata modeline, trit-çevirme hata modeline benzer şekilde faz çevirme kanalı diyebileceğimizi biliyoruz. Kübitler için, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ temelindeki bir faz hatası

$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ve $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ olan $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ temelindeki bir bit hatasına

benzerdir. $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 'ın Hadamard dönüşümü ile elde edilir. Bununla birlikte, bir kütritte, üç temel durum olduğundan, bir kübit sistemindeki Hadamard ile benzer özelliklere sahip değildir. Hadamard kapısının $|0\rangle$, $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ durumlarına

uygulanması sırasıyla $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$, $|/\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)$ ve

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)$ durumlarını üretir. Bu nedenle, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ temel

kübitlerin bit çevirme durumu, üç boyutlu sistemlerde geçerli değildir. Üç kütritlik faz çevirme kodu için kodlama prosedürünü gerçekleştiren bir devre Şekil 4.4'da gösterilmektedir. Bu şekilde gösterilen üç kütrit faz çevirmeli kodlama devresi, Şekil 4.1'da gösterilen üç-kütrit trit-çevirme kodlayıcı ve ardından temel dönüştürmeyi gerçekleştirmek için üç Hadamard mantık kapısı kullanılarak uygulanabilir:

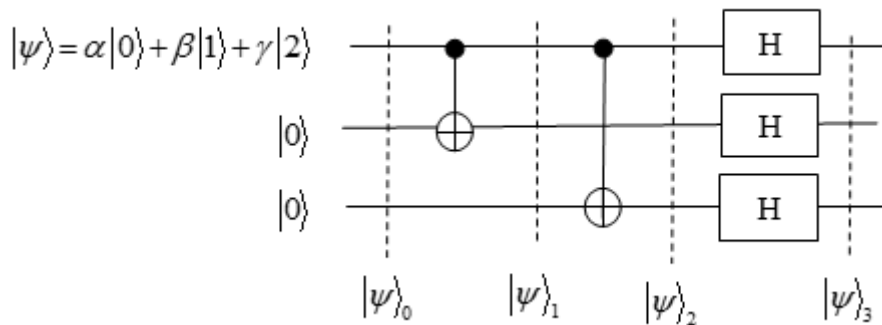
$$|\psi\rangle_0 = |\psi\rangle|00\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle \quad (4.20)$$

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|000\rangle + \beta|110\rangle + \gamma|220\rangle \quad (4.21)$$

$$|\psi\rangle_2 = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_3 &= \alpha \frac{(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)}{\sqrt{3}} \\ &+ \beta \frac{(|0\rangle + c|1\rangle + c^2|2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + c|1\rangle + c^2|2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + c|1\rangle + c^2|2\rangle)}{\sqrt{3}} \\ &+ \gamma \frac{(|0\rangle + c^2|1\rangle + c|2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + c^2|1\rangle + c|2\rangle)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(|0\rangle + c^2|1\rangle + c|2\rangle)}{\sqrt{3}} \\ &= \alpha|+++ \rangle + \beta|/// \rangle + \gamma|--- \rangle = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L + \gamma|2\rangle_L = |\psi\rangle_L \end{aligned} \quad (4.23)$$

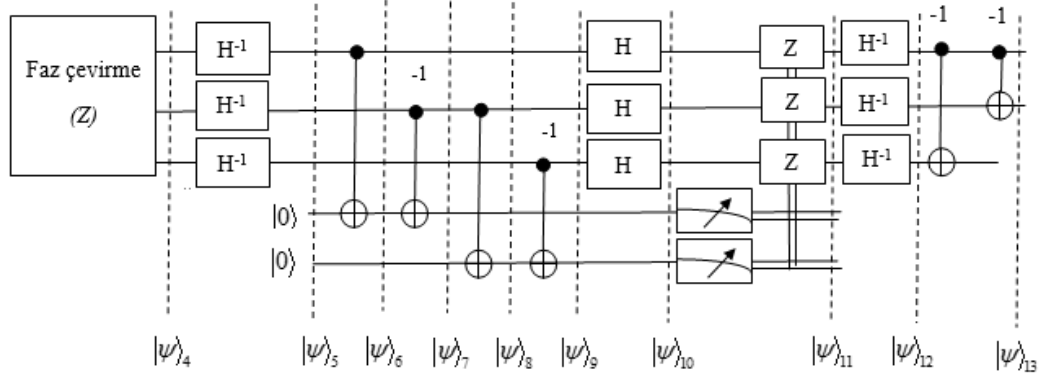
Yani $|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$, $|1\rangle \rightarrow |/// \rangle$, ve $|2\rangle \rightarrow |--- \rangle$ olarak kodluyoruz.



Şekil 4.4. Üç kütritlik faz çevirmeli kod kodlama devresi

Şekil 4.5'ta gösterilen üç kütrit faz çevirme kodunun hata düzeltme adımı, kübitlerinkinden bazı farklılıklar gösterir. Üçlü sistemlerin temeli Hadamard

temelinden hesaplama temeline dönüştürmesinde Hadamard kapısının tersi H^{-1} 'i kullanırız.



Şekil 4.5. Üç kütritlik faz çevirme kodunun hata düzeltme ve kod çözme devresi

Şimdi bu kod için hata düzeltme işleminin nasıl çalıştığını görelim. Bir hatanın ikinci kütriti bozduğunu (Z_1) varsayalım:

$$|\psi\rangle_E = \alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+-\rangle = |\psi\rangle_4 \quad (4.24)$$

olur. Daha sonra

$$|\psi\rangle_5 = (\alpha|010\rangle + \beta|121\rangle + \gamma|202\rangle) \quad (4.25)$$

$$|\psi\rangle_6 = \alpha|010\rangle|00\rangle + \beta|121\rangle|10\rangle + \gamma|202\rangle|20\rangle \quad (4.26)$$

$$|\psi\rangle_7 = \alpha|010\rangle|20\rangle + \beta|121\rangle|20\rangle + \gamma|202\rangle|20\rangle \quad (4.27)$$

$$|\psi\rangle_8 = \alpha|010\rangle|21\rangle + \beta|121\rangle|22\rangle + \gamma|202\rangle|20\rangle \quad (4.28)$$

$$|\psi\rangle_9 = \alpha|010\rangle|21\rangle + \beta|121\rangle|21\rangle + \gamma|202\rangle|21\rangle \quad (4.29)$$

$$|\psi\rangle_{10} = \alpha|++\rangle|21\rangle + \beta|+-\rangle|21\rangle + \gamma|-+-\rangle|21\rangle \quad (4.30)$$

$$|\psi\rangle_{11} = \alpha|+++ \rangle + \beta|/// \rangle + \gamma|--- \rangle \quad (4.31)$$

$$|\psi\rangle_{12} = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \quad (4.32)$$

$$|\psi\rangle_{13} = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle)|00\rangle \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada sendrom ölçümü, Tablo 4.2'de verilen arama tablosuna dayalı olarak $M_1 = 2$ ve $M_2 = 1$ sonucunu verir. Böylece hangi kütritin bozuk olduğunu belirleriz ve ardından hatalı olan i 'inci kütrit üzerine karşılık gelen Z_i kapısını uygularız. Örneğimizde, Z_2 uygulanmıştır.

Tablo 4.2. Üç kütrit faz çevirmeli kod Arama Tablosu

Bozuk kütrit	Hata operatörü	Kütrit durumu	M ₁	M ₂	Düzeltilme operatörü
Hata yok	$I \otimes I \otimes I$	$\alpha +++ \rangle + \beta /// \rangle + \gamma --- \rangle$	0	0	$I \otimes I \otimes I$
İlk kütrit	$Z_1 \otimes I \otimes I$	$\alpha /++ \rangle + \beta -/ \rangle + \gamma +-- \rangle$	1	0	$Z_2 \otimes I \otimes I$
İkinci kütrit	$I \otimes Z_1 \otimes I$	$\alpha +/+ \rangle + \beta /-/ \rangle + \gamma +-+ \rangle$	2	1	$I \otimes Z_2 \otimes I$
Üçüncü kütrit	$I \otimes I \otimes Z_1$	$\alpha ++/ \rangle + \beta /-+ \rangle + \gamma --+ \rangle$	0	2	$I \otimes I \otimes Z_2$
İlk kütrit	$Z_2 \otimes I \otimes I$	$\alpha -++ \rangle + \beta +/+ \rangle + \gamma /-+ \rangle$	2	0	$Z_1 \otimes I \otimes I$
İkinci kütrit	$I \otimes Z_2 \otimes I$	$\alpha +-+ \rangle + \beta /+/ \rangle + \gamma -/- \rangle$	1	2	$I \otimes Z_1 \otimes I$
Üçüncü kütrit	$I \otimes I \otimes Z_2$	$\alpha ++- \rangle + \beta //+ \rangle + \gamma ---/ \rangle$	0	1	$I \otimes I \otimes Z_1$

4.2. Dokuz Kütritlik Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Üç kütrit trit çevirme ve faz çevirme kodları, dokuz kütritten birinde trit çevirme veya faz çevirme hatalarını düzelten dokuz kütritlik bir kod elde etmek için birleştirilebilir. Ayrıca, aşağıda daha ayrıntılı olarak açıkladığımız gibi, aynı kütrit üzerinde eşzamanlı bir trit ve faz çevirmesini düzeltmemize de izin verir. Bu kod için düşünülen hata modeli şu şekilde verilmiştir:

$$\varepsilon = \mathcal{I}_3 + \sum_{i=1}^2 \mu_i X_i + \sum_{j=1}^2 \eta_j Z_j + \sum_{i,j} \xi_{i,j} Y_{ij} \quad (4.34)$$

Bu ifadede $Y_{ij} = X_i Z_j$ dir. Bu hata modelinde iki trit çevirme hatası (X_i), iki faz çevirme hatası (Z_j) ve dolayısıyla dört olası $Y_{ij} = X_i Z_j$ hata vardır.

Dokuz kütrit kod için kodlama, Şekil 4.6'da gösterildiği gibi iki aşamada çalışır. İlk olarak, her kütrit, üç kütritlik faz çevirme kodundaki gibi kodlanır:

$$|\psi\rangle_0 = |\psi\rangle|00\rangle|000\rangle|000\rangle \quad (4.35)$$

$$= \alpha|000\rangle|000\rangle|000\rangle + \beta|100\rangle|000\rangle|000\rangle + \gamma|200\rangle|000\rangle|000\rangle$$

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|000\rangle|000\rangle|000\rangle + \beta|100\rangle|100\rangle|000\rangle + \gamma|200\rangle|200\rangle|000\rangle \quad (4.36)$$

$$|\psi\rangle_2 = \alpha|000\rangle|000\rangle|000\rangle + \beta|100\rangle|100\rangle|100\rangle + \gamma|200\rangle|200\rangle|200\rangle \quad (4.37)$$

Hadamard mantık kapılarını 1., 4. ve 7. küritlere uygulayarak

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_3 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle \\
&+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle \\
&+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle
\end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. İkincisi, faz çevirmeli kod sözcüğündeki üç kütrit her biri, üç kütritlik trit-çevirme kodunda olduğu gibi bir üçlüler kümesi halinde kodlanır:

$$|\psi\rangle_4 = \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |110\rangle + |220\rangle)(|000\rangle + |110\rangle + |220\rangle)(|0\rangle + |110\rangle + |220\rangle) \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|110\rangle + w^2|220\rangle)(|000\rangle + w|110\rangle + w^2|220\rangle)(|000\rangle + w|110\rangle + w^2|220\rangle) \\
&+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|110\rangle + w|220\rangle)(|000\rangle + w^2|110\rangle + w|220\rangle)(|000\rangle + w^2|110\rangle + w|220\rangle)
\end{aligned}$$

$$|\psi\rangle_5 = \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \tag{4.40}$$

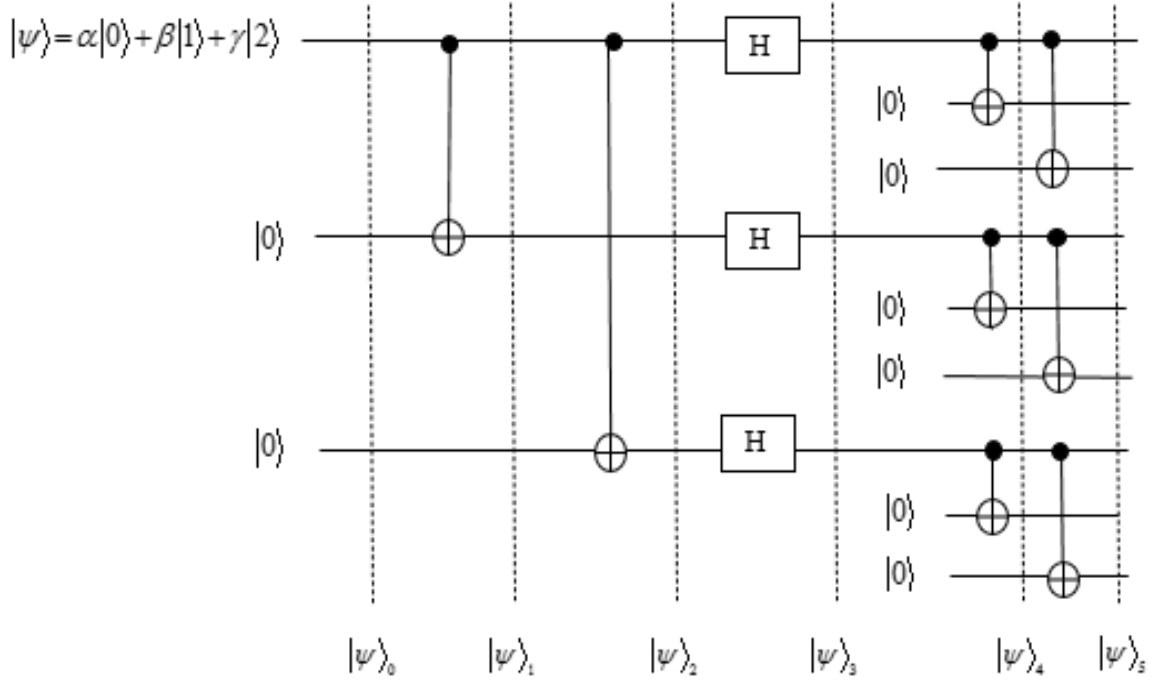
$$\begin{aligned}
&+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \\
&+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)
\end{aligned}$$

Böylece 3 temel kod sözcüğü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle_L = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \tag{4.41}$$

$$|1\rangle \rightarrow |1\rangle_L = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \tag{4.42}$$

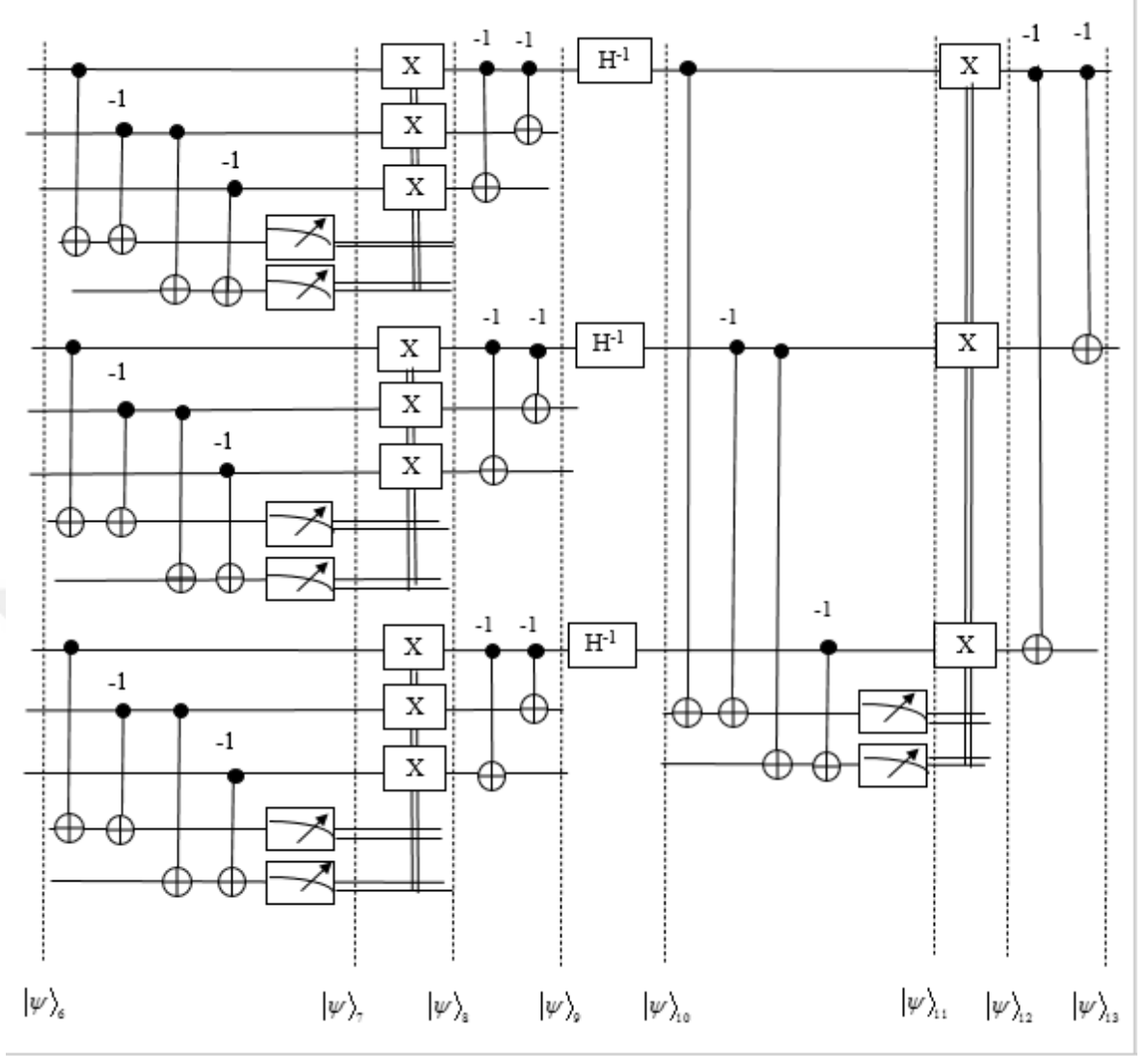
$$|2\rangle \rightarrow |2\rangle_L = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \tag{4.43}$$



Şekil 4.6. Dokuz kütürlük Shor kodlama devresi

Kütürlüklerde bir trit-çevirme ve faz-çevirme hatalarından bahsedebiliriz. Bunlar sırasıyla X (X_1 ve X_2) ve Z (Z_1 ve Z_2) dir. Ayrıca bunların kombinasyonu olan $Y = XZ$ den ortaya çıkan dört farklı hata olabilir. Şekil 4.7'de gösterilen dokuz kütürlük hata bilikleme, hata düzeltme ve kod çözme devresi iki aşamadan oluşur:

İlk aşama, üç adet üç kütürlük trit-çevirme dedektörü, kurtarma ve kod çözme devreleri ve ardından temel dönüştürme gerçekleştirmek için ters üç Hadamard kapısı içerir. İkinci aşama ek bir üç kütürlük trit-çevirme hata dedektörü, kurtarma ve kod çözme devresinden oluşur.



Şekil 4.7. Dokuz kütritlik hata bilirlleme, düzeltme ve kod çözme devresi

Şimdi, üçlü Shor kodunun herhangi bir tek kütrit üzerindeki faz çevirme ve trit çevirme hatalarını nasıl düzeltebileceğini açıklayacağız. Aslında burada yaptığımız analiz, üç kütrit kodda gösterilen ölçüm prosedürü ile benzerdir. Bu kodun başlangıç durumunun nasıl kurtarılabildiğini açıklığa kavuşturmak için bir örnek aşağıda verilmiştir.

- İlk Durum – Trit-çevirme hatalarını düzeltme: Yedinci kütritte bir hatanın (saat yönünde X_1 kayması) oluşturduğunu varsayalım. Hata durumu şu şekilde temsil edilir:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_6 = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|100\rangle + |211\rangle + |022\rangle) \\
 & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|100\rangle + w|211\rangle + w^2|022\rangle) \\
 & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|100\rangle + w^2|211\rangle + w|022\rangle)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Birinci aşamanın hata düzeltme işleminin sonucu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_7 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|00\rangle(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)|00\rangle(|100\rangle + |211\rangle + |022\rangle)|10\rangle \\ &+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|00\rangle(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)|00\rangle(|100\rangle + w|211\rangle + w^2|022\rangle)|10\rangle \\ &+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|00\rangle(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)|00\rangle(|100\rangle + w^2|211\rangle + w|022\rangle)|10\rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

Burada hata sendromu ölçümünün verdiği sonuç $M_5 = 1$ ve $M_6 = 0$ 'dır, Tablo 4.1'e göre yedinci kütritte saat yönünde kayma hatası olduğu anlamına gelir. Bu nedenle X_2 'yi bu kütrit hatasını orijinal durumuna geri döndürmek için uyguluyoruz:

$$\begin{aligned} X_2^7 |\psi\rangle_7 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) X_2^7(|100\rangle + |211\rangle + |022\rangle) \\ &+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) X_2^7(|100\rangle + w|211\rangle + w^2|022\rangle) \\ &+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) X_2^7(|100\rangle + w^2|211\rangle + w|022\rangle) \\ |\psi\rangle_8 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ &+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \\ &+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \end{aligned} \quad (4.46)$$

İlk aşamanın kod çözme sonucu aşağıdaki şekilde verilmiştir :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_9 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)(|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle \\ &+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)(|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle \\ &+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)(|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

İlk aşama işleminden sonra, birinci, dördüncü ve yedinci kütritler, ikinci aşamaya geçerler ve

$$|\psi\rangle_{10} = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \quad (4.48)$$

olur. İkinci aşama için, hata sendromu ölçümünün sonucu $M_7 = 0$ ve $M_8 = 0$ 'dır, bu da düzeltilmesi gereken faz çevirme hatası olmadığı anlamına gelir. Daha sonra

$$|\psi\rangle_{13} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle)|00\rangle \quad (4.49)$$

elde edilir. Trit-çevirme hatalarının, kütritlerin her üçlüsü için hata sendromu ölçümüyle tanımlandığını görüyoruz.

- İkinci Durum - Faz çevirme hatalarını düzeltme: Örneğin, ikinci kütritte bir faz çevirme hatasının (Z_2^2) oluştuğunu varsayalım. Tensör çarpımının özelliklerinden dolayı,

$$Z_2^2(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) = (|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \quad (4.50)$$

$$Z_2^2(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) = (|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \quad (4.51)$$

$$Z_2^2(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) = (|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \quad (4.52)$$

elde edilir. Başka bir deyişle, üç temel durum artık şu şekilde okunur:

$$|0\rangle_L \xrightarrow{\text{channel}} |0\rangle_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \quad (4.53)$$

$$|1\rangle_L \xrightarrow{\text{channel}} |1\rangle_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \quad (4.54)$$

$$|2\rangle_L \xrightarrow{\text{channel}} |2\rangle_6 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \quad (4.55)$$

Hata durumu şu şekilde verilir:

$$|\psi\rangle_6 = \alpha|0\rangle_6 + \beta|1\rangle_6 + \gamma|2\rangle_6 \quad (4.56)$$

Üç kütritlik üç bloğun ilk aşaması tarafından verilen her iki sendrom ölçümünün sonucu 0'dır. Bu nedenle düzeltilmesi gereken trit-çevirme hatası yoktur. Böylece

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_9 &= \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle \\ &+ \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle \\ &+ \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle \end{aligned} \quad (4.57)$$

elde edilir. 1., 4. ve 7. kütrite Hadamard kapısının tersi uygulandıktan sonra

$$|\psi\rangle_{10} = \alpha|200\rangle + \beta|011\rangle + \gamma|122\rangle \quad (4.58)$$

sonucu elde edilir. İkinci aşama hata bilirlenmesinde

$$|\psi\rangle_{11} = \alpha|200\rangle|20\rangle + \beta|011\rangle|20\rangle + \gamma|122\rangle|20\rangle \quad (4.59)$$

bulunur. Hata sendromu ölçümünün çıktıları $M_7 = 2$ ve $M_8 = 0$ 'dır. Dolayısıyla, Tablo 4.3'e göre faz değişiminin ilk üç kütritten birini bozduğunu biliyoruz. Faz çevirme hataları, ikinci aşamada ortaya çıkan paritelerle tanımlanır.

- Üçüncü Durum - Aynı kütrit üzerindeki faz çevirme ve trit çevirme hataları: Bu durum, öncekilerin doğrudan bir uygulamasıdır. Daha kesin olarak, oluşan faz çevirme hatasını düzeltmek için ikinci durumu uyguladıktan sonra kanalın trit çevirme eyleminden etkilenen kütriti kurtarmak için birinci durumda gösterilen prosedürü uygulamak yeterlidir. Bu sonuçlar doğrudur, çünkü her iki hata düzeltme süreci birbirinden bağımsızdır. Dördüncü kütritin hatalı olduğunu varsayalım (X_2Z_1), hata durumu şu şekilde temsil edilir:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_6 = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|200\rangle + w|011\rangle + w^2|122\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|200\rangle + w^2|011\rangle + w|122\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \\ & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|200\rangle + |011\rangle + |122\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \end{aligned} \quad (4.60)$$

İlk aşama için hata tespit süreci

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_7 = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)|00\rangle(|200\rangle + w|011\rangle + w^2|122\rangle)|20\rangle(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)|00\rangle \\ & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)|00\rangle(|200\rangle + w^2|011\rangle + w|122\rangle)|20\rangle(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)|00\rangle \\ & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)|00\rangle(|200\rangle + |011\rangle + |122\rangle)|20\rangle(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)|00\rangle \end{aligned} \quad (4.61)$$

olarak elde edilir. İlk aşamaya karşılık gelen parite ölçümü bize $M_3 = 2$ ve $M_4 = 0$ sonuçlarını verir. Bu da ikinci bloğun ilk kütritin X_2 hatasına sahip olduğunu gösterir.

Ve hatasız duruma geri dönmek için X_1 uygulanır:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_8 = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)X_1^1(|200\rangle + w|011\rangle + w^2|122\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)X_1^1(|200\rangle + w^2|011\rangle + w|122\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \\ & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)X_1^1(|200\rangle + |011\rangle + |122\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \\ = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle) \\ & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle)(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Birinci aşamanın kod çözme devresinin sonucu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_9 = & \frac{\alpha}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle \\ & + \frac{\beta}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)|00\rangle \\ & + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|00\rangle(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)|00\rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

Şimdi faz çevirme hatasını düzelten ikinci aşamanın sürecini göreceğiz. Bu aşamanın girdisi

$$|\psi\rangle_{10} = \alpha|010\rangle + \beta|121\rangle + \gamma|202\rangle \quad (4.64)$$

şeklinde temsil edilir. Daha sonra

$$|\psi\rangle_{11} = \alpha|010\rangle|21\rangle + \beta|121\rangle|21\rangle + \gamma|202\rangle|21\rangle \quad (4.65)$$

olur. Sendrom ölçümleri, ikinci üç kütritten birinde faz çevirme hatasının oluştuğunu gösteren $M_7 = 2$ ve $M_8 = 1$ sonucunu verir. X_2 operatörünü uygulayarak ikinci kütriti orijinaline geri döndürüyoruz:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{12} &= X_2^2 |\psi\rangle_{11} = \alpha X_2^2 |010\rangle + \beta X_2^2 |121\rangle + \gamma X_2^2 |202\rangle \\ &= \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|222\rangle \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ve son adım kod çözmedir ve sonuç olarak

$$|\psi\rangle_{13} = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle)|00\rangle \quad (4.67)$$

elde edilir. Böylece dokuz kütritlik hata düzeltme için önerilen devrelerin çalıştığı gösterilmiştir.

Tablo 4.3. Dokuz kütritlik ikinci aşama Arama Tablosu

Bozuk blok	Hata operatörü	M_1	M_2	Düzeltilme operatörü
Birinci blok	$Z_1 \otimes I \otimes I$	1	0	$X_2 \otimes I \otimes I$
İkinci blok	$I \otimes Z_1 \otimes I$	2	1	$I \otimes X_2 \otimes I$
Üçüncü blok	$I \otimes I \otimes Z_1$	0	2	$I \otimes I \otimes X_2$
Birinci blok	$Z_2 \otimes I \otimes I$	2	0	$X_1 \otimes I \otimes I$
İkinci blok	$I \otimes Z_2 \otimes I$	1	2	$I \otimes X_1 \otimes I$
Üçüncü blok	$I \otimes I \otimes Z_2$	0	1	$I \otimes I \otimes X_1$

4.3. Beş Kütritlik Kuantum Hata Düzeltme Kodu

Herhangi bir (3×3) boyutlu kuantum hatasını düzeltmek için beş kütrit kodunun hata modeli aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$\varepsilon = \delta I_3 + \sum_{i=1}^2 \eta_i X_i + \sum_{j=1}^2 \mu_j Z_j + \sum_{i,j} \xi_{ij} Y_{ij} \quad (4.68)$$

Burada I_3 (3×3) birim matrisi, X_i and Z_j sırasıyla (3×3) boyutlu trit ve faz hatalarıdır ve $Y_{ij} = X_i Z_j$.

Tablo 4.4. Beş kütritlik sabitleyici jeneratörleri

Operatör / kütrit	1	2	3	4	5
M_1	I	X^{-1}	Z^{-1}	Z	X
M_2	X^{-1}	Z^{-1}	Z	X	I
M_3	Z^{-1}	Z	X	I	X^{-1}
M_4	Z	X	I	X^{-1}	Z^{-1}

Genel beş-kudit kodunun $[[5, 1, 3]]_d$ sabitleyici jeneratörleri tüm boyutlarda aynı formu alır. Tablo 4.4' de gösterildiği gibi, genellikle geleneksel genelleştirilmiş Pauli operatörleri cinsinden sunulur.

Beş kütritlik kodun hata sendromunu teşhis etmek için bu genel dört karşılıklı iletişim operatörünü kullanacağız. Tek bir kütrit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$ 'deki kuantum bilgisi, bilgiyi tek bir hatadan korumak için beş kütrite dağıtılır. Beş kütritlik kod sözcükleri en açık ve kullanışlı şekilde M_i açısından tanımlanmıştır.

$$|0\rangle_L = (1 + M_1)(1 + M_2)(1 + M_3)(1 + M_4)|00000\rangle \quad (4.69)$$

$$|1\rangle_L = (1 + M_1)(1 + M_2)(1 + M_3)(1 + M_4)|11111\rangle \quad (4.70)$$

$$|2\rangle_L = (1 + M_1)(1 + M_2)(1 + M_3)(1 + M_4)|22222\rangle \quad (4.71)$$

Bu ifadede $M_i = M_i' + M_i''$ ve $M_i' = (M_i'')^{-1}$ örneğin $M_4' = Z_1 \otimes X_1 \otimes I \otimes X_2 \otimes Z_2$ ve $M_4'' = Z_2 \otimes X_2 \otimes I \otimes X_1 \otimes Z_1$ şeklinde yazılır.

Kodlanmış mantıksal kütrit $|\psi\rangle_L = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L + \gamma|2\rangle_L$ 'dir, burada:

$$\begin{aligned}
|0\rangle_L = & |00000\rangle + |02010\rangle + |01020\rangle + |20100\rangle + |10200\rangle \\
& + w|22110\rangle + w^2|12210\rangle + w^2|21120\rangle + w|11220\rangle + |01002\rangle \\
& + |02001\rangle + w^2|00012\rangle + w|01011\rangle + w|02022\rangle + w^2|00021\rangle \\
& + w|21102\rangle + w^2|22101\rangle + w^2|11202\rangle + w|12201\rangle + w^2|20112\rangle \\
& + w^2|21111\rangle + w^2|10212\rangle + w|11211\rangle + w|22122\rangle + |20121\rangle \\
& + w|12222\rangle + w|10221\rangle + |10020\rangle + |20010\rangle + w^2|12000\rangle \\
& + w|22020\rangle + w|11010\rangle + w^2|21000\rangle + w^2|00120\rangle + w|10110\rangle \\
& + w|20220\rangle + w^2|00210\rangle + w^2|02100\rangle + |12120\rangle + w^2|22200\rangle \\
& + w^2|02220\rangle + w^2|01110\rangle + w^2|11100\rangle + |21210\rangle + w^2|01200\rangle + \\
& + w|11022\rangle + w^2|21012\rangle + w^2|12021\rangle + w|22011\rangle + w^2|10002\rangle \\
& + w^2|20022\rangle + w^2|11001\rangle + w^2|21021\rangle + |12012\rangle + w^2|22002\rangle \\
& + w^2|10011\rangle + w^2|20001\rangle + w|01122\rangle + w|11112\rangle + |02121\rangle \\
& + w|12111\rangle + w|21222\rangle + w^2|01212\rangle + w|22221\rangle + w|02211\rangle \\
& + w|00102\rangle + |10122\rangle + w^2|01101\rangle + w^2|11121\rangle + |20202\rangle \\
& + w|00222\rangle + |21201\rangle + w|01221\rangle + w^2|02112\rangle + |12102\rangle \\
& + w^2|00111\rangle + w|10101\rangle + w|22212\rangle + w|02202\rangle + w^2|20211\rangle + |00201\rangle
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
|1\rangle_L = & |11111\rangle + |10121\rangle + |12101\rangle + |01211\rangle + |21011\rangle \\
& + w|00221\rangle + w^2|20021\rangle + w^2|02201\rangle + w|22001\rangle + |12110\rangle \\
& + |10112\rangle + w^2|11120\rangle + w|12122\rangle + w|10100\rangle + w^2|11102\rangle \\
& + w|02210\rangle + w^2|00212\rangle + w^2|22010\rangle + w|20012\rangle + w|01220\rangle \\
& + w^2|02222\rangle + |21020\rangle + w|22022\rangle + w|00200\rangle + |01202\rangle \\
& + w|20000\rangle + w|21002\rangle + |21101\rangle + |01121\rangle + w^2|20111\rangle \\
& + w|00101\rangle + w|22121\rangle + w^2|02111\rangle + w^2|11201\rangle + w|21221\rangle \\
& + w|01001\rangle + w^2|11021\rangle + w^2|10211\rangle + |20201\rangle + w^2|00011\rangle \\
& + w^2|10001\rangle + w^2|12221\rangle + w^2|22211\rangle + |02021\rangle + w^2|12011\rangle \\
& + w|22100\rangle + w^2|02120\rangle + w^2|20102\rangle + w|00122\rangle + w^2|21110\rangle \\
& + w^2|01110\rangle + w^2|22112\rangle + |02102\rangle + |20120\rangle + w^2|00110\rangle \\
& + w^2|21122\rangle + w^2|01112\rangle + w|12200\rangle + w|22220\rangle + |10202\rangle \\
& + w|20222\rangle + w|02000\rangle + |12020\rangle + w|00002\rangle + w|10022\rangle \\
& + |11210\rangle + w^2|21200\rangle + w^2|12212\rangle + w^2|22202\rangle + w|01010\rangle \\
& + w^2|11000\rangle + |02012\rangle + w^2|12002\rangle + w^2|10220\rangle + |20210\rangle \\
& + w^2|11222\rangle + w|21212\rangle + w|10020\rangle + w|10010\rangle + w^2|11022\rangle + |11012\rangle
\end{aligned} \tag{4.73}$$

ve

$$\begin{aligned}
|2\rangle_L = & |22222\rangle + |21202\rangle + |20212\rangle + |12022\rangle + |02122\rangle \\
& + w|11002\rangle + w^2|01102\rangle + w^2|10012\rangle + |00112\rangle + |20221\rangle \\
& + |21220\rangle + w^2|22201\rangle + w|20200\rangle + w|21211\rangle + |22210\rangle \\
& + w|10021\rangle + w^2|11020\rangle + w^2|00121\rangle + |01120\rangle + w|12001\rangle \\
& + w|10000\rangle + |02101\rangle + w|00100\rangle + w|11011\rangle + |12010\rangle \\
& + |01111\rangle + |02110\rangle + |02212\rangle + |12202\rangle + |01222\rangle \\
& + w|11212\rangle + w|00202\rangle + w^2|10222\rangle + w^2|22012\rangle + w|02002\rangle \\
& + w|12112\rangle + w^2|22102\rangle + w^2|21022\rangle + |01012\rangle + w^2|11122\rangle \\
& + w^2|21112\rangle + w^2|20002\rangle + w^2|00022\rangle + w^2|10102\rangle + w|20122\rangle \\
& + w|00211\rangle + w^2|10201\rangle + w^2|01210\rangle + |11200\rangle + w^2|02221\rangle \\
& + w^2|12211\rangle + w^2|00220\rangle + |10210\rangle + w|01201\rangle + w^2|11221\rangle \\
& + |02200\rangle + |12220\rangle + w|20011\rangle + w|00001\rangle + |21010\rangle \\
& + |01000\rangle + w|10111\rangle + |20101\rangle + |11110\rangle + |21100\rangle \\
& + |22021\rangle + w^2|02011\rangle + w|20020\rangle + w|00010\rangle + w|12121\rangle \\
& + w^2|22111\rangle + |10120\rangle + w^2|20110\rangle + w^2|21001\rangle + |01021\rangle \\
& + w^2|22000\rangle + w|02020\rangle + |11101\rangle + |21121\rangle + w|12100\rangle + w^2|22120\rangle
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Hata düzeltilmesi için mantıksal durumlar, herhangi bir hata için E , $\langle 0_L | E | 0_L \rangle = \langle 1_L | E | 1_L \rangle = \langle 2_L | E | 2_L \rangle$ olduğunu belirten Knill-Laflamme koşuluna (Knill ve diğerleri, 2000) uymalıdır. Bu kodlama için koşulun karşılanıp karşılanmadığı kolaylıkla kontrol edilebilir.

Bu kod için iki trit-çevirmeli X_i , iki faz-çevirmeli Z_j ve dolayısıyla dört olası $Y_{ij} = X_i Z_j$ hatası vardır. Bu nedenle, fiziksel kütritlerin her biri için sekiz olası hata durumu ve bir hatasız durum vardır. Bu beş kütrit kodu yalnızca tek bir hatayı düzeltebilir ve kodlanmış kütrit üzerinde birden fazla hata oluşursa başarısız olur. Bu kod, farklı kütritlerde meydana gelseler bile tek bir trit-çevirme ve faz-çevirme hatalarını birlikte düzeltemez.

Aşağıdaki kriterler karşılanırsa, bir dizi operatör $M_1, \dots, M_{n-1}$ 'nin kuantum durumu $|\psi\rangle$ 'yi stabilize ettiği söylenir (Gottesman, 1997):

- $M_i |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \forall i.$

- Tüm hatalar için E, $\exists j$ öyle ki $M_j(E|\psi\rangle) = -(E|\psi\rangle)$. (-1) aşaması ikili kuantum sistemleri içindir. Üçlü sistemler için bu durum $M_j(E|\psi\rangle) = w(E|\psi\rangle)$ veya $M_j(E|\psi\rangle) = w^2(E|\psi\rangle)$ olarak güncellenecektir.
- Farklı E ve E' hataları için, $\exists j,k$ öyle ki $M_j(E|\psi\rangle) \neq M_k(E'|\psi\rangle)$.
- $\forall i, j, [M_i, M_j] = 0$.

Tablo 4.5, beş kütritlik kodu için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri özetlemektedir. Tablo 4.6'da beş kütritlik kodun sendrom aramasının işlemleri verilmiştir. Tablo 4.7, tek hataları ve aynı kod için karşılık gelen sendromları göstermektedir. Alt simgeler, hataların konumlarını gösterir. Bir trit çevirme hatası X_i olarak belirtilir. Z_i bir faz çevirme hatasıdır. Y_i ise bir trit-çevirme ve bir faz-çevirme hatalarının kombinasyonudur.

Tablo 4.5. Beş kütritlik kod için her bir operatörle antikomüte eden tek hatalı operatörleri ve üreticileri

Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler	Hata	Jeneratörler
X_1^1	M_3, M_4	Z_1^1	M_2	$X_1^1 Z_1^1$	M_2, M_3, M_4	$X_1^1 Z_2^1$	M_2, M_3, M_4
X_1^2	M_2, M_3	Z_1^2	M_1, M_4	$X_1^2 Z_1^2$	M_1, M_2, M_3, M_4	$X_1^2 Z_2^2$	M_1, M_2, M_3, M_4
X_1^3	M_1, M_2	Z_1^3	M_3	$X_1^3 Z_1^3$	$M_1, M_2, M_3,$	$X_1^3 Z_2^3$	$M_1, M_2, M_3,$
X_1^4	M_1	Z_1^4	M_2, M_4	$X_1^4 Z_1^4$	M_1, M_2, M_4	$X_1^4 Z_2^4$	M_1, M_2, M_4
X_1^5	M_4	Z_1^5	M_1, M_3	$X_1^5 Z_1^5$	M_1, M_3, M_4	$X_1^5 Z_2^5$	M_1, M_3, M_4
X_2^1	M_3, M_4	Z_2^1	M_2	$X_2^1 Z_2^1$	M_2, M_3, M_4	$X_2^1 Z_1^1$	M_2, M_3, M_4
X_2^2	M_2, M_3	Z_2^2	M_1, M_4	$X_2^2 Z_2^2$	M_1, M_2, M_3, M_4	$X_2^2 Z_1^2$	M_1, M_2, M_3, M_4
X_2^3	M_1, M_2	Z_2^3	M_3	$X_2^3 Z_2^3$	$M_1, M_2, M_3,$	$X_2^3 Z_1^3$	$M_1, M_2, M_3,$
X_2^4	M_1	Z_2^4	M_2, M_4	$X_2^4 Z_2^4$	M_1, M_2, M_4	$X_2^4 Z_1^4$	M_1, M_2, M_4
X_2^5	M_4	Z_2^5	M_1, M_3	$X_2^5 Z_2^5$	M_1, M_3, M_4	$X_2^5 Z_1^5$	M_1, M_3, M_4

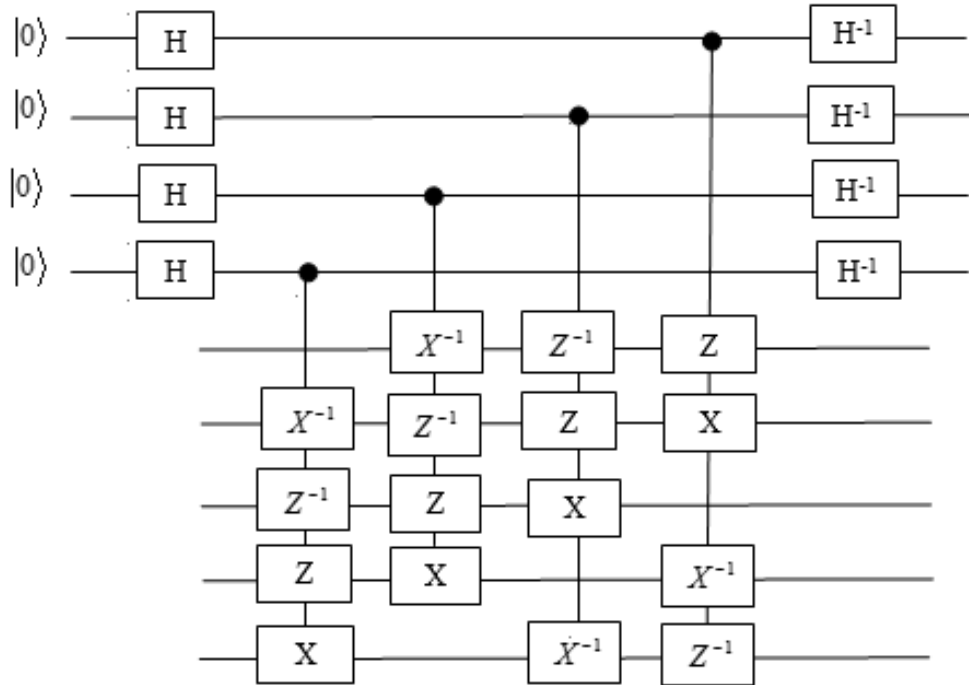
Tablo 4.6. Beş kütritlik kodun sendrom aramasının işlemleri

	M_1	M_2	M_3	M_4
X_1^1	1	1	w^2	W
X_1^2	1	w^2	w	1
X_1^3	w^2	w	1	1
X_1^4	W	1	1	1
X_1^5	1	1	1	w^2
X_2^1	1	1	w	w^2
X_2^2	1	w	w^2	1
X_2^3	w	w^2	1	1
X_2^4	w^2	1	1	1
X_2^5	1	1	1	w
Z_1^1	1	w	1	1
Z_1^2	w	1	1	w^2
Z_1^3	1	1	w^2	1
Z_1^4	1	w^2	1	W
Z_1^5	w^2	1	w	1
Z_2^1	1	w^2	1	1
Z_2^2	w^2	1	1	w
Z_2^3	1	1	w	1
Z_2^4	1	w	1	w^2
Z_2^5	w	1	w^2	1

Tablo 4.7. Beş kütritlik kodun tek hataları ve bunlara karşılık gelen sendromları

Hata	Sendrom	Hata	Sendrom	Hata	Sendrom	Hata	Sendrom
X_1^1	1200	Z_1^1	0010	$X_1^1 Z_1^1$	1210	$X_1^1 Z_2^1$	1220
X_1^2	0120	Z_1^2	2001	$X_1^2 Z_1^2$	2121	$X_1^2 Z_2^2$	1122
X_1^3	0012	Z_1^3	0200	$X_1^3 Z_1^3$	0212	$X_1^3 Z_2^3$	0112
X_1^4	0001	Z_1^4	1020	$X_1^4 Z_1^4$	1021	$X_1^4 Z_2^4$	2011
X_1^5	2000	Z_1^5	0102	$X_1^5 Z_1^5$	2102	$X_1^5 Z_2^5$	2201
X_2^1	2100	Z_2^1	0020	$X_2^1 Z_2^1$	2120	$X_2^1 Z_1^1$	2110
X_2^2	0210	Z_2^2	1002	$X_2^2 Z_2^2$	1212	$X_2^2 Z_1^2$	2211
X_2^3	0021	Z_2^3	0100	$X_2^3 Z_2^3$	0121	$X_2^3 Z_1^3$	0221
X_2^4	0002	Z_2^4	2010	$X_2^4 Z_2^4$	2012	$X_2^4 Z_1^4$	1022
X_2^5	1000	Z_2^5	0201	$X_2^5 Z_2^5$	1201	$X_2^5 Z_1^5$	1102

Tek fazlı bir hatayı düzeltmek için kütritlerin Hadamard esasına dönüştürülmesi gerekir. Bu nedenle, faz hatalarını düzeltmeye yönelik devrenin her kütrit için başında bir Hadamard kapısı H ve sonunda bir Hadamard kapısının tersi H^{-1} olması gerekir.



Şekil 4.8. Beş kütritlik kodun sendrom ölçümü için kuantum devresi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin bulgular ve tartışma bölümü üç ana kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda üç kütritlik trit çevirme ve faz çevirme kuantum hata düzeltme kodları incelenmiştir. Üç kütritlik trit çevirme kodu, trit çevirme hatalarını düzeltmektedir. Üçlü sistemler için, kaydırma hataları olarak adlandırılan iki tür trit-çevirme hatası mümkündür. Bu iki hata, saat yönünde kaydırma $X_1(0 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$ ve saat yönünün tersine kaydırma $X_2(0 \leftarrow 1 \leftarrow 2)$ hatalarıdır. Üç kütritlik trit çevirme kodu, yardımcı kütritlerin tanıtılması ve her mantıksal kütritin üç fiziksel kütritlik bir kod sözcüğü ile kodlanmasıyla elde edilir. Başka bir deyişle, bu kodun kodlanması, temel durumların, $|0\rangle \rightarrow |000\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |111\rangle$ ve $|2\rangle \rightarrow |222\rangle$ eşleştirmeleriyle yapılır. Bu kodun hata düzeltilmesi iki adımdan oluşur. İlk adım, iki ek yardımcı kütritin gerekli olduğu hata tespitidir. Başlangıçta ikisi de $|0\rangle$ durumundadır. Her iki yardımcı da, üç kod sözcüğü kütritin alt kümeleri tarafından kontrol edilen $CNOT(3)$ ve $CNOT(3)^{-1}$ kapı çiftleri tarafından hedeflenir. Yardımcı cihazlar üzerindeki ölçümlerin sonuçları hata sendromunu belirler ve Tablo 4.1'de verilen LUT'a dayanarak hata olayını tanımlarız. İkinci adım, hatanın tersini bozulmuş kütrite uyguladığımız hata kurtarmadır. Son adımda ise, kod çözme işlemi gerçekleştirilir. Bu işlem karşılık gelen kodlamadaki öğelerin sırasını basitçe tersine çevirerek yapılır. Üçlü sistemler için kod çözme adımı $CNOT(3)^{-1}$ kullanılarak yapılır.

Üç kütritlik faz çevirme koduyla, faz çevirme hataları düzeltilir. İki tür faz çevirme hatası Z_1 ve Z_2 vardır. Bu kod için, bir faz çevirme hatasını trit- çevirme hatasına dönüştürebiliriz. Bu da üç kütritlik trit çevirme kodunu faz çevirme hatalarını düzeltmek için uyarladığımız anlamına gelir. Spesifik olarak, faz çevirme

işleminde $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$, $|/\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w|1\rangle + w^2|2\rangle)$ ve

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + w^2|1\rangle + w|2\rangle)$ Hadamard temel durumları dikkate alınır. Faz çevirme

Z_1 'in etkisi, sırasıyla $|+\rangle$, $|/\rangle$ ve $|-\rangle$ durumlarını $|/\rangle$, $|-\rangle$, $|+\rangle$ durumlarına dönüştürür.

Ters dönüşüm için ise, faz çevirme Z_2 uygulanır. Yani, Hadamard bazında çalışırsak, faz çevirme hataları tıpkı trit çevirme hataları gibi davranır. Hadamard bazında

$|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$, $|1\rangle \rightarrow |/// \rangle$ ve $|2\rangle \rightarrow |--- \rangle$ kodlamaları kullanılır. Kodlama, hata tespiti ve kurtarma için gereken işlemler, yalnızca şimdi $\{|+\rangle, |/\rangle, |-\rangle\}$ bazına göre üç kütritlik trit çevirme kodunda olduğu gibi gerçekleştirilir. Üçlü sistemler için, Hadamard kapısı H'nin hesaplama temelinden Hadamard bazına bir temel değişikliği gerçekleştirirken, Hadamard kapısının tersi H^{-1} ise, Hadamard temelinden hesaplama bazına bir temel değişikliği gerçekleştirir. Tıpkı faz çevirme hatası modelinin Hadamard kapıları modeli tarafından konjuge edilen trit çevirme hatasına eşdeğer olması gibi.

Bulgular ve tartışma bölümünün ikinci kısmında dokuz kütritlik kuantum hata düzeltme kodu önerilerek uygulanmıştır. Üç kütritlik trit-çevirme ve faz-çevirme kodlarının birleşimi bize dokuz kütritten birindeki trit-çevirme veya faz-çevirme hatalarını düzelten dokuz-kütritlik kodu verir. Aynı zamanda aynı kütrit üzerinde eş zamanlı trit ve faz çevirme hatasını düzeltmemize de olanak tanır. Üçlü Shor kodunun kodlaması iki aşamada çalışır: İlk olarak, her bir kütrit, üç kütritlik faz çevirme kodunda olduğu gibi, $|0\rangle \rightarrow |+++ \rangle$, $|1\rangle \rightarrow |/// \rangle$ ve $|2\rangle \rightarrow |--- \rangle$ eşleştirmeleri yapılır. İkinci olarak, faz çevirme kod sözcüğündeki üç kütritin her biri, üç kütritlik trit-çevirme kodunda olduğu gibi bir üçlü kümede kodlanır:

$$|+\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle),$$

$$|/\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + w|111\rangle + w^2|222\rangle)$$

$$\text{ve } |-\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + w^2|111\rangle + w|222\rangle).$$

Shor'un dokuz kütrit hata düzeltme ve kod çözücü devresi iki aşamadan oluşur: İlk aşama, üç adet üç kütritlik trit-çevirme dedektörü, kurtarma ve kod çözücü devrelerini, ardından hesaplama temeline dönüştürmeyi gerçekleştirmek için üç Hadamard kapısının tersini içerir. Birinci aşamanın sendrom ölçümü, dokuz kütritten hangisinin hatalı olduğunu (trit-çevirme hataları) verir. İkinci aşama, ek bir üç kütrit trit-çevirme hata dedektörü, kurtarma ve kod çözücü devrelerini içerir. Faz çevirme hataları, ikinci aşamada ortaya çıkan paritelerle tanımlanır. Böylece, Shor kodunun modifikasyonu ile, hem trit hem de faz çevirme hatalarını düzeltmek için dokuz kütritlik hata düzeltme kodu ilk defa bu çalışmada uygulanmıştır.

Üçüncü kısımda beş kütritlik kuantum hata düzeltme kodu önerilmiştir. Bu kod iki trit-çevirmeli X_i , iki faz-çevirmeli Z_j ve dolayısıyla dört olası $Y_{ij} = X_i Z_j$ hatalarını düzeltebilir. Bu beş kütritlik kuantum hata düzeltme kodu yalnızca tek bir hatayı düzeltebilir. Beş kütritlik kod sözcükleri en açık ve kullanışlı şekilde M_i 'ler kullanarak elde edilir:

$$|0\rangle_L = (1+M_1)(1+M_2)(1+M_3)(1+M_4)|00000\rangle$$

$$|1\rangle_L = (1+M_1)(1+M_2)(1+M_3)(1+M_4)|11111\rangle$$

$$|2\rangle_L = (1+M_1)(1+M_2)(1+M_3)(1+M_4)|22222\rangle.$$

Beş kütritte hata oluştuğunda X_1, X_2, Z_1, Z_2 hataları üzerinde stabilizatörlerin etkisi Tablo 4.4'de gösterilmiştir. Bu kodun hataları algılaması için bu kodun stabilizatör jeneratörlerini kullandık.

Kübitlerde kuantum hata düzeltme konusunda oldukça fazla çalışma vardır. Ancak küditlerde kuantum hata düzeltme ile ilgili yok denecek kadar az çalışma vardır. Bu tez çalışmasında kütritler için bazı kuantum hata düzeltme kodları incelenmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda kütritler için 7-kütritlik ve yeni başka kuantum hata düzeltme kodları geliştirilebilir. Ayrıca kükuartlar ($d=4$) için kuantum hata düzeltme konusunda çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Adhikary, S., Dangwal, S., Bhowmik, D. (2020). Supervised learning with a quantum classifier using multi-level systems. *Quantum Information Processing*, 19(3), 1-12.
- Bechmann-Pasquinucci, H. and Peres, A. (2000). Quantum cryptography with 3-state systems. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3313–3316.
- Benioff, P. (1980). The computer as a physical system. *Journal of Statistical Physics* 22, 563–591.
- Chau, HF (1997). Correcting quantum errors in higher spin systems. *Physical Review A* , 55 (2), R839.
- Clark, S. (2006). Valence bond solid formalism for d-level one-way quantum computation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(11), 2701.
- Deutsch, D. (1985). Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. of the Royal Society A* 400, 97–117.
- Deutsch, DE. (1989). Quantum computational networks. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* , 425 (1868), 73-90.
- Devitt, S. J., Munro, W. J., Nemoto, K. (2013). Quantum error correction for beginners. *Reports on Progress in Physics*, 76(7), 076001.
- Djordjevic, I. (2012). *Quantum information processing and quantum error correction: an engineering approach* . Academic press.
- Feynman, R. (1982). Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics* 21, 467–488.
- Feynman, R. P. (1985). Quantum mechanical computers. *Optics news*, 11(2), 11-20.
- Gokhale, P., Baker, J. M., Duckering, C., Brown, N. C., Brown, K. R., Chong, F. T. (2019). Asymptotic improvements to quantum circuits via qutrits. In *Proceedings of the 46th International Symposium on Computer Architecture* (pp. 554-566).
- Gottesman, D. (1997). Stabilizer codes and quantum error correction. *arXiv preprint quant-ph/9705052*.
- Gottesman, D. (1998, February). Fault-tolerant quantum computation with higher-dimensional systems. In *NASA International Conference on Quantum Computing and Quantum Communications* (pp. 302-313)
- Gottesman, D. (2010, April). An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation. In *Quantum information science and its contributions to mathematics, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (Vol. 68, pp. 13-58).
- Grover, L. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: *Proc. of the 28th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 212–219.
- Kibler, M. R. (2008). Variations on a theme of Heisenberg, Pauli and Weyl. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(37), 375302.
- Knill, E., Laflamme, R., Viola, L. (2000). Theory of quantum error correction for general noise. *Physical Review Letters*, 84(11), 2525.
- La Guardia, G.G., (2020). *Quantum Error Correction: Symmetric, Asymmetric, Synchronizable, and Convolutional Codes.*: Springer Nature.
- Laflamme, R., Miquel, C., Paz, J. P., Zurek, W. H. (1996). Perfect quantum error correcting code. *Physical Review Letters*, 77(1), 198.

- Laflamme, R., Mosca, M. (2007). *An introduction to quantum computing*. Oxford University Press on Demand.
- Lidar, DA, Brun, TA (Eds.). (2013). Quantum error correction. Cambridge university press.
- Lloyd, S. (1995). Quantum-mechanical computers. *Scientific American* , 273 (4), 140-145.
- Majumdar, R., Basu, S., Ghosh, S., Sur-Kolay, S. (2018). Quantum error-correcting code for ternary logic. *Physical Review A*, 97(5), 052302.
- Marinescu, D. C. (2011). Classical and quantum information. Academic Press.
- Roffe J. (2019). Quantum error correction: An Introductory Guide. *Contemp. Phys.* 60(3). 226-245.
- Schumacher, B. (1995). Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4), 2738.
- Shor, P. W. 1994. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 124–34.
- Shor, P. W. 1995. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, 52(4): R2493–96.
- Shor, P. W. (1999). Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, 41(2), 303-332.
- Steane, A. M. (1996a). Simple quantum error-correcting codes. *Physical Review A*, 54(6), 4741.
- Steane, A. M. (1996b). Error correcting codes in quantum theory. *Physical Review Letters*, 77(5), 793-97.
- Steane, A. M. (1997). Active stabilization, quantum computation, and quantum state synthesis. *Physical Review Letters*, 78(11), 2252.
- Steane, A. M. (1998). Introduction to quantum error correction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 356(1743), 1739-1758.
- Terzi, S. 2019. Bazı spin sistemleri için kuantum devreleri ve uygulamaları, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 121s, Samsun.
- Viamontes, G. F. (2007). Efficient quantum circuit simulation (Vol. 68, No. 02).
- Williams, C. P. (2010). *Explorations in quantum computing*. Springer Science & Business Media.
- Wong, T. G. (2015). Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(43), 435304.

ÖZ GEÇMİŞ

HALA SAID Gabes'te (Tunus) doğdu. Ibn Charaf Lisesi'ni bitirdikten sonra Monastir Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi'nden 2017 yılında mezun oldu. 2019 yılında Fizik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başlayan Hala SAID, iyi derecede İngilizce bilmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2854-3635>

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

1. **Hala SAID, Azmi GENÇTEN (2021).** An investigation of quantum error correction for nine qutrit. 4th International virtual Conference on Physical Chemistry & Functional Materials (PCFM'21), 08-09 Nisan 2021, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye. (Oral Presentation).

Kazanılan Ödüller, Teşvikler ve Burslar

Türkiye Bursları

Yüksek Lisans programı